

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Tese de doutoramento

**Correções de origem quântica para a ação do vácuo
e suas aplicações**

Tibério de Paula Netto

2017

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Tese de doutoramento

**Correções de origem quântica para a ação do vácuo
e suas aplicações**

Autor: Tibério de Paula Netto

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

2017

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedicatória

Dedico essa tese de doutoramento à minha família.

Sem vocês, tudo isso seria impossível.

Agradecimentos

Os meus mais profundos agradecimentos:

- ao meu orientador, professor Ilya Lvovich Shapiro, por todos os ensinamentos e lições transmitidas durante todos esses anos, desde os tempos de iniciação científica, passando pelo mestrado até, agora, no doutorado. Também sou eternamente grato pela oportunidade de trabalhar nos problemas desenvolvidos nessa tese, pelos esclarecimentos em questões técnicas e científicas, por todo o apoio de um modo geral e pelas portas que me foram abertas;
- à minha mãe, Aparecida Márcia de Paula Netto, e ao meu pai, Mário Lúcio Aparecido Netto, por todo o amor incondicional que recebi durante toda a minha vida. O auxílio de vocês proporcionou a existência de um ambiente saudável, fundamental para que eu pudesse realizar minha pesquisa;
- aos colaboradores Alexei Starobinsky, Ana Pelinson, Andrei Zelnikov, Leonardo Modesto e Valeri Frolov por sua indispensável participação nos trabalhos apresentados nessa tese de doutoramento;
- ao Departamento de Física da Universidade de Alberta e, em especial, aos professores, Valeri Frolov e Andrei Zelnikov, e a Andrey Shoom por toda sua hospitalidade e suporte recebido durante os seis meses de doutorado sanduíche que realizei na cidade de Edmonton no Canadá;
- aos professores Ioseph Buchbinder, Neven Bilic, Peter Lavrov e Vladimir Stokov pelos ótimos cursos, imprescindíveis para a minha formação, ministrados durante suas visitas a

Juiz de Fora;

- a todos os professores do Departamento de Física da UFJF;
- a todos os colegas de profissão que conheci durante os períodos de graduação, mestrado e doutorado por toda amizade e risadas compartilhadas durante tanto tempo de convivência;
- à UFJF, em particular, ao programa de Pós-Graduação em Física, pela estrutura oferecida que possibilitou excelentes condições de trabalho. Agradeço também a todos os funcionários dessa instituição, especialmente, o secretário da nossa Pós-Graduação, Sr. Domingos Lopes, pelo trabalho eficiente e por sua enorme paciência e prestatividade;
- às agências brasileiras de apoio à pesquisa CAPES, pelo apoio financeiro ao meu programa de doutoramento, e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro durante mestrado. Também agradeço à CAPES e a *Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada* pelo suporte financeiro oferecido durante minha estadia na Universidade de Alberta e a CNPq e FAPEMIG por financiar indiretamente o meu projeto de doutorado através do apoio ao Grupo de Pesquisa de Teoria Quântica de Campos da UFJF.

“See, madness, as you know ... is like gravity. All it takes is a little push.”

Mister J

Resumo

Nesta tese, exploram-se diferentes aspectos e aplicações das teorias gravitacionais com correções quânticas. O texto é dividido em três partes principais. Na primeira parte, são consideradas as soluções linearizadas em diferentes teorias de gravitação com derivadas superiores. O potencial Newtoniano é calculado nos modelos locais, super-renormalizáveis no nível quântico, e mostra-se que a singularidade Newtoniana é cancelada devido a contribuição dos modos massivos extras. Logo depois, o colapso gravitacional de uma pequena massa é estudado na gravitação não-local livre de fantasmas, sendo o principal resultado a ausência da singularidade na solução do campo gravitacional e a possibilidade da não formação do miniburaco negro como resultado do colapso. Na segunda parte, algumas questões sobre a inflação induzida pela anomalia conforme são estudadas. É discutida a possibilidade da transição entre os períodos de inflação estável para instável. É mostrado que esta transição é automática se as correções quânticas nesse período forem desprezadas. Em seguida, considera-se o efeito de termos que violam as simetrias de CPT e Lorentz na inflação induzida pela anomalia conforme. É demonstrado que os novos termos responsáveis por violar essas simetrias não afetam a dinâmica do fator de escala da métrica. Por fim, na terceira parte as correções quânticas para o modelo dos Galileons e para as teorias dos campos massivos tensoriais antissimétricos são obtidas. É mostrado que o propagador da teoria dos Galileons recebe correções quânticas com derivadas superiores e que o teorema de não-renormalização do modelo dos Galileons permanece, de uma maneira generalizada, válido na região das baixas energias. Depois, por meio de cálculos explícitos das correções quânticas semiclássicas não-locais é confirmada a equivalência quântica entre os modelos dos campos tensoriais antissimétricos massivos com a teoria de Proca e com o modelo do campo escalar massivo mínimo.

Palavras chaves : Gravitação quântica; ação efetiva do vácuo; teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo; potencial Newtoniano modificado; gravitação não-local livre de fantasmas.

Abstract

In this thesis, different aspects and applications of gravitational theories with quantum corrections are explored. The text is divided into three main parts. In the first part, the linearized solutions in different gravity theories with higher derivatives are considered. The Newtonian potential is calculated in the local models, super-renormalizable at the quantum level, and it is shown that the Newtonian singularity is cancelled due to the contributions of the extra massive modes. Then the gravitational collapse of a small mass is studied in non-local ghost-free gravity, being the main result the absence of singularity in the gravitational field solution and the possibility of non-mini black hole formation as the collapse result. In the second part, some issues about anomaly-induced inflation are studied. It is discussed the possibility of the transition between stable to unstable periods of inflation. It is shown that this transition is automatic if the quantum corrections in this period are neglected. In the following, we consider the effect of CPT and Lorentz-violating terms in the conformal anomaly-induced inflation. It is shown the new terms responsible to violate these symmetries do not affect the dynamics of the metric scale factor. Finally, in the third part, the quantum corrections for the Galileon model and for the theory of the massive antisymmetric tensor fields are obtained. It is shown that the propagator of Galilean theory receives quantum corrections with higher derivatives and that the non-renormalization theorem for Galileon models remains, in a generalized way, valid in the low-energy region. Then, by means of explicit calculations of non-local semiclassical quantum corrections, the quantum equivalence between the massive antisymmetric tensor field models with the Proca theory and minimal massive scalar field model is confirmed.

Keywords: Quantum gravity; effective action of vacuum; quantum field theory in curved space; modified Newtonian potential; non-local ghost-free gravity.

Notações e convenções

- Usaremos durante o texto, a não ser que seja dito o contrário, as unidades naturais de medida

$$c = \hbar = 1.$$

Nesse sistema,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{massa}]^{-1} = [\text{energia}]^{-1}.$$

- Os índices gregos $\mu, \nu, \alpha, \beta \dots$ assumem os valores 0, 1, 2, 3. Já os índices latinos $i, j, l, k \dots$ valem 1, 2, 3.
- Durante a maior parte da tese adotaremos para a assinatura da métrica $g_{\mu\nu}$ a seguinte convenção: $(+, -, -, -)$. Nesse caso, o tensor de Riemann fica definido por

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\beta\mu}.$$

Excepcionalmente no capítulo 4 usaremos, como é de maior costume na física dos buracos negros, a convenção de sinal oposta para a assinatura da métrica. Sendo assim, nesse capítulo em específico seguiremos as notações do livro texto [149].

- O intervalo entre dois eventos infinitesimalmente próximos no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Devido à relação acima, cometeremos durante o texto o abuso de linguagem e chamaremos expressões como esta simplesmente de “métrica”. O determinante da métrica será representado por $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ e para a métrica de Minkowski temos a notação $\eta_{\mu\nu}$.

- A derivada covariante ∇_μ de um tensor de ordem (m, n) $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$ é definida pela relação

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} &= \partial_\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} + \cdots \\ &- \Gamma_{\nu_1\alpha}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_n} - \Gamma_{\nu_2\alpha}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_n} - \cdots . \end{aligned}$$

Essa derivada covariante satisfaz a condição de metricidade $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ e também é livre de torção $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. Então, nesse caso a conexão afim é idêntica ao símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\mu\nu}) .$$

- Para o operador de d'Alembert usaremos a notação

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu .$$

- O “quadrado” de um tensor será expressado como $A_\mu^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$, com generalização direta para os casos com mais índices. Também será útil a notação $(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \sigma$, onde σ é um escalar.

- Definimos o tensor de Ricci como sendo $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$. Já o escalar de Ricci, ou simplesmente curvatura escalar, fica dado por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Outra quantidade importante construída a partir do tensor de Riemann é o tensor de Weyl $C_{\mu\nu\alpha\beta}$, cujo quadrado $C^2 = C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta}$ é expressado, no espaço-tempo quadridimensional, pela fórmula

$$C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2 R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3} R^2 .$$

O termo topológico de Gauss-Bonnet (densidade de Euler) será designado pela letra E e tem como valor

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4 R_{\alpha\beta}^2 + R^2 .$$

Cometeremos no decorrer do texto mais um abuso de linguagem e chamaremos exclusivamente todas as essas quantidades construídas a partir do tensor de curvatura como “curvaturas”.

- As figuras utilizadas nessa tese foram originalmente publicadas nas referências [80, 93, 161, 163, 200]. Todos os créditos são devidos aos respectivos autores.
- As referências dessa tese serão dispostas na ordem alfabética. Na opinião do autor isso facilita a organização e a compreensão de textos extensos.

Lista de publicações

- T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *One-loop divergences in the Galileon model*, Phys. Lett. B **716** (2012) 454.
- T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *Vacuum contribution of photons in the theory with Lorentz and CPT-violating terms*, Phys. Rev. D **89** (2014) 104037.
- L. Modesto, T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *On Newtonian singularities in higher derivative gravity models*, JHEP **1504** (2015) 098.
- V. P. Frolov, A. Zelnikov e T. de P. Netto, *Spherical collapse of small masses in the ghost-free gravity*, JHEP **1506** (2015) 107.
- T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *Non-local form factors for curved-space antisymmetric fields*, Phys. Rev. D **94** (2016) 024040.
- T. de P. Netto, A. M. Pelinson, I. L. Shapiro e A. A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation*, Eur. Phys. J. C **76** (2016) 544.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
Notação e convenções	viii
Lista de publicações	x
Introdução	2
1 Gravitação e efeitos quânticos: uma breve revisão	19
1.1 Relatividade Geral	20
1.1.1 A solução de Schwarzschild	21
1.1.2 Modelo cosmológico padrão	22
1.2 Unidades de Planck e efeitos quânticos	24
1.3 Divergências na gravitação quântica	26
1.3.1 Relatividade Geral quântica	27
1.3.2 Gravitação quântica com derivadas superiores de quarta ordem . . .	27
1.3.3 Gravitação quântica super-renormalizável	29
1.3.4 Gravitação não-local livre de fantasmas	30
2 Elementos de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo	32
2.1 Ação do vácuo: a real necessidade das derivadas superiores	33

2.2	Ação efetiva do vácuo e expansão em loops	35
2.3	Ação clássica dos campos de matéria no espaço-tempo curvo	36
2.4	O cálculo das divergências de 1-loop	38
2.4.1	A técnica de Schwinger-DeWitt	38
2.4.2	Campo escalar não-mínimo	42
2.4.3	Campo espinorial	42
2.4.4	Campo vetorial	43
2.4.5	Contratermos e renormalização da ação do vácuo	44
2.5	Simetria conforme local	46
2.6	Anomalia conforme	47
2.7	Ação efetiva induzida pela anomalia conforme	49
3	Singularidade Newtoniana nos modelos de gravitação com derivadas superiores	54
3.1	O limite Newtoniano nas teorias de gravitação com derivadas superiores . .	55
3.2	Solução das integrais dos potenciais Newtonianos para os fatores de forma polinomiais	58
3.3	Fantasma e potenciais repulsivos	64
4	O colapso de uma pequena distribuição esférica de massa na gravitação não-local livre de fantasmas	68
4.1	Potencial Newtoniano na gravitação não-local livre de fantasmas no espaço-tempo com dimensão arbitrária D	70
4.2	Gíratons na gravitação não-local livre de fantasmas	73
4.3	O colapso de uma casca esférica nula fina na gravitação não-local livre de fantasmas	76
4.3.1	O cálculo do tensor momento energia	79
4.3.2	O cálculo da métrica média	79
4.3.3	Solução de Schwarzschild linearizada	82
4.3.4	O invariante de Kretschmann	83
4.4	O colapso de uma casca esférica nula espessa na gravitação não-local livre de fantasmas	84
4.4.1	O campo gravitacional no domínio R	86

4.4.2	O campo gravitacional nos domínios N_{\pm}	87
4.4.3	O campo gravitacional no domínio I	88
4.4.4	O invariante $(\nabla r)^2$	90
5	Transição entre os períodos estável e instável da inflação induzida pela anomalia conforme	92
5.1	Uma breve revisão da inflação induzida pela anomalia conforme	93
5.1.1	Os efeitos das massas: inflação estável temperada	96
5.2	Estudo numérico da transição para a época da inflação instável	100
5.3	Exemplos de mecanismos quânticos que podem gerar um termo R^2 enorme	105
5.3.1	Grupo de renormalização e a mudança dos parâmetros da teoria	105
5.3.2	Quebra espontânea de simetria com ξ diferente de zero	107
6	Contribuição do fóton para a ação efetiva do vácuo na eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz	111
6.1	A ação da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz no espaço-tempo curvo	113
6.2	O cálculo das divergências de 1-loop	114
6.3	Simetria conforme local, anomalia conforme e a ação efetiva induzida pela anomalia conforme	117
6.4	Aplicação dos resultados na cosmologia	119
7	Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons	120
7.1	A descrição do modelo	122
7.2	O cálculo das divergências de 1-loop	123
7.3	Discussão dos resultados	124
8	Fatores de forma não-locais para campos antissimétricos no espaço-tempo curvo	127
8.1	O cálculo dos fatores de forma de 1-loop	129
8.2	Campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem	133
8.3	Campo tensorial massivo totalmente antissimétrico de terceira ordem	137
	Conclusões gerais	142

A	Técnica generalizada de Schwinger-DeWitt	144
A.1	Fórmulas necessárias para a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt . . .	144
A.2	O cálculo da parte divergente de $\text{Tr} \ln \hat{H}_m$	146
A.3	O cálculo da parte divergente de $\text{Tr} \hat{H}_{nm} \hat{H}_0^{-1}$	147
A.4	O cálculo da parte divergente de $\text{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square}$	148
B	Integrais da média sobre a esfera unitária	151
B.1	Transformações entre as coordenadas (X, Y, Z) e (ξ, ζ_\perp)	151
B.2	O cálculo das integrais	153
C	Prova da simetria conforme local de $K(g_{\mu\nu}, k_F)$	155
D	O cálculo das divergências de 1-loop no modelo dos Galileons através dos Diagramas de Feynman	158
E	Método de Faddeev-Popov em várias etapas para o campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem	162
	Bibliografia	166

Introdução

O pensamento comum entre os cientistas no final do século XIX era que a Física estava completa [160]. De um lado, a mecânica Newtoniana descrevia o movimento de um conjunto de pontos materiais massivos. Dado as forças que agem sobre um sistema, o seu movimento é completamente determinado pela equação diferencial de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1)$$

desde que se conheçam os valores iniciais da posição e da velocidade de cada partícula [145, 216]. Por outro lado, as forças que aparecem no lado esquerdo da segunda lei de Newton eram determinadas por outras teorias, como a gravitação ou eletromagnetismo. Desse modo, juntamente com a Termodinâmica, os diferentes ramos da Física pareciam formar um sistema consistente para a descrição de todos os fenômenos observáveis da natureza. Entretanto, através de um melhor entendimento dos trabalhos de Maxwell sobre a teoria eletromagnética, algumas incoerências na física clássica foram notadas [121].

Na Mecânica Clássica todos os referenciais inerciais são equivalentes. Esse fato é expresso matematicamente pela invariância do lado direito da equação (1) perante as transformações de Galileu, que relacionam referências inerciais distintos. Porém, as equações de Maxwell, responsáveis pelo lado esquerdo da mesma equação, não possuem essa invariância. Isso pode ser observado, por exemplo, em uma das previsões mais importantes realizadas por Maxwell: a existência das ondas eletromagnéticas [146]. Na teoria eletromagnética, as interações entre corpos carregados são transmitidas na forma de uma onda, com uma velocidade de propagação constante igual à velocidade da luz c . Ora, se as leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial, a velocidade de propagação dessas ondas deveria ser independente da escolha do referencial, o que está em desacordo com as transformações de Galileu, visto que elas alteram velocidades. Ademais, a velocidade

finita da propagação dessa interação, representa um aspecto totalmente novo, contrário às características básicas da Mecânica Clássica, na qual a informação se propagava instantaneamente [136].

A fim de solucionar esses problemas, Einstein reformulou no ano de 1905 a mecânica Newtoniana em uma nova teoria, conhecida atualmente como Relatividade Especial, usando como ponto de partida a invariância da velocidade da luz no vácuo [140]. Essa teoria foi responsável por um grande impacto na sociedade, uma vez que noções básicas do pensamento humano como espaço e tempo se tornaram apenas conceitos relativos, dependendo do ponto de vista do observador. Somente uma particular combinação dessas grandezas é preservada: o espaço-tempo é absoluto.

Quase na mesma época da formulação da Relatividade Especial, alguns experimentos que não podiam ser explicados através da Física clássica, levaram aos primeiros passos do desenvolvimento de outra teoria, que também seria responsável por uma revolução nos campos científicos e filosóficos. Com o passar do tempo, a agora chamada de Mecânica Quântica, se mostrou cada vez mais uma teoria adequada para a descrição dos fenômenos físicos nas pequenas escalas de comprimento, próximas ou abaixo da ordem de grandeza do tamanho do átomo [194]. Sua interpretação probabilística, bem como a incerteza na determinação simultânea dos valores de certas grandezas físicas, representaram novamente outra quebra de paradigma com o pensamento comum da Física clássica, que era em sua essência determinístico.

A união da teoria da Relatividade Especial com a Mecânica Quântica ocorreu devido à necessidade de quantizar o campo eletromagnético, para uma melhor compreensão dos fenômenos provenientes da interação eletromagnética entre elétrons. No final da década de 1920 Dirac formulou sua famosa equação [75], que foi originalmente interpretada como a equação de uma única partícula análoga à equação de Schrödinger, que satisfazia tanto os requisitos da Relatividade Especial como as regras da Mecânica Quântica. A equação de Dirac previu a partir de primeiros princípios o valor de spin $1/2$ do elétron e foi responsável por uma descrição adequada do seu momento magnético, bem como ofereceu uma previsão mais precisa do espectro do átomo de hidrogênio (veja, por exemplo, [193]). Algumas propriedades indesejáveis da equação de Dirac, como as soluções com estados de energia negativa, levaram a sua posterior reinterpretação como uma equação de campo verdadeira, descrevendo uma teoria de várias partículas, em que o número total de partículas não era

mais fixo [33, 34]. Isso permitiu, por exemplo, modelar importantes processos físicos como a emissão de um fóton devido à transição eletrônica para um estado quântico de energia mais baixa, um processo no qual o número total de partículas muda. O campo de Dirac quantizado também foi responsável por apontar que as antigas soluções com energia negativa eram, na verdade, devidas à existência de um novo tipo de partícula: o pósitron, a antipartícula do elétron.

Apesar de seus primeiros sucessos, a eletrodinâmica quântica passou por sérias dificuldades teóricas. Grandezas físicas importantes, como a autoenergia do elétron, recebiam contribuições quânticas que eram divergentes. Entre o final da década de 1940 e início da década de 1950 o problema dos infinitos foi solucionado através do processo de renormalização, devido aos esforços de vários cientistas como Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dylson, entre outros [60]. A solução foi perceber que os parâmetros que aparecem inicialmente na ação da teoria sem interação, como a massa e a carga elétrica, não correspondiam na verdade às constantes físicas medidas nos experimentos da teoria com interação. O que realmente pode ser medido em laboratório são os valores renormalizados de massa e carga elétrica, que dependem da escala de energia em questão e levam em consideração contribuições dos efeitos quânticos como, por exemplo, a polarização do vácuo.

A generalização dos conceitos usados na eletrodinâmica quântica, como a criação e aniquilação de partículas e a renormalização, quando aplicados a outras teorias de campos levou ao desenvolvimento da teoria quântica de campos (veja, por exemplo, [119, 184, 191]). Essa teoria fornece o formalismo base por trás do Modelo Padrão da Física de partículas, a atual teoria responsável por descrever as partículas elementares constituintes da matéria e as suas interações [103, 197]. O Modelo Padrão tem demonstrado um contínuo sucesso nas suas previsões teóricas, sendo conhecido como uma das teorias mais precisas de toda a Física. Recentemente, no ano de 2013, a última de suas partículas que carecia de confirmação experimental, o bóson de Higgs, foi encontrada pelos pesquisadores do CERN no acelerador de partículas LHC (*large hadron collider*) [14, 56]. Contudo, embora o Modelo Padrão tenha conseguido enormes triunfos, ele ainda está longe de ser uma teoria completa das interações fundamentais, pois essa teoria descreve somente três das quatro forças fundamentais da natureza: as forças nuclear forte, nuclear fraca e a eletromagnética. Ele não incorpora a interação gravitacional. Ademais, as últimas observações nas escalas astrofísica e cosmológica [187], têm demonstrado que a matéria bariônica descrita pelo

Modelo Padrão corresponde apenas a um total de 4,9% do conteúdo do universo. Para que o modelo cosmológico padrão atual esteja em concordância com as observações, também é necessário introduzir um setor escuro escondido, constituído de 26,8% de matéria escura e 68,3% de energia escura, que o Modelo Padrão da física de partículas não leva em consideração.

A gravidade é certamente a interação mais antiga conhecida pela humanidade. Os seus efeitos no movimento dos corpos celestes têm fascinado a espécie humana desde muito antes da antiguidade. Vários dos povos antigos associavam aos astros, mitos e deuses, sendo os filósofos da Grécia antiga os primeiros que tentaram explicar os movimentos dos corpos celestes sem recorrer à religião [175]. No entanto, a descrição matemática da gravidade veio apenas muito mais tarde, no ano de 1687, na famosa obra *Principia* de Sir Isaac Newton [159]. A lei de força do inverso do quadrado da distância Newtoniana forneceu uma maneira simples e elegante de explicar como manifestação do mesmo fenômeno tanto as leis empíricas da queda livre dos corpos estudadas por Galileu, como as leis de Kepler do movimento dos planetas.

Entre os anos de 1907 e 1915 Albert Einstein trabalhou na tentativa de conciliar as idéias da sua recém criada teoria da Relatividade com a gravidade. A lei da gravitação universal de Newton não era compatível com conceito da causalidade, já que a força gravitacional era representada por uma interação instantânea à distância: se a posição de uma massa muda, as forças gravitacionais entre ela e quaisquer outras massas mudam instantaneamente, por mais longe que elas estejam. Os esforços de Einstein culminaram na teoria da Relatividade Geral, a teoria que atualmente melhor descreve ao mesmo tempo os fenômenos gravitacionais e relativísticos [136, 149, 226, 227]. Nessa teoria, o campo gravitacional não é um campo qualquer como os outros, mas sim uma característica geométrica fundamental do espaço-tempo. A geometria do espaço-tempo na presença do campo gravitacional é curva, sendo descrita por uma variedade pseudo-Riemanniana, em que as componentes do tensor métrico sobre essa variedade são responsáveis por descrever o campo gravitacional. De um lado, a dinâmica da métrica é determinada pelas equações de campo de Einstein, que relacionam quantidades geométricas do espaço-tempo com a densidade de momento e energia da matéria, enquanto pelo outro o movimento da matéria segue as geodésicas do espaço-tempo, determinadas pela métrica. Essa relação existente entre a geometria e a matéria foi excepcionalmente bem analisada por Jonh Wheeler na

sua famosa citação [149] “a matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz à matéria como se mover.”

A teoria gravitacional de Einstein descreve vários efeitos que não são explicadas pela lei da gravidade de Newton. Como exemplo, podemos citar a precessão anômala no periélio da órbita do planeta Mercúrio e o fenômeno das lentes gravitacionais. O desvio da luz devido à atração da força gravitacional exercida pelo Sol foi um dos primeiros testes da teoria da Relatividade Geral, cuja comprovação observacional veio a partir de um eclipse solar total ocorrido em 29 de maio de 1919. Algumas fotografias decisivas na comprovação desse fenômeno foram realizadas no Brasil na cidade de Sobral no Ceará. Recentemente, outra predição dessa teoria, as ondas gravitacionais, foram diretamente detectadas pelo grupo de pesquisadores do projeto LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) [1] na data de 11 de fevereiro de 2016, depois de mais de 100 anos de sua criação.

As duas soluções mais importantes das equações de Einstein são a solução esfericamente simétrica e a métrica homogênea e isotrópica. A primeira tem grande aplicação na descrição dos campos gravitacionais de objetos astrofísicos, como planetas e estrelas. Ela também implicou na existência dos buracos negros, corpos com o campo gravitacional tão intenso, que a partir de certa região do espaço nada, nem mesmo a luz, pode escapar da sua forte atração gravitacional [89,92]. Já a métrica homogênea e isotrópica é utilizada na Cosmologia para descrever com bastante êxito, em aproximação de ordem zero, a dinâmica do universo em expansão [154]. Apesar do grande sucesso dessas soluções na descrição dos fenômenos gravitacionais, ambas têm um grande problema conceitual em comum: de acordo com os teoremas gerais de Penrose e Hawking [112,114,183], essas soluções sempre apresentam singularidades, pontos do espaço-tempo em que a curvatura e a densidade de energia são estritamente infinitas, de uma maneira independente da escolha de coordenadas. A resolução mais natural do problema das singularidades é admitir que a Relatividade Geral, assim como outras teorias da Física, não é válida em todas as escalas. Em particular, espera-se que perto das singularidades, onde a curvatura torna-se muito grande, as equações dinâmicas de Einstein devam ser modificadas. Uma provável origem desse desvio da Relatividade Geral são os efeitos quânticos do campo gravitacional.

Os avanços da teoria quântica de campos, principalmente das técnicas de quantização das teorias de calibre como, por exemplo, o desenvolvimento do método de

Faddeev-Popov [83] e da regularização dimensional [39, 117, 138], tornaram possível as tentativas de se quantizar o campo gravitacional. No entanto, apesar de muitos esforços nessa área, ainda hoje não existe nenhuma teoria satisfatória da gravitação quântica. Uma das razões que dificultam a quantização da gravitação é devida à dimensionalidade da constante gravitacional de Newton G , responsável pela constante de acoplamento com dimensão de $[\text{massa}]^{-1}$ na teoria da Relatividade Geral. Como resultado, do ponto de vista da contagem de potências de momento essa teoria é, pelo menos na abordagem perturbativa padrão, não-renormalizável.

Os primeiros cálculos diretos que confirmaram esse resultado foram realizados em 1974 por 't Hooft e Veltman na referência [116], na qual eles mostraram que apesar das divergências de *1-loop* se anularem na teoria de Einstein sem matéria no nível *on-shell*, o mesmo não ocorre quando é levada em consideração a interação com o campo escalar. Logo depois, Deser e van Nieuwenhuizen mostraram que uma situação análoga acontece quando o campo gravitacional interage com o campo eletromagnético [71], ou com férmions [72]. A referência [101] reforçou ainda mais esse fato, no momento em que mostrou que mesmo na ausência de outros campos, a Relatividade Geral perde sua finitude quando são levadas em consideração as correções de *2-loops*.

Uma das possibilidades para evitar os problemas da renormalização na gravitação quântica é modificar a ação clássica da Relatividade Geral. No trabalho [214], Stelle mostrou que através da adição de um conjunto completo de termos covariantes com quatro derivadas da métrica à ação de Einstein-Hilbert, é possível construir uma teoria quântica da gravitação renormalizável. Contudo, também foi mostrado na mesma referência que a adição desses novos termos faz com que o propagador da nova teoria tenha no seu setor de spin-2 um pólo não-físico, correspondendo a um grau de liberdade extra com energia cinética negativa. Esses estados não-físicos ficaram conhecidos na literatura por fantasmas massivos [214]. Algum tempo depois, em 1997, Asorey, Lopez e Shapiro estudaram uma modificação mais abrangente da Relatividade Geral, considerando na ação gravitacional todos os possíveis termos covariantes e locais com derivadas superiores da métrica [12]. O resultado mostrou que a teoria que contém seis ou mais derivadas da métrica na ação gravitacional, se torna do tipo super-renormalizável, entretanto, a mesma ganha novos fantasmas massivos em seu espectro de partículas, presentes agora em ambos os setores de spin-2 e spin-0 do propagador.

Em 1963, Veltman estudou o que pode acontecer no espalhamento quântico entre uma partícula muito massiva de energia cinética negativa e uma partícula muito mais leve de energia cinética positiva [223]. Em resumo, o resultado final é que nesse processo, a partícula de energia cinética negativa se acelera cada vez mais, adquirindo uma maior quantidade de energia negativa, ao mesmo tempo em que a partícula de energia cinética positiva ganha o equivalente em energia positiva. Na teoria gravitacional isso pode levar a uma emissão intensiva de grávitons muito energéticos, que geram instabilidades crescentes que são destrutivas para as soluções clássicas. Essas instabilidades são típicas das teorias com derivadas superiores e foram estudadas muito mais cedo, no ano de 1850, pelo matemático ucraniano Ostrogradsky [170]. As tentativas de remoção desses fantasmas do espectro físico de partículas da teoria levaram, no nível quântico, à violação da sua unitariedade [214]. Dessa forma, os esforços na construção de uma teoria quântica da gravitação têm falhado até os dias atuais na missão de encontrar uma teoria que seja ao mesmo tempo renormalizável e unitária.

Uma outra possibilidade é considerar uma teoria semiclássica da gravitação. Nessa abordagem, o campo gravitacional é tratado como um campo clássico externo e o principal objetivo é entender quais são os efeitos sobre o campo gravitacional, devido à presença da matéria quântica no espaço-tempo curvo. Um dos aspectos mais importantes da teoria quântica de campos é a complicada estrutura do seu vácuo, que implica em fenômenos novos como a polarização do vácuo e a possibilidade da criação de partículas. Esses fenômenos e, no geral, os efeitos relativos aos *loops* virtuais dos campos de matéria, afetam a gravitação gerando correções quânticas para a ação gravitacional que podem, em princípio, solucionar os problemas fundamentais da gravitação clássica, como a presença de singularidades em suas soluções.

A teoria quântica dos campos de matéria no espaço-tempo curvo tem alcançado vários resultados teóricos sólidos com importantes aplicações. Como ilustração, podemos citar na física dos buracos negros o efeito da criação de partículas perto do horizonte de eventos de um buraco negro [109]. Esse fenômeno faz com que buracos negros emitam um espectro térmico de corpo negro conhecido como radiação Hawking, responsável pela consequente redução de sua massa e energia¹. Já na Cosmologia, a teoria semiclássica da gravitação pode ser usada, por exemplo, para explicar as pequenas anisotropias presen-

¹Por esse motivo esse fenômeno também é conhecido como “evaporação dos buracos negros.”

tes no espectro de potência da radiação cósmica de fundo, como advindas de flutuações quânticas presentes no início do universo [154].

As propriedades de renormalização dos campos de matéria no espaço-tempo curvo também são atualmente bem compreendidas (para uma introdução detalhada ao tema, consulte os livros [28, 42, 102, 173] e o artigo de revisão [200]). O resultado geral é que a renormalizabilidade da teoria dos campos de matéria no espaço-tempo curvo também requer a introdução de derivadas superiores na ação do vácuo². As teorias que eram renormalizáveis no espaço-tempo plano, deixam de ser renormalizáveis no fundo geral caso isso não seja feito. Nesse caso, a introdução de derivadas superiores não gera problemas relacionados com a unitariedade da matriz S gravitacional, pois a métrica não é quantizada. Em vez disso, devemos aqui nos preocupar com a estabilidade das soluções clássicas perante perturbações gravitacionais. Recentemente, foi mostrado que, pelo menos nos casos específicos dos fundos cosmológicos, os fantasmas massivos não aparecem como uma excitação física real, não produzindo assim instabilidades, desde que a frequência da perturbação inicial não seja da ordem da escala de Planck [80, 192]. Sendo assim, existem fortes indicações que a abordagem semiclássica pode ser vista como uma teoria efetiva satisfatória abaixo da escala de Planck. Outro fenômeno com um bom entendimento na teoria semiclássica da gravitação é a anomalia conforme, também conhecida como anomalia no traço do tensor momento energia (para uma revisão nesse assunto, veja o artigo [201] e as suas referências), que nada mais é do que a violação quântica da simetria conforme local imposta no nível clássico. Essa violação está por trás das aplicações mais importantes da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo, como a radiação Hawking [17, 55] e o modelo Starobinsky da inflação [211]. Nos capítulos 1 e 2 dessa tese, iremos retomar o assunto dos efeitos quânticos do campo gravitacional, revisando com maiores detalhes técnicos e profundidade alguns dos conceitos que serão importantes para o desenvolvimento do texto.

Como mencionado anteriormente, as singularidades presentes nas soluções mais relevantes da Relatividade Geral indicam os limites de aplicação dessa teoria. Por essa razão, elas representam uma motivação importante para estudar efeitos quânticos relacionados ao campo gravitacional, que podem ser responsáveis por fazer a teoria ser livre de

²O palavra “vácuo” é um jargão comumente usado na teoria semiclássica para separar os termos que são puramente gravitacionais dos termos referentes aos campos de matéria.

singularidades. Na Cosmologia, por exemplo, sabemos que isso realmente acontece, uma vez que dentro da versão completa não-local, baseada nos efeitos quânticos, do modelo de Starobinsky não existe a singularidade inicial [7, 84, 211]. A investigação do mesmo problema no caso dos buracos negros é muito mais difícil (veja, por exemplo, [90, 91]) e até o presente momento não existe nenhuma conclusão definitiva sobre esse assunto. Por outro lado, uma singularidade muito similar à presente na solução de buraco negro, já pode ser encontrada na gravitação Newtoniana, no caso de uma única partícula pontual.

No trabalho recente [29], o problema da singularidade Newtoniana foi abordado em uma teoria da gravitação não-local. O mesmo modelo não-local considerado nessa referência foi sugerido anteriormente por Tomboulis [218] como uma versão de gravitação quântica super-renormalizável livre de fantasmas. A idéia principal nessa teoria é considerar na ação clássica da gravitação, correções não-locais nas derivadas da métrica. Suponha que na versão linearizada dessa teoria que o operador de d'Alembert \square seja modificado e assuma a seguinte forma $a(\square)\square$, onde $a(z)$ é uma função inteira de uma variável complexa z . Dessa maneira, o propagador modificado da teoria que descreve a propagação do gráviton não apresenta nenhum pólo adicional e, conseqüentemente, nenhum grau de liberdade novo é introduzido na teoria, seja ele um fantasma massivo ou não. Para, pelo menos, a versão mais simples da teoria, com a não-localidade expressa na forma de uma exponencial do operador de d'Alembert $\exp(-\square/\mu^2)$, onde μ é um parâmetro novo com dimensão de massa, a teoria Newtoniana é realmente livre da singularidade.

Esse resultado é bastante notável. Pode-se pensar que isso indica que os fatores de forma não-locais com comportamento forte no ultravioleta na forma exponencial são especiais e necessários para o cancelamento da singularidade Newtoniana. Se isso for verdade, significa que existe alguma razão física fundamental para que esse tipo de não-localidade esteja presente na ação gravitacional. Notemos que, os fatores de forma usados na referência [218] por Tomboulis para evitar os fantasmas no espectro da teoria são bastante diferentes das correções semiclássicas de *1-loop* para a ação da gravidade que produzem fatores de forma que possuem, tipicamente, um comportamento assintótico logarítmico no ultravioleta extremo [98]. No capítulo 3 vamos mostrar que as soluções Newtonianas livres de singularidades são possíveis não apenas na teoria não-local na forma exponencial, mas também para o conjunto de modelos locais de gravitação modificada, propostos na referência [12], que são super-renormalizáveis no nível quântico.

Dada uma nova teoria da gravitação modificada, é instrutivo estudar, primeiramente, os efeitos causados por essa mudança na sua versão linearizada. Sendo assim, no capítulo 4 consideramos outros aspectos importantes das soluções linearizadas da gravitação não-local livre de fantasmas. Vamos mostrar que o potencial Newtoniano de uma massa puntiforme, anteriormente obtido pelo método de Fourier nas referências [29, 210, 220], pode ser generalizado para o espaço-tempo D -dimensional de uma maneira direta por meio do uso das técnicas do *heat kernel*. Também demonstramos que para $D \geq 4$ o potencial gravitacional se mantém livre de singularidades. Logo depois, vamos obter o campo gravitacional de uma partícula ultrarrelativística no espaço-tempo D -dimensional. Para isso, realizamos uma mudança de referencial na solução para a massa puntiforme estática e consideramos o limite $v \rightarrow c$ juntamente com o limite de Penrose. Em seguida, estudamos o problema do colapso gravitacional de uma pequena massa M na gravitação não-local livre de fantasmas. Mostramos como a solução do colapso de uma casca esférica nula fina pode ser obtida como uma superposição de uma distribuição esférica de partículas ultrarrelativísticas. Esse método pode ser usado em um espaço-tempo de dimensão arbitrária, contudo, na presente tese consideramos apenas o caso especial do espaço-tempo quadridimensional. Em particular, demonstramos que o invariante de curvatura de Kretschmann ainda se mantém divergente na origem $r = 0$, entretanto, a singularidade é suavizada. Finalizamos esse capítulo estudando o colapso de uma casca esférica nula espessa. Obtemos o seu campo gravitacional por meio de uma superposição de cascas esféricas finas. Demonstramos que o campo gravitacional na teoria não-local livre de fantasmas, para esse modelo de fonte, é regular em todo o espaço-tempo.

Um outro problema relacionado importante, que também será considerado nesse capítulo, é a possibilidade da formação de um miniburaco negro como resultado do colapso gravitacional dessa pequena distribuição de massa M . Para estudar esse problema, podemos considerá-lo inicialmente dentro da versão linearizada da teoria. Se a correspondente solução for regular em todo o espaço-tempo e se sua curvatura for uniformemente pequena, podemos então negligenciar as correções não-lineares de ordem superior. Esperamos que no caso da gravitação não-local livre de fantasmas devido à presença do parâmetro massivo extra μ , responsável por introduzir um *cut-off* ultravioleta nessa teoria, que para uma distribuição de massa M suficientemente pequena o miniburaco negro não seja formado. Em outras palavras, podemos presumir que nesse tipo de teoria exista

um *gap* de massa para a formação do buraco negro. Há algum tempo atrás, foi demonstrado no artigo [91] que a teoria gravitacional com correções quadráticas na curvatura possui essa propriedade. Vamos mostrar que o mesmo acontece na gravitação não-local livre de fantasmas dependendo do valor do parâmetro massivo extra μ , quando comparado com o valor M da massa em colapso.

A Cosmologia é uma área da Física atualmente promissora, caracterizada por um aumento cada vez mais rápido na precisão dos dados observacionais obtidos [154]. Em particular, o universo primordial pode ser considerado como um laboratório para o estudo de fenômenos físicos em uma faixa de energia que não pode ser atualmente atingida nos aceleradores de partículas na Terra. Dessa maneira, o universo primordial representa um importante exemplo de área de aplicação para a abordagem semiclássica da gravitação. Por causa das altas energias típicas dessa época, os efeitos quânticos predominantes no universo jovem são devido aos campos livres de matéria. No caso dos campos conformalmente invariantes, a anomalia conforme quando aplicada ao fundo cosmológico homogêneo e isotrópico levou, nas pesquisas de Starobinsky em 1980, ao primeiro modelo inflacionário conhecido [211] (para maiores detalhes das propriedades do modelo inflacionário de Starobinsky veja as referências [7, 113, 148, 215, 224], e para uma introdução geral nas teorias inflacionárias veja o famoso artigo de Alan Guth [105] e o livro-texto [154]).

A inflação causada pela anomalia conforme pode ser do tipo estável ou instável, dependendo do sinal do coeficiente do termo local R^2 presente na ação efetiva do vácuo [157, 211]. Se esse termo não for introduzido no nível clássico, a condição de estabilidade depende do número de partículas de diferentes spins presentes na teoria quântica dos campos de matéria fundamental. Em particular, para o conteúdo de partículas típico das teorias supersimétricas, a inflação é estável e, para o Modelo Padrão da física de partículas, ela é instável [203]. É possível que devido à supersimetria exista uma inflação que comece estável, iniciando independente do conjunto de dados iniciais escolhidos, e que depois de algum tempo por causa da quebra da supersimetria se torne instável. A razão pela qual a supersimetria possa desaparecer está relacionada com as grandes massas das partículas supersimétricas, o que faz com que essas desacoplem antes da gravidade de acordo com o teorema de Appelquist e Carazzone [10] (para a versão gravitacional desse teorema, veja a referência [98]). Entretanto, para que isso possa ocorrer, a escala de energia da inflação estável deve decrescer. Isso pode acontecer, devido aos efeitos quânticos fracos das massas

dos campos que são responsáveis por uma forma temperada da inflação estável, com um valor decrescente do parâmetro de Hubble [205].

Uma questão interessante é o que acontece com o universo depois que ele deixa o estágio inflacionário estável e entra na fase de inflação instável. Para a escolha dos parâmetros que corresponde ao fim da inflação estável existem diferentes tipos de soluções [211]. A solução desejável é aquela que o universo se aproxima assintoticamente do comportamento de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Nesse caso, a parte não-local da ação induzida pela anomalia conforme se torna rapidamente irrelevante e a evolução do universo é devida, essencialmente, ao termo local R^2 . Além disso, a fim de controlar as perturbações cósmicas após a inflação, o coeficiente desse termo deve ter um valor muito grande, da ordem de 5×10^8 (o cálculo das perturbações cósmicas inhomogêneas nesse modelo pode ser encontrado nas referências [156, 212]). Esse modelo inflacionário instável é corroborado por todas as observações conhecidas, incluindo os dados da sonda Planck [187]. Ao mesmo tempo, existem outras soluções da teoria com correções quânticas em razão da anomalia, que podem ser chamadas de hiper-inflação [81]. Nesse caso a expansão do universo é ainda mais violenta do que a fase inflacionária exponencial e não existe nenhuma interpretação física desse tipo de solução.

No capítulo 5 vamos estudar qual dos dois possíveis cenários de evolução pós-estável acontece. Vamos assumir que a fase instável começa exatamente no ponto onde a fase estável termina. Uma outra questão importante que também vamos abordar nesse capítulo é porque o coeficiente do termo R^2 é tão grande na fase instável. Vamos propor dois mecanismos quânticos que podem fazer com que esse coeficiente assumo o valor necessário no período de transição entre as fases de inflação instável para estável. Mostramos que esse efeito pode ocorrer por causa de um possível acoplamento forte entre os campos quânticos, que pode resultar em um valor grande do parâmetro ξ de interação não-mínima entre o campo escalar com a gravitação.

Nas últimas décadas tem ocorrido um aumento no interesse dos aspectos teóricos e experimentais de teorias em que a simetria de Lorentz e/ou a simetria de inversão de carga paridade tempo (CPT) são violadas por termos especiais presentes na ação dos campos quânticos [134]. Segundo as pesquisas teóricas existentes [131, 133], em razão dos efeitos quânticos na escala de Planck, é possível que o vácuo não seja realmente invariante de Lorentz e que em alguma parte do universo possam existir campos que definam

uma direção preferencial no espaço-tempo. Outros efeitos similares podem também ser responsáveis pelas violações da simetria CPT. O tratamento convencional nessa área é considerar teoricamente a forma mais geral possível para essas violações e depois procurar as suas consequências fenomenológicas. Atualmente, existe uma boa perspectiva de que algum dia seja descoberta essa violação [132] e de que o aperfeiçoamento dos limites superiores sobre esses novos termos consiga gerar benefícios devido a uma melhor compreensão dos limites da Física atual.

Muitos testes experimentais das teorias com quebra das simetrias de Lorentz e/ou CPT têm sido propostos em diferentes áreas da Física como, por exemplo, na física atômica [35, 38], na física do estado sólido [36] e na física de altas energias [37, 128]. Entretanto, um dos aspectos ainda mal explorados dessas teorias são os fenômenos no universo primordial na Cosmologia³, especialmente na inflação e na radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Alguma dessas violações de simetria no universo primordial podem, por exemplo, resultar na anisotropia presente na radiação cósmica de fundo, que foi observada pelo experimento Planck [186]. Desse modo, seria interessante considerar a possibilidade da violação dessas simetrias no universo primordial, pois o papel desses termos pode ter sido bastante diferente nessa época quando comparado com os dias atuais, visto que pode ter acontecido desde aquele tempo, algum processo físico de restauração das simetrias do espaço-tempo. Sendo assim, o universo primordial também pode ser visto como palco de especial interesse, no que diz respeito às teorias com violação das simetrias de Lorentz e/ou CPT.

Uma questão relevante é como definir os possíveis termos gravitacionais que violam essas simetrias, pois existem várias maneiras distintas de se introduzir esses termos no setor de vácuo da teoria. Por exemplo, a ação geral do vácuo da gravidade com torção, que contém uma pequena parte das possíveis estruturas que violam a simetria de Lorentz e/ou CPT, possui 168 termos [54]. Essa grande ambiguidade torna muito difícil de esperar qualquer avanço real nesta área. Entretanto, podemos supor que a forma das correções de vácuo deva ser derivada dos efeitos quânticos dos campos de matéria. Assim, podemos restringir o número de possíveis termos gravitacionais, introduzindo apenas aqueles termos que possam emergir como divergências das teorias dos campos de matéria que tenham a extensão da violação das simetrias de Lorentz e/ou CPT. Nessa situação, as contribuições

³Exceto o bem conhecido trabalho na Bariogênese [25].

mais relevantes são devidas aos fótons, uma vez que todas as outras partículas são massivas e desacoplam da gravidade muito cedo para produzir algum efeito significativo. Logo, a contribuição quântica de vácuo dos fótons é um ponto de partida natural para a formulação dos possíveis termos que violam essas simetrias no setor gravitacional.

O principal objetivo do capítulo 6 dessa tese é o cálculo da contribuição de vácuo dos fótons na eletrodinâmica com quebra da simetria de Lorentz. Como, mesmo na presença dos termos de quebra de simetria, essa teoria possui simetria conforme, o cálculo das divergências de *1-loop* abre o caminho para o estudo da anomalia conforme e, consequentemente, para que possamos calcular a ação efetiva da gravidade induzida pela anomalia conforme. Desse jeito, vamos estender a fórmula da ação efetiva induzida pela anomalia conforme para o caso onde estão presentes os novos parâmetros do fóton que violam a simetria de Lorentz. Em seguida, como um importante exemplo de aplicação, vamos considerar o efeito dos novos termos na inflação causada pela anomalia conforme.

Outro tipo de teoria que tem atraído muita atenção atualmente é a teoria dos Galileons (veja, por exemplo, [66,67,166] e as referências contidas nesses trabalhos). Em resumo, os Galileons são teorias de campo escalar que satisfazem uma generalização da simetria Galileana da mecânica clássica e que possuem, na sua ação, o termo cinético padrão com duas derivadas e termos de interação com muito mais derivadas. Contudo, apesar dessa teoria conter derivadas superiores, por causa de sua simetria, as suas equações de campo são de segunda ordem. Como resultado, o seu propagador no nível de árvore é livre de fantasmas massivos. Por esse motivo, é interessante fazer uma comparação entre o modelo dos Galileons e a gravitação quântica com derivadas superiores [12,214]. O ponto comum entre essas duas teorias é a presença de termos com derivadas superiores.

Uma motivação extra para se considerar os Galileons são devidas as propriedades não convencionais de renormalização que são admitidas para essa teoria [144,165], principalmente quando a mesma é tratada na abordagem efetiva da teoria quântica de campos [49,115,219]. As possíveis divergências no modelo dos Galileons têm muito mais derivadas do que os termos presentes na ação clássica, resultando assim em uma teoria não-renormalizável. Entretanto, como todas as divergências logarítmicas têm muito mais derivadas do que a ação clássica inicial, pode acontecer que o setor de baixas energias dessa teoria possa realmente ser livre de correções quânticas ultravioletas fortes.

O esquema de construção de uma teoria que não é afetada por correções quânticas

é muito atraente. Contudo, ainda existe um importante ponto para se verificar no caso da teoria dos Galileons: se existem divergências com derivadas superiores no setor do seu propagador, essa teoria é então afetada pelas correções quânticas e deve ser modificada para que se possa ter um controle dessa divergência por meio do processo de renormalização. Nesse caso, essa modificação pode ser responsável pela introdução de fantasmas massivos, assim como acontece na gravitação quântica. Desse modo, para se explorar de uma maneira mais completa as propriedades quânticas do modelo dos Galileons, também deve ser realizado o cálculo direto das contribuições quânticas para o seu propagador. Esse cálculo, no nível de *1-loop*, é o objetivo do capítulo 7 dessa tese. Vamos nos restringir nesse capítulo apenas a cálculos no limite do espaço-tempo plano, pois esses são suficientes para responder todas as questões formuladas acima.

Os campos antissimétricos no espaço-tempo quadridimensional são interessantes por diferentes motivos. Uma das partes mais atraentes no seu estudo é que eles surgem de uma maneira natural como campos efetivos depois da compactificação da ação efetiva da teoria de (super)cordas [63, 64, 135, 141, 142]. Por esse motivo, a possível detecção desses campos ou dos seus efeitos quânticos no limite das baixas energias pode ser considerada como uma indicação indireta da existência da teoria de (super)cordas. No caso padrão, esses campos surgem como partes de correspondentes supermultipletos e, ao mesmo tempo, espera-se que nas baixas energias a supersimetria seja quebrada. A abordagem convencional nessa situação é a quebra suave da simetria que está relacionada com a introdução das massas dos campos. Sendo assim, podemos também supor que os campos antissimétricos sejam massivos. Em virtude da compactificação das dimensões extras da teoria das (super)cordas, essas massas podem ser bastante pequenas. Portanto, é interessante também estudar o que acontece no limite sem massa, especialmente no nível quântico. Podemos citar também que os campos tensoriais antissimétricos têm interessantes aplicações na tentativa da construção dos modelos de grande unificação não-mínimos [3], em que a relação entre versões da teoria massiva e da teoria sem massa com quebra de simetria é uma das suas questões principais. Levando esses resultados em consideração, umas das questões interessantes é sobre uma possível descontinuidade dos efeitos quânticos desses campos antissimétricos no limite sem massa.

Os aspectos quânticos dos campos antissimétricos sem massa foram explorados em várias referências como, por exemplo, [41, 78, 106, 107, 125, 168, 195, 196, 209] (para uma con-

sideração similar na abordagem da linha de universo, veja [22, 23]). Em particular, foi encontrada a equivalência quântica entre o campo tensorial de segunda ordem antissimétrico e o campo escalar mínimo (a equivalência clássica foi estabelecida anteriormente no ano de 1960 na referência [123], veja também [122, 158, 169]) e foi mostrado que o campo tensorial de terceira ordem totalmente antissimétrico sem massa não tem graus de liberdade físicos [106] (consulte juntamente as referências [22, 23, 41, 78, 85, 104, 122, 158, 168, 169]). Recentemente, a teoria quântica dos campos antissimétricos massivos foi considerada na referência [40]. Em particular, foi mostrado que os campos antissimétricos de ordem dois e de ordem três são equivalentes aos campos vetorial e escalar massivo, respectivamente. A equivalência se mantém no espaço tempo-curvo, não apenas no nível clássico, mas também na teoria semiclássica, o que significa que as contribuições dos correspondentes campos a ação efetiva do vácuo são idênticas. A prova da referência [40] é bastante geral e foi baseada na regularização ζ . Contudo, é sempre interessante conferir por cálculos diretos esse tipo de prova, de maneira bastante similar ao que foi feito no caso do modelo de Proca no trabalho [44]. Na referência [44] também foi encontrada uma descontinuidade quântica no limite sem massa na teoria de Proca, não apenas na parte local divergente da ação efetiva, mas também nas complicadas contribuições não-locais, típicas das teorias dos campos massivos. Outro aspecto interessante é que a prova da equivalência da referência [40] envolve operações que são potencialmente perigosas no que diz respeito a anomalia multiplicativa não-local, previamente encontrada apenas para o caso de determinantes fermiônicos [95, 178]. Sendo assim, é interessante verificar se ocorre uma situação similar no caso dos campos antissimétricos de segunda e terceira ordem em relação a sua equivalência quântica com vetores massivos e escalares mínimos massivos.

