

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)

**Marcelo Damasceno Marangon**

**O número  $\pi$**

Juiz de Fora  
2017

Marcelo Damasceno Marangon

O número  $\pi$

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Rogerio Casagrande

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Damasceno Marangon, Marcelo.

O número  $\pi$  / Marcelo Damasceno Marangon. – 2017.

66 f. : il.

Orientador: Rogerio Casagrande

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), 2017.

1. Número  $\pi$ . 2. Irrracionalidade. 3. Aproximação. 4. Trigonometria. 5. Círculo I. Casagrande, Rogerio, orient. II. Título.

Marcelo Damasceno Marangon

O número  $\pi$

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24 de junho de 2017

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Rogerio Casagrande - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Nelson Dantas Louza Junior  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Marcelo Oliveira Veloso  
Universidade Federal de São João del Rei

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela luz e sabedoria que me guiaram durante este trabalho. À minha noiva Claudia, pelo incentivo e amor. Ao meu irmão Rodrigo, pela ajuda com o  $\text{\LaTeX}$ . Ao meu orientador, Rogerio, pela dedicação e ajuda e à Capes, pela bolsa cedida durante o curso.

“Deus criou os números inteiros; todo o resto é trabalho do homem.”  
(Leopold Kronecker)

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é contar a origem do número  $\pi$  aos alunos do ensino médio, além de exibir alguns métodos de aproximação e curiosidades envolvendo este número irracional. A motivação para a escolha do tema baseou-se no histórico de dificuldades e erros encontrados tantas vezes pelos discentes em sala de aula. Serão tratados métodos de cálculo desde Arquimedes até Ramanujan, passando pelas contribuições de Viète, Wallis, Gregory, Euler e Gauss, todos numa incessante busca pelo mais importante número irracional da matemática. Mostraremos também como a geometria plana e a trigonometria contribuíram na descoberta e investigação desse número, além de sua evolução até os dias de hoje.

Palavras-chave: Número  $\pi$ . Irracionalidade. Aproximação. Trigonometria. Círculo.

## ABSTRACT

This study aims to unveil to the high school students the origin of number  $\pi$ , as well as to show some approximation methods and curiosities involving this irrational number. The theme choice was based on history of difficulties and errors found several times by students in the classroom. Will be reviewed calculus methods from Archimedes to Ramanujan, passing through Viète, Wallis, Gregory, Euler, and Gauss contributions, all of them on an unceasing quest for the most important mathematics' irrational number. We will show also show show plane geometry and trigonometry contributed on discover and investigation of this number, as well as its evolution until today.

Key-words: Number  $\pi$ . Irrationality. Approximation. Trigonometry. Circle.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Circunferência de diâmetro $AB$ . . . . .	15
Figura 2 – Arcos $\widehat{AC}$ , $\widehat{CD}$ e $\widehat{DE}$ de mesmo comprimento . . . . .	16
Figura 3 – Comprimento do arco $\widehat{EA}$ colocado diversas vezes sobre o diâmetro . . . . .	16
Figura 4 – Triângulo equilátero inscrito numa circunferência . . . . .	22
Figura 5 – Quadrado inscrito numa circunferência . . . . .	22
Figura 6 – Pentágono regular inscrito numa circunferência . . . . .	23
Figura 7 – Hexágono regular inscrito numa circunferência . . . . .	23
Figura 8 – Ideia de Arquimedes . . . . .	24
Figura 9 – Início da construção geométrica 1 . . . . .	26
Figura 10 – Evolução da construção geométrica 1 . . . . .	27
Figura 11 – Evolução da construção geométrica 1 . . . . .	28
Figura 12 – Construção 1 finalizada . . . . .	29
Figura 13 – Início da construção geométrica 2 . . . . .	30
Figura 14 – Evolução da construção geométrica 2 . . . . .	30
Figura 15 – Evolução da construção geométrica 2 . . . . .	31
Figura 16 – Construção 2 finalizada . . . . .	32
Figura 17 – Região de lançamento das agulhas . . . . .	34
Figura 18 – Agulha de comprimento $AB$ na região de lançamento . . . . .	34
Figura 19 – Triângulo $MAC$ utilizado nos cálculos . . . . .	35
Figura 20 – Gráfico de $x = \frac{1}{2}\text{sen}\theta$ . . . . .	35
Figura 21 – Circunferência de raio 1 onde será inscrito o polígono regular de lado $AB = S_n$ . . . . .	38
Figura 22 – Evolução da figura 21 . . . . .	39
Figura 23 – Quadrado inscrito em uma circunferência de raio unitário . . . . .	40
Figura 24 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário . . . . .	41
Figura 25 – Polígono $ABCD \dots$ circunscrito a circunferência de raio unitário . . . . .	43
Figura 26 – Construção geométrica no polígono circunscrito . . . . .	44
Figura 27 – Quadrado circunscrito a uma circunferência de raio unitário . . . . .	44
Figura 28 – Ângulo de medida $1^\circ$ . . . . .	46
Figura 29 – Ângulo de medida 1 rad . . . . .	46
Figura 30 – Ângulo de $30^\circ$ numa circunferência de centro $O$ e raio unitário . . . . .	47
Figura 31 – Ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos numa circunferência de centro $O$ e raio unitário . . . . .	48
Figura 32 – Círculo dividido em três partes de mesma área através de dois segmentos paralelos: $AB$ e $CD$ . . . . .	48
Figura 33 – A área hachurada representa $\frac{1}{3}$ do círculo . . . . .	49
Figura 34 – Evolução da figura 33 . . . . .	49
Figura 35 – Resolução gráfica da equação 8.1 . . . . .	51
Figura 36 – Para $2\alpha \approx 149,27^\circ$ o círculo fica dividido em 3 áreas iguais . . . . .	52

Figura 37 – Cogumelo de tampa $A$ e caule $B$ . . . . .	52
Figura 38 – Quatro cogumelos colocados em torno do ponto $O$ . . . . .	53
Figura 39 – Quatro cogumelos e suas respectivas áreas . . . . .	54
Figura 40 – Esboço do planeta Terra envolvido por uma corda . . . . .	55
Figura 41 – Circunferência de centro $O$ e raio $r$ contendo uma corda $AB$ . . . . .	59
Figura 42 – Triângulo $ABO$ , que corresponde a $\frac{1}{n}$ de $A(n)$ . . . . .	60
Figura 43 – Triângulo $ACO$ , que corresponde a $\frac{1}{2n}$ de $A(2n)$ . . . . .	60

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Evolução de expansão de $\pi$ . . . . .	21
Tabela 2 – Processo de Arquimedes para cálculo de $\pi$ . . . . .	25
Tabela 3 – Teste prático agulhas de Buffon . . . . .	37
Tabela 4 – Aproximação de $\pi$ por polígonos inscritos numa circunferência . . . . .	42
Tabela 5 – Aproximação de $\pi$ por polígonos circunscritos numa circunferência . . . . .	45
Tabela 6 – Conversão grau/radiano . . . . .	47
Tabela 7 – Proporção ângulo/área . . . . .	50

## LISTA DE SÍMBOLOS

$(2p)_n$	Perímetro do polígono regular de $n$ lados
$S_n$	Comprimento do lado de um polígono regular de $n$ lados
$A(n)$	Área do polígono regular de $n$ lados
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$[a; b]$	Intervalo de $a$ até $b$ fechado nas duas extremidades
$]a; b[$	Intervalo de $a$ até $b$ aberto nas duas extremidades
$AB$	Segmento de extremidades nos pontos $A$ e $B$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	O que é $\pi$ ? . . . . .	13
1.2	Um pouco de história antiga . . . . .	14
<b>2</b>	<b>A DEFINIÇÃO DE <math>\pi</math> . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>A EVOLUÇÃO DE <math>\pi</math> NA HISTÓRIA . . . . .</b>	<b>18</b>
3.1	Século XVI . . . . .	18
3.2	Século XVII . . . . .	18
3.3	Século XVIII . . . . .	19
3.4	Século XIX . . . . .	19
3.5	Século XX até os dias de hoje . . . . .	20
<b>4</b>	<b>O MÉTODO DE ARQUIMEDES . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS APROXIMADAS PARA <math>\pi</math></b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b><math>\pi</math> EM PROBABILIDADE . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>7</b>	<b>ATIVIDADES DE APROXIMAÇÃO PARA <math>\pi</math> PARA ALU- NOS DO ENSINO MÉDIO . . . . .</b>	<b>38</b>
7.1	Atividade 1 (polígono regular inscrito numa circunferência) . . . . .	38
7.2	Atividade 2 (polígono regular circunscrito numa circunferência) . . . . .	43
<b>8</b>	<b><math>\pi</math> COMO ELEMENTO DA TRIGONOMETRIA . . . . .</b>	<b>46</b>
8.1	Definição de grau e de radiano . . . . .	46
8.2	Conversão de graus para radianos . . . . .	46
8.3	Por que usar o radiano? . . . . .	47
8.4	Utilizando $\pi$ em problema de geometria (I) . . . . .	48
8.5	Utilizando $\pi$ em problema de geometria (II) . . . . .	52
8.6	Utilizando $\pi$ em problema de geometria (III) . . . . .	54
<b>9</b>	<b>DEFININDO <math>\pi</math> COM AUXÍLIO DE TRIGONOMETRIA . .</b>	<b>57</b>
<b>10</b>	<b>A IDEIA DE VIÈTE PARA O CÁLCULO DE <math>\pi</math> . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>11</b>	<b>CURIOSIDADES ENVOLVENDO <math>\pi</math> . . . . .</b>	<b>62</b>
11.1	Quantas casas decimais são realmente úteis para cálculos? . . . . .	62
11.2	Aproximações . . . . .	62

12	CONCLUSÕES . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	66

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é um resumo histórico da evolução no número  $\pi$ , com linguagem matemática acessível a alunos e professores do Ensino Médio, tendo como principal objetivo esclarecer conceitos e definições para os alunos e fornecer ferramentas aos professores que sejam úteis nas aulas sobre os assuntos que envolvam  $\pi$ .

A motivação principal para escolha deste tema originou-se no histórico de constantes dificuldades encontradas pelos alunos em questões que envolvem números irracionais, em especial, o número  $\pi$ . Além deste, outro objetivo do trabalho é fazer com que o aluno de Ensino Médio perceba a presença do número  $\pi$  em situações reais, como será exibido em vários pontos do texto adiante.

No capítulo 2, teremos a definição de  $\pi$ , bem como uma primeira aproximação. No capítulo 3, falaremos da evolução de  $\pi$  nos últimos séculos. O capítulo 4 mostra o método de aproximação de Arquimedes, envolvendo polígonos inscritos na circunferência. Na sequência, temos um capítulo explicitando duas construções geométricas aproximadas para  $\pi$ .

O capítulo 6 mostra um resultado curioso:  $\pi$  num contexto de probabilidade, o problema das agulhas de Buffon. Os capítulos 7, 8, 9 e 10 utilizam geometria plana e trigonometria a fim de mostrar a importância de  $\pi$  em resoluções de problemas. E no capítulo 11, temos curiosidades envolvendo o número alvo deste trabalho.

## 1.1 O que é $\pi$ ?

Ao longo da trajetória escolar matemática, todo aluno tem contato com o número  $\pi$ , seja no cálculo de áreas e perímetros de regiões circulares, seja na geometria espacial quando tratamos de figuras esféricas, cônicas e cilíndricas. Porém, este contato muitas vezes é feito de maneira superficial, visto que alguns professores de ensino fundamental e médio apenas definem ou aproximam  $\pi$ , deixando de lado a sua importância histórica na evolução da matemática.

Diante desta situação, para muitos a lembrança de  $\pi$  fica restrita a uma constante irracional cujo valor aproximado é de 3,14.

O objetivo deste trabalho é mostrar ao leitor que tenha razoável conhecimento matemático a evolução de  $\pi$  na história, algumas curiosidades envolvendo este número, métodos de cálculo e algumas de suas aplicações em diversas áreas.

## 1.2 Um pouco de história antiga

O símbolo  $\pi$  é a 16<sup>a</sup> letra do alfabeto grego e desde o início do Século XVIII representa o número alvo deste trabalho. Porém, muito antes disso, a ideia do número  $\pi$  já era trabalhada pelos estudiosos em suas respectivas épocas, conforme Oliveira [7].

Os primeiros relatos sobre o número  $\pi$  datam da Idade Antiga, cerca de três milênios antes de Cristo, porém o primeiro cálculo formal é registrado no papiro de Rhind (1650 a.C.). Neste papiro é possível encontrar o seguinte enunciado, colocado aqui em linguagem matemática atual:

*“Um círculo de diâmetro  $d$  tem mesma área que um quadrado de lado  $\frac{8}{9}d$ ”*

Ainda que tal enunciado não faça referência explícita ao número  $\pi$ , hoje sabemos que a área de um círculo tem relação direta com esse número e portanto, ainda que de maneira indireta,  $\pi$  já era tratado num contexto matemático antes de sua própria formalização ou definição. Além disso, trazendo o enunciado para uma linguagem atual, podemos verificar que tratava-se de uma aproximação de áreas muito precisa para a época, fato constatado ao utilizarmos os conhecimentos atuais para escrever:

$$\text{Área do círculo: } \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \text{Área do quadrado}$$

ou ainda:

$\pi \frac{d^2}{4} = \frac{64}{81}d^2$ , o que nos leva ao resultado  $\pi = \frac{256}{81}$ , aproximadamente igual a 3,16049383..., valor cujo erro é inferior a 1%, considerando a precisão do cálculo nos dias de hoje.

## 2 A DEFINIÇÃO DE $\pi$

Não é perfeitamente preciso na história o momento em que percebeu-se pela primeira vez a existência do número  $\pi$ ; o que podemos dizer é que cerca de 3000 anos antes de Cristo, os povos babilônicos e egípcios já conjecturavam que em qualquer circunferência, a razão entre seu perímetro e diâmetro era constante e valia 3 e “pouco”. A ideia de encontrar o valor exato desse “pouco” será o guia deste trabalho.

