

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

**Mateus Vinicius Marcial**

**Não-comutatividade via estruturas simpléticas com aplicações em  
sistemas não lineares, mecânica clássica e cosmologia**

Juiz de Fora

2013

MATEUS VINICIUS MARCIAL

**Não-comutatividade via estruturas simpléticas com aplicações em sistemas não lineares, mecânica clássica e cosmologia**

Tese apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

Orientador:

Prof. Dr. Wilson Oliveira

Co-orientador:

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho  
de Abreu

**JUIZ DE FORA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2013**

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Marcial, Mateus Vinicius.

Não-comutatividade via estruturas simpléticas com aplicações em sistemas não lineares, mecânica clássica e cosmologia / Mateus Vinicius Marcial. -- 2013.

168 f. : il.

Orientador: Wilson Oliveira

Coorientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2013.

1. Não-Comutatividade. 2. Mecânica Clássica NC. 3. Cosmologia. 4. Equação de Einstein NC. I. Oliveira, Wilson, orient. II. Abreu, Everton Murilo Carvalho de, coorient. III. Título.

*A Deus,  
a minha família,  
e aos meus amigos, razão da minha existência.*

*“Tudo vale a pena quando a alma não é pequena.” Fernando Pessoa*

# Agradecimentos

- Agradeço primeiro a Deus por minha existência.
- A minha família, meus pais, meus irmãos Marcos e Bruna, pelo incentivo, pela cooperação e pelas orações.
- Ao professor Dr. Wilson Oliveira (orientador) pela calma, confiança e competência.
- Ao professor Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pela co-orientação.
- Ao professor Dr. Gil de Oliveira Neto pela enorme cooperação, principalmente no que diz respeito à solucionar minhas dúvidas em cosmologia.
- Aos professores pela participação na minha banca e pelas suas sugestões finais.
- À Coordenação do doutorado em física da UFJF juntamente com todos os professores do programa.
- Aos meus colegas, especialmente a José Amâncio pela enorme cooperação e a todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada como estudante.
- À FAPEMIG pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

# Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	ix
<b>1 Versão não-comutativa do Modelo Sigma Não-linear <math>O(3)</math> e do Modelo de Skyrme <math>SU(2)</math></b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Formalismo simplético . . . . .	3
1.2.1 Introdução à notação simplética . . . . .	4
1.2.2 Formalismo simplético com vínculos e sem vínculos . . . . .	4
1.3 Quantização por deformação . . . . .	7
1.4 Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade . . . . .	10
1.5 Modelo Sigma Não-linear $O(3)$ . . . . .	13
1.5.1 Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade aplicado ao Modelo Sigma Não-linear (MSNL) $O(3)$ . . . . .	14
1.6 Versão não-comutativa do Modelo de Skyrme $SU(2)$ . . . . .	19
1.7 Conclusão . . . . .	24

<b>2</b>	<b>Segunda lei de Newton em um espaço de fase não-comutativo estendido invariante sob rotações</b>	<b>26</b>
2.1	Introdução . . . . .	27
2.2	Construção da segunda lei de Newton invariante sob rotações . .	29
2.3	Segunda lei de Newton NC invariante sob rotações aplicada ao oscilador harmônico . . . . .	35
2.3.1	Análise da periodicidade da solução do oscilador harmônico NC . . . . .	37
2.3.2	Oscilador harmônico não-comutativo bidimensional . . .	37
2.4	Conclusão . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Modelo cosmológico clássico não-comutativo para fluidos perfeitos</b>	<b>51</b>
3.1	Introdução . . . . .	51
3.2	Revisão do modelo de Friedmann-Robertson-Walker(FRW) . . .	52
3.3	Versão NC do modelo de FRW . . . . .	63
3.4	Análise das equações de Friedmann-Lemaître NCs . . . . .	74
3.5	Estimativa do parâmetro NC $\beta$ . . . . .	85
3.6	Associação das correções NCs com a matéria escura . . . . .	88
3.6.1	Parâmetro desaceleração $q(z)$ não-comutativo . . . . .	90
3.7	Conclusão . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Conclusão Geral</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>98</b>
A.1	Construção da matriz simplética do Modelo Sigma Não-Linear $O(3)$ NC . . . . .	98

A.2	Cálculo da matriz simplética da versão NC do Modelo de Skyrme $SU(2)$ . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Apêndice</b>	<b>108</b>
B.1	Cálculo dos tensores $A_{\xi_i}$ da Lagrangiana de primeira ordem do Modelo de Skyrme $SU(2)$ . . . . .	108
<b>C</b>	<b>Apêndice</b>	<b>113</b>
C.1	Gráficos das soluções das equações Friedmann-Lemaître corrigidas	113
C.1.1	Aproximação não-relativística, poeira pura . . . . .	114
C.1.2	Gás ultra-relativístico, radiação pura . . . . .	124
C.1.3	Cordas cósmicas, energia escura, matéria rígida e paredes de domínio . . . . .	134
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>154</b>

# Resumo

Neste trabalho é estudado uma maneira de se introduzir não-comutatividade em alguns sistemas físicos via estruturas simpléticas para se investigar as propriedades de espaços não-comutativos (NC). Inicialmente, foi discutido em detalhes uma maneira sistemática de se introduzir não-comutatividade baseado no formalismo de Faddeev-Jackiw denominada Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC). Este formalismo foi usado para se obter uma versão NC para o Modelo Sigma Não-linear  $O(3)$  e para o Modelo de Skyrme  $SU(2)$ . Posteriormente, uma segunda lei de Newton modificada que preserva a invariância rotacional foi obtida em um espaço de fase clássico estendido NC. Entre os principais efeitos da não-comutatividade na dinâmica de um oscilador harmônico tratado nesse espaço nota-se que a não-comutatividade induz uma perturbação estável no oscilador harmônico usual e que o oscilador pode até mesmo deixar de ser periódico dependendo da relação entre as frequências de oscilação da coordenada NC e do momento linear. Em seguida, considerando um espaço de fase com estrutura simplética não-comutativa e aplicando o (FSINC), as equações Friedmann-Lemaître corrigidas foram obtidas. As correções nas equações Friedmann-Lemaître podem ser associados com um fluido perfeito NC. Finalmente, usando as equações de Friedmann-Lemaître corrigidas, o parâmetro desaceleração NC pode ser determinado em termos do *redshift*. Dos valores existentes na literatura para o parâmetro densidade de energia do vácuo  $\Omega_\Lambda^0$  e para o *redshift* transição, estima-se que a ordem de grandeza do parâmetro densidade de matéria do fluido NC  $\Omega_\beta^0$  e do parâmetro NC  $\beta$  são iguais a  $0,052_{-0,159}^{+0,03}$  e  $\beta = -0,784_{-0,453}^{+2,398} \times 10^{-36} s^{-2}$ , respectivamente. Isso mostra que a não-comutatividade poderia ser responsável por até 8,2% da densidade de matéria do universo ou por um terço da matéria escura sem violar os valores na literatura para o *redshift* de transição.

**Palavras chaves:** Não-Comutatividade, Mecânica Clássica NC, Cosmologia, Equação de Einstein NC.

# Abstract

In this work we have studied how to introduce noncommutativity to some physical systems through the symplectic structures to investigate the properties of the noncommutative (NC) spaces. Initially, we discussed in details one systematic way to introduce noncommutativity, based on Faddeev-Jackiw formalism, called symplectic formalism for induction of noncommutativity (SFINC). This formalism was used to obtain NC versions of the SU(2) Skyrme model and O(3) nonlinear sigma model. After that, the rotational invariant noncommutative Newton's second law was written in the NC extended classical phase space. Among the main effects of noncommutativity in the dynamics of a harmonic oscillator treated in this space, we note that the noncommutativity induces a stable perturbation in the usual harmonic oscillator and the oscillator may even not be periodic depending on the ratio between the oscillation frequency of the position coordinate and the oscillation frequency of the NC coordinate. Subsequently, considering a phase space with NC symplectic structure and applying the SFINC we obtained the modified Friedmann-Lemaître equations, which have NC corrections. This correction can be interpreted as a NC perfect fluid, which would behave like dust during a period of radiation, preserving the law of conservation of energy. Finally, using the Friedmann-Lemaître equations the NC deceleration parameter  $q$  can be determined in terms of the redshift. From the values in literature for the vacuum-energy density parameter  $\Omega_\Lambda^0$  and the transition *redshift*, the range of acceptable values of the matter density parameter of NC fluid  $\Omega_\beta^0$  and the NC parameter  $\beta$  estimated are  $0,052_{-0,159}^{+0,03}$  and  $\beta = -0,784_{-0,453}^{+2,398} \times 10^{-36} s^{-2}$ , respectively. This result shows that the NC corrections could be responsible for up to 8.2% of the matter density of the universe, or a third of the dark matter, without violating the literature values of the transition *redshift*.

**Keywords:** Noncommutative, NC Classical Mechanics, Cosmology, NC Einstein equation.

# Introdução

Recentemente, muitos estudos dedicaram-se a investigar as propriedades de espaços não-comutativos (NC), a motivação por traz desses estudos são decorrentes de diversas áreas da física como renormalização [1], gravidade quântica [2], matéria condensada [3], teoria de cordas [4], etc. Buscando entender melhor os efeitos da não-comutatividade, neste trabalho são investigados, desde a construção à interpretação, as versões não-comutativas de alguns sistemas físicos de interesse via estruturas simpléticas. O primeiro capítulo revisa o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) e em seguida aplica-o para se obter uma versão NC para o Modelo Sigma Não-Linear (MSNL)  $O(3)$  e outra para o Modelo de Skyrme  $SU(2)$ . Para ambos modelos uma completa descrição Lagrangiana é apresentada. Dessa forma, um importante laboratório teórico representado por esses modelos pode ser ampliado para investigar algumas questões relevantes em física de campos e partículas na escala de Planck.

O segundo capítulo analisa as propriedades de um espaço de fase clássico com estrutura simplética consistente com as regras de comutação da mecânica quântica não-comutativa (MQNC) num espaço Hilbert estendido com simetria de rotação, onde o parâmetro NC é uma coordenada, recuperando a simetria de rotação. Este espaço possui, além dos operadores usuais, os operadores  $\Theta^{ij}$  e os seus momentos canônicos conjugados  $\pi^{ij}$ , onde  $i, j = 1, 2, 3$ . Trabalha-se então em um espaço de fase com doze dimensões. De fato, as equações de movimento para todas as coordenadas do espaço de fase clássico estendido NC são obtidas e uma nova segunda lei de Newton NC invariante sob rotações é escrita. A segunda lei de Newton obtida apresenta correções dependentes das coordenadas e de suas derivadas temporais, assim como do potencial e de suas derivadas em relação a todas as coordenadas do espaço de fase. Um oscilador harmônico com hamiltoniano NC invariante sob rotações tratado por essa nova segunda lei de Newton permanece periódico se, e somente se, a razão entre as frequências de oscilação da coordenada posição e da coordenada NC é um número racional. Em particular, as soluções do oscilador harmônico NC num

espaço bidimensional espacialmente são analisadas em detalhes, mostrando que a não-comutatividade induz uma perturbação estável no oscilador harmônico comutativo ou usual e também preserva a simetria de rotação. Além disso, as correções NC nas trajetórias do oscilador podem ser imperceptíveis desde que o módulo da coordenada NC seja suficientemente pequeno. Por outro lado, a influência da NC se torna mais significativa e evidente se o oscilador parte de uma posição inicial muito distante do ponto de equilíbrio.

O último capítulo apresenta a construção de uma versão NC para o importante modelo de Friedmann-Robertson-Walker(FRW), baseado no (FSINC), para diferentes fluidos perfeitos que compõe matéria-energia do universo, uma aproximação aceitável para grandes escalas. Nesse contexto, são determinadas as equações de Friedmann-Lemaître com correções NC válidas para diferentes fluidos perfeitos: aproximação não-relativística, poeira pura; gás ultra-relativístico, radiação pura; cordas cósmicas, energia escura, matéria rígida e paredes de domínio. A correção NC dependente diretamente do parâmetro NC  $\beta$  pode ser interpretada como um fluido não-usual com equação de estado  $P = \alpha'\rho = (\alpha - \frac{1}{3})\rho$  que se comportaria como poeira num período de radiação, preservando a lei de conservação de energia. Além disso, o efeito da não-comutatividade na dinâmica do fator de escala cósmico depende do sinal do parâmetro NC; para  $\beta$  negativo, o universo se expande com mais facilidade, enquanto para  $\beta$  positivo ocorre o oposto, de forma que a não-comutatividade pode tanto ligar como desligar o sistema dependendo da configuração do mesmo. Entretanto o parâmetro NC  $\beta$  é arbitrário, mas o seu valor pode ser estimado associando-se o seu efeito com o efeito da constante cosmológica, juntamente com dados da literatura para a idade do universo.

Ainda das equações de Friedmann-Lemaître corrigidas, o parâmetro de desaceleração NC pode ser determinado em termos do redshift. Dos valores experimentais aceitáveis para o redshift de transição, o intervalo de valores aceitáveis para o parâmetro NC  $\beta$  pode ser obtido, mostrando que as correções NC poderiam ser responsáveis por até aproximadamente um terço da matéria escura do universo sem violar os dados experimentais para o redshift de transição.

Por último, o apêndice C apresenta graficamente as soluções numéricas das equações de Lemaître corrigidas sujeitas às condições iniciais tais que o conjunto solução das equações de Friedmann-Lemaître corrigida sejam equivalentes, juntamente com o gráfico do potencial, que representa a equação para o quadrado da derivada temporal do fator de escala cósmico presente na equação de Friedmann. Esse apêndice apoia as análises do último capítulo e pode ser usado para futuras análises.

# Capítulo 1

## Versão não-comutativa do Modelo Sigma Não-linear $O(3)$ e do Modelo de Skyrme $SU(2)$

### 1.1 Introdução

O primeiro trabalho publicado usando a ideia de um espaço-tempo não-comutativo (NC) foi escrito por Snyder [1], que acreditava que os conceitos de não-comutatividade seriam capazes de eliminar alguns infinitos presentes em Teoria Quântica de Campos. No entanto, esse fato não se confirmou [5] e as ideias de Snyder foram deixadas de lado por um longo tempo. Atualmente, temos inúmeras motivações que fortalecem o estudo de teorias não-comutativas, entre elas destacamos os estudos em Teoria de Cordas e em Gravidade Quântica [4]. Importante ressaltarmos que a não-comutatividade no contexto de teoria de cordas pode ser eliminada por meio da construção de um sistema mecânico que reproduza a dinâmica clássica das cordas [6].

Agora, ainda com relação à Mecânica Quântica, Banerjee [7] analisou extensivamente como estruturas não-comutativas surgem em Mecânica Quântica Planar e como as mesmas podem ser objetivamente obtidas. Esses estudos foram baseados em álgebra NC em Mecânica Quântica Planar, que foi originada das análises de 't Hooft em processos de dissipação e quantização [8]. Paralelamente, outro interessante estudo em não-comutatividade foi realizado por Duval e Horváthy [9], os quais obtiveram relações de comutação não-usuais entre as coordenadas por meio da "substituição de Peierls"[10]. Desses con-

ceitos iniciais, sem usar limites não-físicos, os autores introduziram Mecânica Quântica NC usando teoria de grupos e aplicaram essa descrição para tratar o efeito Hall [11]. Aliado a isso, Dunne *et al* [12] justificaram a regra de Peierls considerando o limite  $m \rightarrow 0$ , reduzindo espaço de fase clássico quadrimensional para um espaço bidimensional descrito pelas coordenadas NCs  $x$  e  $y$ . Enquanto que o potencial se comporta como um Hamiltoniano efetivo.

Em [13], Amorim construiu uma extensão da bem conhecida álgebra não-comutativa de Doplicher-Fredenhagen-Roberts (DFR) introduzindo um formalismo denominado álgebra Doplicher-Fredenhagen-Roberts-Amorim para recuperar a invariância de Lorentz, que é perdida quando se considera em Mecânica Quântica Não-Comutativa (MQNC)  $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ , onde  $x^\mu$  são os operadores de posição e  $\theta^{\mu\nu}$  é um escalar matricial antissimétrico, com dimensão de área. Neste formalismo é realizada uma extensão do espaço, em que o parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$  deixa de ser apenas um escalar constante matricial antissimétrico e passa a ser visto como uma coordenada canônica do espaço-tempo, assim como o seu momento canonicamente conjugado  $\pi^{ij}$ . Baseado nisso, um espaço de Hilbert estendido foi construído, no qual foi possível desenvolver toda uma (MQNC) sem perder a invariância de Lorentz [14], apresentando um tratamento alternativo à construção de teorias não-comutativas via o produto Moyal-Weyl.

Contudo, observamos que teorias de campos NCs têm sido mesmo investigadas em diversos ramos da física [4]-[15]. Entretanto, uma questão muito discutida é como essas teorias podem ser eficientemente construídas. Mais especificamente no caso da Mecânica Quântica Não-Comutativa (MQNC), Djemai *et al* mostrou uma interessante forma de se obter (MQNC) por meio de uma deformação- $\alpha$  de uma álgebra arbitrária de observáveis clássicos correspondentes [16], ou seja, uma (MQNC) pode ser obtida a partir da Mecânica Clássica Não-comutativa (MCNC), sendo que essa deformação- $\alpha$  pode ser vista como uma transformação geral nas variáveis do espaço de fase quântico. Este formalismo é possível visto que a Mecânica Quântica pode ser tratada de forma matricial, a qual pode apresentar uma estrutura geométrica não-comutativa [17].

Uma maneira muito interessante e simplificada de se obter versões não-comutativas para teorias de campos pode ser obtida substituindo o produto usual entre campos que aparece dentro da ação pelo produto Moyal-Weyl, definido por

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y\right)\phi_1(x)\phi_2(y)|_{x=y}. \quad (1.1)$$

Onde  $\theta^{\mu\nu}$  é uma matriz constante antissimétrica com dimensão de área. Das

derivadas presentes na definição do produto Moyal-Weyl acima, fica claro que esse novo produto é altamente não-local. Além disso, o produto Moyal-Weyl foi construído de forma que o produto entre dois campos dentro da ação coincide com o produto usual, considerando que podemos descartar os termos de fronteira.

Em estudos perturbativos de teorias de campo escalar [18], os autores analisaram as divergências IR e UV e verificaram que a constante de Planck foi introduzida via expansão em *loop*. Entretanto, aqui diferentemente, faremos uma abordagem não-perturbativa e veremos que a constante de Planck será introduzida naturalmente na teoria via o produto Moyal-Weyl.

Ainda com relação a construção de teorias não-comutativas em [19], Abreu *et al* construíram um formalismo que descreve uma interessante maneira de se introduzir geometria não-comutativas em teorias de campos baseado na generalização do processo de quantização por deformação [16], no produto Moyal-Weyl entre campos e no formalismo simplético de Faddeev-Jackiw ou, simplesmente, formalismo simplético. Esse formalismo foi denominado Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC). Este será tratado detalhadamente por ser uma peça fundamental no desenvolvimento dos demais capítulos desta tese. Com esse intuito, para revisar e acrescentar alguns considerações sobre o (FSINC) abordaremos previamente alguns conceitos nos quais o formalismo foi fundamentado.

## 1.2 Formalismo simplético

O Formalismo Simplético foi descrito por Faddeev e Jackiw [20] abordava uma maneira alternativa de se obter os parênteses Poisson generalizados, hoje chamados parênteses de Dirac. Os quais são necessários para realização do processo de quantização generalizada consistente com sistemas vinculados. A determinação dos parênteses de Dirac é o principal objetivo do tratamento de sistemas vinculados chamado Método de Dirac [21], que se desenvolve em um formalismo hamiltoniano. Por questões didáticas, antes de tratarmos o formalismo simplético propriamente dito, descrevemos a notação simplética.

### 1.2.1 Introdução à notação simplética

Seja um sistema arbitrário descrito no espaço de fases por  $2N$  variáveis canônicas  $q_i$  e  $p_i$ , com  $i = 1, \dots, N$ . Podemos escrever convenientemente os parênteses de Poisson entre duas quantidades quaisquer nesse espaço, por exemplo  $A(q, p)$  e  $B(q, p)$ , do seguinte modo

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \{q_i, q_j\} \frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \{q_i, p_j\} \frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \{p_i, q_j\} \frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \{p_i, p_j\} \frac{\partial B}{\partial p_j}. \quad (1.2)$$

A expressão acima pode ser reescrita de forma compacta, usando a concisa notação simplética. Para isso, denotaremos o conjunto de coordenadas e momentos, apenas por  $\xi^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), tal que

$$\begin{aligned} \xi^i &= q_i, \\ \xi^{i+N} &= p_i. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Agora, utilizando essa nova notação, podemos reescrever os parênteses anteriores como

$$\{A(\xi^i), B(\xi^j)\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} \{\xi^\alpha, \xi^\beta\} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}. \quad (1.4)$$

Onde usamos os parênteses fundamentais de Poisson, que em notação simplética podem ser escritos compactamente na forma

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \epsilon^{\alpha\beta}, \quad (1.5)$$

com  $\epsilon^{\alpha\beta}$  dado pela seguinte matriz

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0_{NxN} & I_{NxN} \\ -I_{NxN} & 0_{NxN} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Para sistemas sem vínculos, essa matriz representa o tensor simplético e funciona como a métrica do espaço simplético.

### 1.2.2 Formalismo simplético com vínculos e sem vínculos

O método simplético trabalha com Lagrangianas de primeira ordem. Algo nem tão restritivo, já que a maioria das Lagrangianas quadráticas de interesse podem ser transformadas em Lagrangianas de primeira ordem, estendo-se o

espaço de configuração com introdução de campos auxiliares, os quais serão na maioria das vezes os momentos.

Seja um sistema dinâmico descrito por uma Lagrangiana de primeira ordem da forma

$$L = a_j \dot{\xi}^j - H(\xi^k). \quad (1.7)$$

Onde  $H(\xi)$  é a hamiltoniana do sistema e  $\xi^j$  são as variáveis simpléticas. Da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = 0, \quad (1.8)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} (a_i(\xi^k)) &= 0 \\ \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j &= 0 \\ \left( \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \right) \dot{\xi}^j &= \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Sendo assim,

$$f_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}, \quad (1.10)$$

com

$$f_{ij} = \frac{\partial a_j(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi^k)}{\partial \xi^j}. \quad (1.11)$$

Se os coeficientes  $a_j(\xi^k)$  são tais que  $f_{ij}$  é não-singular, então  $f_{ij}$  possui inversa e iremos indica-la por  $f^{ij}$ . Dessa forma, da equação (1.10) encontramos que as velocidades podem ser expressas por

$$\dot{\xi}^j = f^{ij} \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \quad (1.12)$$

Por outro lado, podemos obter a equação acima utilizando-se a formulação hamiltoniana. Podemos escrever as equações de Hamilton usando os parênteses de Poisson,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^j &= \{\xi^j, H(\xi^k)\} \\ \dot{\xi}^j &= \{\xi^j, \xi^i\} \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comparando as equações (1.13) e (1.12), encontramos

$$f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}. \quad (1.14)$$

Caso a matriz  $f_{ij}$  fosse singular o sistema apresentaria vínculos ou teria simetria de calibre. E  $f_{ij}$  não poderia ser identificado como tensor simplético, já que, fazendo o papel da métrica do espaço simplético, ele deveria possuir inversa. Portanto, não iremos conseguir, à princípio, determinar os parênteses da teoria. O formalismo simplético com vínculos ataca esse problema introduzindo os vínculos e deformando a estrutura geométrica da teoria, ou seja, usa-se os vínculos até que se possa obter a matriz simplética não singular, donde podemos encontrar sua inversa  $f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}$ , cujas entradas são os parênteses de Dirac generalizados.

Agora, consideremos que exista uma quantidade qualquer  $C(\xi^k)$ , não-nula, que possua os parênteses de Poisson com as variáveis simpléticas  $\xi^i$  todos nulos,

$$\{\xi^i, C(\xi^k)\} = f^{ij} \frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j},$$

logo

$$f^{ij} \frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j} = 0. \quad (1.15)$$

Assim, se existe  $C(\xi^k)$  então  $f^{ij}$  é não singular, e possui os seguintes modos-zeros  $\frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j}$ .

Considerando que a matriz simplética  $f_{ij}^{(0)}$  é singular, com os modos-zeros  $w_l^{(0)}$  com  $l < 2N$ , tem-se

$$f_{lm}^{(0)} w_m^{(0)} = 0. \quad (1.16)$$

Multiplicando o lado esquerdo de (1.10) por  $w_l^{(0)}$ , considerando que a parte cinética do hamiltoniano só depende das velocidades, e usando (1.16), temos

$$w_l^{(0)} \frac{\partial V \xi^k}{\partial \xi^l} = 0. \quad (1.17)$$

Onde  $V(\xi^k)$  denota energia potencial. Geralmente, essa equação representa os vínculos do sistema. Os quais podem ser introduzidos na Lagrangiana por meio de multiplicadores de Lagrange e causam uma deformação da matriz simplética  $f_{(0)ij}$ . Lembrando que a introdução dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_l^{(0)}$  estende o espaço de configuração. Agora, introduzindo os vínculos na parte cinética da Lagrangiana, obtemos

$$L^{(1)} = a_i(\xi^k)^{(0)} \dot{\xi}^i - V^{(0)}(\xi^k) + \lambda_l \frac{d}{dt} (\Omega_l^{(0)}(\xi^i)),$$

$$L^{(1)} = (a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i}) \dot{\xi}^i - V(\xi^k). \quad (1.18)$$

Donde podemos identificar diretamente os novos vetores,

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i}, \\ a_l^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Aqui  $\Omega_l^{(0)}$  são os vínculos decorrentes de (1.17). Dessa forma, os novos tensores são dados por

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= \partial_i a_j^{(1)} - \partial_j a_i^{(1)}, \\ f_{il}^{(1)} &= \partial_i a_l^{(1)} - \partial_l a_i^{(1)} = -\partial_l a_i^{(1)}, \\ f_{lm}^{(1)} &= \partial_l a_m^{(1)} - \partial_m a_l^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$  e  $\partial_l = \frac{\partial}{\partial \xi^l}$ . Caso  $\det f^{(1)} \neq 0$ , conseguimos eliminar os vínculos da teoria e encontrar a matriz simplética adequada, que funcionará como a métrica do espaço. Da inversa da matriz simplética  $f^{ij}$ , os parênteses de Dirac podem ser obtidos, completando o objetivo final do formalismo simplético. Por outro lado, se o tensor  $f^{(1)}$  ainda for singular, devemos encontrar seus modos-zeros, que geralmente fornecerão novos vínculos que serão introduzidos na Lagrangiana de primeira iteração  $L^{(1)}$ , através de multiplicadores de Lagrange possibilitando a obtenção de um novo tensor simplético. Novamente, se  $\det f^{(2)} \neq 0$  encerramos o processo, pois chegamos ao nosso objetivo. Caso contrário, devemos repetir o processo, acima realizado, até obtermos um tensor simplético não-singular.

É importante ressaltarmos uma situação particular desse processo, que acontece quando encontramos uma matriz singular cujos modos-zeros correspondentes não fornecem novos vínculos. Essa situação ocorre na presença de simetria de calibre. Nesse caso, as condições de calibre devem ser fixadas e o tensor simplético pode ser assim determinado.

### 1.3 Quantização por deformação

O processo de quantização por deformação [22] consiste na substituição do processo de quantização canônica por uma álgebra  $\mathcal{A}_\hbar$  de observáveis quânticos

gerados pelos seus correspondentes clássicos que obedecem ao produto Moyal-Weyl, *i.e.*, o processo de quantização canônica

$$\{h, g\}_{PB} = \frac{\partial h}{\partial \zeta_a} \omega_{ab} \frac{\partial g}{\partial \zeta_b} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{O}_h, \mathcal{O}_g] , \quad (1.21)$$

com  $\zeta = (q_i, p_i)$ , é substituído por uma deformação  $\hbar$ -estrela da álgebra  $\mathcal{A}_0$ , definida por

$$\{h, g\}_{\hbar} = h \star_{\hbar} g - g \star_{\hbar} h , \quad (1.22)$$

onde

$$(h \star_{\hbar} g)(\zeta) = \exp\left\{\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial_{(\zeta_1)}^a\partial_{(\zeta_2)}^b\right\}h(\zeta_1)g(\zeta_2)|_{\zeta_1=\zeta_2=\zeta} , \quad (1.23)$$

com  $a, b = 1, 2, \dots, 2N$  e com a estrutura simplética clássica abaixo

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ab} \\ -\delta_{ba} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

A qual satisfaz a seguinte relação

$$\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta_c^a \quad (1.25)$$

Uma questão que merece ser discutida, dado algumas sutilezas, são as propriedades do produto estrela definido (1.23). Antes de fazermos isso, lembremos que de uma forma geral os produtos estrelas são associativo, propriedade essencial em física, desde que o parâmetro usado na sua definição seja constante, como é o caso do produto Moyal-Weyl definido acima (1.23).

Foi provado por Kontsevich em [23] que qualquer variedade de Poisson de dimensão finita pode ser canonicamente quantizada via quantização por deformação. A seguir, descrevemos uma introdução breve ao processo de quantização por deformação baseado em [23].

Definindo uma álgebra  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  sobre  $\mathcal{R}$  de funções diferenciáveis em uma variedade  $X$ ,  $C^\infty$ , de dimensão finita. Podemos construir um produto estrela em  $A$ , definido como um produto linear  $R[\hbar]$  associativo em  $A[\hbar]$ . Este produto estrela entre  $f$  e  $g$  ( $f, g \in A \subset A[\hbar]$ ) pode ser escrito como

$$(f, g) \rightarrow f \star g = fg + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots \in A[\hbar], \quad (1.26)$$

onde  $\hbar$  é um parâmetro constante e  $B_i$  são operadores bi-diferenciais. Um operador bi-diferencial pode ser compreendido como um mapa bilinear, o qual é um operador diferencial [23]. Além disso, o produto entre dois elementos arbitrários de  $A[\hbar]$  pode ser definido de acordo com a definição (1.26), associado com a condição de linearidade sobre  $\mathcal{R}[\hbar]$

$$\left( \sum_{n \geq 0} f_n \hbar^n \right) \star \left( \sum_{n \geq 0} g_n \hbar^n \right) = \sum_{k,l \geq 0} f_k g_l \hbar^{k+l} + \sum_{k,l \geq 0, m \geq l} B_M(f_k, g_l) \hbar^{k+l+m} .$$

Mais detalhes podem ser encontrados em [23].

A forma mais simples de quantização por deformação é o produto Moyal-Weyl para uma estrutura de Poisson em  $\mathcal{R}^d$  com os coeficientes constantes

$$\begin{aligned} f \star g &= f g + \hbar \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \alpha^{ij} \alpha^{kl} \partial_i \partial_k(f) \partial_j \partial_l(g) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^n \alpha^{i_k j_k} \left( \prod_{k=1}^n \partial_{i_k} \right) (f) \cdot \left( \prod_{k=1}^n \partial_{j_k} \right) (g), \end{aligned} \quad (1.27)$$

com  $\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}$ .

Seja  $\alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$  um parêntese de Poisson com coeficientes variáveis num domínio aberto de  $\mathcal{R}^d$  [23]. Onde  $\alpha^{ij}$  não é constante e sim uma função das coordenadas. Então o produto estrela seguinte é associativo para termos de ordem superior  $O(\hbar^3)$  [23],

$$\begin{aligned} f \star g &= f g + \hbar \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \alpha^{ij} \alpha^{kl} \partial_i \partial_k(f) \partial_j \partial_l(g) \\ &+ \frac{\hbar^3}{3} \sum_{i,j,k,l} \alpha^{ij} \partial_j(\alpha^{kl}) \left( \partial_i \partial_k(f) \partial_l(g) - \partial_k(f) \partial_i \partial_l(g) \right) + O(\hbar^3) . \end{aligned} \quad (1.28)$$

Para demonstrarmos associatividade do produto acima até segunda ordem, devemos ter para quaisquer três funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ ,

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) . \quad (1.29)$$

Nos podemos ver diretamente de (1.28) que o fato de  $\alpha^{ij}$  ser um parâmetro não-constante gera termos de ordem  $\hbar^3$  diferentes para o produto de Moyal-Weyl. Comparando as equações (1.27) e (1.28), observa-se que se o produto estrela não for escrito como (1.28) a associatividade é perdida. Retornaremos nessa questão posteriormente.

O processo de quantização por deformação pode ser generalizado assumindo uma estrutura simplética clássica  $\Sigma^{ab}$ . Neste caso, as leis internas serão

caracterizadas pelo parâmetro de deformação  $\hbar$  ou por outros parâmetros de deformação considerados. Consequentemente, a deformação  $\Sigma$ -estrela da álgebra será dada por

$$(h \star_{\hbar\Sigma} g)(\zeta) = \exp\left\{\frac{i}{2}\hbar\Sigma_{ab}\partial_{(\zeta_1)}^a\partial_{(\zeta_2)}^b\right\}h(\zeta_1)g(\zeta_2)|_{\zeta_1=\zeta_2=\zeta} , \quad (1.30)$$

com  $a, b = 1, 2, \dots, 2N$ .

Este novo produto-estrela generaliza a álgebra entre as variáveis simpléticas da seguinte forma

$$\{h, g\}_{\hbar\Sigma} = i\hbar\Sigma . \quad (1.31)$$

Onde  $\Sigma$  é uma estrutura simplética geral. Uma vez que o produto-estrela em (1.30) foi definido analogamente ao produto Moyal-Weyl, mas com o parâmetro  $\Sigma$  não constante, ele não é associativo

Entretanto, lembrando que  $\Sigma$  é pequeno, analogamente a  $\theta$ , e considerando apenas termos de ordem inferior ou igual a  $\hbar^2$  podemos recuperar a propriedade de associatividade em (1.30). Então, a expressão geral dada em (1.30) omite o fato de que a expansão da exponencial só tem significado físico para situações em que levamos em conta apenas termos proporcionais a  $1, \hbar$  e  $\hbar^2$ . Observação omitida para tornar a expressão do produto  $\Sigma$ -estrela em (1.30) mais compacta.

Um produto deformado  $\Sigma$ -estrela escrito em (1.30) pode apresentar coeficientes variáveis sem perder a associatividade se truncamos a expansão da exponencial presente na definição do produto estrela em termos de segunda ordem em  $\hbar$ .

## 1.4 Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade

Após analisar simplificadamente o formalismo simplético e o processo de quantização canônica nas seções anteriores podemos descrever o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) propriamente dito. Em [16],[17], foi proposto pelos autores um processo de quantização para se obter uma Mecânica Quântica não-comutativa (MQNC) diretamente da Mecânica Clássica Não-Comutativa (MCNC). Isso foi realizado usando o

processo de quantização de Dirac generalizada,

$$\{h, g\}_\Sigma = \frac{\partial h}{\partial \zeta_a} \Sigma_{ab} \frac{\partial g}{\partial \zeta_b} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{O}_h, \mathcal{O}_g]_\Sigma . \quad (1.32)$$

Para uma dada escolha de  $\Sigma_{ab}$  pode-se determinar novas coordenadas satisfazendo os parênteses de Poisson usuais por meio uma transformação particular no espaço de fase clássico,

$$\zeta'_a = T_{ab} \zeta^b . \quad (1.33)$$

Por exemplo, para a matriz transformação

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & -\frac{1}{12} \theta_{ij} \\ \frac{1}{12} \beta_{ij} & \delta_{ij} \end{pmatrix} , \quad (1.34)$$

onde matrizes  $\theta_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  são antissimétricas, tem-se a seguinte estrutura simplética correspondente

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \theta_{ij} & \delta_{ij} + \sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \sigma_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix} , \quad (1.35)$$

com  $\sigma_{ij} = -\frac{1}{18} [\theta_{ik} \beta_{kj} + \beta_{ik} \theta_{kj}]$ . Consequentemente, para o Hamiltoniano,

$$\mathcal{H}(\zeta_a) \longrightarrow \mathcal{H}(\zeta'_a) . \quad (1.36)$$

Usando o fato das entradas dessa estrutura simplética ser tal que  $\Sigma_{ij} = \{\xi_i, \xi_j\}$ , com  $\xi_k = (q_k, p_k)$ ; juntamente com o processo de quantização de Dirac generalizado (1.32), podemos identificar as seguintes relações de comutação entre as coordenadas

$$\begin{aligned} [q'_i, q'_j] &= i\hbar \theta_{ij} , \\ [q'_i, p'_j] &= i\hbar (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) , \\ [p'_i, p'_j] &= i\hbar \beta_{ij} . \end{aligned} \quad (1.37)$$

No entanto, até o momento não construímos uma formulação Lagrangiana. Observação importante uma vez que o principal objetivo do Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) é obter uma versão não-comutativa para sistemas comutativos de interesse via uma descrição Lagrangiana. Neste sentido, foi proposto pelos autores uma maneira sistemática para se encontrar tal descrição Lagrangiana não-comutativa [6]. Para isso, a estrutura simplética  $\Sigma_{ab} = \{\zeta'_a, \zeta'_b\}$  deve ser fixada e depois a sua inversa  $\Sigma^{ab}$  calculada. Importante ressaltar que nesse processo pode

surgir um problema relevante quando a estrutura simplética é singular, o que impossibilita o cálculo de sua inversa  $\Sigma^{ab}$ . Entretanto, esse tipo de situação foi tratada e resolvida em [24]. Agora, para os casos que nos interessa,  $\Sigma_{ab}$  é não-singular e sua inversa  $\Sigma^{ab}$  pode ser calculada diretamente usando a relação

$$\int \Sigma_{ab}(x, y) \Sigma^{bc}(y, z) dy = \delta_a^c \delta(x - z). \quad (1.38)$$

Feito esse cálculo e obtido  $\Sigma^{ab}$ , os tensores  $A_{\zeta'_a}(x)$  que aparecem na Lagrangiana em primeira ordem geral

$$\mathcal{L} = A_{\zeta'_a} \dot{\zeta}'^a - V(\zeta'_a), \quad (1.39)$$

podem ser determinados do conjunto de equações decorrentes da relação

$$\Sigma^{ab}(x, y) = \frac{\delta A_{\zeta'_a}(x)}{\delta \zeta'_b(y)} - \frac{\delta A_{\zeta'_b}(x)}{\delta \zeta'_a(y)}, \quad (1.40)$$

como mostrado na seção (1.2). Dessa forma, considerando a estrutura simplética (1.35) e um tensor simplético genérico a ser determinado

$$\Sigma^{jk} = \begin{pmatrix} A_{jk}(x, y) & B_{jk}(x, y) \\ -B_{jk}(x, y) & C_{jk}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

a equação (1.38) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \theta_{ij} B_{jk}(x, y) + (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) A_{jk}(x, y) &= \delta_{ik} \delta(x - y), \\ A_{jk}(x, y) \theta_{ji} + (\delta_{ij} + \sigma_{ij}) C_{jk}(x, y) &= 0, \\ -(\delta_{ij} + \sigma_{ij}) B_{jk}(x, y) + \beta_{ij} A_{jk}(x, y) &= 0, \\ A_{kj}(x, y) (\delta_{ji} + \sigma_{ji}) + \beta_{ij} C_{jk}(x, y) &= \delta_{ik} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Onde, da equação (1.40),

$$\begin{aligned} B_{jk}(x, y) &= \left( \frac{\delta A_{q'_j}(x)}{\delta q'_k(y)} - \frac{\delta A_{q'_k}(x)}{\delta q'_j(y)} \right), \\ A_{jk}(x, y) &= \left( \frac{\delta A_{p'_j}(x)}{\delta q'_k(y)} - \frac{\delta A_{q'_k}(x)}{\delta p'_j(y)} \right), \\ C_{jk}(x, y) &= \left( \frac{\delta A_{p'_j}(x)}{\delta p'_k(y)} - \frac{\delta A_{p'_k}(x)}{\delta p'_j(y)} \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Sendo assim, a solução do conjunto de equações diferenciais (1.43) determina os tensores de primeira-forma  $A_{\zeta'_a}(x)$ . Conseqüentemente, a Lagrangiana em

primeira ordem (1.39) pode ser determinada. Portanto, alcançamos o objetivo final do Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC). Terminado a descrição do (FSINC), aplicaremos-o para obter uma versão não-comutativa para o modelo sigma não-linear  $O(3)$  e para o modelo de Skyrme  $SU(2)$  [25].

