
ASPECTOS TERMODINÂMICOS EM
COSMOLOGIA

RAFAEL DA COSTA NUNES

ASPECTOS TERMODINÂMICOS EM COSMOLOGIA

RAFAEL DA COSTA NUNES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora
como parte dos requisitos necessários para obten-
ção do grau de Doutor em Física.

ORIENTADOR: DR. JORGE ANANIAS NETO
CO-ORIENTADOR: DR. EVERTON ABREU

JUIZ DE FORA-MG

2018

“It is only in the mysterious equation of love that any logic or reasons can be found.”

John Nash

Agradecimentos

- As mulheres da minha vida: Maria Geralda, Maria Benigna, Natália Coelho e Amanda Coelho da Costa Nunes. A elas dedico também este trabalho.

- A todos meus familiares.

- Aos meus orientadores na UFJF, Jorge Ananias e Everton Abreu, pelos ensinamentos, incentivo e amizade.

- A todos os funcionários e professores do programa de pós-graduação em física da UFJF.

- A todos os professores que tive em minha vida que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação.

- A cidade de Juiz de Fora e aos vários colegas que fiz aqui. Impossível lembrar e listar todos aqui, então fica aqui meu agradecimento a todos que conheci pelos bons momentos.

- Aos membros da banca que aceitaram o convite para participar dessa ocasião importante na minha formação profissional.

- A CAPES e FAPEMIG pela financiamento.

Lista de publicações do presente autor até a presente data de submissão da tese por ordem cronológica. Total de 27 artigos publicados com atual h-index = 14. A presente tese está desenvolvida baseada nas investigações [18], [21] e [23].

1 - **Rafael C. Nunes**, *Structure formation in $f(T)$ gravity and a solution for H_0 tension*, JCAP **05** 052 (2018).

2 - **Rafael C. Nunes** and A. Bonilla, *Probing the relic neutrinos properties with CMB, HST and galaxy clusters*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc **473** (2018).

3 - S. Kumar and **Rafael C. Nunes**, *Echo for interaction in the dark sector*, Phys. Rev. D **96**, 103511 (2017).

4 - S. Bahamonde, S. Capozziello, M. Faizal, **Rafael C. Nunes**, *Nonlocal Teleparallel Cosmology*, Eur. Phys. J. C **77** 9 628 (2017).

5 - W. Yang, **Rafael C. Nunes**, S. Pan, and D. F. Mota, *Effects of neutrino mass hierarchies on dynamical dark energy models*, Phys. Rev. D **95** 10 103522 (2017).

6 - V. K. Oikonomou, S. Pan, and **Rafael C. Nunes**, *Gravitational baryogenesis in running vacuum models*, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750129 (2017).

7 - S. Kumar and **Rafael C. Nunes**, *Observational constraints on dark matter-dark energy scattering cross section*, Eur. Phys. J. C **77** 734 (2017).

8 - **Rafael C. Nunes**, E. M. Barboza, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *Entropic gravity from noncommutative black holes*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **15** 01, (2017).

9 - H. Moradpour, **Rafael C. Nunes**, E. M. C. Abreu, J. A. Neto, *A note on the relations between thermodynamics, energy definitions and Friedmann equations*, Mod. Phys. Lett. A **32** 13 1750078 (2017).

10 - H. Fritzsche, **Rafael C. Nunes**, and J. Sola, *Running vacuum in the Universe and the time variation of the fundamental constants of Nature*, Eur. Phys. J. C **77** 3 193 (2017).

11 - **Rafael C. Nunes**, A. Bonilla, S. Pan, and E. N. Saridakis, *Observational Constraints on $f(T)$ gravity from varying fundamental constants*, Eur. Phys. J. C **77** 4 230 (2017).

12 - **Rafael C. Nunes**, S. Pan, E. N. Saridakis, and E. M. C. Abreu, *New observational constraints on $f(R)$ gravity from cosmic chronometers*, JCAP **1701** 01 005 (2017).

13 - G. S. Sharov, S. Bhattacharya, S. Pan, **Rafael C. Nunes**, and S. Chakraborty, *A new interacting two fluid model and its consequences*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **466** 3497-3506 (2017).

14 - E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and **Rafael C. Nunes**, *Tsallis and Kaniadakis statistics from the viewpoint of entropic gravity formalism*, Int. J. Mod. Phys. A **32** 05 1750028 (2017).

15 - S. Kumar and **Rafael C. Nunes**, *Probing the interaction between dark matter and dark energy in the presence of massive neutrinos*, Phys. Rev. D **94** 12 123511 (2016).

16 - **Rafael C. Nunes**, S. Pan, and E. N. Saridakis, *New constraints on interacting dark energy from cosmic chronometers*, Phys. Rev. D **94** 2

023508 (2016).