No capítulo 8 vamos então calcular a ação efetiva de *1-loop* nas teorias dos campos tensoriais antissimétricos usando a técnica do *heat kernel* baseado na solução exata dos fatores de forma de Barvinsky, Vilkovisky e Avramidi [15, 19]. Esse tipo de formalismo de cálculo foi previamente aplicado em vários tipos de modelos, incluindo o campo escalar [98], o campo fermiônico e o campo vetorial massivo [99]. A equivalência desse tipo de consideração com o cálculo realizado por meio dos diagramas de Feynman foi demonstrada na referência [98] e mais recentemente no trabalho [58]. Vamos escolher essa abordagem, pois o método baseado no *heat kernel* é muito mais econômico, o que facilita as considerações em teorias tecnicamente mais complicadas, como é o caso dos campos

tensoriais antissimétricos.

Por fim, no capítulo conclusões gerais vamos recapitular os principais resultados apresentados nessa tese. Seguem-se também os apêndices A, B, C, D, E com conteúdos auxiliares e detalhes técnicos importantes para a compreensão do texto.

Gravitação e efeitos quânticos: uma breve revisão

A Relatividade Geral (RG), juntamente com suas extensões diretas, formam a base para a investigação dos efeitos quânticos do campo gravitacional, sejam eles devidos a algum tipo de gravitação quântica ou a uma abordagem semiclássica. Por esse motivo, começamos a presente tese considerando uma breve revisão sobre essas teorias e suas propriedades. Na seção 1.1 recapitulamos as idéias e equações essenciais da RG. Também discutiremos suas principais soluções: a solução de Schwarzschild e as soluções Cosmológicas. O principal objetivo dessa seção é ir fixando notações e terminologias que serão importantes para a continuação do texto. Logo depois, discutimos na seção 1.2 as principais motivações para o estudo dos efeitos quânticos do campo gravitacional e também apresentamos as diferentes maneiras de abordar esse assunto. Na seção 1.3 revisamos a estrutura das divergências na teoria da gravitação quântica. Serão tratadas algumas propriedades quânticas da RG e de suas diferentes modificações com derivadas superiores da métrica. Também abordamos as principais dificuldades encontradas na construção de uma teoria consistente da gravitação quântica. Essa revisão foi feita baseada, principalmente, nas notas de aula dos cursos de Relatividade Geral e teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo ministrados pelo professor Ilya Shapiro no Departamento de Física da UFJF. Também nos baseamos no livro texto [42] e nas revisões dos artigos [80, 192, 200].

1.1 Relatividade Geral

A Relatividade Geral é a teoria atualmente aceita pela comunidade científica que melhor descreve os efeitos relativísticos do campo gravitacional no nível clássico (para uma introdução detalhada ao tema, são deixados como referência ao leitor os livros-texto [136, 149, 226, 227]). Nessa teoria, a geometria do espaço-tempo é caracterizada por uma variedade curva pseudo-Riemanniana, em que as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo descrevem o campo gravitacional.

Os conceitos físicos mais fundamentais que a RG deve satisfazer são os princípios de equivalência e o da covariância geral. De acordo com o princípio de equivalência, o campo gravitacional pode sempre ser eliminado em uma pequena região do espaço-tempo por meio de uma escolha apropriada de um referencial acelerado. Em outras palavras, a força gravitacional é localmente equivalente às forças fictícias de inércia. Já o princípio de covariância geral (ou simplesmente, covariância) afirma que todas as leis da física não dependem do sistema de coordenadas usado. Isso significa que, matematicamente, todas as quantidades físicas devem ser expressas por objetos que se transformam como tensores com respeito às transformações gerais de coordenadas $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$.

A dinâmica do campo gravitacional é obtida através da ação total

$$S_t = S_{EH} + S_m, \quad (1.1)$$

onde

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (1.2)$$

é a ação da gravidade, também conhecida como ação de Einstein-Hilbert, e S_m é a ação que descreve a matéria no espaço-tempo curvo. Na fórmula (1.2), G é a constante gravitacional de Newton, R é o escalar de curvatura de Ricci e Λ é a constante cosmológica.

Através do princípio da mínima ação, obtemos as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

onde

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (1.4)$$

é conhecido como tensor momento energia.

As duas principais soluções das equações de Einstein são a solução do campo gravitacional esfericamente simétrico, que é fundamental para descrever objetos como, por exemplo, planetas, estrelas e buracos negros, e as soluções de métrica homogênea e isotrópica que são usadas para estudar a dinâmica do nosso universo em diferentes etapas de sua evolução. As previsões obtidas por meio dessas soluções estão de acordo com os dados experimentais e observacionais disponíveis [136, 149, 226, 227]. Entretanto, as mesmas não estão livres de problemas e apresentam sérias questões conceituais relacionadas com a existência de singularidades. A seguir, discutiremos em maiores detalhes essas questões.

1.1.1 A solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional de uma distribuição esfericamente simétrica de massa em repouso. No caso de uma massa puntiforme M , posicionada na origem de um sistema de coordenadas esféricas, a solução é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.5)$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica da esfera de raio unitário.

A métrica (1.5) é singular em dois diferentes pontos do espaço-tempo, no raio gravitacional $r_g = 2GM$ e na origem $r = 0$. É bem conhecido que a primeira singularidade depende da escolha de coordenadas [89, 92, 118]. Se usarmos, por exemplo, as coordenadas de tempo avançado v e tempo retardado u , definidas pelas expressões

$$v = t + r + r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|, \quad u = t - r - r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|, \quad (1.6)$$

a métrica se torna regular em $r = r_g$,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du dv - r^2 d\Omega^2. \quad (1.7)$$

Outra observação importante é que apesar desse fato, o primeiro termo de ambas as equações (1.5) e (1.7) se anula no raio gravitacional. Isso indica a existência do horizonte de eventos do buraco negro, uma região do espaço-tempo em que nenhuma partícula pode se propagar para o seu exterior [89, 92, 118].

Já a singularidade em $r = 0$ não pode ser removida por meio de qualquer transformação de coordenadas. Para entendermos esse fato podemos construir quantidades

escalares a partir do tensor de curvatura, que por serem escalares não dependem do sistema de coordenada usado. Como a solução de Schwarzschild é uma solução das equações de Einstein do vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$, o escalar mais simples possível nesse caso é o quadrado do tensor de Riemann (também conhecido como invariante de curvatura de Kretschmann), cujo valor para a métrica (1.5) é dado por

$$R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12 r_g^2}{r^6}. \quad (1.8)$$

O significado real dessa singularidade torna-se claro quando consideramos o processo do colapso gravitacional [89, 92, 136]. Qualitativamente o que ocorre é que uma estrela muito pesada, depois de atingir a etapa final da sua evolução (em que o seu combustível nuclear já foi extinto), começa a diminuir de tamanho devido à atração gravitacional. Esse processo pode prosseguir até que a estrela se torne muito pequena, e se a estrela for suficientemente massiva, a força gravitacional na sua superfície pode superar o limite criado pelas forças nucleares (limite de Chandrasekhar). Nesse caso, o colapso da estrela continua e, eventualmente, a estrela se converte em um buraco negro. O processo de colapso continua ocorrendo dentro do buraco negro, até que chegaríamos a uma situação em que, admitindo que a RG é válida em todas as escalas, teríamos uma verdadeira partícula puntiforme no centro do buraco negro, chegando assim em uma situação em que a densidade de energia e a curvatura são estritamente infinitas e a singularidade em $r = 0$ se torna real.

A singularidade descrita acima é uma situação física não realista. Sendo assim, espera-se que modificações na teoria original da Relatividade Geral sejam responsáveis por evitar a sua formação.

1.1.2 Modelo cosmológico padrão

A Cosmologia estuda a dinâmica do universo em larga escala, em que a força gravitacional é o principal tipo de interação. O modelo cosmológico padrão é baseado nos seguintes princípios [118, 154]:

- (i) princípio cosmológico: o universo em escalas maiores do que 100 Mpc é homogêneo e isotrópico. Este princípio também implica que o universo está em expansão de acordo com a lei de Hubble: a velocidade com que um ponto A se afasta com

respeito de um ponto B é proporcional a sua distância

$$\mathbf{v}_{AB} = H(t) \mathbf{r}_{AB}, \quad (1.9)$$

onde $H(t)$ é conhecido como parâmetro de Hubble e \mathbf{r}_{AB} é o raio vetor que aponta de A para B .

- (ii) postulado de Weyl: a matéria que preenche o universo é descrita através de um fluido perfeito, que é caracterizado pela sua densidade de energia ρ , pressão p e quadri-velocidade u^α . O seu tensor momento energia é dado por

$$T_\mu^\nu = (\rho + p) u_\mu u^\nu - p \delta_\mu^\nu; \quad (1.10)$$

- (iii) a dinâmica gravitacional nas escalas cosmológicas é determinada pela Relatividade Geral.

O espaço-tempo homogêneo e isotrópico é descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître -Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad k = -1, 0, 1, \quad (1.11)$$

onde $a(t) \equiv \exp(\int dt' H(t'))$ é conhecido como fator de escala do universo e os diferentes valores de k definem a curvatura da seção espacial tridimensional do espaço-tempo.

Substituído a métrica (1.11) e o tensor momento energia (1.10) nas equações de Einstein (1.3), chegamos à equação diferencial de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.12)$$

Outra importante relação é a equação de conservação de momento e energia

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.13)$$

A densidade total de energia do universo $\rho = \sum \rho_i$ inclui diferentes tipos de fluidos como, por exemplo, a matéria bariônica, a matéria escura, a radiação e a energia escura. Para uma dada equação de estado do tipo $p = w\rho$, o sistema de equações (1.12) e (1.13) pode ser solucionado. A título de exemplo, no caso de um gás ultrarrelativístico de partículas (radiação) a equação de estado é definida pela relação $p = \rho/3$ e, portanto, a solução para o caso específico em que $k = \Lambda = 0$ é dada por

$$\rho(t) \propto a^{-4}, \quad a(t) \propto t^{1/2}, \quad H(t) = \frac{1}{2t}, \quad R_{\mu\nu}^2 = \frac{3}{4t^4}. \quad (1.14)$$

Já quando a pressão exercida pela matéria pode ser desprezada em relação a sua densidade de energia (poeira), temos $p = 0$ e assim encontramos como solução

$$\rho(t) \propto a^{-3}, \quad a(t) \propto t^{2/3}, \quad H(t) = \frac{2}{3t}, \quad R = \frac{4}{3t^2}. \quad (1.15)$$

Em ambos os casos no início do universo, isto é, no limite em que $t \rightarrow 0$, temos que o fator de escala $a(t) \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, a densidade total de energia tal como a curvatura são infinitas (singularidade inicial). Chegamos assim, mais uma vez, em outro exemplo de singularidade que é independente do sistema de coordenadas usado. Qualitativamente, a situação aqui é análoga ao caso do buraco negro.

1.2 Unidades de Planck e efeitos quânticos

O significado das singularidades na teoria da Relatividade Geral não pode ser negligenciado, pois elas estão presentes nas suas principais soluções, que correspondem à maior parte da sua aplicação. As singularidades demonstram que a RG, assim como outras teorias da Física, também possui um limite de aplicação. Esperamos assim, que perto das singularidades, onde as escalas de distâncias são muito pequenas e a curvatura se torna muito grande, que a gravitação deva ser descrita por uma teoria mais ampla do que a Relatividade Geral. As modificações na dinâmica gravitacional, isto é, na ação (1.2), podem ser inspiradas por razões puramente fenomenológicas, ou, de uma maneira mais natural, devido aos efeitos quânticos do campo gravitacional.

A possível escala em que os efeitos quânticos do campo gravitacional se tornam importantes deve conter três constantes fundamentais, a saber: a velocidade da luz no vácuo c , a constante de Planck \hbar e a constante gravitacional de Newton G . Usando essas três constantes, podemos construir de maneira única quantidades com dimensão de tempo, comprimento e massa, conhecidas como unidades de Planck,

$$\begin{aligned} t_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-5/2} \approx 0,7 \times 10^{-43} \text{ s}, \\ l_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-3/2} \approx 1,4 \times 10^{-33} \text{ cm}, \\ M_P &= G^{-1/2} \hbar^{1/2} c^{1/2} \approx 0,2 \times 10^{-5} \text{ g} \approx 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Podemos supor que a existência das unidades fundamentais de Planck indica a presença de alguma física fundamental nessa escala. Como c , \hbar , e G estão envolvidas, essa física

deve ser uma teoria relativística, quântica e gravitacional ao mesmo tempo. Entretanto, a simples análise dimensional apresentada acima não é, infelizmente, suficiente para responder como essa teoria deve ser. Podemos imaginar diferentes maneiras de se construir uma teoria quântica da gravitação. De fato, como esse ainda é um problema atualmente em aberto, não é difícil encontrar diferentes abordagens na literatura. Contudo, apesar do grande número de diferentes modelos teóricos, a grande maioria das abordagens usadas pode ser classificada em três grupos de idéias distintas, a saber:

- (i) a gravidade e a matéria devem ser quantizadas. Provavelmente, essa é a abordagem mais fundamental, entretanto, não existe certeza absoluta se a métrica deve ser quantizada uma vez que, afinal, ela é diferente de todos os outros campos, sendo uma característica fundamental do espaço-tempo;
- (ii) apenas a matéria deve ser quantizada no fundo curvo clássico (abordagem semiclássica ou teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo). É importante notar que, diferentemente da teoria quântica da métrica, a teoria quântica de campos e o espaço-tempo curvo são noções separadamente bem estabelecidas, que passaram por diferentes testes experimentais. Deste modo, é natural juntar essas duas teorias e estudar qual é a nova Física que surge dessa comunhão;
- (iii) em vez de quantizar a gravidade e/ou a matéria no espaço-tempo curvo, podemos quantizar alguma outra coisa mais fundamental. Um exemplo dessa abordagem é a teoria de (super)cordas. Nessa teoria a quantização é realizada em objetos unidimensionais, conhecidos como cordas, e ambas, matéria e gravidade, são campos induzidos.

Nessa tese vamos nos focar, principalmente, nos efeitos quânticos do campo gravitacional referentes às abordagens (i) e (ii). Por esse motivo, na continuação desse capítulo iremos revisar diferentes tipos de modelos teóricos relacionados com a abordagem (i) e trataremos de algumas de suas propriedades. Discutiremos também quais são as principais dificuldades encontradas na formulação de uma teoria consistente da gravitação quântica. No capítulo 2, iremos revisar alguns resultados importantes da abordagem semiclássica, que serão importantes durante o decorrer do texto.

1.3 Divergências na gravitação quântica

O estudo da estrutura das divergências de uma nova teoria de campos é um passo importante para o aprendizado de suas características quânticas como, por exemplo, as suas propriedades de renormalização. Para que isso seja realizado no caso da teoria quântica do campo gravitacional, o primeiro passo importante é provar que a covariância geral é mantida no nível quântico. De fato isso pode ser feito, até mesmo nos casos em que calibres não-covariantes do tipo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ são usados para métrica de fundo [42, 137, 214, 225]. Além disso, podemos também lembrar que todas as possíveis divergências ultravioletas são expressões locais. Levando esses dois fatos em consideração, o problema em questão se reduz então, às técnicas de contagem de potências dos momentos (*power counting*) para o campo $h_{\mu\nu}$.

O cálculo do grau superficial de divergências D de um diagrama de Feynman pode ser realizado por meio da fórmula geral

$$D + d = \sum_{l_{int}} (4 - r_l) - 4n + 4 + \sum_v K_v \quad (1.17)$$

onde r_l é o inverso da maior potência de momento no propagador, l_{int} é o número de linhas internas do diagrama, n é o seu número de vértices e K_v é o número de derivadas em um dado vértice. No lado esquerdo da equação (1.17) d representa o número de derivadas agindo nas linhas externas do diagrama. As divergências logarítmicas correspondem ao caso particular em que $D = 0$ e então, nesse caso, d indica o número de derivadas da métrica necessárias nos contratermos. Além dessa fórmula, também é útil levar em consideração a relação topológica

$$l_{int} = p + n - 1, \quad (1.18)$$

que relaciona o número de *loops* p de um diagrama, com o seu número de vértices n e de linhas internas l_{int} .

A seguir, vamos aplicar as fórmulas (1.17) e (1.18) em diferentes modelos de gravitação e assim, nos aprofundarmos na discussão de suas propriedades de renormalização.

1.3.1 Relatividade Geral quântica

Para a gravitação quântica baseada apenas na Relatividade Geral com a ação de Einstein-Hilbert (1.2), como a curvatura escalar R possui duas derivadas da métrica, temos $r_l = 2$ e $K_v = (2, 0)$. Os diagramas com $K_v = 0$ são menos divergentes, portanto, por razões de simplicidade, consideramos apenas os vértices com $K_v = 2$. Através da aplicação direta das equações (1.17) e (1.18), chegamos à expressão final para as divergências logarítmicas

$$d = 2 + 2p. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) mostra que o número de derivadas da métrica necessárias nos contra-termos cresce com o número de *loops*.

De acordo com a abordagem perturbativa, toda vez que introduzimos um novo contra-termo é necessário fixar uma condição de renormalização, o que significa que, devemos realizar uma medição no laboratório. Como na fórmula (1.19) o número de contra-termos não é restrito, antes de se fazer uma única predição, é necessário, em princípio, ter uma quantidade infinita de dados experimentais. Isso mostra que a Relatividade Geral quântica é uma teoria do tipo não-renormalizável e, portanto, não tem poder teórico de realizar previsões no nível quântico. Cálculos explícitos das divergências que confirmam esse resultado podem ser encontrados nos trabalhos [71, 72, 101, 116].

1.3.2 Gravitação quântica com derivadas superiores de quarta ordem

Uma possível solução para o problema da renormalização na gravitação é modificar a teoria clássica usada como ponto de partida para construção da teoria quântica. Considere a teoria baseada na ação [214]

$$S = S_{EH} + S_{DS}, \quad (1.20)$$

onde S_{DS} é ação de derivadas superiores com quatro derivadas da métrica

$$S_{DS} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \alpha_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \alpha_2 R_{\alpha\beta}^2 + \alpha_3 R^2 + \alpha_4 \square R \}. \quad (1.21)$$

Nesse caso, a situação muda drasticamente, pois tanto o propagador quanto os vértices da teoria se alteram. Temos agora, $r_l = 4$ e $K_v = (4, 2, 0)$. Dessa maneira, para os diagramas mais divergentes, que correspondem a $K_v = 4$, temos como resultado para a equação (1.17) $d = 4$. Os outros vértices resultam em divergências contendo um número de derivadas da métrica igual a 2 e 0. Conseqüentemente, como as divergências são estruturas covariantes e locais, os possíveis contratermos têm a seguinte estrutura geral

$$\Delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \{c_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + c_2 R_{\alpha\beta}^2 + c_3 R^2 + c_4 \square R + c_5 R + c_6\}, \quad (1.22)$$

onde $c_{1,2,\dots,6}$ são coeficientes divergentes. Devido aos termos presentes na ação clássica possuírem a mesma estrutura, é possível remover essas divergências da teoria quântica por meio do processo de renormalização dos parâmetros presentes na ação clássica. Sendo assim, a gravitação com derivadas superiores é uma teoria do tipo renormalizável.

Contudo, existe um grande preço a se pagar pela renormalizabilidade. A teoria com os termos extras de derivada superior (1.21), possui dois graus de liberdade extras no propagador. Um desses é uma excitação massiva de spin-2, que é independente da escolha de calibre. Na abordagem linearizada da gravitação quântica, podemos separar no propagador de spin-2 o grau de liberdade não-massivo do grau de liberdade massivo [214]

$$G_2^{(2)}(p) \sim \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + m_2^2}, \quad m_2 \propto M_p. \quad (1.23)$$

O sinal negativo no propagador da partícula de massa m_2 significa que ela possui energia cinética negativa. Por esta razão, essa partícula é conhecida como fantasma massivo.

A existência de fantasmas na teoria causa, no nível não-linear, as chamadas instabilidades de Ostrogradski [170, 223]. Essas instabilidades podem ser observadas, por exemplo, no espalhamento quântico entre um gráviton e um fantasma massivo. De maneira qualitativa e simplificada, o que ocorre é que o fantasma pode ganhar cada vez mais energia cinética negativa enquanto que, o gráviton ganha o equivalente em energia cinética positiva. Nesse caso, pode existir uma intensa emissão de grávitons, que destroem as soluções clássicas. A tentativa de remover esse fantasma do espectro físico de partículas leva a violação da unitariedade da matriz S gravitacional [214]. Desse modo, a gravitação quântica com derivadas superiores é renormalizável e não-unitária, enquanto que a versão unitária, baseada na RG, é uma teoria não-renormalizável.

1.3.3 Gravitação quântica super-renormalizável

Podemos introduzir cada vez mais derivadas na ação da gravidade, considerando uma teoria mais geral com um número finito de derivadas da métrica [12]

$$\begin{aligned}
S = S_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \{ & a_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + a_2 R_{\mu\nu}^2 + a_3 R^2 + \dots \\
& + b_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta} + b_2 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + b_3 R \square R + \mathcal{O}(R^3) + \dots \\
& + c_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^k R^{\mu\nu\alpha\beta} + c_2 R_{\mu\nu} \square^k R^{\mu\nu} + c_3 R \square^k R + \dots + \mathcal{O}(R^{k+2}) \}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Para essa teoria, $r_l = 2k + 4$ e $K_v = (0, 2, \dots, 2k + 4)$. Com o uso das equações (1.17) e (1.18), encontramos para os diagramas mais divergentes possíveis, a seguinte fórmula para as divergências logarítmicas

$$d = 4 + 2k(1 - p). \tag{1.25}$$

Para $k \geq 1$ o número de derivadas necessárias nos contratermos diminui com o número de *loops*, isto é, nesse caso a teoria é do tipo super-renormalizável. Já quando $k \geq 3$, apenas as divergências de 1-*loop* estão presente. Isso significa que apesar das contribuições de ordens superiores serem divergentes, elas se tornam finitas depois da renormalização dos subdiagramas de 1-*loop*. Além disso, nesse caso como todas as divergências têm apenas quatro ou menos derivadas da métrica, a maioria dos coeficientes presentes na ação (1.24) não precisam ser renormalizados [12].

Novamente, o preço a se pagar pela super-renormalizabilidade é a presença de fantasmas no espectro de partículas. O propagador da teoria (1.24) contém fantasmas massivos tanto no setor de spin-2 como no de spin-0. No caso em que os pólos no propagador são reais, não-degenerados e ordenados de maneira crescente, isto é, quando as massas dos graus de liberdade extras satisfazem

$$0 < m_{(i)0}^2 < m_{(i)1}^2 < \dots < m_{(i)k}^2, \tag{1.26}$$

$$m_{(i)k} \neq m_{(i)l}, \quad i = 0, 2, \quad k \neq l \tag{1.27}$$

o propagador no setor escalar pode, por exemplo, ser escrito como [12]

$$G_2^{(0)}(p) \sim \frac{A_0}{p^2 + m_{(0)0}^2} + \frac{A_1}{p^2 + m_{(0)1}^2} + \dots + \frac{A_k}{p^2 + m_{(0)k}^2}. \tag{1.28}$$

Os resíduos desse propagador satisfazem a relação $A_j \cdot A_{j+1} < 0$ com $A_0 > 0$. Consequentemente, os coeficientes A_k com k ímpar sempre possuem sinal negativo e representam

um grau de liberdade fantasma, enquanto que as componentes com índice par são sempre partículas não-fantasma. Para a parte tensorial a situação é similar. O propagador dos graus de liberdade massivos de spin-2 tem a seguinte estrutura geral

$$G_2^{(2)}(p) \sim \frac{B_0}{p^2 + m_{(2)0}^2} + \frac{B_1}{p^2 + m_{(2)1}^2} + \cdots + \frac{B_N}{p^2 + m_{(2)k}^2}, \quad (1.29)$$

onde os resíduos satisfazem $B_j \cdot B_{j+1} < 0$ [12]. Uma vez que, nesse caso, $B_0 < 0$, cada termo B_k com índice par tem sinal negativo e representa um fantasma.

Em resumo, para cada valor de k na ação (1.24) é introduzido um novo par de graus de liberdade nessa teoria, sendo que um desses é sempre um fantasma massivo. Pode-se então, concluir que, no geral, a (super-)renormalizabilidade da teoria quântica gravitacional indica a presença de fantasmas.

1.3.4 Gravitação não-local livre de fantasmas

A próxima generalização possível consiste em considerar para a ação da gravidade uma forma não-local, contendo um número infinito de derivadas. Com o intuito de estudar o propagador nesse tipo de teoria, os termos relevantes na ação são aqueles que são de segunda ordem na métrica. Sendo assim, considere

$$S = S_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R F_1(\square) R + R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta} F_3(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}. \quad (1.30)$$

O terceiro termo da equação (1.30), na verdade, não contribui para o estudo do propagador. Por meio das identidades de Bianchi e de integrações por partes, pode-se provar para qualquer N inteiro a existência da seguinte identidade [12]

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^N R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu} - R \square^N R + \mathcal{O}(R^3). \quad (1.31)$$

Dessa maneira, admitindo que as funções $F_{1,2,3}(\square)$ possam ser expandidas em séries de potências no operador \square , vemos que o termo que contém o quadrado do tensor de Riemann é na verdade de terceira ordem. Então, se trocarmos $F_1 \rightarrow F_1 - F_3$ e $F_2 \rightarrow F_2 + 4F_3$, podemos usar sem perda de generalidade para o cálculo do propagador $F_3 = 0$.

Considere agora, o caso particular com as seguintes funções:

$$F_1(\square) = \frac{a(\square) - 1}{\square} \quad \text{e} \quad F_2(\square) = -2F_1(\square). \quad (1.32)$$

Para essa escolha, o propagador completo para o campo gravitacional tem a seguinte forma [31, 218],

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 a(-p^2)} \left[P^{(2)} - \frac{1}{2} P^{(0-s)} \right], \quad (1.33)$$

onde $P^{(2)}$ e $P^{(0-s)}$ são os operadores de projeção de spin (para maiores detalhes a respeito dos projetores, veja as referências [42, 167]). Em particular, se a função $a(\square)$ não tiver zeros, não introduzimos resíduos novos no propagador (1.33). Desse modo, a teoria não inclui novos graus de liberdades e podemos, assim, construir uma teoria da gravitação com derivadas superiores livre de fantasmas no nível de árvore. De acordo com o teorema de Weierstrass, qualquer função inteira no plano complexo pode ser escrita na forma $a(\square) = e^{-\gamma(\square)}$, onde $\gamma(\square)$ é uma função analítica qualquer. Essencialmente, o mesmo exemplo de função inteira foi considerado nas referências [29, 150, 152, 218], a saber

$$a(\square) = \exp\left(-\frac{\square}{\mu^2}\right). \quad (1.34)$$

Na teoria gravitacional não-local baseada na função exponencial (1.34), a fórmula para o *power counting*, equação (1.17), não tem sentido matemático, pois ela tem um resultado indefinido do tipo $\infty - \infty$. Todavia, através da contagem do número de infinitudes introduzidas na forma da exponencial, é possível através da relação topológica (1.18) realizar o estudo da estrutura das divergências nessa teoria. Os detalhes desse processo pode ser encontrado nas referências [150, 152, 217, 218]. Os resultados preliminares são exatamente os mesmos do que na teoria polinomial (1.24) com $k \geq 3$. A teoria é super-renormalizável, as divergências estão presentes apenas no nível de *1-loop* e os contratermos tem apenas zero, dois e quatro derivadas da métrica.

Apesar de os fantasmas massivos não estarem presentes no propagador no nível de árvore (1.33), no nível quântico o propagador completo com todas as correções quânticas, apresenta um número infinito de fantasmas complexos escondidos [199]. Sendo assim, na teoria quântica completa, não é possível também, nesse caso, evitar a presença de estados não-físicos devido às derivadas superiores.

Elementos de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo

Um dos aspectos melhor compreendidos atualmente com respeito aos efeitos quânticos do campo gravitacional é a teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo. Essa, corresponde a uma abordagem semiclássica da gravitação, em que apenas os campos de matéria são quantizados, enquanto que a métrica é tratada apenas como um campo externo clássico. No presente capítulo, nosso principal objetivo é dar uma introdução mais técnica relacionada a essa teoria, com tópicos que serão importantes para o entendimento da tese. Começamos na seção 2.1 introduzindo a noção da ação do vácuo e apresentamos argumentos formais a respeito da necessidade da introdução dos termos com derivadas superiores na ação gravitacional. O motivo exposto é que os termos com quatro derivadas da métrica são necessários para a renormalização da teoria semiclássica. Em seguida, na seção 2.2 consideramos a ação efetiva do vácuo. Na teoria de perturbações a ação efetiva pode ser escrita como a ação clássica mais correções quânticas em potências da constante \hbar . Sendo assim, a ação efetiva representa um dos objetos centrais do nosso estudo. Logo depois, na seção 2.3 discutimos como definir a ação dos campos de matéria no espaço-tempo curvo. Na seção 2.4, abordamos os métodos práticos dos cálculos quânticos das divergências de *1-loop* no fundo geral e consideramos assuntos relacionados como a renormalização e o grupo de renormalização. Damos maior ênfase na técnica de Schwinger-DeWitt, pois esse representa o principal método de cálculo que será usado. Por fim, as seções 2.5, 2.6 e 2.7 tratam de assuntos relacionados a anomalia conforme. Devido à fun-

damental importância desse assunto para a teoria semiclássica (e também para essa tese) essa seção contém maiores detalhes. Novamente, este capítulo de revisão é desenvolvido tendo como base as notas de aula do professor Ilya Shapiro que foram responsáveis pelo artigo de revisão [200].

2.1 Ação do vácuo: a real necessidade das derivadas superiores

Como visto no capítulo anterior, a gravitação quântica é caracterizada por um conflito entre a sua renormalização e unitariedade. Para que a teoria seja renormalizável, é necessária a introdução de termos com derivadas superiores na ação gravitacional. Contudo, esses termos introduzem graus de liberdade não-físicos, responsáveis pela quebra da unitariedade da matriz S gravitacional.

A formulação de uma teoria quântica da gravidade consistente, ainda é um dos maiores desafios existentes na Física teórica. O maior problema nessa área é a falta de evidência experimental a respeito da quantização da métrica. Consequentemente, qualquer modelo de gravitação quântica é, atualmente, baseado apenas em princípios teóricos, sem nenhuma restrição fenomenológica. Sendo assim, a real necessidade das derivadas superiores na ação gravitacional se torna questionável. Será que é possível ignorar esses termos? A resposta para essa pergunta é negativa, pois mesmo quando a métrica não é quantizada, esses termos são fundamentais para que a teoria quântica da matéria seja consistente no espaço-tempo curvo. As teorias de campo da matéria renormalizáveis no espaço-tempo plano perdem essa propriedade no espaço-tempo curvo, se não considerarmos os termos de quarta ordem na ação gravitacional. Vale a pena enfatizar mais uma vez que, apesar de não existirem evidências empíricas da quantização da métrica, a teoria quântica de campos e o espaço-tempo curvo são noções bem estabelecidas que possuem, separadamente, uma ampla verificação experimental. Dessa forma, é natural admitir a consistência simultânea das duas teorias. Para entendermos como os termos quadráticos na curvatura emergem naturalmente na teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo, podemos considerar, mais uma vez, a expansão da métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e os argumentos de *power counting*. Como na abordagem semiclássica a métrica não é quantizada,

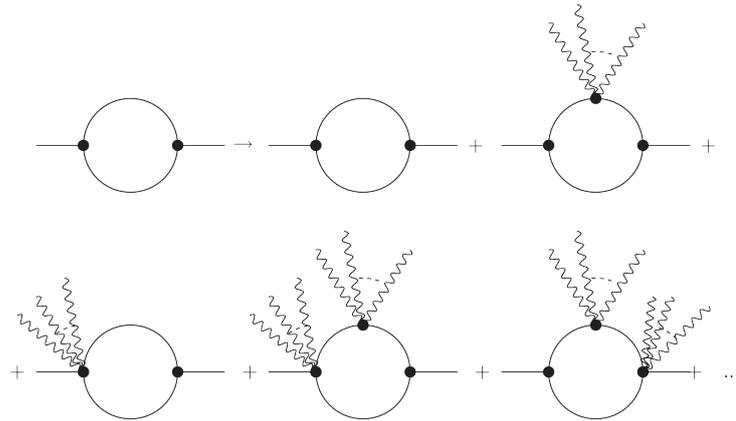


Figura 2.1: As linhas retas correspondem aos campos de matéria, já as linhas onduladas à métrica externa. Um único diagrama no espaço-tempo plano gera um conjunto infinito de diagramas no espaço-tempo curvo. O primeiro diagrama é exatamente o original do espaço-tempo plano e o restante contém linhas externas gravitacionais.

os possíveis diagramas de Feynman possuem apenas *loops* de campos de matéria. Devido à gravitação ser uma teoria do tipo não-polinomial, qualquer diagrama de Feynman no espaço-tempo plano é responsável por um conjunto infinito de diagramas no espaço-tempo curvo, com o número crescente de linhas externas gravitacionais (veja a figura 2.1).

Quando o número de vértices de um dado diagrama aumenta, o grau superficial de divergências pode, de acordo com a fórmula (1.17), apenas diminuir. Portanto, a inserção de novos vértices de interação com campos $h_{\mu\nu}$ não pode elevar o grau superficial de divergências de um diagrama. Como resultado, todos os diagramas com caudas externas gravitacionais têm o mesmo ou um menor índice de divergência do que o diagrama original do espaço-tempo plano. A teoria quântica de campos renormalizável no espaço-tempo plano possui apenas divergências logarítmicas com dimensão de massa quatro. Portanto, mesmo no espaço-tempo curvo estarão presentes apenas divergências logarítmicas com essa dimensão. O simples diagrama de bolha de vácuo no espaço-tempo plano é responsável, no espaço-tempo curvo, pelo diagrama com estrutura geral apresentada na figura 2.2. Esse diagrama é responsável por contribuições puramente gravitacionais e como argumentado anteriormente, as divergências logarítmicas também possuem nesse caso dimensão de massa 4. Como a métrica é um campo adimensional e como as divergências também são nessa situação expressões locais e covariantes [137], a única forma possível para as divergências logarítmicas puramente gravitacionais são os termos quadráticos nos tensores de curvatura.

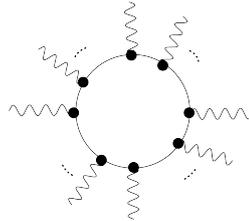


Figura 2.2: Diagrama geral com um *loop* dos campos de matéria com linhas externas gravitacionais. As divergências estão presentes apenas nos diagramas com um e dois vértices gravitacionais.

O número mínimo de termos puramente gravitacionais, necessários para a renormalização da teoria semiclássica, conhecidos como ação do vácuo, podem ser expressos como

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{DS}, \quad (2.1)$$

$$S_{DS} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\}, \quad (2.2)$$

onde na equação (2.2) utilizamos uma base mais útil para os termos quadráticos nos tensores de curvatura, por meio do quadrado do tensor de Weyl C^2 e do termo topológico de Gauss-Bonnet E . A prova formal da suficiência da ação do vácuo (2.1) para renormalizabilidade da teoria semiclássica pode ser encontrada, por exemplo, na referência [42].

2.2 Ação efetiva do vácuo e expansão em loops

Na abordagem semiclássica, apesar da métrica não ser quantizada, a dinâmica da gravidade é modificada devido à quantização dos campos de matéria no espaço-tempo curvo. A ação da gravitação no nível quântico é conhecida como ação efetiva do vácuo $\Gamma[g_{\mu\nu}]$. Esse objeto é definido através da seguinte integral de caminho

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, g_{\mu\nu}]}. \quad (2.3)$$

Nessa fórmula ϕ representa o conjunto de todos os campos de matéria e $\mathcal{D}\phi$ é a medida covariante de integração funcional. A ação clássica $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ inclui a ação de todos os campos de matéria e a ação do vácuo (2.1). Como a gravitação não é quantizada, a integração na expressão (2.3) ocorre somente sobre os campos de matéria, a métrica desempenha aqui o papel de um parâmetro externo.

A ação efetiva do vácuo é um objeto extremamente complicado, assim, na prática, ela é frequentemente calculada em termos da teoria de perturbações. A ação efetiva admite uma expansão no parâmetro pequeno \hbar [42], a saber,

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = S_{vac}[g_{\mu\nu}] + \sum_{p=1}^{\infty} \hbar^p \bar{\Gamma}^{(p)}. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é conhecida como expansão em *loops* da ação efetiva. O parâmetro p define o número de *loops*. A parte mais simples, usualmente mais importante, é a contribuição de 1-*loop*, que tem como fórmula final [42]

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{sTr} \ln \hat{H}, \quad (2.5)$$

onde

$$\hat{H} = \hat{H}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 S[\phi, g_{\mu\nu}]}{\delta\phi(x) \delta\phi(y)} \right|_{\phi=0} \quad (2.6)$$

é chamado de operador bilinear nos campos quânticos. O símbolo sTr denota a operação do supertraço, que leva em consideração a paridade Grassmaniana dos campos em questão. Isto é, o traço funcional de um operador \hat{A}

$$\text{Tr} \hat{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \hat{A}(x, y)|_{x \rightarrow y} \quad (2.7)$$

deve ser tomado com coeficiente +1 para campos bosônicos e -2 para os campos fermiônicos.

Os traços funcionais de operadores diferenciais, que estão tipicamente presentes na ação efetiva de 1-*loop* (2.5), podem ser calculados por diferentes métodos como, por exemplo, através da técnica de Schwinger-DeWitt. Esse formalismo, será discutido na seção 2.4.1 (veja também, o apêndice A).

2.3 Ação clássica dos campos de matéria no espaço-tempo curvo

A próxima questão importante é como definir as ações das teorias que descrevem os campos de matéria (campo escalar, campo vetorial e campo espinorial) no espaço-tempo curvo. Em princípio, isso pode ser realizado de diversas maneiras, entretanto, vamos

nos ater aqui apenas às abordagens mais naturais, intuitivas e simples, conhecidas como métodos da generalização mínima e da generalização não-mínima.

O método da generalização mínima consiste em construir ações que mantenham a mesma forma do espaço-tempo plano e que possuam covariância geral. Sendo assim, a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ deve ser substituída pela métrica geral $g_{\mu\nu}$, a derivada parcial ∂_μ pela derivada covariante ∇_μ e o elemento de volume d^4x por sua versão covariante $d^4x\sqrt{-g}$. Já o método de generalização não-mínima é baseado nos seguintes princípios:

- (i) a ação deve ser local, isto é, a mesma deve depender apenas de um único ponto do espaço-tempo x^μ ;
- (ii) a ação deve ser covariante;
- (iii) as simetrias da ação no espaço-tempo plano devem ser mantidas. Como exemplo, podemos citar a simetria de calibre para o campo vetorial;
- (iv) a ação deve admitir o limite do espaço-tempo plano;
- (v) não devemos introduzir novos termos que possuam parâmetros com dimensão de [massa]⁻¹. É bem conhecido que a introdução desses parâmetros é responsável por teorias dos campos de matéria não-renormalizáveis [184].

Seguindo esses princípios, o resultado da generalização não-mínima da ação do campo escalar livre para o espaço-tempo curvo é dada por

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + m_s^2 \varphi^2 + \xi R \varphi^2 \} . \quad (2.8)$$

Se comparada com a teoria no espaço-tempo plano, a ação (2.8) contém uma nova quantidade adimensional ξ , conhecida como parâmetro não-mínimo. A versão mínima dessa ação pode ser obtida fazendo $\xi = 0$.

Já para os campos livres, vetorial e espinorial, as ações obtidas pelos dois métodos são idênticas. Isso se deve ao fato de que é algebricamente impossível construir termos não-mínimos para essas teorias sem que haja a violação de algum dos cinco princípios citados anteriormente. Para o campo espinorial temos a seguinte ação

$$S_{1/2} = i \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - im_f \bar{\psi} \psi) , \quad (2.9)$$

onde γ^μ é a matriz de Dirac no espaço-tempo curvo. Finalmente, no caso do campo vetorial a sua ação é definida por

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^2, \quad (2.10)$$

onde $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético.

2.4 O cálculo das divergências de 1-loop

A maneira mais direta de realizar cálculos na teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo é através da frequente expansão da métrica em torno do espaço-tempo plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. O resultado é então a teoria quântica de campos usual no espaço-tempo plano, com uma quantidade infinita extra de vértices de interação com o campo $h_{\mu\nu}$. O cálculo das divergências pode ser assim realizado pelos diagramas de Feynman. Apesar de trabalhos iniciais importantes terem sido feitos usando esse método [221, 229], na prática, esse tipo de cálculo não é muito conveniente, pois os passos intermediários não são explicitamente covariantes e temos que, no final, tentar restaurar a expressão covariante para os contratermos. O método da representação local de momentos também pode ser generalizado para o espaço-tempo curvo de uma maneira covariante através do uso das coordenadas normais de Riemann [47, 172] (uma introdução as coordenadas normais de Riemann pode ser encontrada, por exemplo, no livro texto [185]). Nesse caso, para o cálculo das divergências é suficiente considerar apenas os primeiros termos do propagador na expansão dessas coordenadas.

Em particular, outro formalismo muito importante, que será adotado como o principal meio de cálculo durante essa tese, é a técnica de Schwinger-DeWitt [73, 74, 198]. Esse formalismo é uma ferramenta bastante útil para cálculos no nível de *1-loop*, permitindo também que a covariância geral seja mantida em cada estágio de consideração. A seguir, vamos introduzir esse método e revisar o seu conteúdo.

2.4.1 A técnica de Schwinger-DeWitt

A ação efetiva de *1-loop* depende de parâmetros externos através da forma bilinear da ação \hat{H} . Considere sua variação com respeito a esses parâmetros:

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \hat{H}^{-1} \delta\hat{H}. \quad (2.11)$$

O operador \hat{H}^{-1} pode ser representado como

$$\hat{H}^{-1} = i \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}}. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é conhecida como representação do operador \hat{H}^{-1} pela integral sobre o tempo próprio s . Como resultado,

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}} \delta\hat{H} = \delta\left(-\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}\right). \quad (2.13)$$

Logo, além de uma constante aditiva não essencial, a ação efetiva pode ser expressa como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}. \quad (2.14)$$

A quantidade

$$K(s) = e^{-is\hat{H}} \quad (2.15)$$

é conhecida como *heat kernel*. A representação de coordenadas deste operador

$$K(x, x'|s) = \langle x | e^{-is\hat{H}} | x' \rangle \quad (2.16)$$

satisfaz à equação diferencial de Schrödinger,

$$i \frac{\partial}{\partial s} K(x, x'|s) = -\hat{H} K(x, x'|s), \quad (2.17)$$

com a condição inicial

$$K(x, x'|0) = \delta(x - x'). \quad (2.18)$$

O cálculo da ação efetiva é então, reduzido ao cálculo da quantidade $K(x, x'|s)$. Agora, considere que operador \hat{H} possa ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{\Pi} + \hat{\square}. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é conhecida como forma mínima do operador bilinear \hat{H} . Nesse caso, a equação (2.17) pode ser resolvida por uma expansão em séries através do seguinte *ansatz* [73]

$$K(x, x'|s) = K_0(x, x'|s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \quad (2.20)$$

onde

$$\hat{K}_0(x, x'|s) = \frac{1}{(4\pi is)^{n/2}} \mathcal{D}^{1/2}(x, x') \exp \left[-\frac{\sigma(x, x')}{2is} \right] \quad (2.21)$$

é o *heat kernel* do operador de d'Alembert. Na fórmula (2.21), n é a dimensão do espaço-tempo, $\sigma(x, x')$ é a distância geodésica entre os pontos x e x' e

$$\mathcal{D}(x, x') = \det [-\nabla_\mu \nabla_\nu \sigma(x, x')] \quad (2.22)$$

é conhecido como determinante de Van Vleck-Morette. Também é útil introduzir o correspondente biescalar

$$\Delta(x, x') = \sqrt{-g(x)} \mathcal{D}(x, x') \sqrt{-g(x')}. \quad (2.23)$$

Os termos \hat{a}_k são conhecidos como coeficientes de DeWitt. Substituindo a fórmula (2.20) na equação (2.17) encontramos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes $\hat{a}_k(x, x')$

$$\sigma^\mu \nabla_\mu \hat{a}_0 = 0, \quad (2.24)$$

$$(k+1)\hat{a}_{k+1} + \sigma^\mu \nabla_\mu \hat{a}_{k+1} = \Delta^{-1/2} \square (\Delta^{1/2} \hat{a}_k) + \hat{\Pi} \hat{a}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Em particular, os primeiros coeficientes, no limite de coincidência $x = x'$, obtidos a partir dessa fórmula são [73]

$$\hat{a}_0 \Big|_{x \rightarrow x'} = \hat{a}_0(x, x) = \hat{1}, \quad (2.26)$$

$$\hat{a}_1 \Big|_{x \rightarrow x'} = \hat{a}_1(x, x) = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R, \quad (2.27)$$

$$\hat{a}_2 \Big|_{x \rightarrow x'} = \hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P} + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2, \quad (2.28)$$

onde

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{1} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \quad (2.29)$$

é o comutador das derivadas covariantes no espaço dos campos de interesse.

Substituindo a fórmula (2.20) na equação (2.14), podemos encontrar a fórmula final para a ação efetiva de 1-loop

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mathcal{D}^{1/2}(x, x')}{(4\pi is)^{n/2}} e^{-\frac{\sigma(x, x')}{2is}} \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (2.30)$$

O limite ultravioleta da ação efetiva (2.30) corresponde ao limite inferior $s = 0$ na integral de tempo próprio. A regularização dessa integral pode ser realizada de diferentes maneiras, sendo que aqui vamos adotar a regularização dimensional [39, 138]. Um resultado importante é que no espaço-tempo quadridimensional, as divergências presentes na fórmula (2.30) correspondem aos termos em que $k = 0, 1, 2$ (para sua demonstração, veja [21]). O coeficiente \hat{a}_0 corresponde às divergências quárticas e o coeficiente \hat{a}_1 corresponde às divergências quadráticas. Na regularização dimensional essas divergências são nulas. Por fim, as divergências logarítmicas, que definem noções importantes como o grupo de renormalização, as funções β e as anomalias, são proporcionais ao coeficiente \hat{a}_2 . Sendo assim, utilizando o resultado (2.28), depois da realização da integração no tempo próprio s , a parte divergente da ação efetiva (2.30) pode ser expressa como [73]

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = & - \frac{1}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \text{tr} \left\{ \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \square \hat{P} + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde

$$\epsilon = (4\pi)^2 (n - 4) \quad (2.32)$$

é o parâmetro da regularização dimensional. O parâmetro μ tem a dimensão de massa e é introduzido de maneira que as dimensões dos campos sejam as mesmas do que em quatro dimensões.

A última fórmula é uma poderosa ferramenta de cálculo para as divergências em vários modelos de teorias de campo, quando o operador bilinear é mínimo. O uso da expressão (2.31) é uma das maneiras menos complicadas de calcular as divergências de *1-loop* no espaço-tempo curvo, pois o cálculo é nesse caso reduzido à comutação de derivadas covariantes, diferenciação e multiplicação de matrizes. Como exemplo de sua aplicação, nas próximas seções vamos calcular as divergências de *1-loop* para os modelos dos campos, escalar não-mínimo, espinorial e vetorial. Apesar de ser possível escrever na grande maioria das teorias de campos existentes o seu correspondente operador bilinear na forma mínima, lidaremos também durante essa tese com operadores \hat{H} não-mínimos. Nesse caso, é necessário ir além da fórmula (2.31) e usar a versão generalizada da técnica de Schwinger-DeWitt proposta por Barvinsky e Vilkovisky [21]. As principais fórmulas da técnica Schwinger-DeWitt generalizada que serão necessárias para o entendimento do texto podem ser encontradas no apêndice A.

2.4.2 Campo escalar não-mínimo

Para o campo escalar não-mínimo sem interação, descrito pela ação (2.8), o operador bilinear \hat{H} tem a seguinte forma

$$\hat{H} = \square - m_s^2 - \xi R. \quad (2.33)$$

Consequentemente,

$$\hat{\Pi} = -\xi R - m_s^2 \quad (2.34)$$

e o operador \hat{P} , equação (2.27), é

$$\hat{P} = -\tilde{\xi} R - m_s^2, \quad (2.35)$$

onde definimos $\tilde{\xi} = \xi - 1/6$. Também temos que para o campo escalar

$$\hat{S}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.36)$$

Substituído esses valores na equação (2.31), chegamos ao resultado para as divergências de 1-loop

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = & -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \left\{ \frac{1}{2} m_s^4 + m_s^2 \tilde{\xi} R + \frac{1}{120} C^2 - \frac{1}{360} E \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{180} - \frac{1}{6} \tilde{\xi} \right) \square R + \frac{1}{2} \tilde{\xi} R^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.4.3 Campo espinorial

Para os espinores descritos pela ação (2.9), a ação efetiva é dada por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -i \text{Tr} \ln \hat{H}, \quad (2.38)$$

onde

$$\hat{H} = i (\gamma^\mu \nabla_\mu - i m_f). \quad (2.39)$$

Para aplicar a fórmula (2.31), precisamos de um operador que seja quadrático nas suas derivadas, escrito na forma mínima (2.19). Isso pode ser conseguido multiplicando \hat{H} pelo seu complexo conjugado $\hat{H}^* = -i (\gamma^\mu \nabla_\mu + i m_f)$. Na referência [176] existe a prova geral da seguinte identidade

$$\text{Tr} \ln \hat{H} = \text{Tr} \ln \hat{H}^*. \quad (2.40)$$

Sendo assim, temos

$$\text{Tr} \ln \hat{H} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\hat{H} \hat{H}^*) \quad (2.41)$$

e encontramos para a fórmula da ação efetiva

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\hat{H} \hat{H}^*), \quad (2.42)$$

onde

$$\hat{H} \hat{H}^* = \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu + m^2 = \square + m^2 - \frac{1}{4} R. \quad (2.43)$$

Na equação acima usamos a identidade

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu = \square - \frac{1}{4} R. \quad (2.44)$$

O operador (2.43) já nos permite aplicar a fórmula (2.31). Com esse propósito, identificamos os seguintes elementos necessários

$$\hat{\Pi} = m^2 - \frac{1}{4} R, \quad \hat{P} = m^2 - \frac{1}{12} R, \quad \hat{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta. \quad (2.45)$$

Logo, depois de alguma álgebra, encontramos a seguinte expressão para as divergências

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \left\{ -2m_f^4 + \frac{1}{3} m_f^2 R + \frac{1}{20} C^2 - \frac{11}{360} E + \frac{1}{30} \square R \right\}. \quad (2.46)$$

2.4.4 Campo vetorial

Como último exemplo, considere o campo vetorial. A ação (2.10) é invariante perante a seguinte transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \xi. \quad (2.47)$$

Para realizar a quantização funcional das teorias de calibre devemos usar o método de Faddeev-Popov (para a introdução, veja o livro-texto [42] e as suas referências). Nesse formalismo, temos que considerar além da ação clássica (2.10), a ação de fixação de calibre

$$S_{fc} = -\frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} \chi^2, \quad (2.48)$$

onde $\chi = \nabla_\mu A^\mu$ é o parâmetro de fixação de calibre, e a ação dos fantasmas de Faddeev-Popov

$$S_{fan} = \int d^4 x \sqrt{-g} \bar{C} M C. \quad (2.49)$$

Na última fórmula $C(x)$ é o campo fantasma, $\bar{C}(x)$ é o campo anti-fantasma e

$$M = \frac{\delta\chi}{\delta A^\alpha} R^\alpha, \quad (2.50)$$

onde R^α é o gerador da transformação de calibre, definido por $\delta A^\alpha = R^\alpha \xi$. Para a transformação de calibre (2.47), encontramos $M = \square$.

A ação efetiva do vácuo é então, dada por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} - i \text{Tr} \ln \hat{H}_{fan}, \quad (2.51)$$

onde

$$\hat{H} = H_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \square - R_\nu^\mu \quad (2.52)$$

é o operador bilinear da ação do campo A_μ e

$$\hat{H}_{fan} = \square \quad (2.53)$$

é o operador bilinear da ação dos fantasmas. O sinal negativo para a contribuição dos fantasmas na equação (2.51) é devido ao fato dos campos C e \bar{C} serem anticomutativos.