## 1.5 Modelo Sigma Não-linear $O(3)$

O modelo sigma não-linear em teorias de campos é descrito por um campo escalar que toma valores em uma variedade não-linear denominada variedade alvo  $W$ . Essa variedade é equipada com a métrica de Riemann  $g$ . Seja  $\sigma$  um mapa diferenciável de um espaço, por exemplo o espaço de Minkowski, numa variedade  $W$ , a densidade de Lagrangiana do modelo pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g(\partial^\mu\sigma_a, \partial_\mu\sigma_b) - V(\sigma), \quad (1.44)$$

onde usamos na métrica do espaço-tempo  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1$  e  $V(\sigma)$  é o potencial. Em notação de coordenadas podemos reescrever a Lagrangiana na forma <sup>1</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ab}(\sigma)\partial^\mu\sigma^a\partial_\mu\sigma^b - V(\sigma) \quad (1.45)$$

com as coordenadas  $\sigma^a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é a dimensão de  $W$ . Entretanto, em mais de duas dimensões o modelo sigma não-linear (MSNL) é não-renormalizável. Portanto, esse modelo pode surgir somente de teorias de campos efetivos. Neste contexto, importante ressaltarmos que a Lagrangiana do modelo sigma não-linear pode ser obtida do truncamento, até termos quadráticos nas derivadas dos campos, da expansão de um Lagrangiano efetivo, isto é, um Lagrangiano semi-fenomenológico construído em termos dos graus de liberdade efetivos do sistema, satisfazendo as simetrias e propriedades topológicas desejadas dentro de uma dada região limitada de energia.

Nesta contexto, trataremos o modelo sigma não-linear (MSNL)  $O(3)$ , um importante laboratório teórico usado para investigar algumas questões relevantes em física de campos e partículas como, por exemplo, os problemas existentes em física de altas energias. Entre esses estão a não-linearidade na interação de quarks com anti-quarks, em que o problema de ordenamento de operadores inviabiliza o cálculo do espectro do sistema. Buscando ampliar as ferramentas desse laboratório teórico propomos a construção de uma versão

---

<sup>1</sup>Índices repetidos indicam soma, notação de Einstein.

não-comutativa para (*MSNL*)  $O(3)$  baseado no Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) [26].

### 1.5.1 Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade aplicado ao Modelo Sigma Não-linear (MSNL) $O(3)$

Baseado no que foi dito no início desta seção, a dinâmica do (*MSNL*)  $O(3)$  pode ser descrita pela seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma), \quad (1.46)$$

com a métrica do espaço-tempo tal que  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1$  e com o vínculo esférico  $O(3)$   $\sigma_a \cdot \sigma_a = 1$ . Para aplicar o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC), descreveremos por conveniência o (*MSNL*)  $O(3)$  em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ ,

$$\sigma = (\cos\theta, \sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi) = (z, y, x), \quad (1.47)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as coordenadas cartesianas e usamos o vínculo  $r = 1$ . Para escrever (1.46) em coordenadas esféricas serão usadas as seguintes relações

$$\partial_0\sigma = (-\dot{\theta} \sin\theta, \dot{\theta} \cos\theta \cos\phi - \dot{\phi} \sin\theta \sin\phi, \dot{\theta} \cos\theta \sin\phi + \dot{\phi} \sin\theta \cos\phi), \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \partial_0\sigma\partial^0\sigma &= \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \cos^2\phi + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \\ &+ \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin^2\phi + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \\ &= \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta, \\ \partial_i\sigma\partial^i\sigma &= \partial_i(z, y, x)\partial^i(z, y, x) = 3, \end{aligned} \quad (1.49)$$

com os índices espaciais  $i = 1, 2, 3$  correspondendo às coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. De posse das relações (1.49), podemos escrever diretamente a Lagrangiana (1.46) em coordenadas esféricas da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\phi}^2 \cdot \sin^2\theta}{2} - \frac{3}{2}. \quad (1.50)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange na Lagrangiana acima, temos

$$\begin{aligned} \pi_\theta &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \dot{\theta}, \\ \pi_\phi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi} \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Então a densidade de hamiltoniano do sistema pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = \dot{\theta}\pi_\theta + \dot{\phi}\pi_\phi - \mathcal{L} = \frac{\pi_\theta^2}{2} + \frac{\pi_\phi^2}{2\sin^2\theta} + \frac{3}{2}. \quad (1.52)$$

Finalmente, a Lagrangiana no espaço de fase descrita pelas coordenadas  $(\theta, \pi_\theta, \phi, \pi_\phi)$  é dada por

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_\theta \cdot \dot{\theta} + \pi_\phi \cdot \dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi_\theta^2 - \frac{\pi_\phi^2}{2 \cdot \sin^2\theta} - \frac{3}{2}. \quad (1.53)$$

Onde  $\theta$  é diferente de  $2n\pi$ , com  $n$  natural.

De acordo com o formalismo simplético [26], os parênteses entre as variáveis serão calculados da inversa da matriz simplética

$$\begin{aligned} \{\theta(\vec{x}), \pi_\theta(\vec{y})\} &= \{\phi(\vec{x}), \pi_\phi(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\theta(\vec{x}), \theta(\vec{y})\} &= \{\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})\} = \{\phi(\vec{x}), \theta(\vec{y})\} = 0, \\ \{\pi_\theta(\vec{x}), \pi_\theta(\vec{y})\} &= \{\pi_\phi(\vec{x}), \pi_\phi(\vec{y})\} = \{\pi_\phi(\vec{x}), \pi_\theta(\vec{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Para aplicar (FSINC) e obter a versão do (*MSNL*)  $O(3)$ , vamos primeiramente considerar que a inversa da matriz simplética, cujas entradas são uma generalização dos parênteses (1.54), é dada por

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) & \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) & 0 & 0 \\ -\delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{x}) & -\gamma\Theta(\vec{x} - \vec{z}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) & \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \\ 0 & 0 & -\delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{x}) & -\lambda\Theta(\vec{x} - \vec{z}) \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

onde os parênteses não-triviais escolhidos para que a matriz simplética fosse inversível são apresentados na diagonal da matriz acima e a notação  $\partial_{\vec{x}}$  denota  $\prod_{i=1}^3 \partial_i$  e  $\Theta(\vec{x}) \equiv \prod_{i=1}^3 \Theta(x_i)$ , isto é, o produto de funções sinais. Calculando a inversa de (1.55), ver apêndice A.1, obtemos a matriz simplética

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma}{\Sigma}\Theta(\vec{x} - \vec{y}) & -\frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ \frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) & \frac{\alpha}{\Sigma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\Gamma}\Theta(\vec{x} - \vec{y}) & -\frac{2}{\Gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & \frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Onde  $\Sigma = 2 - 8\alpha\lambda$  e  $\Gamma = 2 - 8\beta\lambda$  são parâmetros não-nulos. Agora, usando a definição dos elementos da matriz simplética,

$$f_{\xi_i\xi_j} = \frac{\partial A_{\xi_i}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A_{\xi_j}}{\partial \xi_i}, \quad (1.57)$$

podemos obter os tensores de primeira ordem  $A_{\xi_i}$  que aparecem na Lagrangiana de primeira ordem geral,

$$\mathcal{L} = A_{\xi_i}(\xi^j)\xi^i - V(\xi^j), \quad (1.58)$$

com  $\xi = (\theta, \phi, \pi_\theta, \pi_\phi)$ . Usando a equação (1.56), a relação (1.57) pode ser escrita como

$$\frac{\delta A_{\theta(y)}(y)}{\delta \theta(x)} - \frac{\delta A_{\theta(x)}(x)}{\delta \theta(y)} = -\frac{2}{\Sigma}\gamma\Theta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.59)$$

$$\frac{\delta A_{\pi_\theta(y)}(y)}{\delta \theta(x)} - \frac{\delta A_{\theta(x)}(x)}{\delta \pi_\theta(y)} = -\frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.60)$$

$$\frac{\delta A_{\pi_\theta(y)}(y)}{\delta \pi_\theta(x)} - \frac{\delta A_{\pi_\theta(x)}(x)}{\delta \pi_\theta(y)} = \frac{\alpha}{\Sigma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.61)$$

$$\frac{\delta A_{\phi(y)}(y)}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta A_{\phi(x)}(x)}{\delta \phi(y)} = -\frac{2\lambda}{\Gamma}\Theta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.62)$$

$$\frac{\delta A_{\pi_\phi(y)}(y)}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta A_{\phi(x)}(x)}{\delta \pi_\phi(y)} = -\frac{2}{\Gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.63)$$

$$\frac{\delta A_{\pi_\phi(y)}(y)}{\delta \pi_\phi(x)} - \frac{\delta A_{\pi_\phi(x)}(x)}{\delta \pi_\phi(y)} = \frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.64)$$

Das equações (1.59) e (1.60), podemos escrever diretamente

$$\begin{aligned} A_{\theta(y)}(y) &= \int \frac{-\gamma}{\Sigma}\Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(x)d^3\vec{x} + \int \frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x})\pi_{\theta(x)}(x)d^3\vec{x} \\ &= \frac{\gamma}{\Sigma}\int \Theta(\vec{y} - \vec{x})\theta(\vec{x})d^3\vec{x} + \frac{2}{\Sigma}\pi_\theta(\vec{y}). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Enquanto das equações (1.61) e (1.64) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} A_{\pi_\theta(y)}(y) &= \int \frac{\alpha}{\Sigma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\pi_{\theta(x)}(x)d^3\vec{x} \\ &= -\int \frac{\alpha}{\Sigma}\partial_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x})\pi_{\theta(x)}(x)d^3\vec{x} \\ &= -\frac{\alpha}{2\Sigma}\partial_{\vec{y}}\pi_{\theta(y)}(y), \\ A_{\pi_\phi(y)}(y) &= \int \frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\pi_{\phi(x)}(x)d^3\vec{x} \\ &= -\int \frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{y}}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x})\pi_{\phi(x)}(x)d^3\vec{x} \\ &= -\frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{y}}\pi_{\theta(y)}(y). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Por fim, das equações (1.62) e (1.63) obtemos o primeiro e o segundo termo escritos do lado direito da expressão abaixo, respectivamente,

$$\begin{aligned} A_{\phi(y)}(y) &= \int \frac{-\lambda}{\Gamma} \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \phi(x) d^3 \vec{x} + \int \frac{2}{\Gamma} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \pi_{\phi(x)}(x) d^3 \vec{x} \quad (1.67) \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma} \int \Theta(\vec{y} - \vec{x}) \phi(x) d^3 \vec{x} + \frac{2}{\Gamma} \pi_{\phi(y)}(\vec{y}). \end{aligned}$$

Neste momento, os termos necessários para escrever a Lagrangiana (1.58) já foram determinados. Entretanto, vamos considerar que o modelo permanece quadrático nas velocidades, então

$$A_{\pi_\theta} = A_{\pi_\phi} = 0. \quad (1.68)$$

Esta condição implica que  $\alpha = \beta = 0$  e, logo,  $\Gamma = \Sigma = 2$ . Contudo, os momentos canônicos são dados por

$$\begin{aligned} A_\theta &= \pi_\theta + \frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \theta(\vec{y}) d^3 \vec{y}, \quad (1.69) \\ A_\phi &= \pi_\phi + \frac{\lambda}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \phi(\vec{y}) d^3 \vec{y} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, a lagrangiana de primeira ordem não-comutativa do sistema pode ser escrita como

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\pi}_{\pi_\theta} \cdot \dot{\theta} + \tilde{\pi}_{\pi_\phi} \cdot \dot{\phi} - V(\xi^i). \quad (1.70)$$

Onde  $A_\theta = \tilde{\pi}_\theta$ ,  $A_\phi = \tilde{\pi}_\phi$  e  $V(\xi^i) = \frac{1}{2} \pi_\theta^2 + \frac{\pi_\phi^2}{2 \cdot \sin^2 \theta} + \frac{3}{2}$  é o potencial simplético. Podemos construir a versão comutativa dessa Lagrangiana aplicando na mesma uma transformação, que decorre diretamente (1.69), dada por

$$\begin{aligned} \pi_\theta &= \tilde{\pi}_\theta - \frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \theta(\vec{y}) d^3 \vec{y}, \quad (1.71) \\ \pi_\phi &= \tilde{\pi}_\phi - \frac{\lambda}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \phi(\vec{y}) d^3 \vec{y}. \end{aligned}$$

Feito tudo isso, obtemos finalmente a Lagrangiana de primeira ordem comutativa, isto é, uma Lagrangiana escrita em coordenadas comutativas que satisfazem aos parênteses de Poisson usuais;

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\pi}_\theta \cdot \dot{\theta} + \tilde{\pi}_\phi \cdot \dot{\phi} - \tilde{V}(\theta, \tilde{\pi}_\theta, \phi, \tilde{\pi}_\phi). \quad (1.72)$$

Onde o potencial simplético  $\tilde{V}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\theta, \tilde{\pi}_\theta, \phi, \tilde{\pi}_\phi) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\pi}_\theta - \frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \theta(\vec{y}) d^3 \vec{y} \right)^2 \quad (1.73) \\ &+ \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \theta} \left( \tilde{\pi}_\phi - \frac{\lambda}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \phi(\vec{y}) d^3 \vec{y} \right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\theta, \tilde{\pi}_\theta, \phi, \tilde{\pi}_\phi) &= \frac{1}{2}\tilde{\pi}_\theta^2(\vec{x}) + \frac{\tilde{\pi}_\phi^2(\vec{x})}{2 \cdot \sin^2 \theta} - \frac{\gamma}{2} \int \tilde{\pi}_\theta(\vec{x})\Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y} \\
&- \frac{\lambda}{2 \cdot \sin^2 \theta} \int \tilde{\pi}_\phi(\vec{x})\Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y} + \frac{\gamma^2}{8} \left[ \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y} \right]^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{8 \cdot \sin^2 \theta} \left[ \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y} \right]^2 + \frac{3}{2}.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Importante observarmos que apesar da Lagrangiana acima ser escrita em termos das novas variáveis comutativas, o potencial simplético possui contribuições não-comutativas.

Agora, a Lagrangiana (1.72) pode ser reescrita em função das coordenadas e de suas velocidades eliminando os momentos  $\pi_\theta$  e  $\pi_\phi$ . Para isso, inicialmente aplicamos as equações de Euler-Lagrange para os momentos  $\pi_\theta$  e  $\pi_\phi$  na Lagrangiana (1.72),

$$\dot{\theta}(\vec{x}) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\pi}_\theta(\vec{x})} = \tilde{\pi}_\theta(\vec{x}) - \frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y}, \tag{1.75}$$

$$\dot{\phi}(\vec{x}) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\pi}_\phi(\vec{x})} = \frac{\tilde{\pi}_\phi}{\sin^2 \theta} - \frac{\lambda}{2 \cdot \sin^2 \theta} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y}. \tag{1.76}$$

Donde obtemos diretamente

$$\tilde{\pi}_\theta(\vec{x}) = \dot{\theta}(\vec{x}) + \frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y}, \tag{1.77}$$

$$\tilde{\pi}_\phi = \dot{\phi}(\vec{x})\sin^2 \theta + \frac{\lambda}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y}. \tag{1.78}$$

Para simplificar notação e, claro, os cálculos definiremos

$$F(\vec{x}) = -\frac{\gamma}{2} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y}, \tag{1.79}$$

$$G(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2 \sin^2 \theta} \int \Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y}. \tag{1.80}$$

Dessa forma podemos reescrever as equações (1.77) e (1.78) da seguinte forma

$$\tilde{\pi}_\theta(\vec{x}) = \dot{\theta}(\vec{x}) - F(\vec{x}), \quad (1.81)$$

$$\tilde{\pi}_\phi = (\dot{\phi}(\vec{x}) - G(\vec{x}))\sin^2\theta. \quad (1.82)$$

Usando as relações (1.81) e (1.82) a Lagrangiana (1.72) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \left( \dot{\theta}(\vec{x}) - F(\vec{x}) \right) \cdot \dot{\theta} + \sin^2\theta \left( \dot{\phi} - G(\vec{x}) \right) \dot{\phi} - \frac{1}{2} \left( \tilde{\pi}_\theta + F(\vec{x}) \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sin^2\theta} \left( \tilde{\pi}_\phi + \sin^2\theta G(\vec{x}) \right)^2 - \frac{3}{2} \\ &= \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}F(\vec{x}) + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta - G(\vec{x})\dot{\phi} \sin^2\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2\sin^2\theta} \left( \dot{\phi} \sin^2\theta \right)^2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - \dot{\theta}F(\vec{x}) - G(\vec{x})\dot{\phi} \sin^2\theta - \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (1.83)$$

ou, substituindo os valores de  $F(\vec{x})$  e  $G(\vec{x})$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(\vec{x}) \sin^2\theta + \frac{\gamma}{2} \int \dot{\theta}(\vec{x})\Theta(\vec{x} - \vec{y})\theta(\vec{y})d^3\vec{y} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int \dot{\phi}(\vec{x})\Theta(\vec{x} - \vec{y})\phi(\vec{y})d^3\vec{y} - \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Dessa Lagrangiana para o (MSNL) não-comutativo observamos que ao considerarmos  $\lambda$  e  $\gamma$  nulos, isto é, desprezar as contribuições não-comutativas o modelo comutativo usual é restaurado, o que pode ser evidenciado comparando o resultado com a Lagrangiana original do (MSNL) em coordenadas esféricas (1.50).

## 1.6 Versão não-comutativa do Modelo de Skyrme $SU(2)$

Na década de sessenta do século passado, Skyrme apresentou em um trabalho [27], uma teoria de campos unificada para mésons com solução estática singular e de energia finita. Ele propôs o modelo de Skyrme  $O(N)$  com a finalidade de tratar a interação entre mésons, que no limite quiral ( $m_\pi = 0$ ) interagem fracamente. Este modelo efetivo é derivado de teorias fundamentais usadas para descrever interações fortes, como a *cromodinâmica*

*quântica* para grande número de cores. Posteriormente, baseado nos trabalhos de Skyrme, Adkins et al [28] por meio de processo de quantização semi-clássica do modelo de Skyrme, usando coordenadas coletivas, conseguiram obter o espectro de massa que apresentava uma boa concordância com os resultados experimentais. Desse momento em diante, muitos trabalhos tentaram melhorar esses resultados buscando corrigir os possíveis erros decorrentes do processo de quantização semi-clássico. Dado a importância de mais investigações sobre os estudo de campos não-lineares advindos dos trabalhos de Skyrme, buscamos construir uma versão não-comutativa do Modelo de Skyrme  $SU(2)$ .

Primeiramente, o Modelo de Skyrme  $SU(2)$  tem sua dinâmica descrita pela seguinte Lagrangiana, introduzida por Skyrme em 1962,

$$L_s = \int d^3r \left\{ \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) + \frac{1}{32g^2} \text{Tr}[U^\dagger \partial^\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \right\}, \quad (1.85)$$

com

$$U = e^{i\vec{\tau} \cdot \frac{\phi}{f_\pi}} = \frac{\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi}. \quad (1.86)$$

Onde  $f_\pi$  é a constante de decaimento do pión e  $g$  é conhecida agora como acoplamento  $\rho - \pi - \pi$ . Em (1.85), o primeiro termo é idêntico à Lagrangiana do Modelo Sigma Não-linear (MSNL) e o segundo foi introduzido por Skyrme [29]. Skyrme obteve soluções clássicas estáticas para as equações de movimento derivadas da Lagrangiana (1.85). Podemos escrever essas soluções na forma

$$U = U_s = e^{i\vec{\tau} \cdot \hat{r} F(r)}, \quad (1.87)$$

onde  $\vec{\tau}$  são as matrizes de Pauli e  $F(r)$  é uma função radial que satisfaz as seguintes condições de contorno

$$F(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad F(r \rightarrow 0) \rightarrow N\pi \quad (1.88)$$

[29, 30, 31]. Na última expressão  $N$  é o valor integral da carga topológica. O qual foi identificado com o número de bárion [29, 32], desde que a ação efetiva de Wess-Zumino [33] foi introduzida para eliminar as simetrias não-físicas herdadas do (MSNL).

A quantização do Skyrmion é feita via coordenadas coletivas [28], em que consideraremos apenas o caso de um bárion  $N = 1$ . Substituindo (1.88) e (1.87) na Lagrangiana (1.85) e integrando obtemos a massa ou a energia do Skyrmion estático. Desde que  $U_s$  é solução das Equações de Euler-Lagrange para (1.85), então  $U(t, r) = A(t)U_s(r)A^\dagger(t)$  também é solução, com  $A \in SU(2)$ . Substituindo o novo  $U(r, t)$  em (1.85) e integrando, obtemos

$$L_s = -M + I \text{Tr}(\partial_0 A \partial_0 A - 1), \quad (1.89)$$

com

$$M = 2\pi \int dr r^2 \left[ f_\pi^2 \left( \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + 2 \frac{\sin^2 f}{r^2} \right) + \frac{\sin^2 f}{g^2 r^2} \left( 2 \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 f}{r^2} \right) \right], \quad (1.90)$$

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr r^2 \sin^2 f \left[ f_\pi^2 + \frac{1}{g^2} \left( \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 f}{r^2} \right) \right]. \quad (1.91)$$

Sendo que  $M$  e  $I$  correspondem à massa do sóliton e ao momento de inércia, respectivamente.

Como a matriz  $A$  em (1.89) é um elemento de  $SU(2)$ , ela pode ser escrita em outras variáveis como  $A = a_0 + i a_i \tau_i$ , logo

$$\alpha = \sum_{i=0}^{i=3} a_i^2 - 1, \quad (1.92)$$

o que representa o vínculo esférico. A Lagrangiana (1.89) escrita em função das novas variáveis é dada por

$$L_s = -M + 2I \sum_{i=0}^{i=3} \dot{a}_i^2 + \lambda \alpha, \quad (1.93)$$

onde o vínculo esférico  $\alpha$  foi introduzido via o multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . A Hamiltoniana do sistema correspondente à Lagrangiana (1.93) pode ser escrita diretamente da seguinte forma

$$H_s = M + \frac{1}{8I} \sum_{i=0}^{i=3} \Pi_i^2 - \lambda \alpha, \quad (1.94)$$

com o momento canônico

$$\Pi_i = 4I \dot{a}_i. \quad (1.95)$$

A fim de aplicar o Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade, a inversa da matriz simplética que é definida por  $\Sigma_{ij} = \{\xi^i, \xi^j\}$  deve ser escrita. De fato, para versão NC do Modelo de Skyrme  $SU(2)$  a matriz  $\Sigma_{ij}$  é dada por

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \theta^{ij} & \delta^{ij} - a^i a^j & a^i & 0 \\ a^i a^j - \delta^{ij} & a^j \pi^i - a^i \pi^j & -\pi^j & a^i \\ -a^j & \pi^j & 0 & \delta^{11} \\ 0 & -a^j & \delta^{11} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

onde as coordenadas simpléticas consideradas são  $\xi^i = (a^i, \pi_i, \rho, \eta)$ .

Agora, o ponto crucial da indução da não-comutatividade no sistema está no fato de que consideramos os parênteses não-triviais entre as coordenadas coletivas  $\{a^i, a^j\} = \theta^{ij}$ , com  $\theta^{ij}$  constante e antissimétrica. Da equação (1.96), podemos obter diretamente a matriz simplética relativa ao Modelo de Skyrme  $SU(2)$  NC, ver apêndice A.2,

$$\Sigma_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{jk} & -a_j & -\pi_j \\ \delta_{jk} & \theta_{jk} & -\theta_{ij}a^i & -a_j - \theta_j^i \pi_i \\ a_k & \theta_{ij}a^i & 0 & 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i \\ \pi_k & a_k + \theta_k^i \pi_i & -1 + a_j a^j + a^j \theta_j^i \pi_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

Agora, como nosso objetivo é obter a Lagrangiana que descreve a dinâmica da versão Não-Comutativa do Modelo de Skyrme  $SU(2)$ , precisamos determinar os tensores de primeira ordem  $A_{\xi^j}(\xi^k)$  que aparecem na Lagrangiana de primeira ordem

$$\mathcal{L} = A_{\xi^i}(\xi^j)\dot{\xi}^i - V(\xi^j), \quad (1.98)$$

onde  $V(\xi^j)$  é o potencial simplético. Para isso, usamos a definição das entradas da matriz simplética em função dos tensores  $A_{\xi^j}(\xi^k)$ ,

$$\Sigma_{\xi^i \xi^j} = \frac{\partial A_{\xi^j}(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial A_{\xi^i}(\xi^k)}{\partial \xi^j}. \quad (1.99)$$

Essa equação, juntamente com (1.97), gera um conjunto de equações diferenciais parciais dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{a_k}}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial a^k} &= 0, \\ \frac{\partial A_{\pi_k}}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \pi^k} &= -\delta_{jk}, \\ \frac{\partial A_{\pi_k}}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \pi^k} &= \theta_{jk}, \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \rho} &= -a_j, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \eta} &= -\pi_j, \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \rho} &= \theta_{ji}a^i, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \eta} &= -a_j - \theta_j^i \pi_i, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \eta} &= 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Esse sistema de equações admite a seguinte solução, ver apêndice B.1,

$$\begin{aligned}
A_{a_k} &= \pi_k + \rho a_k + \eta \pi_k + \rho \pi^l \theta_{kl} & (1.101) \\
A_{\pi_k} &= \eta a_k + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j + \rho \theta_{ik} a^i \\
A_\rho &= -1 + a_j a^j \\
A_\eta &= 0,
\end{aligned}$$

juntamente com o vínculo esférico deformado  $1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i = 0$ . Logo, podemos escrever a Lagrangiana de primeira ordem não-comutativa do Modelo de Skyrme SU(2) (1.98) da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \left( \pi_k + \rho a_k + \eta \pi_k + \rho \pi^l \theta_{kl} \right) \dot{a}^k + \left( \eta a_k + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j + \rho \theta_{ik} a^i \right) \dot{\pi}^k + \left( -1 + a_j a^j \right) \dot{\rho} - V(\xi^j), \quad (1.102)$$

onde  $V(\xi^j)$  é o potencial simplético dado por

$$V(a^i, \pi_i, \rho, \eta) = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi^i. \quad (1.103)$$

Podemos ainda reescrever (1.102) usando o vínculo esférico deformado como

$$\mathcal{L} = \left( \pi_k + \rho a_k + \eta \pi_k + \right) \dot{a}^k + \left( \eta a_k \right) \dot{\pi}^k - \tilde{V}(\xi^j). \quad (1.104)$$

Com o potencial simplético  $\tilde{V}$  dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= V(\xi^j) - \left[ \rho \pi^l \theta_{il} \dot{a}^i + \rho \theta_{il} a^i \dot{\pi}^l + \left( -1 + a_j a^j \right) \dot{\rho} + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j \dot{\pi}^k \right] & (1.105) \\
&= V(\xi^j) - \left[ \rho \frac{d}{dt} (\pi^l \theta_{il} a^i) + \left( -1 + a_j a^j \right) \dot{\rho} + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j \dot{\pi}^k \right] \\
&= V(\xi^j) - \left[ \frac{d}{dt} (-1 + a_j a^j) + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j \dot{\pi}^k \right].
\end{aligned}$$

Entretanto, como o termo entre colchetes do lado esquerdo da expressão acima é uma derivada temporal total a Lagrangiana de primeira correspondente à versão não-comutativa do Modelo de Skyrme SU(2) será dada simplesmente por (1.104) com seguinte potencial simplético

$$\tilde{V} = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi^i + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j \dot{\pi}^k, \quad (1.106)$$

uma vez que duas Lagrangianas que diferem apenas por uma derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária das coordenadas generalizadas são

equivalentes, isto é, geram as mesmas equações de movimento. Aplicando as equações de Euler-Lagrange para as coordenadas  $\rho$  e  $\eta$  na Lagrangiana (1.102), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} &= a_k \dot{a}^k = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} &= \pi_k \dot{a}^k + a_k \dot{\pi}^k = \frac{d}{dt}(a^k \pi_k) = 0.\end{aligned}\tag{1.107}$$

Da última equação, temos que  $a^k \pi_k = C$ , em que  $C$  é uma constante no tempo. Usando a equação (1.107) podemos reescrever a equação (1.102) da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \pi_k \dot{a}^k - H,\tag{1.108}$$

onde o hamiltoniano  $H$  do Modelo de Skyrme  $SU(2)$  não-comutativo pode ser identificado como

$$H = M + \frac{1}{8\lambda} \pi_i \pi^i + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j \dot{\pi}^k.\tag{1.109}$$

Portanto, o Hamiltoniano da versão não-comutativa do modelo de Skyrme possui um termo de correção representado pelo último termo do lado direito da expressão acima dependente tanto do parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$  como dos momentos  $\pi^k$  e de suas derivadas. É importante observarmos que ao tomar o parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$  nulo, o Modelo de Skyrme padrão ou sem correções NCs é recuperado, como era esperado. Contudo, completamos a análise e aplicação do Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade (FSINC) em dois modelos.

## 1.7 Conclusão

Neste capítulo, encontramos a formulação Lagrangiana para uma versão não-comutativa para o Modelo de Skyrme  $SU(3)$  e para o Modelo Sigma Não-linear, importantes modelos em física teórica. As versões não-comutativas desses modelos foram obtidas fundamentalmente aplicando o Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade (FSINC), que foi descrito em detalhes na secção **3.1**, importante ressaltarmos que dentro desse método a escolha da estrutura simplética define a geometria não-comutativa do modelo e a constante de Planck entra na teoria via produto Moyal-Weyl. Portanto, a aplicação desse método pode ser útil para obter versão não-comutativas de vários sistemas físicos de interesse. E, como sabemos, são muitas as razões

para se estudar teoria de campos não-comutativos [34, 35]. Primeiramente, algumas teorias quânticas de campos possuem um melhor comportamento quando descritas em espaço-tempo não-comutativo. De fato, algumas se tornam completamente finitas, até mesmo não-perturbativas. Assim, o espaço-tempo não-comutativo pode ser de grande utilidade para construção de teorias alternativas à teoria de cordas ou, mesmo, à super-simetria. Em segundo lugar, teorias de campos não-comutativos possibilitam estudar física além do modelo padrão ou, ainda, estudar a física descrita pelo modelo padrão na presença de campos externos fortes. Em terceiro lugar, teorias de campos não-comutativas despertam interesse no que diz respeito a importantes questões em teoria quântica de campos como, por exemplo, programas axiomáticos ou de renormalização. Por fim, importante ressaltarmos que teorias NCs, relacionam teoria de campos com gravidade. E, desde que teoria de campos pode ser quantizada, o estudo de teorias campos não-comutativos pode ser uma importante ferramenta para investigar o problema de quantização da gravidade.

Citados muitas razões gerais para o estudo de teorias de campos não-comutativas, queremos ressaltar que o nosso objetivo principal neste capítulo foi estudar melhor o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) e aplica-lo para alguns sistemas de interesse. Posteriormente, pretende-se investigar melhor quais as consequências físicas das correções NCs presentes nas versões NCs dos modelos estudados.

## Capítulo 2

# Segunda lei de Newton em um espaço de fase não-comutativo estendido invariante sob rotações

Neste capítulo investigamos as propriedades de um espaço de fase clássico, que possui uma estrutura simplética consistente com as regras de comutação da Mecânica Quântica Não-comutativa (MQNC) num espaço de Hilbert estendido, que contém, além dos operadores usuais, os operadores  $\Theta^{\mu\nu}$  e os seus momentos canônicos conjugados  $\pi^{\mu\nu}$ . Nesse contexto, as equações de movimento para todas as coordenadas desse espaço de fase são determinadas e uma nova segunda lei de Newton não-comutativa é escrita. Essa segunda lei de Newton obtida apresenta correções dependentes das coordenadas e de suas derivadas temporais, assim como do potencial e de suas derivadas em relação as todas coordenadas do espaço de fase. Usamos essa nova segunda lei de Newton para tratar um oscilador harmônico, o qual permanece periódico se e somente se a razão entre as frequências de oscilação é um número racional. Em particular, investigamos as soluções do oscilador harmônico não-comutativo num espaço bidimensional espacialmente. Neste caso, observamos que a não-comutatividade induz uma perturbação estável no oscilador harmônico comutativo ou usual e também preserva a simetria de rotação.

## 2.1 Introdução

O primeiro trabalho em não-comutatividade foi publicado por Snyder em 1947 [1], este tinha como objetivo a tentativa de evitar singularidades em teorias de campos, contornando os problemas que infringiam a renormalização de certas teorias. Nesse trabalho, o autor introduziu um espaço-tempo com cinco dimensões e com simetria  $SO(4, 1)$ , em que os geradores do grupo  $\mathbf{M}^{CD}$  satisfazem a álgebra de Lorentz. Mais do que isso, ele fez a correspondência entre as coordenadas e esses geradores<sup>1</sup>  $x^\mu = a\mathbf{M}^{4D}$ , elevando as coordenadas ao status de operadores hermitianos. Dessa correspondência segue que

$$[x^\mu, x^\nu] = ia^2\mathbf{M}^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Logo, são imediatas as seguintes relações

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^{\mu\nu}, x^\gamma] &= i(x^\mu\eta^{\nu\gamma} - x^\nu\eta^{\mu\gamma}) \\ [\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\gamma\lambda}] &= i(\mathbf{M}^{\mu\lambda}\eta^{\nu\gamma} - \mathbf{M}^{\mu\gamma}\eta^{\nu\lambda} + \mathbf{M}^{\nu\gamma}\eta^{\mu\lambda} - \mathbf{M}^{\nu\lambda}\eta^{\mu\gamma}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

as quais satisfazem a invariância de Lorentz quadridimensional.

Nos últimos anos, um interesse notável tem sido dedicado pelos físicos para investigar as propriedades de espaços NCs. As motivações para esses estudos vem de diferentes áreas em física como referido no início do capítulo anterior, uma vez que na escala de Planck acredita-se que a variedade do espaço-tempo poderia ser substituída por uma estrutura não-comutativa [2, 36]. Entretanto, independente da motivação, a relação fundamental considerada é que os operadores coordenada do espaço-tempo satisfazem uma relação de comutação não-trivial dada por

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde a matriz antissimétrica  $\Theta^{\mu\nu}$ , que aparece do lado direito de (2.3), em geral pode depender das coordenadas e pode ser interpretada de várias maneiras. Por exemplo, de estudos em teorias de cordas na presença de um campo de fundo antissimétrico constante, espaço-tempo com este tipo de estrutura [4] foi obtido. Para esse caso a matriz  $\Theta^{\mu\nu}$  é constante e seu módulo está diretamente relacionado com a intensidade do campo de fundo. Contudo, a escolha de  $\Theta^{\mu\nu}$  constante conduz à anisotropia do espaço, passando a existir uma direção privilegiada no espaço-tempo, que preserva a invariância de translação e quebra a simetria de Lorentz [37]. A quebra da simetria de Lorentz causa sérios

---

<sup>1</sup> $C, D = 0, 1, 2, 3, 4; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Sendo que, foi adotado o sistema natural, em que  $\hbar = c = 1$ . Logo, o parâmetro  $a$  têm dimensão de comprimento.

problemas, como o efeito de birrefringência do vácuo [38], que até agora não foi observado experimentalmente. Entretanto, a escolha da matriz  $\Theta^{\mu\nu}$  constante traz também consequências favoráveis. De fato, para  $\Theta^{\mu\nu}$  constante a teoria de campos não-comutativos (TCNC) podem ser tratadas como uma deformação da teoria de campos usual, construídas pela substituição, na ação dos modelos, do produto usual entre campos pelo produto Moyal [39], definido por

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y\right)\phi_1(x)\phi_2(y)|_{x=y}. \quad (2.4)$$

Da definição (2.4), observamos diretamente que teorias construídas via produto Moyal são altamente não-locais. Esta condição leva a uma mistura específica de escalas chamada mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IR). Além disso, estas teorias NCs apresentam outros problemas como a não-unitariedade e a dificuldade para renormalização.

Outra possibilidade é considerar  $\Theta^{\mu\nu}$ , que aparece do lado direito de (2.3), como um operador tensorial que comuta com todos os operadores posição. Isso foi feito através de estudos em mecânica quântica e relatividade geral, por Doplicher, Fredenhagen e Roberts (DFR) [36, 2], eles mostraram que a invariância de rotação, mas não a invariância de Lorentz, pode ser assim recuperada. Eles o fizeram usando o fato, por eles mostrado, de que o estado que minimiza a incerteza no tempo e no espaço para um dado referencial de Lorentz escolhido corresponde à integração do tensor  $\Theta^{\mu\nu}$  sob todas as rotações espaciais. Só mais tarde, foi mostrado por Carlson *et al* [40] como construir uma teoria não-comutativa com simetria de Lorentz completa.

Neste capítulo especificamente estudamos uma forma de se obter as equações de movimento num espaço de fase clássico com uma estrutura simplética consistente com as regras de comutação adotadas em [41]. Nesse trabalho, Amorin considera  $\Theta^{\mu\nu}$  e também o seu momento canônico conjugado  $\pi^{\mu\nu}$  como operadores no espaço de Hilbert estendido, o qual preserva simetria de rotação. A partir das equações de movimento obtidas uma nova segunda lei de Newton invariante sob rotações apresentando correções dependentes do potencial e de suas derivadas em relação a todas as coordenadas do espaço; da coordenada  $\Theta^{\mu\nu}$ , do seu momento conjugado  $\pi^{\mu\nu}$  e de suas derivadas temporais é escrita. Essa nova segunda lei de Newton será usada para tratar um oscilador harmônico não-comutativo (NC). Em que as equações de movimento para todas as coordenadas do espaço de fase estendido e suas respectivas soluções são exibidas. Além disso, analisamos as condições de periodicidade dessas soluções. Por fim, trataremos em mais detalhes esse oscilador harmônico NC em duas dimensões espaciais. Neste caso, obtemos as soluções para as coordenadas

de posição do oscilador harmônico NC dependendo apenas das posições e velocidades iniciais. De forma que as soluções do oscilador harmônico NC e do usual possam ser comparadas, com ajuda de gráficos, para uma mesma configuração inicial, que possuímos a liberdade de escolher.

## 2.2 Construção da segunda lei de Newton invariante sob rotações

Como o principal objetivo é obter uma segunda lei de Newton invariante sob rotações por construção usando estruturas simpléticas, precisamos primeiramente estudar Mecânica Clássica Não-Comutativa (MCNC) em um espaço de fase estendido com uma estrutura simplética arbitrária. Inicialmente, descreveremos uma maneira de se construir uma estrutura simplética de forma geral.

Inicialmente, suponhamos que exista um conjunto de variáveis simpléticas  $\xi^a$  e  $\Omega^{ab}$  e uma estrutura simplética fixada por  $\{\xi^a, \xi^b\}$ ,  $\{\xi^a, \Omega^{bd}\}$  e  $\{\Omega^{ab}, \Omega^{cd}\}$ , com  $a, b, c, d = 1, 2, \dots, 2n$ , no sentido que para quaisquer funções  $F(\xi^a, \Omega^{bd})$  e  $G(\xi^a, \Omega^{bd})$ , tem-se (cf. [42])<sup>2</sup>

$$\{F, G\} = \{\xi^a, \xi^b\} \frac{\partial F}{\partial \xi^a} \frac{\partial G}{\partial \xi^b} + \{\xi^a, \Omega^{bd}\} \frac{\partial F}{\partial \xi^a} \frac{\partial G}{\partial \Omega^{bd}} + \{\Omega^{ac}, \Omega^{bd}\} \frac{\partial F}{\partial \Omega^{ac}} \frac{\partial G}{\partial \Omega^{bd}}. \quad (2.5)$$

Note que se  $F = \xi^a$  e  $G = \xi^b$ , temos

$$\{F, G\} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^j} = \{\xi^a, \xi^b\}. \quad (2.6)$$

Isso mostra que a definição (2.5) é mesmo consistente. Da estrutura simplética (2.5) e dado um Hamiltoniano  $H = H(\xi^a, \Omega^{ab})$ , podemos escrever as equações de movimento da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^a &= \{\xi^a, H\}, \\ \dot{\Omega}^{ab} &= \{\Omega^{ab}, H\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De forma mais geral, para funções quaisquer neste espaço, temos

$$\dot{F}^a = \{F^a, H\}, \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Por simplicidade, usaremos índices repetidos para indicar soma, notação de Einstein.

$$\dot{G}^{ab} = \{G^{ab}, H\}.$$

Sendo assim, acabamos de descrever uma forma geral de se construir uma estrutura simplética, semelhante ao caso de interesse, e de obter as equações de movimento decorrentes da mesma. Portanto, neste momento precisamos construir, de forma análoga ao que foi feito acima, a estrutura simplética de interesse que deve ser consistente com as regras de comutação [41],

$$[\mathbf{x}^k, \mathbf{p}_j] = i\delta_j^k, \quad [\Theta^{mj}, \pi_{kl}] = i(\delta_k^m \delta_l^j - \delta_l^m \delta_k^j) = i\delta^{mj}_{kl}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] &= 0, & [\mathbf{p}_k, \pi_{ij}] &= 0, \\ [\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^j] &= i\Theta^{kj} & [\mathbf{x}^k, \Theta^{ij}] &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x}^i$  representa o operador posição,  $\Theta^{ij}$  representa o operador não-comutatividade, enquanto  $\mathbf{p}^i$  e  $\pi^{ij}$  representam seus momentos canônicos conjugados, respectivamente. Dessas relações e da identidade de Jacobi envolvendo os operadores  $\mathbf{x}^i$ ,  $\mathbf{x}^j$  e  $\pi_{kl}$ , temos

$$[[\mathbf{x}^i, \pi_{kl}], \mathbf{x}^j] + [[\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^i], \pi_{kl}] + [[\pi_{kl}, \mathbf{x}^j], \mathbf{x}^i] = 0, \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

$$[[\mathbf{x}^m, \pi_{kl}], \mathbf{x}^j] - [[\mathbf{x}^j, \pi_{kl}], \mathbf{x}^m] = -i\delta^{mj}_{kl},$$

e, conseqüentemente,

$$[\mathbf{x}^m, \pi_{kl}] = \frac{i}{2}\delta^{mj}_{kl}\mathbf{p}_j. \quad (2.12)$$

Essa última relação de comutação completa a estrutura algébrica desejada. Agora, olhando para essa estrutura algébrica, principalmente para (2.12); temos indícios de como construir um novo operador coordenada deslocado [43, 44, 45, 31]

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{x}^i + \frac{1}{2}\Theta^{ij}P_j, \quad (2.13)$$

tal que suas relações de comutação com  $\pi_{ij}$ ,  $\Theta^{kl}$  e  $\mathbf{x}^j$  sejam nulas, logo esses operadores admitem um base comum de autovetores, fazendo de  $\mathbf{X}^j$  um operador fundamental em Mecânica Quântica Não-comutativa (MQNC). É importante ressaltar que as relações de comutação (2.9) e (2.12) satisfazem todas as equações decorrentes da identidade de Jacobi.