17 - **Rafael C. Nunes**, S. Pan, and E. N. Saridakis, *New observational constraints on $f(T)$ gravity from cosmic chronometers*, JCAP **1608** 08 011 (2016).

18 - **Rafael C. Nunes**, E. M. Barboza, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *Probing the cosmological viability of non-gaussian statistics*, JCAP **1608** 08 051 (2016).

19 - **Rafael C. Nunes**, *Gravitationally induced particle production and its impact on structure formation*, Gen. Rel. Grav. **48** 8 107 (2016).

20 - **Rafael C. Nunes**, *Connecting inflation with late cosmic acceleration by particle production*, Int. J. Mod. Phys. D, **25** 6 1650067 (2016).

21 - E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and **Rafael C. Nunes**, *Jeans instability criterion from the viewpoint of Kaniadakis' statistics*, Europhys. Lett. **114** 5 55001 (2016).

22 - **Rafael C. Nunes** and S. Pan, *Cosmological consequences of an adiabatic matter creation process*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc, **459** 673-682 (2016).

23 - E. M. Barboza, **Rafael C. Nunes**, E. M. C. Abreu, and J. Ananias Neto, *Thermodynamic aspects of dark energy fluids*, Phys. Rev. D, **92** 083526 (2015).

24 - **Rafael C. Nunes** and D. Pavón, *Phantom behavior via cosmological creation of particles*, Phys. Rev. D, **91** 063526 (2015).

25 - E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and **Rafael C. Nunes**, *Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe*. Physica A, **441** 141-150 (2015).

26 - E. M. Barboza, **Rafael C. Nunes**, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *Dark energy models through nonextensive Tsallis statistics*. Physica A, **436** 301-310 (2015).

27 - **Rafael C. Nunes** and Edésio M. Barboza Jr, *Dark matter-dark energy interaction for a time-dependent EoS parameter*. General Relativity and Gravitation **46** 1820 (2014).

Resumo

Observações astronômicas realizadas nos últimos 20 anos envolvendo supernovas do tipo Ia, radiação cósmica de fundo e estruturas em grandes escalas, indicam que o Universo é descrito por um modelo cosmológico espacialmente plano e que se encontra atualmente em um estágio de expansão acelerada. A causa da aceleração é desconhecida e constitui um dos maiores desafios para a física moderna. O modelo que melhor descreve os dados, Λ CDM (modelo cosmológico com constante cosmológica mais matéria escura), apresenta inconsistências teóricas e, devido a esses problemas, a comunidade científica especializada vem propondo cenários alternativos ao modelo Λ CDM que possam ao mesmo tempo ajustar os dados observacionais e ter alguma fundamentação teórica consistente. Entre as alternativas à constante cosmológica é comum atribuir graus de liberdade adicionais para novas e exóticas formas de matéria com pressão negativa chamada de energia escura.

Nesta tese, investigamos possíveis conexões entre cosmologia, gravitação e termodinâmica. Primeiro investigamos como estatísticas não-gaussianas combinadas com um cenário de gravitação entrópica pode afetar a dinâmica do Universo. Encontramos que esses cenários levam a uma modificação na constante de gravitação, que pode tornar o campo gravitacional mais fraco ou forte em grandes escalas. Comparamos nosso modelo de Universo com dados de Supernovas tipo Ia, oscilações acústicas bariônicas, taxa de expansão do Universo, e a função de crescimento das perturbações lineares da matéria. Em uma segunda parte, investigamos como limites impostos pelas condi-

ções de instabilidade termodinâmica pode restringir teoricamente modelos de energia escura. Mostramos que se fluidos escuros com uma equação de estado satisfazem essas condições de estabilidade, tal exigência coloca dificuldades sobre a existência de tais modelos. Comparando os vínculos termodinâmicos com os vínculos observacionais, notamos que uma porção muito significativa do espaço paramétrico para uma energia escura dinâmica é excluído quando comparado com as restrições impostas termodinâmicas. Acreditamos que esse resultado pode ser um passo importante na modelagem fenomenológica da energia escura.

Abstract

Astronomical observations performed in the last 20 years involving type Ia Supernovae, cosmic microwave background and large scales structures, indicate that the Universe is described by a spatially flat cosmological model and is currently in an accelerated expansion state. The cause of the acceleration is unknown, and this is one of the greatest challenges in modern physics. The model that better describes the data, the Λ CDM model, presents technical inconsistencies, and because of these problems, the scientific community has been proposing alternative scenarios to Λ CDM model, which can simultaneously fits the observational data and have some consistent theoretical framework. Among the alternatives to a cosmological constant is common to assign additional degrees of freedom for new and exotic forms of matter with negative pressure called dark energy.