Para o cálculo das divergências, podemos aplicar a fórmula (2.31) em cada termo da equação (2.51). Para o primeiro termo, identificamos

$$\hat{1} = \delta_\nu^\mu, \quad \hat{\Pi} = -R_\nu^\mu, \quad \hat{P} = \frac{1}{6} \delta_\nu^\mu R - R_\nu^\mu, \quad \hat{S}_{\mu\nu} = [S_{\mu\nu}]_\beta^\alpha = R^\alpha_{\cdot\beta\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Já a contribuição dos fantasmas, pode ser encontrada como caso particular da fórmula prévia (2.37), com $m_s = \xi = 0$ e um fator extra multiplicativo de 2. Dessa maneira, encontramos a resposta final

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \left\{ \frac{1}{10} C^2 - \frac{31}{180} E - \frac{1}{10} \square R \right\}. \quad (2.55)$$

2.4.5 Contratermos e renormalização da ação do vácuo

No esquema de subtração mínimo as divergências presentes na ação efetiva do vácuo devem ser removidas através da adição de um contratermo local apropriado na ação do vácuo (2.1) e pela conseguinte renormalização dos seus parâmetros. Dentro da regularização dimensional, o primeiro passo é generalizar a ação clássica no espaço-tempo com dimensão arbitrária n , isto é,

$$S_{vac}^{(n)} = \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \left[-\frac{1}{16\pi G} (R + 2\Lambda) + a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2 \right]. \quad (2.56)$$

O parâmetro massivo μ representa aqui, a escolha da escala de renormalização. A ação clássica renormalizada é então definida por

$$S_R = S_{vac}^{(n)} + \Delta S, \quad (2.57)$$

onde ΔS é um contratermo local, que deve ser escolhido de maneira que a ação efetiva do vácuo renormalizada

$$\Gamma_R = S_{vac}^{(n)} + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S \quad (2.58)$$

seja finita. Sendo assim, a escolha necessária para o contratermo é

$$\Delta S = -\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}. \quad (2.59)$$

Considere agora, uma teoria quântica de campos contendo um número N_s de escalares, N_f de férmions e N_v de vetores. Nesse caso, pelos resultados obtidos anteriormente, equações (2.37), (2.46) e (2.55), encontramos para a fórmula (2.59) o resultado

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{n-4} \int d^n x \sqrt{-g} \{ \beta_\Lambda \Lambda + \beta_E R + \beta_1 C^2 + \beta_2 E + \beta_3 \square R + \beta_4 R^2 \}, \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \beta_\Lambda &= \frac{1}{2} N_s m_s^4 - 2 N_f m_f^4, \\ (4\pi)^2 \beta_E &= N_s m_s^2 \tilde{\xi} + \frac{1}{3} N_f m_f^2, \\ (4\pi)^2 \beta_1 &= \frac{1}{120} N_s + \frac{1}{20} N_f + \frac{1}{10} N_v, \\ (4\pi)^2 \beta_2 &= -\frac{1}{360} N_s - \frac{11}{360} N_f - \frac{31}{180} N_v, \\ (4\pi)^2 \beta_3 &= \frac{1}{180} N_s + \frac{1}{30} N_f - \frac{1}{10} N_v - \frac{1}{6} \tilde{\xi} N_s, \\ (4\pi)^2 \beta_4 &= \frac{1}{2} \tilde{\xi}^2 N_s. \end{aligned} \quad (2.61)$$

A expressão geral para os contratermos, equação (2.60), tem exatamente a forma discutida previamente através de argumentos gerais na seção 2.1. O termo de Einstein-Hilbert, a constante cosmológica e todos com quatro derivadas da métrica são necessários para que a teoria dos campos de matéria seja renormalizável no espaço-tempo curvo.

Seja agora $S^{(0)}[\Lambda^{(0)}, G^{(0)}, a_i^{(0)}]$ a ação nua (*bare action*). A equação para renormalização dos parâmetros da ação do vácuo é definida como

$$S^{(0)}[\Lambda^{(0)}, G^{(0)}, a_i^{(0)}] = S_R[\Lambda, G, a_i] = S_{vac}^{(n)} + \Delta S. \quad (2.62)$$

Os parâmetros Λ , G e $a_{1,2,3,4}$, presentes na ação clássica renormalizada, são valores observáveis que dependem da escala de renormalização μ . Já os parâmetros $\Lambda^{(0)}$, $G^{(0)}$, e $a_{1,2,3,4}^{(0)}$ são parâmetros não-observáveis infinitos que não dependem de μ . Para que a fórmula (2.62) seja satisfeita, os parâmetros devem obedecer à seguinte equação de renormalização

$$-\frac{\Lambda^{(0)}}{8\pi G^{(0)}} = \mu^{n-4} \left[-\frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{\beta_\Lambda}{n-4} \right], \quad -\frac{1}{16\pi G^{(0)}} = \mu^{n-4} \left[-\frac{1}{16\pi G} + \frac{\beta_E}{n-4} \right],$$

$$a_i^{(0)} = \mu^{n-4} \left[a_i^{(0)} + \frac{\beta_i}{n-4} \right]. \quad (2.63)$$

Por fim, para estudar como os parâmetros da ação renormalizada dependem de μ , considere nas equações acima a derivada $\mu d/d\mu$. Depois do processo de regularização ser removido, isto é, no limite em que $n \rightarrow 4$, encontramos as seguintes equações do grupo de renormalização no esquema de subtração mínima

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\Lambda}{8\pi G} \right) \Big|_{n=4} = \beta_\Lambda, \quad \mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{16\pi G} \right) \Big|_{n=4} = \beta_E, \quad \mu \frac{da_i}{d\mu} \Big|_{n=4} = -\beta_i. \quad (2.64)$$

2.5 Simetria conforme local

Considere as teorias livres dos campos de matéria descritas na seção 2.3. Quando esses campos são não-massivos ($m_s = m_f = 0$) e quando o parâmetro não-mínimo do campo escalar vale $\xi = 1/6$, as ações (2.8), (2.9) e (2.10) são invariantes perante a seguinte transformação simultânea da métrica

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{2\sigma(x)} \quad (2.65)$$

e dos campos de matéria

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi e^{-\sigma(x)}, \quad \psi \rightarrow \psi' = \psi^{-3\sigma(x)/2}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu. \quad (2.66)$$

A transformação da métrica (2.65) é conhecida como transformação conforme local e a invariância perante as equações (2.65) e (2.66) é chamada de simetria conforme local. Introduzindo a notação abreviada para os campos de matéria, $\phi_i = (\varphi, \psi, A_\mu)$, as transformações (2.66) podem ser resumidas na fórmula

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i e^{d_i \sigma(x)}, \quad (2.67)$$

onde $d_i = (-1, -3/2, 0)$ é conhecido como peso conforme. Nessa notação, a identidade de Noether correspondente a simetria conforme pode ser escrita como

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{d_i}{\sqrt{-g}} \phi_i \frac{\delta S_m}{\delta \phi_i} = 0. \quad (2.68)$$

Quando as equações de movimento dos campos de matéria são satisfeitas, a identidade (2.68) implica que o traço do tensor momento energia é nulo

$$T^\mu{}_\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (2.69)$$

Apesar do tensor momento energia ser definido através da derivada variacional da ação dos campos de matéria em relação à métrica, é costume (ou melhor dizendo, uma tradição na área) falar que os termos de derivada superiores na ação do vácuo são responsáveis por definir o tensor de momento e energia do vácuo $T_{vac}^{\mu\nu}$. Sendo assim, a parte da ação do vácuo

$$S_{vac.conf.} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R\} \quad (2.70)$$

também satisfaz a condição de nulidade do traço do tensor de momento e energia, equação (2.69). Isso ocorre, pois o termo do quadrado de Weyl $\int \sqrt{-g} C^2$ possui simetria conforme e os termos topológico de Euler $\int \sqrt{-g} E$ e o superficial $\int \sqrt{-g} \square R$ não contribuem para as equações de movimento. Mesmo a ação (2.70) não sendo realmente invariante conforme, como ela satisfaz a identidade (2.69), também é costume dizer que, nesse sentido, a ação (2.70) possui simetria conforme local.

2.6 Anomalia conforme

Quando a teoria clássica possui mais de uma simetria, não existe um esquema de regularização que consiga preservar todas as simetrias da teoria original no nível quântico. Depois que as divergências são subtraídas, a resposta finita para a ação efetiva do vácuo não possui todas as mesmas simetrias do que a ação clássica. Esse fenômeno é conhecido como anomalia quântica [184]. Para as teorias com simetria conforme, para que a covariância geral seja mantida no nível quântico, a simetria conforme é, necessariamente, violada pelas correções quânticas. Nesse caso, a quebra da simetria conforme é conhecida como anomalia conforme ou anomalia do traço do tensor momento energia. Ela representa

o fato de que o traço do tensor momento energia que era nulo, equação (2.69), difere de zero quando consideramos o seu valor esperado no vácuo $\langle T_\mu^\mu \rangle \neq 0$.

A anomalia conforme pode ser calculada de diferentes maneiras, dependendo da escolha do esquema de regularização (para exemplos, veja as referências [11, 13, 28, 53, 70, 76]). No que se segue, vamos adotar como base as referências [11, 13, 70, 76, 201] e usar o processo da regularização dimensional. No nível quântico, a ação clássica do vácuo tem que ser substituída pela ação efetiva do vácuo renormalizada

$$\Gamma_R = S + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S, \quad (2.71)$$

onde S é a ação clássica, $\bar{\Gamma}^{(1)}$ é a correção quântica de 1-loop e ΔS é o contratermo necessário para o cancelamento da parte divergente de $\bar{\Gamma}^{(1)}$. O contratermo ΔS é a única fonte de não-invariância conforme da ação efetiva, porque tanto a ação clássica quanto a contribuição quântica de 1-loop são invariantes [70, 76]. Por consequência, o traço anômalo do tensor de momento e energia é dado por

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_R}{\delta g_{\mu\nu}} \Big|_{n=4} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \Big|_{n=4}. \quad (2.72)$$

Os contratermos para a teoria dos campos de matéria conformalmente invariantes, podem ser encontrados pelo caso particular da equação (2.60) com $m_s = m_f = 0$ e $\xi = 1/6$. Assim,

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{n-4} \int d^n x \sqrt{-g} \{w C^2 + bE + c \square R\}, \quad (2.73)$$

onde

$$w = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{N_0}{120} + \frac{N_{1/2}}{20} + \frac{N_1}{10} \right), \quad (2.74)$$

$$b = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{N_0}{360} + \frac{11 N_{1/2}}{360} + \frac{31 N_1}{180} \right), \quad (2.75)$$

$$c = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{N_0}{180} + \frac{N_{1/2}}{30} - \frac{N_1}{10} \right). \quad (2.76)$$

Utilizando a fórmula (2.73) a equação (2.72) pode ser solucionada. Isso pode ser feito de uma maneira mais simples, se realizarmos a transformação conforme da métrica $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} e^{2\sigma(x)}$ e se usarmos a seguinte identidade [201]

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g'}} e^{-4\sigma} \frac{\delta A[g'_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Big|_{g'_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}, \quad (2.77)$$

válida para qualquer funcional $A = A[g_{\mu\nu}]$. Essa identidade por ser provada por meio da regra da cadeia

$$\frac{\delta}{\delta\sigma} = \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta\sigma} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} = 2 g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (2.78)$$

juntamente com a transformação conforme do determinante da métrica $\sqrt{-g} = \sqrt{-g'} e^{4\sigma}$. A fim de aplicar a identidade (2.77) para solucionar a equação (2.72) precisamos, primeiramente, das transformações conforme de todas as estruturas que estão presentes nos contratermos (2.73). Isso pode ser encontrado, por exemplo, na referência [51]. Para o quadrado do tensor de Weyl temos a seguinte regra de transformação

$$\int d^n x \sqrt{-g} C^2 = \int d^n x \sqrt{-g'} e^{(n-4)\sigma} C'^2. \quad (2.79)$$

Já as regras de transformações dos outros termos presentes na equação (2.73) têm uma estrutura análoga à fórmula (2.79). Essas fórmulas também apresentam o mesmo fator global $e^{(n-4)\sigma}$, contudo, existem novos termos com derivadas de $\sigma(x)$. Como na fórmula (2.77) temos que considerar o limite em que $\sigma \rightarrow 0$, os termos novos (que são proporcionais a σ) não geram nenhuma contribuição para a anomalia conforme. Sendo assim, o cálculo da equação (2.72) é, em sua essência, reduzido ao simples cálculo da derivada da exponencial. Assim, encontramos, finalmente, para a anomalia conforme o resultado

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -(w C^2 + b E + c \square R). \quad (2.80)$$

2.7 Ação efetiva induzida pela anomalia conforme

Em geral, não existe, atualmente, uma maneira de calcular a ação efetiva do vácuo completamente. Para entender o nível de dificuldade em questão, basta lembrar que já no nível de *1-loop* a fórmula para a ação efetiva obtida com o uso da técnica de Schwinger-DeWitt, equação (2.30), contém uma série infinita de termos, que dependem dos tensores de curvatura e de suas derivadas através dos coeficientes \hat{a}_k . Dessa maneira, na prática, o cálculo de toda a ação efetiva do vácuo não parece ser algo realista. Entretanto, para o caso especial das teorias com simetria conforme local isso é, de certa maneira, possível. A anomalia conforme (2.80) representa uma equação diferencial com derivadas variacionais para a ação efetiva do vácuo

$$T = \frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} = w C^2 + b E + c \square R. \quad (2.81)$$

Desse modo, a menos de uma constante de integração (que representa, nesse caso, um funcional desconhecido da métrica), podemos encontrar uma solução para a ação efetiva na aproximação de 1-loop. A solução da equação (2.81) é conhecida como ação efetiva do vácuo induzida pela anomalia conforme.

A fim de solucionar a equação (2.81), usaremos como base as referências [190,201]. Para começar, por questões didáticas, vamos separar o lado direito da equação (2.81) em três partes, a saber, $T_w = \omega C^2$, $T_b = b(E - \frac{2}{3}\square R)$ e $T_c = (c + \frac{2}{3}b)\square R$. Assim, podemos considerar, de maneira separada, qual é a parte da ação efetiva responsável por cada um desses termos.

A parte mais fácil está relacionada com T_c . Como

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}R^2 = -12\square R, \quad (2.82)$$

não é complicado conferir que

$$\Gamma_c = -\frac{3c+2b}{36}\int d^4x\sqrt{-g(x)}R^2(x). \quad (2.83)$$

Já para os outros termos, existem diferentes maneiras de encontrar a solução para o resto da ação efetiva. A maneira mais simples consiste, novamente, em usar a parametrização conforme da métrica $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma}$. Fazendo isso, podemos escrever, através da regra da cadeia (2.78), uma nova equação diferencial equivalente a equação (2.81)

$$\frac{\delta\Gamma_{ind}}{\delta\sigma} = e^{4\sigma}\sqrt{-g'}T|_{g_{\mu\nu}=g'_{\mu\nu}e^{2\sigma}}. \quad (2.84)$$

As regras de transformações que são necessárias para solucionar a equação (2.84), com $T_{w,b} = T_w + T_b$, são [51]:

$$\sqrt{-g}C^2 = \sqrt{-g'}C'^2, \quad (2.85)$$

$$\sqrt{-g}(E - \frac{2}{3}\square R) = \sqrt{-g'}(E' - \frac{2}{3}\square'R' + 4\Delta'_4\sigma). \quad (2.86)$$

Na fórmula (2.86) Δ_4 é um operador diferencial de quarta ordem, conhecido como operador de Paneitz [171,190],

$$\Delta_4 = \square^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\square + \frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu. \quad (2.87)$$

Esse operador tem algumas propriedades importantes. Primeiro, a sua transformação conforme é dada por [51]

$$\sqrt{-g}\Delta_4 = \sqrt{-g'}\Delta'_4. \quad (2.88)$$

Isso significa que esse operador é conformalmente invariante quando o mesmo age sobre escalares adimensionais. Além disso, ele é autoadjunto, isto é,

$$\int d^4x \sqrt{-g} \psi (\Delta_4 \varphi) = \int d^4x \sqrt{-g} (\Delta_4 \psi) \varphi. \quad (2.89)$$

Logo, depois da substituição das fórmulas (2.85) e (2.86) na equação (2.84), a integração em σ se torna direta. Então, encontramos

$$\Gamma_{w,b} = S_c[g'_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g'} \left\{ w \sigma C'^2 + b \sigma \left(E' - \frac{2}{3} \square' R' \right) + 2b \sigma \Delta'_4 \sigma \right\}, \quad (2.90)$$

onde $S_c[g'_{\mu\nu}] = S_c[g_{\mu\nu}]$ é um funcional da métrica conformalmente invariante desconhecido, que serve como uma constante de integração para a equação diferencial (2.84). Por fim, para escrevermos a solução final em forma fechada, em termos apenas da métrica $g'_{\mu\nu}$ e do fator conforme σ , precisamos usar na solução Γ_c , equação (2.83), a seguinte regra de transformação

$$\sqrt{-g} R^2 = \sqrt{-g'} [R' - 6(\nabla' \sigma)^2 - 6\square' \sigma]^2. \quad (2.91)$$

Fazendo isso, encontramos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} = S_c[g'_{\mu\nu}] &+ \int d^4x \sqrt{-g'} \left\{ w \sigma C'^2 + b \sigma \left(E' - \frac{2}{3} \square' R' \right) + 2b \sigma \Delta'_4 \sigma \right. \\ &\left. - \frac{1}{12} (c + \frac{2}{3} b) [R' - 6(\nabla' \sigma)^2 - 6\square' \sigma]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

A ação efetiva induzida pela anomalia conforme escrita na forma da equação (2.92) é bastante útil para aplicações, quando a métrica tem uma estrutura simples, como na Cosmologia. Para a métrica de FRLW (escrita no tempo conforme η , $dt = a(\eta)d\eta$) a ação efetiva (2.92) é realmente uma solução exata. Isso se deve ao fato de toda a dinâmica do fator de escala estar contida no fator conforme da métrica $\sigma(\eta) = \ln a(\eta)$. Por esse motivo, o funcional conforme desconhecido $S_c[g'_{\mu\nu}]$ não depende do fator de escala $a(\eta)$ e, por consequência, não contribui para as equações de movimento.

Apesar da simplicidade da solução (2.92) ela não é covariante, no sentido em que, a mesma, não é escrita na métrica original $g_{\mu\nu}$. Com a finalidade de conseguirmos a solução covariante, podemos novamente usar uma identidade útil. Com o uso da fórmula (2.86) podemos provar que para um funcional arbitrário $A = A[g_{\mu\nu}]$, conformalmente invariante, é válida a seguinte relação

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(y)} \int d^4x \sqrt{-g(x)} A \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) \Big|_{g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} e^{2\sigma}} = 4\sqrt{-g'} \Delta'_4 A = 4\sqrt{-g} \Delta_4 A. \quad (2.93)$$

Com essa equação, não é difícil conferir que o termo na ação efetiva responsável por T_w é dado por

$$\Gamma_w = \frac{w}{4} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y, \quad (2.94)$$

onde $G(x, y)$ é a função de Green do operador de Paneitz

$$\sqrt{-g} \Delta_{4,x} G(x, y) = \delta(x, y). \quad (2.95)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} C^2(x) G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y \Big|_{g_{\mu\nu}=g'_{\mu\nu} e^{2\sigma}} \\ &= 4 \int d^4x \sqrt{-g'(x)} \Delta'_4 G'(x, y) C^2(x) = 4 \sqrt{-g(y)} C^2(y). \end{aligned} \quad (2.96)$$

De maneira análoga, para T_b , temos

$$\Gamma_b = \frac{b}{8} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_y. \quad (2.97)$$

A solução covariante da equação (2.81) é a soma das expressões (2.83), (2.94) e (2.97).

A ação efetiva induzida pela anomalia conforme na sua forma covariante apresentada acima é não-local. Porém, é possível representá-la de uma maneira que é, ao mesmo tempo, covariante e local. Isso pode ser realizado por meio da introdução de dois campos escalares auxiliares extras, φ e ψ [147, 190, 204]. Para construir a representação covariante e local, a ação deve ser apresentada de uma maneira mais simétrica, a saber:

$$\begin{aligned} \Gamma_{w,b} &= \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \left[\frac{w}{4} C^2 - \frac{b}{8} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_y \\ &= -\frac{b}{8} \int d^4x d^4y \sqrt{g(x)g(y)} \left[\left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{w}{b} C^2 \right]_x G(x, y) \left[\left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{w}{b} C^2 \right]_y \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \sqrt{g(x)g(y)} \left(\frac{w}{2\sqrt{-b}} \right)_x G(x, y) \left(\frac{w}{2\sqrt{-b}} \right)_y. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Os dois últimos termos nessa equação são objetos que têm estruturas apropriadas para serem reescritas com o uso de campos auxiliares. Assim, introduzindo os campos auxiliares φ e ψ , chegamos à seguinte expressão final para ação efetiva da gravitação induzida pela anomalia conforme:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} &= S_c[g_{\mu\nu}] - \frac{3c+2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) + \int d^4x \sqrt{-g(x)} \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_4 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi + \varphi \left[k_1 C^2 + k_2 \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) \right] + l_1 \psi C^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde

$$k_1 = -l_1 = -\frac{w}{2\sqrt{-b}} \quad e \quad k_2 = \frac{\sqrt{-b}}{2}. \quad (2.100)$$

Não é difícil conferir que depois da substituição da solução das equações de campo para φ e ψ ,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma_{ind}}{\delta\varphi} = \Delta_4\varphi + k_1 C^2 + k_2 (E - \frac{2}{3}\square R) = 0, \quad (2.101)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma_{ind}}{\delta\psi} = -\Delta_4\psi + l_1 C^2 = 0 \quad (2.102)$$

na ação (2.99), o resultado nada mais é do que a sua forma original não-local. Sendo assim, a versão covariante local é dinamicamente equivalente à versão covariante não-local. Outra observação importante sobre a fórmula (2.99) é que apesar do coeficiente para o termo cinético do campo auxiliar φ ser o oposto do termo cinético para ψ isso não representa um problema, pois ambos os campos são auxiliares e não se propagam independentemente.

A versão covariante local da ação efetiva (2.99) é mais conveniente em relação a não-local em aplicações em que a métrica é mais complicada. O principal motivo é porque a definição completa do problema de valor inicial das soluções na teoria com ação não-local, exige a imposição de condições de contornos para as funções de Green $G(x, y)$ (problema de Cauchy), enquanto que, o mesmo pode ser alcançado, de uma maneira mais simples, na versão local por meio de condições iniciais apropriadas nos campos auxiliares φ e ψ .

Por fim, um último comentário sobre o funcional desconhecido $S_c[g_{\mu\nu}]$ é apropriado. Como dito anteriormente, esse funcional é nulo apenas para métricas conformalmente triviais, como a métrica de FRLW. Contudo, mesmo nos casos mais complicados, como nos buracos negros [8,17] e nas ondas gravitacionais [80,82], os resultados obtidos, desprezando esse funcional, estão de acordo com os resultados obtidos por outros métodos de cálculo [109,113,212]. Sendo assim, apesar desse termo não ser nulo nesses casos, ele pode ser ignorado como uma boa aproximação. A razão para essa equivalência é devido ao resto da ação (2.99) manter toda a informação completa sobre o limite ultravioleta da teoria. Em outras palavras, ela contém todas as correções logarítmicas, e no funcional $S_c[g_{\mu\nu}]$ permanecem apenas os termos de ordem sublogarítmica.

Singularidade Newtoniana nos modelos de gravitação com derivadas superiores

É um importante passo para a melhor compreensão de uma nova teoria modificada da gravitação, seja ela derivada a partir de efeitos quânticos ou uma modificação no nível clássico inspirada por uma teoria quântica, o estudo de suas soluções linearizadas. Em especial, o potencial Newtoniano é de grande interesse, pois ele possui na mecânica clássica um comportamento do tipo $1/r$, o que representa, em $r = 0$, o exemplo mais simples de singularidade gravitacional. Uma singularidade que é bastante similar a que está presente no interior de um buraco negro. Sendo assim, consideramos neste capítulo o problema da singularidade Newtoniana nos modelos de gravitação com derivadas superiores, super-renormalizáveis no nível quântico [12]. Vamos mostrar que em todos os casos das teorias que incluem derivadas superiores com mais de quatro derivadas da métrica, pelo menos quando os pólos no propagador da teoria são reais e simples, o potencial Newtoniano não apresenta singularidade. Isso ocorre por causa do cancelamento da singularidade do tipo $1/r$ com as novas contribuições referentes aos modos massivos extras, escalares e tensoriais.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na seção 3.1 apresentamos o fundo teórico geral do problema do cálculo do potencial Newtoniano modificado nas teorias com derivadas superiores. A seção 3.2 contém os resultados principais, incluindo a prova do comportamento não-singular do potencial na gravitação super-renormalizável. Por fim,

na seção 3.3 argumentamos sobre o papel dos fantasmas no cancelamento da singularidade Newtoniana. Também, discutimos sobre a possível relação existente entre esse resultado com as propriedades da teoria quântica correspondente, como a renormalização e a liberdade assintótica.

3.1 O limite Newtoniano nas teorias de gravitação com derivadas superiores

O limite Newtoniano significa a aproximação de campo gravitacional fraco, estático e não-relativístico. Sendo assim, o primeiro passo é considerar flutuações da métrica em torno do espaço-tempo plano

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Como estamos interessados em equações de campos lineares, precisamos considerar na ação gravitacional apenas os termos que são de segunda ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$.

Com o intuito de calcular o potencial de Newton nas teorias da gravitação super-renormalizável vamos, primeiramente, reescrever a sua ação geral, equação (1.24), em uma notação mais adequada ao problema, a saber,

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -2R + \alpha_0 R_{\mu\nu}^2 + \beta_0 R^2 + \gamma_0 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \dots \right. \\ \left. + \alpha_1 R_{\mu\nu} \square R^{\mu\nu} + \beta_1 R \square R + \gamma_1 R_{\mu\nu\alpha\beta} \square R^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{O}(R^3) + \dots \right. \\ \left. + \alpha_N R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu} + \beta_N R \square^N R + \gamma_N R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^N R^{\mu\nu\alpha\beta} + \dots + \mathcal{O}(R^{N+2}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\kappa = 8\pi G$. Antes de começarmos os cálculos explícitos, podemos analisar quais estruturas presentes na fórmula (3.2) são essenciais para o limite Newtoniano. A primeira observação importante é que devido ao valor das curvaturas se anular no espaço-tempo plano, o termo de ordem zero da expansão das curvaturas em $h_{\mu\nu}$ é nulo. Por esse motivo, todos os objetos com três curvaturas ou mais, podem formar apenas termos da ordem $\mathcal{O}(h^3)$, que não contribuem para o limite Newtoniano. O mesmo vale para todas as estruturas contendo o quadrado do tensor de Riemann, pois como já foi previamente discutido na seção (1.3.4), por meio da identidade (1.31) e por uma redefinição dos parâmetros da ação (3.2) é sempre possível reduzir essas estruturas em termos que são da ordem três

(isso representa, de certa forma, uma generalização do que ocorre nos termos com quatro derivadas da métrica devido à natureza topológica do termo de Gauss-Bonnet). Já para os termos quadráticos na curvatura, a única maneira de construir termos da ordem dois em $h_{\mu\nu}$ é considerar cada curvatura na ordem linear nessa perturbação. Isso também significa que todos os operadores \square presentes na ação (3.2) podem assumir apenas o seu valor na ordem zero. Em resumo, todos os termos relevantes para o limite Newtoniano podem ser escritos de uma maneira abreviada como

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -2R + R_{\mu\nu} F_1(\square) R^{\mu\nu} + R F_2(\square) R \right\}, \quad (3.3)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ e

$$F_1(\square) = \alpha_0 + \alpha_1 \square + \dots + \alpha_N \square^N, \quad (3.4)$$

$$F_2(\square) = \beta_0 + \beta_1 \square + \dots + \beta_N \square^N. \quad (3.5)$$

Por razões de generalidade da consideração, apesar das equações (3.4) e (3.5), vamos manter nesta seção as funções $F_{1,2}(\square)$ como arbitrárias. Neste momento para continuarmos, precisamos das fórmulas explícitas das expansões em $h_{\mu\nu}$ das estruturas contidas na fórmula (3.3). As equações necessárias são dadas por

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} h + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R = & \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h + h^{\alpha\beta} \square h_{\alpha\beta} - 2h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\rho h_\beta^\rho + \partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial_\beta h \\ & - \partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial_\rho h_\beta^\rho - \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\alpha h^{\rho\beta} + \frac{3}{4} \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\rho h \partial^\rho h + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\alpha h_\beta^\rho + \partial_\rho \partial_\beta h_\alpha^\rho - \partial_\alpha \partial_\beta h - \square h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.8)$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Como a curvatura escalar R aparece linearmente em (3.3) no termo de Einstein-Hilbert, precisamos da sua expansão, fórmula (3.7), até a segunda ordem em $h_{\mu\nu}$. Já para o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, como ele está somente presente aos pares é suficiente considerar aqui apenas os termos lineares em $h_{\mu\nu}$. Dessa maneira, utilizando as fórmulas (3.6)–(3.7), encontramos para a parte quadrática da ação (3.3) a fórmula

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & -\frac{1}{4\kappa} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} h_{\mu\nu} a(\square) \square h^{\mu\nu} - h_\nu^\rho a(\square) \partial_\rho \partial_\mu h^{\mu\nu} + h c(\square) \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} h c(\square) \square h + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} [a(\square) - c(\square)] \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde introduzimos as notações novas

$$a(\square) = 1 - \frac{1}{2} F_1(\square) \square, \quad (3.10)$$

$$c(\square) = 1 + 2F_2(\square) \square + \frac{1}{2} F_1(\square) \square. \quad (3.11)$$

Através do princípio da mínima ação, obtemos a partir da ação (3.9) as seguintes equações de campo linearizadas

$$\begin{aligned} & a(\square) (\square h_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho - \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho) + c(\square) (\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} - \eta_{\mu\nu} \square h + \partial_\mu \partial_\nu h) \\ & + (a(\square) - c(\square)) \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\omega h^{\rho\omega} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento energia. O próximo passo é escrever a métrica na forma Newtoniana

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi)dt^2 + (1 - 2\psi)dl^2, \quad (3.13)$$

onde $\varphi(r)$ e $\psi(r)$ são conhecidos como potenciais Newtonianos. Além disso, como estamos interessados em estudar a solução do campo gravitacional devido a uma fonte estática de massa puntiforme, temos que usar para o tensor de momento e energia

$$T_{\mu\nu} = \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0, \quad (3.14)$$

onde $\rho = M \delta^3(\mathbf{r})$ é a densidade de massa. Para encontrarmos os potenciais Newtonianos é suficiente considerar apenas a componente 00 e o traço da equação (3.12), que são, respectivamente, dadas por

$$[a(\Delta) - c(\Delta)] \Delta \varphi + 2c(\Delta) \Delta \psi = \kappa \rho, \quad (3.15)$$

$$[a(\Delta) - 3c(\Delta)] [\Delta \varphi - 2 \Delta \psi] = \kappa \rho, \quad (3.16)$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami.

Para solucionar as equações (3.15) e (3.16) vamos utilizar o método de Fourier. Consideramos a transformada de Fourier dos potenciais

$$\varphi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p), \quad (3.17)$$

$$\psi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ipx} \tilde{\psi}(p). \quad (3.18)$$

Logo, depois da substituição das transformadas (3.17) e (3.18), o sistema de equações diferenciais (3.15) e (3.16) se transforma em um sistema de equações algébricas para $\tilde{\varphi}(p)$ e $\tilde{\psi}(p)$, que pode ser resolvido diretamente. Dessa maneira, utilizando a transformada de Fourier inversa encontramos as seguintes soluções integrais para os potenciais

$$\varphi(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \operatorname{sen}(pr) \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{a(-p^2)} - \frac{1}{3} \frac{1}{[3c(-p^2) - a(-p^2)]/2} \right\}, \quad (3.19)$$

$$\psi(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \operatorname{sen}(pr) \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{a(-p^2)} + \frac{1}{3} \frac{1}{[3c(-p^2) - a(-p^2)]/2} \right\}. \quad (3.20)$$

Na próxima seção, vamos considerar o cálculo das integrais (3.19) e (3.20) para as funções $F_{1,2}(\square)$ polinomiais da gravitação super-renormalizável, definidas nas equações (3.4) e (3.5).

3.2 Solução das integrais dos potenciais Newtonianos para os fatores de forma polinomiais

Para as funções $F_{1,2}(\square)$ polinomiais definidas nas fórmulas (3.4) e (3.5), os termos presentes no denominador do integrando das equações (3.19) e (3.20) podem ser expressos como

$$a(-p^2) = 1 + F_1 p^2 = 1 + \frac{1}{2} [\alpha_0 p^2 - \alpha_1 p^4 + \dots + (-1)^N \alpha_N p^{2N+2}] \equiv P_{2N+2} \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{3c(-p^2) - a(-p^2)}{2} &= 1 - (3F_2 + F_1)p^2 \\ &= 1 - (3\beta_0 + \alpha_0)p^2 + (3\beta_1 + \alpha_1)p^4 + \dots + (-1)^{N+1} (3\beta_N + \alpha_N) p^{2N+2} \\ &\equiv Q_{2N+2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde P_{2N+2} e Q_{2N+2} são polinômios de p da ordem $2N+2$. As raízes desses polinômios têm uma importante interpretação física: elas representam as massas dos graus de liberdade extras presentes nos propagadores de spin-2 e de spin-0 da teoria (3.2) [12] (veja também, as equações (1.28) e (1.29)). Portanto, seja $-m_{(2)N}^2$ e $-m_{(0)N}^2$ o quadrado das raízes das equações $P_{2N+2} = 0$ e $Q_{2N+2} = 0$, respectivamente. Então, de acordo com

o teorema fundamental da álgebra, os polinômios P_{2N+2} e Q_{2N+2} podem ser escritos na seguinte forma fatorada

$$P_{2N+2} = \frac{1}{m_{(2)0}^2 m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2} \times (p^2 + m_{(2)0}^2) \times (p^2 + m_{(2)1}^2) \times \cdots \times (p^2 + m_{(2)N}^2), \quad (3.23)$$

$$Q_{2N+2} = \frac{1}{m_{(0)0}^2 m_{(0)1}^2 \cdots m_{(0)N}^2} \times (p^2 + m_{(0)0}^2) \times (p^2 + m_{(0)1}^2) \times \cdots \times (p^2 + m_{(0)N}^2). \quad (3.24)$$

Sendo assim, por meio das equações (3.23) e (3.24), os potenciais Newtonianos (3.19) e (3.20) podem ser expressos na forma

$$\varphi(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \left[\frac{4}{3} I_{(2)} - \frac{1}{3} I_{(0)} \right], \quad \psi(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \left[\frac{2}{3} I_{(2)} + \frac{1}{3} I_{(0)} \right], \quad (3.25)$$

onde

$$I_{(2)} = \int_0^\infty dp \frac{(m_{(2)0}^2 m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2) \operatorname{sen}(pr)}{p(p^2 + m_{(2)0}^2)(p^2 + m_{(2)1}^2) \cdots (p^2 + m_{(2)N}^2)} \quad (3.26)$$

e

$$I_{(0)} = \int_0^\infty dp \frac{(m_{(0)0}^2 m_{(0)1}^2 \cdots m_{(0)N}^2) \operatorname{sen}(pr)}{p(p^2 + m_{(0)0}^2)(p^2 + m_{(0)1}^2) \cdots (p^2 + m_{(0)N}^2)}. \quad (3.27)$$

Na continuação deste capítulo vamos seguir a referência [12] e supor que as massas $m_{(k)j}$ satisfaçam as relações (1.26) e (1.27), isto é, vamos admitir que as massas são quantidades reais, distintas e que possam ser ordenadas de maneira crescente. Do ponto de vista técnico, isso significa que os pólos no propagador da teoria (3.2) são reais e simples.

O caso particular com $N = 0$ corresponde ao modelo gravitação com derivadas superiores de quarta ordem [214], discutido na seção (1.3.2). Para esse caso, a solução do potencial Newtoniano modificado é bastante conhecida, tendo sido apresentada por Stelle nas referências [213, 214]. A solução para o potencial $\varphi(r)$, por exemplo, é dada por

$$\varphi(r) = -GM \left(\frac{1}{r} - \frac{4}{3} \frac{e^{-m_{(2)}r}}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-m_{(0)}r}}{r} \right), \quad (3.28)$$

onde $m_{(2)} = (\frac{1}{2}\alpha_0)^{-1/2}$ e $m_{(0)} = [-(3\beta_0 + \alpha_0)]^{-1/2}$.

Nas grandes distâncias, os efeitos das correções do tipo Yukawa no potencial (3.28) se tornam irrelevantes e a solução é dominada pelo potencial gravitacional padrão de Newton da mecânica clássica do tipo $1/r$. Entretanto, por outro lado, no regime das pequenas distâncias a situação muda drasticamente. A fim de estudar o comportamento da solução

(3.28) perto da origem, podemos expandir as exponenciais contidas nessa equação em séries de potências

$$-\frac{4}{3} \frac{e^{-m_{(2)}r}}{r} = -\frac{4}{3r} + \frac{4m_{(2)}}{3} + \mathcal{O}(r), \quad \frac{1}{3} \frac{e^{-m_{(0)}r}}{r} = \frac{1}{3r} - \frac{m_{(0)}}{3} + \mathcal{O}(r). \quad (3.29)$$

Dessa maneira, chegamos à seguinte fórmula para o potencial

$$\varphi(r) = -\frac{1}{3} GM [4m_{(2)} - m_{(0)}] + \mathcal{O}(r). \quad (3.30)$$

Quando $r \rightarrow 0$ o potencial Newtoniano modificado tende a um valor constante. Isso significa que, a teoria gravitacional com quatro derivadas da métrica é livre da singularidade Newtoniana. O cancelamento da singularidade ocorreu, porque os coeficientes devido aos dois diferentes potenciais de Yukawa combinaram, perto da origem, exatamente com o valor $-4/3 + 1/3 = -1$, responsável por cancelar o termo original Newtoniano.

Consideremos agora o caso geral. Para calcular as integrais $I_{(2)}$ e $I_{(0)}$ realizamos uma continuação analítica $p \rightarrow z$ ao plano complexo \mathbb{C} . Assim, a integral $I_{(2)}$ pode, por exemplo, ser escrita como

$$I_{(2)} = \frac{W_1 - W_2}{4i}, \quad (3.31)$$

onde

$$W_1 = \oint_{\Gamma} dz \frac{(m_{(2)0}^2 m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{izr}}{z(z^2 + m_{(2)0}^2)(z^2 + m_{(2)1}^2) \cdots (z^2 + m_{(2)N}^2)} \quad (3.32)$$

e

$$W_2 = \oint_{\Gamma} dz \frac{(m_{(2)0}^2 m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{-izr}}{z(z^2 + m_{(2)0}^2)(z^2 + m_{(2)1}^2) \cdots (z^2 + m_{(2)N}^2)}. \quad (3.33)$$

Como as massas $m_{(2)j}$ satisfazem as relações (1.26) e (1.27), as integrais $W_{1,2}$ possuem pólos simples nos pontos do plano complexo $z = 0$ e $z^2 = -m_j^2$, onde $j = 0, 1, \dots, N$. Seja agora Γ um caminho fechado positivamente orientado em \mathbb{C} que passa do lado esquerdo dos pólos na metade inferior do plano $z = -im_{(2)j}$ e do lado direito dos pólos nos pontos $z = 0$ e $z = +im_{(2)j}$, presentes na metade superior do plano complexo. Para a integral W_1 que contém o termo e^{irp} , o contorno Γ deve ser escolhido de tal maneira que ele envolva os pólos em $z = 0$ e $z = +im_{(2)j}$ (veja o desenho do lado esquerdo da

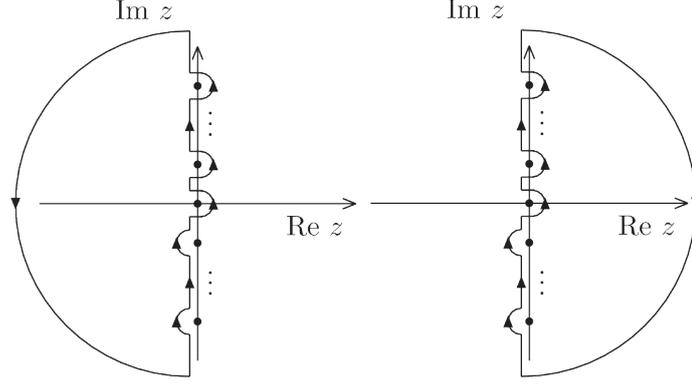


Figura 3.1: Curvas de integração no plano complexo. No gráfico do lado esquerdo os pólos em $z = 0$ e $z = +im_{(2)N}$ estão dentro do contorno. No gráfico do lado direito os pólos em $z = -im_{(2)N}$ estão dentro do contorno.

figura 3.1). Desse modo, utilizando o teorema de resíduos de Cauchy encontramos

$$\begin{aligned}
W_1 &= + 2\pi i \left\{ \text{Res} \left[\frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{izr}}{(z^2 + m_{(2)0}^2) \cdots (z^2 + m_{(2)N}^2)}, z = 0 \right] \right. \\
&\quad + \text{Res} \left[\frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{izr}}{z(z + im_{(2)0}) \cdots (z^2 + m_{(2)N}^2)}, z = +im_{(2)0} \right] \\
&\quad \left. + \cdots + \text{Res} \left[\frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{izr}}{z(z^2 + m_{(2)0}^2) \cdots (z + im_{(2)N})}, z = +im_{(2)N} \right] \right\} \quad (3.34) \\
&= 1 - \frac{(m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{-m_{(2)0}r}}{2(m_{(2)1}^2 - m_{(2)0}^2) \cdots (m_{(2)N}^2 - m_{(2)0}^2)} + \cdots + \\
&\quad - \frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N-1}^2) e^{-m_{(2)N}r}}{2(m_{(2)0}^2 - m_{(2)N}^2) \cdots (m_{(2)N}^2 - m_{(2)N-1}^2)}.
\end{aligned}$$

A integral W_1 foi calculada na direção anti-horária, que definimos como sentido positivo. Para W_2 que contém a exponencial e^{-irp} , o caminho Γ é escolhido de maneira que ele encubra os pólos em $z = -im_{(2)j}$. Para ilustração, veja o gráfico do lado direito da figura 3.1. Essa integral é calculada na direção horária. Logo, encontramos

$$\begin{aligned}
W_2 &= - 2\pi i \left\{ + \text{Res} \left[\frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{-izr}}{z(z - im_{(2)0}) \cdots (z^2 + m_{(2)N}^2)}, z = -im_{(2)0} \right] \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \text{Res} \left[\frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{-izr}}{z(z^2 + m_{(2)0}^2) \cdots (z - im_{(2)N})}, z = -im_{(2)N} \right] \right\} \\
&= \frac{(m_{(2)1}^2 \cdots m_{(2)N}^2) e^{-m_{(2)0}r}}{2(m_{(2)1}^2 - m_{(2)0}^2) \cdots (m_{(2)N}^2 - m_{(2)0}^2)} + \cdots + \\
&\quad + \frac{(m_{(2)0}^2 \cdots m_{(2)N-1}^2) e^{-m_{(2)N}r}}{2(m_{(2)0}^2 - m_{(2)N}^2) \cdots (m_{(2)N}^2 - m_{(2)N-1}^2)}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Agora, usando as respostas (3.34) e (3.35) na equação (3.31), obtemos

$$I_{(2)} = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} e^{-m_{(2)i}r} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Por uma consideração análoga também é possível calcular $I_{(0)}$. O resultado é

$$I_{(0)} = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} e^{-m_{(0)i}r} \right) \right]. \quad (3.37)$$

Finalmente, por meio das equações (3.25), (3.36) e (3.37) encontramos a resposta final para os potenciais Newtonianos modificados

$$\begin{aligned} \varphi(r) = -GM \left\{ \frac{1}{r} - \frac{4}{3} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} \frac{e^{-m_{(2)i}r}}{r} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} \frac{e^{-m_{(0)i}r}}{r} \right\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \psi(r) = -GM \left\{ \frac{1}{r} - \frac{2}{3} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} \frac{e^{-m_{(2)i}r}}{r} \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} \frac{e^{-m_{(0)i}r}}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Podemos agora, estudar os comportamentos dos potenciais (3.38) e (3.39) perto da origem. Quando $r \rightarrow 0$

$$\varphi(r) \rightarrow \frac{1}{r} - \frac{4}{3r} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} + \frac{1}{3r} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} + \text{const} \quad (3.40)$$

e

$$\psi(r) \rightarrow \frac{1}{r} - \frac{2}{3r} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} - \frac{1}{3r} \sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} + \text{const.} \quad (3.41)$$

Logo, como para qualquer conjunto de números a_j é válida a relação [189]

$$\sum_{i=0}^N \prod_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j - a_i} = 1 \quad (3.42)$$

temos que os limites (3.40) e (3.41) tendem a um valor constante. Consequentemente, os potenciais Newtonianos modificados (3.38) e (3.39) são regulares em $r = 0$ e não apresentam singularidades.

Quando comparado com caso da gravitação não-local livre de fantasmas, considerada pelos autores dos trabalhos [29,210,218,220], o resultado mostrado acima mostra que a presença dos termos não-locais expressos na forma da exponencial não são realmente necessários para o cancelamento da singularidade. De fato, é bastante notável que teorias distintas em sua essência, uma local e a outra não-local, manifestem a mesma propriedade. Em particular, esperamos também que o aspecto não-singular dessas teorias deva se manter mesmo com as correções quânticas, sejam elas semiclássicas [98] ou da gravitação quântica. Entretanto, a resposta definitiva para essa questão pode ser obtida somente a partir de uma análise mais detalhada, que deixamos para um trabalho futuro.

O efeito do cancelamento da singularidade que consideramos aqui foi essencialmente linear, envolvendo as contribuições independentes advindas dos setores escalar e tensorial da teoria. Por esse motivo, não é certeza que o mesmo vá acontecer no nível não-linear como, por exemplo, nas soluções de buraco negro. Apesar disso, o impedimento da formação da singularidade no caso dos buracos negros por meio de derivadas superiores é esperado de acontecer, todavia, para verificarmos esse fenômeno temos que ir além do que foi aqui considerado. Podemos citar que alguns aspectos da solução completa não-linear para o caso particular, esfericamente simétrico e estático, na gravitação de quarta ordem já foram considerados no trabalho [213] e, mais recentemente, foram retomados na referência [143]. Nesses trabalhos, através do estudo do comportamento assintótico das soluções das equações gravitacionais modificadas, foi mostrado que existem diferentes famílias de soluções, algumas equivalentes à solução de Schwarzschild da Relatividade Geral e outras não. Uma dessas soluções é regular na origem, entretanto, para determinar qual corresponde à solução Newtoniana correta no infinito, ainda é necessário uma investigação mais detalhada que vá além do estudo simplesmente assintótico, seja ela analítica ou numérica. Nas teorias mais complicadas com um número de derivadas superior a quatro, consideradas aqui, esperamos que ocorra uma situação geral similar no regime não-linear.

Por fim, para ilustrar toda a consideração desenvolvida nessa seção, vamos apresentar aqui a solução exata para as massas dos graus de liberdade extras na gravitação de sexta ordem, correspondente a $N = 1$. Nesse caso, as massas das partículas de spin-2 são dadas por

$$m_{(2)0}^2 = \frac{-\alpha_0 - \sqrt{\alpha_0^2 + 8\alpha_1}}{2\alpha_1}, \quad m_{(2)1}^2 = \frac{-\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + 8\alpha_1}}{2\alpha_1}. \quad (3.43)$$

Para essas equações definirem massas não nulas, distintas e reais, os parâmetros devem satisfazer as condições

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_0^2 + 8\alpha_1 > 0. \quad (3.44)$$

Já para a partícula massiva escalar, definindo $\omega_N \equiv 3\beta_N + \alpha_N$, temos

$$m_{(0)0}^2 = \frac{-\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 4\omega_1}}{2\omega_1}, \quad m_{(0)1}^2 = \frac{-\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 4\omega_1}}{2\omega_1}. \quad (3.45)$$

Para que essas massas sejam reais, diferentes e não nulas precisamos impor

$$\omega_0 < 0, \quad \omega_1 > 0, \quad \omega_0^2 - 4\omega_1 > 0. \quad (3.46)$$

Como α_0 deve ser positivo e α_1 deve ser negativo, essas relações são verdadeiras se e somente se,

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_1 > 0, \quad |\beta_0| > \frac{1}{3}|\alpha_0|, \quad |\beta_1| > \frac{1}{3}|\alpha_1|. \quad (3.47)$$

3.3 Fantasmas e potenciais repulsivos

Como visto na seção anterior, no caso mais simples, com apenas quatro derivadas da métrica, a ausência da singularidade no potencial modificado (3.28) ocorreu devido à presença dos novos termos na forma de potenciais de Yukawa, que contribuem próximo de $r = 0$ com os coeficientes $+4/3$ e $-1/3$, resultando assim no cancelamento do termo original Newtoniano. Um fato de extrema importância na estrutura desse cancelamento da singularidade é o sinal oposto das contribuições da partícula tensorial $m_{(2)}$ quando comparada ao escalar $m_{(0)}$. A parte do potencial que depende da massa do fantasma $m_{(2)}$ é positiva, ao mesmo tempo que, no caso da partícula não-fantasma $m_{(0)}$ o sinal é negativo. Sendo assim, podemos dizer, de maneira simplificada, que o fantasma exerce um potencial gravitacional repulsivo e a partícula não-fantasma um potencial atrativo. Dessa maneira, quando uma partícula de teste se aproxima de $r = 0$ a repulsão gravitacional devido ao fantasma é equilibrada com a atração gravitacional do gráviton e da partícula escalar não-fantasma.

Vamos argumentar aqui que o mesmo ocorre para o caso geral mais complicado da teoria da gravidade super-renormalizável. Para fazermos isso, precisamos primeiramente

estudar o sinal do i -ésimo coeficiente da soma presente no potencial Newtoniano (3.38)

$$c_{i(k)} = \prod_{j \neq i} \frac{m_{(k)j}^2}{m_{(k)j}^2 - m_{(k)i}^2}, \quad k = 0, 2. \quad (3.48)$$

O ponto crucial para essa consideração é a relação existente entre as massas, equações (1.26) e (1.27). Por causa dessa relação, sempre que em $c_{i(k)}$ o índice i for par, teremos ou um produto de termos positivos ou um produto par de números negativos, resultando assim em um sinal positivo para esse coeficiente. Já quando i for ímpar, sempre existirá um produto com um número ímpar de termos negativos e, conseqüentemente, o sinal é negativo. Dessa maneira, com o uso do módulo podemos escrever explicitamente a dependência de sinal desses coeficientes

$$\prod_{j \neq i} \frac{m_{(k)j}^2}{m_{(k)j}^2 - m_{(k)i}^2} = (-1)^i \prod_{j \neq i} \left| \frac{m_{(k)j}^2}{m_{(k)j}^2 - m_{(k)i}^2} \right|, \quad k = 0, 2. \quad (3.49)$$

Considere agora, a i -ésima contribuição do potencial gravitacional devido as partículas massivas escalares

$$\varphi_{(0)i}(r) = -\frac{GM}{3} (-1)^i \prod_{j \neq i} \left| \frac{m_{(0)j}^2}{m_{(0)j}^2 - m_{(0)i}^2} \right| \frac{e^{-m_{(0)i}r}}{r}. \quad (3.50)$$

Como discutido na seção 1.3.3, no caso do propagador de spin-0, fórmula (1.28), sempre que o índice i for ímpar temos uma partícula fantasma [12]. O sinal na equação (3.50) é nesse caso positivo e, assim, o correspondente potencial gravitacional é repulsivo. Ao mesmo tempo, quando i é par, as partículas no propagador (1.28) são não-fantasma e o potencial (3.50) é atrativo. Já no caso da parte tensorial a situação é oposta. O potencial gravitacional para a i -ésima partícula massiva de spin-2 pode ser escrito como

$$\varphi_{(2)i}(r) = +\frac{4GM}{3} (-1)^i \prod_{j \neq i} \left| \frac{m_{(2)j}^2}{m_{(2)j}^2 - m_{(2)i}^2} \right| \frac{e^{-m_{(2)i}r}}{r}. \quad (3.51)$$

Nesse caso, quando i é par temos uma partícula fantasma [12] (veja a equação (1.29)) e o sinal da equação (3.51) é positivo. Temos então um potencial repulsivo. Para i ímpar as partículas são não-fantasma e o potencial é atrativo.