A estrutura simplética consistente com as relações de comutação oriundas da MQNC dadas em (2.9) e (2.12) podem ser escritas diretamente da seguinte forma

$$\{x^i, x^j\} = \Theta^{ij} \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i \quad \{x^i, \Theta^{jk}\} = 0, \quad \{x^i, \pi_{jk}\} = -\frac{1}{2}\delta^{il}_{jk}p_l, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= 0, & \{p_i, \Theta^{jk}\} &= 0, & \{p_i, \pi_{jk}\} &= 0, \\ \{\Theta^{ik}, \Theta^{jl}\} &= 0, & \{\Theta^{ik}, \pi_{jl}\} &= \delta^{ik}_{jl}, & \{\pi_{ik}, \pi_{jl}\} &= 0. \end{aligned}$$

onde os tensores  $\Theta^{ij}$  e  $\pi_{ij}$  são antissimétricos na troca de índices. Da estrutura simplética (2.14), podemos reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \Theta^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} + \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta^{ij}} \frac{\partial G}{\partial \pi_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial \pi_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \Theta^{ij}} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial \Theta^{ij}} \frac{\partial G}{\partial \pi_{ji}} - \frac{\partial F}{\partial \pi_{ji}} \frac{\partial G}{\partial \Theta^{ij}} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial \pi_{ji}} - \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial \pi_{ij}} \right) \frac{p_j}{2} + \left( \frac{\partial F}{\partial \pi_{ij}} \frac{\partial G}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_{ji}} \frac{\partial G}{\partial x^i} \right) \frac{p_j}{2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Consideremos agora um Hamiltoniano da forma [41]

$$H = \frac{\pi^2}{2\bar{m}} + \frac{p^2}{2m} + V(x^i, p_j, \Theta^{ij}, \pi_{ij}). \quad (2.16)$$

Então, usando (2.8) e (2.15), as equações de movimento para a estrutura simplética utilizada são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \Theta^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} + \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial \pi_{ji}} p_j \\ &= \Theta^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j} + \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} + \frac{p^i}{m} \right) + \left( \frac{\pi^{ji}}{\bar{m}} + \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) p_j, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (2.18)$$

$$\dot{\Theta}^{ij} = \{\Theta^{ij}, H\} = 2 \frac{\partial H}{\partial \pi_{ij}} = 2 \frac{\pi^{ij}}{\bar{m}} + 2 \frac{\partial V}{\partial \pi_{ij}}, \quad (2.19)$$

$$\dot{\pi}_{ij} = \{\pi_{ij}, H\} = -2 \frac{\partial H}{\partial \Theta^{ij}} + \frac{\partial H}{\partial x^i} p_j = -2 \frac{\partial V}{\partial \Theta^{ij}} + \frac{\partial V}{\partial x^i} p_j. \quad (2.20)$$

Derivando (2.17) em relação ao tempo e agrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^i &= \dot{\Theta}^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j} + \Theta^{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \dot{x}^k + \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \dot{\pi}_{kl} \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \dot{\Theta}^{kl} \right\} + \dot{p}_j \left( \frac{\pi^{ji}}{\bar{m}} + \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) + p_j \left[ \frac{\dot{\pi}^{ji}}{\bar{m}} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) \dot{x}^k \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) \dot{\pi}_{kl} + \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) \dot{\Theta}^{kl} \right] + \frac{\dot{p}^i}{m} \\
&+ \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \dot{x}^k + \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \dot{\pi}_{kl} + \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \dot{\Theta}^{kl} \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A equação acima pode ser rescrita, com uso de (2.18), da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}^i &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m \left[ \Theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) + p_j \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \right] \dot{x}^k \tag{2.22} \\
&+ m \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \Theta^{ij} + \left( \frac{\pi^{ki}}{\bar{m}} + \frac{\partial V}{\partial \pi_{ki}} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) p_j + \frac{\partial}{\partial p^k} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \right] \dot{p}_k \\
&+ m \left[ \delta_k^i \delta_l^j \frac{\partial V}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \Theta^{ij} + \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) p_j + \frac{\partial}{\partial \Theta^{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \right] \dot{\Theta}^{kl} \\
&+ m \left[ \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) + \frac{p_j}{\bar{m}} \delta_k^j \delta_l^i + \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial \pi_{ji}} \right) + \frac{\partial}{\partial \pi_{kl}} \left( \frac{\partial V}{\partial p^i} \right) \right] \dot{\pi}_{kl}.
\end{aligned}$$

Esta equação representa a segunda lei de Newton que apresenta por construção invariância sob rotações num espaço de fase estendido NC. Nessa equação são evidentes as correções devido à não-comutatividade imersa na estrutura simplética (2.14). Tais correções são funções tanto da variação do potencial como da dinâmica das variáveis extras do espaço,  $\Theta^{ij}$  e seu momento canônico conjugado  $\pi_{ij}$ . Os dois primeiros termos da equação (2.22) são idênticos aos encontrados na segunda Lei de Newton não-comutativa mostrada em [46]. Nesta,  $\Theta^{ij}$  é considerado simplesmente um parâmetro NC constante, enquanto para o nosso caso  $\Theta^{ij}$  é uma variável dinâmica. Portanto, essa nova lei de Newton (2.22) generaliza os resultados obtidos em [46, 47]. Em [46] especificamente, os autores encontraram a segunda lei de Newton em espaços não-comutativos

$$m\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m\Theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \dot{x}^k, \tag{2.23}$$

diretamente das seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
\dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \Theta^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} + \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial \pi_{ji}} p_j \\
&= \Theta^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j} + \frac{p^i}{m}, \\
\dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Agora, analisando as equações (2.24) podemos verificar que a equação (2.23) não é invariante sob rotações. De fato, consideremos as seguintes transformações de coordenadas entre dois referenciais  $S$  e  $S'$ ,

$$\begin{aligned}
x'^j &= R^j_i x^i, \\
x^j &= (R^{-1})^j_i x'^i, \\
t' &= t,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde  $R^j_i$  representa as entradas de uma matriz de rotação arbitrária. Usando as transformações de coordenadas (2.25) podemos escrever as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\dot{x}'^i &= R^i_j \dot{x}^j, \\
\frac{\partial V}{\partial x'^j} &= \frac{\partial V}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = (R^{-1})^k_j \frac{\partial V}{\partial x^k}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Então, com o uso dessas relações as velocidades no referencial linha podem ser escritas de duas maneiras:

$$\begin{aligned}
\dot{x}'^i &= \Theta^{ij} \frac{\partial V}{\partial x'^j} + \frac{p'^i}{m} \\
&= (R^{-1})^k_j \Theta^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^k} + \frac{p'^i}{m},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\dot{x}'^i = R^i_j \dot{x}^j = R^i_j \left( \Theta^{jk} \frac{\partial V}{\partial x^k} + \frac{p^j}{m} \right). \tag{2.28}$$

Usando também as transformações de coordenadas (2.25), a derivada do momento linear se transforma da seguinte forma

$$\dot{p}'_j = \frac{\partial V}{\partial x'^j} = \frac{\partial V}{\partial x^k} (R^{-1})^k_j = \dot{p}_k (R^{-1})^k_j = \dot{p}^k (R)_{jk}. \tag{2.29}$$

Desse modo, a subtração da derivada temporal da equação (2.28) pela derivada temporal de (2.27) pode ser escrita como

$$\ddot{x}^i - \ddot{x}'^i = \left[ R_j^i \Theta^{jk} - (R^{-1})^k_j \Theta^{ij} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^k} \right). \quad (2.30)$$

Sendo assim, as equações de movimento (2.24) e, conseqüentemente, (2.23), serão invariantes sob rotações se, e somente se, o termo do lado direito da equação acima se anular para qualquer matriz de rotação  $R(\alpha)$ , independente do ângulo de rotação  $\alpha$  escolhido. Para mostrar que esse termo não se anula para qualquer escolha da matriz  $R$  e de  $\alpha$ , consideremos uma matriz de rotação em torno do eixo  $Z$  em coordenadas cartesianas na forma

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Em seguida, usando essa matriz de rotação podemos escrever o lado direito de (2.30) para  $i = 1$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ R^1_j \Theta^{jk} - (R^{-1})^k_j \Theta^{1j} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^k} \right), \quad (2.32) \\ 0 &= \left[ R^1_1 \Theta^{1k} + R^1_2 \Theta^{2k} - (R^{-1})^k_2 \Theta^{12} - (R^{-1})^k_3 \Theta^{13} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^k} \right), \\ 0 &= \left[ R^1_2 \Theta^{21} - (R^{-1})^1_2 \Theta^{12} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^1} \right) + \left[ R^1_1 \Theta^{12} - (R^{-1})^2_2 \Theta^{12} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \left[ R^1_1 \Theta^{13} + R^1_2 \Theta^{23} - (R^{-1})^3_3 \Theta^{13} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^3} \right), \\ 0 &= \left[ R^1_1 \Theta^{13} + R^1_2 \Theta^{23} - (R^{-1})^3_3 \Theta^{13} \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^3} \right), \\ 0 &= \left[ (-1 + \cos\alpha) \Theta^{13} + \Theta^{23} \sin\alpha \right] \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^3} \right). \end{aligned}$$

Dessa equação é imediato que a igualdade acima não é satisfeita para qualquer ângulo de rotação  $\alpha$ , uma vez que  $\Theta^{ij}$  e  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x^3} \right)$  são não-nulos. É importante observarmos que se tivéssemos escolhido  $i = 2$  ou  $i = 3$  em (2.30), teríamos chegado a mesma conclusão. Portanto, as equações de movimento e, claro, a segunda lei de Newton não-comutativa (2.23) obtida pelos autores em [46] não são invariantes sob rotações.

## 2.3 Segunda lei de Newton NC invariante sob rotações aplicada ao oscilador harmônico

Muitas são as maneiras de se construir o Hamiltoniano de um oscilador harmônico isotrópico com invariância de rotação que apresente limite comutativo adequado [43, 48, 49, 50]. Então, consideremos, a menos da escolha de constantes, o Hamiltoniano (2.16) dado em [41], com o seguinte potencial

$$V(x^i, p_j, \Theta^{ij}, \pi_{ij}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left( x^i + \frac{1}{2}\Theta^{ij}p_j \right)^2 + \frac{1}{2}\bar{m}\Omega^2\Theta^2. \quad (2.33)$$

A fim de aplicar a segunda lei de Newton NC (2.22) ou equivalentemente as equações de movimento (2.17-2.20) para o potencial acima, vamos primeiramente calcular as seguintes relações

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m\omega^2 x^i + \frac{1}{2}m\omega^2 \Theta^{ij} p_j, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta^{ij}} = \bar{m}\Omega^2 \Theta_{ij} + m\omega^2 \left( x_i + \frac{1}{2}\Theta_{il} p^l \right) \frac{1}{2} p_j, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^i \partial x^j} = m\omega^2 \delta_{ij}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta^{ki} \partial x_j} = \frac{1}{2} m\omega^2 p_i \delta_k^j. \quad (2.37)$$

$$\cdot \quad (2.38)$$

Dessas relações podemos reescrever as equações de movimento (2.17-2.20) na forma

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \frac{1}{2}\Theta^{ij} \left( m\omega^2 x_j + \frac{1}{2}m\omega^2 \Theta_{jl} p^l \right) + \frac{p^i}{m} + \left( \frac{\pi^{ji}}{\bar{m}} \right) p_j, \quad (2.39)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -m\omega^2 x_i - \frac{1}{2}m\omega^2 \Theta_{ij} p^j, \quad (2.40)$$

$$\dot{\Theta}^{ij} = \{\Theta^{ij}, H\} = 2\frac{\pi^{ij}}{\bar{m}}, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{ij} &= \{\pi_{ij}, H\} = -2 \left\{ \bar{m}\Omega^2 \Theta_{ij} + m\omega^2 \left( x_i + \frac{1}{2}\Theta_{il} p^l \right) \frac{1}{2} p_j \right\} \\ &+ \left( m\omega^2 x_i + \frac{1}{2}m\omega^2 \Theta_{il} p^l \right) p_j \\ &= -2\bar{m}\Omega^2 \Theta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.42) na derivada temporal da equação (2.41), obtemos uma equação diferencial para  $\Theta^{ij}$ , semelhante à equação diferencial de um oscilador harmônico usual,

$$\ddot{\Theta}^{ij} + 4\Omega^2\Theta^{ij} = 0. \quad (2.43)$$

Essa equação admite uma solução geral na forma <sup>3</sup>

$$\Theta^{ij}(t) = D^{ij} \cos(2\Omega t + \phi^{ij}), \quad (2.44)$$

onde  $D^{ij}$  e  $\phi^{ij}$  são constantes. Usando o valor de  $\Theta^{ij}(t)$  em (2.41), temos

$$\pi_{ij}(t) = -\overline{m}\Omega D^{ij} \sin(2\Omega t + \phi^{ij}). \quad (2.45)$$

Fazendo uma transformação no espaço de fase análoga à transformação no espaço de Hilbert (2.13) usada em (MQNC),

$$X^i = x^i + \frac{1}{2}\Theta^{ij}p_j, \quad (2.46)$$

podemos rescrever as equações (2.39) e (2.40) da seguinte forma

$$\dot{X}^i = \frac{p^i}{m}, \quad (2.47)$$

$$\dot{p}_i = -m\omega^2 X_i. \quad (2.48)$$

Derivando (2.47) em relação ao tempo e usando (2.48), obtemos

$$\ddot{X}^i + \omega^2 X^i = 0. \quad (2.49)$$

Essa equação admite a seguinte solução

$$X^i(t) = A^i \cos(\omega t + \phi^i), \quad (2.50)$$

onde  $A^i$  e a fase  $\phi^i$  são constantes. Agora, da equação (2.47) é imediato que

$$p^i(t) = -m\omega A^i \sin(\omega t + \phi^i). \quad (2.51)$$

Finalmente, usando a transformação (2.46), a solução que faltava ser determinada para as equações de movimento (2.39-2.42) é dada por

$$x^i(t) = A^i \cos(\omega t + \phi^i) - \frac{1}{2} \left( D^{ij} \cos(2\Omega t + \phi^{ij}) \right) \left[ -m\omega A_j \sin(\omega t + \phi_j) \right]. \quad (2.52)$$

Nessa equação, o segundo termo do lado direito representado pelo produto de funções periódicas corresponde à correção das coordenadas posição associado à estrutura simplética não-comutativa do espaço de fase considerado [51]. Essa correção depende basicamente do módulo da coordenada não-comutativa e do momento linear do sistema.

---

<sup>3</sup>Índices repetidos em termos da forma  $D^{ij} \cos(2\Omega t + \phi^{ij})$  e  $D^{ij} \sin(2\Omega t + \phi^{ij})$  não indicam soma.

### 2.3.1 Análise da periodicidade da solução do oscilador harmônico NC

Para analisar as condições de periodicidade da solução (2.52) suponhamos que a mesma seja periódica, com período igual a  $T$ . Logo,

$$x^i(t + T) = x^i(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usando (2.52), podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} x^i(t + T) - x^i(t) &= A^i \cos(\omega t + \phi^i + \omega T) + \frac{1}{2} m \omega A_j D^{ij} \cos(2\Omega t + \phi^{ij} + 2\Omega T) \quad (2.53) \\ &\times \left[ \sin(\omega t + \phi_j + \omega T) - A^i \cos(\omega t + \phi^i) - \frac{1}{2} m \omega A_j D^{ij} \left( \cos(2\Omega t + \phi^{ij}) \right) \right] \\ &\times \left[ \sin(\omega t + \phi_j) = A^i \cos(\omega t + \phi^i) \cos(\omega T) - A^i \sin(\omega t + \phi^i) \sin(\omega T) \right] \\ &+ \frac{1}{2} m \omega A_j D^{ij} \left[ \cos(2\Omega t + \phi^{ij}) \cos(2\Omega T) - \sin(2\Omega t + \phi^{ij}) \sin(2\Omega T) \right] \\ &\times \left[ \sin(\omega t + \phi_j) \cos(\omega T) + \cos(\omega t + \phi_j) \sin(\omega T) \right] - A^i \cos(\omega t + \phi^i) \\ &- \frac{1}{2} m \omega A_j D^{ij} \left( \cos(2\Omega t + \phi^{ij}) \right) \sin(\omega t + \phi_j) = 0. \end{aligned}$$

Essa equação será satisfeita se  $\cos(\omega T) = 1$  e  $\cos(2\Omega T) = 1$ . Então,  $\omega T = 2\pi k$  e  $2\Omega T = 2\pi l$ , com  $k$  e  $l$  números inteiros não-nulos. Dessas relações,  $l\omega T - 2\Omega k T = 0$  donde  $\frac{2\Omega}{\omega} = \frac{l}{k}$ . Portanto, se  $\omega$  e  $\Omega$  são tais que a razão  $\frac{2\Omega}{\omega}$  é racional, para  $\frac{2\Omega}{\omega} = \frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  são relativamente primos, isto é,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , a solução (2.52) é periódica, com período dado por  $T = \frac{2\pi}{\omega} m$ , onde  $m$  é o menor inteiro positivo tal que  $\frac{p}{q} m$  é um número inteiro, conseqüentemente podemos concluir que  $m = q$ . De fato, como  $\text{mdc}(p, q) = 1$  então, pela identidade Bézout, existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que  $ap + bq = 1$ . Logo,  $m = map + mbq = (\frac{p}{q} m)qa + mbq = [(\frac{p}{q} m)a + mb]q$ , isto é,  $m > 0$  é múltiplo de  $q$  e por conseguinte  $m \geq q$ , o que justifica a conclusão acima. Da equação para o período  $T = \frac{2\pi}{\omega} q$  observamos que se  $2\Omega$  e  $\omega$  são inteiros relativamente primos, então o período do oscilador é igual a  $2\pi$ , enquanto para  $\omega = 2\Omega$  o período do oscilador harmônico NC é dado por  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , que coincide com o período do oscilador harmônico usual.

### 2.3.2 Oscilador harmônico não-comutativo bidimensional

Buscando investigar em mais detalhes quais são os efeitos da não-comutatividade na dinâmica do oscilador harmônico NC, tratado anteriormente, iremos trata-

lo em duas dimensões espaciais. Dessa forma, a solução para as coordenadas de posição do oscilador harmônico NC (2.52) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}x^1(t) &= A^1 \cos(\omega t + \phi^1) + \frac{1}{2} m \omega D^{12} A_2 \cos(2\Omega t) \text{sen}(\omega t + \phi_2), \\x^2(t) &= A^2 \cos(\omega t + \phi^2) - \frac{1}{2} m \omega D^{12} A_1 \cos(2\Omega t) \text{sen}(\omega t + \phi_1).\end{aligned}\quad (2.54)$$

Sendo que consideramos por simplicidade a fase da coordenada  $\Theta^{ij}$  nula.

O nosso principal objetivo é evidenciar os efeitos das correções não-comutativas no oscilador harmônico NC bidimensional. Isso pode ser alcançado através de uma comparação detalhada entre as soluções e trajetórias desse oscilador com as de um oscilador usual ou comutativo. Entretanto, para que essa comparação seja adequada precisamos ter a liberdade de escolher a mesma configuração inicial para os dois osciladores. Em outras palavras, precisamos obter as soluções dinâmicas de ambos osciladores em função apenas das suas posições e velocidades iniciais, independente das fases ou de outras constantes. Sendo assim, consideremos que as condições iniciais dos dois osciladores são: posição inicial  $x_{00}^i$  e velocidade inicial  $\dot{x}_{00}^i$ . Com isso, para o oscilador harmônico usual, indicado pelo subíndice 0, podemos escrever as seguintes soluções

$$\begin{aligned}x_0^1(t) &= A_0^1 \cos(\omega t + \phi_0^1) = A_0^1 [\cos(\omega t) \cos(\phi_0^1) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\phi_0^1)], \\x_0^2(t) &= A_0^2 \cos(\omega t + \phi_0^2) = A_0^2 [\cos(\omega t) \cos(\phi_0^2) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\phi_0^2)]\end{aligned}\quad (2.55)$$

e

$$\begin{aligned}x_0^1(0) &= A_0^1 \cos(\phi_0^1) = x_{00}^1, \\ \dot{x}_0^1(0) &= -A_0^1 \omega \text{sen}(\phi_0^1) = \dot{x}_{00}^1, \\ x_0^2(0) &= A_0^2 \cos(\phi_0^2) = x_{00}^2, \\ \dot{x}_0^2(0) &= -A_0^2 \omega \text{sen}(\phi_0^2) = \dot{x}_{00}^2.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Assim, podemos reescrever (2.55) em função apenas das condições iniciais

para as posições e velocidades como

$$\begin{aligned}x_0^1(t) &= x_{00}^1 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_{00}^1}{\omega} \text{sen}(\omega t), \\x_0^2(t) &= x_{00}^2 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_{00}^2}{\omega} \text{sen}(\omega t),\end{aligned}\tag{2.57}$$

enquanto para o caso do oscilador com correções não-comutativas, usando as equações (2.54), temos

$$\begin{aligned}x^1(0) &= A^1 \cos(\phi^1) + \frac{1}{2} m \omega D^{12} A_2 \text{sen}(\phi_2) = x_{00}^1, \\ \dot{x}^1(0) &= -\omega A^1 \text{sen}(\phi^1) + \frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} A_2 \cos(\phi_2) = \dot{x}_{00}^1, \\ x^2(t) &= A^2 \cos(\phi^2) - \frac{1}{2} m \omega D^{12} A_1 \text{sen}(\phi_1) = x_{00}^2, \\ \dot{x}^2(0) &= -\omega A^2 \text{sen}(\phi^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} A_1 \cos(\phi_1) = \dot{x}_{00}^2.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Agora, para reescrever (2.54) em função apenas das condições iniciais, precisamos obter algumas relações algébricas do sistema de equações (2.58). Inicialmente, multiplicando a última equação em (2.58) por  $\frac{1}{2} m D^{12}$  e somando o resultado com a primeira equação desse mesmo sistema de equações, obtemos

$$\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1 = \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} m \omega D^{12} \right)^2 \right] A^1 \cos(\phi^1).\tag{2.59}$$

Enquanto, da multiplicação da terceira equação do conjunto de equações (2.58) por  $-\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12}$ , somado com a segunda equação,

$$-\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1 = \left[ \left( \frac{1}{2} m \omega D^{12} \right)^2 - 1 \right] \omega A^1 \text{sen}(\phi^1).\tag{2.60}$$

De forma análoga, multiplicando a segunda equação de (2.58) por  $\frac{1}{2} m D^{12}$  e somando com a terceira equação, encontramos a seguinte relação

$$-\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2 = \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} m \omega D^{12} \right)^2 \right] A^2 \cos(\phi^2).\tag{2.61}$$

Por último, da multiplicação da primeira equação em (2.58) por  $\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12}$ , somada com a quarta equação,

$$\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2 = \left[ \left( \frac{1}{2} m \omega D^{12} \right)^2 - 1 \right] \omega A^2 \text{sen}(\phi^2).\tag{2.62}$$

Assim, multiplicando a equação (2.59) por  $\omega$ , elevando o resultado ao quadrado e somando com o quadrado da equação (2.60), podemos obter diretamente o valor de  $A^1$ ,

$$A^1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\dot{x}_{00}^2 + \omega x_{00}^1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}m\omega^2 D^{12}x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1\right)^2}{\left[\left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\right)^2 - 1\right]^2 \omega^2}}, \quad (2.63)$$

onde consideramos  $|\frac{1}{2}m\omega D^{12}| \neq 1$ . Além disso,  $A^2$  pode ser obtido de forma análoga a  $A^1$ . Entretanto, das equações (2.59) a (2.62) podemos escrever as seguintes relações que serão, na verdade, mais úteis,

$$A^1 \cos(\phi^1) = \frac{\frac{1}{2}mD^{12}\dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\right)^2\right]}, \quad (2.64)$$

$$\omega A^1 \sin(\phi^1) = \frac{-\frac{1}{2}m\omega^2 D^{12}x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1}{\left[\left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\right)^2 - 1\right]}, \quad (2.65)$$

$$A^2 \cos(\phi^2) = \frac{-\frac{1}{2}mD^{12}\dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\right)^2\right]}, \quad (2.66)$$

$$\omega A^2 \sin(\phi^2) = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 D^{12}x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2}{\left[\left(\frac{1}{2}m\omega D^{12}\right)^2 - 1\right]}. \quad (2.67)$$

Agora, a equação (2.52) pode ser reescrita abrindo o seno e cosseno da soma de dois ângulos,

$$x^i(t) = A^i \cos(\omega t) \cos(\phi^i) - A^i \sin(\omega t) \sin(\phi^i) + \frac{1}{2}m\omega D^{ij} A_j \cos(2\Omega t) \left[ \sin(\omega t) \cos(\phi_j) + \cos(\omega t) \sin(\phi_j) \right]. \quad (2.68)$$

Substituindo as relações (2.64) a (2.67) na equação (2.68) para  $i, j = 1, 2$ ,

temos

$$\begin{aligned}
x^1(t) &= A^1 \cos(\phi^1) \cos(\omega t) - A^1 \text{sen}(\phi^1) \text{sen}(\omega t) \\
&+ \frac{1}{2} m \omega D^{12} \left[ A_2 \cos(\phi_2) \text{sen}(\omega t) + A_2 \text{sen}(\phi_2) \cos(\omega t) \right] \cos(2\Omega t) \\
&= \left\{ \frac{\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1}{1 - (\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2} \right\} \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{-\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1}{(\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2 - 1} \right\} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{2} m \omega D^{12} \times \\
&\times \left\{ \left( \frac{-\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2}{1 - (\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2}{(\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t),
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
x^2(t) &= A^2 \cos(\phi^2) \cos(\omega t) - A^2 \text{sen}(\phi^2) \text{sen}(\omega t) \\
&- \frac{1}{2} m \omega D^{12} \left[ A_1 \cos(\phi_1) \text{sen}(\omega t) + A_1 \text{sen}(\phi_1) \cos(\omega t) \right] \cos(2\Omega t) \\
&= \left\{ \frac{-\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2}{1 - (\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2} \right\} \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2}{(\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2 - 1} \right\} \text{sen}(\omega t) - \frac{1}{2} m \omega D^{12} \times \\
&\times \left\{ \left( \frac{\frac{1}{2} m D^{12} \dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1}{1 - (\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( \frac{-\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12} x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1}{(\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Dessa soluções para as coordenadas posição do oscilador harmônico bidimensional com correções NCs podemos escolher tanto o oscilador harmônico usual como o NC com a mesma configuração inicial. Para verificar esta última afirmação, suponha que tanto o oscilador harmônico usual como o oscilador com contribuições não-comutativas partem do repouso na posição  $x_{00}^1 = 1$ , ou seja,  $x_{00}^2 = \dot{x}_{00}^1 = \dot{x}_{00}^2 = 0$ . Então, das duas equações (2.57) e das equações (2.69) e (2.70), temos respectivamente

$$\begin{aligned}
x_0^1(0) &= x_{00}^1 \cos(0) = x_{00}^1 = 1, \\
x_0^2(0) &= x_{00}^2 \cos(0) = x_{00}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$x^1(0) = \left\{ \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2} \right\} + \frac{1}{2} m \omega D^{12} \left( \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 D^{12}}{(\frac{1}{2} m \omega D^{12})^2 - 1} \right) = 1, \tag{2.72}$$

$$x^2(0) = 0. \tag{2.73}$$

Enquanto das derivada da equações (2.69) e (2.70), como as mesmas condições iniciais, observamos que

$$\dot{x}^1(0) = \dot{x}^2(0) = 0. \quad (2.74)$$

Portanto, tanto o oscilador harmônico usual como o NC possuem a mesma configuração inicial.

Dando sequência ao nosso objetivo de estudar os efeitos da não-comutatividade na trajetória do oscilador harmônico, as soluções das equações de movimento para as coordenadas dos oscilador harmônico bidimensional com contribuições não-comutativas, mas com a escolha da mesma configuração inicial do oscilador harmônico usual, podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} x^1(t) &= \left\{ \frac{\alpha \dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \right\} \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{-\alpha\omega^2 x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right\} \text{sen}(\omega t) + \\ &+ \alpha\omega \left\{ \left( \frac{-\alpha \dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha\omega^2 x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} x^2(t) &= \left\{ \frac{-\alpha \dot{x}_{00}^1 + x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right\} \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\alpha\omega^2 x_{00}^1 + \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right\} \text{sen}(\omega t) - \\ &- \alpha\omega \left\{ \left( \frac{\alpha \dot{x}_{00}^2 + x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left( \frac{-\alpha\omega^2 x_{00}^2 + \dot{x}_{00}^1}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t), \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde substituímos  $(\frac{1}{2}mD^{12})$  por  $\alpha$  nas equações (2.69) e (2.70) para simplificar a notação. Entretanto, se considerarmos  $\Omega = 0$  nessas equações obtemos a solução do oscilador harmônico usual como um caso particular. Portanto, conseguimos determinar as soluções do oscilador harmônico NC invariante sob rotações independente dos ângulos de fase e da amplitude de oscilação

Agora, vamos considerar as seguintes condições iniciais:  $x_{00}^2 = 0$ ,  $\dot{x}_{00}^1 = 0$  e  $\dot{x}_{00}^2 = 0$ . Assim, usando as equações (2.75) e (2.76), para o oscilador harmônico NC, temos

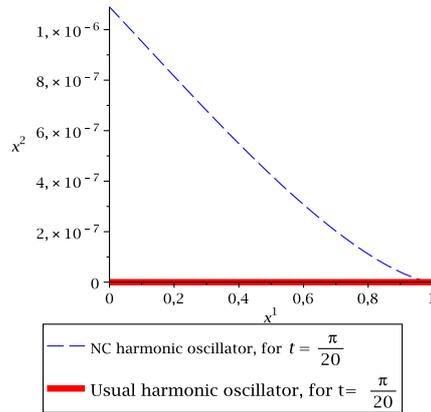
$$x^1(t) = \frac{x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \left\{ 1 - (\alpha\omega)^2 \cos(2\Omega t) \right\} \cos(\omega t), \quad (2.77)$$

$$x^2(t) = \frac{\alpha\omega x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \left\{ 1 - \cos(2\Omega t) \right\} \sin(\omega t). \quad (2.78)$$

Enquanto, da equação (2.57), a solução do oscilador harmônico usual é dada por

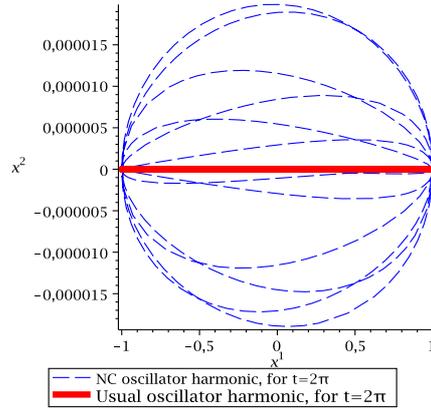
$$\begin{aligned} x_0^1(t) &= x_{00}^1 \cos(\omega t), \\ x_0^2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Das equações (2.77) e (2.78) percebemos diretamente que o oscilador harmônico NC passa pelo eixo  $x^2$  no mesmo momento em que o oscilador harmônico usual passa pela origem, isto é, quando  $\cos(\omega t)$  se anula. Além disso, estes são os únicos momentos no qual o oscilador harmônico NC cruza o eixo  $x^2$ , desde que  $|\alpha\omega| < 1$ . Para exemplificar esse resultado, usando  $\alpha = 10^{-6}$ ,  $\omega = 10$  e  $\Omega = \frac{3}{2}$  nas equações (2.77), (2.78) e (2.57), a trajetória do oscilador harmônico NC e do usual são representadas na figura 2.1.

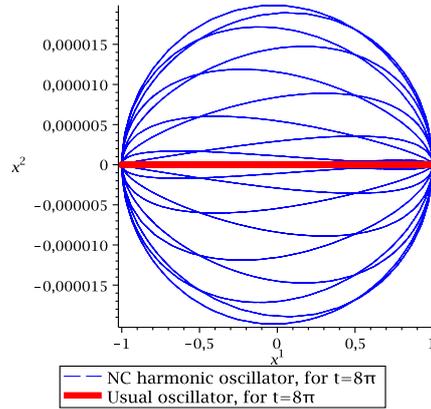


**Figura 2.1**

Enquanto, baseado na discussão sobre a periodicidade do oscilador harmônico NC realizada na subseção (2.3.1), quando escolhermos  $\omega = 10$  e  $2\Omega = 3$ , os quais são relativamente primos entre si, o período do oscilador é igual a  $2\pi$ . Isto pode ser evidenciado pelas figuras 2.2 e 2.3.



**Figura 2.2**



**Figura 2.3**

De fato, na primeira figura observamos que o oscilador harmônico NC completou um período para  $t = 2\pi$ , enquanto na segunda ele realizou quatro períodos para  $t = 8\pi$ , como era esperado. Além disso, notamos diretamente que o oscilador harmônico usual se movimenta no plano  $x^2 = 0$ . A distância entre as soluções do oscilador harmônico NC  $\vec{r}(t) = \left(x^1(t), x^2(t)\right)$  e do oscilador usual  $\vec{r}_0(t) = \left(x_0^1(t), x_0^2(t)\right)$  é definida como

$$d(\vec{r}(t), \vec{r}_0(t)) = \|\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)\| = \left(|x^1(t) - x_0^1(t)|^2 + |x^2(t) - x_0^2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.80)$$

Usando as mesmas condições iniciais dados por  $\vec{r}(0) = (x_{00}^1, 0)$  e  $\vec{r}_0(0) = (x_{00}^1, 0)$ , a distância  $d(\vec{r}(t), \vec{r}_0(t))$  pode ser escrita como

$$\|\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)\| = \left( \left| \frac{x_{00}^1(\alpha\omega)^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right|^2 |(1 - \cos 2\Omega t) \cos \omega t|^2 + \left| \frac{x_{00}^1(\alpha\omega)}{1 - (\alpha\omega)^2} \right|^2 |(1 - \cos 2\Omega t) \sin \omega t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.81)$$

A função distância satisfaz a seguinte condição

$$\|\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)\| \leq \frac{2|\alpha\omega|\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2}}{|1 - (\alpha\omega)^2|} |x_{00}^1|, \quad (2.82)$$

onde usamos previamente duas condições dadas por

$$|x^1(t) - x_0^1(t)| = \frac{|x_{00}^1(\alpha\omega)^2|}{|1 - (\alpha\omega)^2|} |(1 - \cos 2\Omega t) \cos \omega t| \leq \frac{2|\alpha\omega|^2|x_{00}^1|}{|1 - (\alpha\omega)^2|}, \quad (2.83)$$

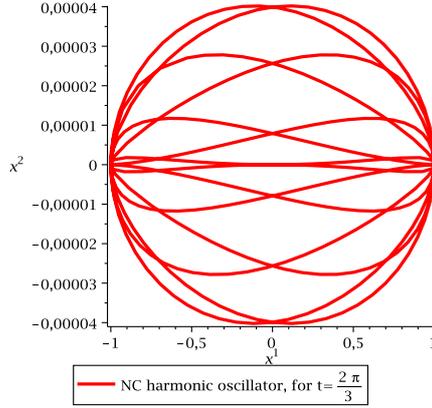
$$|x^1(t) - x_0^1(t)| = \frac{|x_{00}^1(\alpha\omega)|}{|1 - (\alpha\omega)^2|} |(1 - \cos 2\Omega t) \cos \omega t| \leq \frac{2|\alpha\omega||x_{00}^1|}{|1 - (\alpha\omega)^2|}. \quad (2.84)$$

A desigualdade (2.82) mostra que a não-comutatividade induz uma perturbação estável ao oscilador harmônico NC. De fato, para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)\| \leq \epsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , desde que  $|\alpha| < \delta$ , onde  $|\Theta^{ij}| = |D^{ij}|$  e  $\alpha = \frac{mD^{12}}{2}$ . Dessa forma, a distância entre o oscilador harmônico NC e o oscilador usual pode ser imperceptível quando o parâmetro NC  $D^{12}$  é suficientemente pequeno. Por outro lado, o efeito da não-comutatividade se torna mais significativa e evidente quando  $|x_{00}^1|$  cresce, desde que a distância entre as soluções e o deslocamento correspondente na direção da coordenada  $x^2$  são proporcionais a  $|x_{00}^1|$ .

Das equações (2.77) e (2.78), para  $|\alpha\omega| < 1$ , o oscilador NC passa pela origem se  $\cos(\omega t) = 0$  e  $\cos(2\Omega t) = 1$  para algum  $t > 0$ , então  $\omega t = l\pi + \frac{\pi}{2}$  e  $2\Omega t = 2k\pi$ , com  $l$  e  $k$  números inteiros positivos. Combinando as relações que envolvem  $l$  e  $k$ , temos

$$\frac{2\Omega}{\omega} = \frac{4l}{2k + 1}, \quad (2.85)$$

Dessa forma, quando as frequências satisfazem a relação acima o oscilador NC passa pela origem. Além disso, se o oscilador harmônico NC passa pela origem então ele é necessariamente periódico, uma vez que o número expresso do lado direito da relação (2.85) é sempre um número racional. Para ilustrar esse resultado, as soluções dadas por (2.77) e (2.78) são mostradas na figura 2.4, onde escolhemos  $\alpha = 10^{-6}$ ,  $\omega = 21$  e  $\Omega = 6$  ou, equivalentemente,  $k = 5$  e  $l = 3$ , em acordo com a expressão (2.85).



**Figura 2.4**

Usando as frequências escolhidas anteriormente,  $\omega = 21$  e  $\Omega = 6$ , o período do oscilador harmônico NC descrito subseção (2.3.1) é dado por  $T = \frac{2\pi}{\omega}q = \frac{2\pi}{3}$ , onde  $q = 7$ . Este valor para o período está em acordo com a trajetória mostrada na figura 2.4.