Mesmo não existindo à época uma simbologia para este misterioso número entre 3 e 4, utilizaremos a notação matemática atual para definir

$$\pi = \frac{C}{D}$$

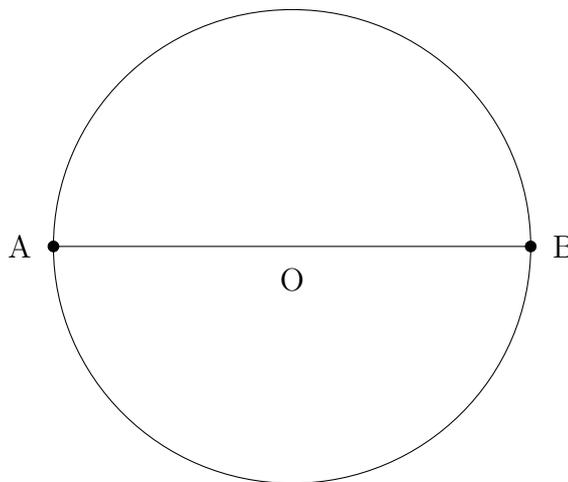
em que  $C$  é o comprimento de uma circunferência qualquer e  $D$  o seu diâmetro.

Repare que a igualdade acima permite escrever o comprimento  $C$  de uma circunferência de raio  $R$ , através da expressão  $C = 2\pi R$ .

É interessante pensar que em épocas tão remotas, em que não havia sistema métrico padrão, algarismos para representar medidas e a própria divisão ainda não estava bem formalizada, como foi possível a concepção da ideia de  $\pi$ ?

Apesar de rudimentar, a ideia é bastante interessante: numa corda de comprimento  $R$  prendem-se duas estacas, uma em cada extremidade. Uma estaca marca no solo um ponto  $O$  enquanto a outra faz um giro completo em torno de  $O$  criando uma circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB = 2R$ .

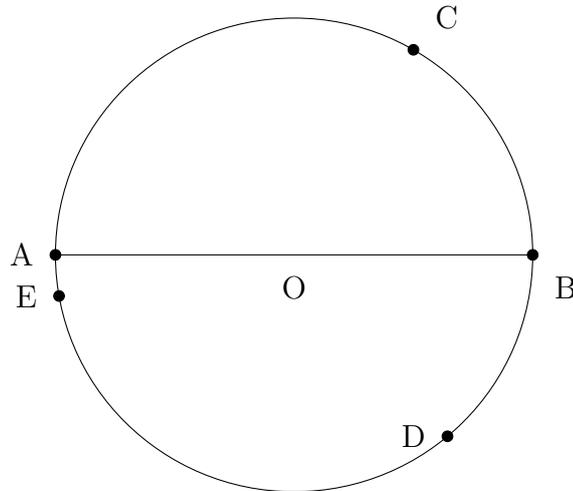
Figura 1 – Circunferência de diâmetro  $AB$



Fonte: construção do próprio autor

Considere os pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$  sobre a circunferência de modo que os arcos  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{CD}$  e  $\widehat{DE}$  tenham todos o comprimento  $2R$ .

Figura 2 – Arcos  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{CD}$  e  $\widehat{DE}$  de mesmo comprimento

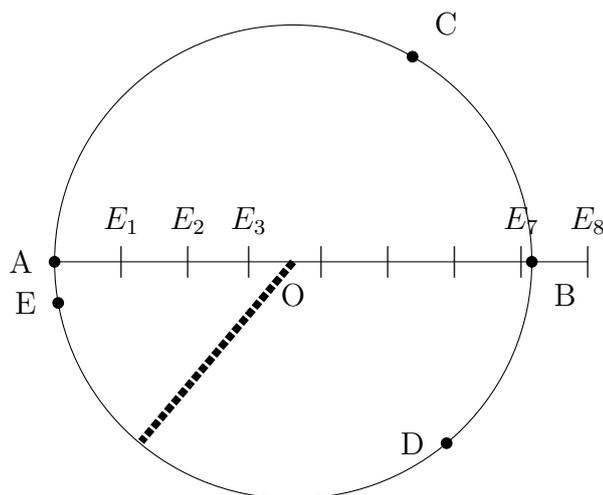


Fonte: construção do próprio autor

Tantos os babilônios quanto os egípcios perceberam que, numa volta completa na circunferência cabiam três arcos de comprimento  $2R$ , totalizando  $6R$ , mais um arco  $\widehat{EA}$ .

Conforme Beckman [1], ao verificar o comprimento do arco  $\widehat{EA}$ , era possível perceber que ele cabe mais que sete e menos que oito vezes no diâmetro, como vemos na figura 3.

Figura 3 – Comprimento do arco  $\widehat{EA}$  colocado diversas vezes sobre o diâmetro



Fonte: construção do próprio autor

Na figura, o comprimento do arco  $\widehat{EA}$  foi colocado sobre  $AB$  várias vezes a fim de concluir que:

$$\frac{2R}{8} < \widehat{EA} < \frac{2R}{7}$$

Como o arco  $\widehat{EA}$  é a diferença entre uma volta completa na circunferência e  $6R$ , podemos escrever:

$$\widehat{EA} = 2\pi R - 6R = 2R(\pi - 3)$$

Logo

$$\frac{2R}{8} < 2R(\pi - 3) < \frac{2R}{7}$$

ou ainda

$$\frac{1}{8} < \pi - 3 < \frac{1}{7}$$

$$3,125 < \pi < 3,14285714\dots,$$

o que já representa uma aproximação para  $\pi$ , com uma casa decimal após a vírgula, que é  $\pi \approx 3,1$ .

### 3 A EVOLUÇÃO DE $\pi$ NA HISTÓRIA

Através dos séculos, o número  $\pi$  apareceu diversas vezes na história da matemática, sempre na tentativa de se encontrarem as melhores aproximações. Nesta seção exibimos um breve histórico destas tentativas.

#### 3.1 Século XVI

A maior contribuição para o cálculo de  $\pi$  neste período foi do matemático francês François Viète (1540 – 1603), aperfeiçoando uma ideia dos gregos sobre polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência. Viète considerou um polígono de 393216 lados e chegou a conclusão de que:

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$$

Além disso, Viète descobriu que um produtório infinito envolvendo o número  $\pi$ :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

#### 3.2 Século XVII

O maior avanço no estudo sobre o número  $\pi$  ficou por conta do matemático alemão Ludolph Van Ceulen (1540 – 1610), que foi o maior entusiasta deste número na história. Suas buscas por aproximações foram tão intensas que por vezes o número  $\pi$  é chamado de número lundolphiano. No ano de sua morte, Van Ceulen chegou ao seu auge, calculando corretamente as 35 primeiras casas decimais de  $\pi$ .

Ainda neste século temos a contribuição de John Wallis (1616 – 1703), professor inglês e autor do livro *Arithmetica infinitorum*, em que ele exhibe a igualdade:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \times \frac{8 \times 8}{7 \times 9} \times \cdots \times \frac{2n \times 2n}{(2n-1) \times (2n+1)} \times \cdots$$

Na igualdade acima, quanto maior o valor de  $n$ , melhor será a aproximação de  $\pi$ .

Outra igualdade, desta vez uma série, descoberta neste período envolvendo  $\pi$  é atribuída a James Gregory (1638 – 1675):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

A desvantagem dessa série é que ela converge muito lentamente: para obter apenas 4 casas decimais de  $\pi$ , precisamos de mais de 1000 termos da série. Esta fórmula é mais adequada para o cálculo computacional do que humano.

Porém, Gregory também chegou a um resultado mais geral:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, -1 \leq x \leq 1,$$

então usando o seguinte fato

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

conclui-se que,

$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(3 \times 3)} + \frac{1}{(5 \times 3 \times 3)} - \frac{1}{(7 \times 3 \times 3 \times 3)} + \dots\right)$$

a qual converge mais rapidamente, pois para se obter quatro casas decimais corretas necessitamos apenas de nove termos da série.

### 3.3 Século XVIII

Em 1706, o matemático inglês William Jones (1675 – 1749), em seu livro *Synopsis palmariorum matheseos*, usa pela primeira vez o símbolo  $\pi$  para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Contudo, a popularização do símbolo veio apenas em 1748, quando o matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) também utilizou o símbolo em seu livro *Introductio in analysin infinitorum*.

Euler desenvolveu vários métodos para o cálculo de  $\pi$ , do qual destacamos:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Também é de Euler a brilhante igualdade envolvendo os números mais importantes da matemática

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Neste século ocorreu também outro importante fato: em 1761, Johann Lambert, matemático suíço, demonstrou pela primeira vez que o número  $\pi$  é irracional.

### 3.4 Século XIX

Os avanços sobre o número  $\pi$  avançaram bastante neste período, começando pela grande matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) que, junto a seus assistente Zacharias Dahse (1824 – 1861), chegou a fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right),$$

o que permitiu a chegar a duzentas casas decimais corretas do  $\pi$ .

Em 1847, o também alemão Thomas Clausen (1801 – 1855) calculou  $\pi$  até a 248ª casa decimal, feito que foi aperfeiçoado por William Shanks (1812 – 1882), que chegou a

estender  $\pi$  com 707 casas decimais. Porém este cálculo apresentava erro a partir da 528ª casa decimal, fato que só foi verificado em 1946, com uso de computadores.

Também neste século outro avanço foi a inédita prova de que o número  $\pi$  não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros, ou seja,  $\pi$  é um número transcendente. A demonstração foi feita em 1882, por Carl Louis Ferdinand Lindermann (1852 – 1939).

### 3.5 Século XX até os dias de hoje

Em 1914, o matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1882 – 1920) estabeleceu muitas fórmulas para o cálculo de  $\pi$ , algumas inclusive muito trabalhosas que precisariam do advento de computadores para serem utilizadas. Uma delas é:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \times (1103 + 26390n)}{(n!)^4 \times 396^{4n}}.$$

Outra fórmula também de Ramanujan, que será citada neste trabalho é uma aproximação de  $\pi$  (até a oitava casa decimal) obtida através de geometria plana, conforme Posamentier e Lehmann [9]. Maiores detalhes dessa aproximação serão vistos no capítulo 5.

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Em 1949, já com ajuda de computadores, dois matemáticos americanos, John Wrench Jr e Levi Smith, ultrapassaram a barreira das mil casas decimais para  $\pi$ .

Na segunda metade do século XX os computadores tomaram o lugar dos homens nos cálculos das casas decimais de  $\pi$ . Apesar de apresentar utilidade prática restrita, grupos de estudiosos tentam (e conseguem) até hoje estender  $\pi$  em um número assustador de casas decimais, como vemos a seguir:

Tabela 1 – Evolução de expansão de  $\pi$ 

Calculado por	Data	Número de casas decimais corretas
Babilônios/ egípcios	2000 a.C.	1
Arquimedes	250 a.C.	3
Liu Hui	263	5
Tsu Ch'ung Chi	480	7
Al-Kashi	1430	12
Van Ceulen	1596	20
Machin	1706	100
Strassnitzky/ Dase	1844	200
Rutherford	1853	440
Genuys	1958	10000
Chudnovskys	1989	$4,8 \times 10^8$
Ed Karrels	2013	$8 \times 10^{15}$

Fonte: Posamentier e Lehmann [9]

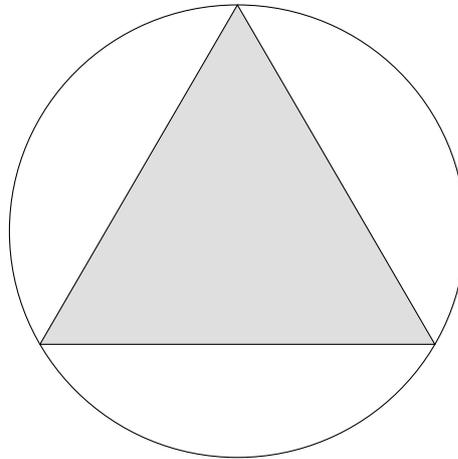
## 4 O MÉTODO DE ARQUIMEDES

Este método é um processo prático desenvolvido por Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), utilizando inscrição de polígonos regulares numa circunferência que permitiu obter uma aproximação para  $\pi$  com três casas decimais após a vírgula.

Para introduzir a ideia de Arquimedes, perceba que, em um polígono regular inscrito numa circunferência, quanto maior o número de lados do polígono, mais seu perímetro aproxima-se do perímetro da circunferência, de acordo com Eves [5].