In this thesis, we investigate the possible connections between cosmology, gravitation, and thermodynamics. We first investigate how thermodynamics beyond the Boltzmann-Gibbs statistics (non-Gaussian statistics) in combination with an entropic gravitational scenario can affect the dynamics of the Universe. We find that these scenarios lead to a change in the gravitational constant, which can make the gravitational field weaker or stronger at large scales. We compare our model of Universe with data from type Ia Supernovae, baryon acoustic oscillations (BAO), the rate of expansion of the Universe, and the growth function of the linear perturbations of matter. In the second part, we investigate how the limits imposed by the conditions of thermodynamic stability, can constrain theoretically dark energy models. We

show that, if dark fluids with $\omega < 0$ satisfy these conditions of stability, such requirement poses difficulties on the existence of such models. Comparing our thermodynamic limits with the observational constraints, we note that a very significant portion of the parametric space for a dynamical dark energy model is excluded when compared to the thermodynamic constraints. We believe this result can be an important step in modeling phenomenological of dark energy.

Notação e Convenções

- Assinatura da métrica: (+ - - -);
- Derivada covariante: $\nabla_\beta u^\alpha = u^\alpha_{;\beta}$;
- Índices gregos variam de 0 a 3. Índices latinos variam de 1 a 3. E índices repetidos obedecem a convenção de Einstein.

- A menos que seja explicitado o contrário, $\hbar = c = k_B = 1$;
- Expressões em outros idiomas serão escritas em itálico;
- O ponto ($\dot{\cdot}$) denota a derivada em relação ao tempo;
- O subscrito 0 irá sempre se referir a uma quantidade avaliada no tempo presente.

- A unidade de distância utilizada é o megaparsec (Mpc):
 $1\text{Mpc} = 3,26 \cdot 10^6 \text{ anos-luz} = 3,09 \cdot 10^{24} \text{ cm.}$

\simeq

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	vii
Resumo em Inglês	ix
Convenções	xi
1 Introdução	1
2 O Modelo Padrão da Cosmologia	5
2.1 A Teoria da Relatividade Geral	5
2.2 Modelos de Friedmann-Robertson-Walker	7
2.3 Medidas de Distâncias Cosmológicas	9
2.3.1 Desvio Cosmológico para o vermelho (<i>Redshift</i>)	9
2.3.2 Distância Própria	9
2.3.3 Distância Luminosidade	10
2.3.4 Distância Diâmetro Angular	11
2.3.5 Magnitude e Módulo de Distância	12
2.4 Pilares Observacionais do Modelo Padrão	14
2.4.1 O Universo em Expansão	14
2.4.2 Nucleossíntese Primordial	14
2.4.3 A Radiação Cósmica de Fundo	16
2.4.4 Formação de estruturas em grande escala	20
2.4.5 Matéria Escura	25

2.4.6	Inflação Cósmica	27
3	A Expansão Acelerada do Universo	31
3.1	Campos Escalares	33
3.2	Gravidade Modificada	35
4	Sondando a viabilidade cosmológica de estatísticas não-gaussianas	39
4.1	Mecânica estatística não gaussiana	40
4.1.1	O formalismo de Tsallis	40
4.1.2	O formalismo de Kaniadakis	43
4.2	Gravitação entrópica	45
4.3	Energia escura modificada por estatísticas não-gaussianas . . .	49
4.4	O critério de instabilidade de Jeans sobre o ponto de vista de estatísticas não gaussianas	56
4.5	Comentários finais	62
5	Aspectos termodinâmicos da energia escura	65
5.1	Mais sobre energia escura	66
5.2	Termodinâmica de fluidos cósmicos	68
5.2.1	A capacidade de calor do Universo	69
5.2.2	Compressibilidade e expansibilidade	71
5.2.3	Condições de estabilidade	72
5.3	Vínculos observacionais independentes de modelo para energia escura	74
5.4	Comentários gerais	77
6	Conclusões e Perspectivas	79
A	Análise Estatística e Testes Cosmológicos	83
A.1	SNIa	84
A.2	Oscilações acústicas bariônicas (OAB)	85
A.3	Parâmetro de Hubble	86
A.4	Função de crescimento	87

Bibliografia

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia é a área da ciência que estuda o Universo como um todo, sua origem, dinâmica e constituição, visando descrever do ponto de vista teórico e observacional a evolução do cosmos.

A cosmologia moderna surgiu com o advento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) desenvolvida inicialmente por Albert Einstein. Einstein foi o primeiro a propor, no ano de 1917, um modelo de Universo no trabalho *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade Geral* [1]. Neste trabalho Einstein propõe um modelo cosmológico estático introduzindo um termo nas suas equações de campo que desempenha o papel de uma força anti-gravitacional cuja função era impedir um Universo em expansão. Esse termo ficou conhecido como constante cosmológica.