Para investigar as condições de periodicidade da solução do oscilador harmônico NC bidimensional, suponhamos que a solução dada por (2.77) e (2.78) é periódica se e somente se  $\cos(\omega T) = 1$  e  $\cos(2\Omega T) = 1$ , o qual é equivalente a  $\frac{2\Omega}{\omega}$  ser um número racional, conforme mostrado na subseção (2.3.1). Na verdade, nessa seção mostramos que se  $\cos(\omega T) = 1$  e  $\cos(2\Omega T) = 1$  ou  $\frac{2\Omega}{\omega} \in \mathbb{Q}$  o oscilador NC é periódico. Dessa forma, para assegurarmos a validade da nossa suposição resta mostramos que se o oscilador é periódico então  $\cos(\omega T) = 1$  e  $\cos(2\Omega T) = 1$  ou  $\frac{2\Omega}{\omega} \in \mathbb{Q}$ . De fato, seja a solução dada em (2.77) e (2.78) periódica, então existe  $T > 0$  tal que

$$x_{00}^1 = x^1(0) = x^1(T) = \frac{x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \left\{ 1 - (\alpha\omega)^2 \cos(2\Omega T) \right\} \cos(\omega T) \quad (2.86)$$

$$0 = x^2(0) = x^2(T) = \frac{\alpha\omega x_{00}^1}{1 - (\alpha\omega)^2} \left\{ 1 - \cos(2\Omega T) \right\} \sin(\omega T). \quad (2.87)$$

Da equação (2.87) segue que  $\sin(\omega T) = 0$  ou  $\cos(2\Omega T) = 1$ , para  $|\alpha\omega| > 0$ . Se  $\sin(\omega T) = 0$ , usando a equação (2.86), concluímos necessariamente que  $\cos(\omega T) = 1$ , para  $1 - (\alpha\omega)^2 > 0$  e  $1 - (\alpha\omega)^2 \cos(2\Omega T) > 0$ , desde que  $0 < |\alpha\omega| < 1$ . Além disso, substituindo  $\cos(\omega T) = 1$  em (2.86), concluímos

diretamente que  $\cos(2\Omega T) = 1$ . Se tivéssemos considerado  $\cos(2\Omega T) = 1$  em (2.87), da equação (2.86), chegaríamos a mesma conclusão desejada  $\cos(\omega T) = 1$ . Sendo assim, a suposição inicial de que a solução dada por (2.77) e (2.78) é periódica se e somente se  $\frac{2\Omega}{\omega}$  é um número racional foi provada. Portanto, considerando que  $|\alpha\omega| > 0$ , se  $\frac{2\Omega}{\omega}$  é igual a um número irracional então a solução do oscilador harmônico bidimensional invariante sob rotações dada por (2.77) e (2.78) não é periódica.

Agora, vamos discutir a invariância de rotação das solução do oscilador harmônico NC bidimensional dada por (2.69) e (2.70). Com esse objetivo, consideremos uma rotação espacial arbitrária em torno da origem das condições iniciais do oscilador NC,  $x_{00}^1, x_{00}^2, \dot{x}_{00}^1$ , e  $\dot{x}_{00}^2$ , dada por

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{00}^1 \\ \tilde{x}_{00}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{00}^1 \\ x_{00}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\dot{x}}_{00}^1 \\ \tilde{\dot{x}}_{00}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_{00}^1 \\ \dot{x}_{00}^2 \end{pmatrix}.$$

Onde  $\tilde{x}_{00}^1, \tilde{x}_{00}^2, \tilde{\dot{x}}_{00}^1$ , e  $\tilde{\dot{x}}_{00}^2$  são as novas condições iniciais. Substituindo essas novas condições nas equações (2.69) e (2.70), a solução do oscilador harmônico NC  $\vec{r} = (\tilde{x}^1(t), \tilde{x}^2(t))$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1(t) &= \left\{ \frac{\alpha \sin(\beta) \tilde{\dot{x}}_{00}^1 + \alpha \cos(\beta) \tilde{\dot{x}}_{00}^2 + \cos(\beta) x_{00}^1 - \sin(\beta) x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right\} \cos(\omega t) \\ &- \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{-\alpha\omega^2 \sin(\beta) x_{00}^1 - \alpha\omega^2 \cos(\beta) x_{00}^2 + \cos(\beta) \dot{x}_{00}^1 - \sin(\beta) \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right\} \sin(\omega t) \\ &+ \alpha\omega \left\{ \left( \frac{-\alpha \cos(\beta) \tilde{\dot{x}}_{00}^1 + \alpha \sin(\beta) \tilde{\dot{x}}_{00}^2 + \sin(\beta) x_{00}^1 + \cos(\beta) x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right) \sin(\omega t) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha\omega^2 \cos(\beta) x_{00}^1 - \alpha\omega^2 \sin(\beta) x_{00}^2 + \sin(\beta) \dot{x}_{00}^1 + \cos(\beta) \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t) \\ &= \cos(\beta) x^1(t) - \sin(\beta) x^2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^2(t) &= \left\{ \frac{-\alpha \cos(\beta) \dot{x}_{00}^1 + \alpha \sin(\beta) \dot{x}_{00}^2 + \sin(\beta) x_{00}^1 + \cos(\beta) x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right\} \cos(\omega t) \\
&- \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\alpha\omega^2 \cos(\beta) x_{00}^1 - \alpha\omega^2 \sin(\beta) x_{00}^2 + \sin(\beta) \dot{x}_{00}^1 + \cos(\beta) \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right\} \sin(\omega t) \\
&- \alpha\omega \left\{ \left( \frac{\alpha \sin(\beta) \dot{x}_{00}^1 + \alpha \cos(\beta) \dot{x}_{00}^2 + \cos(\beta) x_{00}^1 - \sin(\beta) x_{00}^2}{1 - (\alpha\omega)^2} \right) \sin(\omega t) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\omega} \left( \frac{-\alpha\omega^2 \sin(\beta) x_{00}^1 - \alpha\omega^2 \cos(\beta) x_{00}^2 + \cos(\beta) \dot{x}_{00}^1 - \sin(\beta) \dot{x}_{00}^2}{(\alpha\omega)^2 - 1} \right) \cos(\omega t) \right\} \cos(2\Omega t) \\
&= \sin(\beta) x^1(t) + \cos(\beta) x^2(t).
\end{aligned}$$

As duas últimas expressões podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1(t) \\ \tilde{x}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}.$$

Dessa equação matricial, concluímos imediatamente que uma rotação das condições iniciais do oscilador NC é equivalente a realizar a mesma rotação na solução do oscilador harmônico NC. Este resultado era esperado desde que a solução do oscilador NC (2.52) é invariante sob rotações.

Baseado na influência observada da não-comutatividade sobre a dinâmica do oscilador harmônico NC invariante sob rotações num espaço de fase estendido, associamos o efeito da não-comutatividade com o efeito de um campo de fundo oscilatório que varia no tempo e na posição. Além disso, a intensidade e a frequência de oscilação desse campo estão diretamente relacionados com o módulo e a frequência de oscilação da coordenada NC  $\Theta^{ij}$ , respectivamente.

Outra importante consideração sobre esse possível campo de fundo se refere a forma como o mesmo interage com o sistema. Na verdade, o efeito desse campo sobre o sistema depende explicitamente do momento linear do sistema. Agora, um campo com essas características nos lembra o campo magnético, o que sugere a associação entre a não-comutatividade e um campo de fundo. De fato, em [17] e [52] os autores associaram o efeito da não-comutatividade no movimento de uma partícula livre no espaço de fase clássico e quântico com o efeito de um campo magnético de fundo, respectivamente.

## 2.4 Conclusão

No presente trabalho obtivemos uma segunda lei de Newton num espaço de fase clássico, o qual consideramos apresentar uma estrutura simplética consistente com as regras de comutação da mecânica quântica não-comutativa (MQNC) num espaço de Hilbert estendido invariante sob rotações. Neste espaço, o objeto de não-comutatividade  $\Theta^{ij}$  e seu momento conjugado canônico  $\Pi^{ij}$  são considerados operadores. As correções presentes na segunda lei de Newton invariante sob rotações são funções do potencial e de suas variações em relação às coordenadas, da coordenada não-comutativa  $\Theta^{ij}$  e de seu momento conjugado. É importante ressaltarmos que essa nova segunda lei de Newton generaliza os resultados obtidos em outros trabalhos onde  $\Theta^{ij}$  é considerado apenas um parâmetro NC constante, nos quais a invariância sob rotação é perdida.

A segunda lei de Newton invariante sob rotações foi usada para tratar um oscilador harmônico NC descrito por um Hamiltoniano invariante sob rotações num espaço de fase estendido. Neste caso, determinamos as equações de movimento para todas as coordenadas do espaço de fase, incluindo a coordenada NC  $\Theta^{ij}$  e o seu momento conjugado  $\Pi_{ij}$ , com suas respectivas soluções. As condições de periodicidade dessas soluções foram analisadas. Isso mostrou que as soluções do sistema são periódicas se e somente se a razão entre as frequências de oscilação é um número racional.

Em particular, investigamos mais detalhadamente o oscilador harmônico NC bidimensional, para o qual determinamos as soluções dependendo apenas das posições e velocidades iniciais. Isso nos permitiu comparar as soluções dos oscilador harmônico NC com a solução do oscilador harmônico usual, ambos apresentando a mesma configuração inicial. De fato, o oscilador harmônico NC bidimensional cruza o eixo  $x^2$  no mesmo instante em que o oscilador harmônico usual passa pela origem. Além disso, estes são os únicos momentos em que os oscilador NC cruza o eixo  $x^2$ , desde que o módulo do parâmetro NC  $D^{ij}$  satisfaz a relação  $|\alpha\omega| < 1$ . Mostramos também que o oscilador NC passa pela origem se as frequências satisfazem a relação  $\frac{2\Omega}{\omega} = \frac{4l}{2k+1}$ , com  $k$  e  $l$  números inteiros positivos. Como essa relação sempre denota um número racional, se o oscilador harmônico NC passa pela origem ele é necessariamente periódico. Ainda para comparar as soluções dos osciladores harmônicos bidimensionais NC e usual, determinamos a função distância entre as suas soluções  $d(\vec{r}(t), \vec{r}_0(t))$ . Dessa função mostramos que a não-comutatividade induz uma perturbação estável ao oscilador usual e que a distância entre as soluções pode se tornar imperceptível quando o módulo da coordenada NC é suficientemente pequeno. Por outro

lado, o efeito da não-comutatividade se torna mais significativa e evidente na dinâmica do oscilador NC quando a posição inicial  $x_{00}^1$  aumenta, desde que a distância entre as soluções e o deslocamento na direção da coordenada  $x^2$  são proporcionais a  $|x_{00}^1|$ . As principais diferenças entre os osciladores foram ilustradas graficamente.

Frente às influências da não-comutatividade observadas, associamos o efeito da não-comutatividade com o efeito de um campo de fundo oscilatório que varia no tempo e na posição. Neste caso, a intensidade desse campo de fundo estaria diretamente relacionada com o módulo da coordenada NC  $\Theta^{ij}$  e sua interação efetiva com o sistema dependeria explicitamente do momento linear do sistema. Dentro de tudo que foi feito, vale a pena ressaltar o fato de termos explorado a dinâmica do parâmetro de não-comutatividade  $\Theta^{ij}$ , aqui considerado uma coordenada, que para o caso do oscilador harmônico NC teve sua dinâmica explicitamente descrita. Todavia, entendemos que a dinâmica da coordenada não-comutativa  $\Theta^{ij}$  merece mais estudos em outros sistemas físicos de interesse.

# Capítulo 3

## Modelo cosmológico clássico não-comutativo para fluidos perfeitos

### 3.1 Introdução

Conforme visto nos capítulos anteriores existem importantes motivações para se estudar teorias não-comutativas (NCs), essas motivações surgem em diversas áreas da física. Neste momento, será abordado uma área da física em que as ideias NCs merecem mais investigações, a cosmologia. Como no estudo de teorias de cordas, principal candidata para unificar todas as interações da natureza, surgem estruturas geométricas não-comutativas [4, 53, 54, 55], associado ao fato de que a cosmologia é fundamental para descrever os estágios iniciais do universo, pode-se inferir que nesse período a não-comutatividade também deva ter exercido um efeito notório. Baseado nessas ideias, alguns pesquisadores têm investigado alguns modelos não-comutativos em cosmologia quântica [56, 57]. Além disso, é bastante razoável que contribuições NCs tenham sobrevivido mesmo em estágios mais tardios do universo. Isso justifica o propósito de muitos pesquisadores em investigar modelos cosmológicos não-comutativos classicamente para tentar explicar alguns efeitos observados pela WMAP [58, 59]. Outra relevante aplicação dos conceitos de não-comutatividade em cosmologia clássica é a tentativa de explicar a presente expansão acelerada do universo [60, 61]. Contudo, existe uma forte motivação para investigar modelos cosmológicos clássicos não-comutativos para fluidos perfeitos [62].

Neste capítulo, inicialmente o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) será revisado, logo depois será apresentada a construção de uma versão não-comutativa (NC) desse modelo para diferentes fluidos perfeitos: poeira, radiação, energia escura, matéria rígida, cordas cósmicas e paredes de domínio. Isso será feito baseado no Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) discutido no primeiro capítulo, seção (1.4), juntamente com o formalismo variacional de Schutz usado para escrever o hamiltoniano do sistema. Na construção do modelo de FRW NC, uma descrição passo a passo de como se obter as equações de Friedmann-Lemaître corrigidas para o fator de escala  $a(t)$  com correções NCs é mostrada. Posteriormente, as soluções para o fator de escala são analisadas em detalhes, assim como a relação entre os conjuntos soluções das equações de Friedmann-Lemaître. Dessa forma, pode-se analisar como a não-comutatividade influencia na evolução do universo para cada configuração do sistema, ou seja, para diferentes combinações dos valores da curvatura espacial, da constante cosmológica, as quais podem ser positivas, negativas ou nulas; do parâmetro de proporcionalidade  $\alpha$  entre a pressão e densidade de matéria-energia do fluido perfeito considerado e, principalmente, para diferentes valores do parâmetro NC  $\beta$ . Além disso, apresenta-se possíveis interpretações para as correções NCs presentes nas equações de Friedmann-Lemaître corrigidas, entre elas estão a associação dos termos NCs com a constante cosmológica e com um fluido perfeito não-usual com equação de estado  $P = \alpha' \rho = (\alpha - \frac{1}{3})\rho$ , ambos casos o parâmetro NC  $\beta$  é estimado. Por fim, as principais considerações, conclusões e perspectivas a respeito da versão NC do modelo cosmológico de FRW são apresentadas.

## 3.2 Revisão do modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Os modelos cosmológicos recentes são baseados na premissa de que o universo em grandes escalas é basicamente o mesmo em qualquer parte, o que é conhecido como princípio cosmológico ou Princípio de Copérnico. Para fins práticos numa escala da ordem de centenas de megaparsec Mpc (3.26 milhões de anos-luz) o universo é essencialmente o mesmo em todos os pontos (*homogêneo*) e em todas as direções (*isotrópico*). A unidade megaparsec é usada tipicamente pelos astrônomos para expressar a distância entre galáxias vizinhas e entre aglomerados de galáxias. Observações de que a radiação cósmica de fundo, decorrentes de todas as direções do espaço, tem distribuição uniforme, nos dá indícios que, em larga escala, o universo deve ser mesmo

isotrópico em relação a um ponto qualquer do espaço. Como este ponto não é privilegiado, pode-se diretamente concluir que o universo deve ser isotrópico em todos os pontos do espaço. Usando o fato de que a isotropia em todos os pontos do espaço implica necessariamente em homogeneidade espacial, obtemos naturalmente os modelos espacialmente homogêneos e isotrópicos das Equações de Einstein. Estes também conhecidos pelas soluções de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW) ou, simplesmente, Friedmann-Robertson-Walker(FRW).

Pode-se mostrar que o princípio cosmológico requer que a métrica do universo tenha a forma da métrica de Friedmann-Robertson-Walker(FRW) [63]. Dessa forma, o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

pode ser escrito em coordenadas próprias e esféricas como <sup>1</sup>

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a^2 \left( \frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3.2)$$

onde  $g_{ij} = -\gamma_{ij}$  e  $\gamma_{ij} = \text{diag}\left\{\frac{1}{1-kr^2}, r^2, r^2 \sin^2 \theta\right\}$ ,  $N(t)$  é a função Lapso e  $k = \frac{k}{a^2(t_0)}$  é a curvatura espacial. Além disso,  $k$  pode assumir os valores  $-1, 0, 1$ , para o universo hiperbólico, plano e esférico, respectivamente.

A dinâmica do universo é governada pela equação de campos de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (3.3)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é a curvatura escalar e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. O tensor  $T_{\mu\nu}$  pode ser considerado, para grandes escalas, igual ao tensor de um fluido perfeito, desde que considerar o universo isotrópico e homogêneo implica na inexistência de transporte significativo de energia,

$$T_{\mu\nu} = (P + \epsilon)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Aqui  $U_\mu$  é a quadrivelocidade do fluido,  $\epsilon$  é a densidade de energia e  $P$  é a pressão do fluido.

As equações Friedmann-Lemaître para o fator de escala cósmico podem ser determinadas da equação de campos de Einstein para a métrica (3.2). Primeiramente, os tensores  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  precisam ser determinados. Além disso, a métrica e o fator de escala cósmico podem ser escritos como  $g_{\mu\nu} = a^2(t)\bar{g}_{\mu\nu}$

---

<sup>1</sup>Consideramos por simplicidade  $c = 1$

e  $a(t) = e^{\ln a(t)} = e^{\Sigma(t)}$ , com  $\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag}\{\frac{N^2}{a^2(t)}, -\gamma_{ij}\}$ . Usando  $\bar{g}_{\mu\nu}$  o tensor de Ricci pode ser escrito da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}(\square\Sigma) + 2\bar{\nabla}_\mu\Sigma\bar{\nabla}_\nu\Sigma - 2\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\Sigma - 2\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\Sigma)^2. \quad (3.5)$$

Logo, obtido os símbolos de  $\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu$ , o tensor  $\bar{R}_{\mu\nu}$  pode ser determinado e, por conseguinte, da equação (3.5),  $R_{\mu\nu}$  pode ser escrito diretamente. Substituindo os valores de  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , onde  $\gamma_{rr} = \frac{1}{1-kr^2} = f(r)$ ,  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$  e  $\gamma_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ , na equação para os símbolos de Christoffel em função da métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ ,

$$\bar{\Gamma}_{\beta\sigma}^\alpha = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\delta}[\partial_\beta\bar{g}_{\delta\sigma} + \partial_\sigma\bar{g}_{\delta\beta} - \partial_\delta\bar{g}_{\beta\sigma}], \quad (3.6)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{rr}^r &= \frac{1}{2}\gamma^{rr}\partial_r\gamma_{rr} = \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}, \\
\bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\phi &= \frac{1}{2}\gamma^{\phi\phi}\partial_\phi\gamma_{\phi\phi} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2}\gamma^{\theta\theta}\partial_\theta\gamma_{\theta\theta} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{\theta r}^r &= \frac{1}{2}\gamma^{rr}\partial_\theta\gamma_{rr} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{\phi r}^r &= \frac{1}{2}\gamma^{rr}\partial_\phi\gamma_{rr} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{rr}^\theta &= \frac{1}{2}\gamma^{\theta\theta}\partial_r\gamma_{rr} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{rr}^\phi &= \frac{1}{2}\gamma^{\phi\phi}\partial_r\gamma_{rr} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2}\gamma^{rr}\partial_r\gamma_{\theta\theta} = -\frac{1}{2f(r)}(2r) = -\frac{r}{f(r)}, \\
\bar{\Gamma}_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2}\gamma^{rr}\partial_r\gamma_{\phi\phi} = -\frac{1}{2f(r)}(2r\sin^2\theta) = -\frac{r\sin^2\theta}{f(r)}, \\
\bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{1}{2}\gamma^{\theta\theta}\partial_\theta\gamma_{\phi\phi} = -\frac{1}{2r^2}2r^2\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta, \\
\bar{\Gamma}_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{2}\gamma^{\phi\phi}\partial_r\gamma_{\phi\phi} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}2r\sin^2\theta = \frac{1}{r}, \\
\bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2}\gamma^{\theta\theta}\partial_r\gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{2r^2}2r = \frac{1}{r}, \\
\bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi &= \frac{1}{2}\gamma^{\phi\phi}\partial_\theta\gamma_{\phi\phi} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}2r^2\sin\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta, \\
\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^\phi &= -\frac{1}{2}\gamma^{\phi\phi}\partial_\phi\gamma_{\theta\theta} = 0, \\
\bar{\Gamma}_{\phi\theta}^\theta &= \frac{1}{2}\gamma^{\theta\theta}\partial_\phi\gamma_{\theta\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde todos os símbolos de Christoffel com três índices distintos são nulos, pois a métrica é diagonal, enquanto para os símbolos de Christoffel envolvendo o

tempo,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{1}{2}\bar{g}^{00}[\partial_0\bar{g}_{00} + \partial_0\bar{g}_{00} - \partial_0\bar{g}_{00}] \\
&= \frac{a^2}{2N^2(t)}\partial_t\left(\frac{N^2(t)}{a^2(t)}\right) = \frac{a^2}{2N^2}\left(\frac{2N^2\dot{N}a^2 - 2a\dot{a}N^2}{a^4}\right) \\
&= \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\bar{\Gamma}_{\beta\sigma}^0 = \frac{1}{2}\bar{g}^{00}[\partial_\beta\bar{g}_{0\sigma} + \partial_\sigma\bar{g}_{0\beta} - \partial_0\bar{g}_{\beta\sigma}]. \tag{3.9}$$

Se  $\beta$  e  $\sigma$  são distintos e não-nulos em (3.9), então  $\bar{\Gamma}_{\beta\sigma}^0$  é nulo. Enquanto, para  $\sigma = \beta$  não-nulos,  $\bar{\Gamma}_{\beta\beta}^0 = 0$ . Analogamente, os símbolos de Christoffel  $\bar{\Gamma}_{0i}^i$ ,  $\bar{\Gamma}_{j0}^i$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ , são nulos. Nesse ponto, as componentes do tensor de Ricci  $\bar{R}_{ij}$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ij} &= \partial_k\bar{\Gamma}_{ij}^k - \partial_i\bar{\Gamma}_{jk}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^k\bar{\Gamma}_{km}^m - \bar{\Gamma}_{ik}^m\bar{\Gamma}_{mj}^k; \\
\bar{R}_{rr} &= \partial_r\bar{\Gamma}_{rr}^r - \partial_r\bar{\Gamma}_{rr}^r - \partial_r\bar{\Gamma}_{r\phi}^\phi - \partial_r\bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta + \bar{\Gamma}_{rr}^r\bar{\Gamma}_{rm}^m - \bar{\Gamma}_{rk}^m\bar{\Gamma}_{mr}^k \\
&= \frac{2}{r^2} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\right) - \bar{\Gamma}_{rk}^r\bar{\Gamma}_{rr}^k - \bar{\Gamma}_{rk}^\phi\bar{\Gamma}_{\phi r}^k - \bar{\Gamma}_{rk}^\theta\bar{\Gamma}_{\theta r}^k \\
&= \frac{2}{r^2} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\right) - \left(\frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\right)\frac{\partial_r f(r)}{2f(r)} - 2\frac{1}{r^2} \\
&= \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)}\left(\frac{2}{r}\right) \\
&= \frac{1 - kr^2}{r}\left(\frac{2kr}{(1 - kr^2)^2}\right) = \frac{2k}{1 - kr^2},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\theta\theta} &= \partial_k \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^k - \partial_\theta \bar{\Gamma}_{\theta k}^k + \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^k \bar{\Gamma}_{km}^m - \bar{\Gamma}_{\theta k}^m \bar{\Gamma}_{m\theta}^r & (3.11) \\
&= \partial_r \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi + \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r \left( \bar{\Gamma}_{rr}^r + \bar{\Gamma}_{r\phi}^\phi + \bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta \right) \\
&\quad - \left( \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^\phi + \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r \bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta + \bar{\Gamma}_{\theta r}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r \right) \\
&= \partial_r \left( \frac{-r}{f(r)} \right) - \partial_\theta \cot \theta - \frac{r}{f} \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)} \right) - \cot^2 \theta - 2 \left( \frac{1}{r} \right) \frac{-r}{f(r)} \\
&= (-r) \left( \frac{-\partial_r f(r)}{r^2} \right) + \csc^2 \theta - \frac{r}{f} \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)} \right) - \cot^2 \theta + \frac{1}{f(r)} \\
&= \frac{r \partial_r f(r)}{2f^2(r)} - \frac{1}{f(r)} + (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) \\
&= \frac{2kr}{(1 - kr^2)^2} \frac{r}{2} (1 - kr^2)^2 - (1 - kr^2) + 1 = 2kr^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\phi\phi} &= \partial_k \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^k - \partial_\phi \bar{\Gamma}_{\phi k}^k + \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^k \bar{\Gamma}_{km}^m - \bar{\Gamma}_{\phi k}^m \bar{\Gamma}_{m\phi}^r & (3.12) \\
&= \partial_r \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^r - \partial_\theta \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta + \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^r \left( \bar{\Gamma}_{rr}^r + \bar{\Gamma}_{r\phi}^\phi + \bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta \right) \\
&\quad + \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi - \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^r \bar{\Gamma}_{r\phi}^\phi - \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \\
&= -\partial_r \left( \frac{r}{f(r)} \right) \sin^2 \theta - \partial_\theta (\sin \theta \cos \theta) - \left( \frac{r \sin^2 \theta}{f(r)} \right) \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)} \\
&\quad - \left( \frac{r \sin^2 \theta}{f(r)} \right) \frac{2}{r} - \sin \theta \cos \theta \cot \theta + \left( \frac{2r \sin^2 \theta}{f(r)} \right) \frac{1}{r} + 2 \cot \theta \sin \theta \cos \theta \\
&= \left( \frac{r \partial_r f(r)}{f^2(r)} - \frac{1}{f(r)} \right) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\
&\quad - \left( \frac{r \sin^2 \theta}{f(r)} \right) \frac{\partial_r f(r)}{2f(r)} + \cos^2 \theta \\
&= \left( 2r^2 k - 1 + kr^2 \right) \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta = 2kr^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Contudo, o tensor  $R_{ij}$ , que nesse caso é diagonal, pode ser reescrito em função da métrica como

$$\bar{R}_{ij} = -2k\bar{g}_{ij}. \quad (3.13)$$

Enquanto o tensor  $\bar{R}_{00}$  é dado por

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{00} &= \partial_\mu \bar{\Gamma}_{00}^\mu - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0\mu}^\mu + \bar{\Gamma}_{00}^\mu \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\nu - \bar{\Gamma}_{0\mu}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu 0}^\mu \quad (3.14) \\
&= \partial_0 \bar{\Gamma}_{00}^0 + \partial_j \bar{\Gamma}_{00}^j - \partial_0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0\nu}^\nu + \bar{\Gamma}_{00}^i \bar{\Gamma}_{i\nu}^\nu - \bar{\Gamma}_{00}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu 0}^0 - \bar{\Gamma}_{0j}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu 0}^j \\
&= \partial_j \bar{\Gamma}_{00}^j - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^i \bar{\Gamma}_{i\nu}^\nu - \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{j0}^0 - \bar{\Gamma}_{0j}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu 0}^j \\
&= \partial_j \bar{\Gamma}_{00}^j - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{j\nu}^\nu - \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{j0}^0 - \bar{\Gamma}_{0j}^\nu \bar{\Gamma}_{\nu 0}^j \\
&= \partial_j \bar{\Gamma}_{00}^j - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{j0}^0 + \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{ji}^i - \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{j0}^0 - \bar{\Gamma}_{0j}^0 \bar{\Gamma}_{00}^j - \bar{\Gamma}_{0j}^i \bar{\Gamma}_{i0}^j \\
&= \partial_j \bar{\Gamma}_{00}^j - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0j}^j + \bar{\Gamma}_{00}^j \bar{\Gamma}_{ji}^i - \bar{\Gamma}_{0j}^0 \bar{\Gamma}_{00}^j - \bar{\Gamma}_{0j}^i \bar{\Gamma}_{i0}^j = 0,
\end{aligned}$$

onde foi usado implicitamente que  $\bar{\Gamma}_{0j}^0$  e  $\bar{\Gamma}_{0j}^i$  são nulos. Para se determinar o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , usando (3.5), o termo que aparece do lado direito da (3.5) precisa ser primeiramente calculado,

$$\begin{aligned}
\Box \Sigma &= \bar{g}^{00} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \Sigma = \bar{g}^{00} \delta_0^\alpha \delta_0^\beta \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta \Sigma = \bar{g}^{00} \left( \partial_0^2 \Sigma - \bar{\Gamma}_{00}^0 \partial_0 \Sigma \right) \quad (3.15) \\
&= \frac{a^2}{N^2} \left[ \partial_t^2 \ln a + \left( \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \partial_t \ln a \right] \\
&= \frac{a^2}{N^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a} \dot{N}}{aN} \right].
\end{aligned}$$

Onde a equação (3.8) e definição de  $\Sigma$  foram usadas. Sendo assim, usando as equações (3.14) e (3.15) na equação (3.5), as componentes do tensor de Ricci podem escritas diretamente,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \bar{R}_{00} - \bar{g}_{00} (\Box \Sigma) + 2 \bar{\nabla}_0 \Sigma \bar{\nabla}_0 \Sigma - 2 \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \Sigma - 2 (\dot{\Sigma})^2 \quad (3.16) \\
&= -\bar{g}_{00} \bar{g}^{00} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \Sigma + 2 \bar{\nabla}_0 \Sigma \bar{\nabla}_0 \Sigma - 2 \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \Sigma - 2 (\dot{\Sigma})^2 \\
&= -3 \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \Sigma = -3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a} \dot{N}}{aN} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + \gamma_{ij} (\Box \Sigma) + 2 \gamma_{ij} \bar{g}^{00} (\dot{\Sigma})^2 \quad (3.17) \\
&= \gamma_{ij} \left( 2k + \frac{\ddot{a}a}{N^2} - \frac{a \dot{a} \dot{N}}{aN^3} + \frac{2\dot{a}^2}{N^2} \right).
\end{aligned}$$

Enquanto a curvatura escalar pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{N^2} \left( -3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN} \right] \right) \\
&+ g^{ij} \gamma_{ij} \left( 2k + \frac{\ddot{a}a}{N^2} - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} + \frac{2\dot{a}^2}{N^2} \right) \\
&= -\frac{6k}{a^2} - \frac{6\ddot{a}}{aN^2} + \frac{6\dot{a}\dot{N}}{aN^3} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2N^2}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

As equações de campo de Einstein (3.3) podem ser reescrita, com o uso da métrica, como

$$\begin{aligned}
G_\mu^\alpha &= R_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} R = 8\pi G T_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} + g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} \Lambda \\
G_\mu^\alpha &= R_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha R = 8\pi G T_\mu^\alpha + \delta_\mu^\alpha \Lambda.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

As equações de Einstein (3.19) podem ser escritas usando as componentes dos tensores de Ricci, equações (3.16) e (3.17),

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= R_{00} g^{00} - \frac{1}{2} R = \frac{-3}{N^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{Na} \right) + \frac{3k}{a^2} + \frac{3\ddot{a}}{N^2 a} \\
&- 3 \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2 N^2} \\
&= \frac{3k}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2 N^2},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
G_i^j &= R_{il} g^{lj} - \frac{1}{2} \delta_i^j R = -\frac{1}{a^2} \gamma_{il} \gamma^{lj} \left( 2k + \frac{\ddot{a}a}{N^2} - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} + \frac{2\dot{a}^2}{N^2} \right) \\
&+ \left( \frac{3k}{a^2} + \frac{3\ddot{a}}{N^2 a} - 3 \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2 N^2} \right) \delta_i^j \\
&= \delta_i^j \left( \frac{k}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{aN^2} - 2 \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Importante ressaltar que a escolha do tempo em todo estudo realizado está diretamente relacionada à escolha da função lapso. Para o tempo conforme  $t = \eta$  a função lapso é dada por  $N(\eta) = a(\eta)$ , enquanto para o tempo físico  $N(t) = 1$ . As componentes de  $G_\mu^\alpha$  para o tempo físico são dadas por

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= \frac{3k}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G T_0^0 + \Lambda g_0^0 \\
&= 8\pi G \rho + \Lambda,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
G_i^j &= \delta_i^j \left( \frac{k}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \\
&= 8\pi G T_i^j + \Lambda g_i^j = -8\pi G (\rho \delta_i^j) - \Lambda \delta_i^j,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ou

$$\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{3.24}$$

$$\frac{k}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G P + \Lambda, \tag{3.25}$$

onde (3.24) e (3.25) são denominadas equações de Friedmann e Lemaître, respectivamente.

As equações (3.24) e (3.25) possuem três incógnitas, o fator de escala, a densidade e a pressão. Como era de se esperar, existe uma terceira equação envolvendo essas variáveis que decorre da equação de conservação satisfeita pelo tensor energia-momento, que descreve o fluxo de energia e momento,

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0. \tag{3.26}$$

No entanto, o tensor energia-momento satisfaz as seguintes condições:

- 1)  $T_\nu^\mu$  é diagonal, pois  $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P)$ ;
- 2)  $\rho$  e  $P$  são funções apenas do  $t$ , então a única derivada do tensor momento-energia que sobrevive é a temporal,  $\nu = 0$ .

Logo, das condições satisfeitas por  $T_\nu^\mu$ , a expressão (3.26) pode ser reescrita na forma

$$\partial_0 T_0^0 + \Gamma_{0\mu}^\mu T_0^0 - \Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{0k}^i T_i^k = 0. \tag{3.27}$$

Do elemento de linha  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$ ,  $g_{00} = 1$  e  $g_{ij} = -a^2\gamma_{ij}$ . Dessa

forma, os símbolos de Christoffel presentes em (3.27) são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} = 0, \\
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = 0, \\
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{ik}(2\partial_0 g_{k0} - \partial_k g_{00}) = 0, \\
\Gamma_{i0}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{i0} - \partial_0 g_{i0}) = 0; \\
\Gamma_{0k}^i &= \frac{1}{2}g^{il}(\partial_0 g_{kl} + \partial_k g_{l0} - \partial_l g_{0k}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\gamma^{il}\right)\partial_0(a^2\gamma_{kl}) = \frac{2\dot{a}a}{2a^2}\delta_k^i = H\delta_k^i, \\
\Gamma_{ik}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_i g_{0k} + \partial_k g_{0i} - \partial_0 g_{ik}) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_0(-a^2\gamma_{ik}) = \frac{2a\dot{a}}{2}\gamma_{ik} = a^2 H\gamma_{ik}, \\
\Gamma_{0\alpha}^\alpha &= \Gamma_{0k}^k + \Gamma_{00}^0 = 3H.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Levando (3.28) em (3.27), a terceira equação envolvendo o fator de escala, a densidade e a pressão é dada por

$$\dot{\rho} + 3H\rho - H\delta_k^i T_i^k = 0$$

ou

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \tag{3.29}$$

onde  $H$  é chamado parâmetro de Hubble. Da equação (3.29) é imediato, usando a equação de estado para o fluido perfeito  $P = \alpha\rho$ , que

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(\alpha + 1)\frac{da}{a},$$

logo

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(\alpha+1)}, \tag{3.30}$$

onde  $\rho_0, a_0$  são constantes.

Ainda que o conjunto de equações (3.24) e (3.25) possua uma vasta literatura a seu respeito, uma análise da relação entre os seus conjuntos soluções será apresentada. Isso, servirá como base para análises posteriores das equações correspondentes para uma versão NC do modelo de FRW. Primeiramente, toda solução comum das equações (3.24) e (3.25) satisfaz a

equação (3.29). De fato, derivando (3.24) em relação ao tempo e usando (3.25), a seguinte expressão pode ser escrita

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} &= -\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \right) \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 3\frac{k}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\} \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G\rho + \Lambda - \left( -8\pi GP + \Lambda \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Logo,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \tag{3.32}$$

Portanto, se  $a(t)$  satisfaz as equações (3.24) e (3.25), satisfaz também (3.29), como desejado. Agora, suponha que  $a(t)$  seja uma solução de (3.24), então

$$\begin{aligned}
-\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \right) &= \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} = -8\pi GH(P + \rho) \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 3\frac{k}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\} \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G\rho + \Lambda - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

e, conseqüentemente,

$$-H \left\{ -8\pi GP + \Lambda - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\} = 0. \tag{3.34}$$

Daí,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP + \Lambda. \tag{3.35}$$

Portanto, se  $a(t)$  é solução de (3.24) também é solução de (3.25). Por outro lado, seja  $a(t)$  uma solução de (3.25) e  $f(t)$  uma função definida por

$$f(t) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.36}$$

Usando as equações (3.25) e (3.29) a derivada temporal da função  $f(t)$  pode

ser expressa como

$$\begin{aligned}
\dot{f}(t) &= \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} = 0 \\
&= H \left( \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) + 8\pi GH(P + \rho) \\
&= H \left\{ \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} + 8\pi GH(P + \rho) \right\} \\
&= H \left\{ \left( -8\pi GHP + \Lambda \right) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} + 8\pi GH(P + \rho) \right\} \\
&= -3H \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} \right),
\end{aligned}$$

ou

$$\dot{f}(t) = -3Hf(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}f(t). \quad (3.37)$$

Logo

$$f(t) = f_0 a(t)^{-3}, \quad (3.38)$$

onde  $f_0$  é uma constante. Então, se  $a(t)$  é solução de (3.25), também é solução de

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} + f_0 a^{-3}. \quad (3.39)$$

Portanto, o conjunto solução de (3.25) contém (3.24). Analogamente, o conjunto solução da equação

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G \left( P + \frac{\rho}{3} \right) + \frac{2\Lambda}{3}, \quad (3.40)$$

resultante da subtração da equação (3.25) pela equação (3.24), contém o conjunto solução da equação de Friedmann (3.24).

### 3.3 Versão NC do modelo de FRW

As equações para o fator de escala cósmico (3.24) e (3.25), obtidas das equações de campo de Einstein para o tensor métrico de FRW com componentes dadas por

$$\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}\left\{1, \frac{1}{1 - kr^2}, r^2, r^2 \sin^2 \theta\right\}, \quad (3.41)$$

podem ser obtidas do super-hamiltoniano [64],

$$H = \frac{-P_a^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + P_T a^{-3\alpha}, \quad (3.42)$$

e da equação de vínculo para o super-hamiltoniano  $H = 0$ . Na equação (3.42)  $T$  é a variável associado ao tipo de fluido,  $a$  é o fator de escala cósmico do universo, enquanto  $P_T$  e  $P_a$  são os momentos canônicos conjugados às variáveis  $T$  e  $a$ , respectivamente.

Uma versão NC do Modelo de FRW pode ser obtida aplicando o Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade (FSINC). Inicialmente, para aplicar o formalismo é necessário escrever a Lagrangiana de iteração-zero do sistema em primeira ordem nas velocidades, o que pode ser feito diretamente do super-hamiltoniano,

$$\mathcal{L}^{(0)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} - V(a, p_a, T, P_T), \quad (3.43)$$

onde  $V = N\Omega$  é o potencial simplético, com

$$\Omega = \frac{-P_a^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + P_T a^{-3\alpha}. \quad (3.44)$$

É importante ressaltar aqui a ausência de preocupação com o problema de ordenamento de operadores, tratado em [65, 66], presente no super-hamiltoniano, visto que o sistema será tratado de forma clássica, via o formalismo simplético.