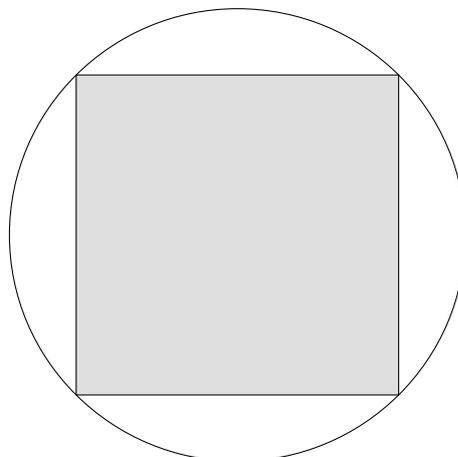
Intuitivamente vemos esta ideia nas figuras abaixo:

Figura 4 – Triângulo equilátero inscrito numa circunferência



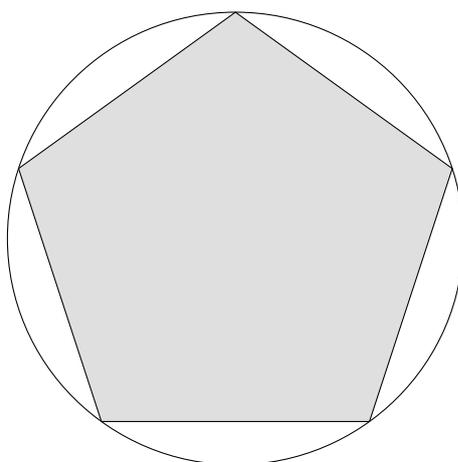
Fonte: construção do próprio autor

Figura 5 – Quadrado inscrito numa circunferência



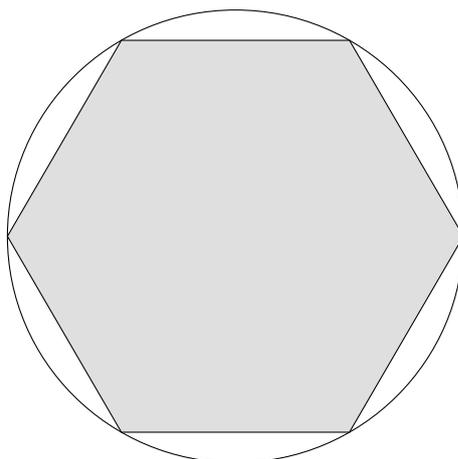
Fonte: construção do próprio autor

Figura 6 – Pentágono regular inscrito numa circunferência



Fonte: construção do próprio autor

Figura 7 – Hexágono regular inscrito numa circunferência



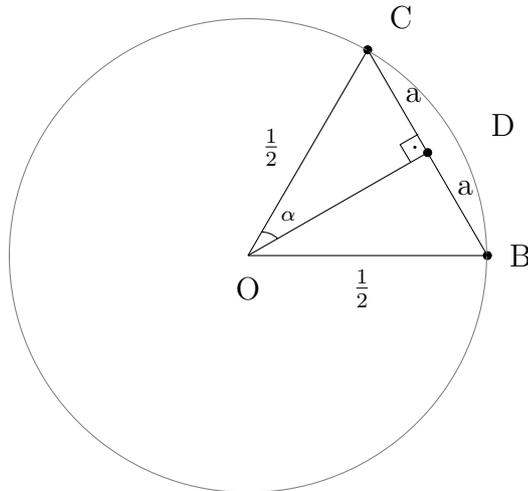
Fonte: construção do próprio autor

Retomando a ideia de  $\pi$  como razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro, faremos todos os cálculos nesta seção utilizando o diâmetro da circunferência circunscrita aos polígonos igual a uma unidade de medida, o que nos leva a conclusão de que o comprimento da referida circunferência será igual a  $\pi$  unidades.

Considere um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência de diâmetro unitário. Na figura a seguir,  $BC = 2a$  é um dos lados do referido polígono e  $D$  o ponto médio deste lado.

Apesar de ainda não formalizada na época, a ideia do seno de um ângulo já era conhecida neste tempo como razão entre dois lados de um triângulo retângulo. Através dessa ideia, podemos escrever:

Figura 8 – Ideia de Arquimedes



Fonte: construção do próprio autor

$$C\hat{O}D = \alpha = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

Portanto  $\text{sen}\alpha = \text{sen}\frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a = \overline{BC}$

Daí o perímetro do polígono será:

$$(\text{número de lados do polígono}) \times (\text{medida de um lado}) = n \times \overline{BC}$$

Ou seja,

$$(2p)_n = n(2a) = n \text{sen} \frac{180^\circ}{n}.$$

Limitado por suas ferramentas de cálculo, que eram simplesmente tabelas construídas através de experimentos, Arquimedes efetuou seus cálculos até  $n = 100$  aproximadamente, conforme Boyer [2], encontrando:

$$(2p)_{100} = 100 \text{sen} \frac{180^\circ}{100} = 3,1410759 \dots$$

Conforme já citado anteriormente, quando o número  $n$  de lados cresce, o perímetro do polígono tende a ser o perímetro da circunferência,  $\pi$ . Veja na tabela:

Tabela 2 – Processo de Arquimedes para cálculo de  $\pi$ 

$n$	Perímetro do polígono de $n$ lados, inscrito numa circunferência de raio 0,5
3	2,598076211
4	2,828427125
5	2,938926261
6	3,000000000
12	3,105828541
24	3,132628613
36	3,137606739
72	3,140595890
120	3,141233797
250	3,141509971
1000	3,141587486
10000	3,141592602

Fonte: construção do próprio autor

## 5 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS APROXIMADAS PARA $\pi$

Como o público alvo deste trabalho são os professores e alunos do ensino médio, trataremos de maneira bastante sucinta dos conceitos de irracionalidade e transcendência do número  $\pi$ . O leitor mais interessado e com conhecimento adequado pode procurar outras dissertações do PROFMAT, como em Vieira [11] e Dantas [4] que tratam deste assunto de maneira mais detalhada.

Ainda no ensino fundamental, o aluno tem contato com os conjuntos numéricos:  $\mathbb{N}$  (naturais),  $\mathbb{Z}$  (inteiros) e  $\mathbb{Q}$  (racionais). O número  $\pi$  não pertence a nenhum destes três conjuntos, pois não pode ser escrito como razão entre dois número inteiros.

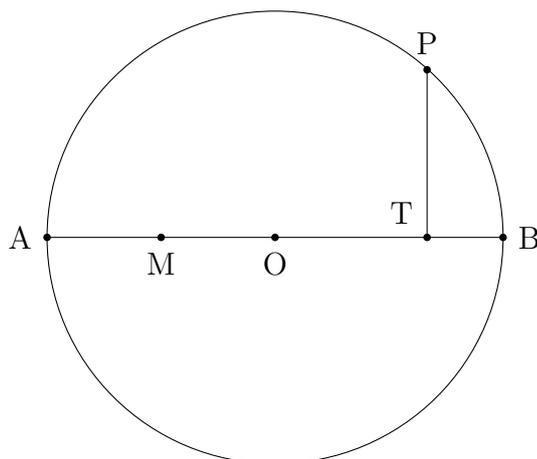
Já no ensino médio, surgem os assuntos de polinômios e equações polinomiais. Aqui destacamos que o número  $\pi$  não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes inteiros, sendo por este motivos, classificado como número transcendente (ou não algébrico).

Como consequência do fato de ser transcendente, pode-se afirmar que o número  $\pi$  não é construtível, ou seja, não pode ser construído utilizando-se apenas régua e compasso.

Faremos então, a seguir, duas construções geométricas aproximadas para o número  $\pi$ , que de acordo com Posamentier e Lehmann [9], ambas foram publicadas originalmente por Srinivasa Ramanujan em 1914 em “Modular Equations and Approximations to  $\pi$ .”

### Construção 1

Figura 9 – Início da construção geométrica 1



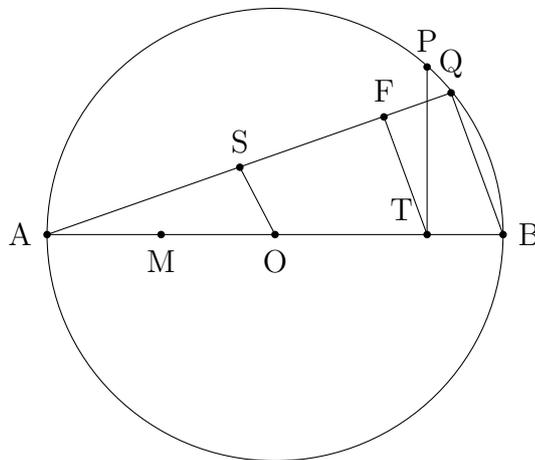
Fonte: construção do próprio autor

1. Considere uma circunferência de centro  $O$  com um diâmetro  $AB = 2R$
2. Divida o raio  $AO$  ao meio, encontrando o ponto  $M$ , tal que tenhamos  $AM = MO = \frac{R}{2}$

3. Divida o raio  $OB$  em três partes congruentes encontrando o ponto  $T$ , tal que  $OT = \frac{2R}{3}$  e  $TB = \frac{R}{3}$
4. Trace por  $T$  uma perpendicular a  $OB$ , encontrando o ponto  $P$  na circunferência. Utilizando uma relação métrica no triângulo retângulo  $APB$ , temos:

$$\begin{aligned}(PT)^2 &= AT \cdot TB \\ (PT)^2 &= \frac{5R}{3} \cdot \frac{R}{3} = \frac{5R^2}{9} \\ PT &= \frac{R\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

Figura 10 – Evolução da construção geométrica 1



Fonte: construção do próprio autor

5. Trace uma corda  $BQ$  congruente a  $PT$

$$\text{Então } BQ = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

O triângulo  $AQB$  é retângulo em  $Q$ , portanto

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (BQ)^2 + (AQ)^2 \\ 4R^2 &= \frac{5R^2}{9} + (AQ)^2 \\ 36R^2 &= 5R^2 + 9(AQ)^2 \\ 9(AQ)^2 &= 31R^2 \Rightarrow AQ = \frac{R\sqrt{31}}{3}\end{aligned}$$

6. Trace os segmentos  $TF$  e  $OS$ , ambos paralelos ao segmento  $BQ$ . Pelo teorema de Tales, teremos:

$$\frac{AS}{AO} = \frac{AF}{AT} = \frac{AQ}{AB}, \text{ ou ainda}$$

$$\frac{AS}{R} = \frac{AF}{\frac{5R}{3}} = \frac{\frac{R\sqrt{31}}{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{31}}{3} \frac{1}{2R} = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

$$\text{Portanto } AS = \frac{R\sqrt{31}}{6} \text{ e } RS = \frac{R\sqrt{31}}{9}$$

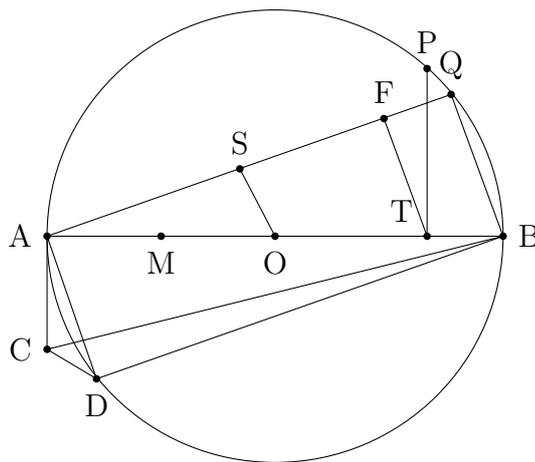
7. Trace a corda  $AD$ , congruente a  $AS$

$$\text{Então } AD = \frac{R\sqrt{31}}{6}$$

8. Trace um segmento de reta  $AC$  tangente ao círculo, congruente ao segmento  $FS$ .

$$\text{Logo } AC = \frac{R\sqrt{31}}{9}$$

Figura 11 – Evolução da construção geométrica 1



Fonte: construção do próprio autor

9. Ligue  $C$  a  $D$ ,  $B$  a  $C$  e  $B$  a  $D$ . O triângulo  $ADB$  é retângulo em  $D$

$$\text{Então } (AB)^2 = (AD)^2 + (PD)^2$$

$$4R^2 = \frac{31R^2}{36} + (BD)^2$$

$$144R^2 = 31R^2 + 36(BD)^2$$

$$113R^2 = 36(BD)^2$$

$$BD = \frac{R\sqrt{113}}{6}$$

O triângulo  $ACB$  é retângulo em  $A$ . Então  $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$

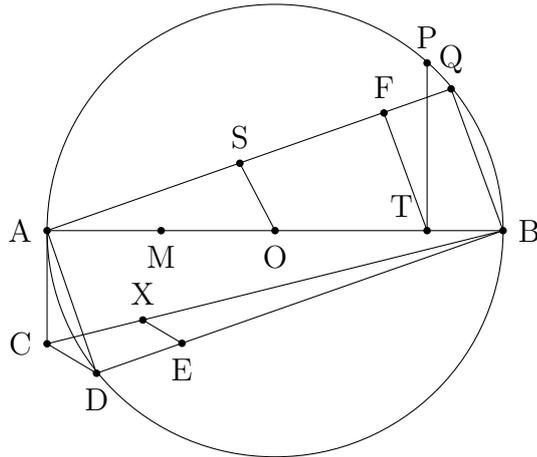
$$(BC)^2 = \frac{31R^2}{81} + 4R^2$$

$$(BC)^2 = \frac{31R^2 + 324R^2}{81}$$

$$(BC)^2 = \frac{355R^2}{81}$$

$$BC = \frac{R\sqrt{355}}{9}$$

Figura 12 – Construção 1 finalizada



Fonte: construção do próprio autor

10. Marque sobre  $BD$  o ponto  $E$ , tal que

$$BE = BM = \frac{3R}{2}$$

11. Marque sobre  $BC$  o ponto  $X$  tal que o segmento  $CD$  seja paralelo ao segmento  $EX$

12. Pelo teorema de Tales novamente temos

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BE}{BD}$$

$$\frac{BX}{\frac{R\sqrt{355}}{9}} = \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{3R}{2}}$$

$$BX = R\sqrt{\frac{355}{113}}$$

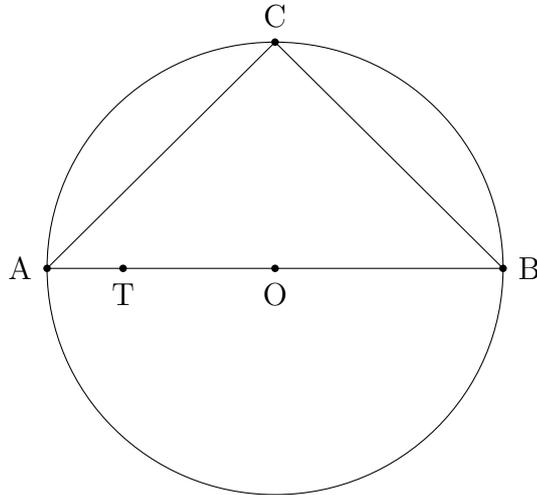
Logo,  $(BX)^2 = \frac{355}{113}R^2$  e portanto a área do quadrado de lado  $BX$  é muito próxima a área do círculo de raio  $R$ . O erro é inferior a  $10^{-6}$ , como veremos a seguir:

Sendo  $\frac{355}{113} = 3,141592920353982\dots$  e  $\pi = 3,141592653589793\dots$  temos:

$$\frac{355}{113} - \pi = 0,000000266764189\dots, \text{ o que nos dá: } \frac{355}{113} - \pi < 10^{-6}.$$

## Construção 2

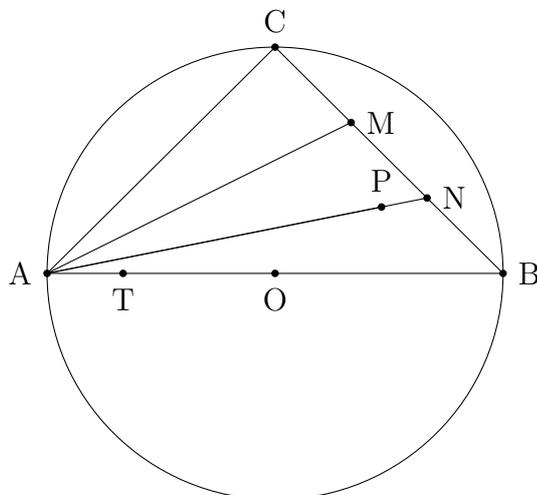
Figura 13 – Início da construção geométrica 2



Fonte: construção do próprio autor

1. Construa uma circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB = 2R$
2. Marque sobre a circunferência o ponto  $C$ , de modo que o triângulo  $ACB$  seja retângulo e isósceles de base  $AB$ , de forma que  $AC = BC = R\sqrt{2}$ .
3. Divida o raio  $AO$  em três partes congruentes para obter  $AT = \frac{R}{3}$  e  $TO = \frac{2R}{3}$ .