Ainda em 1917, de Sitter obteve uma solução das equações de campo da TRG para um modelo contendo apenas um termo cosmológico. Ao contrário do modelo do Einstein, o Universo de de Sitter se expandia. Em 1924 Alexander Friedmann combina o modelo de Einstein (composto por matéria) com o modelo expansionista de de Sitter. Anos depois, em 1929, Edwin Hubble publica dados astrofísicos que mostram que nebulosas (hoje sabemos que essas nebulosas são galáxias) estavam se afastando de nós com velocidades proporcionais à distância, mostrando, assim, que o Universo estava de fato em expansão. Essa descoberta levou Einstein a abandonar seu modelo

estático e, junto com ele, o termo cosmológico.

Em 1948, o físico russo George Gamow mostrou que um Universo em expansão poderia explicar a elevada abundância dos elementos químicos hidrogênio e hélio. Baseado em modelos expansionistas, Gamow previu também a existência de uma radiação isotrópica e homogênea e de espectro bem definido, a radiação cósmica de fundo (RCF), que teria se originado no Universo primordial. Essa relíquia de radiação foi observada pela primeira vez por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965. Essa descoberta rendeu a Penzias e Wilson o prêmio Nobel de 1978. Desde então a RCF vem sendo pesquisada por diversas missões observacionais, dentre as quais podemos destacar o *Cosmic Background Explorer* (COBE) e o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) ambos operados pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), e atualmente a sonda Planck operada pela Agência Espacial Europeia (ESA). A RCF é ao lado do afastamento das galáxias, da abundância de elementos leves (nucleossíntese primordial), uma das principais evidências observacionais do modelo do *Big Bang*, segundo a qual o Universo era extremamente quente e denso no passado.

Modelos cosmológicos são sustentados por observações. Recentemente, dados provenientes de supernovas do tipo Ia e medidas da anisotropia da RCF indicam que o Universo é espacialmente plano e se encontra num estágio de expansão acelerada. Embora a aceleração cósmica esteja bem estabelecida, a sua causa ainda é desconhecida, constituindo um dos maiores desafios da cosmologia moderna. Supondo que a teoria da relatividade geral permaneça válida, o regime acelerado pode ser obtido adicionando-se uma forma exótica de energia com pressão negativa, denominada de energia escura, ao conteúdo energético do Universo. A representação teórica mais simples para energia escura é uma constante cosmológica a qual está associada a energia de vácuo quântico, cuja equação de estado é dada por, $p = -\rho$. Com as atuais observações astrofísicas, podemos inferir que o balanço energético do Universo se encontra da seguinte forma: 68% de energia escura, 32% de matéria (escura e bariônica) [2]. O modelo contendo uma constante cosmológica e matéria

escura fria (modelo Λ CDM) é o que melhor descreve os dados observacionais atuais. Contudo, o modelo Λ CDM apresenta inconsistências teóricas ligadas a densidade de energia de vácuo, uma vez que as estimativas teóricas e observacionais diferem de 50 a 120 ordens de grandeza [3, 4, 5]. Tal problema é conhecido como o problema da constante cosmológica e tem inspirado os físicos a propor mecanismos e candidatos alternativos a constante cosmológica. Como alternativa à constante cosmológica podemos atribuir graus de liberdade adicionais para novas e exóticas formas de matéria. Tais modelos são chamados de energia escura. Alternativamente, podemos considerar graus de liberdade adicionais de origem gravitacional, ou seja, surgir uma modificação gravitacional que possui a relatividade geral como caso particular. Nessa tese estamos particularmente interessados em descrever aspectos termodinâmicos sobre um Universo na presença de uma energia escura

Esta tese encontra-se organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, discutimos brevemente a teoria da relatividade geral, modelos cosmológicos, testes cosmológicos que permitem estimar os valores de parâmetros e os fundamentos observacionais do modelo padrão da cosmologia. No Capítulo 3, apresentamos as evidências da expansão acelerada e algumas alternativas para descrever esse fenômeno, tais com campos escalares e gravidade modificada. No Capítulo 4, apresentamos nossos resultados relacionados à investigação da viabilidade cosmológica de estatísticas não gaussianas de Tsallis e Kaniadakis dentro de um cenário de gravitação entrópica. No Capítulo 5, investigamos os limites impostos pela termodinâmica para um fluido de energia escura e comparamos esses limites com restrições observacionais independente de modelo. Nossas conclusões e perspectivas são apresentadas no capítulo 6. Um apêndice destinado à análise estatística e aos testes cosmológicos são apresentado ao final da tese.

Capítulo 2

O Modelo Padrão da Cosmologia

2.1 A Teoria da Relatividade Geral

Em 1905, para conciliar as leis da mecânica clássica com a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, Albert Einstein (1879-1955) propôs a teoria da relatividade especial [6]. Essa teoria postula que a velocidade da luz no vácuo é constante (princípio da invariância da velocidade da luz), e que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais (princípio da relatividade). A teoria é dita especial ou restrita, por se aplicar apenas a referências inerciais e a campos gravitacionais desprezíveis. A generalização dessa teoria para referenciais não-inerciais e, conseqüentemente, campos gravitacionais, levou 10 anos, sendo então concluída por Einstein em 1915 [7].