De posse da Lagrangiana (3.43) o formalismo simplético pode ser aplicado, sendo que as variáveis simpléticas são descritas por  $\xi^i = (a, P_a, T, P_T, N)$ . Inicialmente, de (3.43) os correspondentes momentos 1-forma de iteração-zero  $A_\xi(\xi^j)^{(0)}$  são identificados diretamente,

$$\begin{aligned} A_a^{(0)} &= P_a & A_{P_a}^{(0)} &= 0 & A_T^{(0)} &= P_T, \\ A_{P_T}^{(0)} &= 0 & A_N^{(0)} &= 0 & & . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Substituindo os momentos 1-forma de iteração-zero na definição da matriz simplética

$$f_{\xi^i \xi^j} = \frac{\partial A_{\xi^j}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial A_{\xi^i}}{\partial \xi^j}, \quad (3.46)$$

a mesma pode ser escrita como

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Esta matriz é singular e tem o seguinte modo-zero

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Contraindo esse modo-zero com o gradiente do potencial simplético, um vínculo é obtido,

$$\sum_{i=1}^4 \nu_i \frac{\partial V}{\partial \xi^i} = \Omega. \quad (3.49)$$

Agora, introduzindo esse vínculo na parte cinética da Lagrangiana de primeira ordem  $\mathcal{L}^{(0)}$ , por meio de multiplicador de Lagrange  $\beta$ , a Lagrangiana de primeira-iteração pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}^{(1)} = P_a \dot{a} + p_T \dot{T} + \Omega \dot{\beta} - N \Omega. \quad (3.50)$$

Dessa Lagrangiana é imediato que as variáveis simpléticas são agora  $\xi^i = (a, P_a, T, P_T, N, \beta)$  e os momentos canônicos 1-forma de primeira-iteração correspondentes  $A_{\xi^i}(\xi^j)^{(1)}$  são

$$\begin{aligned} A_a^{(0)} &= P_a & A_{P_a}^{(0)} &= 0 & A_T^{(0)} &= P_T, \\ A_{P_T}^{(0)} &= 0 & A_N^{(0)} &= 0 & A_\beta^{(0)} &= \Omega. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Donde, com uso da relação (3.46), identifica-se a matriz simplética de primeira-iteração,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

A qual possui o seguinte modo zero

$$\mu = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & \frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

No entanto, a contração desse modo-zero com o gradiente do potencial simplético, fornece o mesmo vínculo já obtido anteriormente (3.49),

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i \frac{\partial V}{\partial \xi^i} = \Omega. \quad (3.54)$$

De acordo com o formalismo simplético, isso mostra que o sistema possui uma simetria de calibre que deve ser fixada e introduzida na Lagrangiana (3.50) para prosseguir com o formalismo. Feito isso, a Lagrangiana de segunda-iteração é dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = P_a \dot{a} + p_T \dot{T} + \Sigma \dot{\eta} - N\Omega, \quad (3.55)$$

onde  $\Sigma = N - 1$ , isto é, a função Lapso é igual a um, o que equivale à escolha do tempo físico; e as novas variáveis simpléticas são  $\xi^i = (a, P_a, T, P_T, N, \eta)$ . Usando a relação (3.46), obtém-se a seguinte matriz simplética não-singular de segunda-iteração,

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a inversa da matriz simplética, que têm como entradas os parênteses de Poisson entre as variáveis simpléticas,  $(f^{-1})^{ij} = \{\xi^i, \xi^j\}$ , pode ser determinada

$$(f^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

O instante crucial da aplicação do Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade (FSINC) nesse sistema reside em supor as seguintes relações entre os parênteses de Poisson, agora não-triviais,

$$\begin{aligned} \{a, T\} &= \theta, \\ \{P_a, P_T\} &= \beta. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esses parênteses são motivados pelo fato de que  $T$  e seu momento associado  $P_T$  podem ser definidos em função da entropia específica e do potencial  $\epsilon$  [64], os quais podem ser escritos como função da energia e da coordenada posição. Sendo que as coordenadas posição satisfazem o limite clássico da relação de comutação não-trivial entre os operadores de posição adotada em Mecânica Quântica Não-comutativa (MQNC). Contudo, a inversa da matriz simplética,

incluindo os parênteses (3.57), pode ser reescrita como

$$f^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \theta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Dessa equação a matriz simplética pode ser determinada diretamente, usando que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \theta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & L & M \\ N & O & P & Q & R & S \\ T & U & V & X & Y & Z \\ K & \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{E} \\ \tilde{F} & \tilde{G} & \tilde{H} & \tilde{I} & \tilde{J} & \tilde{L} \end{bmatrix} = [I_d],$$

onde a segunda matriz do lado esquerdo representa a matriz simplética a ser determinada. A equação matricial acima, gera um conjunto de equações. Inicialmente, para primeira coluna,

$$\begin{cases} G + \theta N = 1 \\ -A + \beta T = 0 \\ T - \theta A = 0 \\ -N - \beta G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\theta\beta + 1)T = 0 \\ -\beta(1 - N\theta) - N = 0 \\ \tilde{F} = K = 0. \end{cases}$$

Daí,  $T = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ ,  $\tilde{F} = K = 0$ ,  $N = \frac{\beta}{\beta\theta-1}$  e  $G = \frac{-1}{\beta\theta-1}$ . Analogamente, para as demais colunas,

$$\begin{cases} H + \theta O = 0 \\ -B + \beta U = 1 \\ U - \theta B = 0 \\ -O - \beta H = 0 \\ \tilde{A} = \tilde{G} = 0, \end{cases}$$

logo  $B = \frac{1}{\beta\theta-1}$ ,  $\tilde{A} = \tilde{G} = 0$ ,  $U = \frac{\theta}{\beta\theta-1}$  e  $O = H = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ ;

$$\begin{cases} I + \theta P = 0 \\ -C + \beta V = 1 \\ V - \theta C = 1 \\ -P - \beta I = 0 \\ \tilde{B} = \tilde{H} = 0, \end{cases}$$

daí,  $V = \frac{1}{1-\theta\beta}$ ,  $\tilde{B} = \tilde{H} = 0$ ,  $C = \frac{\beta}{1-\theta\beta}$ ,  $P = I = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ ;

$$\begin{cases} J + \theta Q = 0 \\ -D + \beta X = 0 \\ X - \theta D = 0 \\ -Q - \beta J = 1 \\ \tilde{I} = \tilde{C} = 0, \end{cases}$$

então  $Q = \frac{1}{\beta\theta-1}$ ,  $\tilde{I} = \tilde{C} = 0$ ,  $J = \frac{-\theta}{\beta\theta-1}$  e  $X = D = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ ;

$$\begin{cases} L + \theta R = 0 \\ -E + \beta Z = 0 \\ Z - \theta E = 0 \\ -R - \beta L = 0 \\ -\tilde{J} = 1, \end{cases}$$

consequentemente,  $\tilde{J} = -1$ ,  $\tilde{D} = 0$ ,  $L = R = E = Z = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ .  
Finalmente, para a última coluna,

$$\begin{cases} M + \theta S = 0 \\ -F + \beta Y = 0 \\ Y - \theta F = 0 \\ -S - \beta M = 0 \\ \tilde{E} = 1. \end{cases}$$

Logo,  $\tilde{E} = 1$ ,  $\tilde{L} = 0$  e  $M = S = F = Y = 0$  ou  $\beta\theta = 1$ . Sendo assim, a matriz simplética é dada por

$$f = \frac{1}{\beta\theta-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\theta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta\theta-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\beta\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

onde  $\beta\theta - 1 \neq 0$ .

Agora, substituição das entradas da matriz simplética na equação (3.46) gera um conjunto de equações diferenciais parciais,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{P_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_a} &= \frac{1}{\beta\theta - 1}, \\
\frac{\partial A_T}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial T} &= \frac{-\beta}{\beta\theta - 1}, \\
\frac{\partial A_{P_T}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_T} &= \frac{-\theta}{\beta\theta - 1}, \\
\frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial P_T} &= \frac{1}{\beta\theta - 1}, \\
\frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta} &= 1.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

O sistema acima admite a seguinte solução

$$A_a = \frac{1}{1 - \beta\theta}(P_a - \beta T), \quad A_{P_a} = \frac{\theta}{\beta\theta - 1}P_T, \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{1}{1 - \beta\theta}P_T, & A_{P_T} &= 0, \\
A_\eta &= \Sigma, & A_N &= 0.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Portanto, usando os momentos canônicos 1-forma acima a nova Lagrangiana de primeira ordem NC pode ser determinada diretamente. Entretanto, considerando que os momentos canônicos 1-forma são os próprios momentos canônicos usuais, ou seja, que o modelo ainda permaneça de segunda ordem nas velocidades, as seguintes relação são obtidas:

$$A_{P_T} = 0, \quad A_{P_a} = \frac{\theta}{\beta\theta - 1}P_T = 0,$$

Essas relações implicam que  $\theta = 0$ . Consequentemente, os momentos canônicos são dados por

$$\begin{aligned}
A_a &= \frac{1}{1 - \beta\theta}(P_a - \beta T), \\
A_T &= \frac{1}{1 - \beta\theta}P_T, \\
A_\eta &= \Sigma.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte Lagrangiana de primeira ordem nas velocidades escrita em coordenadas NCs

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1 - \beta\theta}(P_a - \beta T)\dot{a} + \frac{1}{1 - \beta\theta}P_T\dot{T} + \Sigma\dot{\eta} - V(\xi), \tag{3.64}$$

onde o potencial simplético é dado por

$$V(\xi) = \frac{-P_a^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + P_T a^{-3\alpha}. \quad (3.65)$$

Realizando uma transformação de coordenadas no espaço de fase clássico, análoga à definição do operador coordenada deslocamento usado em mecânica quântica não-comutativa (MQNC) [65, 66, 67, 68], definida como

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a, & \tilde{T} &= T, \\ \tilde{P}_a &= \frac{P_a - \beta T}{1 - \beta\theta}, & \tilde{P}_T &= \frac{P_T}{1 - \beta\theta}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

obtém-se novas coordenadas  $A, T, \tilde{P}_a$  e  $\tilde{P}_T$ , que satisfazem os parênteses Poisson usuais (3.56) e são, assim, denominadas coordenadas comutativas. A lagrangiana (3.64) pode ser escrita nessas novas coordenadas comutativas,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{P}_a \dot{a} + \tilde{P}_T \dot{T} + \Sigma \dot{\eta} - \tilde{V}(\xi), \quad (3.67)$$

com o potencial simplético dado por

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{-P_a^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + P_T a^{-3\alpha}. \quad (3.68)$$

Ainda que as variáveis na Lagrangiana (3.67) sejam comutativas, existe contribuição NC no potencial simplético.

Aplicando as transformações (3.66) na equação (3.42), encontra-se o hamiltoniano modificado do sistema com contribuição NC,

$$H = -\frac{(\tilde{P}_a + \beta T)^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + \tilde{P}_T a^{-3\alpha}. \quad (3.69)$$

Aplicando as equações de Hamilton para o hamiltoniano (3.69), encontra-se

$$\dot{a} = -\frac{\tilde{P}_a}{6a} - \frac{\beta T}{6a}, \quad (3.70)$$

$$\dot{\tilde{P}}_a = -\frac{(\tilde{P}_a + \beta T)^2}{12a^2} + 3k - 3\Lambda a^2 + 3\alpha \tilde{P}_T a^{-3\alpha-1}, \quad (3.71)$$

$$\dot{T} = a^{-3\alpha}, \quad (3.72)$$

$$\dot{\tilde{P}}_T = \frac{\beta(\tilde{P}_a + \beta T)}{6a}. \quad (3.73)$$

Isolando o valor de  $T$  em (3.70) e substituindo em (3.71), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_a &= \frac{1}{12a^2}(-\tilde{P}_a^2 - \beta^2 T^2 - 2\tilde{P}_a\beta T) + 3k - 3\Lambda a^2 + \\ &\quad 3\alpha\tilde{P}_T a^{-3\alpha-1} \\ &= \frac{1}{12a^2}(-\tilde{P}_a^2 - 36\dot{a}^2 a^2 - 12\dot{a}a\tilde{P}_a - \tilde{P}_a^2 + 12\tilde{P}_a\dot{a}a + 2\tilde{P}_a^2) + \\ &\quad 3k - 3\Lambda a^2 + 3\alpha\tilde{P}_T a^{-3\alpha-1} \\ &= -3\dot{a}^2 + 3k - 3\Lambda a^2 + 3\alpha\tilde{P}_T a^{-3\alpha-1}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Da comparação da equação (3.74) com a derivada temporal de (3.70), verifica-se que

$$3\dot{a}^2 + 6a\ddot{a} + 3K - 3\Lambda a^2 + 3\alpha\tilde{P}_T a^{-3\alpha-1} + \beta a^{-3\alpha} = 0. \quad (3.75)$$

Substituindo a equação (3.70) em (3.73), têm-se diretamente

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_T &= \frac{\beta}{6a}(-6a\dot{a}) \\ &= -\beta\dot{a}, \end{aligned}$$

logo

$$\tilde{P}_T = -\beta a + C, \quad (3.76)$$

em que  $C$  é uma constante.

Agora, a substituição das equações (3.70) e (3.76) no hamiltoniano com contribuição NC (3.69), usando o vínculo  $H = 0$ , fornece uma equação equivalente à equação de Friedmann, dada por

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{C}{3}a^{-3\alpha-3} - \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha-2}. \quad (3.77)$$

Enquanto, da substituição da equação (3.76) em (3.75) encontra-se uma equação equivalente à expressão  $G_i^j$  dada em (3.19),

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \Lambda - C\alpha a^{-3\alpha-3} - \beta a^{-3\alpha-2}\left(\frac{1}{3} - \alpha\right). \quad (3.78)$$

Sendo assim, duas equações para o fator de escala cósmico  $a(t)$  já foram determinadas. Supondo que (3.30) ainda seja válida, as equações (3.77) e (3.78) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha-2}, \quad (3.79)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \Lambda - 8\pi GP - \beta a^{-3\alpha-2} \left( \frac{1}{3} - \alpha \right). \quad (3.80)$$

Comparando as equações acima com as equações de Friedmann (3.24) e Lemaître (3.25), fica evidente as contribuições NCs, representadas pelos termos que contém o parâmetro NC  $\beta$ .

As equações de Friedmann-Lemaître corrigidas (3.79) e (3.80), satisfazem a lei de conservação para o tensor energia-momento, o que justifica a suposição feita anteriormente de que (3.30) é ainda válida quando levamos em consideração estruturas NCs no espaço de fase. De fato, derivando a equação (3.79) e usando (3.80), tem-se que

$$\begin{aligned} 8\pi G\dot{\rho} + (3\alpha + 2)\beta a^{-3(\alpha+1)}\dot{a} &= -3\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \right) \quad (3.81) \\ &= -3\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 3\frac{k}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\} \\ &= -3\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G\rho + \Lambda - \beta a^{-3\alpha-2} - \left( \Lambda - 8\pi GP - \left( \frac{1}{3} - \alpha \right) \beta a^{-3\alpha-2} \right) \right\} \\ &= -3\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G(\rho + P) - \beta a^{-3\alpha-2} \left( \frac{2}{3} + \alpha \right) \right\} \\ &= -3\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G(\rho + P) \right\} + (3\alpha + 2)\beta a^{-3(\alpha+1)}\dot{a} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (3.82)$$

Então, a não-comutatividade não viola as leis de conservação do tensor momento-energia como esperado, mesmo na presença agora dos dois fluidos.

Antes de analisar as consequências da correção não-comutativa presente nas equações (3.79) e (3.80), a análise da relação entre o conjunto solução das equações (3.79) e (3.80) é apresentada. Para isso, suponha que o fator de escala

cósmico  $a(t)$  seja solução da equação (3.79), então

$$\begin{aligned}
-\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} \right) &= \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} + \frac{(3\alpha+2)}{3} \beta^{-3(\alpha+1)} \dot{a} \\
&= -8\pi GH(P+\rho) + \frac{(3\alpha+2)}{3} \beta^{-3(\alpha+1)} \dot{a} \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 3\frac{k}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\} \\
&= -\frac{\dot{a}}{a} \left\{ 8\pi G\rho + \Lambda - \beta a^{-3\alpha-2} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Então,

$$0 = -H \left\{ -8\pi GP + \Lambda + \left(\alpha - \frac{1}{3}\right) \beta a^{(-3\alpha-2)} - \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right\}. \tag{3.84}$$

Daí,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \Lambda - 8\pi GP + \beta a^{-3\alpha-2} \left(\alpha - \frac{1}{3}\right). \tag{3.85}$$

Portanto, se  $a(t)$  é solução de (3.79) também é solução de (3.80). Agora, considere que  $a(t)$  é solução de (3.80) e que exista uma função do tempo contínua e derivável dada por

$$f(t) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-2}. \tag{3.86}$$

A derivada da função  $f(t)$  em relação ao tempo, usando as equações (3.80) e (3.29), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\dot{f}(t) &= \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} - (3\alpha+2) \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-3} \\
&= H \left( \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) + 8\pi GH(P+\rho) \\
&= H \left\{ \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} + 8\pi GH(P+\rho) \right\} - (3\alpha+2) H \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-2} \\
&= H \left\{ \left( \Lambda - 8\pi GP + \beta a^{-3\alpha-2} \left(\alpha - \frac{1}{3}\right) \right) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} \right. \\
&\quad \left. + 8\pi GH(P+\rho) - (3\alpha+2) H \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-2} \right\} \\
&= -3H \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-2} \right)
\end{aligned}$$

ou

$$\dot{f}(t) = -3Hf(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}f(t). \quad (3.87)$$

Logo

$$f(t) = f_0 a^{-3}(t), \quad (3.88)$$

onde  $f_0$  é uma constante. Portanto, se  $a(t)$  é solução da equação (3.80), também é solução de

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha-2} + f(t). \quad (3.89)$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação (3.80) contém o conjunto solução da equação (3.79). Entretanto, escolhendo a seguinte condição inicial para (3.80),

$$\dot{a} = \mp \left\{ \left( -\frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha-2} \right) a^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.90)$$

num dado tempo  $t$  fixo e arbitrário, segue diretamente da equação (3.89) que  $f(t) = f_0 a^{-3} = 0$ , ou seja,  $f_0$  é nulo. Portanto, toda solução de (3.80), adotando as condições iniciais (3.90), é também solução de (3.79). Importante notar que a escolha da condição inicial (3.90) possui uma liberdade na escolha do sinal da velocidade, num dado tempo. Portanto, a análise entre o conjunto solução das equações (3.79) e (3.80) foi assim completada.

### 3.4 Análise das equações de Friedmann-Lemaître NCs

Uma maneira interessante de interpretar o termo de correção não-comutativa que aparece na equação de Friedmann corrigida (3.79) surge quando escrevemos essa equação na forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{C}{3}a^{-3\alpha-3} - \frac{\beta}{3}a^{-3(\alpha-\frac{1}{3})-3}. \quad (3.91)$$

Assim, comparando o último termo do lado esquerdo da equação (3.91) com a equação para a densidade de matéria-energia de um fluido perfeito, o qual satisfaz a equação  $P = \alpha\rho$ ,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3\alpha-3}. \quad (3.92)$$

Observa-se que a correção NC em (3.91) pode ser visto como um fluido não-usual ou NC com a equação de estado dada por  $P = \alpha'\rho = (\alpha - \frac{1}{3})\rho$ . Além disso, esse fluido NC se comportaria como matéria não-relativística num período de radiação.

Uma importante informação que pode ser obtida das equações de Friedmann-Lemaître corrigidas é a aceleração do universo. De fato, a aceleração do universo pode ser determinada pela subtração da equação (3.78) pela equação (3.77),

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3}a + a^{-3\alpha-2} \left[ \frac{\alpha\beta}{2}a - \frac{C}{2} \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) \right]. \quad (3.93)$$

Donde, nota-se claramente que o efeito da não-comutatividade sobre a aceleração do fator de escala depende do módulo e do sinal de  $\alpha$  e do parâmetro NC  $\beta$ .

Olhando para a equação de Friedmann corrigida (3.79) um questão que surge imediatamente é se o termo de correção NC consegue, para algum valor do parâmetro não-comutativo  $\beta$ , evitar as singularidades do fator de escala próximo da origem. Para responder essa questão, a equação de Friedmann corrigida pode ser escrita numa forma análoga à equação de conservação de energia clássica

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0, \quad (3.94)$$

onde

$$V(a) = k - \frac{\Lambda}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^{-3\alpha-1} \left( \beta a - C \right). \quad (3.95)$$

Dessa forma, nota-se que o  $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = k$  para  $-3\alpha - 1 > 0$ , ou seja,  $\alpha < -\frac{1}{3}$ . Enquanto, para  $-3\alpha - 1 < 0$ , isto é,  $\alpha > -\frac{1}{3}$  o  $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = -\infty$ . Logo, em nenhuma dessas situações, independente do valor dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , o termo de correção NC é suficiente para evitar as singularidades do fator de escala quando o mesmo se aproxima de zero, pois  $a = 0$  continua sendo solução da equação (3.94).

Entretanto, existe a possibilidade da correção NC evitar indiretamente as possíveis singularidades do fator de escala para pontos diferentes da origem, isto é, evitar que o universo entre novamente em colapso. O que poderia ser alcançado, inibindo que o universo faça uma transição da fase de expansão para uma fase de contração, ou seja, evitando a existência de pontos de retorno.

Para entender um pouco mais sobre o efeito das correções não-comutativas no sistema e quem sabe responder as possibilidades citadas anteriormente, as condições sob as quais o universo apresenta pontos de retorno são determinadas. Posteriormente, são analisadas em que situações a correção NC pode evitar a existência desses pontos de retorno. Logo, nos interessa os casos em que  $\beta < 0$ , situações nas quais o termo de correção NC atua reduzindo o valor do potencial (3.95) e, conseqüentemente, evitando que  $\dot{a}$  se aproxime de zero, de acordo com (3.94).

Inicialmente, considerando que o parâmetro NC é nulo e que a constante cosmológica  $\Lambda$  é positiva, segue da equação (3.94) que, se  $-3\alpha - 1 > 0$  ou  $\alpha < \frac{-1}{3}$ , o potencial (3.95) é sempre negativo e o sistema não possui pontos de retorno, situação desinteressante no momento. Por outro lado, para estudar a situação em que  $-3\alpha - 1 < 0$  ou  $\alpha > \frac{-1}{3}$ , suponha que exista um ponto de retorno  $a_0$  para o potencial (3.95) com  $\beta$  nulo, tal que  $V(a_0) \geq 0$ , então

$$\begin{aligned} V'(a_0) &= -\frac{2\Lambda}{3}a_0 + \frac{3\alpha + 1}{3}Ca^{-3\alpha-2} = 0, \\ a_0 &= \left[ \frac{3\alpha + 1}{2\Lambda}C \right]^{\frac{1}{3(\alpha+1)}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

A suposição de que  $V(a_0) = k - \frac{\Lambda}{3}a_0^2 - \frac{C}{3}a_0^{-3\alpha-1} \geq 0$  implica que a curvatura deve ser positiva, logo

$$1 = k \geq \frac{\Lambda}{3}a_0^2 + \frac{C}{3}a_0^{-3\alpha-1} + \frac{\beta}{3}a_0^{-3\alpha}. \quad (3.97)$$

Substituindo o valor de  $a_0$  na expressão (3.97), tem-se que

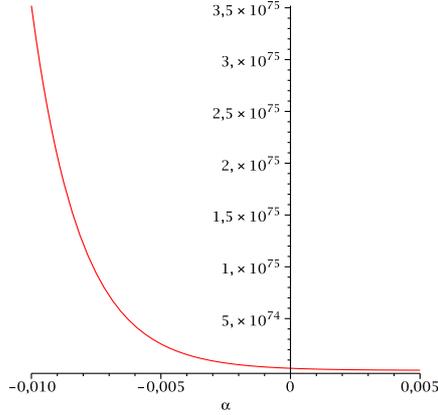
$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{\Lambda}{3} \left[ \frac{3\alpha + 1}{2\Lambda}C \right]^{\frac{2}{3(\alpha+1)}} + \frac{C}{3} \left[ \frac{3\alpha + 1}{2\Lambda}C \right]^{\frac{-3\alpha-1}{3(\alpha+1)}} \\ &= \frac{1}{3}\Lambda^{\frac{3\alpha+1}{3(\alpha+1)}} \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{3(\alpha+1)}} C^{\frac{2}{3(\alpha+1)}} + \frac{1}{3}\Lambda^{\frac{3\alpha+1}{3(\alpha+1)}} \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{-3\alpha-1}{3(\alpha+1)}} C^{\frac{2}{3(\alpha+1)}}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

ou

$$1 \geq \frac{1}{3}\Lambda^{\frac{3\alpha+1}{3(\alpha+1)}} C^{\frac{2}{3(\alpha+1)}} \left[ \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{3(\alpha+1)}} + \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{-3\alpha-1}{3(\alpha+1)}} \right]. \quad (3.99)$$

A condição acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Lambda &< C^{\frac{-2}{3(\alpha+1)}} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{3\alpha+3}} + \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{-3\alpha-1}{3\alpha+3}} \right]^{\frac{-3\alpha-1}{3\alpha+1}} \\ \Lambda &< C^{\frac{-2}{3(\alpha+1)}} \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{-3\alpha-3}{3\alpha+1}} \left( \frac{3\alpha + 1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$



**Figura 3.1:** Função do lado direito de (3.100) em função de  $\alpha$

Desde que o valor de  $C = 8\pi G\rho_c \approx 5 \times 10^{-36} s^{-2}$ , a desigualdade acima é sempre satisfeita para  $\alpha \in (-\frac{1}{3}, 1]$ . Isso pode ser visto olhando para o comportamento da função decrescente do lado direito de (3.100), ver **Figura 1**, que toma valores próximo aos extremos iguais a  $2 \times 10^{18}$  e  $1.46 \times 10^{7293}$  para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0,33$ , respectivamente. Portanto, se desigualdade (3.100) é satisfeita, com  $\beta = 0$ ,  $\Lambda > 0$  e  $\alpha > \frac{-1}{3}$  o sistema apresenta um ponto de retorno dado em (3.96).

Dado que objetivo aqui é analisar as situações em que o termo de correção NC é capaz de evitar que o sistema passe de uma fase de expansão para contração, isto é, deixe de exibir pontos de retorno, considere que  $V(a_0) + \frac{\beta}{3}a_0^{-3\alpha} < 0$ , logo

$$\begin{aligned} \beta &< -3a_0^{3\alpha}V(a_0) = -3a_0^{3\alpha} \left[ k - \frac{\Lambda}{3}a_0^2 - \frac{C}{3}a_0^{-3\alpha-1} \right] \\ &= -3 \left[ ka_0^{3\alpha} - \left( \frac{\Lambda}{3}a_0^{3\alpha+2} + \frac{C}{3}a_0^{-1} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.101)$$

ou seja, o parâmetro NC  $\beta$  deve satisfazer essa condição para que o sistema deixe de apresentar o ponto de retorno dado em (3.96).

De forma análoga, para  $\Lambda = 0$ , do potencial (3.95) na ausência de correções NCs o que equivale a tomar  $\beta$  nulo, observa-se diretamente que se  $-3\alpha - 1 < 0$ , isto é,  $\alpha > \frac{-1}{3}$  o  $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = k$  e o  $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = -\infty$ . Logo, a existência de pontos de retorno vai depender se a curvatura é positiva ou negativa. Se a

mesma é positiva o ponto de retorno ocorrerá em  $a_0 = \left(\frac{3k}{C}\right)^{\frac{-1}{3\alpha+1}}$ . Enquanto para  $-3\alpha - 1 > 0$ , isto é,  $\alpha < \frac{-1}{3}$  o  $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = -\infty$  e  $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = k$ . Desta forma, o sistema não apresenta pontos de retorno.

Para determinar as condições satisfeitas pelo parâmetro NC  $\beta$  tal que o potencial (3.95) para constante cosmológica nula,  $\alpha > \frac{-1}{3}$  e  $\beta < 0$ ; não apresente pontos de retorno, considere que o potencial tenha um valor máximo negativo num ponto arbitrário  $a_1$ , o que é equivalente ao sistema não possuir pontos de retorno. Assim, a derivada do potencial no ponto  $a_1$  deve se anular,

$$V'(a_1) = -\alpha\beta a^{-3\alpha-1} + \frac{3\alpha+1}{3} C a_1^{-3\alpha-2} = 0.$$

Então  $a_1 = \left(\frac{3\alpha+1}{3\alpha\beta}\right)$ . Enquanto a condição  $V(a_1) < 0$  pode ser escrita como

$$V(a_1) = k - \frac{C}{3} \left[\left(\frac{3\alpha+1}{3\alpha\beta}\right)\right]^{-3\alpha-1} + \frac{\beta}{3} \left[\left(\frac{3\alpha+1}{3\alpha\beta}\right)\right]^{-3\alpha} < 0, \quad (3.102)$$

ou

$$1 < \frac{1}{3} C^{-3\alpha} |\beta|^{3\alpha+1} \left[ \left(\frac{3\alpha+1}{3|\alpha|}\right)^{3\alpha-1} + \left(\frac{3\alpha+1}{3|\alpha|}\right)^{3\alpha} \right]. \quad (3.103)$$

Portanto, se  $\beta$  satisfaz essa desigualdade, a correção NC é suficiente para evitar que o sistema apresente pontos de retorno. No caso em que a constante cosmológica é nula e  $\alpha = \frac{-1}{3}$ , ainda com  $\beta < 0$ , o potencial (3.95) é dado por  $V(a) = k + \frac{1}{3}(|\beta|a - C)$ . Esse potencial apresenta um poço de potencial para  $C > 3k$ .

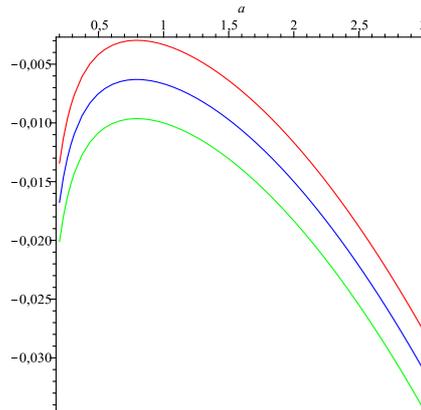
As análises analíticas da equação (3.94) realizadas para casos gerais não mostraram claramente o efeito da não-comutatividade. Isso aconteceu principalmente pela incapacidade de se obter uma solução geral das equações Friedmann-Lemaître corrigidas (3.79) e (3.80) para qualquer escolha dos parâmetros  $k$ ,  $\Lambda$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Por isso, casos particulares dessas equações serão tratados a fim de tornar mais palpável o efeito da não-comutatividade. Foi mostrado anteriormente que o conjunto solução das equações (3.79) e (3.80) são equivalentes para certa escolha específica de condição inicial (3.90). Logo, os casos particulares serão tratados resolvendo numericamente a equação (3.80) via método de Newton e plotando o gráfico do potencial  $V(a)$  dado em (3.95) para escolhas correspondentes de parâmetros. Os valores do parâmetro de proporcionalidade entre a pressão e a densidade de energia do fluido  $\alpha$  escolhidos são iguais a  $0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -1$  e  $-\frac{2}{3}$ , os quais equivalem ao universo

regido por poeira, radiação, cordas cósmicas, matéria rígida, energia escura e paredes de domínio, respectivamente, ver apêndice C.

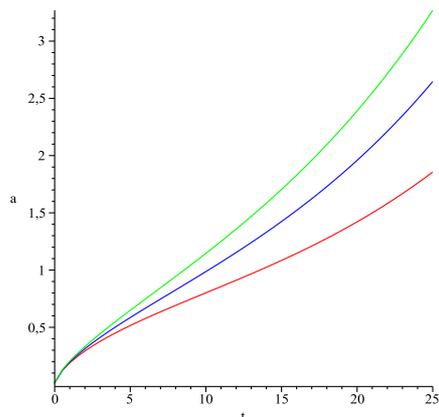
Dentre os casos particulares descritos no apêndice C, alguns casos mais interessantes e ilustrativos serão discutidos em mais detalhes no decorrer desse capítulo. Primeiramente, o efeito geral do termo NC que aparece nas equações de Friedmann-Lemaître corrigidas pode ser observado quando o universo é considerado plano e preenchido por um fluido cosmológico perfeito constituído por matéria não-relativística (poeira), sem colisões,  $P = 0$ . Neste caso, o potencial (3.95) será dado por

$$V(a) = -\frac{\Lambda a^2}{3} - \frac{C}{3a} + \frac{\beta}{3}. \quad (3.104)$$

Como proposto, considerando a constante cosmológica positiva, o potencial acima e a solução numérica da equação (3.80) são apresentadas graficamente nas figuras 3.2 e 3.3, respectivamente.



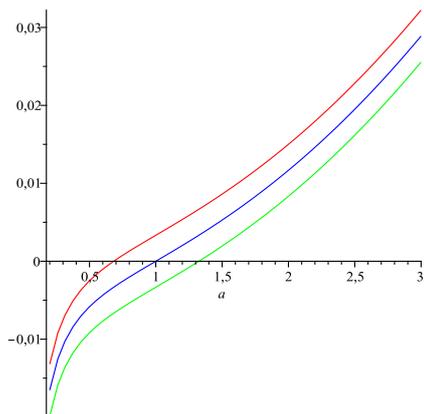
**Figura 3.2:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0.01$ ,  $\alpha = 0$ , para  $\beta = 0.01$ (vermelho),  $0$ (azul),  $-0.01$ (verde).



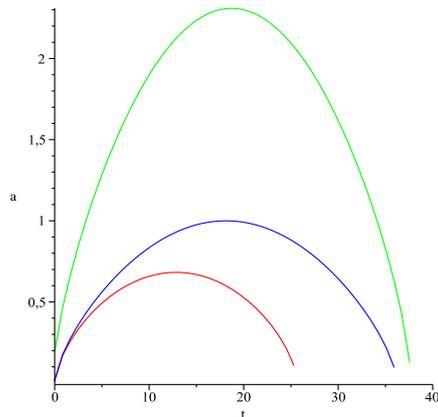
**Figura 3.3:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0.01$ ,  $\alpha = 0$ ; para  $\beta = 0.01$ (*vermelho*),  $0$ (*azul*),  $-0.01$ (*verde*).

Do potencial acima, nota-se que o sistema é desligado independente de  $\beta$ . Enquanto, das soluções para o fator de escala, observamos claramente que a taxa de crescimento do fator de escala é reduzida para  $\beta > 0$ , o contrário ocorre para  $\beta < 0$ . O que está em acordo com o potencial correspondente, ver figura 3.2.

Agora, quando a constante cosmológica é negativa, ainda para  $\alpha = 0$ , o potencial (3.104) se anula para um dado valor do fator de escala  $a(t)$  e, conseqüentemente, o sistema é ligado. Isso pode ser evidenciado pelas figuras 3.4 e 3.5.



**Figura 3.4:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0.01$ ,  $\alpha = 0$ , para  $\beta = 0.01$ (*vermelho*),  $0$ (*azul*),  $-0.01$ (*verde*).



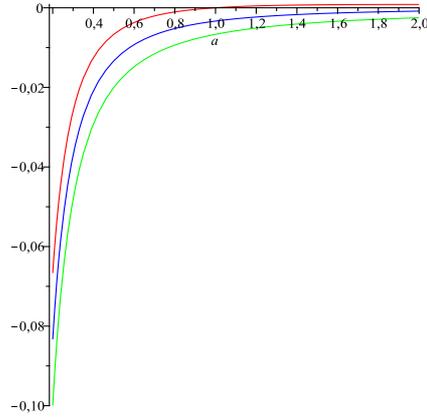
**Figura 3.5:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0.01$ ,  $\alpha = 0$ , para  $\beta = 0.01$  (*vermelho*),  $0$  (*azul*),  $-0.01$  (*verde*)

Dessas figuras observa-se diretamente que o valor máximo do fator de escala  $a(t)$ , que representa o ponto de retorno do sistema, e o tempo que decorre até o universo entrar em colapso é inversamente proporcional ao valor do parâmetro NC  $\beta$ .

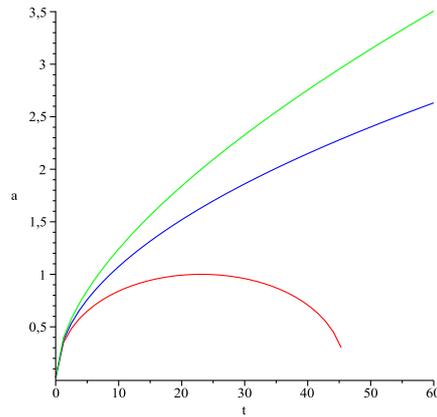
Um interessante efeito da não-comutatividade é a sua capacidade de ligar um sistema, isto é, levando-lo a apresentar pontos de retorno. Esse efeito pode ser visto quando o universo é plano, com constante cosmológica nula, numa época dominada pela radiação pura, gás ultra-relativístico, em que o potencial (3.95) pode ser escrito como

$$V(a) = \frac{\beta}{3a} - \frac{C}{3a^2}, \quad (3.105)$$

cujo gráfico para  $\beta$  positivo corta o eixo das abcissas em  $a = \frac{C}{\beta}$ . Neste ponto a energia cinética do sistema é nula,  $\dot{a}^2 = 0$ , o que constitui um ponto de retorno. Sendo que o valor de  $a(t)$  referente ao ponto de retorno é claramente inversamente proporcional ao valor de  $\beta$ , ver figuras **3.6** e **3.7**, assim como o caso onde o efeito geral da não-comutatividade foi descrito. Além disso, qualquer valor de  $\beta > 0$  é suficiente para ligar o sistema. Porém, o aumento de  $\beta$  causa uma maior resistência ao movimento de expansão, o que já era esperado.



**Figura 3.6:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{3}$ , para  $\beta = 0.01$ (vermelho),  $0$ (azul),  $-0.01$ (verde).



**Figura 3.7:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, com  $C = 0.01$ ,  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{3}$ , para  $\beta = 0.01$ (vermelho),  $0$ (azul),  $-0.01$ (verde)

A curva em azul na figura 3.7 ilustra um resultado bem conhecido na literatura, o fator de escala cósmico, no caso universo plano, num período de radiação e com constante cosmológica nula, cresce com o tempo da seguinte forma

$$a(t) = At^{\frac{1}{2}} \quad (3.106)$$

De fato, a equação (3.80) para  $k = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\beta$  nulo,

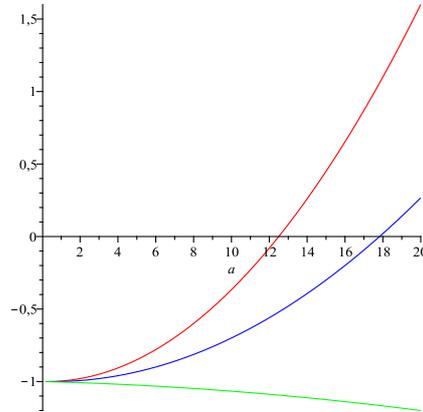
$$\dot{a}^2 = \frac{C}{3a^2}. \quad (3.107)$$

tem como solução  $a(t) = At^{\frac{1}{2}}$ , que foi representada na curva em azul. Além disso, a curva em verde associada com  $\beta$  negativo na figura 3.7 mostra que o universo cresce mais rapidamente com o tempo do que o caso em que  $\beta$  é nulo, como esperado.

Agora, uma situação oposta àquela descrita na figura 3.6 pode acontecer, isto é, a influência da não-comutatividade pode ser suficiente para desligar um sistema ligado para determinada escolha de parâmetros. Isso pode ser ilustrado pela análise do potencial (3.95) para universo aberto, com  $\alpha = -\frac{2}{3}$  e constante cosmológica negativa,

$$V(a) = -1 - \frac{\Lambda}{3}a^2 + \frac{\beta}{3}a^2 - \frac{C}{3}a. \quad (3.108)$$

Desse potencial, sem levar em conta as contribuições NC, o sistema é ligado se a constante cosmológica é negativa. Entretanto, quando a contribuição NC é levada em consideração, o sistema torna-se ligado sempre que a condição  $\beta > \Lambda$  for satisfeita. Esse resultado pode ser ilustrado pelo gráfico do potencial (3.108) para uma escolha de parâmetros que satisfaçam as condições citadas acima, ver figura 3.8.



**Figura 3.8:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , com  $C = 0.01$ ,  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0.01$ ,  $\alpha = -\frac{2}{3}$ , para  $\beta = 0.011$ (vermelho),  $0$ (azul),  $-0.011$ (verde).

Do gráfico da figura 3.8, ainda se pode inferir que as soluções do fator escala cósmico  $a(t)$  são oscilatórias quando  $\beta > \Lambda$ . De fato, combinando as equações (3.77) e (3.78), uma equação diferencial modificada para o fator de

escala cósmico pode ser escrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{C}{2}a^{-3\alpha-3}\left(\alpha - \frac{1}{3}\right) + \frac{\beta\alpha}{2}a^{-3\alpha-2} = 0. \quad (3.109)$$

Substituindo  $\alpha = -\frac{2}{3}$  e reagrupando os termos, obtém-se uma equação semelhante à equação de um oscilador harmônico,

$$\ddot{a} + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\Lambda}{3}\right)a = \frac{C}{6}. \quad (3.110)$$

Nessa equação, quando  $\beta > \Lambda$  o termo entre parênteses do lado esquerdo da igualdade é positivo e representa o quadrado da frequência de oscilação, caso contrário o sistema é desligado.

A solução geral de (3.110) pode ser escrita como a soma de uma solução homogênea e de uma particular da seguinte forma

$$a(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} + \frac{C}{6\omega^2}, \quad (3.111)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes e  $\omega = \left(-\frac{\Lambda}{3} + \frac{\beta}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$  é real e equivale à frequência de oscilação para  $\beta > \Lambda$ . Além disso, o módulo da frequência de oscilação é diretamente proporcional ao valor de  $\beta$  e inversamente ao valor de  $\Lambda$ . Baseado na influência da não-comutatividade para este último caso em específico, associa-se o parâmetro NC  $\beta$  com a constante cosmológica de sinal invertido. Essa associação fica mais clara na equação para a frequência  $\omega$ .

Se o parâmetro de não-comutatividade é associado com a constante cosmológica, a equação de Friedmann pode ser escrita como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \tilde{\Lambda}(a), \quad (3.112)$$

onde  $\tilde{\Lambda}(a) = \frac{1}{3}(\Lambda - \beta a^{-3\alpha-2})$  pode ser visto como uma nova constante cosmológica que depende do fator de escala, e o módulo do termo  $\beta a^{-3\alpha-2}$  cresce com o aumento do fator de escala se  $\alpha < -\frac{2}{3}$ . Já para  $\alpha > -\frac{2}{3}$  ele decresce com o aumento do fator de escala. Este último resultado está em acordo com a expectativa de que a não-comutatividade tenha tido um efeito mais significativo no início do universo, isto é, para valores menores do fator de escala. Além disso, para o caso em que  $\alpha = -\frac{2}{3}$  surge uma interessante situação. Uma vez que substituindo  $\alpha = -\frac{2}{3}$  na constante cosmológica modificada  $\tilde{\Lambda}(a)$  observa-se que a mesma passa a ser independente do fator

de escala  $a(t)$  e o parâmetro NC  $\beta$  mostra-se no mesmo patamar da constante cosmológica, diferindo apenas por um sinal. Isso mostra, nesse caso específico, que o parâmetro não-comutativo  $\beta$  pode exercer perfeitamente a função da constante cosmológica, a qual poderia, em princípio, ser eliminada ou ter sua existência justificada.