Figura 14 – Evolução da construção geométrica 2



Fonte: construção do próprio autor

4. Sobre o segmento  $CB$ , marque os pontos  $M$  e  $N$ , tais que  $CM = MN = AT = \frac{R}{3}$ .

5. Considere o triângulo  $ACM$  retângulo em  $C$ , então:

$$\begin{aligned}(AM)^2 &= (CM)^2 + (AC)^2 \\ (AM)^2 &= \frac{R^2}{9} + 2R^2 = \frac{R^2 + 18R^2}{9} = \frac{19R^2}{9} \\ AM &= \frac{R\sqrt{19}}{3}\end{aligned}$$

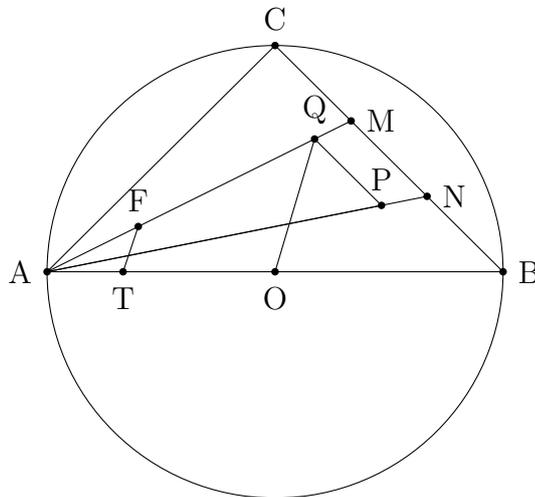
O triângulo  $ACN$  é retângulo em  $C$ . Então:

$$\begin{aligned}(AN)^2 &= (CN)^2 + (AC)^2 \\ (AN)^2 &= \frac{4R^2}{9} + 2R^2 = \frac{4R^2 + 18R^2}{9} = \frac{22R^2}{9} \\ AN &= \frac{R\sqrt{22}}{3}\end{aligned}$$

6. Marque sobre o segmento  $AN$  o ponto  $P$ , tal que  $AM = AP$ .

$$AM = AP = \frac{R\sqrt{19}}{3}$$

Figura 15 – Evolução da construção geométrica 2



Fonte: construção do próprio autor

7. Trace o segmento  $PQ$  paralelo ao segmento  $MN$  com  $Q$  em  $AM$

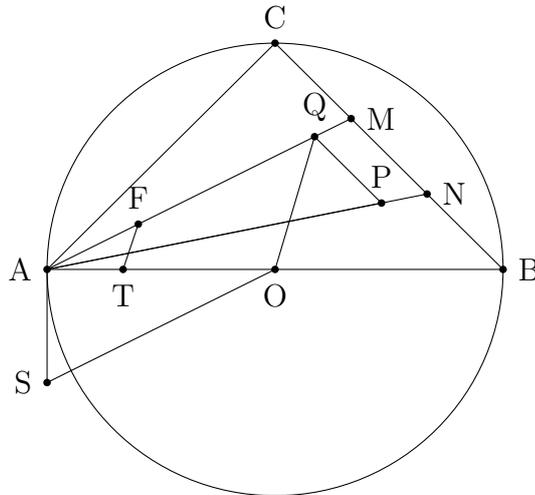
8. Considere o segmento  $OQ$

9. Trace o segmento  $TF$  paralelo ao segmento  $OQ$  com  $F$  em  $AQ$

Trace o segmento  $AS$  tangente à circunferência, com  $AS = AF$

Pelo teorema de Tales, temos:

Figura 16 – Construção 2 finalizada



Fonte: construção do próprio autor

$$\frac{AQ}{AM} = \frac{AP}{AN} \Rightarrow \frac{AQ}{\frac{R\sqrt{19}}{3}} = \frac{\frac{R\sqrt{19}}{3}}{\frac{R\sqrt{22}}{3}} \Rightarrow AQ \frac{R\sqrt{22}}{3} = \frac{19R^2}{9} \Rightarrow AQ = \frac{19R}{3\sqrt{22}}$$

$$\frac{AF}{AQ} = \frac{AT}{AO} \Rightarrow \frac{AF}{\frac{19R}{3\sqrt{22}}} = \frac{\frac{R}{3}}{R} \Rightarrow AF = \frac{19R}{9\sqrt{22}}$$

10. O triângulo  $AOS$  é retângulo em  $A$ . Então:

$$\begin{aligned} (OS)^2 &= (AO)^2 + (AS)^2 \\ (OS)^2 &= R^2 + \frac{361R^2}{1782} = \frac{2143R^2}{1782} \\ OS &= \frac{R\sqrt{2143}}{9\sqrt{22}} \end{aligned}$$

11. Faça a medida geométrica  $g$  entre  $OB$  e  $OS$

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{OB \cdot OS} \\ g &= \sqrt{R \cdot R \frac{\sqrt{2143}}{9\sqrt{22}}} \\ g &= \sqrt{R^2 \frac{\sqrt{2143}}{9\sqrt{22}}} \\ g &= \frac{R}{3} \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} \end{aligned}$$

O número  $\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$  é aproximadamente 3,141592652582646..., que é uma aproximação para  $\pi$  com erro inferior a 0,0000001%.

Portanto, tomando  $AT = \frac{R}{3}$  como unidade de medida, a média geométrica de  $g$  encontrada será aproximadamente igual a  $\pi$ .

## 6 $\pi$ EM PROBABILIDADE

Apresentaremos aqui uma aparição do número  $\pi$  num contexto surpreendente: num resultado de probabilidade. É a experiência chamada de “Agulhas de Buffon” em referência ao naturalista francês Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, que viveu na França no Século XVIII.

Tal experiência ganhou notoriedade no meio matemático quando Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) publicou a obra “Théorie analytique des probabilités”, que contém a experiência.

O problema tem o seguinte enunciado: várias retas paralelas estão contidas numa região plana e separadas por uma distância fixa  $l$  entre duas linhas consecutivas, como mostra a figura:

Figura 17 – Região de lançamento das agulhas

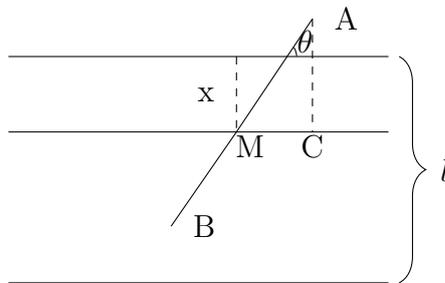


Fonte: construção do próprio autor

Ao lançar agulhas de comprimento  $l$  sobre esta região, vamos calcular a probabilidade de que uma delas caia sobre uma das linhas marcadas. O resultado que será encontrado envolve o número  $\pi$ .

Para o cálculo, chamaremos de  $M$  o centro da agulha representada pelo segmento  $AB$  na figura e  $x$  a distância de  $M$  até a linha mais próxima.

Figura 18 – Agulha de comprimento  $AB$  na região de lançamento



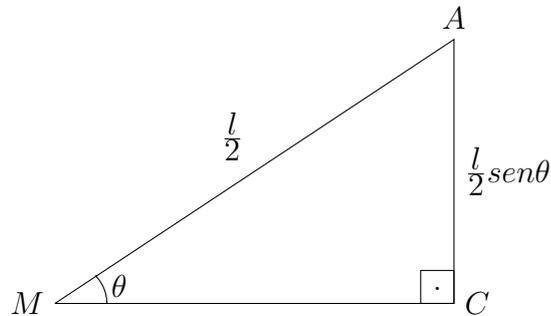
Fonte: construção do próprio autor

Considere também  $\theta$  o menor ângulo formado entre a agulha (ou seu prolongamento) e uma das linhas.

É fácil observar que  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Observe o triângulo  $MAC$ , retângulo em  $C$ .

Figura 19 – Triângulo  $MAC$  utilizado nos cálculos



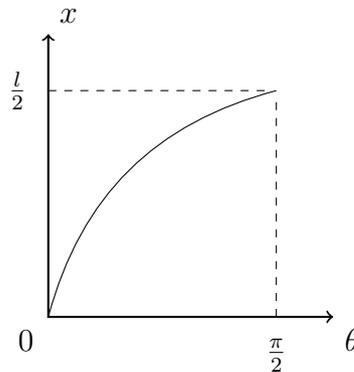
Fonte: construção do próprio autor

A hipotenusa  $AM$  mede  $\frac{l}{2}$  e o cateto  $AC$   $\frac{l}{2}\text{sen}\theta$ .

É possível verificar que a agulha cruzará uma das linhas se e somente se  $x < \frac{l}{2}\text{sen}\theta$ .

Graficamente, temos:

Figura 20 – Gráfico de  $x = \frac{l}{2}\text{sen}\theta$



Fonte: construção do próprio autor

A probabilidade procurada  $P$  é razão entre a área abaixo do gráfico da função  $x = \frac{l}{2}\text{sen}\theta$  entre 0 e  $\pi$  e a área do retângulo de base  $\frac{\pi}{2}$  e altura  $\frac{l}{2}$ . Em outras palavras:

$$P = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\text{sen}\theta d\theta}{\frac{\pi}{2} \times \frac{l}{2}} = \frac{\frac{l}{2} \left[ -\cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} \times \frac{l}{2}}$$

$$P = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

A ideia de Buffon pode ser então traduzida: se lançarmos uma quantidade  $u$  de agulhas sobre a região haverá  $v$  delas sobre alguma linha. Podemos escrever então:

$$\frac{v}{u} \approx \frac{2}{\pi},$$

o que nos permite afirmar que

$$\pi \approx \frac{2u}{v},$$

resultado que será tão mais preciso quanto maior for a quantidade de lançamentos.

A tabela a seguir mostra uma aproximação para  $\pi$  após um número  $u$  de agulhas lançadas num teste feito por computador:

Tabela 3 – Teste prático agulhas de Buffon

$u$	$\frac{2u}{v}$
500	3,2154341
1000	3,2414911
1500	3,1645569
2000	3,1620553
2500	3,1407035
3000	3,1430068
3500	3,1421838
4000	3,1435557
4500	3,1446541
5000	3,1401656
5500	3,1217482
6000	3,1217482
6500	3,1175060
7000	3,1354983
7500	3,1453135
8000	3,1452722
8500	3,1493145
9000	3,1441048
9500	3,1384209
10000	3,1392246
10500	3,1493701
11000	3,1527658
11500	3,1485284
12000	3,1417725

Fonte: construção do próprio autor

## 7 ATIVIDADES DE APROXIMAÇÃO PARA $\pi$ PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

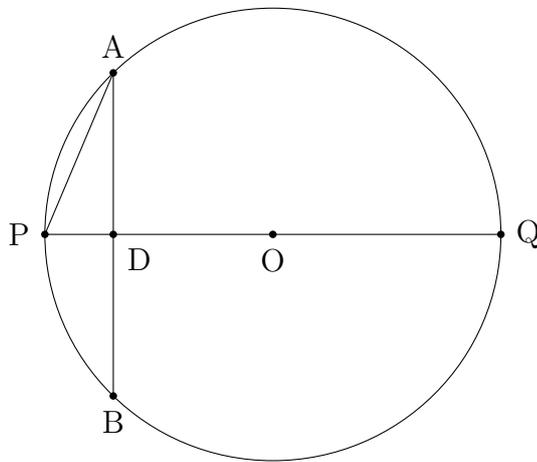
Neste capítulo serão propostas duas atividades de geometria plana que poderão ser desenvolvidas em sala de aula com estudantes do Ensino Médio. Como ponto de partida e já tratado no capítulo 4, sabemos que em polígonos regulares inscritos em circunferências, quando o número de lados do polígono cresce, seu perímetro vai se aproximando do perímetro da circunferência (atividade 1).

Intuitivamente podemos estender essa ideia para polígonos regulares circunscritos à circunferência, como na atividade 2. Aqui também é possível que seja mencionado o conceito de limite: quando o número de lados do polígono regular inscrito (ou circunscrito) a uma circunferência tende ao infinito, o perímetro deste polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência que inscreve (ou circunscribe) tal polígono.