Com a simples consideração apresentada acima, mostramos que os fantasmas sempre induzem um potencial Newtoniano repulsivo. Dessa maneira, na teoria super-renormalizável, assim como no caso do modelo da gravitação de quarta ordem, a singularidade do potencial foi cancelada em virtude do equilíbrio entre a repulsão gravitacional dos

fantasmas com a atração das partículas não-fantasmas perto de $r = 0$. É importante notar que isso somente ocorreu porque para cada partícula fantasma extra de spin-2 temos um escalar não-fantasma correspondente, ou vice-versa. Essa estrutura tem uma consequência importante. Se reformulamos a parte relevante da ação (3.2) na forma

$$S = \frac{1}{4\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -2R + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \Phi_1(\square) C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \Phi_2(\square) R \right\}, \quad (3.52)$$

onde $\Phi_1 = F_1$, $\Phi_2 = F_2 + F_1/3$ e $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Weyl, então, o fator de forma Φ_1 define sozinho o setor tensorial da teoria e o fator de forma Φ_2 o setor escalar. Imagine agora, que as duas funções Φ_1 e Φ_2 sejam polinômios de \square com ordens diferentes. Nesse caso, os pares de partículas fantasmas não-fantasmas serão violados e, consequentemente, não existirá mais o cancelamento da singularidade. O efeito do cancelamento ocorre apenas quando os dois polinômios são da mesma ordem. É interessante notar que isso corresponde, em princípio, a condição de super-renormalizabilidade da teoria quântica [12]. No caso em que os dois polinômios são de ordens diferentes, os propagadores e vértices são não-homogêneos e, nesse caso, é certamente possível existir diagramas de Feynman com grau superficial de divergências crescente nessa teoria, violando desse modo a sua super-renormalizabilidade. Isso significa que existe uma relação direta entre o cancelamento da singularidade Newtoniana com as propriedades quânticas de renormalização. Naturalmente, esta relação é um fato *a posteriori*, que pode ou não ter algum sentido físico profundo. Entretanto, isso pode fornecer alguma dica para as propriedades quânticas de novas teorias da gravitação modificada, que possuam o potencial Newtoniano não-singular.

Comumente, também é utilizado na literatura a conjectura de que a ausência da singularidade Newtoniana na teoria clássica significa a liberdade assintótica da teoria quântica (veja como exemplo as referências [29,91]). Essa associação é, de fato, natural, pois a singularidade Newtoniana é na prática a divergência ultravioleta mais simples por causa da interação. Entretanto, podemos lembrar que a maioria das constantes de acoplamento nas teorias descritas na referência [12] não são renormalizadas. Por exemplo, para o caso com o número de derivadas $N \geq 3$ as funções β de 1-loop são exatas e não se anulam apenas para os termos de ordem zero, dois e quatro. Além disso, essas funções β dependem dos acoplamentos dos setores com mais derivadas (mas não da fixação de calibre) e por esse motivo o seu sinal pode mudar deliberadamente através da escolha desses parâmetros. Como mostramos, isso não afeta o cancelamento da singularidade

Newtoniana, pelo menos no caso em que as massa das excitações de spin-2 e spin-0 correspondem a pólos reais e simples no propagador. Sendo assim, o nosso resultado mostra que a conjectura entre a ausência da singularidade Newtoniana e a liberdade assintótica é incorreta.

Uma proposta para a solução do problema dos fantasmas na gravitação quântica foi sugerida por Hawking na referência [111]. Essa consiste na idéia de modificar o formalismo da teoria quântica de campos de maneira que os fantasmas não sejam tratados como partículas individuais, mas sim como um conjunto único de gráviton fantasma. Contudo, como vimos aqui essa idéia não é suficiente para o cancelamento da singularidade Newtoniana. A consideração apresentada acima mostra que ao invés de tratarmos juntamente o gráviton com os fantasmas, temos que ter um conjunto de gráviton com os pares de partículas fantasma não-fantasma. Isso pode significar que a proposta da referência [111] deva ser modificada, de maneira a incluir também todas os outros graus de liberdades extras do tipo não-fantasmas.

O colapso de uma pequena distribuição esférica de massa na gravitação não-local livre de fantasmas

Continuamos neste capítulo o estudo das soluções das teorias de gravitação modificada na aproximação de campo fraco, considerando, em específico, o problema do colapso gravitacional de uma pequena massa M no modelo da gravitação não-local livre de fantasmas [29, 218]. Vamos nos focar na versão mais simples da teoria, em que a não-localidade é expressa pelo fator de forma $\exp(-\square/\mu^2)$. Esse tipo de análise permite, por exemplo, o estudo de questões interessantes, como se o colapso gravitacional termina em uma singularidade ou se existe a formação de um miniburaco negro¹. Em específico, a procura por modelos de gravitação em que exista a possibilidade da não formação de buracos negros se tornou, recentemente, um assunto bastante relevante desde o trabalho [110] de Stephen Hawking (apesar de um exemplo de teoria gravitacional com essa propriedade ser conhecido desde 1981, depois do trabalho de Frolov e Vilkovisky [91]).

Entretanto, a resolução direta das equações diferenciais dinâmicas do problema se mostrou um problema bastante complicado, mesmo dentro da aproximação linear de campo fraco. A principal dificuldade, quando comparado com o caso estático, foi devido ao operador de d'Alembert não ser positivamente definido, como acontece com o

¹O termo miniburaco negro é comumente usado na literatura para designar um buraco negro com massa tão pequena de maneira que o seu campo gravitacional pode ser descrito, como uma boa aproximação, por equações de campo lineares.

operador de Laplace-Beltrami. Por esse motivo, iremos abordar o problema com o uso do seguinte procedimento: como estamos lidando com equações de campo lineares, a combinação linear de uma solução também é uma solução. Sendo assim, iremos construir a partir da solução do campo gravitacional estático de uma massa pontual a solução do campo gravitacional de uma casca esférica em colapso.

Este capítulo se organiza da seguinte maneira: na seção 4.1 obtemos o potencial Newtoniano na teoria não-local livre de fantasmas. Como o potencial Newtoniano nessa teoria é conhecido desde o trabalho de Tseytlin [220], iremos generalizar o seu resultado para o espaço-tempo de dimensão arbitrária D . Isso é importante, pois permite tratar a questão da singularidade Newtoniana no espaço-tempo D -dimensional. É conhecido, por exemplo, que em outras teorias, como a gravitação de quarta ordem, que a singularidade Newtoniana é cancelada apenas no espaço-tempo quadridimensional [2]. Logo depois, na seção 4.2 realizando uma mudança de referencial na solução previamente obtida e considerando o limite de Penrose de uma fonte pontual impulsionada à velocidade da luz, encontramos, dessa maneira, o campo gravitacional de uma partícula ultrarrelativística, análoga à solução dos gíratons sem spin da Relatividade Geral [5,92]. Na seção 4.3 obtemos a solução do campo gravitacional de uma casca esférica nula com espessura desprezível colapsando por meio de uma superposição esférica de métricas de gíratons. Mostramos que a singularidade gravitacional ainda está presente, no entanto, ela é suavizada quando comparada com a teoria de Einstein. Argumentamos que a presença da singularidade não é um defeito da teoria livre de fantasmas, e sim por causa do uso de uma fonte de campo gravitacional não-física. Para tal, na seção 4.4 discutimos o colapso gravitacional de uma casca esférica nula com alguma espessura e demonstramos que, nesse caso, o invariante de Kretschmann é finito em $r = 0$. Por fim, também abordamos nesta seção a questão da possibilidade da não formação dos miniburacos negros na teoria da gravitação não-local livre de fantasmas. Mostramos que se a massa em colapso M for suficientemente pequena, o miniburaco negro não é formado. Isso significa que na teoria livre de fantasmas existe um *gap* de massa para a formação do miniburaco negro, uma propriedade nova em relação a teoria da Relatividade Geral linearizada, em que independentemente de quão pequena seja a massa em colapso, o resultado é sempre um miburaco negro.

4.1 Potencial Newtoniano na gravitação não-local livre de fantasmas no espaço-tempo com dimensão arbitrária D

O potencial Newtoniano na gravitação não-local livre de fantasmas foi calculado por Tseytlin em 1995 por meio de uma ação efetiva modificada de baixas energias da teoria de cordas [220]. O mesmo resultado foi obtido posteriormente por Siegel [210] e foi recentemente reencontrado nas referências [29, 30, 32]. Os autores desses artigos usaram o método de Fourier para obter o seu resultado. Nesta seção, vamos demonstrar como que o mesmo resultado pode ser obtido de uma maneira mais simples usando a técnica do *heat kernel*. Esse método permite, praticamente sem nenhuma modificação, resolver esse problema no espaço-tempo com dimensão arbitrária. Neste capítulo denotaremos por D o número de dimensões do espaço-tempo. Porém, muitas vezes será mais conveniente usar outro número n , relacionado com D pela equação

$$D = n + 3. \quad (4.1)$$

As equações diferenciais para os potenciais Newtonianos na gravitação não-local livre de fantasmas podem ser encontradas pelo mesmo formalismo geral desenvolvido na seção 3.1. Para as funções $F_{1,2}(\square)$ da gravitação não-local livre de fantasmas, definidas anteriormente nas fórmulas (1.32) e (1.34), as correspondentes funções importantes $a(\square)$ e $c(\square)$, equações (3.10) e (3.11), assumem a forma especial

$$a(\square) = c(\square) = e^{-\square/\mu^2}. \quad (4.2)$$

Dessa maneira, as equações de campo para os potenciais Newtonianos (3.15) e (3.16) são reduzidas à fórmula

$$a(\Delta) \Delta \varphi = a(\Delta) \Delta \psi = 4\pi G \rho. \quad (4.3)$$

Para essa teoria, a menos de uma constante não essencial, os dois potenciais de Newton, φ e ψ , são iguais. No espaço-tempo D -dimensional as equações de campo também podem assumir a mesma forma da fórmula (4.3). Para isso, precisamos introduzir uma nova constante gravitacional [92]

$$G = \frac{2n}{n+1} G^D, \quad (4.4)$$

onde G^4 é a constante usual de Newton no espaço-tempo quadridimensional. A métrica também precisa, nesse caso, ser generalizada da seguinte maneira

$$ds^2 = -(1 + 2\varphi)dt^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\varphi\right)dl^2, \quad dl^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, \dots, D-1. \quad (4.5)$$

A fim de solucionar a equação diferencial (4.3), definimos a função de Green

$$A = e^{s\Delta} \frac{1}{\Delta}, \quad (4.6)$$

onde $s = \mu^{-2}$. Com o uso do *heat kernel* do operador de Laplace-Beltrami

$$K(s) = e^{s\Delta} \quad (4.7)$$

essa função de Green pode ser escrita na forma de uma integral sobre o tempo próprio s , a saber,

$$A = - \int_s^\infty ds K(s). \quad (4.8)$$

A solução do *heat kernel* do Laplaciano pode ser encontrada como um caso particular da equação (2.21). Nas notações desse capítulo, ela tem a seguinte forma:

$$K_n(x, x'|s) = \frac{1}{(4\pi s)^{1+n/2}} e^{-\sigma(x, x')/4s}, \quad (4.9)$$

onde a distância geodésica σ é, nesse caso, o quadrado da distância espacial entre os pontos x e x'

$$\sigma(x, x') = |x - x'|^2. \quad (4.10)$$

Dessa maneira, para uma massa pontual m localizada no ponto $x' = 0$, a solução da equação diferencial (4.3) pode ser expressada como

$$\varphi(x) = 4\pi G m A_n(x, 0) = -4\pi G m \int_s^\infty ds K_n(x, 0|s). \quad (4.11)$$

No caso do espaço tridimensional ($D = 4, n = 1$), temos as seguintes soluções:

$$K_1(x, x'|s) = \frac{1}{(4\pi s)^{3/2}} e^{-\frac{\sigma}{4s}}, \quad (4.12)$$

$$A_1(x, x') = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{s}}\right), \quad (4.13)$$

$$\varphi = -\frac{Gm}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu r}{2}\right), \quad (4.14)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é conhecido como função erro de Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (4.15)$$

A solução (4.14) corretamente reproduz a expressão para o potencial Newtoniano na gravitação não-local livre de fantasmas, obtida anteriormente nas referências [29, 30, 32, 210, 220]. Já no espaço quadridimensional ($D = 5, n = 2$), temos

$$K_2(x, x'|s) = \frac{1}{(4\pi s)^2} e^{-\frac{\sigma}{4s}}, \quad (4.16)$$

$$A_2(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2\lambda} [1 - e^{-\sigma/4s}], \quad (4.17)$$

$$\varphi = -\frac{Gm}{\pi r^2} [1 - \exp(-\mu^2 r^2/4)]. \quad (4.18)$$

A solução para o caso geral D -dimensional pode ser encontrada com o uso da identidade

$$K_{n+2}(x, x'|s) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} K_n(x, x'|s), \quad (4.19)$$

que relaciona o *heat kernel* do operador de Laplace entre espaços-tempo de dimensões diferentes. A relação (4.19) pode ser facilmente conferida através da fórmula (4.9). Dessa maneira, podemos encontrar por recorrência uma expressão geral para $A_n(x, x')$ por meio das soluções de menor índice ímpar, equação (4.13), e de menor índice par, fórmula (4.17). Logo, encontramos

$$A_n(x, x') = -\frac{1}{4\pi^{n+1/2}\sigma^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{\sigma}{4s}\right), \quad n \geq 1. \quad (4.20)$$

Nessa fórmula $\Gamma(a, x)$ é a função Gamma incompleta inferior, definida por

$$\Gamma(a, x) = \int_0^x dt t^{a-1} e^{-t}. \quad (4.21)$$

Com isso, encontramos, finalmente, a solução do potencial Newtoniano de uma massa puntiforme m na gravitação não-local livre de fantasmas no espaço tempo D -dimensional

$$\varphi(r) = -\frac{Gm}{\pi^{n/2} r^n} \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{\mu^2 r^2}{4}\right). \quad (4.22)$$

Para pequenos valores de x a função Gamma incompleta apresenta o seguinte comportamento: $\Gamma(a, x) \approx x^a/a$. Por esse motivo, quando $r \rightarrow 0$

$$\varphi(r) \rightarrow -\frac{Gm\mu^n}{2^{n-1} n \pi^{n/2}}. \quad (4.23)$$

Essa relação mostra que o potencial Newtoniano de uma massa puntiforme na gravitação não-local livre de fantasmas para qualquer dimensão $D \geq 4$ não apresenta singularidade na origem. O resultado (4.23) representa uma característica nova da teoria livre de fantasmas quando comparado, por exemplo, com a gravitação de quarta ordem em que a singularidade Newtoniana é cancelada somente no espaço-tempo quadridimensional [2].

4.2 Gíratons na gravitação não-local livre de fantasmas

Nosso objetivo nessa seção é obter o campo gravitacional de uma partícula ultrarrelativística na teoria da gravitação não-local livre de fantasmas. Para isso, em vez de solucionar as equações gravitacionais modificadas para uma fonte se movendo com uma velocidade próxima à velocidade da luz, usaremos um procedimento bem conhecido na Relatividade Geral (veja, por exemplo, a seção 5.5.4 do livro [92]). Primeiramente, consideraremos uma transformação de Lorentz na solução de fonte estática (4.22) obtendo, dessa maneira, a métrica correspondente a uma massa puntiforme m se movendo com velocidade constante β . Logo depois, tomamos o limite em que $\beta \rightarrow 1$, ao mesmo tempo em que, a energia do objeto

$$M = \gamma m, \quad (4.24)$$

onde

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (4.25)$$

é mantida fixa. Esse procedimento é conhecido como limite de Penrose. Como resultado, obteremos um objeto no espaço-tempo D -dimensional chamado de gíraton [87, 88].

Antes de começarmos os cálculos explícitos, é conveniente fixar as seguintes notações para as coordenadas Cartesianas

$$x^\mu = (\bar{t}, y, \zeta_\perp), \quad (4.26)$$

onde \bar{t} representa o tempo no referencial de repouso, y é a coordenada na direção do movimento da fonte e $\zeta_\perp = (\zeta^2, \dots, \zeta^{D-2})$ são as coordenadas transversais definidas no plano $(D - 2)$ -dimensional ortogonal à direção do movimento. Utilizando essas coordenadas, a métrica (4.5) pode ser escrita como

$$ds^2 = ds_0^2 + dh^2, \quad (4.27)$$

$$ds_0^2 = -d\bar{t}^2 + dy^2 + d\zeta_\perp^2, \quad d\zeta_\perp^2 = \sum_2^{n+1} (d\zeta_i)^2, \quad (4.28)$$

$$dh^2 = -2\varphi \left[d\bar{t}^2 + \frac{1}{n} (dy^2 + d\zeta_\perp^2) \right]. \quad (4.29)$$

Com o intuito de obter a métrica de uma fonte se movendo com velocidade β ao longo do eixo y na direção positiva, realizamos a seguinte transformação de Lorentz

$$y = \gamma(\xi - \beta t) = \frac{\gamma}{2}[(1 - \beta)v - (1 + \beta)u], \quad (4.30)$$

$$\bar{t} = \gamma(t - \beta\xi) = \frac{\gamma}{2}[(1 - \beta)v + (1 + \beta)u], \quad (4.31)$$

onde (t, ξ, ζ_{\perp}) são as coordenadas Cartesianas no referencial inercial em que a fonte está em movimento. Também usamos nessas fórmulas as notações

$$u = t - \xi, \quad v = t + \xi \quad (4.32)$$

para as coordenadas nulas de tempo retardado e tempo avançado, respectivamente. A métrica plana ds_0^2 nas novas coordenadas $x^\mu = (u, v, \zeta_{\perp})$ assume a forma

$$ds_0^2 = -du dv + d\zeta_{\perp}^2. \quad (4.33)$$

No limite $\beta \rightarrow 1$ a métrica (4.33) se mantém a mesma, ao mesmo tempo que, nesse limite

$$y \sim -\gamma u, \quad \bar{t} \sim \gamma u, \quad \sigma(x, 0) \sim \gamma^2 u^2 + \zeta_{\perp}^2, \quad (4.34)$$

$$d\bar{t}^2 + \frac{1}{n}(dy^2 + d\zeta_{\perp}^2) \sim \frac{n+1}{n} \gamma^2 du^2 + \dots, \quad (4.35)$$

onde foram omitidos nessas fórmulas os termos não essenciais de ordem inferior em γ . Dessa maneira, a perturbação da métrica adquire a forma

$$dh^2 = \Phi du^2, \quad \Phi = -\frac{2(n+1)}{n} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\gamma^2 \varphi). \quad (4.36)$$

Para calcular o limite acima, usando a seguinte relação

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{\gamma^2 u^2}{4s}} = \delta(u). \quad (4.37)$$

Também assumimos que a energia do objeto, $M = \gamma m$, seja fixa (limite de Penrose). Assim, obtemos a seguinte expressão para o potencial Φ

$$\Phi = -8\pi GM \frac{n+1}{n} \delta(u) A_{n-1}(\zeta_{\perp}), \quad (4.38)$$

onde

$$A_{n-1}(\zeta_{\perp}) = - \int_s^{\infty} \frac{ds}{(4\pi s)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\zeta_{\perp}^2/4s}. \quad (4.39)$$

A partir de agora, vamos nos restringir, por razões de simplicidade, apenas ao caso particular do espaço-tempo quadridimensional ($n = 1$). Para esse caso, a integral A_0 que

entra na definição (4.38) possui uma divergência infravermelha para grandes valores de s . Sendo assim, para continuarmos vamos regularizar a integral (4.39) introduzindo um parâmetro de corte Λ . Dessa maneira,

$$A_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_s^{\Lambda^2} \frac{ds}{s} e^{-\zeta_{\perp}^2/4s} = \frac{1}{4\pi} [\text{E}_1(1, \zeta_{\perp}^2/4s) - \text{E}_1(1, \zeta_{\perp}^2/4\Lambda^2)] , \quad (4.40)$$

onde nessa fórmula $\text{E}_1(a, z)$ é a função exponencial integral, definida por

$$\text{E}_1(a, z) = \int_1^{\infty} dx x^{-a} e^{-xz} . \quad (4.41)$$

Assumindo que o parâmetro de corte Λ^2 é grande, podemos usar a seguinte expansão da função $\text{E}_1(1, z)$ para pequenos valores de z

$$\text{E}_1(1, z) = -\ln(z) - \gamma + \dots , \quad (4.42)$$

onde $\gamma = 0.5772156649$ é a constante de Euler-Mascheroni. Dessa maneira, podemos escrever

$$A_0 = \frac{1}{4\pi} [\ln(\zeta_{\perp}^2/\Lambda^2) + \gamma + \text{E}_1(1, \zeta_{\perp}^2/4s)] . \quad (4.43)$$

Com isso, obtemos finalmente a resposta para a métrica do gíraton na gravitação não-local livre de fantasmas

$$ds^2 = -dudv + d\zeta_{\perp}^2 + dh^2 , \quad dh^2 = \Phi du^2 , \quad (4.44)$$

$$\Phi = -4GM\delta(u)F(\zeta_{\perp}^2) , \quad (4.45)$$

$$F(\zeta_{\perp}^2) = \ln(\zeta_{\perp}^2/\Lambda^2) + \gamma + \text{E}_1(1, \zeta_{\perp}^2/4s) . \quad (4.46)$$

No limite em que $s \rightarrow 0$, em outras palavras $\mu \rightarrow \infty$, a gravitação não-local livre de fantasmas se reduz a teoria da Relatividade Geral. Nesse caso temos como resposta

$$F(\zeta_{\perp}^2) = \ln(\zeta_{\perp}^2/\Lambda^2) + \gamma . \quad (4.47)$$

Esse resultado reproduz a solução já conhecida de Aichelburg-Sexl [5] (veja também, a referência [89]).

A solução (4.46) contém o *cut-off* arbitrário Λ . Qualquer mudança nesse parâmetro pode ser facilmente absorvida na redefinição da coordenada de tempo avançado v . Portanto, a ambiguidade na escolha de Λ apenas reflete a liberdade na escolha do calibre da teoria. Para entendermos melhor essa afirmação, considere uma métrica escrita na forma

$$ds^2 = -dudv + d\zeta_{\perp}^2 + f(u)du^2 . \quad (4.48)$$

Definindo agora uma nova variável

$$\bar{v} = v - \int du f(u) \quad (4.49)$$

encontramos para métrica (4.48),

$$ds^2 = -dud\bar{v} + d\zeta_{\perp}^2. \quad (4.50)$$

Isso confirma a conclusão acima de que a ambiguidade na escolha do parâmetro de *cut-off* está relacionada com a liberdade da escolha de coordenadas (covariância geral). Sendo assim, na continuação desse capítulo vamos usar essa opção e fixar $\Lambda^2 = 4s$. Para essa escolha

$$F(z) = \ln(z) + \gamma + E_1(1, z), \quad z = \zeta_{\perp}^2/4s \quad (4.51)$$

e a expansão da função $F(z)$ para pequenos valores de z adquire uma forma bastante simples, a saber,

$$F(z) = z - \frac{1}{4}z^2 + O(z^3). \quad (4.52)$$

4.3 O colapso de uma casca esférica nula fina na gravitação não-local livre de fantasmas

Estudaremos agora o campo gravitacional de uma distribuição esférica homogênea de massa M colapsando com velocidade ultrarrelativística na teoria não-local livre de fantasmas. Iniciemos pelo caso mais simples, de uma casca esférica com espessura infinitamente pequena. Esse modelo de fonte é conhecido como casca esférica nula fina. Consideremos também que a massa total dessa distribuição é pequena, de maneira que seja suficiente considerar apenas as equações de campo na aproximação linear.

Novamente, em vez de solucionar as equações correspondentes vamos usar um truque. Como estamos apenas lidando com a teoria linear, é válido o princípio de superposição: a combinação linear de diferentes soluções é novamente uma solução. Dessa maneira, podemos utilizar o resultado obtido na seção anterior e através da soma de soluções de gíratons, construir a métrica resultante do colapso da casca esférica fina.

Considere um conjunto de gíratons passando através de um ponto escolhido do espaço-tempo O . Vamos adotar coordenadas Cartesianas (t, X, Y, Z) no espaço-tempo

de Minkowski e identificamos o ponto O como a origem do sistema de coordenadas $O = (0, 0, 0, 0)$. Definimos por $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ os vetores unitários na direção dos eixos X , Y , e Z , respectivamente. Também introduzimos outro versor, \mathbf{n} , na direção do movimento de um giraton fixo. Usando coordenadas esféricas, esse versor pode ser expresso como

$$\mathbf{n} = \sin \alpha (\cos \beta \mathbf{e}_X + \sin \beta \mathbf{e}_Y) + \cos \alpha \mathbf{e}_Z, \quad (4.53)$$

onde (α, β) são os ângulos polar e azimutal na esfera bidimensional, respectivamente. Seja a um índice enumerando um dado giraton e seja dh_a^2 a perturbação da métrica criada por esse giraton. Logo, a perturbação $\langle dh^2 \rangle$ criada por um conjunto de giratons tem a forma

$$\langle dh^2 \rangle = \sum_a dh_a^2. \quad (4.54)$$

Para construir a fonte de nosso interesse, consideramos o limite contínuo da distribuição discreta (4.54). Também assumimos que essa distribuição é esfericamente simétrica e que todos os giratons têm a mesma energia. Desse modo, podemos escrever

$$\langle dh^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\beta dh_{(\alpha,\beta)}^2. \quad (4.55)$$

O fator extra $(4\pi)^{-1}$ reflete o fato que estamos calculando a média sobre a esfera unitária.

Como resultado do cálculo dessa média, a fonte da métrica $\langle dh^2 \rangle$ é uma casca esférica nula fina localizada nos cones nulos Γ_\pm

$$t = \pm \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4.56)$$

O sinal negativo representa o cone nulo Γ_- com vértice em O , que descreve uma casca esférica nula colapsando. Ao mesmo tempo, o sinal positivo representa o cone nulo Γ_+ responsável pela descrição uma casca esférica nula expandindo. Nas coordenadas do referencial do giraton (t, ξ, ζ_\perp) a solução obtida na seção anterior, fórmula (4.44), fica escrita na forma

$$ds_0^2 = -dt^2 + d\xi^2 + d\zeta_\perp^2, \quad dh^2 = \Phi(dt - d\xi)^2, \quad \Phi = -4GMF(\zeta_\perp^2)\delta(t - \xi), \quad (4.57)$$

onde

$$F(\zeta_\perp^2) = \begin{cases} \ln(\zeta_\perp^2/\Lambda^2), & \text{para a Relatividade Geral;} \\ \text{Ei}(1, \zeta_\perp^2/4s) + \gamma & \text{para a gravitação não-local} \\ + \ln(\zeta_\perp^2/4s), & \text{livre de fantasmas.} \end{cases} \quad (4.58)$$

A projeção da linha de universo de um gíraton no espaço tridimensional, ou seja, a sua trajetória é uma linha reta. A quantidade ξ representa a coordenada ao longo dessa trajetória e a orientação do versor \mathbf{n} determina a direção do movimento. As coordenadas $\zeta_{\perp} = (\zeta_1, \zeta_2)$ estão contidas no plano bidimensional ortogonal a essa direção. No caso da distribuição esfericamente simétrica de gíratons, todas as linhas de universo se interceptam apenas no ponto O do espaço-tempo. Também escolhemos para o parâmetro ξ no ponto O o valor $\xi = 0$. Já para um ponto qualquer do espaço tridimensional $P = (X, Y, Z)$, passam exatamente duas trajetórias de gíratons com direções opostas. Definimos como (α_+, β_+) os ângulos do versor que determina a direção positiva do movimento \mathbf{n}_+ . A coordenada ξ_+ correspondente a esse versor é definida como positiva. No caso da direção oposta, temos o vetor unitário $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+$ com ângulos $(\alpha_- = \pi - \alpha_+, \beta_- = \pi + \beta_+)$. Já a respectiva coordenada $\xi_- = -\xi_+$ é negativa.

É conveniente dividir o cálculos de $\langle dh^2 \rangle$ em duas partes. Primeiro, calculamos a seguinte quantidade

$$\langle T(y_{\perp}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\alpha \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\beta T^{(\alpha, \beta)}(y_{\perp}), \quad (4.59)$$

onde

$$T^{(\alpha, \beta)}(y_{\perp}) = \delta(y_{\perp} - \zeta_{\perp}) \delta(t - \xi) (dt - d\xi)^2. \quad (4.60)$$

A interpretação física desses objetos pode ser encontrada fazendo $y_{\perp} = 0$. Nesse caso,

$$T^{(\alpha, \beta)} = T_{\mu\nu}^{(\alpha, \beta)} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (4.61)$$

representa o tensor momento energia de um gíraton se movendo na direção \mathbf{n} [87, 88]. Também no caso em que $y_{\perp} = 0$, substituindo a fórmula (4.61) na equação (4.59) encontramos

$$M \langle T \rangle = T_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (4.62)$$

que nada mais é do que o tensor momento energia da casca esférica nula construída a partir das linhas de universo dos gíratons.

O próximo passo é usar $\langle T(y_{\perp}) \rangle$ para encontrar a perturbação da métrica $\langle dh^2 \rangle$ devido a casca esférica nula fina de massa M . Isso consegue-se por meio da fórmula

$$\langle dh^2 \rangle = -4GM \int dy_{\perp} F(y_{\perp}^2) \langle T(y_{\perp}) \rangle. \quad (4.63)$$

4.3.1 O cálculo do tensor momento energia

Os detalhes dos cálculos da integral da média sobre a esfera unitária necessária para a consideração de $\langle T(y_\perp) \rangle$ podem ser encontrados no apêndice B dessa tese. Utilizando a fórmula (B.30), encontramos para a relação (4.59) a solução

$$\langle T(y_\perp) \rangle = \frac{1}{4\pi Q\xi} \left[\sin \alpha_+ \delta(t - \xi_+) (dt - d\xi_+)^2 + \sin \alpha_- \delta(t - \xi_-) (dt - d\xi_-)^2 \right]_{y_\perp}. \quad (4.64)$$

Considerando o limite em que $y_\perp \rightarrow 0$, por meio da fórmula (B.26) obtemos para o tensor momento energia a fórmula

$$M\langle T \rangle = T_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{M}{4\pi r^2} [\delta(u) du^2 + \delta(v) dv^2], \quad (4.65)$$

onde $u = t - r$ e $v = t + r$. Essa equação reproduz corretamente a expressão conhecida para o tensor momento energia da casca esférica nula fina. A fórmula (4.65) é uma superposição dos tensores momento energia de uma casca esférica nula de massa M colapsando e expandindo.

4.3.2 O cálculo da métrica média

Nesse ponto já temos todas as expressões matemáticas necessárias para realizar o cálculo da perturbação da métrica média através da fórmula (4.63). No entanto, podemos simplificar ainda mais o problema, pois como a distribuição de gíratons é simetricamente esférica à métrica média correspondente $\langle dh^2 \rangle$ também possui essa propriedade. Por esse motivo, a métrica $\langle dh^2 \rangle$ pode ser escrita com o uso de coordenadas esféricas na forma geral [89]

$$\langle dh^2 \rangle = h_{tt} dt^2 + 2h_{tr} dt dr + h_{rr} dr^2 + H d\Omega^2, \quad (4.66)$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica da esfera de raio unitário e os coeficientes da métrica h_{tt} , h_{tr} , h_{rr} e H são funções apenas das variáveis t e r . As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) estão relacionadas com as coordenadas Cartesianas (X, Y, Z) pelas fórmulas

$$X = r \sin \theta \cos \phi, \quad Y = r \sin \theta \sin \phi, \quad Z = r \cos \theta. \quad (4.67)$$

Devido a simetria esférica da métrica (4.66) é suficiente obter o seu valor apenas nas proximidades de apenas um único ponto espacial. Escolhemos esse ponto como sendo

$$P_x = (X = r, 0, 0), \quad (4.68)$$

onde $X > 0$. Para essa escolha, a métrica (4.66) se reduz à forma

$$\langle dh^2 \rangle = h_{tt} dt^2 + 2h_{tr} dt dX + h_{rr} dX^2 + \frac{H}{r^2} (dY^2 + dZ^2). \quad (4.69)$$

Desse modo, podemos executar os cálculos de $\langle dh^2 \rangle$ para o ponto específico P_X e depois comparando o resultado da fórmulas (4.69) com a equação (4.66), conseguimos encontrar a expressão geral para a perturbação da métrica. No ponto P_X as quantidades presentes na fórmula (4.64) assumem os valores

$$Q_{\pm} = \pm \sqrt{X^2 - y_p^2}, \quad \xi_{\pm} = \pm \sqrt{X^2 - y_{\perp}^2}, \quad (4.70)$$

$$\text{sen } \alpha_{\pm} = \frac{\xi_{\pm}}{Q_{\pm}}, \quad \cos \alpha_{\pm} = -\frac{y_k}{Q_{\pm}}, \quad (4.71)$$

$$\text{sen } \beta_{\pm} = \frac{y_p}{X}, \quad \cos \beta_{\pm} = \frac{Q_{\pm}}{X}, \quad (4.72)$$

$$d\xi_{\pm} = \frac{\xi_{\pm}}{X} dX + \frac{1}{Q_{\pm}} \left(\xi_{\pm} \frac{y_p}{X} dY - y_k dZ \right). \quad (4.73)$$

Para calcular a integral (4.63) sobre $y_{\perp} = (y_p, y_k)$, vamos introduzir coordenadas polares nesse plano:

$$y_p = \rho \cos \psi, \quad y_k = \rho \text{sen } \psi. \quad (4.74)$$

Logo, encontramos para a integral (4.63) a seguinte expressão

$$\langle dh^2 \rangle = -4GM \int_0^{\infty} d\rho \rho F(\rho^2) (\mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^-), \quad (4.75)$$

onde

$$\mathcal{T}^{\pm} = \int_0^{2\pi} d\psi T^{\pm}, \quad T^{\pm} = \frac{1}{4\pi Q \xi} \delta(t - \xi_{\pm}) (dt - d\xi_{\pm})^2. \quad (4.76)$$

As quantidades que aparecem na equação (4.76) podem ser expressas nas coordenadas polares (4.74) por

$$(dt - d\xi_{\pm})^2 = A_{\pm} + \frac{B_{\pm}}{Q^2} + \dots, \quad Q^2 = X^2 - \rho^2 \cos^2 \psi, \quad (4.77)$$

$$A_{\pm} = (dt - \frac{\xi_{\pm}}{X} dX)^2, \quad B_{\pm} = (a_{\pm} \cos \psi + b \text{sen } \psi)^2, \quad (4.78)$$

$$a_{\pm} = \frac{\xi_{\pm} \rho dY}{X}, \quad b = -\rho dZ, \quad (4.79)$$

onde os três pontos indicam os termos que são lineares em y_p e y_k , que não contribuem para a integral sobre ψ . Usando as fórmulas acima, encontramos

$$\mathcal{T}^{\pm} = \frac{\delta(t - \xi_{\pm})}{4\pi} (A_{\pm} K_1 + K_2), \quad (4.80)$$

onde

$$K_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{Q^2}, \quad (4.81)$$

$$K_2 = \int_0^{2\pi} d\psi \frac{B_{\pm}}{Q^4}. \quad (4.82)$$

O cálculo das integrais K_1 e K_2 dão o seguinte resultado

$$K_1 = \frac{2\pi}{X\sqrt{X^2 - \rho^2}}, \quad (4.83)$$

$$K_2 = \frac{\pi[(a_{\pm}^2 + b^2)X^2 - b^2\rho^2]}{X^3(X^2 - \rho^2)^{3/2}} = \frac{\pi\rho^2}{X^3\sqrt{X^2 - \rho^2}}(dY^2 + dZ^2). \quad (4.84)$$

A função δ que aparece na fórmula (4.76) pode ser reescrita como

$$\delta(t \mp \sqrt{X^2 - \rho^2}) = \frac{|t|}{\rho} \left[\delta(\rho - \sqrt{X^2 - t^2}) + \delta(\rho + \sqrt{X^2 - t^2}) \right]. \quad (4.85)$$

Essa relação também implica que

$$t = \pm\sqrt{X^2 - \rho^2}. \quad (4.86)$$

Por causa dessa função δ o termo \mathcal{T}^+ é diferente de zero apenas para $t \geq 0$, enquanto que o outro termo \mathcal{T}^- não se anula quando $t \leq 0$. Então, realizando a integração sobre ρ encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\rho \rho F(\rho^2) \mathcal{T}^{\pm} &= \theta(\pm\sqrt{X^2 - t^2}) \frac{F(X^2 - t^2)}{2X} \left[\left(dt - \frac{t}{X} dX \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{X^2 - t^2}{2X^2} (dY^2 + dZ^2) \right], \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside (função degrau). Desse modo, obtemos o seguinte resultado

$$\langle dh^2 \rangle = \frac{-2GMF(X^2 - t^2)}{X} \left[\left(dt - \frac{t}{X} dX \right)^2 + \frac{X^2 - t^2}{2X^2} (dY^2 + dZ^2) \right], \quad X \geq |t|. \quad (4.88)$$

Assim, comparando as fórmulas (4.88), (4.69) e (4.66) encontramos, finalmente, a solução geral

$$\langle dh^2 \rangle = \frac{-2GMF(r^2 - t^2)}{r} \left[\left(dt - \frac{t}{r} dr \right)^2 + \frac{r^2 - t^2}{2} d\Omega^2 \right], \quad r \geq |t|. \quad (4.89)$$

Essa expressão é válida em todo o domínio do espaço-tempo em que $r \geq |t|$ para os valores de tempos t positivos e negativos. Dentro da casca esférica, onde $r < |t|$, a perturbação da métrica se anula $\langle dh^2 \rangle = 0$.

Usando o programa Maple com a extensão GRTensor, podemos calcular todas as quantidades importantes para a métrica (4.89). Podemos conferir, por exemplo, que no vácuo, isto é, fora da casca esférica, o tensor de Ricci satisfaz na aproximação linear em M a equação $R_{\mu\nu} = 0$. Isso deve ser válido até mesmo na gravitação não-local livre de fantasmas e fornece um bom teste para os cálculos aqui realizados. A seguir, vamos mostrar como a versão linearizada da métrica de Schwarzschild pode ser obtida por meio da fórmula (4.89). Vamos também estudar o comportamento dessa solução na teoria não-local livre de fantasmas quando a casca esférica colapsando se aproxima da origem do sistema de coordenadas.

4.3.3 Solução de Schwarzschild linearizada

A solução das equações de Einstein linearizadas para o problema da casca esférica nula é bem conhecida na literatura [89, 92]. Dentro de ambas as cascas colapsando e expandindo o espaço-tempo é plano, enquanto fora delas a métrica é uma versão linearizada da métrica de Schwarzschild

$$\langle dh^2 \rangle = \frac{2GM}{r}(dt^2 + dr^2). \quad (4.90)$$

No caso das equações de Einstein linearizadas, temos a seguinte função

$$F(r^2 - t^2) = \ln \left(\frac{r^2 - t^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4.91)$$

Usando essa expressão na solução (4.89), a resposta obtida parece bastante diferente da solução esperada, equação (4.90). Entretanto, através de uma transformação de calibre da métrica

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\xi_{\nu} - \nabla_{\nu}\xi_{\mu} \quad (4.92)$$

é possível obter a forma usual da solução linearizada de Schwarzschild. Para isso, é suficiente escolher

$$\xi_{\mu} = (\xi_t, \xi_r, 0, 0), \quad (4.93)$$

$$\xi_t = \frac{GMt}{r} - \frac{GMt}{r} \ln \left(\frac{r^2 - t^2}{\Lambda^2} \right) + GM \ln \frac{r-t}{r+t}, \quad (4.94)$$

$$\xi_r = -\frac{GM}{2r^2} (r^2 - t^2) \ln \left(\frac{r^2 - t^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4.95)$$

4.3.4 O invariante de Kretschmann

Para uma função arbitraria $F(z)$, onde $z = r^2 - t^2$, o quadrado do tensor de Riemann (invariante de Kretschmann) para a métrica (4.89), na primeira ordem não-nula, é dado pela expressão geral

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{48 G^2 M^2 z^2}{r^6} Q(z), \quad Q(z) = 2\mathcal{F}'^2 z^2 + 2\mathcal{F}\mathcal{F}' z + \mathcal{F}^2, \quad \mathcal{F} = F'. \quad (4.96)$$

Para a teoria de Einstein linearizada

$$F(z) = \ln(z/4\Lambda^2), \quad F'(z) = 1/z, \quad Q(z) = 1/z^2. \quad (4.97)$$

Sendo assim, obtemos o resultado

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{48 G^2 M^2}{r^6} \quad (4.98)$$

como deve ser para a métrica de Schwarzschild. Já para a teoria não-local livre de fantasmas temos

$$F(z) = E_1(1, z/(4s)) + \gamma + \ln(z/(4s)), \quad (4.99)$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{z} (1 - e^{-z/4s}), \quad (4.100)$$

$$Q(z) = \frac{1}{8s^2 z^2} [(8s^2 + 4sz + z^2)e^{-z/2s} - 4s(4s + z)e^{-z/4s} + 8s^2]. \quad (4.101)$$

Agora, utilizando a expansão (4.52) da função F para pequenos valores de z

$$F(z) = \frac{z}{4s} - \frac{z^2}{64s^2} + \dots \quad (4.102)$$

encontramos o valor do invariante de Kretschmann quando a casca esférica se aproxima da origem do sistema de coordenadas

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{3 G^2 M^2 z}{s^2 r^6} + \dots = \frac{3 G^2 M^2 \beta^2}{s^2 r^4} + \dots \quad (4.103)$$

Nessa equação $\beta^2 = 1 - t^2/r^2$ é um parâmetro adimensional que fora da casca esférica, onde $|t| < r$, é menor ou igual a 1. A fórmula (4.103) mostra que a solução do colapso

da casca esférica nula fina permanece singular na teoria não-local livre de fantasmas. No entanto, a singularidade cai com uma potência menor quando comparada com o resultado da Relatividade Geral (4.98), ou seja, nesse caso, a singularidade na curvatura é suavizada.

O modelo de uma casca esférica infinitamente fina é certamente uma idealização. Diante disso, a casca esférica física deve conter, naturalmente, uma espessura finita, que pode, por exemplo, ser responsável pela regularização da singularidade presente na fórmula (4.103). Para averiguar essa afirmação, estudaremos na próxima seção o caso de uma casca esférica nula espessa colapsando. Como ainda estamos lidando com a gravitação linearizada, a correspondente solução será obtida por intermédio de uma superposição de soluções de cascas finas.

4.4 O colapso de uma casca esférica nula espessa na gravitação não-local livre de fantasmas

Na seção anterior discutimos o campo gravitacional de uma casca esférica nula fina representada por uma distribuição δ esférica de energia, que colapsa com a velocidade próxima à velocidade da luz até o seu raio atingir o valor zero no instante de tempo $t = 0$. Sem dúvida, esse modelo é uma idealização. A fim de estudar um modelo mais realista do colapso gravitacional, devemos considerar como fonte uma casca esférica nula com alguma espessura. Para isso, consideraremos um conjunto de cascas esféricas finas colapsando para um mesmo ponto do espaço, mas passando por ele em diferentes momentos de tempo. Esse perfil será caracterizado por uma função de densidade $q(t)$, que representa a quantidade de massa por unidade de tempo passando pelo centro $r = 0$ em um dado instante de tempo t . Desse modo, a massa total da casca esférica pode ser escrita como

$$M = \int dt q(t). \quad (4.104)$$

Devido a linearidade das equações de campo, a solução para a perturbação da métrica da casca esférica espessa, $\langle\langle dh^2 \rangle\rangle(t, r)$, pode ser expressada como uma superposição de perturbações $\langle dh^2 \rangle(t, r)$ da casca esférica fina, através da seguinte equação

$$\langle\langle dh^2 \rangle\rangle(t, r) = \int dt' q(t') \langle dh^2 \rangle(t - t', r). \quad (4.105)$$

Para simplificar nossa consideração, vamos escolher $q(t)$ como sendo uma função de grau que assume valor constante igual a M/b durante o intervalo de tempo $t \in (-b/2, b/2)$ e que se anula fora desse intervalo. Nesse caso, a solução do campo gravitacional tem uma forma diferente para cada diferente domínio do espaço-tempo (veja a figura 4.1). Para descrever esses domínios é conveniente usar as coordenadas de tempo avançado, $v = t + r$, e de tempo retardado, $u = t - r$. Os domínios do espaço-tempo T_- , onde $v < -b/2$, e T_+ , onde $u > b/2$, representam o interior da casca esférica. Conseqüentemente, o espaço-tempo nessa região é vazio e a métrica aqui é plana. No domínio N_- , onde $v \in (-b/2, b/2)$ e $u < -b/2$, existe apenas fluido esférico colapsando, enquanto que em N_+ , onde $u \in (-b/2, b/2)$ e $v > b/2$, existe somente fluido em expansão. Já no domínio I , onde $v \in (-b/2, b/2)$ e $u \in (-b/2, b/2)$, existe uma superposição de fluidos colapsando e expandindo. Por fim, o domínio R , onde $v > b/2$ e $u < -b/2$, representa a região fora da casca esférica. O espaço-tempo nesse domínio também é vazio.

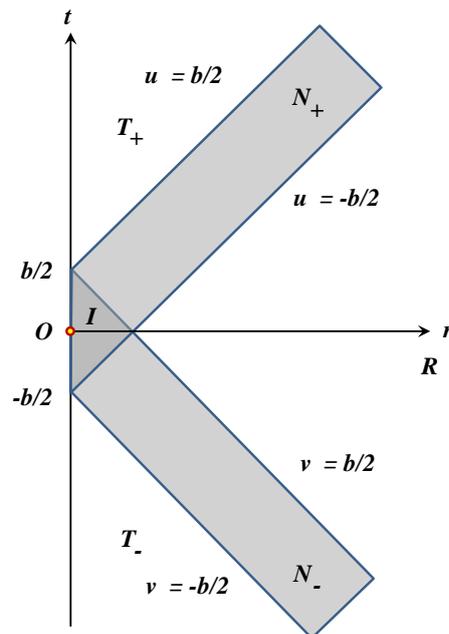


Figura 4.1: Diagrama espaço-temporal para o colapso da casca esférica nula espessa.

Vamos denotar por (t, r) as coordenadas do ponto de observação em um dado domínio. Para a função $q(t)$ descrita acima, utilizando a resposta obtida na seção anterior, equação (4.89), a fórmula (4.105) assume, na nova variável de integração $x = t - t'$, a

forma

$$\langle\langle dh^2 \rangle\rangle(t, r) = -\frac{2GM}{br} \left[J_0 \left(dt^2 + \frac{1}{2} r^2 d\Omega^2 \right) - J_1 \frac{2dt dr}{r} + J_2 \left(\frac{dr^2}{r^2} - \frac{1}{2} d\Omega^2 \right) \right], \quad (4.106)$$

onde

$$J_n = \int_{x_i}^{x_f} dx x^n F(r^2 - x^2). \quad (4.107)$$

Os limites de integração, x_i e x_f , dependem do domínio do espaço-tempo onde está localizado o ponto de observação em questão. A seguir, com o objetivo de estudar as propriedades da solução (4.106), calcularemos o invariante de Kretschmann nos diferentes tipos de domínios do espaço-tempo descritos na figura 4.1.

4.4.1 O campo gravitacional no domínio R

A condição para que o ponto de observação esteja no domínio R pode ser expressa como $v \in (b/2, \infty)$ e $u \in (-\infty, -b/2)$. Nesse caso, todas as cascas esféricas nulas com vértices dentro do intervalo de tempo $t' \in (-b/2, b/2)$ contribuem para a integral (4.107). Sendo assim, no domínio R temos, $x_i = t + b/2$ e $x_f = t - b/2$. Vamos agora separar a função $F(z)$ em duas partes, a saber,

$$F(z) = F_0(z) + \Delta F(z), \quad (4.108)$$

onde

$$F_0(z) = \gamma + \ln(z/4s), \quad \Delta F(z) = \text{Ei}(1, z/4s). \quad (4.109)$$

Também denotamos por J_n^0 e ΔJ_n as contribuições para J_n devido aos termos F_0 e ΔF , respectivamente, de maneira que

$$J_n = J_n^0 + \Delta J_n. \quad (4.110)$$

Procuramos agora uma solução no domínio R para grandes valores de r , isto é, na região do espaço-tempo onde $r \gg |t \pm b/2|$. Nesse limite, podemos usar a forma assintótica da função $\Delta F(z)$ para os grandes valores de z

$$\Delta F(z) = \frac{4s}{z} e^{-z/4s} (1 + O(1/z)) \quad (4.111)$$

e usar a seguinte aproximação

$$\Delta F(r^2 - x^2) \approx f(r) k(x), \quad f(r) = \frac{1}{r^2} e^{-r^2/4s}, \quad k(x) = 4s e^{x^2/4s}. \quad (4.112)$$

Assim, obtemos

$$\Delta J_n = f(r) A_n(t), \quad (4.113)$$

onde

$$A_n(t) = (4s)^{\frac{n+2}{2}} \int_{C_-}^{C_+} dy y^n e^{y^2}, \quad C_{\pm} = \frac{t \pm b/2}{2\sqrt{s}}. \quad (4.114)$$

Como a função $f(r)$ cai rapidamente a zero para os valores grandes de r , podemos considerar nos cálculos a seguir apenas a ordem linear em ΔJ_n . Usando o programa GRTensor, obtemos a seguinte expressão para o quadrado do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{48 G^2 M^2}{r^6} + \Delta R_{\mu\nu\alpha\beta}^2, \quad (4.115)$$

onde

$$\Delta R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{2G^2 M^2}{s^2 b r^{10}} e^{-r^2/4s} W, \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} W = & -3A_0 r^6 + (4\ddot{A}_0 s^2 + 8\dot{A}_1 s - 34A_0 s + A_2) r^4 \\ & + (80\dot{A}_1 s^2 - 12\ddot{A}_2 s^2 - 160A_0 s^2 + 14A_2 s) r^2 + 56A_2 s^2. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Mantendo agora apenas o primeiro termo de W , que contém a maior potência de r , obtemos

$$\Delta R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \sim \frac{24i \sqrt{\pi} G^2 M^2}{\sqrt{s} b r^4} e^{-r^2/4s} [\operatorname{erf}(i\tau_+) + \operatorname{erf}(i\tau_-)]. \quad (4.118)$$

Ressaltamos que, apesar da presença da unidade imaginária i na fórmula acima, a resposta para $\Delta R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ é real, como ela deve ser. As expressões (4.115) e (4.118) implicam que no domínio R para um dado valor fixo do tempo t e quando $r \rightarrow \infty$ a curvatura se aproxima de uma maneira exponencialmente rápida do seu valor assintótico, que é igual à curvatura Schwarzschild de um objeto esférico de massa M .

4.4.2 O campo gravitacional nos domínios N_{\pm}

Discutimos agora de maneira breve o campo gravitacional nos domínios N_{\pm} . As condições para que o ponto de observação esteja no N_- domínio são $v \in (-b/2, b/2)$ e $u \in (-\infty, -b/2)$. Assim, encontramos os seguintes limites de integração: $x_i = -r$ e

$x_f = t + b/2$. Já para que o ponto de observação esteja em N_+ temos que ter $v \in (b/2, \infty)$ e $u \in (-b/2, b/2)$ e os limites de integração são $x_i = -r$ e $x_f = t - b/2$. As integrais necessárias podem então ser diretamente calculadas. Entretanto, não vamos reproduzir esses resultados aqui, pois as expressões obtidas são bastante extensas. Ademais, a análise mais detalhada das respostas complicadas das integrais mostrou que no caso da gravitação não-local livre de fantasmas, a curvatura é apenas significativamente modificada nas regiões estreitas próximas de $v = \pm b/2$ para o domínio N_- e perto de $u = \pm b/2$ para o domínio N_+ . Já para os grandes valores de r , as correções da teoria não-local livre de fantasmas modificam apenas de maneira fraca a solução da Relatividade Geral linearizada. Por esse motivo, apresentamos apenas a expressão final para o invariante de Kretschmann na gravitação linearizada de Einstein. O resultado é

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{48 G^2 M^2(v)}{r^6}, \quad M(v) = \frac{M}{b}(v + b/2). \quad (4.119)$$

A equação (4.119) é, de fato, o resultado esperado. Antes dos fluidos nulos colapsando e expandindo se encontrarem no domínio I , temos simplesmente a solução de Vaidya [222] (veja também [89]). A massa $M(v)$ cresce linearmente com a coordenada de tempo avançado v do valor zero (em $v = -b/2$) até seu valor máximo M . No caso do domínio N_+ os cálculos para a perturbação da métrica são similares. Desse modo, encontramos o resultado

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{48 G^2 M^2(u)}{r^6}, \quad M(u) = \frac{M}{b}(u + b/2). \quad (4.120)$$

4.4.3 O campo gravitacional no domínio I

Vamos agora discutir o campo gravitacional no domínio I . Este domínio representa a região de maior interesse, pois é aqui que podemos estudar se existe ou não singularidade em $r = 0$ e também é essa a região onde o raio da casca esférica colapsando se torna suficiente pequeno para a possível formação do miniburaco negro. Além disso, como a gravitação não-local livre de fantasmas é responsável por uma mudança significativa no comportamento da Relatividade Geral no limite ultravioleta [29], esperamos que seja no domínio I onde exista uma maior modificação das soluções da teoria de Einstein linearizada. Uma casca esférica nula fina, que cruza o centro $r = 0$ no instante de tempo t' , contribui para a integral (4.107) apenas no intervalo de tempo $t' \in (t + r, t - r)$.