Retornando novamente as equações de Friedmann-Lemaître corrigidas (3.79) e (3.80), pode-se escrever a seguinte equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2\pi G}{3}(\rho + P) + \frac{\beta\alpha}{2}a^{-3\alpha-2}. \quad (3.113)$$

Em que a constante cosmológica foi considerada nula. A equação (3.113) é idêntica àquela conhecida pelo nome de equação Raychaudhury, exceto pelo último termo do lado direito que representa uma correção associada à não-comutatividade. Agora, se admitirmos o universo plano, preenchido por um fluido perfeito com densidade de energia positiva ( $\rho > 0$ ) e pressão isotrópica não-negativa ( $P \geq 0$ ), a equação de Raychaudhury acima sem correções não-comutativas implica que  $\ddot{a} < 0$ , o que parece natural, pois o campo gravitacional é atrativo e tende a se opor à expansão. Entretanto, dados observacionais das galáxias, publicados no final da década de 90, divulgaram que o universo atual está em expansão acelerada ( $\ddot{a} > 0$ ), [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. . Caso esses dados não sejam refutados, não podemos mais considerar a condição escolhida na equação de Raychaudhury. No entanto, se levarmos em conta o termo de correção apresentado em (3.113), com o parâmetro de não-comutatividade  $\beta$  positivo, podemos evitar divergências entre a teoria e observações experimentais, sem fazer uso da constante cosmológica. O que justifica investigar a associação entre o efeito da não-comutatividade e o da constante cosmológica.

### 3.5 Estimativa do parâmetro NC $\beta$

Uma estimativa do parâmetro não-comutativo  $\beta$  pode ser realizada considerando que esse parâmetro faça o papel da constante cosmológica. Além disso, para se fazer essa estimativa considera-se os valores da idade do universo e do parâmetro de Hubble  $H$ , definido por

$$H(a) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.114)$$

descritos na literatura.

Inicialmente, suponha que a função fator de escala cósmico  $a(t)$  seja definida como  $a : [0, t_0] \rightarrow R$ , e, além disso, que ela seja injetiva e contínua. Então existe sua inversa  $f : [0, a_0] \rightarrow [0, t_0]$ , tal que  $0 = f(a(0))$ ,  $t_0 = f(a(t_0)) = f(a(t_0)) - f(a(0)) = f(a_0) - f(0) = \int_0^{a_0} f'(x)dx$ . Como  $f(a(t)) = t$  e, por conseguinte,  $f'(a(t)) = \frac{1}{a'(t)} = \frac{1}{a'(f(a(t)))}$ , pode-se escrever  $f'(x) = \frac{1}{a'(f(x))} = \frac{1}{a(f(x))H(f(x))}$ . Finalmente,

$$t_0 = \int_0^{a_0} f'(x)dx = \int_0^{a_0} \frac{1}{xH(f(x))}dx. \quad (3.115)$$

Agora, usando a equação de Friedmann corrigida escrita em termos do parâmetro de Hubble  $H$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2} - \frac{\beta}{3} a^{-3\alpha-2}, \quad (3.116)$$

a equação para  $t_0$  pode ser reescrita como

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{x \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{x^2} - \frac{\beta}{3} x^{-3\alpha-2}}} dx. \quad (3.117)$$

Dessa equação, para o universo plano e com constante cosmológica nula, tem-se

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3\alpha-1} - \frac{\beta}{3} x^{-3\alpha}}} dx, \quad (3.118)$$

onde  $\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3\alpha+1}$  e o índice 0 indica o tempo atual. Agora, definindo,  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$  e  $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ , de (3.118),

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 H_0^2 x^{-3\alpha-1} - \frac{\beta}{3} x^{-3\alpha}}} dx. \quad (3.119)$$

Por fim, considerando o universo dominado pela matéria, o que equivale a tomar  $\alpha = 0$ , juntamente com os valores da idade do universo e do parâmetro de Hubble, na expressão (3.119), obtém-se

$$\int_0^{a_0} \frac{1}{\sqrt{(1,538)10^{-36}x^{-1} - \frac{\beta}{3}}} dx = 4,32 \times 10^{17}. \quad (3.120)$$

onde foi usado  $\Omega \approx 0,3$ ,  $H_0 = 72 \frac{km}{s.Mpc}$  e a idade do universo igual a 13,7 bilhões de anos ou  $4,32 \times 10^{17}$  segundos, segundo dados da *High-Z Supernova Team e Supernova Cosmology Project* [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. Da equação acima, o valor estimado do parâmetro NC  $\beta$  atual é igual a  $-0,45 \times 10^{-35} s^{-2}$ . Este valor está muito próximo ao valor encontrado na literatura para a constante cosmológica, que é da ordem de  $2,28 \times 10^{-35} s^{-2}$  [76].

Analogamente à estimativa do parâmetro NC atual, a estimativa da ordem de grandeza de  $\beta$  pode ser feita para o tempo da ordem de Planck, considerando ainda que o parâmetro NC exerce a função da constante cosmológica. Assim, na presença das correções NC e sem constante cosmológica o universo deve evoluir até o comprimento de Planck ( $a_p$ ) no tempo de Planck ( $t_p$ ). Considerando que no período de Planck o universo era dominado pela radiação, o que equivale a tomar  $\alpha = \frac{1}{3}$  na equação de estado um fluido perfeito  $P = \alpha\epsilon$ , a equação (3.119) pode ser escrita como

$$t_p = \int_0^{a_p} \frac{x}{\sqrt{\Omega H^2 - \frac{\beta}{3}x}} dx. \quad (3.121)$$

onde se considerou  $a_p = a(t_p) = 1$ . Resolvendo essa integral, obtém-se

$$t_p = \frac{6}{\beta^2} \left( \Omega H^2 - \frac{\beta}{3} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{18\Omega H^2}{\beta^2} \left( \Omega H^2 - \frac{\beta}{3} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{12\Omega^{\frac{3}{2}}}{\beta^2} H^3. \quad (3.122)$$

Substituindo os valores de  $H_0 \approx M_p = 1,8 \times 10^{43} s^{-1}$ ,  $t \approx t_p \approx 5,39 \times 10^{-44}$  e  $\Omega \approx 1$  em (3.122), obtém-se três possíveis valores para o parâmetro NC  $\beta$ :  $9,084353501 \times 10^{86}$ ,  $2,400464561 \times 10^{85}$  e  $-2,378885239 \times 10^{85}$ . Entretanto da equação de Friedmann corrigida (3.91), considerando  $k = \Lambda = 0$ , pode-se escrever

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3} a^{-3\alpha-3} \left( C - \beta a \right) \geq 0. \quad (3.123)$$

Sendo assim,

$$\left( C - \beta a \right) \geq 0. \quad (3.124)$$

Usando os dados atuais,  $C = 8\pi G\rho_0 a_0^{3\alpha+3} \approx 0,5 \times 10^{-37} s^{-2}$ , onde o índice 0 indica tempo atual, a desigualdade (3.124) para o tempo de Planck fornece a seguinte condição sob o parâmetro NC:  $\beta < \frac{C}{a} \approx \frac{0,5 \times 10^{-37}}{a_p} s^{-2}$ . Logo, dos valores encontrados anteriormente para o parâmetro NC, apenas  $\beta = -2,378885239 \times 10^{85} s^{-2}$  é aceitável. Portanto, o parâmetro NC que faria a função de constante cosmológica no período de Planck teria que ser muito

maior que o atual, o que impossibilita, de certa forma, o parâmetro NC constante de substituir completamente a constante cosmológica. Entretanto, ele ainda pode ser visto como uma constante cosmológica que depende do fator de escala cósmico do universo, como referido anteriormente.

### 3.6 Associação das correções NCs com a matéria escura

Analogamente à interpretação do termo de correção NC presente na Equação de Friedmann corrigida (3.77) como um fluido, existe uma interessante possibilidade de se associar o último termo da equação (3.77) com a matéria escura. Essa possibilidade é digna de mais atenção e estudo.

Interpretando a correção NC em (3.77) como o termo de matéria escura, o parâmetro NC  $\beta$  pode ser determinado diretamente. De fato, da equação de Friedmann corrigida (3.77) escrita em termos de  $H$ ,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{MB} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} - \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha-2}, \quad (3.125)$$

multiplicada por  $\frac{1}{H^2}$ , a "regra dos uns corrigida" pode ser escrita diretamente

$$1 = \Omega_{MB} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k + \Omega_{\beta}. \quad (3.126)$$

Onde  $\Omega_{\beta} = \frac{\rho_{\beta}}{\rho_c} = -\frac{\beta}{3H^2}a^{-3\alpha-2}$ , com  $\rho_{\beta} = -\frac{\beta}{8\pi G}a^{-3\alpha-2}$ ;  $\Omega_{MB} = \frac{\rho_{MB}}{\rho_c}$ ,  $\Omega_k = -\frac{k}{H^2 a^2}$ ,  $\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H^2}$  e  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ . Usando as definições de  $\rho_{\beta}$ , a equação (3.127) pode ser reescrita como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{MB} + \rho_{\beta}) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.127)$$

Sendo que a equação para densidade do fluido NC  $\rho_{\beta}$  com equação de estado  $p = (\alpha - \frac{1}{3})\rho_{\beta}$  pode ser obtida diretamente da equação (3.29),

$$\rho_{\beta} = \rho_{\beta}^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(\alpha - \frac{1}{3}) - 3} = \rho_{\beta}^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\alpha - 2}, \quad (3.128)$$

onde o índice 0 indica o tempo atual.

Considerando que a densidade de matéria escura atual  $\Omega_{DM0} \approx 0,25$  [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75] seja igual a  $\Omega_{\beta 0}$  e  $\Omega_k \approx 0$ , da equação que define  $\rho_{\beta}$  determina-se  $\beta$  diretamente

$$\beta = -8\pi G\rho_c\Omega_{DM0} = -2\pi G\rho_c \approx -3,77 \times 10^{-36} s^{-2}. \quad (3.129)$$

Ao se interpretar a correção NC em (3.77) como o termo de matéria escura, uma questão relevante que surge é a forma como essa interpretação influencia a idade atual do universo. Para buscar responder essa questão, primeiramente a equação (3.127) é reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho_{MB}^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_\beta^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \right] + \Omega_\Lambda^0 H_0^2 + \Omega_k^0 H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \quad (3.130) \\
&= \frac{8\pi G \rho_{MB}^0}{3H_0^2} H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \frac{8\pi G \rho_\beta^0}{3H_0^2} H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda^0 H_0^2 + \Omega_k^0 H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \\
&= H_0^2 \left[ \Omega_{MB}^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\beta^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_k^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda^0 \right].
\end{aligned}$$

Logo da equação (3.115), tomando o fator de escala atual  $a_0$  igual a um, tem-se

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{1}{a \left[ + \Omega_{MB}^0 a^{-3} + \Omega_\beta^0 a^{-2} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda^0 \right]^{\frac{1}{2}}} da. \quad (3.131)$$

Considerando os valores  $\Omega_{MB} \approx 0,05$ ,  $\Omega_\beta \approx 0,25$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 0,7$  e  $\Omega_k \approx 0$ , a integral (3.131) pode ser escrita como

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left[ 0,7x^3 + 0,05 + 0,25x \right]^{\frac{1}{2}}} dx. \quad (3.132)$$

A solução de (3.132) obtida numericamente, ver **Figura 3.9**, é dada por

$$t_0 = \frac{1}{H_0} 1,23 \approx \frac{1,23}{2,33 \times 10^{-19}} s \approx 16,7 \quad \text{bilhões de anos.} \quad (3.133)$$

Portanto, interpretar o termo de correção NC na equação de Friedmann corrigida (3.77) como matéria escura, isto é,  $\Omega_\beta = \Omega_{DM}$  fornece resultados aceitáveis para a idade do universo, o qual passa a ser ligeiramente mais velho.

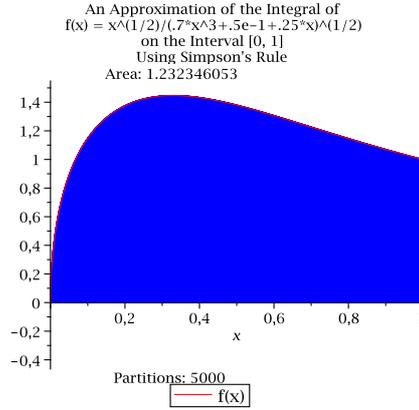


Figura 3.9

### 3.6.1 Parâmetro desaceleração $q(z)$ não-comutativo

O parâmetro desaceleração escrito em função do *redshift*  $z$  exerce papel fundamental em cosmologia, visto que ele pode ser indiretamente calculado experimentalmente e sua análise fornece importantes informações sobre os pontos de transição entre as fases de aceleração para desaceleração do universo ou vice-versa. Usando os cálculos realizados na seção anterior, mais precisamente as definições para as densidades  $\Omega_\beta$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_{MB}$ ,  $\Omega_k$  e a equação (3.130), pode-se encontrar diretamente a equação para o quadrado da derivada temporal do fator de escala cósmico,

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[ \Omega_{MB}^0 \left( \frac{a_0}{a} \right) + \Omega_\beta^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda^0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (3.134)$$

A equação (3.134) pode ser escrita em função do *redshift* usando a relação entre o *redshift* e o fator de escala cósmico  $a(t)$ . O *redshift* é definido como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.135)$$

logo

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}. \quad (3.136)$$

Além disso, a equação (3.134) pode ser escrita como

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[ \Omega_{MB}^0 (1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\} (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0 \right],$$

ou

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 D(z)^2, \quad (3.137)$$

onde  $D(z)^2 = \Omega_{MB}^0 (1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\} (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0$ . Da definição (3.136), pode-se isolar o fator de escala  $a(t)$  e sua derivada em relação a  $z$  pode ser determinada diretamente

$$\frac{da}{dz} = -\frac{a_0}{(z+1)^2} = -\frac{a(z)}{z+1}. \quad (3.138)$$

Substituindo o valor do fator de escala obtido em (3.137) na equação (3.138), obtém-se

$$\frac{da}{dz} = -\left( \frac{da}{dt} \frac{1}{H_0 D(z)} \right) \frac{1}{z+1}.$$

Essa equação implica que

$$\frac{dz}{dt} = -D(z)(1+z)H_0. \quad (3.139)$$

Agora, usando a equação (3.137) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{a}(z)) &= \frac{d\dot{a}}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left( \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= -\frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left( \frac{da}{dz} D(z)(1+z)H_0 \right) \\ &= D(z)(1+z)H_0 \frac{dz}{dt} \frac{d^2 a}{dz^2} - \frac{da}{dt} \frac{d}{dz} \left( D(z)(1+z)H_0 \right) \\ &= -D(z)(1+z)H_0 \frac{dz}{dt} \frac{d^2 a}{dz^2} - \frac{da}{dt} \left( D(z)H_0 + H_0(1+z) \frac{dD}{dz} \right), \end{aligned} \quad (3.140)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{da}{dz} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{a}{z+1} \right) \\ &= \frac{1}{(z+1)^2} \left[ a - \frac{da}{dz} (z+1) \right] = \frac{2a}{(z+1)^2} \end{aligned} \quad (3.141)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dz} &= \frac{d}{dz} \left\{ \left[ \Omega_{MB}^0 (1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\} (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2D(z)} \left\{ 3\Omega_{MB}^0 (1+z)^2 + 2(1+z) \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Usando as equações (3.141) e (3.142), a equação (3.140) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\ddot{a}(z) &= -D(z)(1+z)H_0[-D(z)(1+z)H_0]\frac{2a}{(z+1)^2} \\ &\quad - H_0D(z)a(z)\left(D(z)H_0 + H_0(1+z)\frac{1}{2D(z)}\left\{3\Omega_{MB}^0(1+z)^2 + 2(1+z)\{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\}\right\}\right) \\ &= D^2(z)H_0^2a(z)\left\{1 - \frac{1}{2D^2(z)}\left[3\Omega_{MB}^0(1+z)^3 + 2(1+z)^2\{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\}\right]\right\},\end{aligned}\tag{3.143}$$

ou

$$\ddot{a}(z) = D^2(z)H_0^2a(z)\left\{\frac{\frac{-\Omega_{MB}^0}{2}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0}{\Omega_{MB}^0(1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0}\right\}.\tag{3.144}$$

Finalmente, de (3.144) o parâmetro desaceleração com correções não-comutativas

$$q = -\frac{\ddot{a}}{H^2a}\tag{3.145}$$

pode ser escrito da seguinte maneira

$$q(z) = \frac{\frac{\Omega_{MB}^0}{2}(1+z)^3 - \Omega_\Lambda^0}{\Omega_{MB}^0(1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + \Omega_k^0\}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0},\tag{3.146}$$

onde  $\rho_{MB} = \rho_{MB}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\alpha-3}$ ,  $\rho_\beta = \rho_\beta^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\alpha-2}$ ,  $\Omega_\beta^0 = \frac{\rho_\beta^0}{\rho_c^0} = \frac{8\pi G\rho_\beta^0}{3H_0^2}$ ,  $\Omega_{MB}^0 = \frac{\rho_{MB}^0}{\rho_c^0} = \frac{8\pi G\rho_{MB}^0}{3H_0^2}$  e os  $\Omega^0$ 's satisfazem a equação (3.126) ou, em particular, a relação

$$1 = \Omega_{MB}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\beta^0.\tag{3.147}$$

Agora, alguns casos particulares do parâmetro desaceleração NC (3.146) são analisados a seguir:

i) considerando que  $\Omega_\Lambda^0 = 0$  e, por consequência,  $\Omega_k^0 = (1 - \Omega_{MB}^0 - \Omega_\beta^0)$ , a função desaceleração NC é dada por

$$q(z) = \frac{\frac{\Omega_{MB}^0}{2}(1+z)^3}{\Omega_{MB}^0(1+z)^3 + \{\Omega_\beta^0 + (1 - \Omega_{MB}^0 - \Omega_\beta^0)\}(1+z)^2},$$

ou

$$q(z) = \frac{\Omega_{MB}^0(1+z)}{2(z\Omega_{MB}^0 + 1)}.\tag{3.148}$$

Então, para  $\Omega_\Lambda^0 = 0$ , a função desaceleração é positiva para todo  $z$ , o que significa que o universo deveria se encontrar em expansão desacelerada, algo que não está em acordo com os dados experimentais.

ii) para  $\Omega_k^0 = 0$  e, logo,  $(1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_\beta^0) = \Omega_{MB}^0$ , tem-se que

$$q(z) = \frac{\frac{(1-\Omega_\Lambda^0-\Omega_\beta^0)}{2}(1+z)^3 - \Omega_\Lambda^0}{(1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_\beta^0)(1+z)^3 + \Omega_\beta^0(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0}. \quad (3.149)$$

Como o denominador da expressão acima é sempre positivo, ela implica que  $q(z) > 0$  se  $z > \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{1-\Omega_\Lambda^0-\Omega_\beta^0}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$ , enquanto  $q(z) < 0$  se  $z < \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{1-\Omega_\Lambda^0-\Omega_\beta^0}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$ . Portanto, existe um *redshift* de transição  $z_t$ ,

$$z_t = \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_\beta^0}\right)^{\frac{1}{3}} - 1, \quad (3.150)$$

tal que o sistema é acelerado para  $z < z_t$  e desacelerado para  $z > z_t$ . Considerando que o *redshift* de transição seja  $z_t = 0,78_{-0,27}^{+0,08}$  [77], da equação (3.150),  $\Omega_\beta^0 = 0,052_{-0,159}^{+0,03}$ , onde consideramos  $\Omega_\Lambda^0 = 0,7$ . Além disso, da definição de  $\rho_\beta$ ,

$$\beta = -8\pi G\rho_c\Omega_\beta^0 = -15,08 \times 10^{-36}\Omega_\beta^0, \quad (3.151)$$

tem-se diretamente que o parâmetro NC  $\beta = -0,784_{-0,453}^{+2,398} \times 10^{-36}s^{-2}$ .

Na seção anterior, mostrou-se que interpretar o termo de correção NC que aparece no lado direito da equação de Friedmann corrigida (3.77) como o termo de matéria escura faz com que a universo seja mais velho, mas com idade aceitável. Entretanto, quando se considera novamente  $\Omega_\beta^0 = \Omega_{MD}^0 = 0,25$ , o *redshift* de transição  $z_t$  é dado por

$$z_t = \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_\beta^0}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 2,037, \quad (3.152)$$

onde foi usado  $\Omega_\Lambda^0 \approx 0,7$ , e  $\Omega_k^0 = 0$ . Esse valor obtido para  $z_t$  em (3.152) não pertence ao intervalo de valores experimentais aceitos para o *redshift* de transição, pois esse valor muito alto para  $z_t$  comprometeria a formação de estruturas. Esse valor de  $z_t$  não aceitável era esperado uma vez que nesse caso  $\Omega_\beta^0 = 0,25$  também não pertence ao intervalo de valores aceitos para a densidade do fluido NC,  $\Omega_\beta^0$ . Portanto, se o termo de correção NC for responsável por todo o termo de matéria escura, os valores obtidos para o *redshift* de transição  $z_t$  são discrepantes com os dados experimentais.

Contudo, a correção NC pode ser interpretada como um fluido não-usual, que pode representar até 8% da matéria do universo. Além disso, esse fluido poderia justificar até aproximadamente um terço da densidade de matéria associada com a matéria escura, sem violar os dados da literatura aceitos para o *redshift* de transição  $z_t$  [77, 78].

### 3.7 Conclusão

No momento, um dos grandes desafios da física teórica é como promover unificação de duas teorias que descrevem os fenômenos físicos em ambientes muito distintos e que possuem conceitos ainda mais distintos. Primeiramente, temos a mecânica quântica que governa o mundo microscópico e, em segundo lugar, temos a relatividade geral que descreve o mundo macroscópico. Entre as principais motivações para unificar essas teorias, até o momento desconectadas, está a tentativa de compreender a física do início do universo, a estrutura física do buracos negros e como estes se formam.

Como sabemos teorias NCs possuem notável interesse na escala de Planck. Além disso, estudos em teorias de cordas, uma forte candidata para realizar a unificação dessas teorias que regem o mundo macroscópico e microscópico, na presença de um campo magnético mostraram a presença natural de uma álgebra NC. Baseado nesses fatos teóricos acredita-se que investigar teorias não-comutativas pode ser um caminho adequado para auxiliar ou conduzir a unificação de tais teorias. O principal objetivo desse trabalho é seguir essa proposta. Para tal, o formalismo variacional de Schutz e o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC), descrito em detalhes no primeiro capítulo da tese, foram usados para construir uma versão NC do modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker(FRW), para diferentes tipos de fluidos perfeitos. No (FSINC) a não-comutatividade introduzida está representada por um parâmetro NC arbitrário  $\beta$ , que pode assumir valores positivos negativos ou nulos. Com isso, do super-hamiltoniano com contribuição NC do modelo de FRW, as novas equações que descrevem a dinâmica do universo, chamadas equações de Friedmann-Lemaître corrigidas, foram assim determinadas e usadas para analisar detalhadamente a evolução do universo para diferentes escolhas da constante cosmológica e da curvatura espacial, consideradas positivas, negativas ou nulas. Dessas análises observou-se que o efeito da não-comutatividade na evolução do universo depende basicamente do parâmetro NC  $\beta$ . De fato, se o parâmetro NC  $\beta$  é um número positivo, a não-comutatividade dificulta o movimento de expansão e facilita o

movimento de contração do universo. Em algumas configurações do sistema e para certos valores positivos de  $\beta$  o efeito da não-comutatividade pode ser suficiente para gerar pontos de retorno na evolução do universo, que passa da fase de expansão para a fase de contração. Enquanto, para  $\beta$  negativo temos o efeito completamente inverso, o universo se expande com mais facilidade e contrai com maior dificuldade. Entretanto, a oposição ao movimento de contração do universo exercida pela não-comutatividade não é suficiente para evitar o colapso do universo quando o fator de escala cósmico tende a zero, a despeito de ser capaz de suprimir pontos de retorno para determinadas configurações do sistema, o que equivale a coibir indiretamente a existência de pontos de singularidade do fator de escala cósmico. Esse efeito da não-comutatividade lembra muito um campo de forças que pode ser atrativo ou repulsivo dependendo do sinal do parâmetro NC. Além disso, as correções NCs nas equações de Friedmann-Lemaître podem ser associadas com um fluido perfeito não-usual, com equação de estado  $P = (\alpha - \frac{1}{3})\rho$ . O qual se comportaria como poeira num período de radiação.

A correção NC também pode ser associada com o efeito da constante cosmológica e uma constante cosmológica generalizada dependente do fator de escala cósmico  $a(t)$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  e da antiga constante cosmológica pode ser construída. Considerando que a correção NC exercesse o efeito da constante cosmológica e usando dados experimentais para a idade do universo, a ordem de grandeza do parâmetro NC  $\beta$  foi estimada. O valor obtido está muito próximo à ordem de grandeza da constante cosmológica encontrada na literatura.

Das equações de Friedmann-Lemaître corrigidas a função desaceleração para o fator de escala cósmico pode ser determinada em função do *redshift*. Dessa forma, usando os valores experimentais aceitos para o *redshift* de transição, o intervalo de valores para a densidade do fluido NC e para o parâmetro NC foi determinado. Além disso, observou-se que o fluido NC pode ser responsável por até aproximadamente um terço da matéria escura do universo sem violar os dados experimentais para o *redshift* de transição  $z_t$ .

# Capítulo 4

## Conclusão Geral

Atualmente a investigação de espaços não-comutativos está presente em diversas áreas da Física como, renormalização, gravidade quântica, matéria condensada, teoria de cordas, etc. Isso justifica o interesse de se estudar em detalhes como introduzir não-comutatividade na descrição de alguns sistemas físicos de interesse em áreas distintas da Física. A introdução de não-comutatividade baseado em estruturas simpléticas que levam em conta a estrutura geométrica do espaço de forma explícita se mostra como uma importante ferramenta para se obter descrições lagrangianas e hamiltonianas para diferentes sistemas físicos. Mais precisamente, a capacidade de se obter descrições não-comutativas foi demonstrada inicialmente ao se aplicar o Formalismo Simplético de Indução de Não-Comutatividade (FSINC) para construir uma versão NC para o Modelo Sigma Não-Linear (MSNL)  $O(3)$  e outra para o Modelo de Skyrme  $SU(2)$ .

A partir da construção de uma estrutura simplética generalizada dentro de um dado espaço de fase arbitrário, foi possível estudar mecânica clássica dentro de um espaço de fase particular com estrutura simplética consistente com a álgebra DFR modificada. Nesse espaço de fase NC foi possível determinar uma equação análoga a segunda lei de Newton que preserva a simetria de rotação. Além disso, foi explorado a dinâmica de um oscilador harmônico em três e, mais detalhadamente, em duas dimensões espaciais, que mostrou interessantes resultados como: as soluções da coordenadas posição dependem explicitamente do momento linear do sistema, as condições de periodicidade e possibilidade de quebra de periodicidade das soluções dependem da relação entre as frequências de oscilação do momento linear e da coordenada não-comutativa do sistema  $\Theta^{ij}$ , a não-comutatividade induz uma perturbação estável na dinâmica

do oscilador harmônico bidimensional, que possui soluções invariantes sob rotações e necessariamente periódico se o oscilador passa pela origem. Ainda por meio da aplicação do (FSINC), construiu-se uma versão NC para o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) apresentando as famosas equações de Friedmann-Lemaître com correções NCs associadas apenas com o parâmetro NC  $\beta$ , quando o sistema foi considerado de segunda ordem nas velocidades. A dinâmica do fator de escala cósmico mostrou-se depende diretamente do módulo e do sinal de  $\beta$ , para  $\beta$  negativo a não-comutatividade facilita o movimento de expansão do universo enquanto para  $\beta$  positivo ocorre o oposto. Para determinadas configurações do sistema essa influência no movimento de expansão pode ser suficiente para ligar ou desligar o sistema se o parâmetro NC é positivo e negativo, respectivamente. Das correções NCs presentes nas equações de Friedmann-Lemaître a não-comutatividade pôde ser interpretada como um fluido perfeito NC com equação de estado diferente da usual  $P = \alpha'\rho = (\alpha - \frac{1}{3})\rho$ , que se comportaria como poeira num período de radiação. Esse fluido perfeito NC poderia ser responsável por até 8,2% da densidade de matéria do universo ou um terço aproximadamente da matéria escura do universo sem violar os dados da literatura para o *redshift* de transição  $z_t$ .

Em trabalhos posteriores pretende-se interpretar os efeitos físicos das correções NC obtidas na descrição lagrangiana do Modelo Sigma Não-Linear (MSNL)  $O(3)$  e do Modelo de Skyrme  $SU(2)$ , aplicar o (FSINC) para outros sistemas não-lineares que apresentem soluções topológicas, investigar quais os efeitos da quebra de periodicidade para certas configurações de um oscilador harmônico NC e com quais situações físicas conhecidas tais efeitos poderiam ser associados, obter e analisar o super-hamiltoniano NC sem desprezar o parâmetro NC  $\theta$ , o que é equivalente a considerar um super-hamiltoniano com derivadas de ordem superior nas velocidades; investigar em mais detalhes os efeitos do fluido NC obtido na versão NC do modelo cosmológico de (FRW) para períodos específicos do universo e, finalmente, analisar de forma quântica o super-hamiltoniano NC encontrado para se obter quais são os efeitos da não-comutatividade e compará-los com os efeitos já obtidos de forma clássica.

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Construção da matriz simplética do Modelo Sigma Não-Linear $O(3)$ NC

A inversa da matriz simplética (1.55), cujas entradas são os parênteses de Poisson entre as coordenadas, é dada por

$$f^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ -\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) & -\gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & -\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) & -\lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde a notação  $\partial_{\vec{x}}$  denota  $\prod_{i=1}^3 \partial_i$  e  $\Theta(\vec{x}) \equiv \prod_{i=1}^3 \Theta(x_i)$ , isto é, o produto de funções sinais.

Enquanto a matriz simplética  $f(\vec{y}, \vec{z})$  definida como

$$f(\vec{y}, \vec{z}) = \begin{pmatrix} A(\vec{y}, \vec{z}) & B(\vec{y}, \vec{z}) & C(\vec{y}, \vec{z}) & D(\vec{y}, \vec{z}) \\ E(\vec{y}, \vec{z}) & F(\vec{y}, \vec{z}) & G(\vec{y}, \vec{z}) & H(\vec{y}, \vec{z}) \\ I(\vec{y}, \vec{z}) & J(\vec{y}, \vec{z}) & L(\vec{y}, \vec{z}) & M(\vec{y}, \vec{z}) \\ N(\vec{y}, \vec{z}) & P(\vec{y}, \vec{z}) & Q(\vec{y}, \vec{z}) & R(\vec{y}, \vec{z}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

pode ser calculada diretamente da equação

$$\int f_{ij}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) f^{jk}(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} = \delta_i^k \delta(\vec{x} - \vec{z}). \quad (\text{A.3})$$

Inicialmente, os elementos da primeira coluna da matriz simplética (A.2) são determinados das quatro equações que se seguem

$$\int \left( \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) A(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) E(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} = \delta(\vec{x} - \vec{z}) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} A(\vec{x}, \vec{z}) + E(\vec{x}, \vec{z}) = \delta(\vec{x} - \vec{z}),$$

$$\int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y}) A(\vec{y}, \vec{z}) - \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) E(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$-A(\vec{x}, \vec{z}) - \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) E(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} = 0,$$

$$\int \left( \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) I(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) N(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} I(\vec{x}, \vec{z}) + N(\vec{x}, \vec{z}) = 0,$$

$$\int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y}) I(\vec{y}, \vec{z}) - \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) N(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-I(\vec{x}, \vec{z}) - \int \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) N(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} = 0.$$

Derivando a equação (A.5) e usando a equação (A.4), obtém-se

$$\frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) E(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} = E(\vec{x}, \vec{z}) - \delta(\vec{x} - \vec{z}) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\alpha}{2} \int \gamma 2^3 \delta(\vec{x} - \vec{y}) E(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} = E(\vec{x}, \vec{z}) - \delta(\vec{x} - \vec{z})$$

$$(1 - 4\alpha\gamma) E(\vec{x}, \vec{z}) = \delta(\vec{x} - \vec{z})$$

$$E(\vec{x}, \vec{z}) = \frac{1}{1 - 4\alpha\gamma} \delta(\vec{x} - \vec{z}),$$

onde se usou que  $\partial_{\vec{x}} \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) = 2^3 \delta(\vec{x} - \vec{y})$ . A seguinte relação pode ser escrita substituindo a equação (A.8) em (A.5),

$$A(\vec{x}, \vec{z}) = - \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \left( \frac{1}{1 - 4\alpha\gamma} \delta(\vec{y} - \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} \quad (\text{A.9})$$

$$A(\vec{x}, \vec{z}) = - \frac{\gamma}{1 - 4\alpha\gamma} \Theta(\vec{x} - \vec{z}).$$

Já, derivando a equação (A.7) e usando a equação (A.6), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \int \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) N(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= N(\vec{x}, \vec{z}) \\ 4\beta \lambda N(\vec{x}, \vec{z}) &= N(\vec{x}, \vec{z}) \\ (4\beta \lambda - 1) N(\vec{x}, \vec{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Por último, supondo que  $(4\beta \lambda - 1)$  é diferente de zero e usando a equação (A.7), os elementos restantes da primeira coluna da matriz simplética são determinados

$$N(\vec{x}, \vec{z}) = I(\vec{x}, \vec{z}) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Analogamente ao caso da primeira coluna, os elementos da segunda coluna são determinados pela solução do sistema formado pelas quatro equações dadas por

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) B(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) F(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} B(\vec{x}, \vec{z}) + F(\vec{x}, \vec{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y}) B(\vec{y}, \vec{z}) - \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) F(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ -B(\vec{x}, \vec{z}) - \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) F(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= \delta(\vec{x} - \vec{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) J(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) P(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} J(\vec{x}, \vec{z}) + P(\vec{x}, \vec{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y}) J(\vec{y}, \vec{z}) - \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) P(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ -J(\vec{x}, \vec{z}) - \int \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) P(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Derivando a equação (A.13) e somando com a equação (A.12), obtém-se

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) F(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ (1 - 4\alpha\gamma) F(\vec{x}, \vec{z}) &= \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ F(\vec{x}, \vec{z}) &= \frac{1}{1 - 4\alpha\gamma} \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde  $(1 - 4\alpha\gamma)$  é diferente de zero. Comparando a equação (A.16) com a equação (A.12) identifica-se diretamente a seguinte entrada da matriz simplética

$$B(\vec{x}, \vec{z}) = -\frac{1}{1 - 4\alpha\gamma}\delta(\vec{x} - \vec{z}). \quad (\text{A.17})$$

Agora, derivando a equação (A.15) e somando com a equação (A.14), encontra-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}} \int \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})P(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} &= 0 \\ (1 - 4\beta\lambda)P(\vec{x}, \vec{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Usando a suposição anteriormente realizada de que  $(4\beta\lambda - 1)$  é diferente de zero, juntamente com a equação (A.15), os elementos restantes da segunda coluna da matriz simplética são obtidos diretamente

$$P(\vec{x}, \vec{z}) = J(\vec{x}, \vec{z}) = 0. \quad (\text{A.19})$$

De forma análoga as duas primeiras colunas, as quatro equações que determinam a terceira coluna são:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\alpha}{2}\partial_{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{y})C(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y})G(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3\vec{y} &= 0 \\ \frac{\alpha}{2}\partial_{\vec{x}}C(\vec{x}, \vec{z}) + G(\vec{x}, \vec{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y})C(\vec{y}, \vec{z}) - \gamma\Theta(\vec{x} - \vec{y})G(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3\vec{y} &= 0 \\ -C(\vec{x}, \vec{z}) - \int \gamma\Theta(\vec{x} - \vec{y})G(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{y})L(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y})Q(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3\vec{y} &= \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}L(\vec{x}, \vec{z}) + Q(\vec{x}, \vec{z}) &= \delta(\vec{x} - \vec{z}), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y})L(\vec{y}, \vec{z}) - \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})Q(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3\vec{y} &= 0 \\ -L(\vec{x}, \vec{z}) - \int \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})Q(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Derivando a equação (A.21) e somando com a equação (A.20), tem-se

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) G(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= 0 \\ (1 - 4\alpha\gamma) G(\vec{x}, \vec{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Usando que  $(4\alpha\lambda - 1)$  é diferente de zero na equação (A.21), pode-se escrever

$$G(\vec{x}, \vec{z}) = C(\vec{x}, \vec{z}) = 0. \quad (\text{A.25})$$

Agora, a derivada da equação (A.23) somada com a equação (A.22) é dada por

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \int \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) Q(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ (1 - 4\beta\lambda) Q(\vec{x}, \vec{z}) &= \delta(\vec{x} - \vec{z}) \\ Q(\vec{x}, \vec{z}) &= \frac{1}{1 - 4\beta\lambda} \delta(\vec{x} - \vec{z}). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo a equação (A.27) na equação (A.23), encontra-se

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \vec{z}) &= - \int \lambda \Theta(\vec{x} - \vec{y}) \frac{1}{1 - 4\beta\lambda} \delta(\vec{y} - \vec{z}) d^3 \vec{y} \\ L(\vec{x}, \vec{z}) &= - \frac{\lambda}{1 - 4\beta\lambda} \Theta(\vec{x} - \vec{z}). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Finalmente, o conjunto de equações que determinam a última coluna da matriz simplética é dado por

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) D(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) H(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ \frac{\alpha}{2} \partial_{\vec{x}} D(\vec{x}, \vec{z}) + H(\vec{x}, \vec{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y}) D(\vec{y}, \vec{z}) - \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) H(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ -D(\vec{x}, \vec{z}) - \int \gamma \Theta(\vec{x} - \vec{y}) H(\vec{y}, \vec{z}) d^3 \vec{y} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{y}) M(\vec{y}, \vec{z}) + \delta(\vec{x} - \vec{y}) R(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3 \vec{y} &= 0 \\ \frac{\beta}{2} \partial_{\vec{x}} M(\vec{x}, \vec{z}) + R(\vec{x}, \vec{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\int \left( -\delta(\vec{x} - \vec{y})M(\vec{y}, \vec{z}) - \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})R(\vec{y}, \vec{z}) \right) d^3\vec{y} = \delta(\vec{x} - \vec{z}) \quad (\text{A.31})$$

$$-M(\vec{x}, \vec{z}) - \int \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})R(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} = \delta(\vec{x} - \vec{z}).$$

Da derivada da equação (A.29) somada com a equação (A.28), pode-se escrever

$$H(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\alpha}{2}\partial_{\vec{x}} \int \gamma\Theta(\vec{x} - \vec{y})H(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$(1 - 4\alpha\gamma)H(\vec{x}, \vec{z}) = 0.$$

Para  $(4\alpha\lambda - 1)$  diferente de zero, a equação (A.29) implica que

$$H(\vec{x}, \vec{z}) = D(\vec{x}, \vec{z}) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Agora, derivando a equação (A.31) e somando com a equação (A.30), encontra-se o seguinte resultado

$$R(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}} \int \lambda\Theta(\vec{x} - \vec{y})R(\vec{y}, \vec{z})d^3\vec{y} = \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{z}) \quad (\text{A.34})$$

$$(1 - 4\beta\lambda)R(\vec{x}, \vec{z}) = \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{z})$$

$$R(\vec{x}, \vec{z}) = \frac{1}{1 - 4\beta\lambda} \frac{\beta}{2}\partial_{\vec{x}}\delta(\vec{x} - \vec{z}).$$

Da comparação entre as equações (A.34) e (A.30), a última entrada da matriz simplética é dada por

$$M(\vec{x}, \vec{z}) = -\frac{1}{1 - 4\beta\lambda}\delta(\vec{x} - \vec{z}). \quad (\text{A.35})$$

Portanto, a matriz simplética pode ser finalmente escrita da seguinte forma

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma}{\Sigma}\Theta(\vec{x} - \vec{y}) & -\frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ \frac{2}{\Sigma}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) & \frac{\alpha}{\Sigma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\Gamma}\Theta(\vec{x} - \vec{y}) & -\frac{2}{\Gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & \frac{\beta}{\Gamma}\partial_{\vec{x}}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

onde  $\Sigma = 2 - 8\alpha\lambda$  e  $\Gamma = 2 - 8\beta\lambda$  são parâmetros não-nulos.