### 7.1 Atividade 1 (polígono regular inscrito numa circunferência)

Considere um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência de raio unitário (isso é apenas para facilitar as contas, poderíamos tomar um raio  $R$  genérico).

Figura 21 – Circunferência de raio 1 onde será inscrito o polígono regular de lado  $AB = S_n$



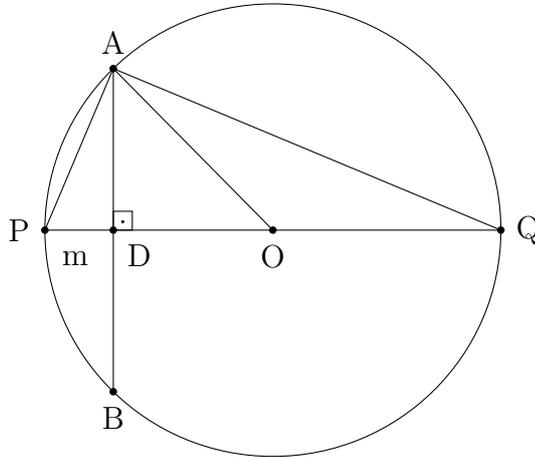
Fonte: construção do próprio autor

Seja o segmento  $AB = S_n$  a medida de um lado qualquer deste polígono. Para encontrarmos a medida de  $S_{2n}$  (lado do polígono regular de  $2n$  lados inscrito na mesma circunferência), devemos traçar a mediatriz do lado  $AB$  a fim de encontrar os pontos  $P$  e  $Q$  que serão extremidades de um diâmetro, de forma que  $PQ = 2$ ,  $AB = S_n$  e  $AP = S_{2n}$ .

Chamemos de  $D$  o ponto de interseção entre os segmentos  $AB$  e  $PQ$ , criando um segmento  $PD$  que será chamado de  $m$ .

Vamos destacar os triângulos  $ADO$  e  $APQ$ , ambos retângulos, em que  $O$  é o centro da circunferência.

Figura 22 – Evolução da figura 21



Fonte: construção do próprio autor

Pelo  $\triangle ADO$ , podemos escrever:  $AO^2 = DO^2 + AD^2$ , ou ainda:

$$1^2 = (1 - m)^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 \quad (7.1)$$

Pelo  $\triangle APQ$ , escrevemos  $AP^2 = PD \times PQ$ , ou

$$(S_{2n})^2 = m \times 2 \quad (7.2)$$

Desenvolvendo a equação 7.1, teremos:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - 2m + m^2 + \left(\frac{(S_n)^2}{4}\right) \\ 0 &= m^2 - 2m + \left(\frac{(S_n)^2}{4}\right) \\ 0 &= 4m^2 - 8m + (S_n)^2. \end{aligned}$$

Esta é uma equação do 2º grau que será resolvida na variável  $m$ , pela fórmula de Báskara. Então:

$$\begin{aligned} \Delta &= 64 - 4 \times 4 \times (S_n)^2 = 64 - 16(S_n)^2 \\ \Delta &= 16[4 - (S_n)^2] \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} m &= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - (S_n)^2}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 - (S_n)^2}}{2} \\ m &= 1 \pm \sqrt{\frac{4 - (S_n)^2}{4}} = 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Importante observar aqui que  $m < 1$ , pois o raio da circunferência é unitário.

Logo, temos:

$$m = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

Como em 7.2, temos  $m = \frac{(S_{2n})^2}{2}$ .

Vamos escrever:

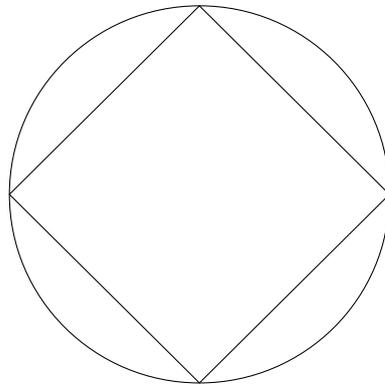
$$\frac{(S_{2n})^2}{2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2} \quad (7.3)$$

O que nos permite relacionar a medida do lado do polígono regular de  $n$  lados com a medida do lado do polígono regular de  $2n$  lados, ambos inscritos na mesma circunferência de raio unitário.

Como a atividade é voltada para aplicação em sala de aula, peçamos aos alunos que calculem inicialmente  $S_4$  e  $S_6$ .

O caso  $n = 4$  é o quadrado inscrito numa circunferência de raio 1. Então:

Figura 23 – Quadrado inscrito em uma circunferência de raio unitário



Fonte: construção do próprio autor

Veja que o diâmetro da circunferência coincide com a diagonal do quadrado. Logo  $S_4\sqrt{2} = 2$  e portanto  $S_4 = \sqrt{2}$ .

Utilizando  $S_4 = \sqrt{2}$  na expressão 7.3 teremos:

$$\frac{(S_8)^2}{2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Desenvolvendo, temos:

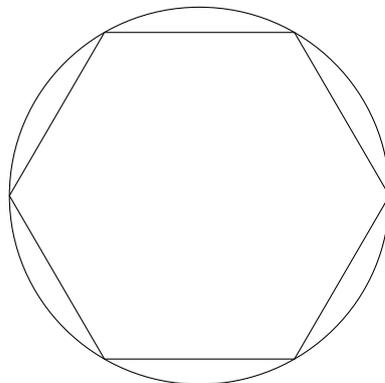
$$\begin{aligned}\frac{(S_8)^2}{2} &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{(S_8)^2}{2} &= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ S_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}\end{aligned}$$

Aplicando agora  $S_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  na expressão 7.3 teremos:

$$\begin{aligned}\frac{(S_{16})^2}{2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \\ \frac{(S_{16})^2}{2} &= 1 - \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \\ \frac{(S_{16})^2}{2} &= \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ S_{16} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\end{aligned}$$

Vejam agora o caso  $n = 6$ :

Figura 24 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário



Fonte: construção do próprio autor

Neste caso, é fácil ver que  $S_6 = 1$ . Vamos calcular  $S_{12}$ .

$$\begin{aligned}\frac{(S_{12})^2}{2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ \frac{(S_{12})^2}{2} &= \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ S_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

Vamos agora calcular  $S_{24}$ :

$$\begin{aligned}\frac{(S_{24})^2}{2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4}} \\ \frac{(S_{24})^2}{2} &= \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ S_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Após estes cálculos, vamos montar uma tabela com ajuda de uma calculadora e analisar os resultados. Na tabela,  $(2p)_n$  é o perímetro do polígono regular de  $n$  lados:

Tabela 4 – Aproximação de  $\pi$  por polígonos inscritos numa circunferência

$n$	$S_n$	$(2p)_n$
4	$\sqrt{2}$	5,6569...
6	1	6
8	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	6,1229...
12	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	6,2117...
16	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	6,2429...
24	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	6,2653...
32	0,1960...	6,2731...
48	0,1308...	6,2787...
64	0,0981...	6,2807...
96	0,0654...	6,2821...
128	0,0491...	6,2826...
192	0,0327...	6,2829...
256	0,0245...	6,2830...
384	0,0164...	6,2831...
512	0,0123...	6,2831...
768	0,0082...	6,2832...
1024	0,0061...	6,2832...

Fonte: construção do próprio autor

Fazendo  $n$  crescer encontra-se a aproximação:

$$(2p)_n = 2\pi \approx 6,2832\dots$$

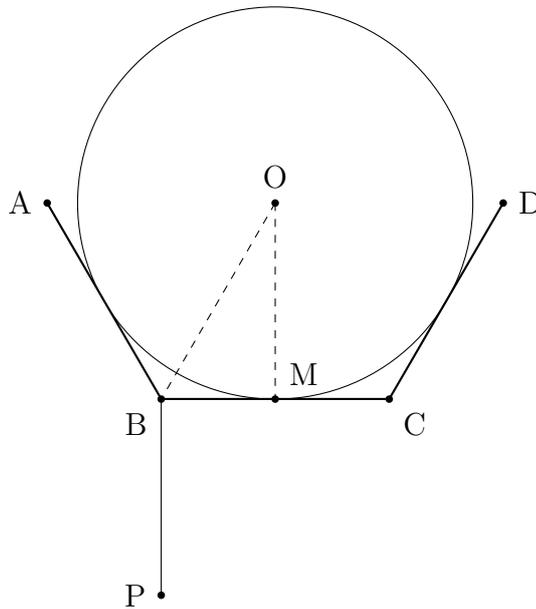
já que o perímetro do polígono inscrito tende a ser igual ao perímetro da circunferência.

## 7.2 Atividade 2 (polígono regular circunscrito numa circunferência)

De maneira análoga aos polígonos inscritos, iremos considerar agora polígonos regulares, de  $n$  lados, cada um medindo  $S_n$ , circunscritos a uma circunferência de raio unitário. Tomando o número  $n$  suficientemente grande, teremos que o perímetro do polígono é aproximadamente igual ao perímetro da circunferência.

Considere um polígono regular  $ABCD \dots$ , de  $n$  lados, circunscrito a uma circunferência de centro  $O$  e raio unitário, como na figura.

Figura 25 – Polígono  $ABCD \dots$  circunscrito a circunferência de raio unitário



Fonte: construção do próprio autor

Inicialmente, vamos criar um segmento  $BP$ , perpendicular ao lado  $BC$ , de modo que  $BP = OB = x$ . Temos então o triângulo isósceles  $OBP$ , de base  $OP$ .

Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . O triângulo  $OBM$  é retângulo em  $M$ . Logo:

$$OB^2 = OM^2 + BM^2$$

ou seja:  $x^2 = 1^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2$

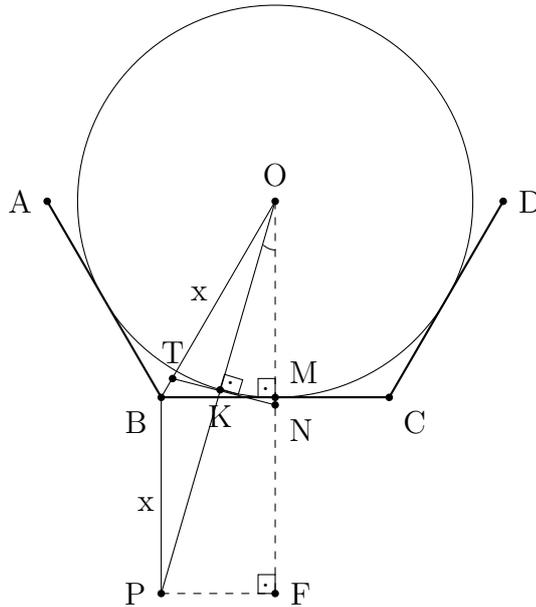
Então  $x = \sqrt{\frac{4 + (S_n)^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 + (S_n)^2}}{2}$ .

Considere também os pontos  $T$  e  $N$  de modo que  $TN = S_{2n}$ , o ponto  $K$  médio de  $TN$  e o ponto  $F$ , tal que  $BMFP$  seja um retângulo.

Veja que os triângulos  $OPF$  e  $OKN$  são semelhantes. Então:

$$\frac{OF}{OK} = \frac{PF}{KN} \quad (7.4)$$

Figura 26 – Construção geométrica no polígono circunscrito



Fonte: construção do próprio autor

Desenvolvendo a igualdade 7.4, temos:

$$\frac{OM + MF}{1} = \frac{\frac{S_n}{2}}{\frac{S_{2n}}{2}} \Rightarrow 1 + x = \frac{S_n}{S_{2n}}$$

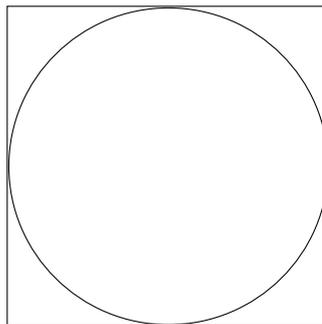
E como  $x = \frac{\sqrt{4 + (S_n)^2}}{2}$ , temos

$$1 + \frac{\sqrt{4 + (S_n)^2}}{2} = \frac{S_n}{S_{2n}} \quad (7.5)$$

como relação entre  $S_n$  e  $S_{2n}$ .

Para  $n = 4$  temos:  $S_4 = 2$ , pois o raio é unitário.

Figura 27 – Quadrado circunscrito a uma circunferência de raio unitário



Fonte: construção do próprio autor

A partir de  $S_4 = 2$ , faremos um processo iterativo, utilizando 7.5, para obter:

Tabela 5 – Aproximação de  $\pi$  por polígonos circunscritos numa circunferência

$n$	$S_n$	$(2p)_n$
4	2	8
8	0,8284...	6,6274...
16	0,3978...	6,3652...
32	0,1970...	6,3034...
64	0,0983...	6,2882...
128	0,0491...	6,2844...
256	0,0246...	6,2835...
512	0,0123...	6,2832...

Fonte: construção do próprio autor

Assim como na atividade 1, o perímetro do polígono tende a ser igual a  $2\pi$  quando seu número de lados cresce.

## 8 $\pi$ COMO ELEMENTO DA TRIGONOMETRIA

Desde o início deste trabalho nosso objetivo foi desmistificar para alunos do Ensino Médio os conceitos do número  $\pi$ . Para isso foram exibidos métodos de cálculo, aproximações e principalmente a definição deste número irracional.

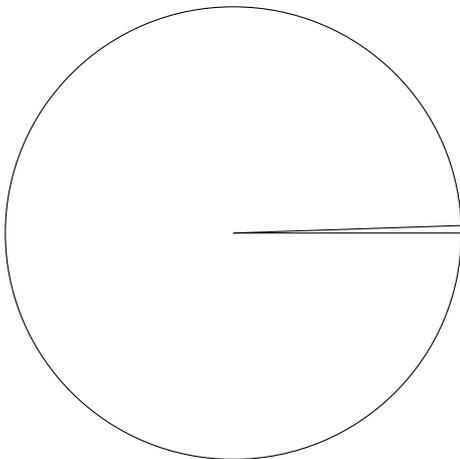
Porém, no Ensino Médio, quando trabalha-se com trigonometria, um novo problema surge: a perigosa ideia de associar o número  $\pi$  ao número 180, como se eles fossem iguais. Já mostramos neste trabalho que  $\pi < 4$  e não faz sentido algum pensá-lo como 180. Trata-se na verdade de uma conversão de unidades de ângulos, que será explicitada a seguir.