Portanto, $x_i = -r$ e $x_f = r$. Nesse caso, o termo J_1 , que contém a integração linear em x , não contribui para a resposta final.

Para a teoria de Einstein linearizada, temos

$$F(z) = \ln z + C, \quad C = -\ln \Lambda^2. \quad (4.121)$$

Dessa maneira, encontramos

$$J_0 = 4r(\ln 2 + \ln r - 1) + 2Cr, \quad J_2 = \frac{4}{9}r^3(3\ln 2 + 3\ln r - 4) + \frac{2}{3}Cr^3. \quad (4.122)$$

O cálculo do quadrado do tensor de Riemann tem então como resposta

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{252 G^2 \dot{M}^2}{r^4}, \quad \dot{M} = M/b. \quad (4.123)$$

Já para o caso da gravitação não-local livre de fantasmas

$$F(z) = \text{Ei}(1, z/4s) + \gamma + \ln(z/4s). \quad (4.124)$$

Usando a expansão de Taylor dessa função para pequenos valores de z

$$F(z) = \frac{z}{4s} - \frac{z^2}{64s^2} + \frac{z^2}{1152s^3} + \dots \quad (4.125)$$

podemos encontrar

$$J_0 = \frac{r^3(420s^2 - 21sr^2 + r^4)}{1260s^3} + \dots \quad (4.126)$$

$$J_2 = \frac{r^5(756s^2 - 27sr^2 + r^4)}{11340s^3} + \dots \quad (4.127)$$

Nesse caso, a resposta do cálculo do invariante de Kretschmann é

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \frac{32 G^2 \dot{M}^2}{3s^2} - \frac{32 G^2 \dot{M}^2 r^2}{9s^3} + \dots \quad (4.128)$$

Essa resposta mostra que a curvatura no modelo da casca esférica espessa se mantém finita $r = 0$, isto é, nesse caso a teoria da gravitação não-local livre de fantasmas é realmente livre da singularidade. Isso nos mostra que a singularidade presente no caso anterior da casca esférica fina é, de fato, por causa da aproximação da espessura infinitamente fina. A singularidade, nesse caso, representa um problema na escolha de uma fonte não-física, ela não está relacionada com a teoria não-local livre de fantasmas.

4.4.4 O invariante $(\nabla r)^2$

Dentro da geometria esfericamente simétrica também existe outro invariante útil, a saber,

$$g = (\nabla r)^2 = \frac{1}{4f} g^{\mu\nu} \nabla_\mu f \nabla_\nu f, \quad f = g_{\theta\theta}. \quad (4.129)$$

Uma linha no plano (t, r) , onde $g = 0$, é um horizonte aparente [89]. Sendo assim, essa condição deve ser satisfeita para que o miniburaco se forme. A resposta desse invariante, na teoria não-local livre de fantasmas, pode ser expressa pela fórmula

$$(\nabla r)^2 = 1 - \frac{2GMr^2}{sb} + \dots \quad (4.130)$$

Como no domínio I do espaço-tempo $r < b$, temos

$$(\nabla r)^2 > 1 - \frac{2GMb}{s}. \quad (4.131)$$

Isso significa que, para um dado valor do parâmetro extra da teoria não-local livre de fantasmas $s = \mu^{-2}$ e para uma dada duração de tempo fixa b , o miniburaco negro não é formado se a massa M for suficientemente pequena. Em outras palavras na gravitação não-local livre de fantasmas existe um *gap* de massa para a formação do buraco negro. Esse resultado é similar ao obtido no ano de 1981 por Frolov e Vilkovisky na referência [91], onde foi considerado o colapso de uma casca esférica nula na teoria gravitacional local de quarta ordem. Recentemente no trabalho [86], o formalismo aqui desenvolvido foi generalizado de maneira que ele possa também ser aplicado a outras teorias de gravitação modificada. Nessa referência os potenciais Newtonianos da gravitação super-renormalizável obtidos na referência [151], apresentados nessa tese no capítulo 3, foram utilizados para construir a solução do colapso esférico nulo. Foi demonstrado que o *gap* de massa para a formação do buraco negro também está presente nessa teoria. Ambas as teorias com derivadas superiores, a gravitação não-local livre de fantasmas e a gravitação (super-)renormalizável, possuem em comum a presença de um parâmetro extra de escala de massa μ , que desempenha o papel de um *cut-off* ultravioleta (no caso da gravitação super-renormalizável o parâmetro μ é representado pelas massas $m_{(i)j}$ dos graus de liberdade extras tensoriais e escalares). Como mostrado na referência [91], se a massa M do objeto colapsando obedece a relação $M\mu \lesssim 1$, o horizonte aparente do miniburaco negro não é formado. A presença desse parâmetro extra de escala de massa,

difere essas teorias da gravitação clássica de Einstein, onde o *gap* de massa está ausente e um miniburaco negro de uma massa arbitrariamente pequena pode ser formado.

Em trabalhos futuros seria interessante investigar outros aspectos das soluções lineares da gravitação não-local livre de fantasmas. Podemos considerar, por exemplo, fontes arbitrárias em movimento e estudar a emissão de ondas gravitacionais nessa teoria e o *back-reaction* dessa radiação em objetos acelerados. Outra proposta é modificar o fator de forma aqui usado e considerar potências superiores no expoente, sendo o próximo exemplo mais simples $a = \exp(\alpha \square^2)$. Outra questão natural é o que acontece no colapso de uma massa grande M , isto é, quando $M\mu \gg 1$. Seria altamente interessante analisar soluções da gravitação não-local livre de fantasmas nesse limite, em que o regime não-linear é dominante. Esperamos que as modificações propostas na gravitação não-local livre de fantasmas permitam responder perguntas intrigantes existentes em relação à estrutura do interior do buraco negro.

Transição entre os períodos estável e instável da inflação induzida pela anomalia conforme

Os efeitos quânticos do vácuo derivados da anomalia conforme são responsáveis por um modelo inflacionário que pode ser estável ou instável. A versão instável requer que o coeficiente adimensional do termo R^2 tenha um valor em torno de 5×10^8 para que as perturbações escalares tenham o valor exigido pelas observações [212], resultando assim no regime inflacionário do modelo $R + R^2$ de Starobinsky [211]. Nesse caso, os termos não-locais da ação efetiva são irrelevantes e através do ajuste fino das condições iniciais, é possível ter uma saída elegante para um estágio de baixa curvatura com oscilações de altas frequências, responsáveis pela criação de todas as partículas. Já a versão estável é um atrator genérico genuíno, de maneira que essa solução começa independentemente das condições iniciais escolhidas. Neste capítulo discutimos uma possível transição entre a fase estável e instável da inflação devido ao efeito das massas dos campos quânticos. Mostra-se que o final da inflação estável corresponde às condições iniciais necessárias para o comportamento desejado do modelo de Starobinsky, se ignoramos as correções quânticas no período de transição entre os dois períodos inflacionários. Além disso, descrevemos dois diferentes mecanismos quânticos que podem providenciar o enorme termo R^2 necessário para a inflação instável. Com o objetivo de termos uma exposição autoconsistente, a seção 5.1 inclui uma revisão da inflação induzida pela anomalia conforme. Discutimos as soluções inflacionárias estável e instável, bem como a versão temperada da inflação

estável. Também apresentamos as dificuldades teóricas encontradas no estudo do período de transição. Esta seção contém alguns dos assuntos originalmente publicados nas referências [81, 82, 181, 182, 205, 206]. A parte original deste capítulo começa pela seção 5.2, em que descrevemos os resultados numéricos da transição entre as épocas estável e instável da inflação. Por fim, os mecanismos quânticos que podem causar um enorme crescimento do coeficiente do termo R^2 serão discutidos na seção 5.3.

5.1 Uma breve revisão da inflação induzida pela anomalia conforme

Considere os efeitos quânticos de vácuo no universo primordial, em que as energias típicas dos fenômenos físicos são muito grandes, mas ainda abaixo da escala de Planck, de maneira que estamos dentro do limite de aplicação da abordagem semiclássica da gravitação. Nas altas energias típicas dessa situação, é uma boa aproximação desprezar as massas e interações dos campos quânticos de matéria. Assim, esses campos podem ser tratados como radiação livre. Vamos também admitir que o universo inicial é vazio e que todo conteúdo real de matéria seja criado apenas durante o período de reaquecimento [224]. Desse modo, os efeitos quânticos se originam unicamente devido às partículas virtuais.

O tensor momento energia da radiação satisfaz a equação $T_\mu^\mu = 0$. Assim, o fenômeno quântico típico nesse caso é a anomalia conforme. A correção quântica para a ação do vácuo é então dada pela ação induzida pela anomalia conforme. Dessa maneira, a ação total pode ser escrita como

$$S_t = S_{EH} + \Gamma_{ind} + \text{termos com simetria conforme.} \quad (5.1)$$

Na equação acima não escrevemos explicitamente a ação dos campos de matéria e a parte conforme da ação do vácuo, equação (2.70), pois esses termos são conformalmente invariantes e não contribuem para as equações de movimento da métrica homogênea e isotrópica. Para o problema em questão é suficiente usar para Γ_{ind} a sua forma não-covariante, fórmula (2.92). O termo não-conforme $a_4 R^2$ não foi adicionado na ação (5.1), pois ele não é necessário para a renormalização da teoria conforme. Do ponto de vista teórico, não existe nada errado em definir o termo R^2 a mão, porém, é mais natural

assumir que ele venha devido aos efeitos quânticos do vácuo. Na seção 5.3 vamos discutir a possibilidade do surgimento desse termo com um grande valor do coeficiente a_4 na época da transição entre as fases estável e instável da inflação.

Através da substituição direta da métrica de FRLW (1.11) na ação (5.1), podemos considerar a equação de campo

$$\frac{\delta S_t}{\delta a} = 0. \quad (5.2)$$

Dessa maneira, chegamos na seguinte equação diferencial de quarta ordem para o fator conforme da métrica:

$$\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \left(5 + \frac{4b}{c}\right) \frac{\ddot{a} \dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 0, \quad (5.3)$$

onde usamos a notação $M_P^2 = 1/G$ para a massa de Planck e os coeficientes b e c foram definidos anteriormente nas equações (2.75) e (2.76). Por questões de simplicidade, consideramos apenas o caso particular em que $\Lambda = k = 0$ (para maiores detalhes do papel da constante cosmológica e da curvatura espacial, veja as referências [180, 182, 211]).

A equação (5.3) tem como solução particular a solução inflacionária [211]

$$a(t) = a_0 \cdot e^{H_0 t}, \quad H_0 = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}} \quad (5.4)$$

Essa solução é real, pois de acordo com a equação (2.75) o sinal de b é sempre negativo. Por outro lado, o coeficiente c , equação (2.76), pode ter diferentes tipos de sinais, dependendo do conteúdo de partículas da teoria quântica de campos fundamental. Considerando pequenas flutuações de $H(t)$ em torno da solução inflacionária (5.4) é possível mostrar que essa solução é estável quando $c > 0$ e instável para $c < 0$ [182, 211]. Usando a equação (2.76), a condição de estabilidade se reduz então a relação

$$\frac{1}{3} N_f + \frac{1}{18} N_s > N_v, \quad (5.5)$$

que é satisfeita para qualquer modelo supersimétrico realista como, por exemplo, o Modelo Supersimétrico Padrão Mínimo (MSPM), onde $N_{s,f,v} = (104, 32, 12)$ [203, 205]. Por outro lado, a condição (5.5) não é satisfeita para o Modelo Padrão (MP) da física de partículas, onde $N_{s,f,v} = (4, 24, 12)$ [203, 205].

A equação (5.3) representa o traço das equações de Einstein semiclássicas [84]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (5.6)$$

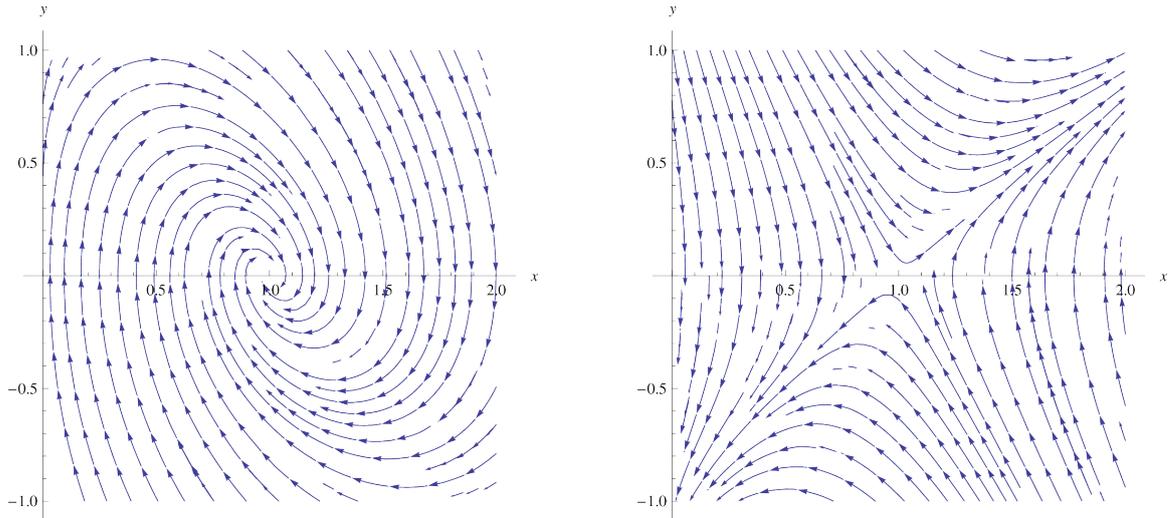


Figura 5.1: Diagrama de fase da equação (5.9). Do lado esquerdo temos $c > 0$ e o conteúdo de partículas do MSPM. Já no lado direito $c < 0$ e o conteúdo de partículas é o do MP.

Também é possível considerar as outras componentes dessa equação (uma discussão detalhada da derivação das componentes 00 e ij pode ser encontrada nas referências [113, 181]). A componente 00 tem como resultado uma equação diferencial de terceira ordem, equivalente a equação (5.3) [84], a saber,

$$2 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} - \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\ddot{a} \dot{a}^2}{a^3} - \left(3 + \frac{2b}{c}\right) \frac{\dot{a}^4}{a^4} - \frac{M_P^2}{8\pi c} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0. \quad (5.7)$$

É possível através da seguinte mudança de variáveis

$$x = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{3/2}, \quad y = \frac{\dot{H}}{H_0^{3/2}} H^{-1/2} \quad (5.8)$$

reduzir a fórmula (5.7) a uma equação diferencial de primeira ordem [211]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x - x^{-1/3})}{6cy} - 1. \quad (5.9)$$

A equação (5.9) permite estudar a solução geral do problema em questão através do seu diagrama de fase. Os diagramas de fase para os casos estável e instável são mostrados na figura 5.1. Em ambos os casos o ponto crítico $(1, 0)$ corresponde a solução inflacionária exponencial (5.4). No caso estável existe apenas um único atrator correspondendo a essa solução [182]. Já no caso instável podemos ver que existem diferentes atratores [211].

A existência de um único atrator no caso estável correspondente à solução inflacionária, permite construir um cenário inflacionário bastante atraente [203]. O universo poderia começar na fase estável de maneira que a inflação sempre comece independentemente do conjunto de dados iniciais escolhidos. A maneira mais simples de fazer isso é

supor que a supersimetria é válida nas regiões de altas energias e que ela está ausente em energias mais baixas, pois as partículas supersimétricas são mais pesadas do que as outras partículas [203]. Assim, se durante a inflação o valor do parâmetro de Hubble diminuir, então, em algum ponto os *loops* das partículas supersimétricas desacoplam da gravidade e o conteúdo de matéria $N_{s,f,v}$ se modifica. Logo, a inequação (5.5) muda de sinal e a inflação se torna instável. Desse modo, o universo pode eventualmente realizar uma saída elegante para a fase de expansão do tipo FLRW com lei de potência $a(t) \sim t^{1/n}$. Uma questão importante é como o parâmetro de Hubble pode diminuir, visto que a solução (5.4) é caracterizada por um valor constante de $H(t) = H_0$. Para responder essa pergunta devemos ir além da aproximação sem massa. Nesse caso, o valor de H pode realmente diminuir [205]. A seguir, vamos considerar os efeitos das pequenas massas dos campos quânticos.

5.1.1 Os efeitos das massas: inflação estável temperada

Considere algum modelo supersimétrico realista, em que as partículas supersimétricas têm uma massa relativamente grande quando comparada com as outras partículas não-supersimétricas. Apesar disso, no início da inflação estável o parâmetro de Hubble H é ainda maior do que as massas das partículas supersimétricas mais pesadas e elas podem ser tratadas como pequenas perturbações violando a invariância conforme. Ao mesmo tempo, as partículas sem supersimetria podem continuar sendo tratadas aproximadamente como sem massa.

Nessa situação, o efeito quântico principal devido às massas dos campos é a renormalização da constante de Newton e da constante cosmológica [98]. Para calcular a contribuição quântica nesse caso podemos aplicar a descrição conforme da teoria massiva [174] (uma abordagem similar pode ser encontrada na referência [57]). A principal idéia nesse formalismo é recuperar a simetria conforme através da introdução de um novo campo escalar χ e considerar nos parâmetros dimensionais responsáveis por violar a invariância conforme, m_s^2 , m_f , M_P^2 e Λ , a seguinte substituição:

$$m_s^2 \rightarrow \frac{m_s^2}{M^2} \chi^2, \quad m_f \rightarrow \frac{m_f}{M} \chi, \quad M_P^2 \rightarrow \frac{M_P^2}{M^2} \chi^2, \quad \Lambda \rightarrow \frac{\Lambda}{M^2} \chi^2, \quad (5.10)$$

onde M é um novo parâmetro dimensional. Vamos supor que o novo campo escalar χ assumira valores muito próximos a M . Entretanto, existe uma grande diferença entre χ

e M com respeito à transformação conforme. A massa não se transforma, enquanto χ sim. Assim, a ação do novo modelo torna-se invariante conforme, se o novo campo se transforma como

$$\chi \rightarrow \chi e^{-\sigma}. \quad (5.11)$$

No setor massivo, devido à transformação (5.10), o termo massivo fermiônico é substituído por uma interação do tipo Yukawa, enquanto que o termo massivo do campo escalar é substituído por uma autointeração quártica entre escalares. Em ambos os casos as interações ocorrem com o novo campo χ . Esses termos possuem simetria conforme. Contudo, no setor gravitacional para recuperarmos a simetria conforme temos ainda que compensar a transformação da curvatura escalar R através da introdução de um termo cinético para o campo escalar χ , a saber,

$$\frac{1}{16\pi G} R \rightarrow \frac{M_P^2}{16\pi M^2} [R\chi^2 + 6(\nabla\chi)^2]. \quad (5.12)$$

Dessa maneira, a ação da nova teoria possui simetria conforme local em ambos os setores: massivo e gravitacional. Então, a contribuição quântica pode ser calculada por meio da anomalia conforme. Depois disso, podemos recuperar a teoria original considerando o limite em que $\chi \rightarrow M$.

A identidade de Noether para a nova ação tem a forma

$$\mathcal{T} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \chi \frac{\delta S}{\delta \chi} = 0. \quad (5.13)$$

Na teoria em discussão, a simetria conforme não significa que o traço do tensor momento energia é nulo, em vez disso, seu significado é de que a quantidade \mathcal{T} é zero. Correspondentemente, a anomalia conforme significa, nesse caso, $\langle \mathcal{T} \rangle \neq 0$ ao invés de $\langle T_\mu^\mu \rangle \neq 0$. O contratermo da teoria massiva, necessário para a derivação da anomalia conforme, pode ser encontrado por meio da substituição das fórmulas (5.10) e (5.12) na equação (2.60). Como resultado,

$$\Delta S = \frac{\mu^{n-4}}{n-4} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ w C^2 + bE + c\Box R + \frac{f}{M^2} [R\chi^2 + 6(\nabla\chi)^2] + \frac{g}{M^4} \chi^4 \right\}, \quad (5.14)$$

onde

$$f = \frac{1}{3(4\pi)^2} \sum_f N_f m_f^2, \quad g = \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_s N_s m_s^4 - \frac{2}{(4\pi)^2} \sum_f N_f m_f^4. \quad (5.15)$$

Os novos termos presentes na equação (5.14) possuem as mesmas propriedades de transformação conforme do quadrado do tensor de Weyl C^2 . Por esse motivo, as técnicas de

cálculo da anomalia explicadas na seção 2.6 podem ser generalizadas sem muita dificuldade para esse caso. Desse modo, chegamos a expressão final para a anomalia conforme

$$\langle \mathcal{T} \rangle = - \left\{ w C^2 + bE + c \square R + \frac{f}{M^2} [R\chi^2 + 6(\nabla\chi)^2] + \frac{g}{M^4} \chi^4 \right\}. \quad (5.16)$$

Pelo mesmo motivo explicado acima, podemos calcular a ação efetiva induzida pela anomalia conforme de maneira direta se usarmos a parametrização não-covariante $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g'_{\mu\nu}$ e $\chi = e^\sigma \chi'$. Então, a resposta é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} = & S_c[g_{\mu\nu}, \chi] + \int d^4x \sqrt{-g'} \left\{ w \sigma C'^2 + b\sigma \left(E' - \frac{2}{3} \square' R' \right) + 2b \sigma \Delta'_4 \sigma \right. \\ & \left. + \frac{f}{M^2} [R' \chi'^2 + 6(\nabla' \chi')^2] \sigma + \frac{g}{M^4} \sigma \right\} - \frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g} R^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

O último passo é fixar $\chi = e^\sigma \chi' = M$ para que o termo de Einstein-Hilbert adquira sua forma padrão. Dessa maneira, encontramos, finalmente, para a ação total a expressão

$$\begin{aligned} S_t = & S_{EH} + \Gamma_{ind} \Big|_{\chi \rightarrow M} \\ = & S_c[g_{\mu\nu}, M] + \int d^4x \sqrt{-g'} \left\{ w \sigma C'^2 + b\sigma \left(E' - \frac{2}{3} \square' R' \right) + 2b \sigma \Delta'_4 \sigma \right\} \\ & - \frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g} R^2 - \int d^4x \sqrt{-g'} e^{2\sigma} [R' + 6(\nabla' \sigma)^2] \left[\frac{1}{16\pi G} - f\sigma \right] \\ & - \int d^4x \sqrt{-g'} e^{4\sigma} \left[\frac{\Lambda}{8\pi G} - g\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A ação (5.18) difere da versão não-massiva, equação (2.92), em dois aspectos. Primeiro, existem dois novos termos devido à renormalização do termo de Einstein-Hilbert e da constante cosmológica. Esses dois termos não dependem do valor da escala de massa M , mas apenas dos parâmetros da teoria original. Segundo, o funcional $S_c[g_{\mu\nu}, M]$ não é mais irrelevante nesse caso, pois ele depende do parâmetro M . Portanto, a expressão (5.18) é apenas uma aproximação da ação efetiva do vácuo para a teoria massiva, mesmo para a métrica homogênea isotrópica. Para entendermos o limite de validade dessa aproximação, podemos lembrar que a parte da ação efetiva que é possível de ser calculada explicitamente por meio da integração da anomalia conforme, contém as correções quânticas logarítmicas da teoria (para uma discussão detalhada e também uma comparação com o grupo de renormalização baseado no esquema de subtração mínima, veja as referências [182, 205]). No limite de altas energias esses termos são os mais importantes, desse modo, a ação (5.18) é uma boa aproximação quando $H \gg m_i$. Diferentemente do caso não-massivo, a versão covariante da ação efetiva (5.18) não é conhecida. Entretanto, a expressão (5.18) é suficiente para aplicações cosmológicas básicas que vamos considerar aqui.

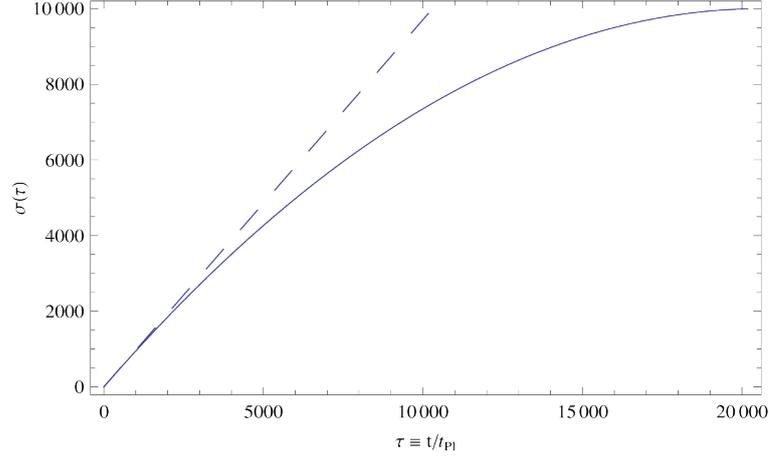


Figura 5.2: Gráficos das soluções inflacionárias (5.4) (em linha pontilhada) e (5.21) (em linha contínua).

A análise numérica nos mostra que podemos seguramente considerar que os efeitos devido à constante cosmológica não são essenciais na época inflacionária [180]. Desse modo, colocando $\Lambda = g = 0$, a equação de movimento para o fator conforme da métrica $a(t) = e^{\sigma(t)}$, obtida a partir da ação (5.18), pode ser expressa como

$$\ddot{\sigma} + 7 \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4\dot{\sigma}^2 + 4\left(3 - \frac{b}{c}\right)\ddot{\sigma}\dot{\sigma}^2 - 4\frac{b}{c}\dot{\sigma}^4 - \frac{M_p^2}{8\pi c} \left[(\ddot{\sigma} + 2\dot{\sigma}^2) (1 - \tilde{f}\sigma) - \frac{1}{2}\tilde{f}\dot{\sigma}^2 \right] = 0, \quad (5.19)$$

onde introduzimos um novo parâmetro adimensional

$$\tilde{f} = \frac{16\pi f}{M_P^2} = \frac{1}{3\pi} \sum_f \frac{N_f m_f^2}{M_P^2}. \quad (5.20)$$

A novidade dessa equação, quando comparada com a equação anterior (5.3), é a presença dos termos dependentes das massas dos campos quânticos através da quantidade \tilde{f} . Uma solução analítica aproximada da equação (5.19) pode ser obtida se tratarmos o novo parâmetro \tilde{f} com uma pequena perturbação. Essa solução tem a seguinte forma [182]

$$\sigma(t) = H_0 t - \frac{H_0^2}{4} \tilde{f} t^2. \quad (5.21)$$

A fórmula (5.21) reproduz com grande precisão as soluções numéricas da equação (5.19) [182]. Ela descreve uma forma temperada da inflação estável. Na figura 5.2 traçamos as soluções inflacionárias (5.4) e (5.21). No início as duas soluções são aproximadamente idênticas, entretanto, logo depois de algum tempo, a solução (5.21) começa a se distanciar da solução exponencial, pois por causa do efeito das massas, o valor do parâmetro de Hubble começa a decrescer até o valor em que o desacoplamento das partículas supersimétricas começa a acontecer.

Seja agora H^* a escala de energia em que a inflação estável termina. Nessa escala a maioria das partículas supersimétricas estão além do seu *cut-off* infravermelho e desacoplam da gravidade no nível quântico. Após certa quantidade dessas partículas desacoplarem, o sinal do parâmetro c na equação (2.76) muda e a inflação se torna instável. É natural supor que H^* seja próximo da escala de massa onde ocorre a quebra da supersimetria, M_{SUSY} . Outra quantidade que também depende da mesma escala é

$$\tilde{f} \sim \left(\frac{H^*}{M_P} \right)^2. \quad (5.22)$$

A próxima questão importante é o que acontece com o universo depois que ele atravessa o ponto crítico $H(t) = H^*$. De fato, esta questão é muito difícil de responder e vamos ter que mudar a nossa abordagem. Até o presente momento, toda nossa consideração foi baseada no uso de resultados obtidos através da teoria quântica de campos como, por exemplo, a equação (5.19). Infelizmente, nas proximidades do ponto crítico $H = H^*$ a teoria quântica de campos não fornece nenhuma ajuda real para o nosso problema. A razão é que não temos métodos para calcular as correções quânticas no espaço-tempo curvo na situação em que o parâmetro de Hubble é da mesma ordem das massas dos campos quânticos. As técnicas usadas nessa seção, bem como a usual expansão nas potências do tensor de curvatura sobre o quadrado das massas dos campos quânticos, não fazem muito sentido aqui.

Na próxima seção vamos lidar com esse complicado problema da maneira mais simples possível, que vamos chamar de aproximação de *sharp cut-off*. A saber, vamos fazer uma grande simplificação e ignorar completamente os efeitos quânticos na fase intermediária, considerando o ponto final da evolução (5.21) como ponto de partida da inflação instável.

5.2 Estudo numérico da transição para a época da inflação instável

Na aproximação de *sharp cut-off* consideramos o ponto final da evolução estável do universo como o ponto inicial da inflação instável. Sendo assim, para construirmos um conjunto completo de condições iniciais, considere que a fase estável termina no instante de tempo t_* , no qual o parâmetro de Hubble assume o valor H^* , correspondente a equação

(5.22), isto é,

$$H^* = H(t_*) \approx \sqrt{\tilde{f}} M_P. \quad (5.23)$$

Considerando a derivada temporal da equação (5.21) no ponto t_* e comparando o resultado com a fórmula (5.23), encontramos o valor do momento final da inflação estável

$$t_* \approx \frac{2}{H_0^2 \tilde{f}} \left(H_0 - \sqrt{\tilde{f}} M_P \right). \quad (5.24)$$

As condições iniciais para uma conseqüente evolução instável podem então ser calculadas por meio das equações (5.21) e (5.24), usando o conteúdo de partículas do MSPM.

Vamos agora dar uma explicação sobre quais valores \tilde{f} pode assumir. Esse parâmetro está relacionado pela fórmula (5.22) com H^* , que determina a escala de energia em que a inflação estável termina. O valor da escala típica H^* pode ser da ordem da escala da quebra de supersimetria M_{SUSI} . A escala da quebra de simetria que é usualmente empregada para resolver o problema da hierarquia de calibre está na ordem de $M_F \approx TeV \approx 10^3 GeV$, o que nos dá o valor $\tilde{f} \approx 10^{-32}$. Entretanto, não existe um limite superior em que a quebra de simetria possa ocorrer, podendo ser na escala das teorias de grande unificação, onde $M_X \approx 10^{16} GeV$, ou até mesmo na escala de Plank $M_P = 10^{19} GeV$, dependendo do modelo supersimétrico. O único aspecto da supersimetria que é relevante aqui é a sua quebra e a conseqüente mudança de sinal na relação (5.5), portanto, não estamos confinados a nenhuma escala específica da quebra de supersimetria. Contudo, um modelo inflacionário que pretende descrever o espectro de potência da densidade de perturbações cósmicas (sem o inflaton), deve ter $H^* \gtrsim 10^{14} GeV$ [203, 205]. Assim, o valor de \tilde{f} não deve ser menor do que $\tilde{f} \approx 10^{-10}$. Uma vez que na escala da quebra de supersimetria das teorias de grande unificação temos $\tilde{f} \approx 10^{-6}$ esse será o caso de maior interesse. O valor de H^* pode ser até mesmo algumas ordens de grandeza diferente de M_{SUSI} , pois nessa escala não precisamos que todas as partículas supersimétricas já tenham desacoplado, é necessário apenas que um número suficiente de partículas mais leves do que H^* já o tenham feito, de maneira que $c < 0$. Desse modo, \tilde{f} pode assumir valores tais quais 10^{-5} ou até mesmo 10^{-4} . A seguir, escolheremos $\tilde{f} = 10^{-4}$, que corresponde a escala $H^* \approx 10 M_X$.

Vamos agora apresentar os resultados da solução numérica da equação (5.3) para o caso instável com as condições iniciais correspondendo ao ponto inicial H^* . Primeiramente, consideramos a inflação instável com o conteúdo de partículas do Modelo Padrão.

A solução numérica em pequenas escalas de tempo mostram oscilações no parâmetro de Hubble H como mostrado na figura 5.3.

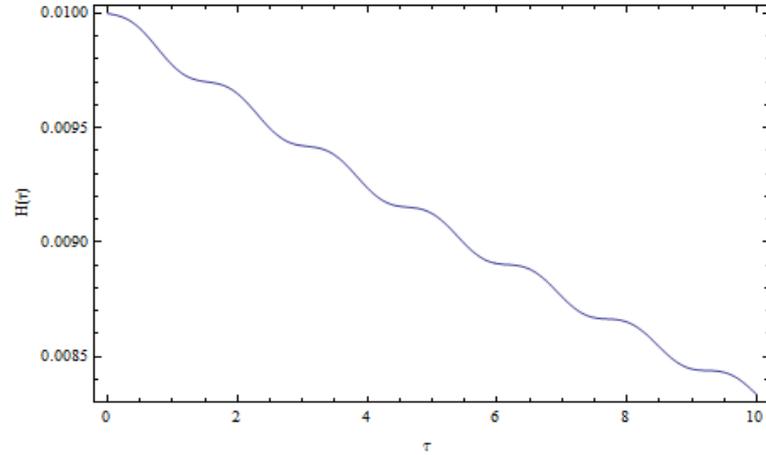


Figura 5.3: Solução numérica para o parâmetro de Hubble H em unidades de tempo de Planck $\tau \equiv t/t_P$ para o conteúdo de partículas do MP com $\tilde{f} = 10^{-4}$.

Depois de passado algum tempo, a amplitude dessas oscilações se tornam menores e o parâmetro de Hubble começa a se comportar bastante parecido com uma evolução do tipo FLRW sem correções quânticas, com lei de potência do tipo $H(t) = 1/(nt)$. Essa situação é ilustrada na figura 5.4.

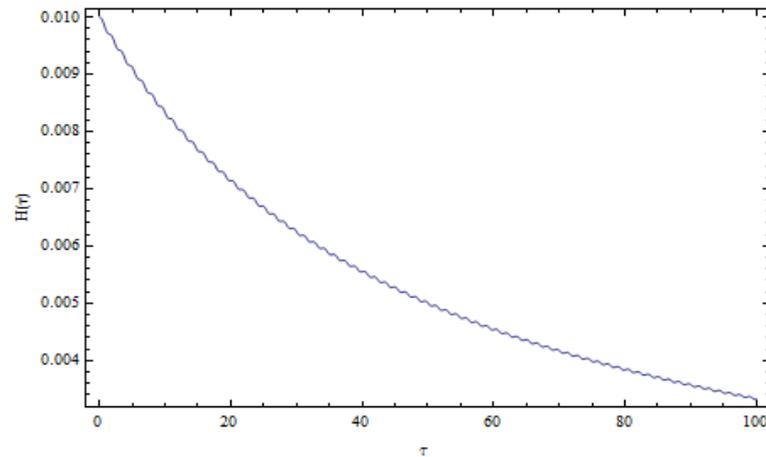


Figura 5.4: O mesmo caso do que na figura 5.3, entretanto, com uma escala de tempo maior.

Podemos ver também qual curva integral no diagrama de fase da figura 5.1 do caso instável corresponde ao ponto inicial (x^*, y^*) , onde a fase estável termina. Esse ponto pode ser encontrado substituindo a solução (5.21) com o tempo inicial (5.24) nas expressões

(5.8). Dessa maneira, encontramos a curva integral mostrada na figura 5.5.

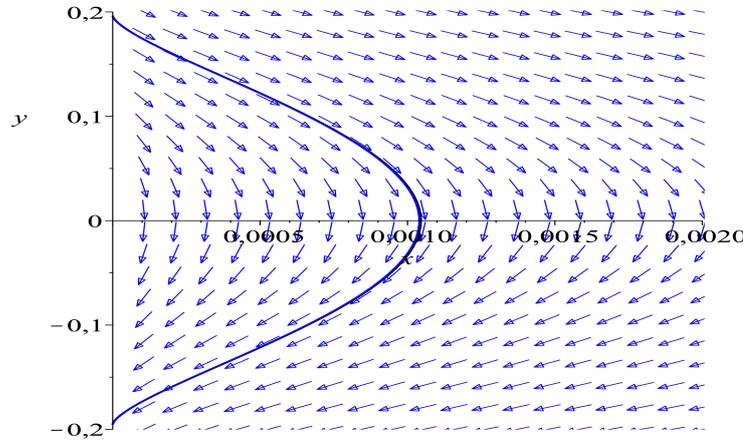


Figura 5.5: Curva integral do diagrama de fase instável correspondente a H^* com $\tilde{f} = 10^{-4}$.

O resultado apresentado acima está dentro das nossas expectativas mais otimistas. Ele corresponde exatamente à solução instável pacífica que é qualitativamente similar a uma das soluções encontradas na referência [211] e não à solução explosiva do tipo de hiperinflação descrita na referência [81].

Entretanto, essa solução não corresponde à inflação fisicamente aceitável, pois para termos um modelo bem sucedido que está de acordo com as observações, necessitamos que o coeficiente do termo R^2 tenha um valor muito maior do que é possível se obter usando o conteúdo de partículas do MP, a cerca de 5×10^8 . Esse valor é necessário para controlar as densidades de perturbações cósmicas depois que o período da inflação termina [212]. Portanto, vamos agora supor que existe aumento desejado do valor do coeficiente a_4 no período de transição entre os períodos de inflação estável e instável. Repetindo a análise feita no caso anterior, mas agora com o valor de $a_4 = 5 \times 10^8$, encontramos o resultado numérico mostrado na figura 5.6. A interpretação desse gráfico é a seguinte: no começo temos um valor inicial relativamente grande de H remanescente da fase estável, seguido de uma brusca queda do seu valor. Logo depois de algumas oscilações o termo grande R^2 começa a dominar a solução e o universo começa o período da inflação instável no modelo $R + R^2$. A expressão analítica para essa fase é dada por [212]

$$\sigma(t) = H_1 t - \frac{M^2}{12} t^2 + \mathcal{O}(\ln(t_f - t)), \quad (5.25)$$

onde $M \ll H$ nessa fase, t_f corresponde ao tempo final da inflação e H_1 é uma constante

de integração. Essa fórmula é responsável pela dependência no tempo aproximadamente linear de H que podemos observar no gráfico em discussão. O cálculo do coeficiente angular da reta no gráfico 5.6 leva ao valor de $M \approx 10^{-5}$ (em unidades de massa de Planck), que é a quantidade necessária para descrever as observações do espectro de potências da densidade de perturbações escalares primordiais [212].

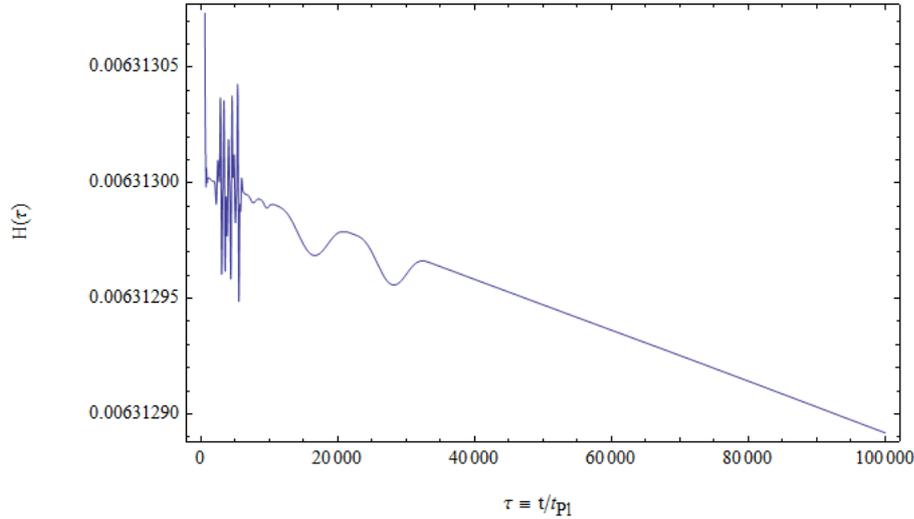


Figura 5.6: O gráfico de $H(t)$ para $a_4 = 5 \times 10^8$.

A transição entre as fases estável para a instável é muito bem sucedida na presença de um termo enorme R^2 , uma vez que ela leva à dinâmica conhecida após essa transição, que é exatamente a dinâmica que passou por alguns testes em comparação com dados observacionais. A característica distinta do modelo de inflação baseado na transição estável/instável é a presença da fase preliminar estável. As consequências da fase estável podem não ser observáveis, no entanto, essa fase fornece as condições iniciais adequadas para a fase instável que pode ser fisicamente testada.

Seria muito interessante estender esses resultados para o caso em que a métrica é inicialmente anisotrópica. Existe uma forte expectativa de que as anisotropias desapareçam rapidamente durante a fase de inflação estável, porém, isso ainda exige uma investigação mais detalhada em um trabalho futuro.

5.3 Exemplos de mecanismos quânticos que podem gerar um termo R^2 enorme

Como vimos na seção anterior, por meio da aproximação de *sharp-cut off* é possível ter uma transição bem sucedida entre as fases de inflação estável e instável. A transição entre essas fases pode ser fisicamente explicada por meio da descrição conforme dos campos quânticos massivos e pelo conseqüente desacoplamento das partículas supersimétricas da gravitação. Contudo, para termos um modelo inflacionário bem sucedido, precisamos ir além do que é possível ser obtido por esse método. A razão é que é necessário que o coeficiente do termo R^2 tenha um valor muito grande, por volta de 5×10^8 , para controlar as densidades das perturbações depois que o período da inflação termina [212]. Esse valor é muito maior do que é possível ser obtido por meio da ação efetiva induzida pela anomalia conforme e o desacoplamento quântico das partículas supersimétricas pode apenas explicar a mudança no sinal do coeficiente c , não podendo fazer com que o mesmo cresça tanto. O objetivo dessa seção é discutir outros mecanismos quânticos que podem produzir uma alteração dramática do coeficiente c na época próxima da troca do seu sinal.

Podemos ressaltar também que até o presente momento não temos nenhuma informação experimental realmente confiável sobre as teorias físicas na escala das teorias de grande unificação, ou até mesmo da escala em que a supersimetria é quebrada, em que a transição das versões de inflação estável para instável deve ocorrer. Por esse motivo, não estamos em condições de indicar um mecanismo definitivo que proporcione um crescimento tão dramático do coeficiente do termo R^2 . Em vez disso, descreveremos duas possíveis situações onde esse fenômeno possa ocorrer. Em ambos os casos nossa consideração será baseada na relação entre a interação escalar não-mínima com a curvatura e o termo de vácuo R^2 . Essa relação foi previamente discutida no contexto das teorias de supergravidade na referência [124].

5.3.1 Grupo de renormalização e a mudança dos parâmetros da teoria

O grupo de renormalização (GR) no espaço-tempo curvo mostra que os valores de todos os parâmetros da teoria podem variar com a mudança da escala de energia (veja,

por exemplo, a referência [42]). Em particular, o GR para o coeficiente a_4 na ação do vácuo (2.1) tem, na teoria com interação, a forma geral

$$\mu \frac{da_4}{d\mu} = \beta_4 = l_1 + l_2 \xi + l_3 \xi^2, \quad (5.26)$$

onde ξ é o parâmetro não-mínimo de interação entre escalares e a gravitação, $\xi R\varphi^2$ (veja a equação (2.8)). Já os coeficientes $l_{1,2,3}$ podem ser expressos como uma série de potências nas constantes de acoplamento com ordem dependendo da precisão levada em consideração na expansão em *loops*. Vamos considerar um modelo de grande unificação de altas energias, contendo no seu setor de interação os acoplamentos de calibre g , Yukawa h e autointeração quártica entre escalares λ , de maneira que, $l_{1,2,3} = l_{1,2,3}(g, h, \lambda)$.

Todas as quantidades presentes na equação (5.26) também estão mudando e satisfazem suas próprias equações do GR. Em particular, a equação para o parâmetro ξ tem a forma geral

$$\mu \frac{d\xi}{d\mu} = \beta_\xi = l_4 + l_5 \xi, \quad (5.27)$$

onde $l_{4,5} = l_{4,5}(g, h, \lambda)$. Em princípio, a fórmula (5.27) pode ser responsável por mudar o sinal de ξ e também por uma mudança significativa de seu módulo, até mesmo em pequenos intervalos da escala de energia μ . A condição necessária para uma variação intensiva de ξ são valores grandes de, pelo menos, algum dos acoplamentos g , h , ou λ . Note que as expressões de 1-*loop* são muito mais simples, a saber,

$$\beta_4 = l_3 \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2, \quad \beta_\xi = l_5 \left(\xi - \frac{1}{6} \right), \quad (5.28)$$

onde

$$l_5 \sim l_{51} f + l_{52} h^2 + l_{53} g^2 \quad (5.29)$$

e os coeficientes l_3 , l_{51} , l_{52} , l_{53} são valores constantes que dependem do modelo em questão.

No nível de 1-*loop* os valores conformes $\xi = 1/6$ e $a_4 = 0$ são pontos fixos do fluxo do GR, que podem ser estáveis tanto no ultravioleta como no infravermelho [46]. Entretanto, nas ordens superiores da expansão em *loops*, o valor conforme $\xi = 1/6$ não é mais um ponto fixo, como foi encontrado na referência [108] (para demonstração desse fato a partir de considerações gerais, veja [13, 177]). É natural, embora não necessário, supor que o valor de ξ no ultravioleta extremo seja conforme. Imagine que esse ultravioleta

extremo corresponda a energias subplankianas. Nessa situação, o valor de ξ pode se tornar muito diferente do valor conforme já na escala da teoria de grande unificação, devido a sua mudança descrita pela equação (5.27). Desse modo, quando se trata da transição de uma teoria de grande unificação para alguma teoria de energia mais baixa, ξ pode estar, essencialmente, longe do ponto conforme, mesmo que ele tenha assumido esse valor no ultravioleta.

Outra observação importante é que em torno da escala de transição estável/instável alguma das interações podem se tornar muito fortes. Portanto, não há nada de errado em ter uma variação muito intensiva de ξ em um pequeno intervalo da escala de energia, antes do seu *running* parar devido ao desacoplamento quântico no infravermelho. A próxima observação é que se $|\xi|$ se torna muito grande, o coeficiente a_4 se torna ainda maior, por causa da dependência quadrática na equação (5.26). Também é importante notar que ξ e a_4 são os acoplamentos da teoria renormalizada, sendo assim, eles não são os parâmetros nus da teoria semiclássica. Portanto, não há nenhuma contradição em que seus valores sejam grandes, mesmo dentro da abordagem perturbativa padrão.

Esses argumentos podem de fato, explicar facilmente o valor de $\xi \approx 40.000$, que é necessário para a inflação de Higgs [26]. De uma maneira igualmente bem, ou até mesmo mais natural, esses argumentos podem explicar o valor do coeficiente a_4 de 5×10^8 , visto que esse é grosseiramente dado pelo quadrado do valor mencionado de ξ . Seria um problema muito interessante construir um modelo de teoria de grande unificação e a sua consequente quebra no modelo padrão mais um setor escuro oculto, que produz a situação descrita acima. Todavia, como essa consideração está além do escopo da presente tese, vamos descrever uma segunda possibilidade de se gerar um grande valor do coeficiente a_4 do termo R^2 .

5.3.2 Quebra espontânea de simetria com ξ diferente de zero

Como segundo exemplo, discutiremos de que forma o termo R^2 pode surgir devido à quebra espontânea de simetria (QES) na presença do acoplamento não-mínimo entre campo escalar e a curvatura escalar, $\xi R\varphi^2$. Esse termo não pode ser negligenciado, porque $\xi \neq 0$ é uma condição necessária para a consistência da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo [42].

Comecemos pela revisão da QES no espaço-tempo curvo da mesma maneira que ela foi originalmente discutida na referência [100]. Considere a ação clássica de um campo escalar complexo φ ,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \mu_0^2 \varphi^* \varphi + \xi R \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 \right\}. \quad (5.30)$$

O valor esperado do vácuo v do campo escalar é definido como a solução da equação de movimento

$$-\square v + \mu_0^2 v + \xi R v - 2\lambda v^3 = 0. \quad (5.31)$$

Se a interação entre o escalar e a métrica for mínima $\xi = 0$ e a QES tem a mesma forma do que no espaço-tempo plano. Temos assim, a solução constante

$$v_0^2 = \frac{\mu_0^2}{2\lambda}. \quad (5.32)$$

Nesse caso, o esquema convencional da quebra espontânea de simetria não requer nenhuma modificação por causa da presença da métrica externa. Entretanto, no caso geral devido à curvatura variável presente na equação (5.31), não é possível obter uma solução constante. Assim, as derivadas de v não podem ser desprezadas e, infelizmente, uma solução em forma fechada e simples para o valor esperado do vácuo não pode ser obtida. Porém, para uma curvatura que varia lentamente, podemos expressar a solução da equação (5.31) por meio de uma série de potências em ξ , usando a fórmula (5.32) como aproximação de ordem zero

$$v(x) = v_0 + v_1(x) + v_2(x) + \dots \quad (5.33)$$

A solução para o termo de primeira ordem $v_1(x)$, tem a seguinte forma [100]

$$v_1 = \frac{\xi v_0}{\square - \mu^2 + 6\lambda v_0^2} R = \frac{\xi v_0}{\square + 4\lambda v_0^2} R. \quad (5.34)$$

Já a próxima ordem dessa expansão, pode ser expressa como

$$v_2 = \frac{\xi^2 v_0}{\square + 4\lambda v_0^2} R \frac{1}{\square + 4\lambda v_0^2} R - \frac{6\lambda \xi^2 v_0^3}{\square + 4\lambda v_0^2} \left(\frac{1}{\square + 4\lambda v_0^2} R \right)^2. \quad (5.35)$$

Em princípio, a expansão (5.33) pode ser continuada até a ordem desejada.

Substituído a solução (5.33) na ação do campo escalar (5.30), obtemos a ação do vácuo induzida de baixas energias, que depende apenas da métrica,

$$S_{ind} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \lambda v_0^4 + \xi v_0^2 R + \xi^2 v_0^2 R \frac{1}{\square + 4\lambda v_0^2} R + \dots \right\}. \quad (5.36)$$

Vamos agora fazer algumas pequenas observações a respeito do resultado (5.36). O primeiro termo dessa equação representa a constante cosmológica induzida. Sua densidade é muito maior do que o seu valor observado, desse modo, precisamos introduzir uma constante cosmológica de compensação do vácuo. Existe uma ampla discussão na literatura sobre o problema da constante cosmológica e do conseqüente ajuste fino que é necessário para essa compensação. Para maiores detalhes veja, por exemplo, o artigo de revisão [228] e as referências [206, 207], que trataram desse problema no ponto de vista da teoria quântica de campos. Já o segundo termo presente na equação (5.36) é o termo de Einstein-Hilbert induzido. Para $\xi v_0^2 \ll M_P^2$ o valor do coeficiente desse termo não é suficiente para gerar uma gravitação puramente induzida, de maneira que também é necessário introduzir o correspondente termo de vácuo. No caso do Modelo Padrão com o campo escalar de Higgs e com o valor $\xi \approx 10^4$, o termo induzido é apenas uma pequena correção para o termo de vácuo. A situação nesse caso é oposta ao que acontece com o termo de constante cosmológica.