## A.2 Cálculo da matriz simplética da versão NC do Modelo de Skyrme SU(2)

A inversa da matriz simplética da versão NC do Modelo de Skyrme  $SU(2)$  é dada por

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \theta^{ij} & \delta^{ij} - a^i a^j & a^i & 0 \\ a^i a^j - \delta^{ij} & a^j \pi^i - a^i \pi^j & -\pi^j & a^i \\ -a^j & \pi^j & 0 & \delta^{11} \\ 0 & -a^j & \delta^{11} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

onde as entradas dessa matriz são os parênteses de Poisson usuais entre as coordenadas simpléticas  $\xi^i = (a^i, \pi_i, \rho, \eta)$ , exceto pelo parêntese não-trivial entre as coordenadas de posição dado por  $\{a^i, a^j\} = \theta^{ij}$ . Dessa forma, a matriz simplética a ser determinada pode ser escrita na forma

$$\Sigma_{jk} = \begin{pmatrix} A_{jk} & B_{jk} & C_{j1} & D_{j1} \\ E_{jk} & F_{jk} & G_{j1} & H_{j1} \\ I_{1k} & L_{1k} & M_{11} & N_{11} \\ O_{1k} & P_{1k} & Q_{11} & R_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

Logo, a relação  $\Sigma^{ij} \Sigma_{jk} = \delta_k^i$  gera um conjunto de equações, que possui como solução os elementos da matriz simplética. Mais especificamente, são quatro equações para cada coluna da matriz simplética. Para a primeira coluna, o conjunto de equação a ser resolvido é dado por

$$\theta^{ij} A_{jk} + (\delta^{ij} - a^i a^j) E_{jk} + a^i I_{1k} = \delta_k^i, \quad (\text{A.39})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) A_{jk} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j) E_{jk} - \pi^i I_{1k} + a^i O_{1k} = 0, \quad (\text{A.40})$$

$$-a^j A_{jk} + \pi^j E_{jk} - \delta^{11} O_{1k} = 0, \quad (\text{A.41})$$

$$-a^j E_{jk} + \delta^{11} I_{1k} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Substituindo a equação (A.42) nas equações (A.39) e (A.40), tem-se

$$\theta^{ij} A_{jk} + (\delta^{ij} - a^i a^j) E_{jk} + a^i a^j E_{jk} = \delta_k^i, \quad (\text{A.43})$$

$$\theta^{ij} A_{jk} + E_k^i = \delta_k^i, \quad (\text{A.44})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) A_{jk} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j) E_{jk} - \pi^i a^j E_{jk} + a^i O_{1k} = 0, \quad (\text{A.45})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) A_{jk} - a^i \pi^j E_{jk} + a^i O_{1k} = 0.$$

Enquanto, da multiplicação da equação (A.41) por  $a^i$  à esquerda,

$$-a^i a^j A_{jk} + a^i \pi^j E_{jk} - a^i O_{1k} = 0. \quad (\text{A.46})$$

Somando as equações (A.46) e (A.45) encontra-se que  $A_{jk} = 0$ . Levando esse resultado na equação (A.43) é imediato que  $E_{jk} = \delta_{jk}$ . Substituindo o valor de  $E_{jk}$  nas equações (A.41) e (A.42), obtém-se respectivamente  $O_{1k} = \pi_k$  e  $I_{1k} = a_k$ .

De forma análoga, a segunda linha da matriz simplética pode ser determinada das seguintes equações

$$\theta^{ij} B_{jk} + (\delta^{ij} - a^i a^j) F_{jk} + a^i L_{1k} = 0, \quad (\text{A.47})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) B_{jk} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j) F_{jk} - \pi^i L_{1k} + a^i P_{1k} = \delta_k^i, \quad (\text{A.48})$$

$$-a^j B_{jk} + \pi^j F_{jk} - \delta^{11} P_{1k} = 0, \quad (\text{A.49})$$

$$-a^j F_{jk} + \delta^{11} L_{1k} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Substituindo a equação (A.50) nas equações (A.47) e (A.48), tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} \theta^{ij} B_{jk} + (\delta^{ij} - a^i a^j) F_{jk} + a^i a^j F_{jk} &= 0 \\ \theta^{ij} B_{jk} + F_k^i &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} (a^i a^j - \delta^{ij}) B_{jk} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j) F_{jk} - \pi^i a^j F_{jk} + a^i P_{1k} &= \delta_k^i, \\ (a^i a^j - \delta^{ij}) B_{jk} + -a^i \pi^j F_{jk} + a^i P_{1k} &= \delta_k^i. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Multiplicando (A.49) por  $a^i$  à esquerda,

$$-a^i a^j B_{jk} + a^i \pi^j F_{jk} - a^i \delta^{11} P_{1k} = 0, \quad (\text{A.53})$$

e somando o resultado com a equação (A.52) encontra-se diretamente que  $B_{jk} = -\delta_{jk}$ . Levando esse resultado na equação (A.51) obtém-se que  $F_{jk} = \theta_{jk}$ . Usando o valor de  $F_{jk}$  e  $B_{jk}$  nas equações (A.49) e (A.49), as entradas  $L_{1k} = a^j \theta_{jk}$  e  $P_{1k} = a_k + \pi^j \theta_{jk}$  são obtidas.

Analogamente, o conjunto de equação que determina as entradas da terceira coluna da matriz simplética é dado por

$$\theta^{ij}C_{j1} + (\delta^{ij} - a^i a^j)G_{j1} + a^i M_{11} = 0, \quad (\text{A.54})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij})C_{j1} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j)G_{j1} - \pi^i M_{11} + a^i Q_{11} = 0, \quad (\text{A.55})$$

$$-a^j C_{j1} + \pi^j G_{j1} - \delta^{11} Q_{11} = 1, \quad (\text{A.56})$$

$$-a^j G_{j1} + \delta^{11} M_{11} = 0. \quad (\text{A.57})$$

Dessa forma, substituindo a equação (A.57) nas equações (A.54) e (A.55), encontra-se, respectivamente,

$$\theta^{ij}C_{j1} + (\delta^{ij} - a^i a^j)G_{j1} + a^i a^j G_{j1} = 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\theta^{ij}C_{j1} + G_1^i = 0, \quad (\text{A.59})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij})C_{j1} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j)G_{j1} - \pi^i a^j G_{j1} + a^i Q_{11} = 0, \quad (\text{A.60})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij})C_{j1} - a^i \pi^j G_{j1} + a^i Q_{11} = 0.$$

A multiplicação da equação (A.56) por  $a^i$  à esquerda fornece

$$-a^i a^j C_{j1} + a^i \pi^j G_{j1} - a^i \delta^{11} Q_{11} = a^i, \quad (\text{A.61})$$

e somando esse resultado com a equação (A.60), obtém-se diretamente  $C_{j1} = -a_j$  e, conseqüentemente, da equação (A.58),  $G_1^i = \theta^{ij} a_j$ . Agora, levando o valor de  $G_{j1}$  na equação (A.57), encontra-se que  $M_{11} = a^j \theta_j^i a_i = 0$ , onde se usou que a matriz  $\theta^{ij}$  é antissimétrica na troca de seus índices. Por último, levando os valores de  $G_{j1}$  e  $C_{j1}$  na equação (A.56), tem-se  $Q_{11} = -1 + a^j a_j + \pi^j \theta_{ji} a_i$ . Enquanto, o conjunto de equações que possui como solução as entradas da última coluna da matriz simplética é dado por

$$\theta^{ij}D_{j1} + (\delta^{ij} - a^i a^j)H_{j1} + a^i N_{11} = 0, \quad (\text{A.62})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij})D_{j1} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j)H_{j1} - \pi^i N_{11} + a^i R_{11} = 0, \quad (\text{A.63})$$

$$-a^j D_{j1} + \pi^j H_{j1} - \delta^{11} R_{11} = 0, \quad (\text{A.64})$$

$$-a^j H_{j1} + \delta^{11} N_{11} = 1. \quad (\text{A.65})$$

Substituindo a equação (A.65) nas equações (A.62) e (A.63), encontra-se

$$\theta^{ij} D_{j1} + (\delta^{ij} - a^i a^j) H_{j1} + a^i (1 + a^j H_{j1}) = 0, \quad (\text{A.66})$$

$$\theta^{ij} D_{j1} + H_1^i + a^i = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) D_{j1} + (a^j \pi^i - a^i \pi^j) H_{j1} - \pi^i (1 + a^j H_{j1}) + a^i R_{11} = 0, \quad (\text{A.68})$$

$$(a^i a^j - \delta^{ij}) D_{j1} - a^i \pi^j H_{j1} - \pi^i + a^i R_{11} = 0.$$

Multiplicando a equação (A.64) por  $a^i$  à esquerda,

$$-a^i a^j D_{j1} + a^i \pi^j H_{j1} - a^i R_{11} = 0, \quad (\text{A.69})$$

e somando o resultado com a equação (A.68), obtém-se diretamente  $D_{j1} = -\pi_j$ . Levando  $D_{j1}$  na equação (A.66) pode-se escrever diretamente  $H_1^i = -a^i + \theta^{ij} \pi_j$ . Por fim, substituindo o valor de  $D_{j1}$  e  $H_{j1}$  nas equações (A.64) e (A.65), encontra-se

$$R_{11} = a^j \pi_j + \pi^j (-a_j + \theta_j^i \pi_i) = 0, \quad (\text{A.70})$$

$$N_{11} = 1 + a^j (-a_j - \theta_j^i \pi_i). \quad (\text{A.71})$$

Portanto, a matriz simplética do Modelo de Skyrme Não-Comutativo pode ser escrita como

$$\Sigma_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{jk} & -a_j & -\pi_j \\ \delta_{jk} & \theta_{jk} & -\theta_{ij} a^i & -a_j - \theta_j^i \pi_i \\ a_k & \theta_{ij} a^i & 0 & 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i \\ \pi_k & a_k + \theta_k^i \pi_i & -1 + a_j a^j + a^j \theta_j^i \pi_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.72})$$

# Apêndice B

## Apêndice

### B.1 Cálculo dos tensores $A_{\xi_i}$ da Lagrangiana de primeira ordem do Modelo de Skyrme $SU(2)$

O sistema de equação cuja solução são os tensores  $A_{\xi_i}$  presentes na Lagrangiana de primeira ordem do Modelo de Skyrme  $SU(2)$  é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{a_k}}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial a^k} &= 0, \\ \frac{\partial A_{\pi_k}}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \pi^k} &= -\delta_{jk}, \\ \frac{\partial A_{\pi_k}}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \pi^k} &= \theta_{jk}, \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \rho} &= -a_j, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial a^j} - \frac{\partial A_{a_j}}{\partial \eta} &= -\pi_j, \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \rho} &= \theta_{ji} a^i, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial \pi^j} - \frac{\partial A_{\pi_j}}{\partial \eta} &= -a_j - \theta_j^i \pi_i, \\ \frac{\partial A_\eta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \eta} &= 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Suponha que o sistema de equações acima (B.1) admite a seguinte solução

$$\begin{aligned}
A_{a_i} &= \pi_i + \rho a_i + \eta \pi_i + f_i, \\
A_{\pi_i} &= \eta a_i + g_i, \\
A_\rho &= Z, \\
A_\eta &= W.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Dessa forma, levando essas soluções em (1.100), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial a^k} &= 0, \\
\frac{\partial g_k}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \pi^k} &= 0, \\
\frac{\partial g_k}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \pi^k} &= \theta_{jk}, \\
\frac{\partial Z}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \rho} &= 0, \\
\frac{\partial W}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \eta} &= 0, \\
\frac{\partial Z}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \rho} &= \theta_{ji} a^i, \\
\frac{\partial W}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \eta} &= -\theta_j^i \pi_i, \\
\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} &= 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Antes de resolver o sistema de (B.3), os auto-espacos da matriz  $\theta^{ij}$ , com  $i, j = 1, 2, 3, 4$  serão investigados. Para isso, a equação de autovalores

$$\det \left( \theta^{ij} - \lambda \delta^{ij} \right) = 0. \tag{B.4}$$

precisa ser resolvida, onde  $\theta^{ij}$  é uma matriz antissimétrica real  $4 \times 4$ , dada por

$$\theta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B & C & D \\ -B & 0 & I & G \\ -C & -I & 0 & V \\ -D & -G & -V & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

Resolvendo a equação (B.4), tem-se

$$\begin{aligned} \det \left( \theta^{ij} - \lambda \delta^{ij} \right) &= -\lambda \left[ -\lambda^3 - \lambda(G^2 + V^2 + I^2) \right] \\ &- B \left[ -B\lambda^2 - IVD + GCV - D\lambda G - V^2 B - \lambda CI \right] \\ &+ C \left[ -BI\lambda^3 - \lambda VD = G^2 C - GID - BVG + \lambda^2 C \right] \\ &- D \left[ -BIV - \lambda^2 D + IGC - DI^2 + G\lambda B + VC\lambda \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left[ I^2 + G^2 + V^2 + B^2 + C^2 + D^2 \right] + \left( (DI + BV) - GC \right)^2 = 0. \quad (\text{B.7})$$

Desse modo, o único autovalor que uma matriz antissimétrica real  $4 \times 4$  admite é o auto valor zero. Para o caso de  $\theta^{ij}$ , o autovalor zero existe se, e somente se,  $GC = DI + BV$ . Para obter a dimensão do subespaço associado ao auto valor zero, duas situações são consideradas. A Primeira situação, se refere ao valor de  $V$  não-nulo, então

$$\begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ -B & 0 & I & G \\ -C & -I & 0 & V \\ -D & -G & -V & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{cases} BY + CZ + DW = 0 \\ -BX + IZ + GW = 0 \\ CX - IY + VW = 0 \\ -DX - GY - VZ = 0 \end{cases}$$

Daí,  $W = \frac{C}{V}X + \frac{I}{V}Y$  e  $Z = -\frac{D}{V}X - \frac{G}{V}Y$ , em que usamos  $GC = DI + BV$  e  $V$  não-nulo. Enquanto para  $V$  nulo, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ -B & 0 & I & G \\ -C & -I & 0 & V \\ -D & -G & -V & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} BY + CZ + DW = 0 \\ -BX + IZ + GW = 0 \\ CX - IY = 0 \\ -DX - GY = 0 \end{cases}$$

Então  $Y = -\frac{D}{G}$ , com  $G$  não-nulo. Contudo, observa-se claramente que a dimensão dos subespaços associados ao autovalor nulo da matriz  $\theta^{ij}$  com  $GC = DI + BV$  para  $V \neq 0$  e  $V = 0$  são 2 e 3, respectivamente. Portanto, para um espaço simplético  $\xi^i = (a^i, \pi_i, \rho, \eta)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , com  $GC = DI + BV$  e  $V = 0$  pode-se definir um hiperplano com dimensão  $n - 1 = 9$  como

$$\mathcal{H} = \{(a^1, \dots, a^4, \pi_1, \dots, \pi^4, \rho, \eta) \in \mathbb{R}^{10}; \theta^{ij} \pi_j = 0\}. \quad (\text{B.8})$$

E, dado um ponto qualquer  $\alpha(a^i, \pi_i, \rho, \eta) \in \mathcal{H}$  e  $\forall \epsilon > 0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $\alpha \in \mathcal{H}$  tal que  $|\phi^i(\beta)| = |\theta^{ij} \pi_j| < \epsilon \forall \beta \in V, \forall i = 1, 2, 3, 4$ . Em que,

$$\begin{aligned} \phi_i &: \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi^i(a^i, \pi_i, \rho, \eta) &= \theta^{ij} \pi_j. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Agora, o sistema (B.3) na vizinhança  $V$  pode ser escrito como

$$\frac{\partial f_k}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial a^k} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \pi^k} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \pi^k} = \theta_{jk} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \rho} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial W}{\partial a^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \rho} = \theta_{ji} a^i \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial W}{\partial \pi^j} - \frac{\partial g_j}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i. \quad (\text{B.17})$$

Derivando a equação (B.13) em relação a  $\eta$  e a equação (B.14) em relação a  $\rho$  e subtraindo os resultados, encontra-se

$$\partial_{a^k} \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (\text{B.18})$$

Comparando esse resultado com a equação (B.17), a seguinte relação é obtida

$$\partial_{a^k} \left( 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i \right) = 0. \quad (\text{B.19})$$

O vínculo esférico do sistema na ausência de estruturas não-comutativas é dado por  $1 - a_j a^j = 0$ . Dessa forma, a equação (B.19) é satisfeita se considerarmos

$$L(\pi^i, \rho, \eta) = 1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i = L(\pi^i, \rho, \eta) = 0. \quad (\text{B.20})$$

O qual pode ser visto como um vínculo esférico deformado associado com as mudanças geométricas no espaço decorrentes da não-comutatividade. Usando o vínculo esférico deformado (B.20) o sistema de equações (B.10-B.19) pode ser resolvido. De fato, das equações (B.12) e (B.15), tem-se que

$$g_k = \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j + \rho \theta_{ik} a^i, \quad (\text{B.21})$$

onde  $Z$  foi considerado independente de  $\pi^i$ . Levando a equação (B.21) em (B.11), a seguinte relação é obtida

$$f_j = \pi^k \partial_{a_j} \left( \frac{1}{2} \theta_{lk} \pi^l + \rho \theta_{ik} a^i \right) = \pi^k \partial_{a_j} \rho \theta_{ik} a^i = \rho \pi^k \theta_{jk}. \quad (\text{B.22})$$

Das equações (B.22) e (B.13), tem-se

$$Z = a^j \pi^k \partial_{a_j} \theta_{ik} a^i a^j = a^j \pi^k \theta_{jk} = (-1 + a_j a^j), \quad (\text{B.23})$$

onde usamos o vínculo esférico deformado. Por fim, das equações (B.14), (B.16) e (B.17) conclui-se que  $W = 0$ . Portanto, a solução do sistema dada em (B.3) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_{a_k} &= \pi_k + \rho a_k + \eta \pi_k + \rho \pi^l \theta_{kl} \\ A_{\pi_k} &= \eta a_k + \frac{1}{2} \theta_{jk} \pi^j + \rho \theta_{ik} a^i \\ A_\rho &= -1 + a_j a^j \\ A_\eta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

E o sistema possui um vínculo esférico deformado dado por  $1 - a_j a^j - a^j \theta_j^i \pi_i = 0$ .

# Apêndice C

## Apêndice

### C.1 Gráficos das soluções das equações Friedmann-Lemaître corrigidas

As equações diferenciais para o fator de escala cósmico  $a(t)$  descritas em (3.77) e (3.78), chamadas equações de Friedmann-Lemaître corrigidas, podem ser reescritas como

$$2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k - \Lambda a^2 + \beta\left(\frac{1}{3} - \alpha\right)a^{-3\alpha} + C\alpha a^{-3\alpha-1} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0, \quad (\text{C.2})$$

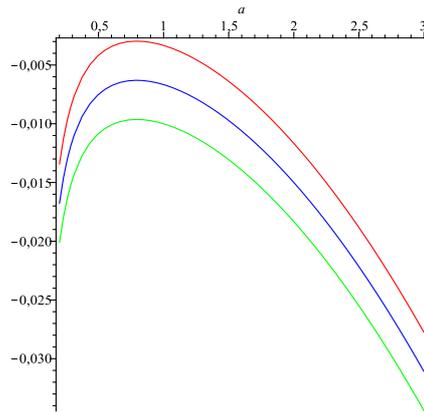
com

$$V(a) = k - \frac{1}{3}\Lambda a^2 + \frac{\beta}{3}a^{-3\alpha} - \frac{C}{3}a^{-3\alpha-1}, \quad (\text{C.3})$$

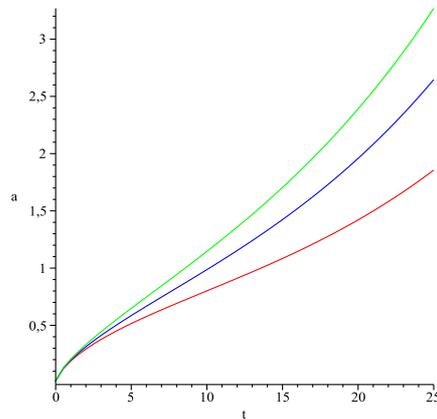
onde  $C$  é uma constante positiva diretamente relacionada com a densidade, a qual será tomada igual 0,001;  $\beta$  é o parâmetro não-comutativo (NC) e  $\Lambda$  é a constante cosmológica, ambos considerados da mesma ordem de grandeza. Enquanto  $k$  é o termo que determina o sinal da curvatura espacial e  $\alpha$  é o fator de proporcionalidade entre a pressão e a densidade de energia, tomado igual a  $0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 1, -1$  e  $\frac{-2}{3}$ . Dessa forma, existem 27 possibilidades a se considerar para cada valor de  $\alpha$ . Além disso, nos gráficos do potencial em função do fator de escala cósmico e do fator de escala cósmico em função do tempo as curvas em vermelho, azul e verde correspondem à escolha de  $\beta$  igual 0,01, 0 e  $-0,01$ , respectivamente. Importante frisar que as curvas em azul correspondem ao caso do Modelo de Friedmann usual, sem correções não-comutativas.

### C.1.1 Aproximação não-relativística, poeira pura

Primeiramente, quando a matéria-energia do universo é descrita por um fluido perfeito não-relativístico sem pressão, que equivale a tomar  $\alpha$  nulo na equação de estado  $P = \alpha\epsilon$ , o potencial (C.3) em função do fator de escala cósmico e a soluções da equação de Lemaître corrigida (C.1) no tempo, com as respectivas escolha de parâmetros, são plotados nas figuras C.1 – C.2.



**Figura C.1:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0,01$ .



**Figura C.2:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0,01$ .

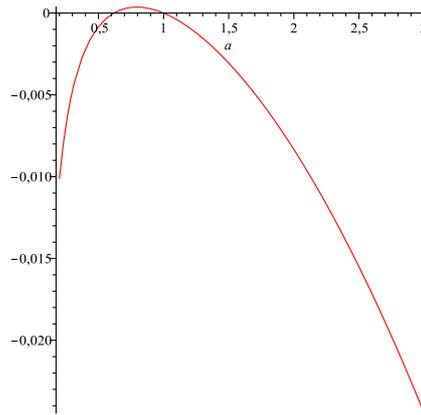
Em que as condições iniciais escolhidas satisfazem (3.90), de forma que toda solução da equação de Lemaître corrigida (3.80) é também solução da Equação

de Friedmann corrigida (3.79). Dado a liberdade do sinal da velocidade que aparece em (3.90), considera-se que para um tempo pequeno da ordem de 0,02 o universo esteja expandindo

$$a(0,02) = 0,02. \quad (\text{C.4})$$

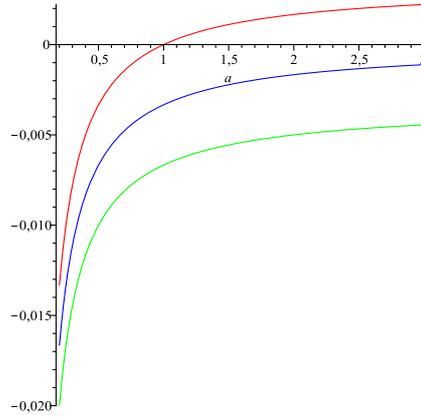
$$\dot{a}(0,02) = (-V(a(0,02)))^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.5})$$

Desses gráficos, observa-se que a não-comutatividade diminui a velocidade de expansão do universo quando o parâmetro NC  $\beta$  é positivo. Enquanto para  $\beta$  negativo a não-comutatividade faz um efeito inverso. Além disso, a solução para o fator de escala mostrada na figura C.2 está em acordo com gráfico do potencial decorrente da equação de Friedmann corrigida (C.2). Tendo em visto o efeito da não-comutatividade para  $\beta$  positivo, observar-se que o aumento do parâmetro NC pode levar o sistema a apresentar pontos de retorno, como mostrado na figura C.3.

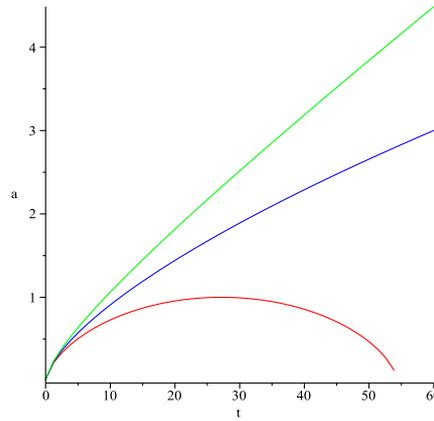


**Figura C.3:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\beta = 0,02$ .

Analogamente, para a escolha da constante cosmológica  $\Lambda$  nula, os gráficos do potencial (C.3) e para a solução numérica da equação (C.1) são representados nas figuras C.4 – C.5.

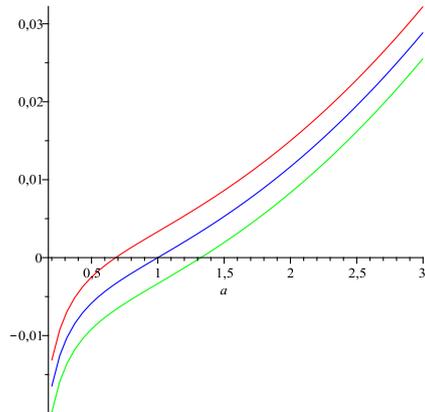


**Figura C.4:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0$ .

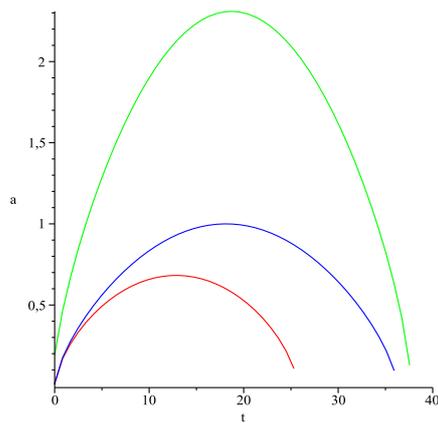


**Figura C.5:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0$ .

Desses gráficos, nota-se que a não-comutatividade atua de forma análoga ao caso da constante cosmológica positiva. Entretanto, ainda para valores de  $\beta$  da ordem de 0,01 o fator de escala já apresenta um ponto de retorno. O que está em acordo com o efeito da constante cosmológica. Além disso, observa-se que o efeito da não-comutatividade pode ser suficiente para ligar o sistema. Finalmente, para a constante cosmológica negativa, os gráficos do potencial e da solução da equação de Lemaître corrigida são mostrados nas figuras **C.6** – **C.7**. Estes gráficos apresentam o mesmo efeito da não-comutatividade observado para outros valores da constante cosmológica.

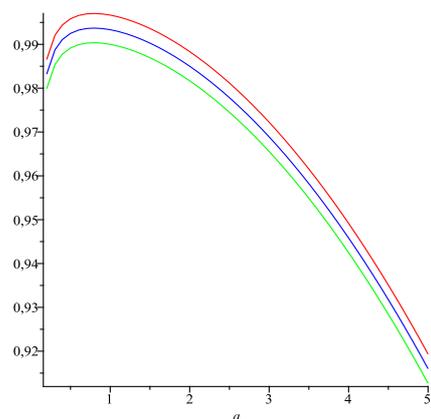


**Figura C.6:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = -0,01$ .

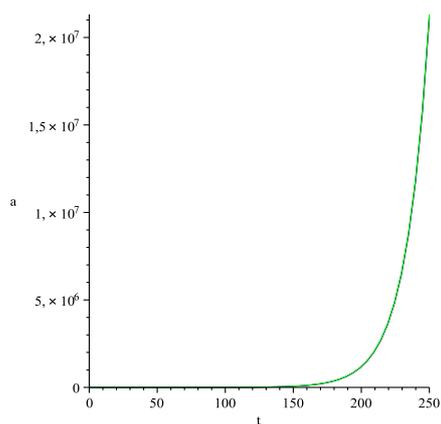


**Figura C.7:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = -0,01$ .

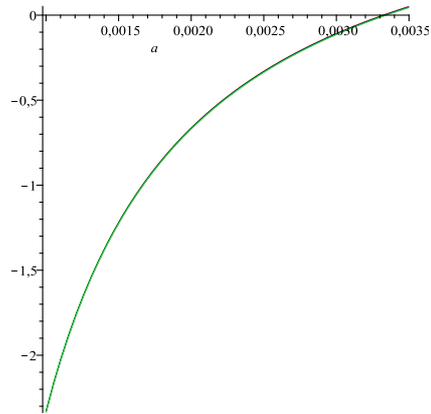
Agora, o universo esférico ( $k = 1$ ) é tratado de forma completamente análoga, ver figuras **C8 – C14**.



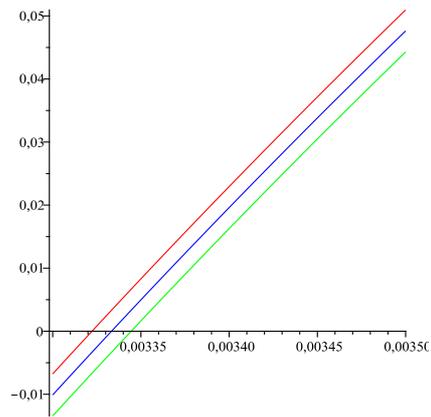
**Figura C.8:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



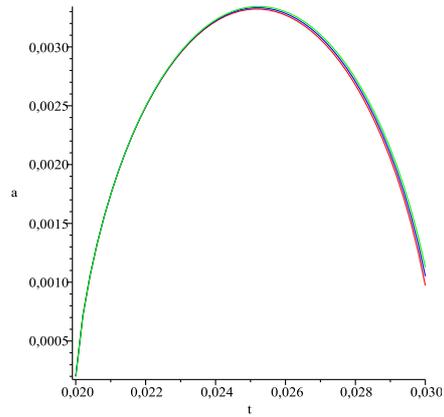
**Figura C.9:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



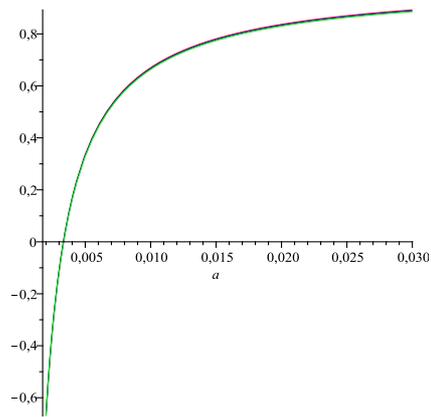
**Figura C.10:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0$ .



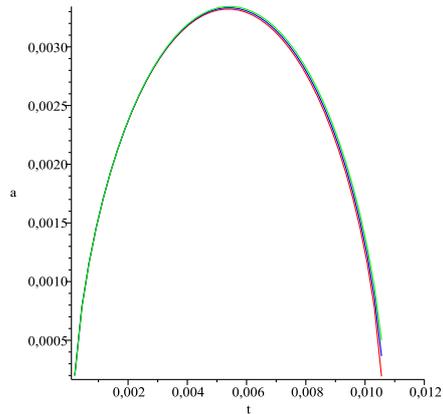
**Figura C.11:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0$ .



**Figura C.12:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0$ .



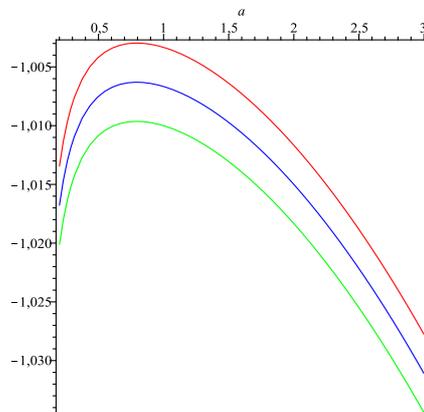
**Figura C.13:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = -0,01$ .



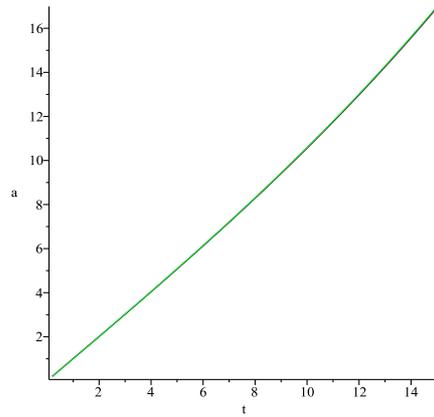
**Figura C.14:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = -0,01$ .

Sendo que, para existir solução, considerou-se :  $a(0,02) = 18$  quando  $\Lambda$  positivo e  $a(0,02) = 0,0002$  para  $\Lambda$  negativo e nulo. Desses gráficos observa-se o mesmo efeito da não-comutatividade descrito anteriormente para o universo plano.

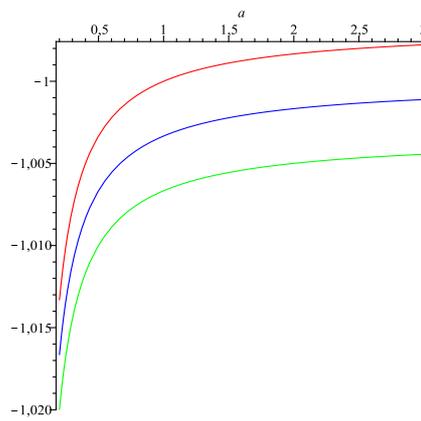
Por último, para o universo hiperbólico ( $k = -1$ ), tem-se



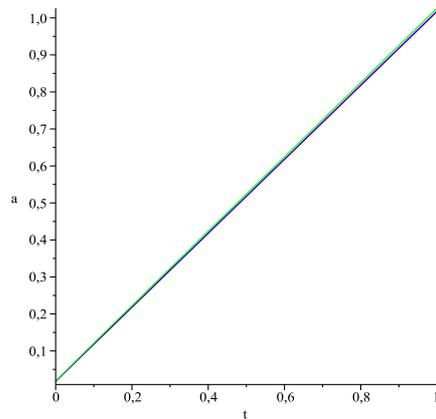
**Figura C.15:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



**Figura C.16:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0,01$ .

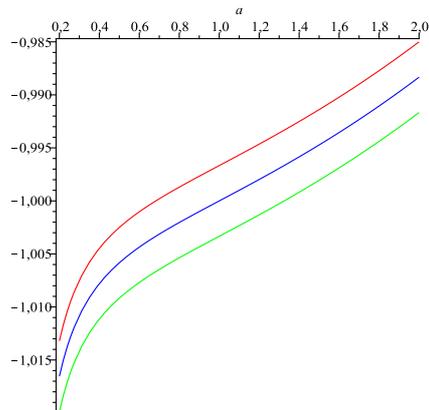


**Figura C.17:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0$ .

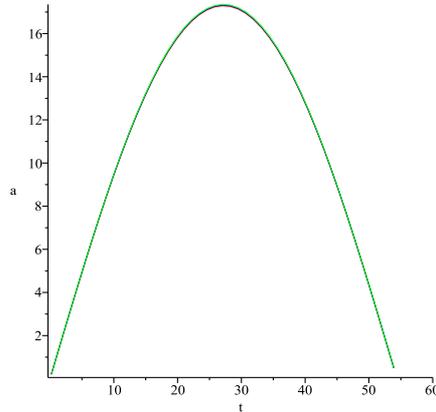


**Figura C.18:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0$ .

Finalmente, para a constante cosmológica negativa, ver figuras **C.19** – **C.20**, temos resultados análogos ao caso do universo plano, mas neste último as influências da não-comutatividade são mais pronunciadas.



**Figura C.19:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = -0,01$ .

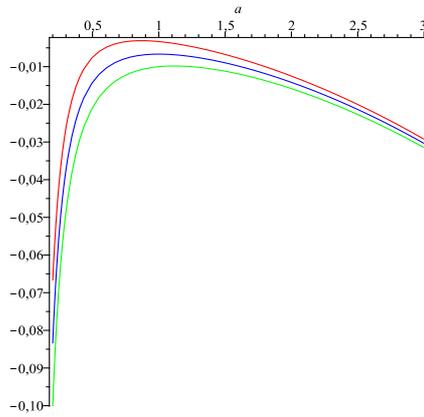


**Figura C.20:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = -0,01$ .

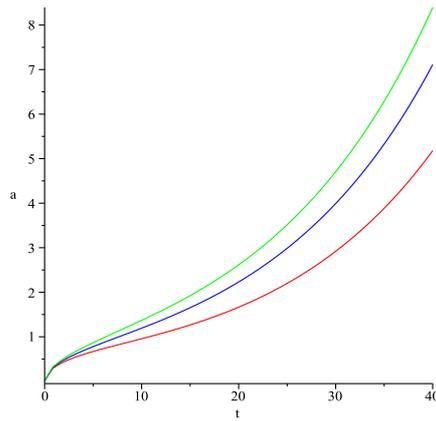
Desses gráficos, nota-se que para o universo hiperbólico e com a constante cosmológica nula o crescimento do fator de escala como tempo é aproximadamente linear para grandes valores do fator de escala, ver figuras **C.17 – C.18**. Além disso, o valor do parâmetro NC é inversamente proporcional a inclinação da função que descreve a variação fator de escala cósmico com o tempo, o que esta em acordo com efeito da não-comutatividade já descrito. Uma consideração em relação ao caso hiperbólico, diz respeito a maior pronúncia do efeito da não-comutatividade para a constante cosmológica negativa.

### C.1.2 Gás ultra-relativístico, radiação pura

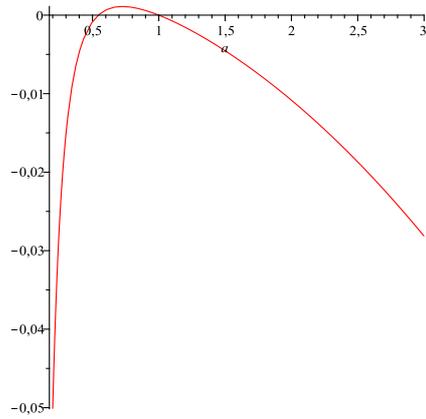
Considerando a matéria do universo formada por um fluido perfeito composto por um gás ultra-relativístico em que a relação entre a pressão e a densidade de energia é dada por  $P = \frac{1}{3}\epsilon$ , que para nossa notação equivale a tomar  $\alpha$  igual a  $\frac{1}{3}$ , os gráficos do potencial (C.3) em função do fator de escala e as soluções da equação (C.1) para o fator de escala em função do tempo, com as respectivas escolhas de parâmetros, são dadas pelas figuras que se seguem:



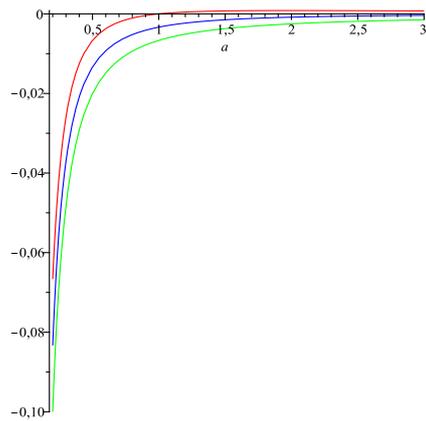
**Figura C.21:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0,01$ .



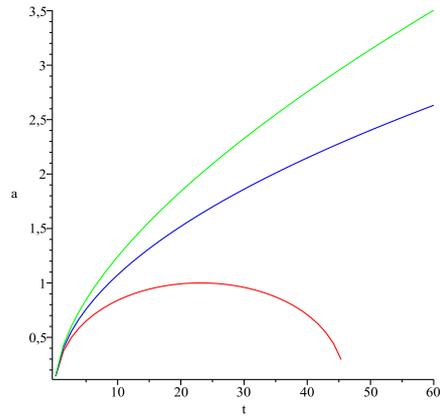
**Figura C.22:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0,01$ .



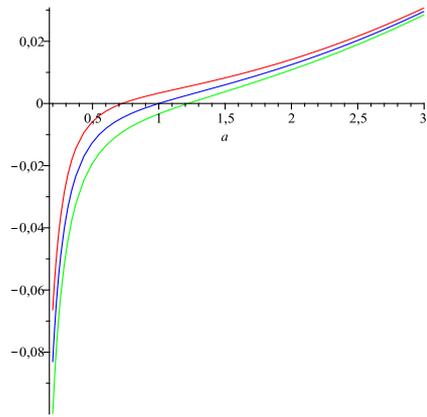
**Figura C.23:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\beta = 0.02$ .



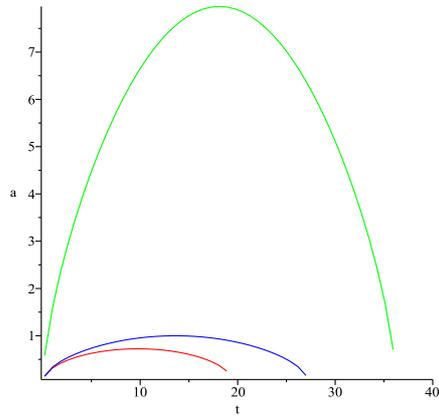
**Figura C.24:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0$ .