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) descreve a ação dos campos de matéria sobre o espaço-tempo que, por sua vez, afeta o movimento da matéria. Na TRG o espaço-tempo é descrito pela geometria pseudo-riemanniana de forma que o intervalo entre dois eventos é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. No espaço-tempo a trajetória de uma partícula sob a ação da gravidade pode ser obtida pelo princípio da mínima ação,

$$\delta \int ds = 0. \quad (2.2)$$

No espaço-tempo curvo, essas trajetórias não são retas, são geodésicas descritas pela equação [8, 9, 10]

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.3)$$

onde

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (2.4)$$

são os símbolos de Christoffel de segunda espécie [8, 9, 10].

A curvatura do espaço-tempo é caracterizada pelo chamado tensor de Riemann-Christoffel, definido como [8, 9, 10]

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}. \quad (2.5)$$

Na TRG os efeitos gravitacionais são descritos pela curvatura do espaço-tempo, onde o conteúdo material presente é quem determina a forma do espaço-tempo, isso pode ser expresso matematicamente pelas equações de campo de Einstein [8, 9, 10]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein, que fornece as propriedades geométricas do espaço-tempo, $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ são o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, respectivamente. A quantidade $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia e representa o conteúdo material do universo. Para um fluido perfeito temos,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde p , ρ e u_μ são, respectivamente, pressão, densidade do fluido e a quadrivelocidade das partículas do fluido. Outras formas de tensor momento-energia podem ser vistas em [8, 9, 10].

2.2 Modelos de Friedmann-Robertson-Walker

Além da TRG, outro pilar fundamental da cosmologia moderna é o chamado princípio cosmológico, que estabelece que:

Em escalas suficientemente grandes o universo é homogêneo e isotrópico.

Observações astronômicas, indicam que o princípio cosmológico aplica-se apenas para escalas maiores que 150 Mpc. A métrica mais geral que descreve um universo homogêneo e isotrópico é a métrica de Robertson-Walker [10, 11, 12], definida por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.8)$$

onde a função $a(t)$ é o fator de escala e a constante k é a curvatura da seção espacial, a qual pode ser negativa, nula, ou positiva dependendo, respectivamente, se o universo é aberto, plano ou fechado.

Para um Universo homogêneo e isotrópico preenchido por um fluido perfeito, as equações de campo da TRG tornam-se:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.9)$$

e

$$8\pi Gp = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.10)$$

Eliminado k nessas equações, obtemos a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.11)$$

As equações acima descrevem um Universo em expansão. Soluções desse tipo foram encontradas pela primeira vez em 1917 por de Sitter para um Universo vazio contendo apenas uma constante cosmológica e posteriormente no início dos anos 1920 por Alexander Friedmann. Até então acreditava-se no

modelo de Universo estático proposto por Einstein no artigo, *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade* [1].

A ideia de um Universo em expansão ganhou força em 1929 quando Edwin Hubble publicou dados astrofísicos que indicavam que o universo estava em expansão. Hubble mediu a velocidade de afastamento das galáxias e inferiu a relação conhecida como lei de Hubble,

$$v = H_0 d \quad (2.12)$$

onde v é a velocidade de afastamento, d é a distância da fonte e H_0 é a constante de Hubble. Dados mais recentes medidos pela Colaboração Planck [2], mostram que $H_0 = 67.8 \pm 0.9$ km/s/Mpc. Por outro lado, medidas locais realizadas pelo *Hubble Space Telescope* mostram $H_0 = 73.24 \pm 1.74$ km/s/Mpc [13]. Essas medidas discordam entre si em 99% de confiabilidade estatística (CE). A reconciliação dessas medidas pode levar a indícios de uma nova física além do modelo padrão.

Além das equações (2.9) e (2.10), outra equação que desempenha importante papel é a conservação do tensor de energia-momento, $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, que para um fluido perfeito implica em

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.13)$$

Para determinar a dinâmica do universo ainda é preciso especificar uma equação de estado do fluido, $p = p(\rho)$, para cada espécie de partículas presente no universo. Em geral, a relação entre pressão e densidade do fluido é parametrizada na forma $p = w\rho$, onde w é chamado usualmente de equação de estado do fluido/espécie. Para radiação (fótons e neutrinos relativísticos) temos $w = 1/3$ e para matéria sem pressão (bárions, matéria escura fria, neutrinos não-relativísticos) temos $w \simeq 0$.

2.3 Medidas de Distâncias Cosmológicas

2.3.1 Desvio Cosmológico para o vermelho (*Redshift*)

O *redshift*, z , de uma fonte luminosa é definido como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.14)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda observado, ou seja, medido localmente; λ_e é o comprimento de onda emitido pela fonte.