O terceiro termo do lado direito da equação (5.36) é quadrático tanto na curvatura escalar como em ξ e não é local. Esse termo se comporta de uma maneira bastante diferente nos limites ultravioleta e infravermelho. A definição do ultravioleta é aqui relacionada com o valor das derivadas do tensor de curvatura quando comparado com v_0^2 . Para $\square R \gg v_0^2 R$ esse termo é essencialmente não-local. No caso da inflação, quando R é aproximadamente constante, temos a relação oposta $\square R \ll v_0^2 R$. Então, nesse caso o terceiro termo da equação (5.36) se torna efetivamente local e é igual à

$$S_{ind} = \frac{\xi^2}{4\lambda} \int d^4x \sqrt{-g} R^2. \quad (5.37)$$

O termo (5.37) devido à quebra espontânea de simetria tem justamente a forma necessária para um salto bem sucedido no valor do coeficiente do termo R^2 , desde que ξ^2/λ tenha um valor grande. Uma questão importante é se um valor grande de ξ é natural nesse caso. Como ξ é uma quantidade adimensional ele não pode ser considerado grande ou pequeno sozinho. A fim de avaliar se ξ é grande ou não, precisamos compará-lo dentro de combinações dimensionais com alguma outra quantidade de referência. No caso em questão, a comparação deve ser feita entre ξR e o quadrado da massa m do campo escalar, uma vez que eles sempre aparecem em uma combinação do tipo $m^2 + \xi R$. No universo atual com o campo de Higgs, por exemplo, os números são $m^2 = m_H^2 \propto 10^4 GeV^2$ e $R \sim H_0^2 \propto 10^{-84} GeV^2$ (H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble). Desse modo, os

valores de $\xi = 10^4 - 10^5$ não parecem grandes neste caso. De fato, a situação pode ser bastante diferente no início do universo, uma vez que a curvatura foi muito maior nessa época. Nessa situação os efeitos da curvatura podem ser relevantes tanto para a QES como para o Higgs, o que é bem conhecido pelos estudos de transições de fase induzida pela curvatura (veja, por exemplo, [42]) e da inflação de Higgs [18, 26, 27]. Entretanto, as considerações que foram apresentadas aqui não estão diretamente relacionadas com o campo de Higgs e com o Modelo Padrão, podendo também serem aplicadas às teorias mais gerais em diferentes escalas de energia, como as teorias de grande unificação.

Como também já foi discutido anteriormente, as correções quânticas podem produzir uma variação intensiva de ξ . Nos modelos de teorias de grande unificação com vários escalares existem, tipicamente, diferentes acoplamentos ξ e λ para cada um desses escalares. Assim, é suficiente que apenas uma das combinações ξ^2/λ se torne muito grande durante o período de transição para proporcionar o valor desejado do coeficiente induzido a_4 . Seria definitivamente interessante construir uma realização explícita dessa situação em algum modelo de teoria de grande unificação.

A principal diferença entre o esquema aqui apresentado e o discutido na subseção anterior, reside no fato de que no caso anterior admitimos restrições nos coeficientes $l_{1,2,3}$ e $l_{4,5}$ nas equações (5.26) e (5.27), respectivamente. Esses coeficientes são dependentes do modelo e representam algumas condições que o modelo de teoria de campo deva satisfazer. Por outro lado, o esquema descrito aqui não requer restrições nesses coeficientes, mas, em vez disso, temos de supor que existe uma quebra espontânea de simetria na escala de energia correspondente.

Contribuição do fóton para a ação efetiva do vácuo na eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz

Extensões do Modelo Padrão da física de partículas em que alguma simetria fundamental da natureza é violada, como, por exemplo, as simetrias de Lorentz e/ou CPT, tem atraído, desde o trabalho monumental de Alan Kostelecký [127], bastante atenção na literatura. Essas teorias representam uma nova física que pode em princípio ser testada experimentalmente (e de fato são, para maiores detalhes da parte fenomenológica veja o artigo de revisão [35]). Além disso, mesmo que essas violações não sejam encontradas, este tipo de estudo é importante, pois permite uma melhor compreensão dos limites de aplicação da Física atual.

No entanto, no caso das teorias gravitacionais estendidas com violação das simetrias de Lorentz e/ou CPT existe uma grande dificuldade no seu estudo, por causa da imensa quantidade de termos possíveis na ação gravitacional que podem violar essas simetrias. O número de estruturas até a quarta ordem nas derivadas pode chegar, por exemplo, na ordem de $10^2 - 10^3$ (veja, por exemplo, na referência [54] a ação geral do vácuo com torção, que representa apenas uma pequena quantidade dos termos que podem violar as simetrias de Lorentz e/ou CPT). Uma possibilidade para contornar essa dificuldade é permitir somente a introdução dos termos que violam as simetrias no setor gravitacional que podem ser calculados como correções quânticas semiclássicas para a ação do vácuo a partir das teorias de campos da matéria que violam as simetrias de Lorentz e/ou CPT.

Dentre todas as teorias de campos da matéria, a contribuição mais relevante é devido aos fótons, pois como todas as outras partículas são massivas, elas desacoplam antes da gravidade de acordo com o teorema de Appelquist e Carazzone [10, 98]. Por esse motivo, neste capítulo iremos considerar a contribuição quântica para a ação do vácuo devido ao fóton na eletrodinâmica com quebra da simetria de Lorentz. Os cálculos quânticos nessa teoria foram realizados nos primeiros artigos [52, 129, 230] por meio dos diagramas de Feynman no espaço-tempo plano. Logo depois, os métodos funcionais, como a técnica de Schwinger-DeWitt, foram utilizados na referência [179]. Nesse artigo a renormalização foi estudada no espaço-tempo curvo e algumas de suas características gerais foram estabelecidas. Apesar disso, os cálculos dessa referência não foram completos, pois apenas a parte mínima do operador bilinear nos campos quânticos foi levada em consideração. Sendo assim, iremos neste capítulo além do resultado da referência [179] e calculamos, pela primeira vez, a contribuição total (em primeira ordem) do parâmetro adimensional $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ para a renormalização do vácuo. Para isto obtemos as divergências de *1-loop* e como mesmo na presença dos termos que violam a simetria de Lorentz essa teoria possui simetria conforme, calculamos a anomalia conforme e a ação efetiva induzida pela anomalia conforme. Além disso, consideramos o efeito dos novos termos na inflação induzida pela anomalia conforme.

Este capítulo se organiza da seguinte maneira: na seção 6.1 fazemos uma breve revisão sobre o modelo da eletrodinâmica com quebra de simetria de Lorentz. Deixamos referências ao leitor para um maior aprofundamento nessa teoria. A seção 6.2 contém os detalhes dos cálculo das divergências de *1-loop*. Como o leitor verá a seguir esse tipo de cálculo é bastante complicado por causa da presença dos campos externos responsáveis pela quebra de simetria. Contornamos essa dificuldade realizando uma expansão nesses campos, porém, como um desses campos é adimensional essa série é infinita. Considerando que os parâmetros que violam a simetria sejam pequenos, realizamos os cálculos até a primeira ordem. Também faremos nessa seção um breve comentário sobre a estrutura geral da renormalização dessa teoria. A seção 6.2 é dedicada ao cálculo da anomalia conforme e da ação efetiva da gravidade induzida pela anomalia. Logo depois, finalizamos este capítulo discutindo na seção 6.4 a aplicação dos resultados na Cosmologia.

6.1 A ação da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz no espaço-tempo curvo

Para introduzir a ação que descreve o campo eletromagnético com violação da simetria de Lorentz no espaço-tempo curvo, podemos realizar um processo análogo ao que foi considerado na seção 2.3. A única diferença com o método de generalização não-mínimo é que violamos aqui o princípio (*iii*) permitindo a introdução de parâmetros que definem uma direção preferencial no espaço-tempo. Os outros princípios como a covariância geral, simetria de calibre e localidade serão mantidos. Não introduzimos também parâmetros com dimensão de [massa]⁻¹. Desse modo, a ação mais geral algebricamente possível pode ser escrita como [59, 179]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} k_F^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} k_{AF}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} A^\beta F^{\mu\nu} \right\}, \quad (6.1)$$

onde $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ e k_{AF}^α são os parâmetros responsáveis por descrever a violação da simetria de Lorentz. Na presença de férmions interagindo com o campo eletromagnético, o parâmetro k_{AF}^α também é responsável pela quebra da simetria de CPT. As propriedades algébricas de $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ são, por construção, as mesmas do que o tensor de curvatura de Riemann. O parâmetro k_{AF}^α tem dimensão de massa, enquanto que $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional.

Ambos os novos termos introduzidos são tensores, o que implica que a Física ainda é independente da escolha de coordenadas do observador. Entretanto, os coeficientes k_{AF}^α e $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ introduzem uma direção preferencial no espaço-tempo, de maneira que os fótons podem interagir com esses campos de fundo e sofrer efeitos dependentes do referencial, violando assim a invariância de Lorentz. Algebricamente a teoria com a violação de Lorentz é bastante similar ao eletromagnetismo nos dielétricos. Sendo assim, vários dos efeitos da luz passando por materiais transparentes também estão presentes nessa teoria. Isso inclui, por exemplo, a mudança na velocidade, direção de propagação e polarização da luz e o fenômeno da birrefringência. Outro interessante novo aspecto dessa teoria é a possibilidade da dispersão da luz no vácuo. Para uma discussão mais aprofundada deixamos ao leitor as referências [6, 9, 59, 120, 130, 131, 133] nas quais as numerosas implicações fenomenológicas, bem como a possível origem desses parâmetros, foram abordadas.

Para finalizar, um último comentário sobre a ação (6.1) é importante. O último termo na fórmula (6.1) parece, a primeira vista, não possuir invariância de calibre de-

vido à presença explícita do campo vetorial A_μ . Porém, se admitirmos que $\nabla^\beta k_{AF}^\alpha = 0$ a invariância de calibre pode ser preservada. Para a demonstração, considere a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu f$. Logo, encontramos no último termo da equação (6.1) a quantidade não-invariante $k_{AF}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \nabla^\beta f F^{\mu\nu}$. Contudo, essa expressão é nula, pois através de uma integração por partes podemos transformá-la em

$$k_{AF}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \nabla^\beta f F^{\mu\nu} = -(\nabla^\beta k_{AF}^\alpha) \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} f F^{\mu\nu} - k_{AF}^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} f (\nabla^\beta F^{\mu\nu}). \quad (6.2)$$

O primeiro termo no lado direito da equação acima é zero, porque supomos que $\nabla^\beta k_{AF}^\alpha = 0$. Já o último termo também se anula por causa das equações de Maxwell homogêneas $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu F_{\alpha\beta} = 0$.

6.2 O cálculo das divergências de 1-loop

A ação efetiva de 1-loop para o campo eletromagnético é dada pela expressão

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} - i \text{Tr} \ln \hat{H}_{gh}, \quad (6.3)$$

onde \hat{H} é o operador bilinear nos campos quânticos e \hat{H}_{gh} é o operador do termo dos fantasmas de calibre de Faddeev-Popov. Introduzimos o seguinte termo de fixação de calibre

$$S_{gf} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu A^\mu)^2. \quad (6.4)$$

Para essa escolha, os correspondentes fantasmas de Faddeev-Popov contribuem apenas para o setor de vácuo da teoria (que depende apenas da métrica), não contribuindo para a parte com os novos termos que violam a simetria de Lorentz.

Para a ação (6.1) o operador bilinear $\hat{H} = H^{\mu\nu}$ tem a forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_F, \quad (6.5)$$

$$\hat{H}_0 = g^{\mu\nu} \square - R^{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

$$\hat{H}_{AF} = -2 k_{AF}^\alpha \epsilon_\alpha^{\mu\nu\beta} \nabla_\beta, \quad (6.7)$$

$$\hat{H}_F = -2 k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta - 2(\nabla_\alpha k_F^{\mu\alpha\beta\nu}) \nabla_\beta + k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\lambda\alpha\beta}^\nu. \quad (6.8)$$

A observação mais importante sobre esse operador é que ele possui uma forma não-mínima em razão da presença do termo $k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ na equação (6.8). Sendo assim,

como esse operador é não-mínimo, a técnica padrão de Schwinger-DeWitt para o cálculo das divergências não pode ser aplicada aqui. Para lidarmos com operadores não-mínimos devemos usar a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [21]. A principal idéia nesse formalismo é reduzir a fórmula da ação efetiva em partes menores conhecidas como traços funcionais universais (veja o apêndice A). A parte divergente dos traços funcionais universais pode então, ser obtida por meio de integrais sobre o tempo próprio s .

As técnicas de redução da ação efetiva desenvolvidas na referência [21] funcionam bem em casos nos quais os termos não-mínimos contem parâmetros escalares contínuos, de maneira que podemos realizar uma integração sobre esse parâmetro do zero (correspondendo ao limite do operador mínimo) até algum valor específico. Entretanto, no caso do operador (6.5) não temos um parâmetro escalar, mas sim um campo tensorial. Assim, os métodos de redução da referência [21] não podem ser aplicados aqui e o problema do cálculo geral das divergências na teoria (6.1) está além das possibilidades atuais de cálculo. Por esse motivo, podemos tentar considerar alguma aproximação. Como os limites superiores experimentais dos valores dos parâmetros $k_F^{\mu\alpha\beta\lambda}$ e k_{AF}^α são pequenos (as tabelas de dados com os vínculos experimentais que esses parâmetros devem satisfazer, podem ser encontradas na referência [132]), realizaremos uma expansão da ação efetiva nesses parâmetros, lidando apenas com os termos da ordem linear.

Para isso, separamos o operador bilinear como

$$\hat{H} = \hat{H}_m + \hat{H}_{nm}, \quad (6.9)$$

onde \hat{H}_m é a sua parte mínima

$$\hat{H}_m = \hat{H}_0 + \hat{H}_{AF} - 2(\nabla_\alpha k_F^{\mu\alpha\beta\nu})\nabla_\beta + k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\lambda\alpha\beta}^\nu \quad (6.10)$$

e \hat{H}_{nm} a sua parte não-mínima

$$\hat{H}_{nm} = -2 k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta. \quad (6.11)$$

Assim, podemos fazer a seguinte transformação

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \hat{H} &= \text{Tr} \ln (\hat{H}_m + \hat{H}_{nm}) = \text{Tr} \ln \hat{H}_m + \text{Tr} \ln (\hat{1} + \hat{H}_m^{-1} \hat{H}_{nm}) \\ &= \text{Tr} \ln \hat{H}_m + \text{Tr} \hat{H}_{nm} \hat{H}_m^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

Na obtenção da expressão (6.12) utilizamos as propriedades do traço e do logaritmo. Realizamos também uma expansão em séries de potência e mantemos apenas os termos que são de primeira ordem nos parâmetros que violam a simetria de Lorentz.

O primeiro termo na última linha da equação (6.12) contém apenas um operador mínimo e pode ser diretamente calculado através da técnica padrão de Schwinger-DeWitt. Já o segundo termo pode ser calculado, depois da inversão do operador \hat{H}_0 , por meio das fórmulas dos traços funcionais universais de Barvinsky e Vilkovisky [21]. Os detalhes dessa consideração estão expostos no apêndice A, seções A.2 e A.3.

Finalmente, utilizando as fórmulas (6.12), (A.14) e (A.26), encontramos o seguinte resultado para as divergências de 1-loop

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} K(g_{\mu\nu}, k_F) + \bar{\Gamma}_{vac}^{(1)}, \quad (6.13)$$

onde $\bar{\Gamma}_{vac}^{(1)}$ é a parte divergente da ação efetiva de vácuo para o campo vetorial, definido anteriormente na fórmula (2.55),

$$\begin{aligned} K(g_{\mu\nu}, k_F) &= \frac{1}{45} k_F^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{19}{180} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\mu\nu} R_{\beta}{}^{\lambda\mu\nu} - \frac{49}{90} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda} R_{\beta}^{\lambda} \\ &+ \frac{2}{9} k_F^{\alpha\beta} R R_{\alpha\beta} + \frac{1}{5} R_{\alpha\beta} \square k_F^{\alpha\beta} - \frac{1}{15} R \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} k_F^{\alpha\beta} + \frac{1}{3} k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} R_{\cdot\mu\alpha\tau} R_{\lambda\nu\beta}{}^{\tau} \\ &- \frac{1}{3} R_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} + \frac{1}{3} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} R_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^{\beta} \nabla_{\lambda} k_F^{\mu\alpha\lambda\nu} \\ &- \frac{1}{12} k_F^{\mu\nu\alpha\beta} R R_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2} k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\cdot\alpha\beta\lambda}^{\nu} R_{\mu\nu} - k_F \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu}^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

e usamos as seguintes notações $k_F^{\mu\lambda\nu}{}_{\lambda} = k_F^{\mu\nu}$ e $k_F = g_{\mu\nu} k_F^{\mu\nu}$.

O resultado (6.13) representa apenas o termo de primeira ordem de uma expansão em séries no campo externo $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$. Como $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional essa série é infinita. A situação aqui é análoga ao que acontece com a métrica, que também é um campo adimensional. No entanto, no caso da métrica, devido à covariância geral é possível organizar um conjunto infinito de termos no parâmetro $h_{\mu\nu}$ em uma pequena quantidade de expressões covariantes, a saber, $R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$, $R_{\mu\nu}^2$, R^2 e $\square R$. Já para a teoria (6.1), a situação é completamente diferente, pois $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ é um parâmetro de origem puramente fenomenológica e não existe nenhuma simetria fundamental por trás do mesmo. Portanto, é impossível restaurar um conjunto completo de contratermos a partir da expansão de ordem inferior (6.13) e no caso em que houver interesse os termos da próxima ordem devem ser calculados explicitamente.

Ao mesmo tempo, existem duas informações exatas sobre os termos de ordem superior. Primeiro, como $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ é adimensional, os argumentos baseados no *power counting*

que foram mencionados anteriormente na seção 2.1 não mudam, e por esse motivo esses termos terão exatamente quatro derivadas. Isso significa que eles serão quadráticos nas componentes dos tensores de curvatura ou estruturas como $\nabla R \cdot k_F \dots k_F \nabla k_F$, $\nabla \nabla R \cdot k_F \dots k_F$, $R \cdot k_F \dots k_F \nabla \nabla k_F$, $\nabla R \cdot k_F \dots \nabla k_F \nabla k_F$, $k_F \dots k_F (\nabla k_F)^4$, $k_F \dots k_F (\nabla k_F)^2 (\nabla k_F)^2$, etc. A segunda propriedade é referente à simetria conforme local. Como será discutido na próxima seção, a teoria (6.1) possui simetria conforme local. Por essa razão, a ação efetiva também satisfaz essa simetria [70, 76], então, o mesmo vale, em quatro dimensões, nos contrataremos para cada diferente ordem no campo $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$. Isso pode ser usado, por exemplo, como meio de verificação dos resultados obtidos.

6.3 Simetria conforme local, anomalia conforme e a ação efetiva induzida pela anomalia conforme

Como visto na seção 2.5, a ação do campo eletromagnético possui invariância conforme local. O mesmo é verdade na presença dos termos que violam a simetria de Lorentz e/ou CPT. Isso significa que, a ação da teoria (6.1) não muda através da seguinte transformação simultânea da métrica, do vetor A_μ e dos parâmetros k_{AF}^α e $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu, \quad (6.15)$$

$$k_{AF}^\alpha \rightarrow k'_{AF}{}^\alpha = k_{AF}^\alpha e^{-4\sigma}, \quad k_F^{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow k'_F{}^{\mu\nu\alpha\beta} = k_F^{\mu\nu\alpha\beta} e^{-4\sigma}. \quad (6.16)$$

Como também foi discutido no capítulo 2, a invariância conforme local implica que, no limite *on-shell*, o traço do tensor momento energia é nulo. Todavia, isso deixa de ser verdade quando os efeitos quânticos são levados em consideração. A origem da violação da simetria conforme é o contratermo $\Delta S = -\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$, necessário para o cancelamento da parte divergente da ação efetiva. Esse é o único termo não invariante na ação efetiva renormalizada, pois tanto a ação clássica como a ação efetiva são conformemente invariantes. A invariância da ação efetiva implica que, no limite do espaço-tempo quadridimensional, o novo termo calculado possui simetria conforme, isto é,

$$\sqrt{-g'} K(g'_{\mu\nu}, k'_F) = \sqrt{-g} K(g_{\mu\nu}, k_F). \quad (6.17)$$

Do ponto de vista técnico, a prova explícita da equação (6.17) não é uma tarefa trivial devido a expressão complicada para $K(g_{\mu\nu}, k_F)$, fórmula (6.14). Entretanto, como isso é um trabalho puramente algébrico, deixamos os detalhes da sua prova para o apêndice C.

No contratérmo (6.14) por causa da regularização dimensional, a regra de transformação (6.17) é substituída pela sua forma no espaço-tempo n -dimensional, a saber,

$$\sqrt{-g'} K(g'_{\mu\nu}, k'_F) = \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} K(g_{\mu\nu}, k_F) + \mathcal{O}(\sigma). \quad (6.18)$$

A equação (6.18) permite que apliquemos os métodos de cálculo da anomalia conforme discutidos na seção 2.6. Seguindo esse caminho, encontramos

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = - [wC^2 + bE + c\Box R + K(g_{\mu\nu}, k_F)], \quad (6.19)$$

onde os parâmetros w , b e c são, nesse caso, definidos pelas equações

$$(w, b, c) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{10}, -\frac{31}{180}, -\frac{1}{10} \right). \quad (6.20)$$

Podemos usar a anomalia conforme (6.19) para construir uma equação para a ação efetiva de 1-loop

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} = wC^2 + bE + c\Box R + K(g_{\mu\nu}, k_F). \quad (6.21)$$

A solução dessa equação pode ser obtida do mesmo jeito exposto na seção 2.7. A possibilidade mais simples é a solução não-covariante, onde separamos o fator conforme da métrica através da parametrização $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} e^{2\sigma}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} &= S_c[g'_{\mu\nu}, k'_F] + \int d^4x \sqrt{-g'} \left\{ w\sigma C^2 + b\sigma \left(E' - \frac{2}{3} \Box' R' \right) + 2b\sigma \Delta'_4 \sigma \right. \\ &\quad \left. + \sigma K(g'_{\mu\nu}, k'_F) - \frac{3c+2b}{36} [R' - 6(\nabla'\sigma)^2 - 6\Box'\sigma]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

A equação (6.21) também pode ser solucionada para as formas da ação induzida pela anomalia covariante não-local e covariante local. Vamos expor aqui apenas o resultado final para a forma covariante local, com os dois campos escalares auxiliares φ e ψ

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} &= S_c[g, k_f] - \frac{3c+2b}{36} \int d^4x \sqrt{g(x)} R^2(x) + \int d^4x \sqrt{g(x)} \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_4 \varphi \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi + \varphi \left[\frac{\sqrt{-b}}{2} \left(E - \frac{2}{3} \Box R \right) - \frac{1}{2\sqrt{-b}} (wC^2 + K(g_{\mu\nu}, k_F)) \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{-b}} \psi (wC^2 + K(g_{\mu\nu}, k_F)) \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

A seguir, consideraremos uma possível aplicação do resultado aqui obtido na Cosmologia. Como visto no capítulo anterior, a ação induzida pela anomalia conforme é responsável por soluções do tipo inflacionárias. Podemos assim, estudar qual é o papel dos novos parâmetros de violação de simetria de Lorentz e/ou CPT nesse tipo de solução.

6.4 Aplicação dos resultados na cosmologia

Como aplicação mais simples do resultado obtido na seção anterior na Cosmologia, procuramos por uma solução do tipo homogênea e isotrópica

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) g'_{\mu\nu}, \quad ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\Omega^2, \quad (6.24)$$

onde η é o tempo conforme, definido a partir o tempo físico t através da relação $dt = a(\eta) d\eta$.

Quando comparada à fórmula original (2.92), o resultado (6.22) tem termos extras relacionados com o parâmetro $k_F^{\alpha\beta\mu\nu}$. No entanto, todo o efeito do novo parâmetro $k_F^{\alpha\beta\mu\nu}$ está acumulado apenas na função escalar $K = K(g'_{\mu\nu}, k_F^{\alpha\beta\mu\nu})$. Sendo assim, calcularemos esse termo para a métrica (6.24). Através da substituição dessa métrica na equação (6.14), chegamos para este escalar na seguinte relação:

$$K(g'_{\mu\nu}, k'_F) = k^2 k'_F{}^{ij} g'_{ij} - \frac{1}{2} k^2 k'_F{}^{iklj} g'_{il} g'_{kj} - \frac{1}{2} k^2 k'_F, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.25)$$

De acordo com as definições, $k'_F = k_F^{\mu\nu\alpha\beta} g'_{\mu\alpha} g'_{\nu\beta}$ e $k'_F{}^{\nu\beta} = k_F^{\mu\nu\alpha\beta} g'_{\mu\alpha}$, podemos ver que

$$K(g'_{\mu\nu}, k'_F) = k^2 k'_F - \frac{1}{2} k^2 k'_F - \frac{1}{2} k^2 k'_F = 0. \quad (6.26)$$

Isso significa que o campo que viola a simetria de Lorentz $k_F^{\alpha\beta\mu\nu}$ não dá nenhuma contribuição nova para a dinâmica do fator de escala. Porém, esse resultado negativo não significa que não possam existir outros efeitos relevantes. Em particular, podemos esperar modificações das equações para as perturbações cósmicas [156], especialmente para as ondas gravitacionais. Um resultado importante referente à dinâmica das perturbações da métrica é que não existem modos crescentes [80, 82, 113, 212]. Esse fato tem consequências fenomenológicas, incluindo o papel relativamente pequeno das perturbações tensoriais comparadas com as escalares (veja, por exemplo, [155]). Seria interessante em um trabalho futuro, ver se a situação permanece a mesma ou se existem modificações na teoria com o termo extra de quebra de Lorentz $K(g_{\mu\nu}, k_F)$.

Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons

O modelo dos Galileons é uma teoria de um campo escalar π que possui em sua ação além do termo cinético padrão, $\frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$, termos de autointeração com derivadas superiores. Esta teoria tem atraído bastante atenção na literatura devido as suas propriedades não usuais, que são interessantes por diferentes motivos. Primeiramente, a sua ação é invariante perante a transformação $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$, que representa uma generalização espaço-temporal da transformação Galileana da mecânica clássica. Por causa dessa simetria, as equações de campo desse modelo são restritas de maneira que elas possuem apenas duas derivadas. Isso significa que, apesar da presença de derivadas superiores o propagador do modelo dos Galileons é, pelo menos no nível de árvore, livre de fantasmas massivos. Sendo assim, é interessante fazer uma analogia entre esse tipo de teoria com os modelos de gravitação quântica com derivadas superiores, em que a presença dos fantasmas representa, do ponto de vista teórico, a maior dificuldade na formulação de uma teoria quântica consistente.

Segundo, algumas das propriedades quânticas dos Galileons foram estudadas nos trabalhos [115, 144, 165, 219]. Através de argumentos de *power counting* mostrou-se que as possíveis divergências logarítmicas nessa teoria possuem muito mais derivadas do que a ação clássica, desse modo, a teoria dos Galileons é do tipo não-renormalizável. Em específico, nos artigos [115, 219] foi conjecturado o chamado teorema de não-renormalização dos Galileons. De acordo com o mesmo, devido ao grande número de derivadas nas

divergências ultravioletas, o setor de baixas energias da teoria é livre dos efeitos das correções quânticas e não é necessária a aplicação do processo de renormalização.

Com o objetivo de verificar o teorema de não-renormalização dos Galileons, estudaremos neste capítulo, através de cálculos diretos de *1-loop*, se existem divergências ultravioletas com derivadas superiores no setor do propagador da teoria dos Galileons. Se isso for verdade, essa teoria é então afetada pelas correções quânticas e se as divergências não possuírem a simetria Galileana, a eliminação desse tipo de divergência leva à introdução de fantasmas massivos. Mostraremos que as correções quânticas para o propagador incluem, de fato, o termo com derivadas superiores $\pi\Box^4\pi$, que não possui a simetria Galileana. De acordo a análise prévia análoga para o caso da gravitação quântica [12], isso significa que esta teoria pode ser modificada, adicionando-se o termo extra $\pi\Box^4\pi$ no nível clássico, de maneira que ela se torne super-renormalizável. No entanto, o seu espectro físico inclui dois fantasmas massivos e um escalar massivo com energia cinética positiva. A abordagem efetiva na teoria modificada com o termo extra pode ser perfeitamente bem sucedida, e nesse caso o teorema de não-renormalização dos Galileons continua, de uma maneira generalizada, válido na região de baixas energias.

Este capítulo se organiza da seguinte maneira: na seção 7.1 apresentaremos uma descrição da ação clássica do modelo. A seção 7.2 contém o cálculo das divergências de *1-loop*. Vamos considerar apenas o caso mais simples do limite do espaço-tempo plano, pois este é suficiente para o nosso presente objetivo. O formalismo utilizado para o cálculo das divergências será a técnica do *heat kernel*, em específico, a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt. Para reduzir a ação efetiva aos traços funcionais universais usaremos expansões importantes análogas às que foram originalmente desenvolvidas no artigo [45]. O uso dessa técnica é vantajoso, pois os cálculos podem ser diretamente generalizados para o espaço-tempo curvo, quando isto for necessário. Porém, como lidaremos apenas com o espaço-tempo plano, um cálculo equivalente também pode ser realizado pelos tradicionais diagramas de Feynman. Deixamos alguns detalhes do cálculo baseado nos diagramas de Feynman para o apêndice D. Como a teoria dos Galileons não é usual, as considerações apresentadas nesse apêndice podem ser bastante instrutivas para um leitor mais acostumado com o método diagramático. Por fim, na seção 7.3 apresentaremos algumas discussões adicionais sobre o nosso resultado.

7.1 A descrição do modelo

O modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) é um modelo de gravitação sobre uma brana de dimensão $(3 + 1)$ imersa em um volume $5D$ [79]. Mostrou-se na referência [144] que no limite de desacoplamento desse modelo, a ação efetiva quadridimensional contém um termo com um campo escalar π , a saber,

$$\Delta S = M^{-3} \int d^4x \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi. \quad (7.1)$$

Esse termo possui propriedades importantes. Primeiro, ele é invariante perante a transformação:

$$\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c, \quad (7.2)$$

onde c e b_μ são constantes. O parâmetro vetorial b_μ corresponde a um deslocamento constante no gradiente $\partial_\mu \pi \rightarrow \partial_\mu \pi + b_\mu$, o que nada mais é do que uma generalização espaço-temporal da conhecida simetria de Galileu $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + v$ da mecânica clássica. Por esse motivo, a equação (7.2) é conhecida como transformação Galileana. Segundo, a simetria (7.2) restringe as equações de movimento da teoria de maneira que elas sejam sempre de segunda ordem nas derivadas, apesar desse termo conter derivadas superiores. Isso tem consequências interessantes como, por exemplo, a ausência de fantasmas no propagador da teoria, que estão tipicamente presentes nas teorias com derivadas superiores. Como discutido anteriormente, o problema da presença dos fantasmas nas teorias com derivadas superiores representa uma das maiores dificuldades para a quantização do campo gravitacional. Por esse motivo, é importante fazer uma correlação deste modelo com a gravitação e estudar as implicações tanto clássicas como quânticas nas teorias com a simetria Galileana.

Na referência [166] mostrou-se como generalizar a estrutura (7.1), associando a ela todos os outros termos que têm a simetria Galileana (7.2). No espaço-tempo plano quadridimensional podemos organizar esses termos em apenas quatro Lagrangianas não triviais contendo o mesmo número de campos π , a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \\ \mathcal{L}_3 &= \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi (\square \pi)^2 - \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \square \pi - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \\
&+ \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi, \\
\mathcal{L}_5 &= \frac{1}{6} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi (\square \pi)^3 - \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \square \pi - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \square \pi \\
&+ \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \square \pi + \frac{1}{3} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi \partial_\rho \partial^\mu \pi \partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi \\
&+ \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\lambda \pi - \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \partial^\lambda \pi.
\end{aligned}$$

O modelo descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=2}^5 c_i \mathcal{L}_i, \quad (7.3)$$

onde c_i são coeficientes genéricos, é conhecido como modelo dos Galileons. O campo π é conhecido como Galileon.

Várias das aplicações clássicas do modelo dos Galileons podem ser encontradas, por exemplo, nas referências [4, 49, 61, 62, 65, 69, 126, 139, 153], sendo a maior parte delas relacionada à Cosmologia. O modelo dos Galileons pode também ser estendido ao espaço-tempo curvo de uma maneira direta pelo método de generalização mínimo e de uma maneira um pouco mais robusta através do método de generalização não-mínimo (veja, por exemplo, as referências [48, 66–68, 96, 97]). Entretanto, para o nosso intuito é suficiente levar em consideração apenas o caso mais acessível do espaço-tempo plano.

7.2 O cálculo das divergências de 1-loop

Para calcular as divergências, começamos pela fórmula padrão da ação efetiva de 1-loop, equação (2.5). Devido à forma da Lagrangiana (7.3) e das propriedades desse modelo que foram descritas na seção anterior, o operador bilinear para essa teoria tem a seguinte estrutura geral

$$\hat{H} = \square + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3, \quad (7.4)$$

onde $\hat{P}_1 \sim \mathcal{O}(\partial\partial\pi)$, $\hat{P}_2 \sim \mathcal{O}((\partial\partial\pi)^2)$ e $\hat{P}_3 \sim \mathcal{O}((\partial\partial\pi)^3)$. Sendo assim, os termos $\hat{P}_{1,2,3}$ são operadores não-mínimos e para calcular as divergências devemos usar novamente a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [21] (veja também o apêndice A).

Para reduzir a ação efetiva aos traços funcionais universais, realizamos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned}
\text{Tr ln } \hat{H} &= \text{Tr ln } (\square + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \dots) \\
&= \text{Tr ln } \square + \text{Tr ln } \left(1 + \hat{P}_1 \frac{1}{\square} + \hat{P}_2 \frac{1}{\square} + \dots \right) \\
&= \text{Tr ln } \square + \text{Tr} \left(\hat{P}_1 \frac{1}{\square} + \hat{P}_2 \frac{1}{\square} - \frac{1}{2} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Na equação acima utilizamos a propriedade básica do logarítmico $\ln(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \ln \hat{A} + \ln \hat{B}$ e a sua série de potências. Os termos omitidos são da ordem $\mathcal{O}(\pi^3)$, pois como estamos interessados apenas em calcular os termos que contribuem para a função de dois pontos do campo escalar, todos os cálculos deverão ser realizados até a segunda ordem em π .

Segue diretamente das fórmulas (A.3) e (A.9) do apêndice A, que os três primeiros termos da última linha da expansão (7.5) não contribuem para as divergências, pois esses traços não contribuem para o limite do espaço-tempo plano (eles são proporcionais aos tensores de curvatura). Então, podemos escrever

$$\text{Tr ln } \hat{H} \Big|_{div} = -\frac{1}{2} \text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div}. \tag{7.6}$$

Sendo assim, as divergências dependem apenas do operador \hat{P}_1 , cuja forma explícita é dada por

$$\hat{P}_1 = \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad \text{onde} \quad \hat{U}^{\mu\nu} = 4c_3 \left[(\square\pi)g^{\mu\nu} - (\partial^\mu \partial^\nu \pi) \right]. \tag{7.7}$$

Os detalhes do cálculo do lado direito da equação (7.6) por meio da técnica generalizada de Schwinger-DeWitt estão expostos no apêndice A, seção A.4. O resultado é

$$\text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} = -\frac{2i}{\varepsilon} c_3^2 \int d^4x \pi \square^4 \pi. \tag{7.8}$$

Por fim, a partir dessa expressão e das fórmulas (2.5) e (7.6), obtemos a resposta para as divergências de *1-loop* no setor do campo livre,

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{c_3^2}{2\varepsilon} \int d^4x \pi \square^4 \pi. \tag{7.9}$$

7.3 Discussão dos resultados

Resumiremos de maneira sistemática as informações relevantes sobre as propriedades quânticas da teoria dos Galileons que podem ser obtidas através do resultado (7.9):

- (i) As divergências de *1-loop* (7.9) não são invariantes perante a transformação (7.2). Isso significa que a simetria Galileana é, de fato, uma simetria de baixas energias, sendo violada pelas correções quânticas ultravioletas e que as conclusões conjecturadas no teorema de não-renormalização do modelo dos Galileons são incorretas.
- (ii) Como antecipado nas referências [115, 144, 165, 219] o modelo dos Galileons é do tipo não-renormalizável. Em razão da presença do termo (7.9) no setor do propagador, as divergências logarítmicas ultravioletas desse modelo exigem um contratermo na forma $\pi\Box^4\pi$. Como a ação clássica (7.3) não contém esse tipo de termo, não é possível ter um controle sobre essa divergência através do processo de renormalização. Para que a teoria dos Galileons seja consistente no nível quântico devemos incluir o mesmo tipo de termo na sua ação clássica, isto é, temos que considerar a teoria com ação

$$S = \sum_{i=2}^5 \int d^4x \mathcal{L}_i + \frac{M^{-6}}{2} \int d^4x \pi\Box^4\pi. \quad (7.10)$$

- (iii) O modelo com o termo adicional $\pi\Box^4\pi$ é super-renormalizável para qualquer escolha dos coeficientes c_k no setor de interação da ação (7.10). Para entender essa afirmação, considere a fórmula (1.17) do grau superficial de divergências. Para a teoria (7.10), temos os valores $r_l = 8$ e $K_v = (4, 6, 8)$. Para os diagramas mais divergentes possíveis, encontramos com a ajuda da relação topológica (1.18) para $D = 0$ a fórmula

$$d = 4 + 4(1 - p). \quad (7.11)$$

As divergências aparecem apenas no nível de *1-loop*, já no segundo *loop* somente os subdiagramas de *1-loop* são divergentes. Essa propriedade não depende se o espaço-tempo é plano e também é válida para o espaço-tempo curvo (veja a referência [42] para uma introdução na teoria geral da renormalização no espaço-tempo curvo).

- (iv) O propagador da teoria dos Galileons com o termo clássico extra $\pi\Box^4\pi$, equação (7.10), possui três graus de liberdade extras. A equação que define o propagador $G(p)$ do campo π pode ser escrita (no espaço euclidiano) como

$$p^2 H(p) G(p) = p^2(1 + M^{-6}p^6) G(p) = 1. \quad (7.12)$$

As raízes quadradas da equação $H(p) = 0$ definem as massas dos graus de liberdade extras. Solucionando essa equação, através do teorema fundamental da álgebra

podemos reescrever a equação (7.12) como

$$p^2 (p^2 + m_1^2) (p^2 + m_2^2) (p^2 + m_3^2) G(p) = 1, \quad (7.13)$$

onde

$$m_1 = M, \quad m_2 = (-1)^{2/3}M, \quad m_3 = (-1)^{1/3}M. \quad (7.14)$$

A fórmula acima mostra que para qualquer escolha do sinal do coeficiente M a teoria (7.10) possui táquions no seu espectro de partículas. Entretanto, é possível remover os táquions adicionando na ação clássica também os termos de ordem inferior, como $\pi \square^2 \pi$ e $\pi \square^3 \pi$, e através do ajuste de seus coeficientes [12]. Suponha agora que esse procedimento foi realizado de maneira que $m_3 > m_2 > m_1 > 0$. Nesse caso, os resultados obtidos na referência [12] na análise feita na teoria da gravitação super-renormalizável, para a obtenção dos propagadores (1.28) e (1.29), também podem ser aplicados aqui. Como resultado, o propagador do campo π pode ser representado pela estrutura geral

$$G(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{A_1}{p^2 + m_1^2} + \frac{A_2}{p^2 + m_2^2} - \frac{A_3}{p^2 + m_3^2}, \quad A_{1,2,3} > 0.$$

Assim, podemos ver que a teoria possui além do modo escalar original sem massa, dois fantasmas massivos e um grau de liberdade extra do tipo escalar massivo.

- (v) A abordagem efetiva na teoria quântica dos Galileons é perfeitamente possível se colocarmos um parâmetro suficientemente pequeno na frente do termo clássico $\int \pi \square^4 \pi$. Esse parâmetro deve ter a dimensão M^{-6} e, portanto, a escolha de um coeficiente pequeno significa que escolhemos um parâmetro de massa M grande. As massas de ambos os fantasmas, m_1 e m_3 , e do escalar com energia cinética positiva, m_2 , são da mesma ordem de grandeza de M (veja a referência [12] para maiores detalhes). Se considerarmos fenômenos físicos clássicos ou quânticos com energias típicas muito menores do que M , pode acontecer que os modos massivos sejam inativos [80] e nesse sentido as conclusões encontradas nas referências [144, 165] e [115, 219] sobre as propriedades quânticas do modelo dos Galileons permanecem, de uma maneira generalizada, corretas, inclusive o teorema de não-renormalização.

Fatores de forma não-locais para campos antissimétricos no espaço-tempo curvo

O estudo das propriedades quânticas dos campos antissimétricos é importante por várias razões. Podemos citar que esses campos surgem naturalmente a partir de algumas teorias como, por exemplo, a teoria das (super)cordas [63, 64, 135, 141, 142] e que estes têm interessantes aplicações na tentativa da construção de modelos de grande unificação [3]. Sendo assim, a possível detecção experimental dos efeitos quânticos relacionados aos campos antissimétricos pode significar a existência de alguma Física além do Modelo Padrão da física de partículas. Já, do ponto de vista acadêmico, o modelo dos campos antissimétricos são interessantes, pois eles representam uma teoria de campos nada usual. A versão não-massiva das teorias dos campos tensoriais antissimétricos de ordem dois e três possuem invariância de calibre, no entanto, os geradores da transformação de calibre são do tipo linearmente dependentes, diferentemente do que ocorre nas teorias de calibre habituais do tipo Yang-Mills. Já as versões massivas dos campos antissimétricos são exemplos de teorias em que ocorre a quebra suave da simetria de calibre. Isso significa que a introdução das massas leva à violação da simetria de calibre presente nas versões não-massivas, ao mesmo tempo em que não é forte o suficiente para remover as degenerescências típicas das teorias de calibre.

Recentemente os autores do artigo [40] estudaram os campos antissimétricos massivos no espaço-tempo curvo. Foram apresentados argumentos formais a respeito da

equivalência quântica entre as teorias de campos tensoriais antissimétricos massivos de segunda e terceira ordem com a teoria de Proca e o campo escalar massivo minimamente acoplado com a gravidade, respectivamente. Isto quer dizer que as correções quânticas semiclássicas para a ação do vácuo calculadas por meio dessas teorias possuem o mesmo resultado.

A prova apresentada na referência [40] é bastante geral e foi baseada no uso da regularização ζ . No entanto, é conhecido que esse tipo de análise pode ser violada pelo fenômeno conhecido como anomalia multiplicativa não-local [95]. A anomalia multiplicativa nada mais é do que a violação da identidade básica da álgebra linear

$$\text{Det}(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \text{Det} \hat{A} \cdot \text{Det} \hat{B} \quad (8.1)$$

que pode ser diretamente provada para matrizes \hat{A} e \hat{B} quadradas de tamanho finito. No entanto, no caso de operadores diferenciais, que possuem uma representação matricial de tamanho infinito, a generalização da prova da equação (8.1) não é conhecida. De fato, exemplos de situações em que a identidade (8.1) não é válida já são conhecidos na literatura no caso do cálculo da parte finita não-local da ação efetiva das teorias dos campos fermiônicos [95, 178]. Sendo assim, é demasiadamente importante conferir por meio de cálculos explícitos da parte finita não-local da ação efetiva se a equivalência quântica das teorias dos campos massivos antissimétricos não é violada por algum tipo de anomalia multiplicativa não-local. Neste capítulo realizaremos este tipo de consideração, por meio de cálculos diretos dos fatores de forma não-locais para os campos tensoriais massivos antissimétricos de segunda e terceira ordem, que nos permitem obter a parte finita da ação efetiva do vácuo até a segunda ordem nos tensores de curvatura. Discutiremos também a descontinuidade das contribuições quânticas no limite sem massa.

A organização deste capítulo é feita na seguinte maneira: na seção 8.1 revisamos brevemente a teoria de perturbações covariante e as principais fórmulas para a derivação dos fatores de forma com o uso da técnica do *heat kernel*. Também apresentamos os resultados finais obtidos nas referências [98, 99] para os casos específicos das teorias dos escalares e vetores massivos, que serão necessários para o desenvolvimento do capítulo. O cálculo dos fatores de forma do tensor antissimétrico de segunda ordem é apresentado na seção 8.2. Já na seção 8.3 lidaremos com o caso do tensor totalmente antissimétrico de terceira ordem.

8.1 O cálculo dos fatores de forma de 1-loop

Até agora consideramos nesta tese basicamente dois tipos diferentes de informação sobre a ação efetiva do vácuo: fomos capazes de calcular completamente a sua parte divergente no nível de 1-loop e obtivemos a sua parte finita no caso específico dos campos não-massivos conformalmente invariantes através da integração da anomalia conforme. Neste capítulo vamos ir além desse tipo de consideração e obter alguns dos termos da parte finita não-local da ação efetiva do vácuo para as teorias dos campos massivos de matéria. Isso pode ser realizado, até a segunda ordem nos tensores de curvatura, pela solução dos fatores de forma não-locais obtidos na teoria de perturbação covariante por Barvinsky e Vilkovisky [19] e Avramidi [16]. A revisão desse formalismo é o objetivo dessa seção. Vamos também mostrar os resultados para os casos específicos do campo escalar massivo e da teoria de Proca que serão úteis no decorrer do capítulo. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências originais [98, 99].

Considere, no espaço euclidiano, a ação efetiva de 1-loop

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}. \quad (8.2)$$

Vamos admitir que o operador bilinear seja mínimo e denotá-lo neste capítulo por

$$\hat{H} = \hat{1}\square - \hat{1}m^2 + \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R. \quad (8.3)$$

A representação da ação efetiva pela integral sobre o tempo próprio s , envolvendo o *heat kernel* $K(s)$, fica no espaço euclidiano da seguinte maneira:

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s). \quad (8.4)$$

O *heat kernel* foi calculado até a segunda ordem nas curvaturas nas referências [16, 19], a sua solução tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Tr} K(s) = & \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \left\{ \hat{1} + s\hat{P} + s^2 \hat{1} \left[R_{\mu\nu} f_1(-s\square) R^{\mu\nu} \right. \right. \\ & \left. \left. + R f_2(-s\square) R + \hat{P} f_3(-s\square) R + \hat{P} f_4(-s\square) \hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu} f_5(-s\square) \hat{S}^{\mu\nu} \right] \right\} + \mathcal{O}(R^3), \end{aligned} \quad (8.5)$$

onde 2ω é dimensão do espaço-tempo e os fatores de forma $f_{1,2,\dots,5}$ são definidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{\tau^2}, & f_2(\tau) &= \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau) - 1}{24\tau} - \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{8\tau^2}, \\ f_3(\tau) &= \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau) - 1}{2\tau}, & f_4(\tau) &= \frac{f(\tau)}{2}, & f_5(\tau) &= \frac{1 - f(\tau)}{2\tau}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

onde

$$f(\tau) = \int_0^1 d\alpha e^{\alpha(1-\alpha)\tau}, \quad \tau = -s\Box. \quad (8.7)$$

Substituindo a solução do *heat kernel* (8.5) na fórmula (8.4), a ação efetiva pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^{2\omega}x \sqrt{g} \left\{ l_{CC}L_0 + l_R L_1 R + \sum_{i=1}^5 l_i^* R_{\mu\nu} M_i R^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^5 l_i R M_i R \right\} \\ &+ \mathcal{O}(R^3), \end{aligned} \quad (8.8)$$

onde $l_{1,2,\dots,5}^*$ e $l_{CC,R,1,2,\dots,5}$ são coeficientes que dependem do modelo de interesse e

$$\begin{aligned} L_0 &= m^4 \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega-1} e^{-t}, \quad L_1 = m^2 \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega} e^{-t}, \\ M_1 &= \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{1-\omega} e^{-t} f(ut), \quad M_2 = \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega} e^{-t} \frac{f(ut)}{u}, \\ M_3 &= \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega-1} e^{-t} \frac{f(ut)}{u^2}, \quad M_4 = \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega} e^{-t} \frac{1}{u}, \\ M_5 &= \int_0^\infty dt \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} t^{-\omega-1} e^{-t} \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

são integrais universais que não dependem do modelo. Nas fórmulas acima introduzimos novas variáveis, a saber, $t = sm^2$ e $u = \tau/t$. Essas integrais já foram calculadas nas referências [98, 99]. Por esse motivo, apresentamos aqui apenas o seu resultado final

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{m^4}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right), \quad L_1 = -m^2 \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right), \quad M_1 = \frac{1}{\epsilon} + 2Y, \\ M_2 &= \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{4Y}{3a^2} + \frac{1}{18}, \\ M_3 &= \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2a^4} - \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{160} \right) + \frac{8Y}{15a^4} - \frac{7}{180a^2} + \frac{1}{400}, \\ M_4 &= \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2} \right), \\ M_5 &= \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2a^4} - \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{32} \right), \end{aligned} \quad (8.9)$$

onde usamos neste capítulo a notação

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{2-\omega} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \quad (8.10)$$

para o parâmetro da regularização dimensional e γ é a constante de Euler-Mascheroni. Nas expressões acima foram descartados todos os termos que são da ordem $\mathcal{O}(2-\omega)$, pois esses não contribuem no limite do espaço-tempo quadridimensional. Também introduzimos as seguintes definições

$$Y = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \ln[1 + \alpha(1-\alpha)u] = 1 - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{2+a}{2-a}\right) \quad (8.11)$$

e

$$a^2 = \frac{4\Box}{\Box - 4m^2}. \quad (8.12)$$

Outra observação importante é que como estamos lidando com cálculos até a segunda ordem nas curvaturas também, podemos aqui, pelos mesmos motivos explicados na seção (1.3.4), aplicar a identidade (1.31) e reescrever a ação efetiva em termos da base que consiste no uso do quadrado do tensor de Weyl e do quadrado da curvatura escalar.

Nas próximas seções vamos precisar do resultado dos fatores de forma para o campo escalar, descrito pela ação (2.8). O resultado na ordem $\mathcal{O}(R_{\dots}^2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{m^4}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + \tilde{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) m^2 R + R \left[\frac{1}{2\epsilon} \tilde{\xi}^2 + k_R^0(a) \right] R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{60\epsilon} + k_W^0(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

onde, novamente, $\tilde{\xi} = \xi - 1/6$ e os fatores de forma não-locais são definidos pelas expressões

$$k_W^0(a) = \frac{1}{150} + \frac{2}{45a^2} + \frac{8Y}{15a^4}, \quad (8.14)$$

$$k_R^0(a) = \frac{1}{108} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{7}{20} \right) + \frac{Y}{144} \left(1 - \frac{4}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{18} - \frac{Y}{6} + \frac{2Y}{3a^2} \right) \tilde{\xi} + Y \tilde{\xi}^2. \quad (8.15)$$

Também iremos precisar da solução para o modelo de Proca no espaço-tempo curvo

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \right\}. \quad (8.16)$$

A teoria do campo vetorial massivo (8.16) é um exemplo de teoria com quebra fraca da simetria de calibre. Apesar da introdução do termo massivo violar a simetria de calibre,

isso não é suficiente para remover a degenerescência do operador bilinear \hat{H} . Nesse caso, a quantização Lagrangiana pode ser realizada, por exemplo, através do procedimento de Stueckelberg [44]. Esse consiste em introduzir um campo escalar extra φ de maneira que a simetria de calibre seja recuperada. Assim, podemos utilizar as técnicas padrões de cálculo das teorias de calibre. Então, considere em vez da equação (8.16), a ação

$$S'_1 = - \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2} \left(A_\mu - \frac{1}{m} \partial_\mu \varphi \right)^2 \right\}. \quad (8.17)$$

Essa ação é invariante com respeito da transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu f, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + m f. \quad (8.18)$$

A teoria original (8.16) é recuperada no calibre especial $\varphi = 0$. Como a ação efetiva do vácuo depende apenas da métrica externa, a resposta obtida por meio das ações (8.16) e (8.17) são equivalentes. Dessa maneira, o calculo prático pode ser realizado no calibre que for mais conveniente.

Introduzindo a condição de fixação de calibre linear, $\chi = \nabla_\mu A^\mu - m \varphi$, o operador bilinear da teoria (8.17) pode ser expresso como

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} (H'_1)^\mu_\nu & 0 \\ 0 & H_0^{min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^\mu_\nu \square - R^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu m^2 & 0 \\ 0 & \square - m^2 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

A fórmula para a ação efetiva também ganha, nesse caso, uma contribuição devido ao termo dos fantasmas de calibre de Faddeev-Popov

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} + \text{Tr} \ln \hat{H}_{gh}, \quad (8.20)$$

onde $\hat{H}_{gh} = \square - m^2$. Portanto, chegamos para a ação efetiva do vácuo de 1-loop na fórmula

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\delta^\mu_\nu \square - R^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu m^2) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\square - m^2) + \text{Tr} \ln (\square - m^2). \quad (8.21)$$

Cada termo dessa equação pode ser calculado por meio de uma expansão em termos do *heat kernel*, análoga à fórmula (8.8). O leitor pode consultar a referência [44] para maiores detalhes. O resultado final é

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{3m^4}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) R + R \left[\frac{1}{72\epsilon} + k_R^1(a) \right] R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{13}{60\epsilon} + k_W^1(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

onde

$$k_W^1(a) = -\frac{91}{450} + \frac{2}{15a^2} + Y + \frac{8Y}{5a^4} - \frac{8Y}{3a^2}, \quad (8.23)$$

$$k_R^1(a) = -\frac{1}{2160} + \frac{1}{36a^2} + \frac{Y}{48} + \frac{Y}{3a^4} - \frac{Y}{18a^2}. \quad (8.24)$$

Como foi discutido na referência [44], o limite sem massa da expressão (8.22) não reproduz a ação efetiva do campo vetorial sem massa. Isso ocorre em virtude da teoria de Proca possuir um grau de liberdade a mais, quando comparado com o campo vetorial abeliano não-massivo descrito pela teoria de Maxwell. Quando consideramos o limite em que $m \rightarrow 0$ a contribuição extra desse grau de liberdade não desaparece, levando assim a uma descontinuidade nas correções quânticas. Nas próximas seções, vamos mostrar que as teorias dos campos tensoriais massivos antissimétricos apresentam uma descontinuidade similar no limite sem massa.