### 8.1 Definição de grau e de radiano

Um grau ( $1^\circ$ ) é o ângulo que corresponde a  $\frac{1}{360}$  de uma volta completa numa circunferência.

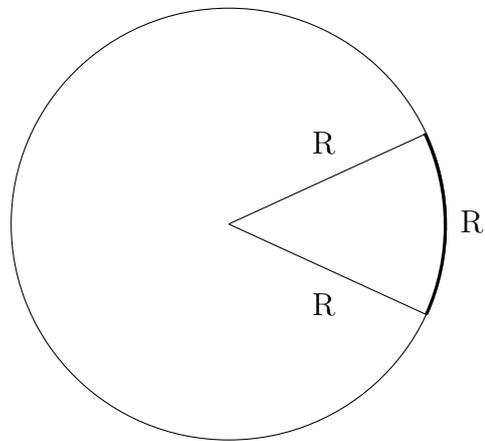
Um radiano (1 rad) é o ângulo cujo comprimento do arco na circunferência correspondente é igual ao raio da própria circunferência. Veja as figuras a seguir:

Figura 28 – Ângulo de medida  $1^\circ$



Fonte: construção do próprio autor

Figura 29 – Ângulo de medida 1 rad



Fonte: construção do próprio autor

Como ambas as unidades (grau e radiano) medem ângulos, é natural que criemos uma escala de conversão.

### 8.2 Conversão de graus para radianos

Recordando aqui que o comprimento  $C$  de uma circunferência é  $C = 2\pi R$ , em que  $R$  é o raio da mesma, faremos uma proporção entre ângulos e comprimentos:

Desta proporção chegamos à conhecida expressão de transformação graus/radianos:

Tabela 6 – Conversão grau/radiano

ÂNGULO	COMPRIMENTO
$360^\circ$	$2\pi R$
1 rad	$R$

Fonte: construção do próprio autor

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

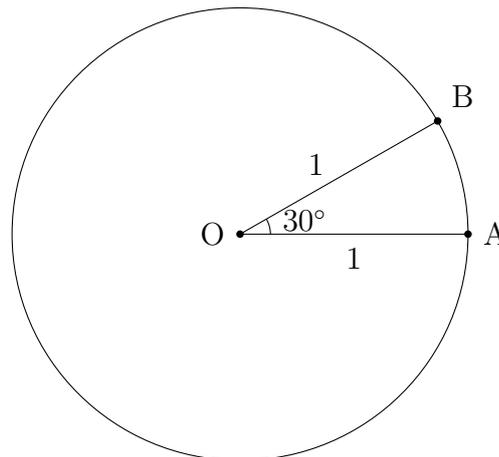
ou ainda:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

### 8.3 Por que usar o radiano?

O termo radiano aparece pela primeira vez no final do século XIX em trabalhos publicados nos EUA, conforme Quintaneiro et al. [10]. Nesta época, a trigonometria já era estudada no ciclo trigonométrico (circunferência de raio unitário). Um problema comum ao se usar a unidade grau nas medições era que as medidas dos ângulos e de seus arcos correspondentes não se encaixavam. Veja a seguir:

Figura 30 – Ângulo de  $30^\circ$  numa circunferência de centro  $O$  e raio unitário

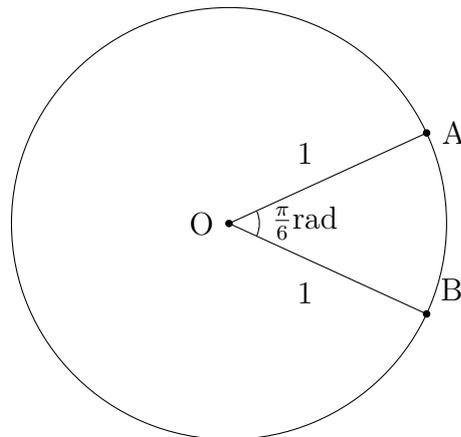


Fonte: construção do próprio autor

Nesta figura o ângulo  $A\hat{O}B$  mede  $30^\circ$  e o arco  $\widehat{AOB}$  tem comprimento  $\frac{\pi}{6}$  unidades de comprimento.

Usando agora a medida do ângulo em radianos teremos, conforme a figura 31:

Figura 31 – Ângulo de  $\frac{\pi}{6}$  radianos numa circunferência de centro  $O$  e raio unitário



Fonte: construção do próprio autor

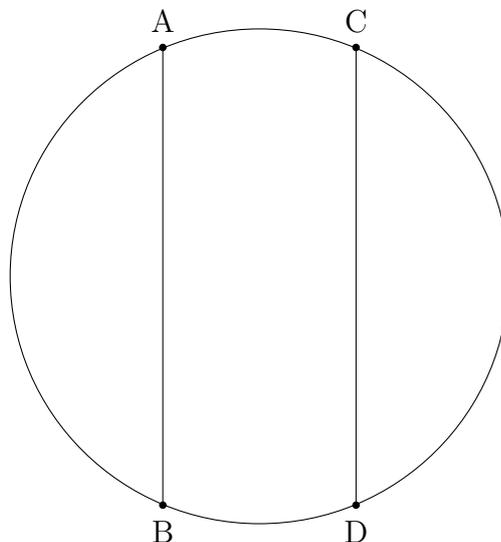
Perceba que agora as medidas do ângulo e do arco correspondente coincidem: O ângulo  $A\hat{O}B$  mede  $\frac{\pi}{6}$  radianos e o arco  $\widehat{AOB}$  mede  $\frac{\pi}{6}$  unidades de comprimento.

Esta unificação de medidas arco/ângulo é um dos motivos pelos quais o radiano tornou-se a unidade de medida padrão para ângulos.

#### 8.4 Utilizando $\pi$ em problema de geometria (I)

Nesta seção utilizaremos conceitos de geometria plana e trigonometria, com auxílio do número  $\pi$ , para dividir um círculo em três partes de mesma área, utilizando duas cordas paralelas  $AB$  e  $CD$ , como segue:

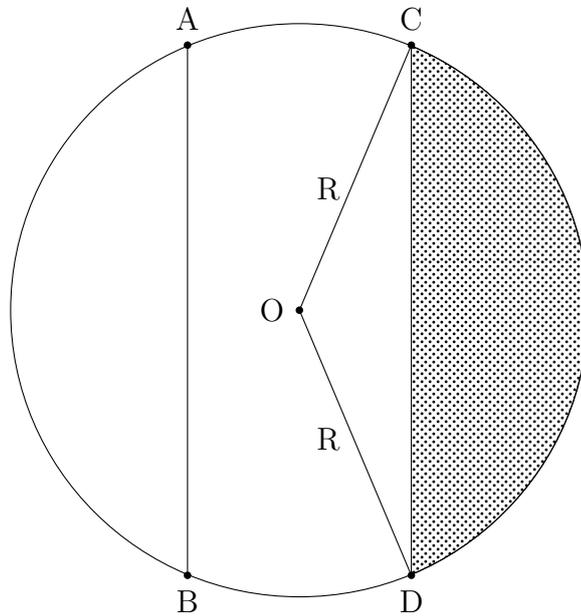
Figura 32 – Círculo dividido em três partes de mesma área através de dois segmentos paralelos:  $AB$  e  $CD$



Fonte: construção do próprio autor

A fim de organizar o problema, chamemos de  $O$  o centro do círculo e tracemos os raios  $OC$  e  $OD$ :

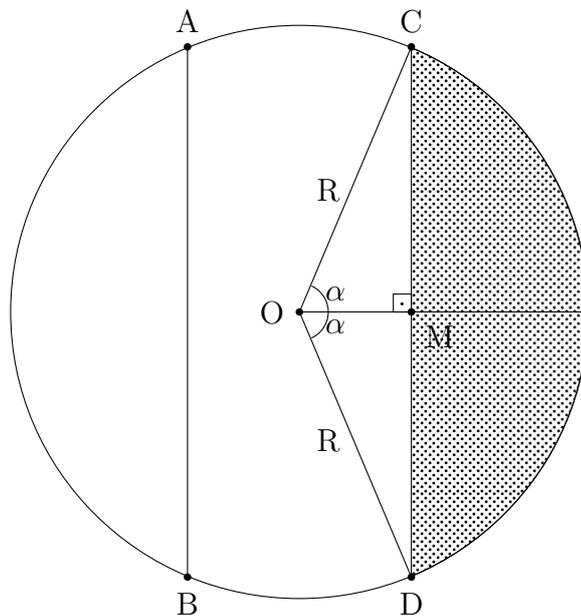
Figura 33 – A área hachurada representa  $\frac{1}{3}$  do círculo



Fonte: construção do próprio autor

Seja  $\widehat{COD} = 2\alpha$ . Para calcular a área hachurada, faremos a área do setor circular de ângulo  $2\alpha$  menos a área do triângulo  $COD$ , que deverá ser igual a área da terça parte do círculo.

Figura 34 – Evolução da figura 33



Fonte: construção do próprio autor

Seja  $M$  o ponto médio de  $CD$ . Nosso objetivo é encontrar o valor do ângulo  $\alpha = C\hat{O}M = M\hat{O}D$ , tal que a área hachurada seja igual a  $\frac{\pi R^2}{3}$ .

Para isso, façamos:

- $A_1$  = área do setor circular de abertura  $C\hat{O}D = 2\alpha$  na circunferência de raio  $R$ ;
- $A_2$  = área do triângulo  $COD$ ;
- $A_3$  = área hachurada ( $\frac{1}{3}$  do círculo).

Para o cálculo de  $A_1$  façamos a seguinte proporção, com  $\alpha$  em radianos:

Tabela 7 – Proporção ângulo/área

ÂNGULO	ÁREA
$2\pi$ rad	$\pi R^2$
$2\alpha$ rad	$A_1$

Fonte: construção do próprio autor

Isso nos leva a  $A_1 = \alpha R^2$ , e como  $A_1 - A_2 = A_3$ , vamos escrever:

$$\alpha R^2 - \frac{1}{2} \times R \times (R \operatorname{sen} 2\alpha) = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\alpha R^2 - \frac{R^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2}{3}$$

Dividindo toda a igualdade por  $R^2 \neq 0$ , teremos:

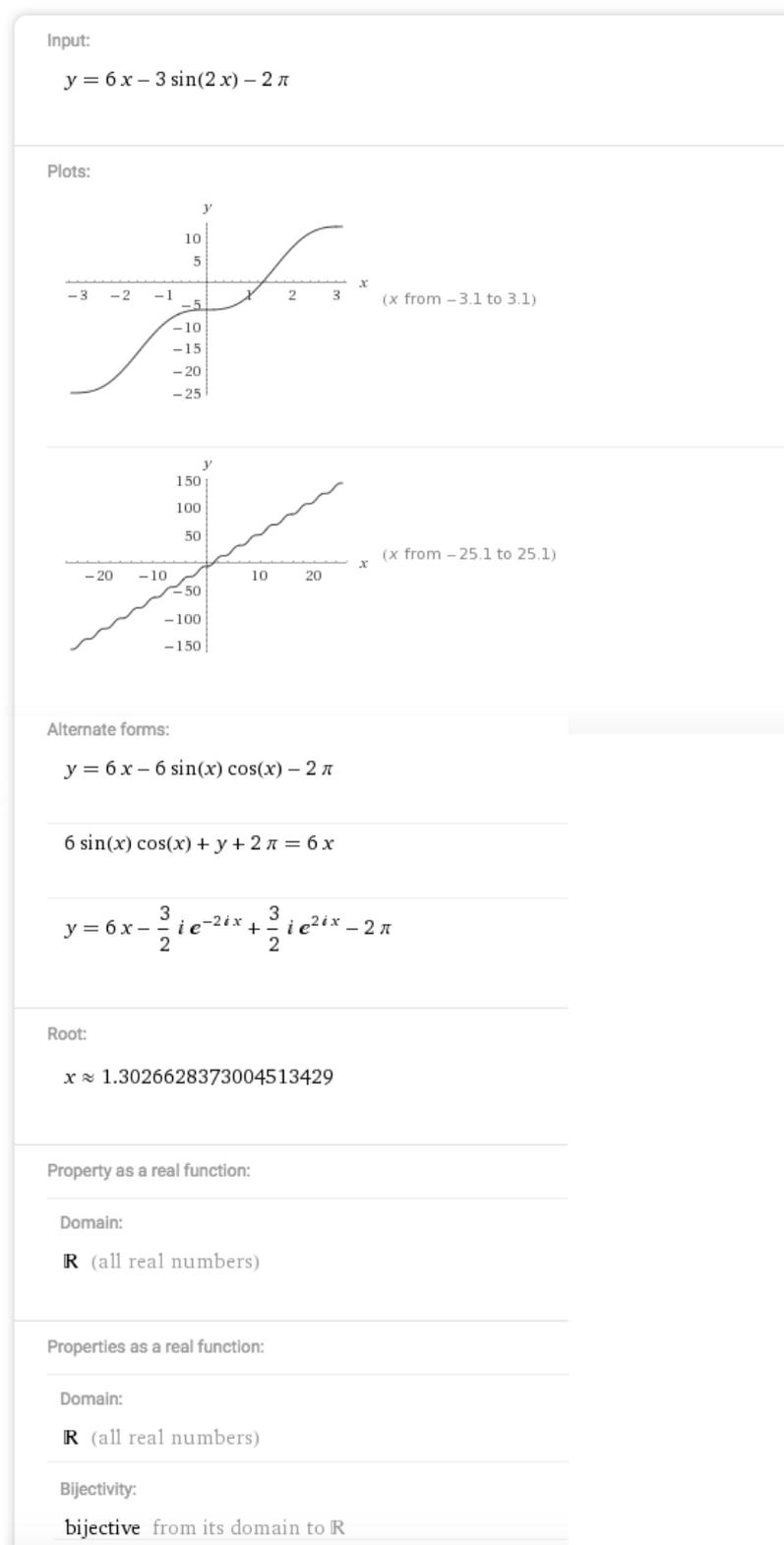
$$\alpha - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{3},$$