Quanto maior for a distância de uma fonte, maior será o tempo que sua radiação leva para chegar ao observador e maior será a expansão espacial. Percebemos, assim, que há uma relação entre tempo, fator de escala e z , ou seja, maiores *redshifts* correspondem a radiações emitidas em tempos mais remotos quando o fator de escala era menor. Quantitativamente esta relação é expressa por $1 + z = a(t_0)/a(t)$.

2.3.2 Distância Própria

A distância própria $d_p(t)$ entre dois pontos $(r = 0, \theta, \phi)$ e (r, θ, ϕ) é igual ao comprimento da geodésica espacial entre eles quando o fator de escala $a(t)$ é mantido fixo num dado tempo t . Visto que as coordenadas (θ, ϕ) são mantidas constantes, a métrica (2.8) torna-se (assumindo $k = 0$)

$$ds = a(t)dr \quad (2.15)$$

de forma que

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r. \quad (2.16)$$

Essa quantidade é importante para definir as distâncias luminosidade e diâmetro angular no que segue.

2.3.3 Distância Luminosidade

Quando a luz é emitida de uma fonte isotrópica em um meio homogêneo ela se propaga esfericamente em todas as direções. Por exemplo, num universo euclidiano, um detector situado a uma distância d da fonte medirá um fluxo

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.17)$$

onde L é a luminosidade (potência irradiada pela fonte). Como podemos medir o fluxo bolométrico, i.e., fluxo completo integrado sobre todos os comprimentos de onda da luz, caso haja uma classe de objetos astronômicos cuja luminosidade seja conhecida, torna-se útil definir uma função chamada distância luminosidade,

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}. \quad (2.18)$$

Se uma fonte emite fótons num instante t_e , no momento da observação t_o , eles estarão espalhados em uma superfície cuja área no espaço euclidiano é

$$A = 4\pi d^2. \quad (2.19)$$

A generalização para um universo de FRW é facilmente obtida fazendo $d = S_k(r)$ de forma que

$$A = 4\pi S_k(r)^2, \quad (2.20)$$

onde

$$S_k(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0), & \text{para } k = +1 \\ r, & \text{para } k = 0 \\ R_0 \sinh(r/R_0) & \text{para } k = -1. \end{cases}$$

Aqui

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.21)$$

é a distância radial co-móvel e $R_0 = 1/H_0\sqrt{|\Omega_k|}$.

Quando um fóton é emitido sua energia é $E_e = \frac{hc}{\lambda_e}$. Mas devido ao *redshift*, em t_o temos

$$\lambda_o = \frac{a_o}{a}\lambda_e = (1+z)\lambda_e, \quad (2.22)$$

Assim a energia observada será,

$$E_o = \frac{E_e}{1+z} \quad (2.23)$$

Dessa forma, o fluxo observado será:

$$f = \frac{E_o/\delta t_o}{4\pi S_k(r)^2} = \frac{\frac{E/(1+z)}{\delta t_e(1+z)}}{4\pi S_k(r)^2} = \frac{L}{4\pi S_k(r)^2(1+z)^2}. \quad (2.24)$$

Comparando a expressão acima com (2.17), temos que a distância luminosidade será dada por:

$$d_L = S_k(r)(1+z). \quad (2.25)$$

Para baixos z temos [11],

$$d_L \approx \frac{c}{H_0}z\left(1 + \frac{1-q_0}{2}z\right) \quad (2.26)$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração.

A grandeza definida nesta seção é útil quando temos um objeto astrofísico que possui uma luminosidade conhecida independente da região do universo onde ocorra. Como veremos mais adiante, a supernova do tipo Ia se enquadra como um desses objetos astrofísicos. Dados de supernova do tipo Ia desempenham um papel importante nos desenvolvimentos dos resultados que serão apresentados mais adiante.

2.3.4 Distância Diâmetro Angular

A distância diâmetro angular é definida como

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta}, \quad (2.27)$$

onde l é o comprimento próprio do objeto, medido perpendicularmente à linha de visada, e $\delta\theta$ é o ângulo subtendido por esse comprimento.

Visto que o Universo está em expansão, a distância diâmetro angular não será igual à distância própria. Num universo descrito pela métrica (2.8), as coordenadas co-móveis das duas extremidades do objeto são (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) de forma que a distância entre as duas extremidades do objeto será dada por:

$$l = ds = a(t)S_k(r)\delta\theta. \quad (2.28)$$

Assim, temos que

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta} = a(t)S_k(r) = \frac{S_k(r)}{1+z}. \quad (2.29)$$

Comparando as Eqs.(2.25) e (2.29) podemos notar que a distância diâmetro angular e a distância luminosidade estão relacionadas por

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.30)$$

Para baixos z temos que [11]

$$d_A \approx \frac{z}{H_0} \left(1 - \frac{3+q_0}{2}z\right). \quad (2.31)$$

A distância diâmetro angular é necessária para modelar observáveis tais como oscilações acústicas bariônicas, que também desempenha um papel importante no desenvolvimentos dos resultados que serão apresentados mais adiante nas ções 4.3 e 5.3.