8.2 Campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem

O modelo do campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem, $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$, é descrito pela seguinte ação

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F^{\mu\nu\lambda} - \frac{m^2}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right\}, \quad (8.25)$$

onde

$$F_{\mu\nu\lambda} = \nabla_\mu B_{\nu\lambda} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda B_{\mu\nu}. \quad (8.26)$$

No espaço-tempo quadridimensional a teoria (8.25) é classicamente equivalente à teoria de Proca (8.16). A equivalência entre as duas teorias pode ser encontrada através da análise detalhada das equações de movimento. Ela tem a seguinte forma $B_{\mu\nu} \propto \frac{1}{m} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$.

A parte cinética da ação (8.25) é invariante perante a transformação de calibre

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (8.27)$$

onde o parâmetro vetorial de calibre ξ_μ não é definido de maneira única. Esse parâmetro pode ser transformado de acordo com

$$\xi_\mu \rightarrow \xi'_\mu = \xi_\mu + \nabla_\mu \varphi, \quad (8.28)$$

onde $\varphi = \varphi(x)$ é um campo escalar arbitrário, de maneira que o campo $B_{\mu\nu}$ continua o mesmo. A equação (8.28) significa que os geradores da transformação de calibre são do tipo linearmente dependentes.

O modelo (8.25) é outro exemplo de teoria com a quebra fraca da simetria de calibre. O termo massivo na ação (8.27) viola a simetria de calibre, mas não remove a degenerescência no operador bilinear

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_2}{\delta B_{\mu\nu}(x) \delta B_{\alpha\beta}(x')}. \quad (8.29)$$

De maneira análoga ao que foi mostrado no caso modelo de Proca, a quantização da teoria (8.25) pode ser feita pelo procedimento de Stueckelberg. Introduzimos um campo vetorial extra A_μ e consideramos, no lugar da equação (8.27), a ação

$$S'_2 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{12} F_{\mu\nu\lambda} F^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4} m^2 \left(B_{\mu\nu} - \frac{1}{m} F_{\mu\nu} \right)^2 \right\}. \quad (8.30)$$

A ação prévia (8.25) pode ser obtida a partir de (8.30) no calibre específico $A_\mu = 0$. A nova ação é invariante de calibre perante a transformação simultânea dos campos

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + m \xi_\mu \quad (8.31)$$

e também é invariante sobre a transformação de calibre do campo de Stueckelberg

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \Lambda \quad (8.32)$$

com um parâmetro escalar $\Lambda(x)$. Além disso, podemos considerar um novo campo escalar $\varphi(x)$ e notar que ambos os campos $B_{\mu\nu}$ e A_μ não mudam se seus parâmetros de calibre se transformam como

$$\xi \rightarrow \xi'_\mu = \xi_\mu + \nabla_\mu \varphi, \quad \Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda + m\varphi. \quad (8.33)$$

Outra vez, isso significa que os geradores de calibre dessa teoria são linearmente dependentes.

O formalismo geral da quantização Lagrangiana em teorias com geradores da transformação de calibre dependentes é baseado no método de Batalin-Vilkovisky [24]. Entretanto, em teorias relativamente simples como a (8.30), na qual a ação é quadrática e a álgebra dos geradores de calibre é Abeliãna, é suficiente fazer uma aplicação sucessiva em várias etapas do método de Faddeev-Popov [41, 195, 196]. A resposta final para a fórmula

da ação efetiva no caso da teoria (8.30), que pode ser obtida por esse método, foi apresentada na referência [40]. Entretanto, como os detalhes técnicos foram omitidos neste trabalho, é instrutivo realizarmos esse tipo de consideração. Isto pode ser encontrado no apêndice E da tese. A ação efetiva de 1-loop é então nesse caso dada por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_1, \quad (8.34)$$

onde

$$\hat{H}'_2 = (H'_2)^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} (\square - m^2) - J^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{\dots\mu\nu} \quad (8.35)$$

e $\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_1$ representa a ação efetiva do campo vetorial massivo. Nessas fórmulas

$$\delta_{\alpha\beta, \mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \quad (8.36)$$

é a matriz identidade no espaço dos tensores antissimétricos de segunda ordem e

$$J_{\alpha\beta, \mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}). \quad (8.37)$$

Podemos ver na equação final para a ação efetiva (8.34), que o seu cálculo requer a subtração da contribuição do vetor massivo de Stueckelberg da contribuição do operador do campo tensorial, $\text{Tr} \ln \hat{H}'_2$.

A expressão (8.34) já possui a forma que nos permite aplicar a teoria de perturbação covariante para calcular os fatores de forma. O primeiro passo é através da fórmula (8.35) identificar os elementos da expressão geral (8.8),

$$\hat{1} = \delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}, \quad \hat{P}_2 = (P_2)^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = R^{\alpha\beta}{}_{\dots\mu\nu} + \frac{1}{6} \delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} R - J^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}. \quad (8.38)$$

O comutador entre duas derivadas covariantes agindo no campo tensorial antissimétrico $B_{\mu\nu}$ é dado por

$$(\hat{S}_2)_{\mu\nu} = [(S_2)_{\mu\nu}]^{\alpha\beta}{}_{\rho\omega} = \frac{1}{2} (R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu} \delta_{\omega}^{\beta} - R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu} \delta_{\omega}^{\alpha} - R^{\alpha}{}_{\omega\mu\nu} \delta_{\rho}^{\beta} + R^{\beta}{}_{\omega\mu\nu} \delta_{\rho}^{\alpha}). \quad (8.39)$$

Assim, utilizando a representação em termos do *heat kernel*, chegamos à seguinte equação para o operador \hat{H}'_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln H'_2 &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} \left\{ 6L_0 - L_1 R + \sum_{i=0}^5 l_i^* R_{\mu\nu} M_i R^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^5 l_i R M_i R \right\}, \end{aligned} \quad (8.40)$$

onde os coeficientes l_{CC} e l_R já foram inseridos na equação acima e os outros coeficientes são

$$l_1^* = 1, \quad l_2^* = 4, \quad l_3^* = 6, \quad l_4^* = -3, \quad l_5^* = -6;$$

$$l_1 = -\frac{5}{16}, \quad l_2 = -\frac{5}{4}, \quad l_3 = -\frac{3}{4}, \quad l_4 = \frac{9}{8}, \quad l_5 = \frac{3}{4}. \quad (8.41)$$

Substituindo esses valores e usando a tabela (8.9) de resposta para as integrais, chegamos à expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ 3m^4 \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + m^2 \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) R \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{36\epsilon} + k'_{2,R}(a) \right] R + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{13}{30\epsilon} + k'_{2,W}(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \quad (8.42) \end{aligned}$$

onde

$$k'_{2,W}(a) = -\frac{91}{225} + \frac{4}{15a^2} + 2Y + \frac{16Y}{5a^4} - \frac{16Y}{3a^2}, \quad (8.43)$$

$$k'_{2,R}(a) = -\frac{1}{1080} + \frac{1}{18a^2} + \frac{Y}{24} + \frac{2Y}{3a^4} - \frac{Y}{9a^2}. \quad (8.44)$$

De acordo com a equação (8.34), para obtermos a ação efetiva temos que subtrair da equação (8.42) a parte referente ao vetor massivo, dada pela equação (8.22). Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{3m^4}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) R + R \left[\frac{1}{72\epsilon} + k^2_R(a) \right] R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{13}{60\epsilon} + k^2_W(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \quad (8.45) \end{aligned}$$

onde os fatores de forma não-locais são

$$k^2_W(a) = -\frac{91}{450} + \frac{2}{15a^2} + Y + \frac{8Y}{5a^4} - \frac{8Y}{3a^2}, \quad (8.46)$$

$$k^2_R(a) = -\frac{1}{2160} + \frac{1}{36a^2} + \frac{Y}{48} + \frac{Y}{3a^4} - \frac{Y}{18a^2}. \quad (8.47)$$

A ação efetiva do vácuo para o campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem, equação (8.45), é exatamente a mesma do que para o campo vetorial massivo, mostrada na equação (8.22). Isso confirma a conclusão do artigo [40] de que a teoria do tensor massivo antissimétrico de segunda ordem é equivalente a teoria de Proca no nível quântico. Notemos que a conclusão da referência [40] foi alcançada pelo método da regularização

ζ e que algumas das relações usadas nesse tipo de formalismo podem ser violadas pela anomalia multiplicativa não-local [95, 178]. Como mostrado por meio do cálculo direto da parte não-local da ação efetiva nada disso ocorre no caso presente.

No limite $m \rightarrow 0$ o fator de forma $k_W^2(a)$, por exemplo, se reduz à expressão típica logarítmica $-\frac{13}{60} \ln \left(-\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right)$. Por outro lado, no caso em que temos estritamente $m = 0$, a teoria do tensor antissimétrico de segunda ordem é equivalente ao campo escalar mínimo, em que a dualidade é definida pela relação $F_{\alpha\beta\omega} = \epsilon_{\alpha\beta\omega\gamma} \nabla^\gamma \varphi$. O fator de forma para o campo escalar não-massivo é $-\frac{1}{60} \ln \left(-\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right)$ [98]. A diferença entre os dois coeficientes $1/5 = 13/60 - 1/60$ mostra a descontinuidade das contribuições quânticas no limite sem massa para a teoria do campo tensorial antissimétrico de segunda ordem. A diferença nada mais é do que a contribuição de um campo vetorial sem massa [99]. Para entendermos qual vetor é esse, vamos usar a ação efetiva do campo tensorial antissimétrico de segunda ordem não-massivo, que pode ser encontrada na referência [41], a saber,

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 - \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 + \frac{3}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{\text{min}}. \quad (8.48)$$

A diferença entre as duas ações (E.22) e (8.48) é

$$-1/2 \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 + \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{\text{min}}, \quad (8.49)$$

que representa a ação efetiva para o campo vetorial livre sem massa (veja, por exemplo, o capítulo 2). No limite sem massa este termo extra não desaparece e isso produz a descontinuidade quântica.

8.3 Campo tensorial massivo totalmente antissimétrico de terceira ordem

Como segundo exemplo, considere o modelo do campo tensorial massivo totalmente antissimétrico de terceira ordem $C_{\mu\nu\rho} = C_{[\mu\nu\rho]}$. A ação dessa teoria é dada por

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{48} F_{\mu\nu\rho\omega}^2 - \frac{1}{12} m^2 C_{\mu\nu\rho}^2 \right\}, \quad (8.50)$$

onde $F_{\mu\nu\rho\omega} = \nabla_\mu C_{\nu\rho\omega} - \nabla_\nu C_{\rho\omega\mu} + \nabla_\rho C_{\omega\mu\nu} - \nabla_\omega C_{\mu\nu\rho}$. É possível provar que no espaço-tempo quadridimensional a teoria (8.50) é classicamente equivalente a teoria do campo

escalar real massivo φ minimamente acoplado com a gravidade. A relação de dualidade entre as duas teorias é definida pela relação $C_{\mu\nu\rho} \propto \frac{1}{m} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\beta \varphi$.

O termo cinético da ação (8.50) é invariante sobre a transformação de calibre

$$C_{\mu\nu\rho} \rightarrow C'_{\mu\nu\rho} = C_{\mu\nu\rho} + \nabla_\mu \omega_{\nu\rho} + \nabla_\nu \omega_{\rho\mu} + \nabla_\rho \omega_{\mu\nu} \quad (8.51)$$

com um parâmetro tensorial antissimétrico $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Esse parâmetro é definido a menos de uma transformação de calibre

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow \omega'_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \nabla_\mu \zeta_\nu - \nabla_\nu \zeta_\mu, \quad (8.52)$$

onde ζ_μ é um parâmetro de calibre de campo vetorial. Além disso, o parâmetro ζ_μ também é definido até a transformação de calibre

$$\zeta_\mu \rightarrow \zeta'_\mu = \zeta_\mu + \nabla_\mu \phi, \quad (8.53)$$

onde $\phi(x)$ é um parâmetro escalar. As equações (8.52) e (8.53) significam que os geradores da transformação de calibre são linearmente dependentes.

Como no caso anterior do tensor de segunda ordem, por causa da invariância de calibre de $F_{\mu\nu\rho\omega}^2$ estamos lidando novamente com uma teoria em que a simetria de calibre é quebrada suavemente. Portanto, a quantização aqui também pode ser realizada com o uso do procedimento Stueckelberg. A simetria de calibre pode ser restaurada pela introdução de um campo extra antissimétrico de segunda ordem $B_{\mu\nu}$. Considere então a seguinte ação:

$$S'_3 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{48} F_{\mu\nu\rho\omega}^2 - \frac{1}{12} m^2 \left(C_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{m} F_{\mu\nu\rho} \right)^2 \right\}, \quad (8.54)$$

onde $F_{\mu\nu\rho}$ já foi definido anteriormente na equação (8.26). A ação (8.54) é invariante de calibre simultaneamente perante as transformações (8.51) e

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + m \omega_{\mu\nu}. \quad (8.55)$$

A mesma também é invariante com respeito à transformação de calibre do campo de Stueckelberg

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (8.56)$$

onde ξ_μ é um parâmetro de calibre vetorial, definido também a menos de uma transformação de calibre $\xi'_\mu = \xi_\mu + \nabla_\mu \varphi$, onde $\varphi(x)$ é um parâmetro escalar. Uma vez que

os geradores calibre aqui também são linearmente dependentes, a quantização da teoria (8.54) difere do esquema padrão e pode ser feita de uma maneira similar ao que foi descrito no apêndice E para o campo tensorial de segunda ordem. Comparado com o caso anterior, as aplicações sucessivas do método Faddeev-Popov é aqui muito mais longa, porque temos muito mais etapas. Portanto, vamos omitir os detalhes técnicos nesse caso e apresentar ao leitor apenas a fórmula final para a ação efetiva de 1-loop, a saber,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^{(1)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_3 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{min} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_3 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_2,\end{aligned}\quad (8.57)$$

onde

$$\hat{H}'_3 = (H'_3)_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} = \delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} (\square - m^2) + K_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} - L_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega}, \quad (8.58)$$

$$\delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} = \frac{1}{6} \epsilon^{\alpha\beta\omega\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\alpha} \\ \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} \\ \delta_{\mu}^{\omega} & \delta_{\nu}^{\omega} & \delta_{\rho}^{\omega} \end{vmatrix}, \quad (8.59)$$

$$K_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} = 3 \delta_{\gamma\theta\varphi}^{\alpha\beta\omega} \delta_{\mu\nu\rho}^{\gamma\lambda\tau} R_{\dots\lambda\tau}^{\theta\varphi} \quad (8.60)$$

e

$$L_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} = \delta_{\gamma\theta\varphi}^{\alpha\beta\omega} (R_{\lambda}^{\gamma} \delta_{\mu\nu\rho}^{\lambda\theta\varphi} + R_{\lambda}^{\theta} \delta_{\mu\nu\rho}^{\lambda\varphi\gamma} + R_{\lambda}^{\varphi} \delta_{\mu\nu\rho}^{\lambda\gamma\theta}). \quad (8.61)$$

A equação (8.59) define o delta de Kronecker generalizado que serve como a matriz identidade no espaço dos tensores totalmente antissimétricos de terceira ordem. Ele também tem a seguinte propriedade:

$$\delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} T_{\alpha\beta\omega} = T_{[\mu\nu\rho]}. \quad (8.62)$$

Devido à identidade (8.62) podemos escrever as expressões (8.60) e (8.61) de uma maneira compacta respeitando todas as suas simetrias. Do ponto de vista técnico, usando a definição (8.59), o cálculo dos fatores de forma pode ser reduzido, principalmente, em contrações de produtos de símbolos de Levi-Civita.

De acordo com a fórmula (8.57), para o cálculo da ação efetiva precisamos primeiramente trabalhar com o operador bilinear do tensor massivo de terceira ordem (8.58)

e então, subtrair a contribuição do tensor massivo de segunda ordem obtida na seção anterior, equação (8.45). Para o operador (8.58) temos os seguintes elementos,

$$\hat{1} = \delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega}, \quad \hat{P}_3 = (P_3)_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} = K_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} + \frac{1}{6} \delta_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega} R - L_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\omega}, \quad (8.63)$$

$$(\hat{S}_3)_{\mu\nu} = [(S_3)_{\mu\nu}]_{\theta\varphi\gamma}^{\alpha\beta\omega} = \delta_{\eta\xi\zeta}^{\alpha\beta\omega} (R_{\cdot\lambda\mu\nu}^{\eta} \delta_{\theta\varphi\gamma}^{\lambda\xi\zeta} + R_{\cdot\lambda\mu\nu}^{\xi} \delta_{\theta\varphi\gamma}^{\lambda\zeta\eta} + R_{\cdot\lambda\mu\nu}^{\zeta} \delta_{\theta\varphi\gamma}^{\lambda\eta\xi}). \quad (8.64)$$

Logo, usando a expansão do *heat kernel* obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_3 &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} \left\{ 4L_0 - \frac{1}{3} L_1 R + \sum_{i=0}^5 l_i^* R_{\mu\nu} M_i R^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^5 l_i R M_i R \right\}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

onde

$$\begin{aligned} l_1^* &= \frac{1}{2}, & l_2^* &= 2, & l_3^* &= 4, & l_4^* &= -\frac{4}{3}, & l_5^* &= -4; \\ l_1 &= -\frac{1}{8}, & l_2 &= l_3 = -\frac{1}{2}, & l_4 &= \frac{5}{12}, & l_5 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Usando a tabela de integrais (8.9), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_3 &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4 x \sqrt{g} \left\{ 2m^4 \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) + \frac{m^2}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) R \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{36\epsilon} + k'_{3,R}(a) \right] R + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{7}{30\epsilon} + k'_{3,W}(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (8.67)$$

onde

$$k'_{3,W}(a) = -\frac{44}{225} + \frac{8}{45a^2} + Y + \frac{32Y}{15a^4} - \frac{8Y}{3a^2}, \quad (8.68)$$

$$k'_{3,R}(a) = -\frac{7}{540} + \frac{1}{27a^2} + \frac{Y}{12} + \frac{4Y}{9a^4} - \frac{2Y}{9a^2}. \quad (8.69)$$

Subtraindo a expressão (8.45) da equação (8.67), chegamos ao resultado final

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4 x \sqrt{g} \left\{ \frac{m^4}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) - \frac{m^2}{6} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 \right) R + R \left[\frac{1}{72\epsilon} + k^3_R(a) \right] R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{60\epsilon} + k^3_W(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right\}, \end{aligned} \quad (8.70)$$

onde

$$k^3_W(a) = \frac{1}{150} + \frac{2}{45a^2} + \frac{8Y}{15a^4}, \quad (8.71)$$

$$k^3_R(a) = -\frac{1}{80} + \frac{1}{108a^2} + \frac{Y}{16} + \frac{Y}{9a^4} - \frac{Y}{6a^2}. \quad (8.72)$$

Em concordância com a prova geral da referência [40], a ação efetiva para o campo tensorial massivo totalmente antissimétrico de terceira ordem, equação (8.70), é exatamente a mesma do campo escalar mínimo, que pode ser encontrada pela fórmula (8.13) no caso particular em que $\xi = 0$.

Considere agora o limite sem massa do fator de forma $k_W^3(a)$ do termo com o quadrado do tensor Weyl. No limite $m \rightarrow 0$ esse termo fica na forma $-\frac{1}{60} \ln \left(-\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right)$. Ao mesmo tempo, para $m = 0$ a teoria do tensor antissimétrico de terceira ordem não possui graus de liberdade. Usando os métodos explicados no apêndice E, podemos encontrar nesse caso a seguinte expressão para a ação efetiva

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_3 - \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 + \frac{3}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 - 2 \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{min}. \quad (8.73)$$

Através dos resultados anteriores deste capítulo, equações (8.13), (8.22), (8.42) e (8.67), podemos conferir que a equação (8.73) do caso não-massivo tem como resposta $\bar{\Gamma}^{(1)} = 0$. Então, a diferença entre os coeficientes dos fatores de forma logarítmicos do termo $k_W^3(a)$ no limite sem massa e do caso estritamente não-massivo tem como valor $1/60$. Uma situação similar também ocorre no outro fator de forma $k_R^3(a)$. Nesse caso, no limite em que $m \rightarrow 0$ encontramos a contribuição quântica $-\frac{1}{36} \ln \left(-\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right)$ para o termo R^2 , enquanto que no caso em que $m = 0$ também não existe nenhuma contribuição. A diferença entre os dois coeficientes é $1/36$ e representa o campo escalar mínimo que não desaparece no limite $m \rightarrow 0$. Esse exemplo demonstra mais uma vez a descontinuidade quântica no limite sem massa que é um fenômeno típico das teorias com quebra fraca da simetria de calibre.

Seria interessante em um próximo trabalho formular os mesmos dois tipos de campos tensoriais antissimétricos em um contexto mais amplo, podendo incluir, por exemplo, campos adicionais vetoriais ou campos vetoriais axiais. Nesses casos, a prova baseada na regularização ζ pode ser mais difícil de ser realizada, entretanto, não existe aparentemente nenhum obstáculo em se realizar os cálculos explícitos dos fatores de forma por meio da técnica do *heat kernel*.

Conclusões gerais

Nessa tese foram obtidos os seguintes resultados originais:

- Calculamos o potencial Newtoniano nos modelos de gravitação super-renormalizáveis no nível quântico. Mostramos que o potencial Newtoniano modificado não apresenta a singularidade típica da mecânica clássica, sendo regular em $r = 0$.
- Obtivemos na teoria da gravitação não-local livre de fantasmas com o operador não-local na forma $\exp(-\square/\mu^2)$ o potencial Newtoniano de uma partícula puntiforme no espaço-tempo D -dimensional, o campo gravitacional de uma partícula ultrarrelativística e a solução do colapso gravitacional de uma casca esférica nula, dentro da aproximação de campo fraco. Mostramos que o potencial Newtoniano nessa teoria é sempre regular na posição da fonte, independentemente do número de dimensões do espaço-tempo. Demonstramos através do cálculo do invariante de Kretschmann a inexistência da singularidade gravitacional em $r = 0$ no caso do colapso gravitacional quando não é desprezada a espessura da casca esférica. Também mostramos que se massa M do objeto em colapso for suficientemente pequena, o miniburaco negro não é formado como resultado do colapso gravitacional.
- Usando métodos numéricos de cálculos, mostramos que no modelo inflacionário induzido pela anomalia conforme que o ponto onde a evolução inflacionária estável termina corresponde, exatamente, às condições iniciais necessárias o modelo inflacionário instável de Starobinsky do tipo $R + R^2$, de maneira que as soluções indesejadas do hiperinflacionárias são descartadas. Em resumo, o resultado apresentado significa que a transição da versão de inflação estável para a instável acontece com bastante sucesso, pelo menos dentro da aproximação em que a pequena fase de

transição é desprezada. Entretanto, para que exista um modelo inflacionário do tipo $R + R^2$ fenomenologicamente bem sucedido, também é necessário explicar o valor $a_4 = 5 \times 10^8$ do coeficiente do termo R^2 na ação do vácuo. Discutimos, qualitativamente, duas maneiras alternativas de mecanismos quânticos que podem ser responsáveis por esse valor. A conclusão é que em ambos os mecanismos, a saber, o grupo de renormalização no espaço-tempo curvo do parâmetro de vácuo a_4 e a gravitação induzida baseada na quebra espontânea de simetria, são capazes de providenciar o valor desejável do coeficiente do termo R^2 . O ingrediente mais importante nos dois casos é o valor grande do parâmetro de interação não-mínimo da gravitação com escalares, na ordem de $\xi \approx 10^4$.

- Obtivemos na eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz as divergências de 1-*loop* no setor de vácuo da teoria. Também calculamos a anomalia conforme e a ação efetiva do vácuo induzida pela anomalia conforme. A aplicação dessa ação à Cosmologia, mostrou que o parâmetro adimensional $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ não causa nenhuma dinâmica nova no fator de escala da métrica. No entanto, esperamos que existam contribuições relevantes desse termo para as perturbações da métrica, especialmente durante a época inflacionária.
- Calculamos as divergências de 1-*loop* que contribuem para o propagador do modelo dos Galileons. A conclusão mostrou que o setor livre dessa teoria inclui correções quânticas com derivadas superiores do tipo $\pi \square^4 \pi$. Mostramos que o modelo dos Galileons pode ser modificado de maneira a se tornar super-renormalizável no nível quântico, com divergências presentes apenas no nível 1-*loop*. Entretanto, essa teoria modificada possui fantasmas massivos no seu espectro de partículas.
- Confirmamos por meio do cálculo direto da parte finita da ação efetiva do vácuo, que o resultado do artigo [40], com respeito da equivalência quântica dos campos tensoriais antissimétricos massivos de segunda e terceira ordem com os modelos dos campos massivos vetorial e escalar, respectivamente, se mantêm nos fatores de forma não-locais. Além disso, encontramos uma descontinuidade nas contribuições quânticas nos limites sem massa em ambos os casos.

Técnica generalizada de Schwinger-DeWitt

A.1 Fórmulas necessárias para a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt

Quando o operador bilinear \hat{H} é do tipo não-mínimo o formalismo para o cálculo das divergências é a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [21]. A idéia básica é reduzir a fórmula da ação efetiva através de transformações algébricas em partes menores conhecidas como traços funcionais universais

$$\text{Tr } C^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_k} \frac{\hat{1}}{\square^n}. \quad (\text{A.1})$$

As técnicas de redução da ação efetiva que serão utilizadas nessa tese serão especificadas durante o texto quando for necessário. Para outros exemplos, veja as referências [21, 42].

Definiremos como a dimensão de fundo de um traço universal a dimensão da quantidade $C^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$, escrita em unidades de comprimento l no sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$. Um dos principais resultados da referência [21] é que todos os traços funcionais universais com dimensão de fundo maior do que $1/l^4$ são finitos e, portanto, não contribuem para as divergências.

A parte divergente dos traços universais funcionais pode ser calculada por meio da integral sobre o tempo próprio e do *heat kernel*. Não é nosso objetivo aqui descrever o método geral, bem como a maneira de se obter os traços universais. Em vez disso,

apresentaremos as fórmulas finais e mostraremos sua aplicação no cálculo das divergências durante o decorrer da tese. A tabela das fórmulas necessárias para o cálculo dos traços universais funcionais tem a forma [21]

$$\begin{aligned} \left. \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\hat{1}}{\square} \right|_{div} &= \frac{2i}{\epsilon} \sqrt{-g} \times \frac{1}{2} \left\{ \hat{1} \left[-g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{180} R_{\alpha\beta\rho\omega}^2 - \frac{1}{180} R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{45} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{45} R_{\alpha\beta\rho\mu} R^{\alpha\beta\rho\nu} - \frac{2}{45} R_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + \frac{1}{18} R R_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{30} \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{10} \nabla_\mu \nabla_\nu R \left. \right] - \frac{1}{12} g_{\mu\nu} \hat{S}_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{6} R \hat{S}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \hat{S}_{(\mu\alpha} \hat{S}_{\nu)}^\alpha \\ &\left. - \frac{1}{3} \nabla_{(\mu} \nabla^\alpha \hat{S}_{\alpha\nu)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \frac{\hat{1}}{\square} \right|_{div} = \frac{2i}{\epsilon} \sqrt{-g} \times \frac{\hat{1}}{6} R \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\hat{1}}{\square^2} \right|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} \sqrt{-g} \times \left[\frac{\hat{1}}{6} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \hat{S}_{\mu\nu} \right], \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2n-3}} \frac{\hat{1}}{\square^n} \right|_{div} = 0, \quad (n \geq 2) \quad (\text{A.5})$$

$$\left. \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2n-4}} \frac{\hat{1}}{\square^n} \right|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} \sqrt{-g} \times \hat{1} \frac{g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)}}{2^{n-2} (n-1)!}, \quad (n \geq 2) \quad (\text{A.6})$$

onde

$$g^{(0)} = 1, \quad g_{\mu\nu}^{(1)} = g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

$$g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)} = g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \cdots g_{\mu_{2n-3} \mu_{2n-4}} + \text{todas as permutações dos índices}. \quad (\text{A.8})$$

Não mostramos aqui as quantidades $\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha \nabla_\beta (\hat{1}/\square^3)$, $\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla_\omega (\hat{1}/\square^4)$ e as expressões com dimensão de fundo $1/l$, pois elas não serão necessárias. Também temos a fórmula útil

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln (\hat{1}\square) \Big|_{div} &= \frac{2i}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \times \text{tr} \left\{ \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2) + \frac{1}{72} R^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{30} \square R + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2 O cálculo da parte divergente de $\text{Tr} \ln \hat{H}_m$

Logo depois da expansão (6.12), o cálculo (em primeira ordem em $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$) da parte divergente da ação efetiva de *1-loop* para a teoria da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz, foi reduzido ao cálculo das divergências de dois operadores distintos, um operador mínimo e o outro não-mínimo. O cálculo das divergências do operador mínimo já foi considerado anteriormente no artigo [179]. Porém, por razões de continuidade repetiremos aqui essa consideração.

O operador mínimo (6.10) pode ser escrito como

$$\hat{H}_m = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\hat{1} = g^{\mu\nu}, \quad \hat{h}^\beta = -k_{AF}^\alpha \epsilon_\alpha^{\mu\nu\beta} - \nabla_\alpha k_F^{\mu\alpha\beta\nu}, \quad \hat{\Pi} = -R^{\mu\nu} + k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\lambda\alpha\beta}^\nu. \quad (\text{A.11})$$

A estrutura do operador (A.10) difere da definição original do operador mínimo, feita previamente na equação (2.19), devido ao termo linear na derivada covariante ∇_μ . Nesse caso, as fórmulas da seção 2.4.1 também podem ser reaproveitadas se o novo termo for absorvido na definição da derivada covariante $\nabla_\mu \rightarrow D_\mu = \nabla_\mu + \hat{h}_\mu$. Por esse motivo, devemos considerar novas definições para os operadores (2.27) e (2.29) [20], a saber,

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu \quad (\text{A.12})$$

e

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{1} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] + \nabla_\mu \hat{h}_\nu - \nabla_\nu \hat{h}_\mu + \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu - \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu, \quad (\text{A.13})$$

de maneira que a fórmula (2.31) das divergências logarítmicas seja mantida. Assim, usando os operadores (A.11) nas novas definições, (A.12) e (A.13), encontramos através da substituição direta na fórmula (2.31), a seguinte resposta para as divergências do operador mínimo [179]

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_m|_{div} - i \text{Tr} \ln \hat{H}_{gh}|_{div} = \\ & = -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\beta\mu\alpha\nu} - \frac{1}{6} R \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \right. \\ & \quad + \frac{1}{3} R_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\beta \nabla_\tau k_F^{\tau\mu\alpha\nu} - \frac{1}{12} k_F^{\mu\nu\alpha\beta} R R_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2} k_F^{\mu\alpha\beta\tau} R_{\alpha\beta\tau}^\nu R_{\mu\nu} \left. \right\} \\ & \quad + \bar{\Gamma}_{vac}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde $\bar{\Gamma}_{vac}^{(1)}$ é a parte divergente da ação efetiva de vácuo para o campo vetorial, fórmula (2.55), e introduzimos a nova notação $k_F^{\mu\lambda\nu}{}_{\lambda} \equiv k_F^{\mu\nu}$.

A.3 O cálculo da parte divergente de $\text{Tr } \hat{H}_{nm} \hat{H}_0^{-1}$

Antes de aplicar a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt no cálculo da contribuição divergente do termo não-mínimo, devemos primeiramente, de acordo com a expressão (6.12), inverter o operador (6.6). Como exposto na seção A.1, uma observação importante é que todos os traços universais com dimensão de fundo maior do que $1/l^4$ são finitos. Então, como estamos interessados apenas nas divergências, não precisamos ir além dessa ordem no cálculo de \hat{H}_0^{-1} , pois o operador não-mínimo \hat{H}_{nm} tem dimensão de fundo l^0 devido ao campo $k_F^{\mu\nu\alpha\beta}$ ser adimensional. Sendo assim, o operador inverso pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^{-1} &= (H_0^{-1})_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\nu}^{\lambda} \frac{1}{\square} + R_{\nu}^{\lambda} \frac{1}{\square^2} - 2(\nabla^{\rho} R_{\nu}^{\lambda}) \nabla_{\rho} \frac{1}{\square^3} + R_{\tau}^{\lambda} R_{\nu}^{\tau} \frac{1}{\square^3} - (\square R_{\nu}^{\lambda}) \frac{1}{\square^3} \\ &+ 4(\nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} R_{\nu}^{\lambda}) \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} \frac{1}{\square^4} + \mathcal{O}(l^{-5}). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Dessa maneira, obtemos a relação

$$\begin{aligned} \text{Tr } \hat{H}_{nm} \hat{H}_0^{-1} &= -2 \text{Tr } k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} \left\{ g_{\lambda\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square} + R_{\lambda\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^2} + (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} R_{\lambda\nu}) \frac{1}{\square^2} \right. \\ &+ 2(\nabla_{\alpha} R_{\lambda\nu}) \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^2} + R_{\lambda\tau} R_{\nu}^{\tau} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^3} - 2(\nabla^{\rho} R_{\lambda\nu}) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\rho} \frac{1}{\square^3} \\ &\left. - 4(\nabla_{\alpha} \nabla^{\rho} R_{\lambda\nu}) \nabla_{\beta} \nabla_{\rho} \frac{1}{\square^3} - (\square R_{\lambda\nu}) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^3} + 4(\nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} R_{\lambda\nu}) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} \frac{1}{\square^4} \right\} \\ &+ \mathcal{O}(l^{-5}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A equação (A.17) já possui a forma que permite aplicar a tabela dos traços universais funcionais, fórmulas (A.2)–(A.9).

Usando as fórmulas (A.2), (A.4), (A.5) e (A.6) cada termo da fórmula (A.17) pode ser calculado separadamente. Como resultado, encontramos

$$\text{Tr } k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} R_{\lambda\nu}) \frac{1}{\square^2} \Big|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Tr } k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} R_{\lambda\tau} R_{\nu}^{\tau} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} = \frac{i}{2\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} k_F^{\mu\nu} R_{\mu\lambda} R_{\nu}^{\lambda}, \quad (\text{A.18})$$

$$- \text{Tr } k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\square R_{\lambda\nu}) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} = -\frac{i}{2\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} k_F^{\mu\nu} \square R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$-4 \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\nabla_\alpha \nabla^\rho R_{\lambda\nu}) \nabla_\beta \nabla_\rho \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} = \frac{2i}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} & 4 \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\lambda\nu}) \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho \nabla_\sigma \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\ &= -\frac{2i}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{3} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} k_F^{\mu\nu} \square R_{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$2 \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\nabla_\alpha R_{\lambda\nu}) \nabla_\beta \frac{1}{\square^2} \Big|_{div} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$-2 \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} (\nabla^\rho R_{\lambda\nu}) \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\lambda} R_{\lambda\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square^2} \Big|_{div} = -\frac{i}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{3} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} k_F^{\mu\nu} R R_{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr} k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{\square} \Big|_{div} = -\frac{i}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{45} k_F^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{30} k_F^{\alpha\beta} \square R_{\alpha\beta} \right. \\ & + \frac{1}{18} k_F^{\alpha\beta} R R_{\alpha\beta} + \frac{19}{180} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\mu\nu} R_\beta^{\lambda\mu\nu} - \frac{2}{45} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda} R_\beta^\lambda + \frac{1}{10} k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta R \\ & \left. + \frac{1}{3} k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} R_{\mu\alpha\tau}^\lambda R_{\lambda\nu\beta}^\tau - k_F \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde introduzimos a notação $k_F \equiv g_{\mu\nu} k_F^{\mu\nu}$. Usando as relações (A.17)–(A.25), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \operatorname{Tr} \ln \hat{H}_{nm} \hat{H}_0^{-1} \Big|_{div} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^n x \mu^{n-4} \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{45} k_F^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{5} R_{\alpha\beta} \square k_F^{\alpha\beta} \right. \\ & + \frac{2}{9} k_F^{\alpha\beta} R R_{\alpha\beta} + \frac{19}{180} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\mu\nu} R_\beta^{\lambda\mu\nu} - \frac{49}{90} k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda} R_\beta^\lambda + \frac{1}{10} R \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{3} k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} R_{\mu\alpha\tau}^\lambda R_{\lambda\nu\beta}^\tau + \frac{2}{3} R_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\mu\alpha\beta\nu} + \frac{1}{3} k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \\ & \left. - k_F \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

A.4 O cálculo da parte divergente de $\operatorname{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square}$

O cálculo das divergências de 1-loop que contribuem para o propagador do modelo do Galileons, foi reduzido no capítulo 7, basicamente, na derivação da parte divergente do seguinte operador não-mínimo:

$$\operatorname{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square}, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\hat{P}_1 = \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad \text{e} \quad \hat{U}^{\mu\nu} = 4c_3 \left[(\square\pi)g^{\mu\nu} - (\partial^\mu \partial^\nu \pi) \right]. \quad (\text{A.28})$$

Para reduzir o problema para as fórmulas dos traços universais, precisamos agora realizar seguinte a comutação:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} &= \text{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{\square} \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} \Big|_{div} \\ &= \text{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \left\{ \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^2} + \left[\frac{1}{\square}, \hat{U}^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} \right\} \Big|_{div}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Com a ajuda da identidade

$$\left[\frac{1}{\square}, \hat{A} \right] = -\frac{1}{\square} \left[\square, \hat{A} \right] \frac{1}{\square}, \quad (\text{A.30})$$

podemos transformar o cálculo do comutador com a função de Green $1/\square$ em um comutador com o operador de d'Alembert. Assim, encontramos para o comutador a resposta

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\square}, \hat{U}^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} &= -(\square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} + (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \\ &+ 4(\partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 12(\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} - 2(\partial^\lambda \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} \\ &+ 4(\partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 8(\partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &+ 16(\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l^5}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Os termos omitidos possuem dimensão de fundo maior do que $1/l^4$ e podem ser desprezados, pois são finitos [21]. Substituindo a fórmula (A.31) na equação (A.29), encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} &= \text{Tr} \left\{ -\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} + \hat{U}^{\alpha\beta} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \right. \\ &+ 8\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 12\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &+ 4\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 16\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &\left. + 16\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^6} \right\} \Big|_{div}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

O valor de cada termo da equação acima já pode ser encontrado usando as fórmulas dos traços universais. Todos os termos da equação (A.32) podem ser agrupados nos traços da fórmula (A.6), pois apenas esse tipo de traço não é nulo no espaço-tempo plano. Então, usando a fórmula (A.6) encontramos os resultados

$$- \text{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} = \frac{i}{2\epsilon} \int d^4x \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu), \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\ &= -\frac{i}{12\epsilon} \int d^4x \left\{ 2 \hat{U}_{\mu\nu}(\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}_\alpha^\alpha(\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} & 8 \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\ &= -\frac{2i}{3\epsilon} \int d^4x \left\{ 2 \hat{U}_\nu^\alpha(\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} & 4 \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\ &= -\frac{i}{3\epsilon} \int d^4x \left\{ 2 \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} & -12 \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \Big|_{div} \\ &= \frac{i}{4\epsilon} \int d^4x \left\{ \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) + \frac{1}{2} \hat{U}_\alpha^\alpha(\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) + 4 \hat{U}_\nu^\alpha(\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right. \\ & \left. + \hat{U}_{\mu\nu}(\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}_\alpha^\alpha(\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} & -16 \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\nu \partial_\mu \frac{1}{\square^5} \Big|_{div} \\ &= \frac{i}{2\epsilon} \int d^4x \left\{ \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) + 2 \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) \right. \\ & \left. + 2 \hat{U}_\nu^\alpha(\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

e

$$\begin{aligned} & 16 \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\nu \partial_\mu \frac{1}{\square^6} \Big|_{div} \\ &= -\frac{i}{5\epsilon} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \hat{U}_\alpha^\alpha(\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) + \hat{U}_\alpha^\alpha(\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right. \\ & \left. + 2 \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) + 4 \hat{U}_\nu^\alpha(\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \hat{U}_{\mu\nu}(\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Deste modo, a equação (A.32) pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} & \text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} = \frac{2i}{\epsilon} \int d^4x \left\{ \frac{1}{40} \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) - \frac{1}{120} \hat{U}_{\mu\nu}(\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \right. \\ & - \frac{1}{240} \hat{U}_\alpha^\alpha(\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) - \frac{1}{30} \hat{U}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) - \frac{1}{15} \hat{U}_\nu^\alpha(\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \\ & \left. + \frac{1}{40} \hat{U}_\alpha^\alpha(\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Substituindo a forma explícita do operador $\hat{U}^{\mu\nu}$, definida pela fórmula (A.28), na equação (A.40), finalmente encontramos

$$\text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} c_3^2 \int d^4x \pi \square^4 \pi. \quad (\text{A.41})$$

Integrais da média sobre a esfera unitária

B.1 Transformações entre as coordenadas (X, Y, Z) e (ξ, ζ_{\perp})

Para calcular a integral da média sobre a esfera unitária, equação (4.59), precisamos primeiramente encontrar a relação existente entre as coordenadas Cartesianas (X, Y, Z) e as coordenadas associadas ao movimento do giraton (ξ, ζ_{\perp}) . Começaremos construindo uma base ortonormal relacionada com as coordenadas do referencial do giraton. O primeiro elemento dessa base é vetor unitário \mathbf{n} que está na direção da trajetória do giraton (veja a fórmula (4.53)). O segundo é o vetor unitário \mathbf{k} que está direcionado da trajetória do giraton ao eixo Z (veja a figura B.1). Logo, o versor \mathbf{k} pode ser escrito através da combinação linear

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z + k_n \mathbf{n}. \quad (\text{B.1})$$

Usando os produtos escalares, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \cos \alpha$, encontramos

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sin \alpha} (\mathbf{e}_z - \cos \alpha \mathbf{n}). \quad (\text{B.2})$$

O último elemento da base é o vetor unitário \mathbf{p} , ortogonal a ambos versores \mathbf{n} e \mathbf{k} . Esse pode ser encontrado a partir do seguinte produto vetorial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} = \frac{1}{\sin \alpha} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.3})$$

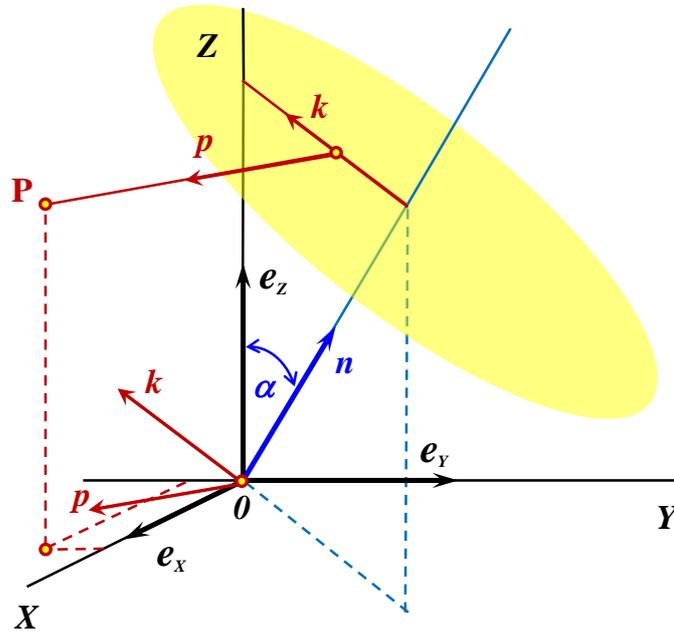


Figura B.1: Relações geométricas entre os vetores da base das coordenadas Cartesianas e coordenadas do referencial do giraton.

Como esse versor é ortogonal a e_z , ele pertence ao plano XY . Não é difícil conferir que

$$\mathbf{p} = \sin \beta \mathbf{e}_x - \cos \beta \mathbf{e}_y. \quad (\text{B.4})$$

Considere agora um ponto P qualquer com coordenadas Cartesianas (X, Y, Z) . Nessas coordenadas, o raio vetor \mathbf{OP} que aponta de O para P pode ser escrito como

$$\mathbf{OP} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z. \quad (\text{B.5})$$

O mesmo vetor pode ser expressado no referencial do giraton (ξ, ζ_k, ζ_p) por

$$\mathbf{OP} = \xi\mathbf{n} + \zeta_k\mathbf{k} + \zeta_p\mathbf{p}. \quad (\text{B.6})$$

Comparando as equações (B.5) e (B.6) e usando as fórmulas (4.53), (B.2) e (B.4), encontramos

$$X = \cos \beta (\xi \sin \alpha - \zeta_k \cos \alpha) + \zeta_p \sin \beta, \quad (\text{B.7})$$

$$Y = \sin \beta (\xi \sin \alpha - \zeta_k \cos \alpha) - \zeta_p \cos \beta, \quad (\text{B.8})$$

$$Z = \xi \cos \alpha + \zeta_k \sin \alpha. \quad (\text{B.9})$$

Já para as relações inversas temos as seguintes fórmulas

$$\xi = \operatorname{sen} \alpha (\cos \beta X + \operatorname{sen} \beta Y) + \cos \alpha Z, \quad (\text{B.10})$$

$$\zeta_k = -\cos \alpha (\cos \beta X + \operatorname{sen} \beta Y) + \operatorname{sen} \alpha Z, \quad (\text{B.11})$$

$$\zeta_p = \operatorname{sen} \beta X - \cos \beta Y. \quad (\text{B.12})$$

B.2 O cálculo das integrais

A integral (4.59) possui através do termo $T^{(\alpha,\beta)}(y_\perp)$ a função delta $\delta(y_\perp - \zeta_\perp)$. Por esse motivo, devemos encontrar o valor dos ângulos (α, β) quando ζ_\perp assume o valor específico y_\perp . Usando a relação (B.12), encontramos para o ângulo β

$$\operatorname{sen} \beta_\pm = \frac{y_p X + Y Q_\pm}{X^2 + Y^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\cos \beta_\pm = \frac{-y_p Y + X Q_\pm}{X^2 + Y^2}, \quad (\text{B.14})$$

$$Q_\pm = \pm \sqrt{X^2 + Y^2 - y_p^2}. \quad (\text{B.15})$$

Como discutido anteriormente para cada valor de y_p existem dois diferentes valores do ângulo β , correspondendo às diferentes orientações da trajetória do giraton. Usando as equações (B.13) e (B.14) é possível conferir que

$$\cos \beta_\pm X + \operatorname{sen} \beta_\pm Y = Q_\pm. \quad (\text{B.16})$$

Utilizando essa fórmula, as relações (B.10) e (B.11) adquirem a forma

$$\xi = \operatorname{sen} \alpha Q_\pm + \cos \alpha Z, \quad (\text{B.17})$$

$$\zeta_k = -\cos \alpha Q_\pm + \operatorname{sen} \alpha Z. \quad (\text{B.18})$$

Calcularemos agora a seguinte integral:

$$[\dots]_{y_p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \delta(y_p - \zeta_p) (\dots). \quad (\text{B.19})$$

Podemos usar a relação (B.12) e encontrar

$$d\zeta_p = |\partial_\beta \zeta_p| d\beta = Q d\beta, \quad Q = Q_+. \quad (\text{B.20})$$

Desse modo, a equação (B.19) pode ser reescrita como uma integral sobre ζ_p , que pode ser diretamente calculada. O resultado é

$$[\dots]_{y_p} = \frac{1}{2\pi Q} \left[(\dots)_{y_p}^+ + (\dots)_{y_p}^- \right]. \quad (\text{B.21})$$

A expressão do lado direito é uma soma das contribuições para dois valores β_{\pm} , que correspondem ao mesmo valor de y_p . A quantidade ζ_p em cada desses termos devem ser substituída por y_p .

Agora por um procedimento análogo calculemos a integral sobre a variável angular α . Usando a relação (B.11) com $\zeta_k = y_k$ encontramos para o ângulo α

$$\text{sen } \alpha_{\pm} = \frac{y_k Z + Q \sqrt{r^2 - y_{\perp}^2}}{r^2 - y_p^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$\text{cos } \alpha_{\pm} = \frac{-y_k Q_{\pm} \pm Z \sqrt{r^2 - y_{\perp}^2}}{r^2 - y_p^2}, \quad (\text{B.23})$$

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad y_{\perp}^2 = y_p^2 + y_k^2. \quad (\text{B.24})$$

$$\xi_{\pm} = \pm \sqrt{r^2 - y_{\perp}^2}. \quad (\text{B.25})$$

Na obtenção desses resultados foi necessário solucionar equações quadráticas que possuem duas raízes. Dessa maneira, descartamos na equação (B.22) a raiz com o sinal negativo, pois para uma linha que coincide com a trajetória do giraton ($y_k = y_p = 0$) os ângulos (α, β) representam os ângulos esféricos nessa direção. Sendo assim, caso isso não fosse feito, teríamos um valor negativo para a função $\text{sen } \alpha$ o que não é possível, porque o ângulo polar α é definido apenas no intervalo $[0, \pi]$.

As relações (B.13), (B.23) e (B.25) adquirem no limite $y_k = y_p = 0$ a forma

$$\text{sen } \alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{r}, \quad \text{cos } \alpha_{\pm} = \pm \frac{Z}{r}, \quad \xi_{\pm} = \pm r. \quad (\text{B.26})$$

$$\text{sen } \beta_{\pm} = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \text{cos } \beta_{\pm} = \pm \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (\text{B.27})$$

As equações (B.26) e (B.27) descrevem dois pontos opostos dentro da esfera unitária. Nesse caso, as soluções para (α_+, β_+) e (α_-, β_-) descrevem as duas trajetórias dos giratons que passam pelo mesmo ponto do espaço (X, Y, Z) .

Considere agora a integral

$$\langle \dots \rangle_{y_{\perp}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\alpha \text{sen } \alpha \delta(y_k - \zeta_k) [\dots]_{y_p}, \quad (\text{B.28})$$

Através das relações (B.17) e (B.18) podemos escrever

$$d\zeta_k = |\partial_{\alpha} \zeta_k| d\alpha = \xi d\alpha, \quad \xi = \xi_{\pm} = \sqrt{r^2 - y_{\perp}^2}. \quad (\text{B.29})$$

Assim, encontramos, finalmente, a fórmula final para o cálculo da média

$$\langle \dots \rangle_{y_{\perp}} = \frac{1}{4\pi Q \sqrt{r^2 - y_{\perp}^2}} [\text{sen } \alpha_+(\dots)^+ + \text{sen } \alpha_-(\dots)^-]_{\zeta_{\perp} = y_{\perp}}. \quad (\text{B.30})$$

Prova da simetria conforme local de $K(g_{\mu\nu}, k_F)$

O objetivo desse apêndice é mostrar a prova da simetria conforme local da função (6.14)

$$\sqrt{-g} K(g_{\mu\nu}, k_F) = \sqrt{-g'} K(g'_{\mu\nu}, k_F). \quad (\text{C.1})$$

Uma maneira equivalente de fazer o mesmo é considerar a identidade de Noether (2.69). Por meio da fórmula (2.77), a derivada variacional em relação a métrica nessa equação pode ser transformada na derivada em relação σ , isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}} e^{-4\sigma} \frac{\delta}{\delta\sigma} \int d^4x \sqrt{-g'} K(g'_{\mu\nu} e^{2\sigma}, k'_F e^{-4\sigma}) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Dessa maneira, é suficiente restringir a nossa consideração à primeira ordem no fator conforme σ .