ou ainda:

$$6\alpha - 3 \operatorname{sen} 2\alpha = 2\pi, \tag{8.1}$$

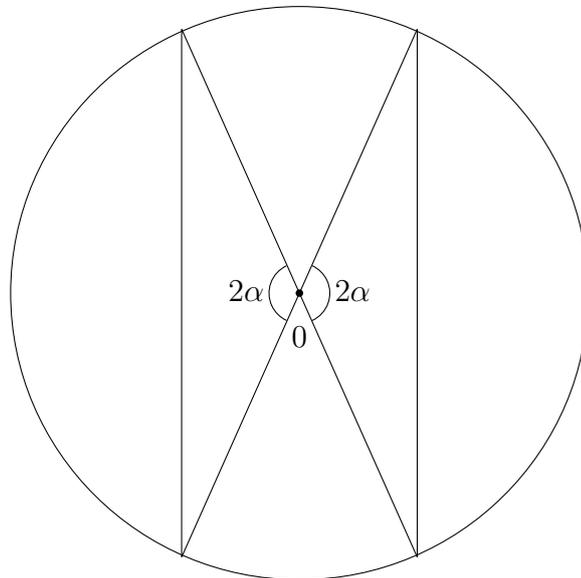
cuja solução foi encontrada pelo programa “wolframalpha”  $\alpha = 1,3026628373 \dots$  radianos, o que equivale em graus a  $\alpha = 74,64^\circ$  aproximadamente.

Figura 35 – Resolução gráfica da equação 8.1



Portanto, para dividir o círculo em 3 partes de mesma área devemos fazer a seguinte construção:

Figura 36 – Para  $2\alpha \approx 149,27^\circ$  o círculo fica dividido em 3 áreas iguais

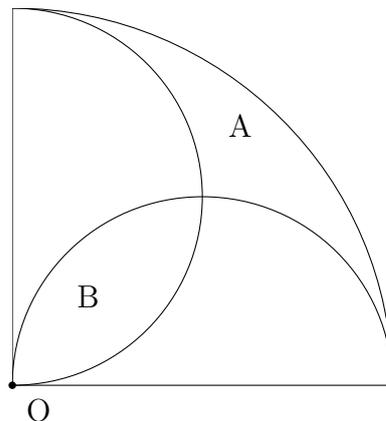


Fonte: construção do próprio autor

### 8.5 Utilizando $\pi$ em problema de geometria (II)

Exibiremos (e resolveremos) aqui o problema conhecido como “o problema do cogumelo”, cuja figura e enunciado vem a seguir:

Figura 37 – Cogumelo de tampa  $A$  e caule  $B$



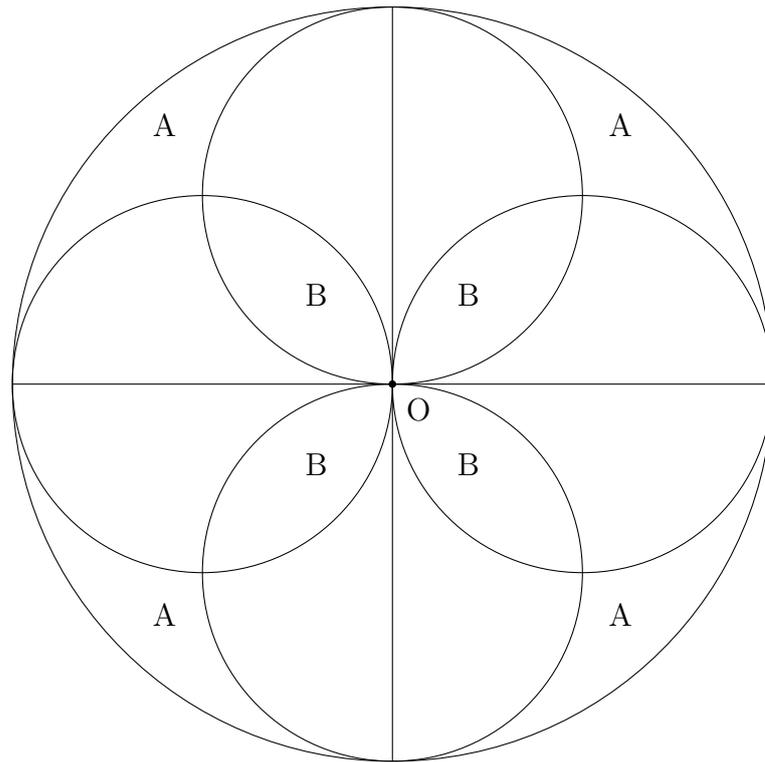
Fonte: construção do próprio autor

Na figura há um quarto de círculo de centro  $O$  e raio  $R$ , além de dois semicírculos iguais, ambos de raio  $\frac{R}{2}$ , cada um tendo seu diâmetro coincidente com um dos raios do quarto de círculo.

A figura formada assemelha-se a um cogumelo, sendo  $A$  a área da “tampa do cogumelo” e  $B$  a área do “caule do cogumelo”. Pergunta-se: qual das áreas é maior?  $A$  ou  $B$ ?

Para facilitar a resposta, vamos juntar 4 cogumelos em torno do ponto  $O$ , de modo a ter:

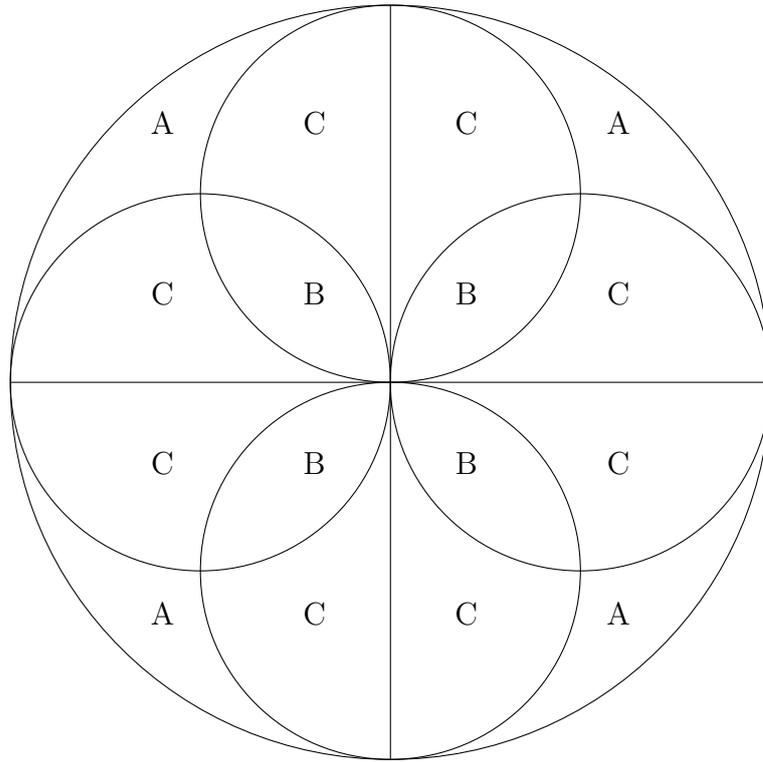
Figura 38 – Quatro cogumelos colocados em torno do ponto  $O$



Fonte: construção do próprio autor

Na figura 38, podemos perceber oito regiões congruentes, que chamaremos de  $C$ , de forma que  $B + C$  é igual a um semicírculo de raio  $\frac{R}{2}$ .

Figura 39 – Quatro cogumelos e suas respectivas áreas



Fonte: construção do próprio autor

Já foi citado que

$$B + C = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8} \quad (8.2)$$

É possível verificar também que

$$A + B + 2C = \frac{1}{4}\pi R^2 \quad (8.3)$$

De (8.2) e (8.3) podemos concluir que  $A + C = \frac{\pi R^2}{8}$  e finalmente que  $A = B$ , que é a resposta do nosso problema.

### 8.6 Utilizando $\pi$ em problema de geometria (III)

Trataremos aqui de um problema bastante interessante, em que o número  $\pi$  tem papel principal em sua solução. É o famoso problema conhecido como “Uma corda em volta da Terra”.

Para resolver este problema, iremos considerar a Terra perfeitamente esférica de raio aproximado igual a 6370km. Como já foi visto, neste trabalho que o comprimento de uma circunferência é proporcional ao seu raio, sendo a constante de proporção igual a  $2\pi$ , podemos calcular o comprimento  $C$  de uma corda esticada no solo sobre a linha do

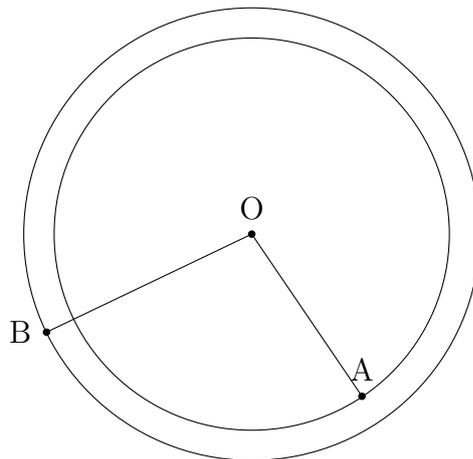
equador terrestre, encontrando:

$$C = 2\pi \times 6370\text{km} \approx 40000\text{km}$$

Portanto, uma corda de aproximadamente 40 mil quilômetros seria capaz de cercar o nosso planeta pela linha do Equador, de maneira justa, ou seja, sem nenhuma folga.

Imagine agora acrescentar a esta corda um metro em seu comprimento – repare que este acréscimo é desprezível em relação ao tamanho original da corda – de maneira que a corda fique, em toda a sua extensão, a uma distância fixa da Terra, formando então duas circunferências concêntricas. É claro que surgirá uma pequena folga entre a corda e o planeta nesta nova configuração; e a questão aqui é: o quão grande é essa folga? Seria suficiente para uma bola de tênis passar? A resposta vem a seguir. Veja a figura:

Figura 40 – Esboço do planeta Terra envolvido por uma corda



Fonte: construção do próprio autor

Seja  $OA = r$  o raio da Terra e  $OB = R$  o raio da corda esticada. Nossa folga então, a ser calculada, é  $R - r$ . Seja ainda  $C_1$  o comprimento da circunferência de raio  $OA$  (aproximadamente 40 mil km, como já visto) e  $C_2$  o comprimento da circunferência de raio  $OB$ , de maneira que  $C_2 - C_1 = 1$  metro.

Podemos escrever:

$$C_2 = 2\pi R \quad \text{e} \quad C_1 = 2\pi r$$

ou ainda:

$$2\pi R - 2\pi r = 1 \text{ metro}$$

$$2\pi(R - r) = 1 \text{ metro}$$

$$R - r = \frac{1}{2\pi} \text{ metro}$$

cujo resultado aproximado é:

$$R - r \approx 0,16 \text{ m} \approx 16 \text{ cm}$$

Então a folga procurada entre a corda e a Terra mede aproximadamente 16 centímetros, tamanho mais que suficiente para que se passe uma bola de tênis.

Interessante notar que durante os cálculos não foi utilizado o valor do raio da Terra a fim de obter-se a folga de 16cm na corda. Isso significa que independente do raio da circunferência a ser “cercada” pela corda, a folga será constante, seja para o raio da Terra, de uma moeda ou mesmo para o raio da própria bola de tênis citada.

## 9 DEFININDO $\pi$ COM AUXÍLIO DE TRIGONOMETRIA

Mostraremos aqui como é possível utilizar conhecimentos de trigonometria a fim de calcular o valor exato de  $\pi$ . Para tanto, vamos a alguns conceitos, retirados de Paiva [8].

- Tangente da diferença de dois arcos: Se  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_1 - \theta_2$  são arcos com tangente definida, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}{1 + \operatorname{tg}\theta_1 \times \operatorname{tg}\theta_2}$$

- Arco tangente: Dados números  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ , chamamos de arco tangente  $x$  ( $\operatorname{arc tg} x$ ) o número  $y$  tal que:

$$y = \operatorname{arc tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$

Repare que, pelos intervalos definidos para  $x$  e  $y$ , temos uma bijeção entre estas grandezas.

Teorema: Se  $a$  e  $b$  são números reais positivos, então

$$\operatorname{arc tg} \frac{1}{a} = \operatorname{arc tg} \frac{1}{a+b} + \operatorname{arc tg} \frac{b}{a^2 + ab + 1}$$

Demonstração: Considere inicialmente  $\operatorname{arc tg} \frac{1}{a} = x$ ,  $\operatorname{arc tg} \frac{1}{a+b} = y$   
e  $\operatorname{arc tg} \frac{b}{a^2 + ab + 1} = z$ . Daí então temos  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ ,  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{a+b}$   
e  $\operatorname{tg} z = \frac{b}{a^2 + ab + 1}$ , com  $x$ ,  $y$  e  $z$  no intervalo  $y \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ .