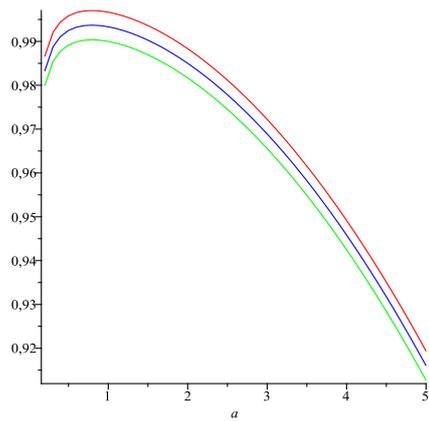
**Figura C.25:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = 0$ .



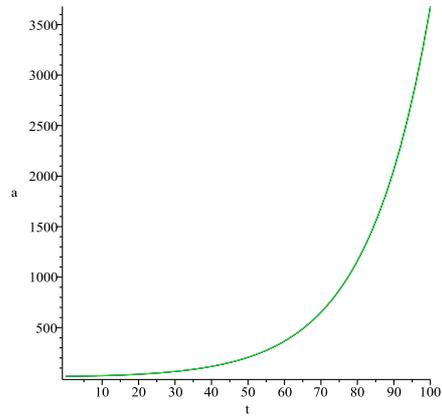
**Figura C.26:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$  e  $\Lambda = -0,01$ .



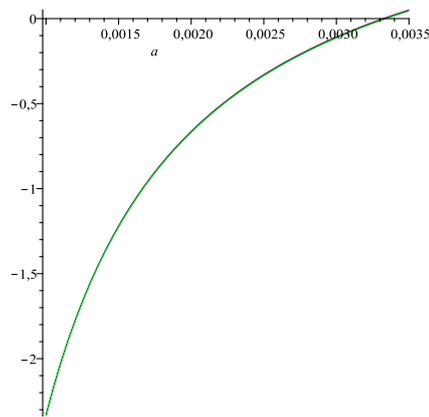
**Figura C.27:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$  e  $\Lambda = -0,01$ .



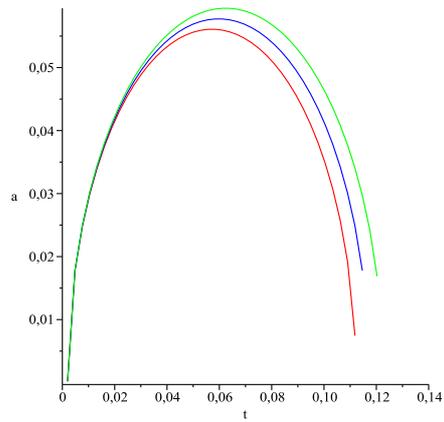
**Figura C.28:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



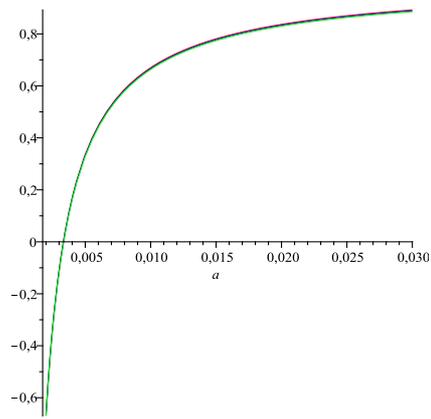
**Figura C.29:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



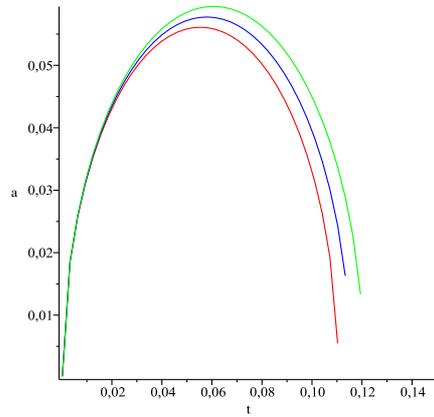
**Figura C.30:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0$ .



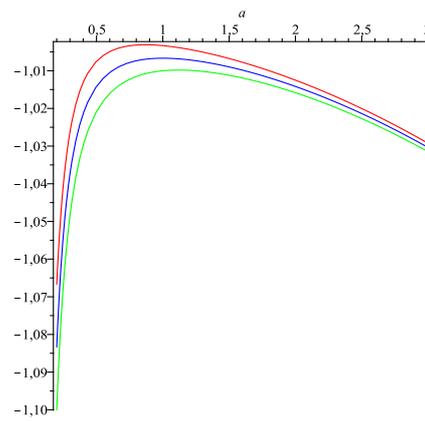
**Figura C.31:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = 0$ .



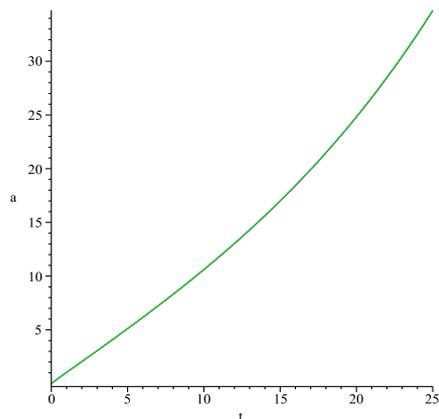
**Figura C.32:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$  e  $\Lambda = -0,01$ .



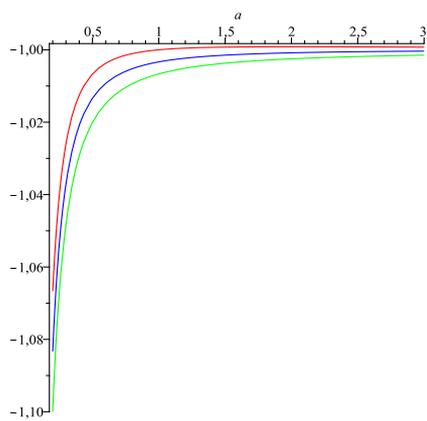
**Figura C.33:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$  e  $\Lambda = -0,01$ .



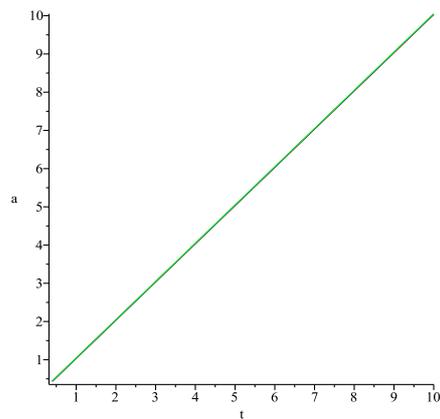
**Figura C.34:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



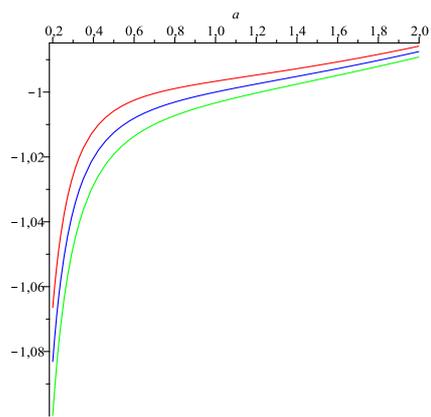
**Figura C.35:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0,01$ .



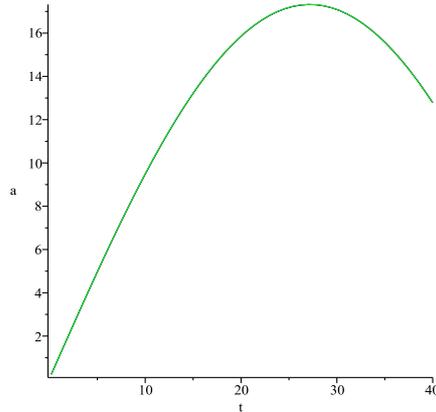
**Figura C.36:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0$ .



**Figura C.37:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = 0$ .



**Figura C.38:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$  e  $\Lambda = -0,01$ .



**Figura C.39:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$  e  $\Lambda = -0,01$ .

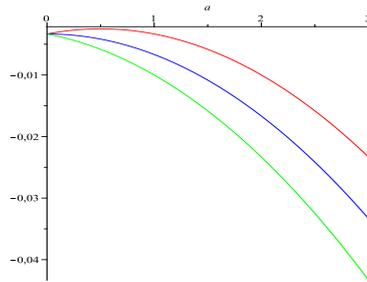
No caso do universo dominado pela radiação observa-se que a não-comutatividade exerce um efeito semelhante ao caso do universo dominado por poeira pura. De fato, para o universo plano e constante cosmológica positiva, o aumento do parâmetro NC pode gerar pontos de retorno no sistema. Enquanto, para o universo esférico, quando a constante cosmológica é nula a influência da não-comutatividade é bastante discreta. Sendo que para o universo esférico foi usado as seguintes condições iniciais para que o sistema possuísse solução:  $a(0,02) = 18$ ,  $\dot{a}(0,02) = 0,0002$  e  $\ddot{a}(0,02) = 0,00002$  para  $\Lambda$  positivo, nulo e negativo, respectivamente. Ainda para o universo esférico, quando a constante cosmológica é nula a influência da não-comutatividade é bastante discreta.

No caso da radiação observa-se que o universo tem maior dificuldade para expandir e está mais ligado em relação ao caso do universo dominado por poeira, como era esperado. Além disso, importante ressaltar que todas as soluções da equação de Lemaître corrigida apresentadas para o caso da radiação estão em acordo com o gráfico do potencial (C.3) correspondente.

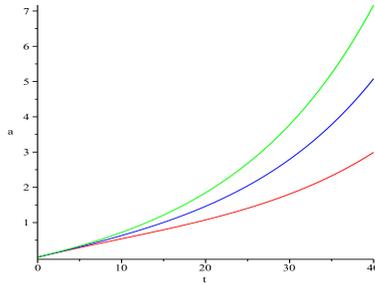
### C.1.3 Cordas cósmicas, energia escura, matéria rígida e paredes de domínio

Assim como nos casos do universo numa época dominada pela poeira ou radiação mostrados nas subseções anteriores, para matéria-energia do universo formada por outros fluidos perfeitos com equação de estado  $P = \alpha\epsilon$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ ,

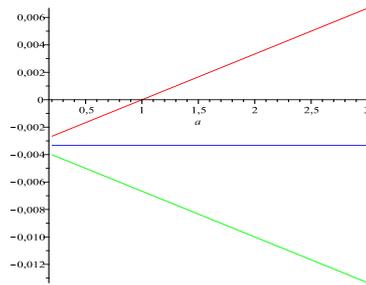
$-1$ ,  $1$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ , que corresponde a um período regido pelas cordas cósmicas, energia escura, matéria rígida e paredes de domínio; o potencial (C.3) em função do fator de escala cósmico e a soluções da equação de Lemaître corrigida (C.1) no tempo, com as respectivas escolhas de parâmetros, são plotados nas figuras C.40 – C.93. Em que se observa o mesmo efeito da não-comutatividade observado para o caso de poeira e radiação.



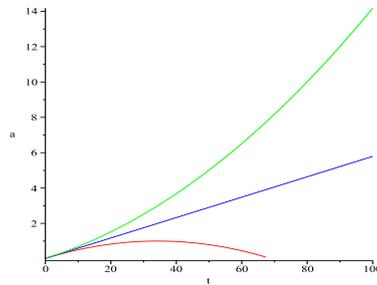
**Figura C.40:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



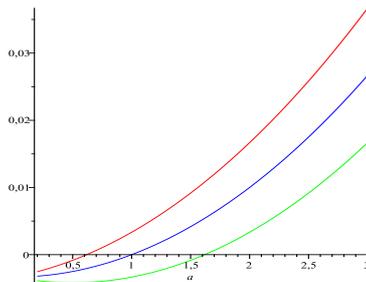
**Figura C.41:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



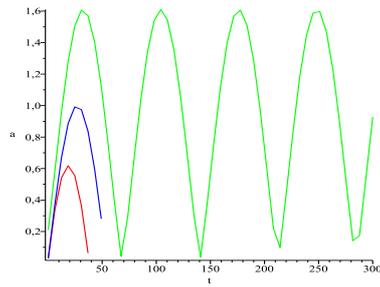
**Figura C.42:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



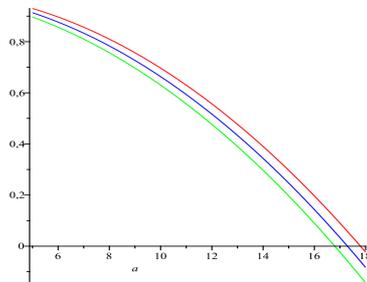
**Figura C.43:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



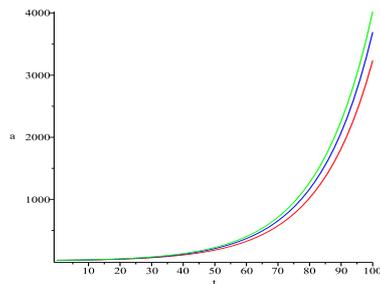
**Figura C.44:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



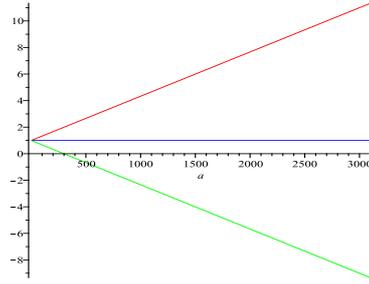
**Figura C.45:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



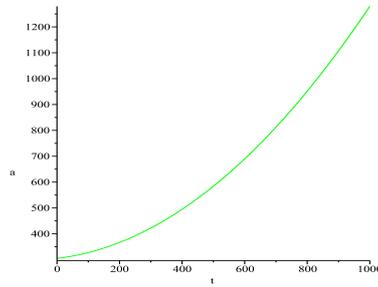
**Figura C.46:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



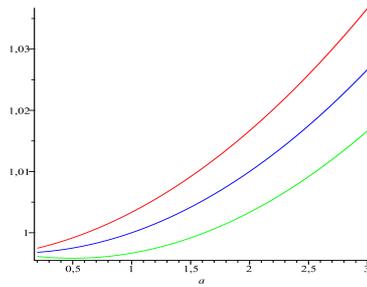
**Figura C.47:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



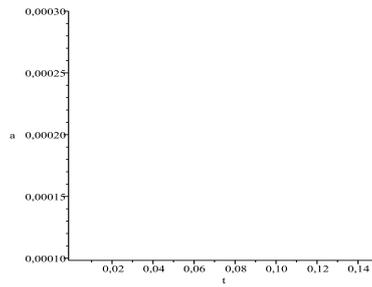
**Figura C.48:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



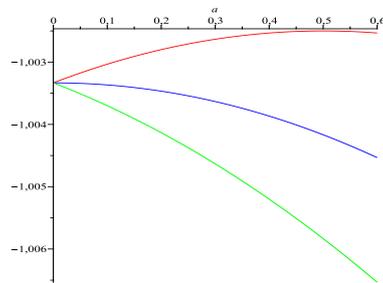
**Figura C.49:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



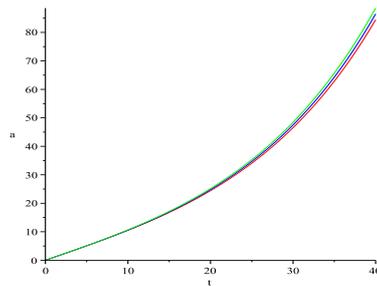
**Figura C.50:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



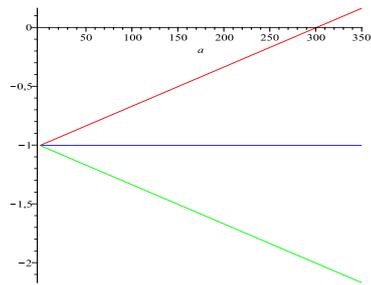
**Figura C.51:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



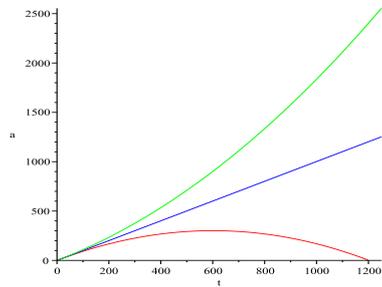
**Figura C.52:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



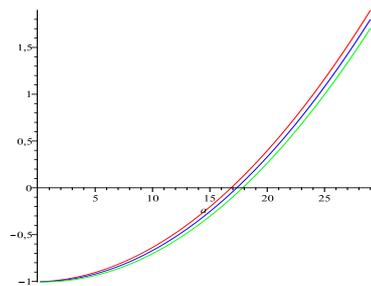
**Figura C.53:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



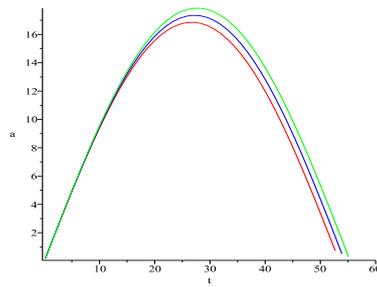
**Figura C.54:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



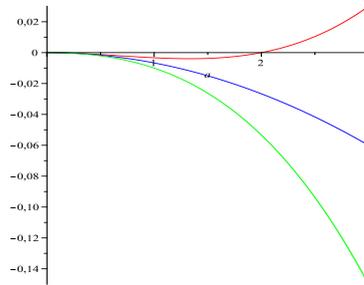
**Figura C.55:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



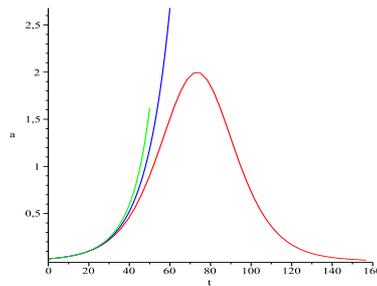
**Figura C.56:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



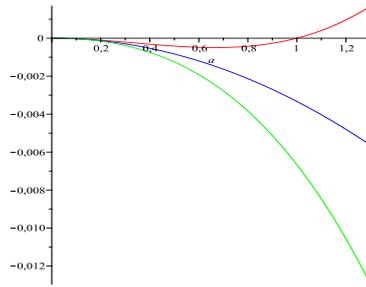
**Figura C.57:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .



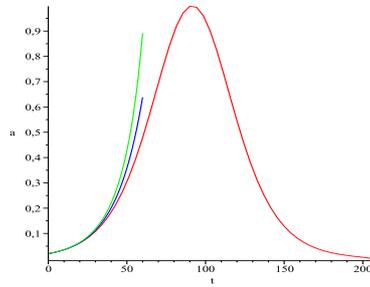
**Figura C.58:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



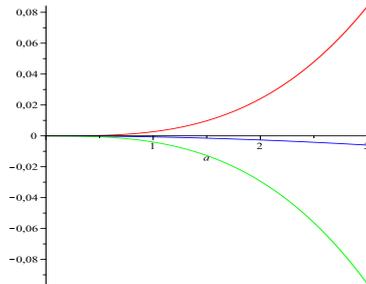
**Figura C.59:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



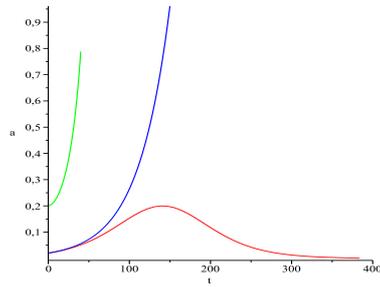
**Figura C.60:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



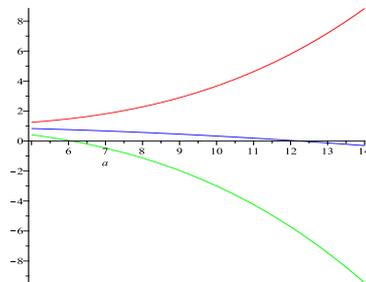
**Figura C.61:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



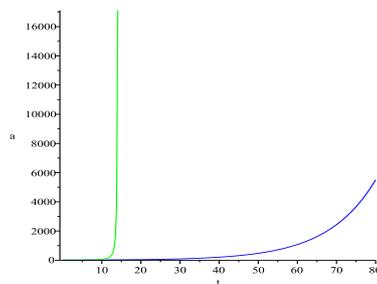
**Figura C.62:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



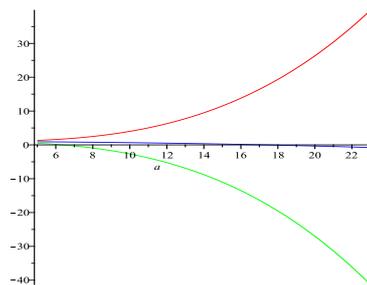
**Figura C.63:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



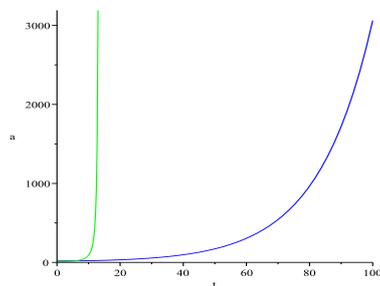
**Figura C.64:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



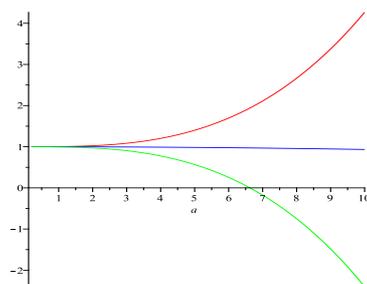
**Figura C.65:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



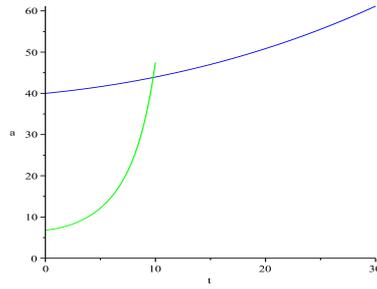
**Figura C.66:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



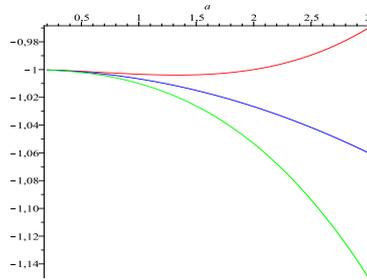
**Figura C.67:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



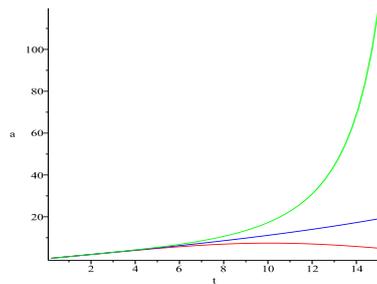
**Figura C.68:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



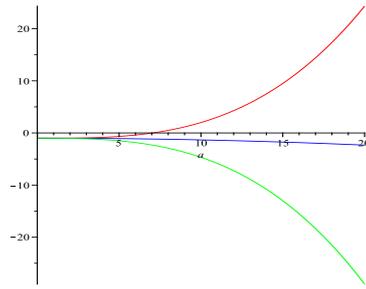
**Figura C.69:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



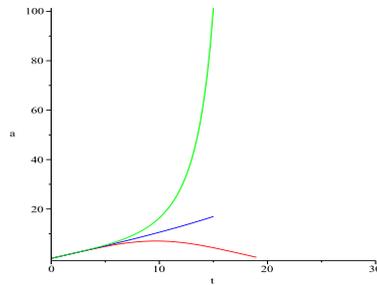
**Figura C.70:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



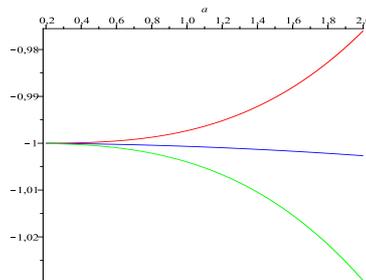
**Figura C.71:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -1$ .



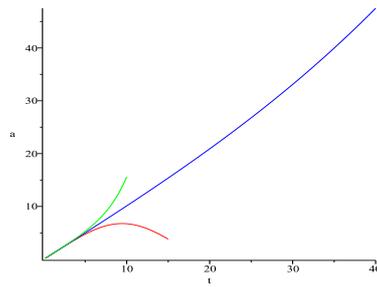
**Figura C.72:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



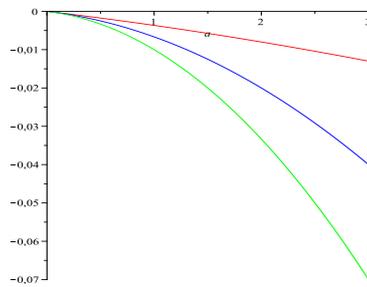
**Figura C.73:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -1$ .



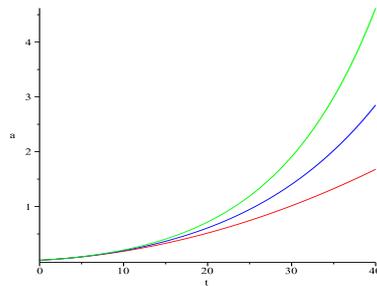
**Figura C.74:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



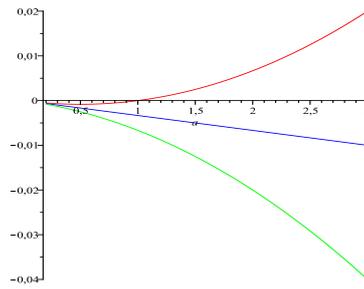
**Figura C.75:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -1$ .



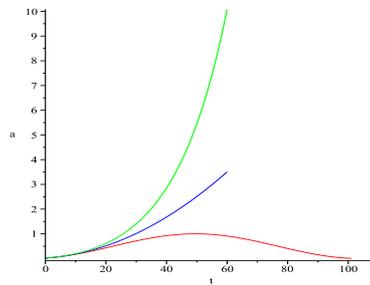
**Figura C.76:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



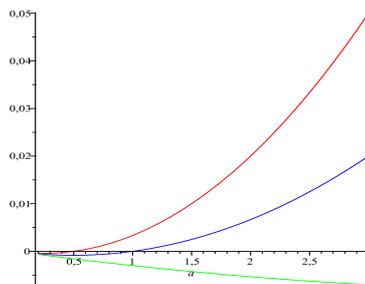
**Figura C.77:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



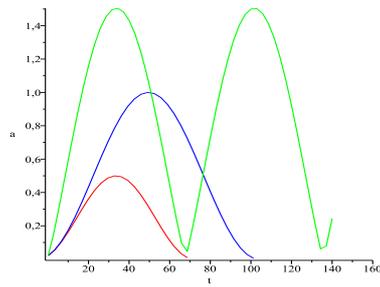
**Figura C.78:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



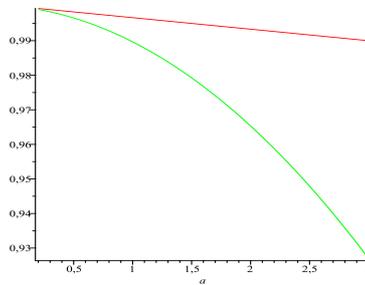
**Figura C.79:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



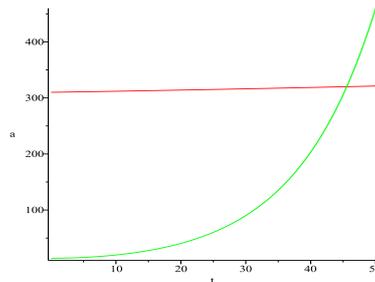
**Figura C.80:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



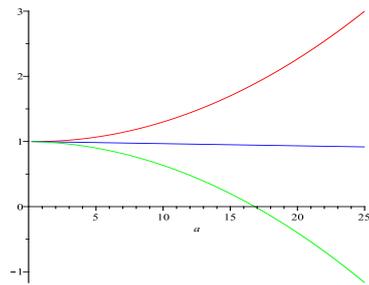
**Figura C.81:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 0$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



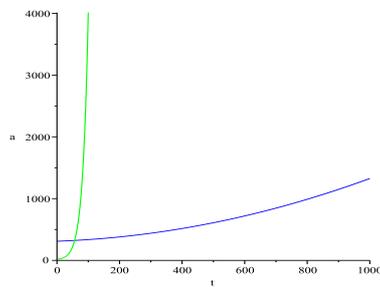
**Figura C.82:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



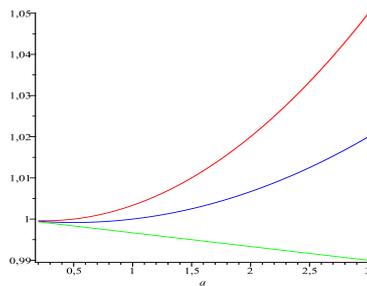
**Figura C.83:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



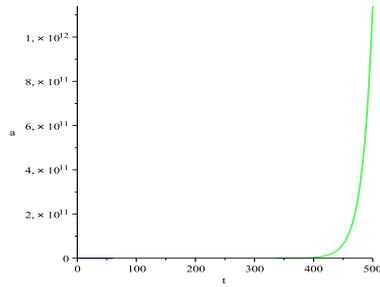
**Figura C.84:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



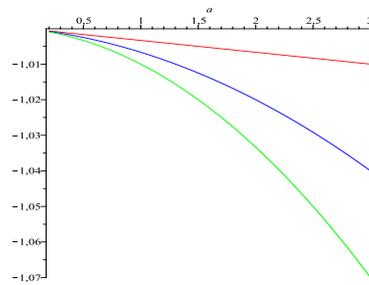
**Figura C.85:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



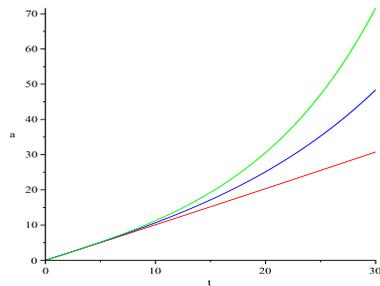
**Figura C.86:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



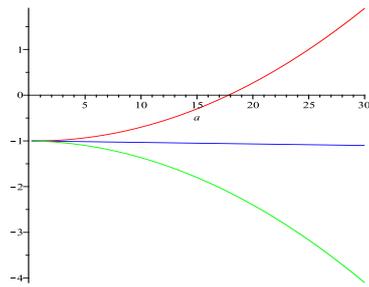
**Figura C.87:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = 1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



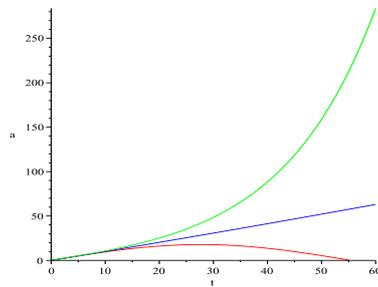
**Figura C.88:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



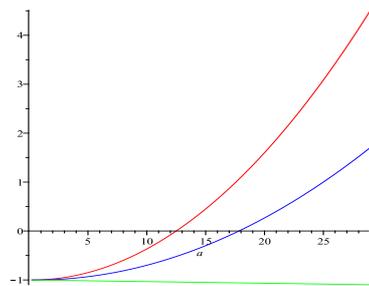
**Figura C.89:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



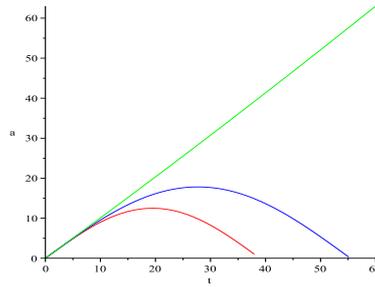
**Figura C.90:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



**Figura C.91:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = 0$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



**Figura C.92:** Potencial em função do fator de escala  $a$ , para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .



**Figura C.93:** Fator de escala  $a$  em função do tempo, para  $k = -1$ ,  $\Lambda = -0,01$  e  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .

Sendo que para o universo esférico, com constante cosmológica nula e  $\alpha = -1$  foram adotadas as seguintes condições iniciais:  $a(0,0002) = 0,0002$ ,  $a(0,002) = 40$  e  $a(0,02) = 6,8$ , para  $\beta$  positivo, nulo e negativo, respectivamente. Enquanto para  $\alpha = -\frac{2}{3}$ , paredes de domínio, adotou-se a  $a(0,02) = 0,02$ , exceto para o universo esférico. Neste caso, considerou-se para a constante cosmológica positiva  $a(0,02) = 310$ ,  $a(0,02) = 18$  e  $a(0,02) = 14$ , com  $\beta$  positivo, nulo e negativo, respectivamente. Analogamente, para a constante cosmológica nula adotou-se  $a(0,02) = 0,02$ ,  $a(0,02) = 310$  e  $a(0,02) = 18$ , com  $\beta$  positivo, nulo e negativo, respectivamente. Por fim, para a constante cosmológica negativa, considerou-se  $a(0,02) = 0,02$ ,  $a(0,02) = 0,02$  e  $a(0,02) = 335$  para  $\beta$  positivo, nulo e negativo, respectivamente. Todas essas escolhas foram tais que os sistemas admitissem soluções numéricas reais. Portanto, completamos a análise gráfica das equações de Friedmann-Lemaître corrigidas. Este apêndice apoia análises do terceiro capítulo dessa tese e pode ser usado para futuras análises.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [2] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. 172, 187 (1995).
- [3] Z. F. Ezawa, World Scientific (2000).
- [4] N. Seiberg e Witten, JHEP 9909, 032 (1999).
- [5] C. N. Yang, Phys. Rev. 72, 874 (1947).
- [6] E. M. C. Abreu, A. A. Deriglazov, C. Filgueiras, C. Neves, W. Oliveira e C. Wotzasek, Phys. Rev. D 76, 064007 (2007).
- [7] R. Banerjee, Mod. Phys. Lett. A 17, 631 (2002).
- [8] G. 't Hooft, Class. Quant. Grav. 16, 3263 (1999).
- [9] C. Duval e P. A. Horváthy, Phys. Lett. B 479, 284 (2000).
- [10] R. Peierls, Z. Phys. 80, 763 (1933).
- [11] C. Duval e P. A. Horváthy, J. Phys. A 34 10097 (2001).
- [12] G. V. Dunne, R. Jackiw e C. A. Trugenberger, Phys. Rev. D 41, 661 (1990).
- [13] R. Amorim, Phys. Rev. Lett. 101, 081602 (2008).
- [14] E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes, W. Oliveira e A. O. Zangirolami, SIGMA 6, 083 (2010).
- [15] P. A. Horváthy e M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B 595, 547, (2004); JHEP 06, 033 (2002).

- [16] A. E. F. Djemai e H. Smail, Commun. Theor. Phys. 41, 837 (2004).
- [17] A. E. F. Djemai, Int. J. Theor. Phys. 35, 519 (1996).
- [18] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk e N. Seiberg, JHEP 02, 020 (2000).
- [19] E. M. C. Abreu, C. Neves e W. Oliveira, Int. J. Mod. Phys. A 21, 5359 (2006).
- [20] L.D. Faddeev e R. Jackiw, Phys.Rev.Lett. 60, 1692 (1988).
- [21] P.A.M. Dirac., Canadian Journal of Mathematics 2, 129 (1950).
- [22] J.E. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. 45 (1949) 99; J. Vey, Commentari Mathematici Helvetici 50, 421 (1975) ; M. Flato *et al*, Commentari Mathematici Helvetici 31, 47 (1975) ; M. Flato *et al*, J. Math. Phys. 17, 1754 (1976) ; F. Bayen *et al*, Ann. of Phys. 111, 61 (1978) .
- [23] M. Kontsevich, Lett. Math. Phys. 66, 157 (2003).
- [24] C. Neves e W. Oliveira, Phys. Lett. A 321, 267 (2004)
- [25] E. M. C. Abreu, C. Neves; M. V. Marcial, A. C. R. Mendes, W. Oliveira e J. Ananias Neto, Int. J. Mod. Phys. A 27, 1250053 (2012).
- [26] E. M. C Abreu, C. Neves e W. oliveira, Int. J. Mod. Phys. A 21, 5359 (2006).
- [27] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London A. 660, 127 (1961).
- [28] G. S. Adkins, C. R. Nappi and Witten, Nucl. Phys. B 288, 552 (1983).
- [29] T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. 34, 556 (1962).
- [30] R. K. Bhaduri, Addison-Wesley Publishing Company (1988).
- [31] X. Calmet, Phys. Rev. D, 71, 037901 (2006).
- [32] E. Witten, Nucl. Phys. B 223, 422 (1983).
- [33] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B 37, 95 (1971).
- [34] R. J, Szabo, Phys. Rept. 378, 202 (2003).
- [35] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi e P. Polychronakos, Phys. Lett. B 517, 450 (2001).

- [36] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. E. Roberts, *Physical Letters B*, 331, 39 (1994).
- [37] L. Alvarez-Gaume, J. L. F. Barbon e R. Zwicky, *JHEP* 0105, 057 (2001).
- [38] J. Jaeckel, V. V. Khoze e A. Ringwald, *JHEP* 0602, 028 (2006).
- [39] M. R. Douglas e N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.*, 73, 9977 (2001).
- [40] C. E. Carlson, C. D. Carone, e N. Zobin, *physical Review D* 66, 075001 (2002).
- [41] R. Amorin, *physical Review Letters*, 101, 1602 (2008).
- [42] J. E. Marsden e T. S. Ratiu, Springer-Verlag, New York (1999).
- [43] J. Gamboa, M. Loewe, e J. C. Rojas, *Phys. Rev. D* 64, 067901 (2001).
- [44] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari e A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* 86, 2716 (2001).
- [45] A. Kokado, T. Okamura e T. saito, *Phys. D* 69, 125007 (2004).
- [46] J. M. Romero, J. A. Santiago e D. Vergara, *Phys.Lett. A* 310, 9 (2003).
- [47] C. Acantrinci, (2001), arXiv:hep-th/0106141.
- [48] V. P. Nair e A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B* 505, 267 (2001).
- [49] A. Kijanka e P. Kosinski, *Phys. Rev. D* 70, 127702 (2004).
- [50] I. Dadić, L. Jonke, e S. Meljanac, *Acta Phys. Slovaca* 55, 149 (2007).
- [51] E. M. C. Abreu, M. V. Marcial, A. C. R. Mendes e W. Oliveira, *JHEP* submetido (2013).
- [52] A. E. F. Djemaï e H. Smail, *Commun. Theor. Phys.* 41, 837 (2004).
- [53] M. R. Douglas e C. Hull, *JHEP*, 02:008 (1998).
- [54] C. Chu e P. Ho, *Nucl. Phys. B* 550, 151 (1999).
- [55] D. Bigatti e L. Susskind, *physical Review D* 62, 066004 (2000).
- [56] H. Garcia-Compean, O. Obregon e C. Ramirez, *Phys. Rev. Lett.* 88, 161301 (2002).
- [57] G. D. Barbosa, *Phys. Rev. D* 71, 063511 (2005).

- [58] Q. G. Huang e M. Li, JHEP 0306, 014 (2003).
- [59] H. Kim, G. S. Lee e Y. S. Myung, Mod. Phys. Lett. A 20, 271 (2005).
- [60] B. Vakili, P. Pedram e S. Jalalzadeh, Phys. Lett. B 687, 119 (2010).
- [61] C. Neves, G. A. Monerat, E. V. Corrêa Silva e L. G. Ferreira Filho, (2011).
- [62] E. M. C. Abreu, M. V. Marcial, A. C. R. Mendes, W. Oliveira e G. Oliveira-Neto, JHEP 2012, 144 (2012).
- [63] S. Weinberg, John Wiley and Sons, New York (1972).
- [64] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos e G. A. Monerat, General Relativity and Gravitation, 34, 651 (2002).
- [65] J. Gamboa, M. Loewe e J. C. Rojas, Phys. Rev. D 64, 067901 (2001).
- [66] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari e A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).
- [67] A. Kokado, T. Okamura e T. Saito, Phys. D 69, 125007 (2004).
- [68] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, e A. Stern, World Scientific Publishing, Singapore (1991).
- [69] P.M. Garnavich, *et al.*, Astrophys. J. 493, L53 (1998).
- [70] B.P. Schmidt, *et al.*, Astrophys. J. 507, 46 (1998).
- [71] A.G. Riess, *et al.*, Astronom. J. 116, 1009 (1998).
- [72] P.M. Garnavich, *et al.*, Astrophys. J. 509, 74 (1998).
- [73] S. Perlmutter, *et al.*, Astrophys. J. 483, 565 (1997).
- [74] S. Perlmutter, *et al.*, Nature 391, 51 (1998).
- [75] S. Perlmutter, *et al.*, Astrophys. J. 517, 565 (1999).
- [76] M. Carmeli e T. Kuzmenko, Int. J. Theor. Phys. 41, 131 (2002).
- [77] R. A. Daly, *et al.*, The Astrophysical Journal 677, 1 (2008)
- [78] T. M. Davis *et al.*, The Astrophysical Journal 666, 716 (2007).