2.3.5 Magnitude e Módulo de Distância

O brilho aparente de um objeto astrofísico, uma estrela por exemplo, é o fluxo medido na Terra e, normalmente, expresso em termos da magnitude aparente m , definida como

$$m = -2,5 \log F + C, \quad (2.32)$$

onde C é uma constante que define o ponto zero da escala de magnitudes (convencionalmente utiliza-se a magnitude aparente da estrela Vega como $m = 0$). A magnitude bolométrica, i. e., a magnitude integrada sobre todos os comprimentos de onda, é definida por

$$M = -2,5 \log \left(\frac{f}{f_x} \right), \quad (2.33)$$

onde $f_x = 2.5310^{-8} \text{ W m}^{-2}$ é um fluxo de referência.

A magnitude bolométrica absoluta é definida como a magnitude aparente que a fonte deveria ter se estivesse a uma distância de 10 pc. Para uma fonte de luz com luminosidade L a magnitude absoluta é dada por

$$M = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_x} \right), \quad (2.34)$$

onde $L_x = 78,7L_{\odot}$ é a luminosidade de uma fonte cujo fluxo é $f_x = 2.5310^{-8} \text{ W m}^{-2}$ quando visto de uma distância de 10 pc.

Tomando a diferença entre (2.33) e (2.34) e usando (2.18) obtemos o módulo de distância definido como,

$$\mu \equiv m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{10pc} \right). \quad (2.35)$$

Como as distâncias envolvidas nas análises cosmológicas tipicamente são da ordem de Mpc, uma forma mais útil para a equação acima é

$$\mu = 5 \log \left(\frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25. \quad (2.36)$$

A quantidade definida acima, o módulo de distância, será usada mais a frente na modelagem de dados de SNIa.

2.4 Pilares Observacionais do Modelo Padrão

Discutiremos brevemente, nessa seção os principais pilares observacionais do modelo cosmológico padrão: a expansão cósmica, nucleossíntese primordial, radiação cósmica de fundo (RCF), formação de estruturas em grande escala, matéria escura e por fim a inflação cósmica. No que segue, vamos comentar sucintamente sobre esses importantes pilares observacionais do modelo padrão.

2.4.1 O Universo em Expansão

Conforme discutido na Seção 1.2 deste capítulo, o primeiro pilar do modelo cosmológico padrão é a medida de afastamento das galáxias primeiramente observado por Edwin Hubble em 1929 que comprovou a expansão do universo. Hubble determinou as distâncias de algumas galáxias usando a já conhecida relação entre período e luminosidade de variáveis cefeidas. Constatou-se que essas galáxias estavam muito distantes e que, quanto maior a distância maior era a velocidade.

A lei de Hubble (2.12) se aplica somente a galáxias distantes, pois galáxias próximas possuem movimentos peculiares (que não se devem à expansão) resultantes de interação gravitacional com outras galáxias e aglomerados de galáxias. Em galáxias distantes, o erro gerado por não considerar o movimento peculiar é muito pequeno. A descoberta da expansão do universo constitui uma das grandes descobertas científicas dos século XX.

2.4.2 Nucleossíntese Primordial

A medida que o universo se expande ele se esfria, a energia média dos fótons cai de 10^{28} eV na era de Planck para algo em torno de 10^{-4} eV nos dias atuais. Assim, a expansão do universo abrange um intervalo de 31 ordens de magnitude na escala de energia.

Processos de ionização e de recombinação ocorrem numa escala de 10 eV (energia típica de ionização) e processos de fusão e fissão nuclear estão numa

escala de aproximadamente 8 MeV (energia típica de ligação nuclear). Com isso, acredita-se que elétrons e prótons devem se juntar para formar hidrogênio neutro quando a energia torna-se menor do que a energia de ionização do átomo de hidrogênio (13,6 eV), de modo que prótons e nêutrons devem se fundir para formar deutério quando a energia torna-se menor do que a energia de ligação do deutério (2,22 MeV). Então a época da recombinação deve ter sido precedida por uma época de fusão nuclear conhecida na literatura como nucleossíntese primordial.

A nucleossíntese primordial começa quando prótons e nêutrons fundem-se para formar deutério e então núcleos mais pesados começam a se formar por atos sucessivos de fusão nuclear.

Dado que a energia de ligação do deutério é maior que a energia de ionização do hidrogênio por um fator de 10^5 , estima-se que a síntese de deutério ocorra a uma temperatura de 10^5 vezes maior do que a temperatura da recombinação. A recombinação ocorre a uma temperatura de aproximadamente 3740 K. Assim, a síntese do deutério deve ocorrer a uma temperatura da ordem de 10^9 K o que corresponde a um tempo de $t_{nuc} = 300s$. Durante esse tempo também houve a formação de outros elementos leves como ^3He , ^4He e ^7Li .