Fazendo  $\operatorname{tg}(x - y)$  temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x - y) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}}{1 + \frac{1}{a} \times \frac{1}{a+b}} = \frac{\frac{a+b-a}{a(a+b)}}{1 + \frac{1}{a(a+b)}} = \\ &= \frac{\frac{b}{a(a+b)}}{\frac{a(a+b)+1}{a(a+b)}} = \frac{b}{a^2 + ab + 1} \end{aligned}$$

Portanto  $\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg} z$ . E no intervalo em que definimos os arcos ( $1^\circ$  e  $4^\circ$  quadrantes, podemos dizer que  $x - y = z$  e então

$$\operatorname{arc tg} \frac{1}{a} = \operatorname{arc tg} \frac{1}{a+b} + \operatorname{arc tg} \frac{b}{a^2 + ab + 1}.$$

Corolário: Aplicando  $a = 1$  e  $b = 2$  no teorema anterior, temos

$$\operatorname{arc tg} 1 = \operatorname{arc tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc tg} \frac{2}{1+2+1}.$$

Como  $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , temos:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}.$$

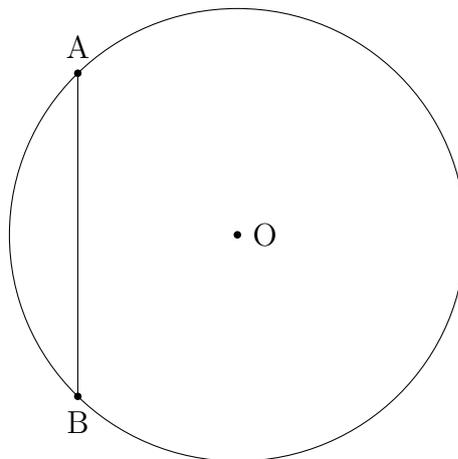
Apesar de não ser uma expressão prática para o cálculo de  $\pi$ , a igualdade obtida mostra um cálculo exato para  $\pi$  e não uma aproximação, como nos outros exemplos já citados anteriormente.

## 10 A IDEIA DE VIÈTE PARA O CÁLCULO DE $\pi$

Neste capítulo mostraremos como o matemático francês François Viète (1540 – 1603) utilizou elementos de geometria plana e trigonometria, além da ideia de limite, para encontrar uma expressão que fornecesse o valor de  $\pi$ . Acompanhe:

Considere um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência de raio  $r$ . Seja  $AB$  um dos lados deste polígono e  $A(n)$  sua área.

Figura 41 – Circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  contendo uma corda  $AB$



Fonte: construção do próprio autor

Podemos dividir a área do polígono de  $n$  lados em  $n$  áreas de triângulos congruentes ao triângulo  $ABO$ , a fim de termos:

$$A(n) = n \times \text{área do triângulo } ABO$$

Chamando o ângulo  $\widehat{AOB}$  de  $2\beta$ , temos:

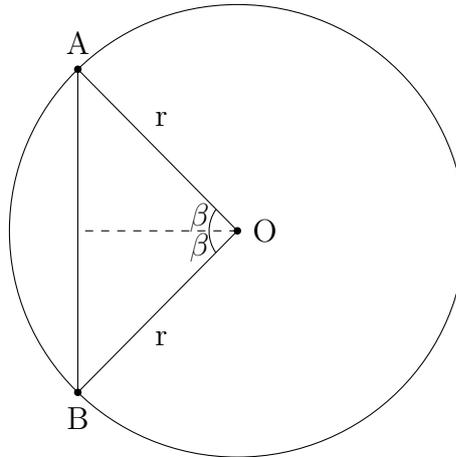
$$A(n) = n \times \frac{1}{2} r \times r \operatorname{sen} 2\beta$$

$$A(n) = n \frac{1}{2} r^2 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta$$

$$A(n) = nr^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \quad (10.1)$$

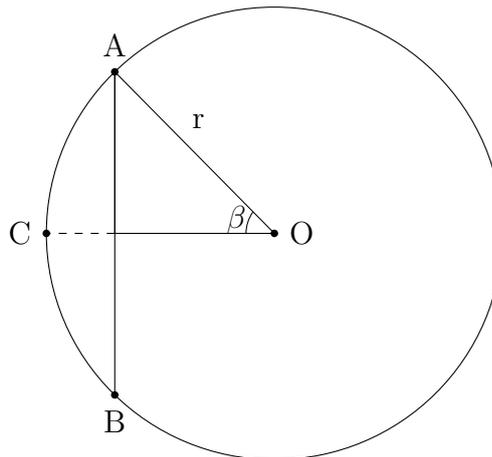
Traçando a mediatriz de lado  $AB$ , encontramos o ponto  $C$  na circunferência de modo que  $AC = BC$ . Considere  $AC$  o lado do polígono regular de  $2n$  lados inscrito na mesma circunferência de raio  $r$ .

Figura 42 – Triângulo  $ABO$ , que corresponde a  $\frac{1}{n}$  de  $A(n)$



Fonte: construção do próprio autor

Figura 43 – Triângulo  $ACO$ , que corresponde a  $\frac{1}{2n}$  de  $A(2n)$



Fonte: construção do próprio autor

Calculemos agora  $A(2n)$ , que é a área do polígono regular de  $2n$  lados inscrito na circunferência de raio  $r$ .

$$A(2n) = 2n \frac{1}{2} r r \operatorname{sen} \beta$$

$$A(2n) = nr^2 \operatorname{sen} \beta \quad (10.2)$$

Observe por 10.1 e 10.2 que

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \frac{nr^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{nr^2 \operatorname{sen} \beta} = \cos \beta$$

Traçando a mediatriz de  $AC$  é possível encontrar o lado do polígono de  $4n$  lados inscrito na mesma circunferência. Teremos então:

$$A(4n) = 4n \frac{1}{2} r r \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

$$A(4n) = 2nr^2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \quad (10.3)$$

De 10.2 e 10.3, podemos escrever:

$$\frac{A(2n)}{A(4n)} = \frac{nr^2 \operatorname{sen} \beta}{2nr^2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} = \cos \frac{\beta}{2}$$

De maneira análoga podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{A(4n)}{A(8n)} &= \cos \frac{\beta}{4} \\ \frac{A(8n)}{A(16n)} &= \cos \frac{\beta}{8} \end{aligned}$$

e assim por diante, de forma que:

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(4n)} \times \frac{A(4n)}{A(8n)} \times \cdots \times \frac{A(2^{k-1}n)}{A(2^k n)}, k \in \mathbb{N}$$

ou ainda:

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \cos \beta \times \cos \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{4} \times \cdots \times \cos \frac{\beta}{2^{k-1}}$$

Lembrando que  $A(n) = nr^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta$  e fazendo  $k$  tender ao infinito, teremos:

$$\frac{nr^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\pi r^2} = \cos \beta \times \cos \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{4} \times \cdots \times \cos \frac{\beta}{2^{k-1}n} \times \cdots$$

já que  $\lim_{k \rightarrow \infty} A(2^k n) = \pi r^2$ , pois num polígono regular cujo número de lados tende a infinito, suas áreas se confundem.

$$\text{Portanto } \pi = \frac{n \times \operatorname{sen} \beta \times \cos \beta}{\cos \beta \times \cos \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{4} \times \cdots \times \cos \frac{\beta}{2^k} \times \cdots}.$$

Tomando  $n = 4$ , temos  $\beta = 45^\circ$  e  $\operatorname{sen} \beta = \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

E lembrando da identidade trigonométrica

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta}$$

chegamos a conclusão que

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

## 11 CURIOSIDADES ENVOLVENDO $\pi$

### 11.1 Quantas casas decimais são realmente úteis para cálculos?

O número  $\pi$  apresenta hoje quadrilhões de casas decimais conhecidas, encontrados em cálculos longos feitos por computadores poderosos. Porém até que ponto essa quantidade absurda de algarismos é realmente eficiente e útil em cálculos?

A resposta vem do departamento de Engenharia da NASA (National Aeronautics and Space Administration), em português: Administração Nacional Aeronáutica e Espacial, dos Estados Unidos da América. A engenharia da NASA explica que, para enviar sondas com precisão em todo o sistema solar, é preciso usar apenas 15 casas decimais, ou seja 3,141592653589793.

Veja quão precisos são os cálculos com esse número. A nave espacial mais distante da Terra é a Voyager 1. Está a cerca de 20 bilhões de quilômetros de distância daqui. Vamos dizer que temos uma circunferência com um raio exatamente desse tamanho e queremos calcular o comprimento de sua circunferência, que é  $\pi$  vezes o raio vezes 2. Usando  $\pi$  arredondado até a décima quinta casa decimal, como acima, temos um pouco mais de 125 bilhões de quilômetros. Não precisamos nos preocupar aqui com exatamente este valor, mas sim com o erro no valor ao não utilizar os demais dígitos de  $\pi$ .

Em outras palavras, ao truncar  $\pi$  no décimo quinto decimal, calcularíamos uma circunferência com erro de cerca de 1 centímetro comparado ao valor exato do número pi. Um erro desprezível considerando as dimensões do Universo.

Tão interessante quanto é o fato de que, em 1424, o matemático e astrônomo persa Jamshid al-Kashi já havia calculado  $\pi$  com 17 casas decimais corretas. (EYMARD, [6]).

### 11.2 Aproximações

Nesta seção mostraremos diversas aproximações para o número  $\pi$ , algumas bastante simples, como  $\sqrt{10} = 3,16228\dots$  ou  $\sqrt[3]{31} = 3,14138\dots$ , outras bastante elaboradas, como veremos a seguir. As aproximações foram retiradas de Chan [3] e Posamentier e Lehmann [9].

- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,14626436994$
- $\frac{333}{106} = 3,141509433962264$
- $1,1 \times 1,2 \times 1,4 \times 1,7 = 3,1416$
- $1,09999901 \times 1,19999911 \times 1,39999931 \times 1,69999961 \approx 3,141592573$
- $\left(\frac{355}{113}\right) \left(1 - \frac{0,0003}{3533}\right) \approx 3,1415926535897943$

- $\frac{47^3 + 20^3}{30^3} - 1 \approx 3,141592593$
- $\left(97 + \frac{9}{22}\right)^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{3,141592652582646125206037179644}$
- $\left(\frac{77729}{254}\right)^{\frac{1}{5}} \approx \mathbf{3,1415926541}$
- $\left(31 + \frac{62^2 + 14}{28^4}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \mathbf{3,141592653563}$
- $\left(100 - \frac{2125^3 + 214^3 + 30^3 + 37^2}{82^5}\right)^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{3,141592653589780}$
- $\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} \approx \mathbf{3,1416407864998738}$
- $\frac{19\sqrt{7}}{16} \approx \mathbf{3,1418296818892}$
- $\left(\frac{296}{167}\right)^2 \approx \mathbf{3,14159704543}$
- $2 + \sqrt{1 + \left(\frac{413}{750}\right)^2} \approx \mathbf{3,14159265}$
- $\left(\frac{63}{25}\right)\left(\frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}}\right) \approx \mathbf{3,14159265380}$
- $\sqrt{9,87} = \mathbf{3,141655614\dots}$
- $\sqrt{9,8696} = \mathbf{3,141591\dots}$
- $\sqrt{9,869604401} = \mathbf{3,14159265357\dots}$
- $\sqrt{9,869604401089358618834491} = \mathbf{3,14159265358979323846264338329\dots}$
- $\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} = \mathbf{3,141592653\dots}$
- $2 + \sqrt[4]{4!} = \mathbf{3,141586441\dots}$
- $\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = \mathbf{3,141592653\dots}$
- $\sqrt[3]{31 + \frac{25}{3983}} = \mathbf{3,141592653\dots}$
- $\sqrt[3]{31} = \mathbf{3,141380652\dots}$



## 12 CONCLUSÕES

A abordagem principal deste trabalho foi fazer uma síntese sobre o número  $\pi$ , através de um estudo sobre sua história, sua irracionalidade e suas aproximações, mostrando também algumas formas de calculá-lo por meio de métodos geométricos e trigonométricos, desde métodos mais elementares até alguns com matemática mais sofisticada.

Por tratar-se de geometria plana básica e trigonometria elementar, as técnicas utilizadas aqui podem ser aplicadas no Ensino Médio, com o intuito de facilitar a aprendizagem e o desenvolvimento destes conteúdos para os alunos. Um objetivo secundário atingido por este trabalho foi mostrar algumas aplicações que podem ser feitas em sala de aula com o número  $\pi$ , conforme exemplificado no texto através de exemplos e problemas.

Como expectativa, imagina-se que este trabalho contribua para que o aluno do Ensino Médio tenha uma outra visão a respeito dos conteúdos previstos em seu currículo, ao perceber que, assim como o número  $\pi$ , toda a matemática é uma construção não-linear em busca de soluções de problemas do cotidiano. Através da história de  $\pi$ , espera-se que a matemática tenha mais significado para nossos alunos e isso seja um incentivo ao estudo de todos.

## REFERÊNCIAS

- [1] BECKMAN, Petr. **A history of  $\pi$  (pi)**. [S.l.]: Golem Press (St. Martin's Press), New York, 1971.
- [2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. [S.l.]: Edgard Blücher LTDA, 1996.
- [3] CHAN, Joel. As easy as pi. **Math Horizons**, JSTOR, v. 1, n. 1, p. 18–19, 1993.
- [4] DANTAS, Marcelo Rodrigues Nunes. **Sobre o número  $\pi$** . 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.
- [5] EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 2004.
- [6] EYMARD, Pierre; LAFON, Jean Pierre. **The number [pi]**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2004.
- [7] OLIVEIRA, Francisco Lucas Santos. **Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.
- [8] PAIVA, Manoel. **Matemática, vol. 1**. São Paulo: Editora Moderna, v. 1, 1995.
- [9] POSAMENTIER, Alfred; LEHMANN, Ingmar. **Pi: a biography of the world's most mysterious number**. [S.l.]: Prometheus Books, 2004.
- [10] QUINTANEIRO, Wellerson; GIRALDO, Victor; PINTO, Márcia Fusaro. De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário. **Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro (EEMAT)**, p. 1–11, 2010.
- [11] VIEIRA, José Alexandre Ramos. **O número  $\pi$ : seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.