Usando as regras de transformação conforme da derivada covariante e das curvaturas encontradas na referência [51], obtemos para cada termo da equação (6.14), desprezando as ordens não-lineares em σ e os termos superficiais, as seguintes regras de transformação:

$$\begin{aligned} (k_F^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu})' &= (1 - 4\sigma) k_F^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} + 2k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma - k_F^{\alpha\beta} R \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma \\ &- k_F R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \square \sigma + 2k_F^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \sigma + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} (k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\mu\nu} R_\beta^{\cdot\lambda\mu\nu})' &= (1 - 4\sigma) k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda\mu\nu} R_\beta^{\cdot\lambda\mu\nu} - 4k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma \\ &+ 4k_F^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \sigma + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$(k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda} R_\beta^\lambda)' = (1 - 4\sigma)k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\lambda} R_\beta^\lambda - 4k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma - 2k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \square \sigma + \dots \quad (\text{C.5})$$

$$(k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R)' = (1 - 4\sigma)k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R - 2k_F^{\alpha\beta} R \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - 6k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \square \sigma - k_F R \square \sigma + \dots \quad (\text{C.6})$$

$$(k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} R_{\cdot\mu\alpha\tau}^\lambda R_{\lambda\nu\beta\cdot}^\tau)' = (1 - 4\sigma)k_F^{\mu(\alpha\beta)\nu} R_{\cdot\mu\alpha\tau}^\lambda R_{\lambda\nu\beta\cdot}^\tau + k_F^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \sigma + k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma - 6k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\lambda\mu\alpha\nu} \nabla^\lambda \nabla_\beta \sigma + \dots \quad (\text{C.7})$$

$$(k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta})' = (1 - 4\sigma)k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + 2k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \square \sigma - 4k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + \dots \quad (\text{C.8})$$

$$(k_F^{\mu\nu\alpha\beta} R R_{\mu\nu\alpha\beta})' = (1 - 4\sigma)k_F^{\mu\nu\alpha\beta} R R_{\mu\nu\alpha\beta} - 4k_F^{\alpha\beta} R \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - 6k_F^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \square \sigma + \dots \quad (\text{C.9})$$

$$(k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\cdot\alpha\beta\lambda}^\nu R_{\mu\nu})' = (1 - 4\sigma)k_F^{\mu\alpha\beta\lambda} R_{\cdot\alpha\beta\lambda}^\nu R_{\mu\nu} - 2k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma + 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\lambda\mu\alpha\nu} \nabla^\lambda \nabla_\beta \sigma - k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\mu\alpha\beta\nu} \square \sigma + \dots \quad (\text{C.10})$$

$$(R \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta})' = (1 - 4\sigma)R \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} - 2k_F^{\alpha\beta} R \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - 6\nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \square \sigma - 6k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \sigma + k_F \nabla_\lambda R \nabla^\lambda \sigma + \dots \quad (\text{C.11})$$

$$(R_{\alpha\beta} \square k_F^{\alpha\beta})' = (1 - 4\sigma)R_{\alpha\beta} \square k_F^{\alpha\beta} - 4k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma - 2k_F^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \square \sigma - 4k_F^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \sigma - 2\nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \square \sigma - k_F \square^2 \sigma - 2k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \sigma - 2k_F^{\alpha\beta} \nabla_\lambda R_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \sigma + 2k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R_{\lambda\beta} \nabla^\lambda \sigma - 2k_F^{\alpha\beta} \nabla^\tau R_{\tau\alpha\beta\lambda} \nabla^\lambda \sigma + \dots \quad (\text{C.12})$$

$$(R_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\mu\alpha\beta\nu})' = (1 - 4\sigma)R_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\mu\alpha\beta\nu} + k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma - k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\lambda\mu\alpha\nu} \nabla^\lambda \nabla_\beta \sigma + \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \square \sigma - k_F^{\alpha\beta} \nabla_\lambda R_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \sigma + 2k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R_{\lambda\beta} \nabla^\lambda \sigma - 4k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\alpha R_{\mu\nu} \nabla_\beta \sigma - 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\beta R_{\mu\lambda\alpha\nu} \nabla^\lambda \sigma + \dots \quad (\text{C.13})$$

$$(R_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\beta \nabla_\lambda k_F^{\mu\alpha\lambda\nu})' = (1 - 4\sigma)R_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\beta \nabla_\lambda k_F^{\mu\alpha\lambda\nu} + k_F^{\alpha\beta} R_\beta^\lambda \nabla_\alpha \nabla_\lambda \sigma - k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} + 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} R_{\lambda\mu\alpha\nu} \nabla^\lambda \nabla_\beta \sigma + \nabla_\alpha \nabla_\beta k_F^{\alpha\beta} \square \sigma + k_F^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R_{\lambda\beta} \nabla^\lambda \sigma + k_F^{\alpha\beta} \nabla^\tau R_{\tau\alpha\beta\lambda} \nabla^\lambda \sigma - k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\alpha R_{\mu\nu} \nabla_\beta \sigma + 3k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla^\tau R_{\tau\mu\nu\alpha} \nabla_\beta \sigma - 2k_F^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\beta R_{\mu\lambda\alpha\nu} \nabla^\lambda \sigma + \dots \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned}
& \left[k_F \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) \right]' = (1 - 4\sigma) k_F \left(\frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{180} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{72} R^2 + \frac{1}{30} \square R \right) - \frac{1}{45} k_F R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - \frac{2}{9} k_F R \square \sigma - \frac{1}{5} k_F \square^2 \sigma \\
& - \frac{1}{15} k_F \nabla_\lambda R \nabla^\lambda \sigma + \dots
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Nas fórmulas (C.3)–(C.15) foram usadas as identidades de Bianchi e suas formas contraídas de maneira que podemos ver explicitamente na definição (6.14) o cancelamento de todos os termos dependentes de σ . Assim, encontramos a invariância conforme local (C.1).

O cálculo das divergências de 1-loop no modelo dos Galileons
através dos Diagramas de Feynman

Os diagramas que podem contribuir para o propagador do modelo dos Galileons são provenientes dos termos de interação $\mathcal{L}_{3,4,5}$ da Lagrangiana (7.3). Consideraremos cada um desses termos de maneira separada. Vamos começar pela Lagrangiana \mathcal{L}_3 . Como ela tem apenas três campos, seus diagramas são análogos aos diagramas de uma teoria do tipo $\lambda\varphi^3$. A única diferença está em todas as possíveis maneiras distintas de contrair as derivadas presentes em \mathcal{L}_3 . Vamos denotar a derivada do propagador do campo escalar $D(x - y)$ por

$$\text{---}\not\text{---} \equiv \partial_\mu D(x - y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{ip_\mu}{p^2 - m^2}, \quad (\text{D.1})$$

de maneira que podemos representar os diagramas conectados devido ao vértice \mathcal{L}_3 pelas figuras D.1 e D.2. Para a Lagrangiana \mathcal{L}_4 como esse termo tem somente quatro campos, seus diagramas têm a forma parecida com os diagramas da teoria $\lambda\varphi^4$, veja a figura D.3.

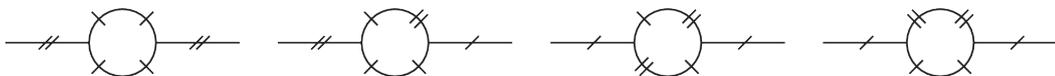


Figura D.1: O primeiro conjunto de diagramas fornecidos pelo termo \mathcal{L}_3 .



Figura D.2: O segundo conjunto de diagramas gerados por \mathcal{L}_3 .

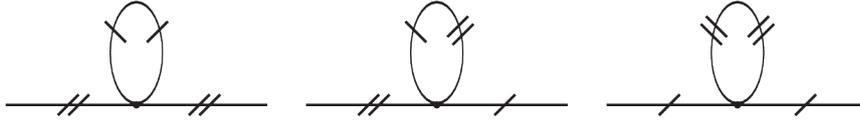


Figura D.3: Os diagramas gerados pela Lagrangiana \mathcal{L}_4 que podem contribuir para o propagador dos Galileons.

Por fim, a Lagrangiana \mathcal{L}_5 não pode gerar nenhum diagrama de 1-loop para a função de dois pontos. Para a demonstração dessa afirmação, considere a relação topológica (1.18). Como \mathcal{L}_5 tem um número ímpar de campos, de acordo com teorema de Wick [184], somente a partir da segunda ordem na constante de acoplamento c_5 os diagramas deixam de ser nulos. Na segunda ordem temos que realizar a contração entre dez campos quânticos, sendo duas dessas contrações responsáveis por linhas externas do diagrama. Os oito campos restantes são contraídos aos pares para formar as linhas internas do diagrama. Sendo assim, o número mínimo de linhas internas é $l_{int} = 4$. Como estamos na segunda ordem em c_5 temos um número de vértices $n = 2$. Logo, pela equação (1.18) encontramos $p = 3$, isto é, já no primeiro diagrama de Feynman não nulo devido a \mathcal{L}_5 já temos três loops, o que termina nossa demonstração.

Outra observação importante é que os diagramas das figuras D.2 e D.3 não contribuem, de fato, para o propagador. O motivo é que esses diagramas têm derivadas espaço-temporais do propagador

$$D(0) = D(x - y)|_{y=x} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}, \tag{D.2}$$

que não dependem das coordenadas. Então, nesse caso $\partial_\mu D(0) = 0$.

Finalmente, podemos representar de maneira esquematiza a expressão para a função de dois pontos como

$$G_{div}^{(1-loop)}(x, y) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \times \text{diagrama 1} + \alpha_2 \times \text{diagrama 2} + \alpha_3 \times \text{diagrama 3} + \alpha_4 \times \text{diagrama 4}) \Big|_{div} = \text{diagrama 5} \Big|_{div}, \tag{D.3}$$

onde $\alpha_{1,2,3,4}$ são coeficientes combinatórios e o operador de polarização é definido por

$$\textcircled{\bullet} = \Pi(p) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \alpha_i \Pi_i(p), \quad (\text{D.4})$$

onde

$$\Pi_1(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^4 q_\mu q_\nu (q^\mu - p^\mu)(q^\nu - p^\nu)}{q^2 (q-p)^2}, \quad (\text{D.5})$$

$$\Pi_2(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^2 q^2 q_\mu p_\nu (q^\mu - p^\mu)(q^\nu - p^\nu)}{q^2 (q-p)^2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\Pi_3(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu q^2 q^\mu (p^\nu - q^\nu)(p_\alpha - q_\alpha)(p^\alpha - q^\alpha)}{q^2 (q-p)^2} \quad (\text{D.7})$$

$$\Pi_4(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu q^4 (p^\mu - q^\mu)(p^\nu - q^\nu)}{q^2 (q-p)^2}. \quad (\text{D.8})$$

Para separar a parte divergente das integrais acima podemos usar a regularização dimensional. Reformulamos a teoria no espaço-tempo de dimensão arbitrária igual a 2ω . Dessa maneira, as integrais (D.5)–(D.8) podem ser calculadas, por exemplo, pelos métodos explicados na referência [50]. Todas as fórmulas necessárias podem ser encontradas no apêndice do artigo [163]. A resposta é

$$\begin{aligned} \Pi_1(p, \omega) &= \frac{i c_3^2}{4} p^8 I_1, \\ \Pi_i(p, \omega) &= 0, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

onde

$$I_1 \equiv \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(2\omega - 2)} \Gamma(2 - \omega) \Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 1) p^{2(\omega-2)}. \quad (\text{D.10})$$

Para calcularmos a parte divergente do operador de polarização, vamos tomar o limite $\omega \rightarrow 2$. As divergências são encontradas no pólo da função gamma $\Gamma(2 - \omega)$ presente na equação (D.10). Desse modo, encontramos

$$I_1|_{div} = -\frac{2}{\epsilon}, \quad (\text{D.11})$$

onde $\epsilon = 2(4\pi)^2(\omega - 2)$. Levando em consideração o coeficiente combinatório $\alpha_1 = 4$, chegamos ao resultado final para a parte divergente do operador de polarização

$$\Pi_{div}(p, \omega) = \frac{i c_3^2}{2} p^8 I_1|_{div} = -\frac{i c_3^2}{\epsilon} p^8. \quad (\text{D.12})$$

Por fim, devemos calcular através do operador de polarização (D.12) a ação efetiva divergente na representação de coordenadas. Com essa finalidade podemos usar a fórmula de Dyson

$$G^{-1}(p) = D^{-1}(p) - \Pi(p). \quad (\text{D.13})$$

Como o propagador de Feynman $D(p)$ não possui nenhum termo divergente, a equação (D.13) pode ser reescrita em função da parte divergente da ação efetiva como

$$\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}_{div}^{(1)}}{\delta\pi\delta\pi} = -i\Pi_{div}(\square) = -\frac{c_3^2}{\epsilon} \square^4. \quad (\text{D.14})$$

A equação (D.14) pode ser resolvida diretamente, a sua solução é

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{c_3^2}{2\epsilon} \int d^4x \pi \square^4 \pi, \quad (\text{D.15})$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido no capítulo 7 por meio da técnica generalizada de Schwinger-DeWitt.

Método de Faddeev-Popov em várias etapas para o campo tensorial massivo antissimétrico de segunda ordem

O nosso objetivo aqui é mostrar como a fórmula (8.34), para a ação efetiva de 1-*loop* da teoria (8.30), pode ser obtida pela aplicação sucessiva do método de Faddeev-Popov. De acordo com o método padrão de Faddeev-Popov (para uma introdução detalhada, veja o capítulo 2 do livro [42] e as referências originais citadas nesse capítulo), devemos eliminar a integração sobre o grupo de calibre na integral funcional

$$\int DB DA e^{iS_2[B,A]}. \quad (\text{E.1})$$

Para isso, necessitamos trocar a integral de caminho (E.1) pela quantidade

$$\int DBDA e^{iS_2[B,A]} \Delta \delta(\chi^\alpha[B, A] - l^\alpha, \chi[A] - l), \quad (\text{E.2})$$

onde Δ é definido pela identidade

$$1 = \Delta \int D\xi D\Lambda \delta(\chi^\alpha[B', A'] - l^\alpha, \chi[A'] - l). \quad (\text{E.3})$$

Aqui χ^α e χ são os termos de fixação de calibre relacionados com as transformações de calibre (8.31) e (8.32), respectivamente. Para a teoria (8.30) é suficiente escolher

$$\chi_\beta = \nabla^\alpha B_{\alpha\beta} - m A_\beta, \quad \chi = \nabla_\alpha A^\alpha. \quad (\text{E.4})$$

Não é difícil conferir que essas duas condições de calibre satisfazem o seguinte vínculo:

$$\nabla^\alpha \chi_\alpha + m\chi = 0. \quad (\text{E.5})$$

Entretanto, como nesse caso os parâmetros ξ_μ e Λ , presentes na medida de integração na fórmula (E.3), também são invariantes perante as transformações de calibre (8.33), precisamos aplicar uma segunda vez o truque de Faddeev-Popov para que a integração ao longo das órbitas desse grupo de calibre também seja removida. Isso representa a principal diferença com o procedimento de Faddeev-Popov padrão. Logo, o produto $D\xi D\Lambda$ presente na definição (E.3) deve ser substituído por

$$D\xi D\Lambda \delta(\nabla_\alpha \xi^\alpha - m\Lambda) \text{Det } \hat{H}_0^{min}, \quad (\text{E.6})$$

onde H_0^{min} é o operador bilinear do escalar mínimo, definido anteriormente na equação (8.19). O mesmo problema também afeta a função delta $\delta(\chi^\alpha[B, A], \chi[B])$ nas definições (E.2) e (E.3). Considere a representação de Fourier dessa função delta

$$\delta(\chi^\alpha, \chi) = \int D\zeta D\psi e^{i(\zeta_\alpha \chi^\alpha - \psi \chi)}. \quad (\text{E.7})$$

Por causa do vínculo (E.5) podemos mostrar que o integrando na fórmula (E.7) é invariante perante a transformação de calibre

$$\zeta_\alpha \rightarrow \zeta'_\alpha = \zeta_\alpha + \nabla_\alpha \phi, \quad \psi \rightarrow \psi' = \psi + m\phi. \quad (\text{E.8})$$

Logo, para que a expressão (E.7) seja bem definida, devemos extrair também a integração sobre a órbita do grupo de calibre (E.8) aplicando novamente o método de Faddeev-Popov. Fazendo isso, chegamos à equação

$$\delta(\chi^\alpha, \chi) = \int D\zeta D\psi e^{i(\zeta_\alpha \chi^\alpha - \psi \chi)} \delta(\nabla_\alpha \zeta^\alpha - m\psi) \text{Det } \hat{H}_0^{min}. \quad (\text{E.9})$$

Assim, usando as relações (E.6) e (E.9) a equação (E.3) para Δ se torna

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \int D\zeta D\psi D\xi D\Lambda \delta(\nabla_\alpha \zeta^\alpha - m\psi - s) \delta(\nabla_\beta \xi^\beta - m\Lambda - t) \times \\ &\times e^{i\{\zeta_\alpha (\chi^\alpha[B'] - l^\alpha) - \psi (\chi[A'] - l)\}} (\text{Det } \hat{H}_0^{min})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

O próximo passo é encontrar por meio da equação (E.10) a função Δ . Por causa da função delta presente na fórmula (E.2), esse funcional deve ser calculado apenas para os campos que satisfaçam as equações $\chi^\alpha[B, A] - l^\alpha = 0$ e $\chi[A] - l = 0$. Isso significa que é suficiente integrar sobre os parâmetros de calibre em (E.10) na vizinhança do elemento identidade do grupo de calibre. Então, podemos usar as expansões lineares

$$\chi^\alpha[B', A'] - l^\alpha = \chi^\alpha[B, A] - l^\alpha + (H_1)_\beta^\alpha \xi^\beta \quad \text{e} \quad \chi[A'] - l = \chi[A] - l + \square\Lambda, \quad (\text{E.11})$$

onde

$$\hat{H}_1 = (H_1)_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \square - \nabla^\mu \nabla_\nu - R_\nu^\mu - m^2 \delta_\nu^\mu \quad (\text{E.12})$$

é o operador bilinear do campo vetorial massivo. Sendo assim, utilizando as expansões acima e introduzindo o fator identidade na forma de uma integral dupla $\int Ds Dt e^{-ist} \equiv 1$, podemos tomar a integral sobre as funções delta na equação (E.10), obtendo dessa maneira a resposta

$$\Delta = \text{Det } \hat{H}'_1 \cdot (\text{Det } \hat{H}_0^{\text{min}})^{-1}, \quad (\text{E.13})$$

onde \hat{H}'_1 é o operador vetorial mínimo, definido anteriormente na equação (8.19).

Agora, usando as expressões bem definidas (E.9) e (E.13) podemos considerar a equação (E.2) e então, chegar a ação efetiva. Mas primeiro, vamos reescrever a função delta (E.9) de uma maneira mais útil. Usando a transformação de Fourier

$$\delta(\nabla_\alpha \zeta^\alpha - m\psi) = \int D\varphi e^{i(\nabla_\alpha \zeta^\alpha - m\psi)\varphi} = \int D\varphi e^{i(-\zeta^\alpha \nabla_\alpha \varphi - \psi m \varphi)}, \quad (\text{E.14})$$

podemos fazer a integração sobre ζ e ψ na equação (E.9) e encontrar

$$\delta(\chi^\alpha, \chi) = \int D\varphi \delta(\chi_\alpha - \nabla_\alpha \varphi) \delta(\chi + m\varphi) \text{Det } \hat{H}_0^{\text{min}}. \quad (\text{E.15})$$

Portanto, usando as equações (E.15) e (E.13) podemos escrever a fórmula para a ação efetiva do vácuo na forma

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \int DB DAD\varphi e^{iS'_2[B,A]} \delta(\chi_\alpha - \nabla_\alpha \varphi - l^\alpha) \delta(\chi + m\varphi - l) \text{Det } \hat{H}'_1. \quad (\text{E.16})$$

Como a equação (E.16) não depende de l^α e l podemos inserir as identidades na forma $\int Dl e^{-\frac{i}{2}l^\alpha l_\alpha}$ e $\int Dl e^{-\frac{i}{2}l^2}$ para calcular as integrais. Desse modo chegamos a

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \int DB DAD\varphi e^{i\{S'_2[B,A] + S_{gf}[B,A] - S_0[\varphi]\}} \text{Det } \hat{H}'_1, \quad (\text{E.17})$$

onde $S_{gf} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \{\chi_\alpha \chi^\alpha + \chi^2\}$ é a ação de fixação de calibre e $S_0[\varphi]$ é a ação do campo escalar mínimo.

A ação (8.30) com o termo extra de fixação de calibre pode ser escrita na forma

$$S'_2 + S_{gf} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} (H'_2)^{\mu\nu}_{\alpha\beta} B^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_\mu (H'_1)^\mu_\nu A^\nu \right\}, \quad (\text{E.18})$$

onde

$$\hat{H}'_2 = (H'_2)^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} (\square - m^2) - J^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \quad (\text{E.19})$$

e $(H'_1)^\mu_\nu$ foi definido em (8.19). Aqui

$$\delta_{\alpha\beta, \mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (\text{E.20})$$

é a matriz identidade no espaço dos tensores antissimétricos de segunda ordem e

$$J_{\alpha\beta, \mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}). \quad (\text{E.21})$$

As equações (E.17) e (E.18) permitem escrever a ação efetiva do vácuo de 1-loop na forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\text{Tr} \ln \hat{H}'_2 + \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 + \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{min}) - \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_1 + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{min}. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Usando a relação para a contribuição do campo de Proca, equação (8.21), chegamos então a fórmula final desejada

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}'_1. \quad (\text{E.23})$$

Bibliografia

- [1] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.
- [2] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone e W. Herdy, *Simple prescription for computing the interparticle potential energy for D -dimensional gravity systems*, Class. Quant. Grav. **32** (2015) 035021.
- [3] S. L. Adler, *Coleman–Weinberg symmetry breaking in $SU(8)$ induced by a third rank antisymmetric tensor scalar field*, J. Phys. A **49** (2016) 315401.
- [4] N. Agarwal, R. Bean, J. Khoury e M. Trodden, *Screening bulk curvature in the presence of large brane tension*, Phys. Rev. D **83** (2011) 124004.
- [5] P. Aichelburg e R. Sexl, *On the gravitational field of a massless particle*, Gen. Rel. Grav. **2** (1971) 303.
- [6] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi e R. Soldati, *On the consistency of Lorentz invariance violation in QED induced by fermions in constant axial-vector background*, Phys. Lett. B **639** (2006) 586.
- [7] P. Anderson, *Effects of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe*, Phys. Rev. D **28** (1983) 271; *Effects of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe. II*, Phys. Rev. D **29** (1984) 615; *Effects of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe. 3. The conformally coupled massive scalar field*, Phys. Rev. D **32** (1985) 1302; *Effects*

- of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe. IV. Initially empty universes*, Phys. Rev. D **33** (1986) 1567.
- [8] P. R. Anderson, E. Mottola e R. Vaulin, *Stress tensor from the trace anomaly in Reissner-Nordstrom spacetimes*, Phys. Rev. D **76** (2007) 124028.
- [9] A. A. Andrianov, P. Giacconi e R. Soldati, *Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED*, JHEP **0202** (2002) 030.
- [10] T. Appelquist e J. Carazzone, *Infrared singularities and massive fields*, Phys. Rev. D **11** (1975) 2856.
- [11] M. Asorey, E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class. Quant. Grav. **21** (2003) 163.
- [12] M. Asorey, J. L. Lopez e I. L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity*, Intern. Journ. Mod. Phys. **A 12** (1997) 5711.
- [13] M. Asorey, G. de B. Peixoto e I. L. Shapiro, *Renormalization ambiguities and conformal anomaly in metric-scalar backgrounds*, Phys. Rev. D **74** (2006) 124011.
- [14] ATLAS Collaboration, *Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data*, Phys. Lett. B **726** (2013) 120; *Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **726** (2013) 88; *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 1.
- [15] I. G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity*, (Moscow State University, Moscow – 1986), hep-th/9510140 (Tese de doutoramento).
- [16] I. G. Avramidi, *Covariant studies of nonlocal structure of effective action*, Yad. Fiz. **49** (1989) 1185 (em Russo).
- [17] R. Balbinot, A. Fabbri e I. L. Shapiro, *Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1494; *Vacuum polarization in Schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions*, Nucl. Phys. B **559** (1999) 301.

- [18] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik e A. A. Starobinsky, *Inflation scenario via the Standard Model Higgs boson and LHC*, JCAP **0811** (2008) 021;
A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, C. Kiefer, A. A. Starobinsky e C. Steinwachs, *Asymptotic freedom in inflationary cosmology with a non-minimally coupled Higgs field*, JCAP **0912** (2009) 003; *Higgs boson, renormalization group, and naturalness in cosmology*, Eur. Phys. J. C **72** (2012) 2219.
- [19] A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 2: Second order in the curvature. General algorithms*, Nucl. Phys. B **333** (1990) 471.
- [20] A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky, *Divergences and anomalies for coupled gravitational and majorana spin 1/2 fields*, Nucl. Phys. B **191** (1981) 237.
- [21] A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rept. **119** (1985) 1.
- [22] F. Bastianelli, P. Benincasa e S. Giombi, *Worldline approach to vector and antisymmetric tensor fields*, JHEP **0504** (2005) 010.
- [23] F. Bastianelli, P. Benincasa e S. Giombi, *Worldline approach to vector and antisymmetric tensor fields. II.*, JHEP **0510** (2005) 114.
- [24] I. A. Batalin e G. A. Vilkovisky, *Quantization of gauge theories with linearly dependent generators*, Phys. Rev. D **28** (1983) 2567; **30** (1984) 508 (Erratum).
- [25] O. Bertolami, D. Colladay, V. A. Kostelecký e R. Potting, *CPT violation and baryogenesis*, Phys. Lett. B **395** (1997) 178.
- [26] F. L. Bezrukov e M. Shaposhnikov, *The standard model Higgs boson as the inflaton*, Phys. Lett. B **659** (2008) 703.
- [27] F. L. Bezrukov e M. Shaposhnikov, *Standard Model Higgs boson mass from inflation: Two loop analysis*, JHEP **0907** (2009) 089;
F. L. Bezrukov, A. Magnin e M. Shaposhnikov, *Standard Model Higgs boson mass from inflation*, Phys. Lett. B **675** (2009) 88.
- [28] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge University Press, Cambridge – 1982).

- [29] T. Biswas, E. Gerwick , T. Koivisto e A. Mazumdar, *Towards singularity and ghost free theories of gravity*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 031101.
- [30] T. Biswas, T. Koivisto e A. Mazumdar, *Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11** (2010) 008.
- [31] T. Biswas, T. Koivisto e Anupam Mazumdar, *Nonlocal theories of gravity: the flat space propagator*, arXiv:1302.0532.
- [32] T. Biswas, A. Mazumdar e W. Siegel, *Bouncing universes in string-inspired gravity*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03** (2006) 009.
- [33] J. D. Bjorken e S. D. Drell, *Relativistic quantum fields*, (McGraw-Hill Book Company, New York – 1965).
- [34] J. D. Bjorken e S. D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, (McGraw-Hill Book Company, New York – 1964).
- [35] R. Bluhm, *Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation*, Lect. Notes Phys. **702** (2006) 191.
- [36] R. Bluhm e V. A. Kostelecký, *Lorentz and CPT tests with spin polarized solids*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1381.
- [37] R. Bluhm, V. A. Kostelecký e C. D. Lane, *CPT and Lorentz tests with muons*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1098.
- [38] R. Bluhm, V. A. Kostelecký e N. Russell, *CPT and Lorentz tests in hydrogen and anti-hydrogen*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 2254.
- [39] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, *Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter*, Nuovo Cim. B **12** (1972) 20.
- [40] I. L. Buchbinder, E. N. Kirillova e N. G. Pletnev, *Quantum equivalence of massive antisymmetric tensor field models in curved space*, Phys. Rev. D **78** (2008) 084024.
- [41] I. L. Buchbinder e S. M. Kuzenko, *Quantization of the classically equivalent theories in the superspace of simple supergravity and quantum equivalence*, Nucl. Phys. B **308** (1988) 162.

- [42] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Effective action in quantum gravity*, (IOP Publishing, Bristol – 1992).
- [43] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, *Nonsingular cosmological model with torsion induced by vacuum quantum effects*, Phys. Lett. B **162** (1985) 92.
- [44] I. L. Buchbinder, G. de B. Peixoto e I. L. Shapiro, *Quantum effects in softly broken gauge theories in curved space-times*, Phys. Lett. B **649** (2007) 454.
- [45] I. L. Buchbinder e I. L. Shapiro, *On the influence of the gravitational interaction on the behavior of the effective constants of Yukawa and scalar coupling*, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 1033.
- [46] I. L. Buchbinder, I. L. Shapiro e E. G. Yagunov, *The asymptotically free and asymptotically conformal invariant Grand Unification theories in curved space-time*, Mod. Phys. Lett. A **5** (1990) 1599.
- [47] T. S. Bunch e L. Parker, *Feynman propagator in curved space-time: A momentum space representation*, Phys. Rev. D **20** (1979) 2499.
- [48] C. Burrage, C. de Rham e L. Heisenberg, *de Sitter Galileon*, JCAP **1105** (2011) 025.
- [49] C. Burrage, C. de Rham, D. Seery e A. J. Tolley, *Galileon inflation*, JCAP **1101** (2011) 014.
- [50] D. M. Capper, G. Leibbrandt e M. R. Medrano, *Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization*, Phys. Rev. D **8** (1973) 4320.
- [51] D. F. Carneiro, E. A. Freiras, B. Gonçalves, A. G. de Lima e I. L. Shapiro, *On useful conformal transformations in General Relativity*, Grav. Cosmol. **10** (2004) 305.
- [52] P. R. S. Carvalho, *Mass renormalization in Lorentz-violating scalar field theory*, Phys. Lett. B **726** (2013) 850.
- [53] S. M. Christensen, *Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation*, Phys. Rev. D **17** (1978) 946; *Vacuum expectation value of the stress*

- tensor in an arbitrary curved background: The covariant point separation method*, Phys. Rev. D **14** (1976) 2490.
- [54] S. M. Christensen, *Second- and fourth-order invariants on curved manifolds with torsion*, J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 3001.
- [55] S. M. Christensen e S. A. Fulling, *Trace anomalies and the Hawking effect*, Phys. Rev. D **15** (1977) 2088.
- [56] CMS Collaboration, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 30; *Observation of a new boson with mass near 125 GeV in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV*, JHEP **06** (2013) 081.
- [57] A. Codello, G. D'Odorico, C. Pagani e R. Percacci, *The renormalization group and Weyl-invariance*, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 115015.
- [58] A. Codello e O. Zanusso, *On the non-local heat kernel expansion*, J. Math. Phys. **54** (2013) 013513.
- [59] D. Colladay e V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55** (1997) 6760; *Lorentz violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58** (1998) 116002.
- [60] J. C Collins, *Renormalization*, (Cambridge University Press, Cambridge – 1984).
- [61] P. Creminelli, G. D' Amico, M. Musso, J. Norena e E. Trincherini, *Galilean symmetry in the effective theory of inflation: new shapes of non-Gaussianity*, JCAP **1102** (2011) 006.
- [62] P. Creminelli, A. Nicolis e E. Trincherini, *Galilean genesis: an alternative to inflation*, JCAP **1011** (2010) 021.
- [63] R. D'Auria e S. Ferrara, *Dyonic masses from conformal field strengths in D even dimensions*, Phys. Lett. B **606** (2005) 211.
- [64] R. D'Auria, L. Sommovigo e S. Vaula, *$N = 2$ supergravity Lagrangian coupled to tensor multiplets with electric and magnetic fluxes*, JHEP **0411** (2004) 028.

- [65] A. De Felice, R. Kase e S. Tsujikawa, *Matter perturbations in Galileon cosmology*, Phys. Rev. D **83** (2011) 043515.
- [66] C. Deffayet, S. Deser e G. Esposito-Farese, *Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors*, Phys. Rev. D **80** (2009) 064015.
- [67] C. Deffayet, G. Esposito-Farese e A. Vikman, *Covariant Galileon*, Phys. Rev. D **79** (2009) 084003.
- [68] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer e G. Zahariade, *From k-essence to generalised Galileons*, Phys. Rev. D **84** (2011) 064039.
- [69] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki e A. Vikman, *Imperfect dark energy from kinetic gravity braiding*, JCAP **1010** (2010) 026.
- [70] S. Deser, M. J. Duff e C. J. Isham, *Nonlocal conformal anomalies*, Nucl. Phys. B **111** (1976) 45.
- [71] S. Deser e P. van Nieuwenhuizen, *One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields*, Phys. Rev. D **10** (1974) 401.
- [72] S. Deser, H. Sh. Tsao e P. van Nieuwenhuizen, *One-loop divergences of the Einstein Yang-Mills system*, Phys. Rev. D **10** (1974) 3337.
- [73] B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, New York – 1965).
- [74] B. S. DeWitt, *Quantum field theory in curved space-time*, Phys. Rep. C **19** (1975) 296.
- [75] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. R. Soc. London Series A **114** (1927) 243.
- [76] M. J. Duff, *Observations on conformal anomalies*, Nucl. Phys. B **125** (1977) 334.
- [77] M. J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387.
- [78] M. J. Duff e P. van Nieuwenhuizen, *Quantum inequivalence of different field representations*, Phys. Lett. B **94** (1980) 179.

- [79] G. R. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati, *4D Gravity on a brane in 5D Minkowski space*, Phys. Lett. B **485** (2000) 208.
- [80] J. C. Fabris, A. M. Pelinson, F. O. Salles e I. L. Shapiro, *Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections*, JCAP **02** (2012) 019.
- [81] J. C. Fabris, A. M. Pelinson e I. L. Shapiro, *Anomaly induced effective action for gravity and inflation*, Grav. Cosmol. **6** (2000) 59.
- [82] J. C. Fabris, A. M. Pelinson e I. L. Shapiro, *On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. B **597** (2001) 539.
- [83] L. D. Faddeev e V. N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
- [84] M. V. Fischetti, J.B. Hartle e B.L. Hu, *Quantum effects in the early universe. 1. Influence of trace anomalies on homogeneous, isotropic, classical geometries*, Phys. Rev. D **20** (1979) 1757.
- [85] E. S. Fradkin e A. A. Tseytlin, *Quantum equivalence of dual field theories*, Annals Phys. **162** (1985) 31.
- [86] V. P. Frolov, *Mass-gap for black hole formation in higher derivative and ghost free gravity*, Phys. Rev. Lett. **115** (2015) 051102.
- [87] V. P. Frolov e D. Fursaev, *Gravitational field of a spinning radiation beam-pulse in higher dimensions*, Phys. Rev. D **71** (2005) 104034.
- [88] V. P. Frolov, W. Israel e A. Zelnikov, *Gravitational field of relativistic gyratons*, Phys. Rev. D **72** (2005) 084031.
- [89] V. P. Frolov e I. Novikov, *Black hole physics – Basic concepts and new developments*, (Kluwer Academic, Dordrecht – 1998).
- [90] V. P. Frolov e I. L. Shapiro, *Black holes in higher dimensional gravity theory with corrections quadratic in curvature*, Phys. Rev. D **80** (2009) 044034.

- [91] V. P. Frolov e G. Vilkovisky, *Spherically Symmetric Collapse in Quantum Gravity*, Phys. Lett. B **106** (1981) 307.
- [92] V. P. Frolov e A. Zelnikov, *Introduction to black hole physics*, (Oxford University Press, Oxford – 2011).
- [93] V. P. Frolov, A. Zelnikov e T. de P. Netto, *Spherical collapse of small masses in the ghost-free gravity*, JHEP **1506** (2015) 107.
- [94] P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. **10** (1975) 601.
- [95] B. Gonçalves, G. de B. Peixoto e I. L. Shapiro, *One-loop corrections to the photon propagator in the curved-space QED*, Phys. Rev. D **80** (2009) 104013.
- [96] G. Goon, K. Hinterbichler e M. Trodden, *A New Class of effective field theories from embedded brane*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 231102.
- [97] G. Goon, K. Hinterbichler e M. Trodden, *Symmetries for Galileons and DBI scalars on curved space*, JCAP **1107** (2011) 017.
- [98] E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP 0302 **02** (2003) 021.
- [99] E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space. 2. The Standard model and beyond*, JHEP **0306** (2003) 004.
- [100] E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space. 3. The Case of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **0402** (2004) 060.
- [101] M. H. Goroff e A. Sagnotti, *Quantum gravity at two loops*, Phys. Lett. B **160** (1985) 81.
- [102] A. A. Grib, S. G. Mamaev e V. M. Mostepanenko, *Vacuum quantum effects in strong fields*, (Friedmann Lab. Publ., St.Petersburg – 1994).
- [103] D. J. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, (John Wiley & Sons, Inc., New York – 1987).

- [104] M. T. Grisaru, N. K. Nielsen, W. Siegel e D. Zanon, *Energy momentum tensors, supercurrents, (super)traces and quantum equivalence*, Nucl. Phys. B **247** (1984) 157.
- [105] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23** (1981) 347.
- [106] E. Harikumar e M. Sivakumar, *Duality and massive gauge invariant theories*, Phys. Rev. D **57** (1998) 3794.
- [107] H. Hata, T. Kugo e N. Ohta, *Skew symmetric tensor gauge field theory dynamically realized in QCD U(1) Channel*, Nucl. Phys. B **178** (1981) 527.
- [108] S. J. Hathrell, *Trace Anomalies and $\lambda\varphi^4$ theory in curved space*, Annals Phys. **139** (1982) 136.
- [109] S. W. Hawking, *Black hole explosions*, Nature **248** (1974) 30; *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199; **46** (1976) 206 (Erratum).
- [110] S. W. Hawking, *Information preservation and weather forecasting for black holes*, hep-th/1401.5761.
- [111] S. W. Hawking, *Who's afraid of (higher derivative) ghosts?*, Published in I. A. Batalin et al. (Eds.): Quantum field Theory and quantum statistics **Vol. 2** (1986) 129 (Cambridge).
- [112] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **300** (1967) 187.
- [113] S. W. Hawking, T. Hertog e H. S. Reall, *Trace anomaly driven inflation*, Phys. Rev. D **63** (2001) 083504.
- [114] S. W. Hawking e R. Penrose, *The Singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **314** (1970) 529.
- [115] K. Hinterbichler, M. Trodden e D. Wesley, *Multi-field galileons and higher co-dimension branes*, Phys. Rev. D **82** (2010) 124018.

- [116] G. 't Hooft e M. Veltman, *One-loop divergences in the theory of gravitation*, Ann. Poincaré Phys. Theor. A **20** (1974) 69.
- [117] G. 't Hooft e M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [118] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, (Oxford University Press, Oxford – 1992).
- [119] C. Itzykson e J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mc Graw-Hill, New York – 1980).
- [120] R. Jackiw e V. A. Kostelecký, *Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 3572.
- [121] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, (John Wiley & Sons, New York – 1965).
- [122] M. Kalb e P. Ramond, *Classical direct interstring action*, Phys. Rev. D **9** (1974) 2273.
- [123] N. Kemmer, *On the theory of particles of spin 1*, Helv. Phys. Acta **33** (1960) 829.
- [124] S. V. Ketov e A. A. Starobinsky, *Inflation and non-minimal scalar-curvature coupling in gravity and supergravity*, JCAP **1208** (2012) 022.
- [125] T. Kimura, *Quantum theory of antisymmetric higher rank tensor gauge field in higher dimensional space-time*, Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 338.
- [126] T. Kobayashi, M. Yamaguchi e J. Yokoyama, *Primordial non-Gaussianity from G-inflation*, Phys. Rev. D **83** (2011) 103524.
- [127] V. A. Kostelecký, *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).
- [128] V. A. Kostelecký e C. D. Lane, *Constraints on Lorentz violation from clock comparison experiments*, Phys. Rev. D **60** (1999) 116010.
- [129] V. A. Kostelecký, C. D. Lane e A. Pickering, *One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics*, Phys. Rev. D **65** (2002) 056006.

- [130] V. A. Kostelecký e R. Lehnert, *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*, Phys. Rev. D **63** (2001) 065008.
- [131] V. A. Kostelecký e R. Potting, *Analytical construction of a nonperturbative vacuum for the open bosonic string*, Phys. Rev. D **63** (2001) 046007.
- [132] V. A. Kostelecký e N. Russell, *Data tables for Lorentz and CPT violation*, Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 11.
- [133] V. A. Kostelecký e S. Samuel, *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*, Phys. Rev. D **39** (1989) 683.
- [134] V. A. Kostelecký e J. D. Tasson, *Matter-gravity couplings and Lorentz violation*, Phys. Rev. D **83** (2011) 016013.
- [135] S. M. Kuzenko, *On massive tensor multiplets*, JHEP **0501** (2005) 041.
- [136] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, (Pergamon Press, London – 1971).
- [137] P. M. Lavrov e I. L. Shapiro, *On the renormalization of gauge theories in curved space-time*, Phys. Rev. D **81** (2010) 044026.
- [138] G. Leibbrandt, *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 849.
- [139] G. Leon e E. N. Saridakis, *Dynamical analysis of generalized Galileon cosmology*, JCAP **1303** (2013) 025.
- [140] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski e H. Weyl, *The Principle of Relativity: A collection of original memoirs on the Special and General theory of Relativity*, (Methuen and Company, Ltd., London – 1923).
- [141] J. Louis e A. Micu, *Type 2 theories compactified on Calabi-Yau threefolds in the presence of background fluxes*, Nucl. Phys. B **635** (2002) 395.
- [142] J. Louis e W. Schulgin, *Massive tensor multiplets in $N = 1$ supersymmetry*, Fortsch. Phys. **53** (2005) 235.

- [143] H. Lu, A. Perkins, C. N. Pope e K. S. Stelle, *Black holes in higher-derivative gravity*, Phys. Rev. Lett. **114** (2015) 171601.
- [144] M. A. Luty, M. Porrati e R. Rattazzi, *Strong interactions and stability in the DGP model*, JHEP **0309** (2003) 029.
- [145] J. B. Marion e S. T. Thornton, *Classical dynamics of particles and systems*, (Saunders College Publishing, New York – 2003).
- [146] J. C. Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism, Vols. I e II*, (Dover, New York – 1954).
- [147] P. O. Mazur e E. Mottola, *Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies*, Phys. Rev. D **64** (2001) 104022.
- [148] M. B. Mijić, M. S. Moris e W.-M. Suen, *The R^2 cosmology: Inflation without a phase transition*, Phys. Rev. D **34** (1986) 2934.
- [149] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco – 1973).
- [150] L. Modesto, *Super-renormalizable quantum gravity*, Phys. Rev. D **86** (2012) 044005; *Super-renormalizable Multidimensional Quantum Gravity*, Astron. Rev. **8.2** (2013) 4.
- [151] L. Modesto, T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *On Newtonian singularities in higher derivative gravity models*, JHEP **1504** (2015) 098.
- [152] L. Modesto e L. Rachwal, *Super-renormalizable and finite gravitational theories*, Nucl. Phys. B **889** (2014) 228.
- [153] D. F. Mota, M. Sandstad e T. Zlosnik, *Cosmology of the selfaccelerating third order Galileon*, JHEP **1012** (2010) 051.
- [154] V. F. Mukhanov, *Physical foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, Cambridge – 2005).
- [155] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rept. **215** (1992) 203.

- [156] V. F. Mukhanov e G. V. Chibisov, *Quantum fluctuation and nonsingular universe*, JETP Lett. **33** (1981) 532.
- [157] V. Müller, H.-J. Schmidt e A. A. Starobinsky, *The stability of the De Sitter space-time in fourth order gravity*, Phys. Lett. B **202** (1988) 198.
- [158] Y. Nambu, *Magnetic and electric confinement of quarks*, Phys. Rept. **23** (1976) 250.
- [159] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (London – 1687).
- [160] H. M. Nussenzveig, *Curso de física básica - Volume 4 : Ótica, Relatividade e Física Quântica*, (Editora Edgard Blucher, São Paulo – 2008).
- [161] T. de P. Netto, A. M. Pelinson, I. L. Shapiro e A. A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation*, Eur. Phys. J. C **76** (2016) 544.
- [162] T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *Non-local form factors for curved-space antisymmetric fields*, Phys. Rev. D **94** (2016) 024040.
- [163] T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *One-loop divergences in the Galileon model*, Phys. Lett. B **716** (2012) 454.
- [164] T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *Vacuum contribution of photons in the theory with Lorentz and CPT-violating terms*, Phys. Rev. D **89** (2014) 104037.
- [165] A. Nicolis e R. Rattazzi, *Classical and quantum consistency of the DGP model*, JHEP **0406** (2004) 059.
- [166] A. Nicolis, R. Rattazzi e E. Trincherini, *The Galileon as a local modification of gravity*, Phys. Rev. D **79** (2009) 064036.
- [167] P. van Nieuwenhuizen, *On ghost-free tensor Lagrangians and linearized gravitation*, Nucl. Phys. B **60** (1973) 478.
- [168] Yu. N. Obukhov, *Gauge invariance in the theory of antisymmetric tensor fields*, Theor. Math. Phys. **50** (1982) 229; Teor. Mat. Fiz. **50** (1982) 350 (em Russo); *The geometrical approach to antisymmetric tensor field theory*, Phys. Lett. B **109** (1982) 195; *The quantization of antisymmetric tensor fields*, Sov. J. Nucl. Phys. **35** (1982) 610; Yad. Fiz. **35** (1982) 1046 (em Russo).

- [169] V. I. Ogievetsky e I. V. Polubarinov, *The notoph and its possible interactions*, Sov. J. Nucl. Phys. **4** (1967) 156.
- [170] M. Ostrogradsky, Mem. Ac. St. Petersburg **6** (1850) 385.
- [171] S. Paneitz, MIT preprint, 1983; SIGMA **4** (2008) 036.
- [172] L. Parker, D. J. Toms, *Renormalization group analysis of grand unified theories in curved space-time*, Phys. Rev. D **29** (1984) 1584.
- [173] L. Parker e D. Toms, *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge – 2009).
- [174] R. D. Peccei, J. Solà e C. Wetterich, *Adjusting the cosmological constant dynamically: Cosmons and a new force weaker than gravity*, Phys. Lett. B **195** (1987) 183.
- [175] O. Pedersen, *Early Physics and Astronomy*, (Cambridge University Press, Cambridge – 1993).
- [176] G. de B. Peixoto, *A Note on the heat kernel method applied to fermions*, Mod. Phys. Lett. A **16** (2001) 2463.
- [177] G. de B. Peixoto, E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281.
- [178] G. de B. Peixoto, D. D. Pereira e I. L. Shapiro, *Universality and ambiguity in fermionic effective actions*, Phys. Rev. D **85** (2012) 064025.
- [179] G. de B. Peixoto e I. L. Shapiro, *On the renormalization of CPT/Lorentz violating QED in curved space*, Phys. Lett. B **642** (2006) 153.
- [180] A. M. Pelinson, *Revisiting the modified Starobinsky model with cosmological constant*, Int. J. Mod. Phys. D **18** (2009) 1355.
- [181] A. M. Pelinson e I. L. Shapiro, *On the scaling rules for the anomaly-induced effective action of metric and electromagnetic field*, Phys. Lett. B **694** (2011) 467.

- [182] A. M. Pelinson, I. L. Shapiro e F. I. Takakura, *On the stability of the anomaly induced inflation*, Nucl. Phys. B **648** (2003) 417; *Stability issues in the modified Starobinsky model*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127** (2004) 182.
- [183] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 57.
- [184] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, (Addison-Wesley, New York – 1995).
- [185] A. Z. Petrov, *Einsten Spaces*, (Pergamon Press, Oxford – 1969).
- [186] Planck Collaboration: P.A.R. Ade et al., *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results*, arXiv:1303.5062.
- [187] Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al., *Planck 2015 results.XIII. Cosmological parameters*, arXiv:1502.01589.
- [188] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B **103** (1981) 207.
- [189] I. Quandt e H.-J. Schmidt, *The Newtonian limit of fourth and higher order gravity*, Astron. Nachr. **312** (1991) 97.
- [190] R. J. Riegert, *A nonlocal action for the trace anomaly*, Phys. Lett. B **134** (1984) 56;
E. S. Fradkin e A. A. Tseytlin, *Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories*, Phys. Lett. B **134** (1984) 187.
- [191] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge – 1985).
- [192] F. O. Salles e I. L. Shapiro, *Do we have unitary and (super)renormalizable quantum gravity below the Planck scale?*, Phys. Rev. D **89** (2014) 084054.
- [193] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Boston – 1967).
- [194] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics: Revised Editon*, (Addison-Wesley, New York – 1994).

- [195] A. S. Schwarz, *The partition function of a degenerate functional*, Commun. Math. Phys. **67** (1979) 1; *The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer invariants*, Lett. Math. Phys. **2** (1978) 247.
- [196] A. S. Schwarz e Yu. S. Tyupkin, *Quantization of antisymmetric tensors and Ray-singer torsion*, Nucl. Phys. B **242** (1984) 436.
- [197] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, (Cambridge University Press, Cambridge – 2013).
- [198] J. S. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.
- [199] I. L. Shapiro, *Counting ghosts in the “ghost-free” non-local gravity*, Phys. Lett. B **744** (2015) 67.
- [200] I. L. Shapiro, *Effective action of vacuum: semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001.
- [201] I. L. Shapiro, *Local conformal symmetry and its fate at quantum level*, PoS-JHEP IC2006 (2006) **030**, hep-th/0610168.
- [202] I. L. Shapiro, *Renormalization in QED and QFT with a Lorentz- and CPT-violating background*, Contribution to the proceedings of Sixth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry, CPT’13, Indiana University (2013), arXiv:1309.4190.
- [203] I. L. Shapiro, *The graceful exit from the anomaly induced inflation: Supersymmetry as a key*, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 1159.
- [204] I. L. Shapiro e A. G. Jacksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. B **324** (1994) 286.
- [205] I. L. Shapiro e J. Solà, *Massive fields temper anomaly-induced inflation: the clue to graceful exit ?*, Phys. Lett. B **530** (2002) 10.
- [206] I. L. Shapiro e J. Solà, *On the possible running of the cosmological “constant”*, Phys. Lett. B **682** (2009) 105.

- [207] I. L. Shapiro e J. Solà, *Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology*, JHEP **0202** (2002) 006.
- [208] I. L. Shapiro, P. M. Teixeira e A. Wipf, *On the functional renormalization group for the scalar field on curved background with non-minimal interaction*, Eur. Phys. J. C **75** (2015) 262.
- [209] W. Siegel, *Hidden ghosts*, Phys. Lett. B **93** (1980) 170.
- [210] W. Siegel, *Stringy gravity at short distances*, hep-th/0309093.
- [211] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. **B91** (1980) 99; *Nonsingular model of the universe with the quantum-gravitational de Sitter stage and its observational consequences*, Proc. of the second seminar “Quantum theory of gravity” (Moscow, 13-15 October 1981) 58 (INR Press, Moscow, 1982).
- [212] A. A. Starobinsky, *Evolution of small excitation of isotropic cosmological models with one loop quantum gravitation corrections*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 460-463 (em Russo); *Relict gravitation radiation spectrum and initial state of the universe*, JETP Lett. **30** (1979) 682, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** (1979) 719 (em Russo); *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy*, Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302 (em Russo).
- [213] K. S. Stelle, *Classical gravity with higher derivatives*, Gen. Rel. Grav. **9** (1978) 353.
- [214] K. S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.
- [215] W.-M. Suen e P. R. Anderson, *Reheating in the higher derivative inflationary models*, Phys. Rev. D **35** (1987) 2940.
- [216] K. R. Symon, *Mechanics*, (Addison-Wesley, New York – 1971).
- [217] S. Talaganis, T. Biswas e A. Mazumdar, *Towards understanding the ultraviolet behavior of quantum loops in infinite-derivative theories of gravity*, Class. Quant. Grav. **32** (2015) 215017.

- [218] E. T. Tomboulis, *Superrenormalizable gauge and gravitational theories*, hep-th/9702146.
- [219] M. Trodden e K. Hinterbichler, *Generalizing Galileons*, Class. Quant. Grav. **28** (2011) 204003.
- [220] A. A. Tseytlin, *On singularities of spherically symmetric backgrounds in string theory*, Phys. Lett. B **363** (1995) 223.
- [221] R. Utiyama e B. S. DeWitt, *Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
- [222] P. C. Vaidya, *An analytical solution for gravitational collapse with radiation*, Astrophys. J. **144** (1966) 943.
- [223] M. Veltman, *Unitarity and causality in a renormalizable field theory with unstable particles*, Physica **29** (1963) 186.
- [224] A. Vilenkin, *Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model*, Phys. Rev. D **32** (1985) 2511.
- [225] B. L. Voronov e I. V. Tyutin, *On renormalization of R^2 gravitation*. Yad. Fiz. **39** (1984) 998 (em Russo).
- [226] R. M. Wald, *General relativity*, (University of Chicago Press, Chicago – 1984).
- [227] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York – 1972).
- [228] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.
- [229] Ya. B. Zeldovich e A. A. Starobinsky, *Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 1159, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 2161 (em Russo).
- [230] V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov e E. M. Murchikova, *Radiative effects in the standard model extension*, Phys. Rev. D **73** (2006) 065016.