Toda a nucleossíntese primordial ocorre quando o universo tem apenas alguns minutos de idade. A formação dos elementos mais pesados ocorrem durante a nucleossíntese estelar.

A fração de hélio no universo primordial (isto é, a fração antes de nucleossíntese estelar começar) é geralmente expressa como um número adimensional

$$Y \equiv \frac{\rho(^4\text{He})}{\rho_b}. \quad (2.37)$$

Estima-se que $Y = 0.24$, ou seja, o hélio representa 24% da matéria bariônica enquanto a abundância relativa do hidrogênio é aproximadamente 75%. As abundâncias relativas dos outros elementos são praticamente desprezíveis.

A observação destas abundâncias de hidrogênio e hélio nas nebulosas e

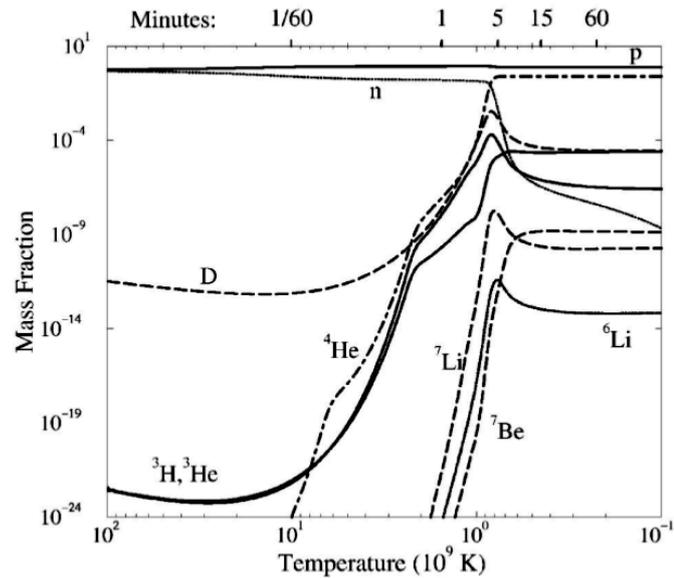


Figura 2.1: Fração da massa dos núcleos em função do tempo durante a época da nucleossíntese. Figura retirada de [15].

galáxias estão de acordo com a previsão teórica, e constitui uma importante prova ao modelo do big bang. Dados [2] indicam que $\Omega_b = 0.04$.

2.4.3 A Radiação Cósmica de Fundo

Em seus instantes iniciais o universo era extremamente quente e denso, sendo dominado pela radiação. Este campo de radiação em equilíbrio térmico com a matéria bariônica apresenta um espectro de corpo negro. A medida que foi se expandindo o universo foi se esfriando, a radiação que antes estava fortemente acoplada com a matéria bariônica deixa de ser dominante desacoplando-se do conteúdo material e o universo passa a ser transparente à radiação. Esta radiação cósmica de fundo (RCF) foi prevista teoricamente por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman e detectada por Arno Penzias e Robert Wilson 1965 [17]. A RCF constitui e dos maiores triunfos da cosmologia e uma das maiores evidências observacionais da teoria do big

bang. O valor atual da temperatura da RCF é [18]:

$$T_0 = 2,7525 \pm 0.001K. \quad (2.38)$$

O espectro da RCF foi medido com uma boa precisão pelo *Cosmic Background Satellite Explorer* (COBE), lançado em 1989. Um dos resultados mais importantes que veio da análise dos dados COBE é que em qualquer posição angular, (θ, ϕ) , do céu o espectro da RCF apresenta flutuações da ordem de $\Delta T/T_0 \approx 10^{-4}$.

A densidade de energia dos fótons na faixa de frequência $f \rightarrow f + df$ é dada pela distribuição de Planck

$$\rho(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(hf/kT) - 1}. \quad (2.39)$$

Integrando (2.39) em todas as frequências obtemos,

$$\rho_\gamma = \alpha T^4, \quad (2.40)$$

onde

$$\alpha = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4}{\hbar^3 c^3} = 7,56 \times 10^{-16} Jm^{-3} K^{-4}. \quad (2.41)$$

Assim, temos que, atualmente, a densidade de energia da radiação é $\rho_\gamma = 4.17 \times 10^{-14} Jm^{-3}$. Para um universo de FRW a lei de evolução de densidade de radiação é $\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0} a^{-4}$ e por (2.40) temos que

$$T = \frac{T_0}{a}, \quad (2.42)$$

onde $T_0 = (\rho_{\gamma,0}/\alpha)^{1/4}$.

A anisotropia na temperatura da RCF é definida em cada ponto da esfera celeste como

$$\Delta T(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}, \quad (2.43)$$

onde

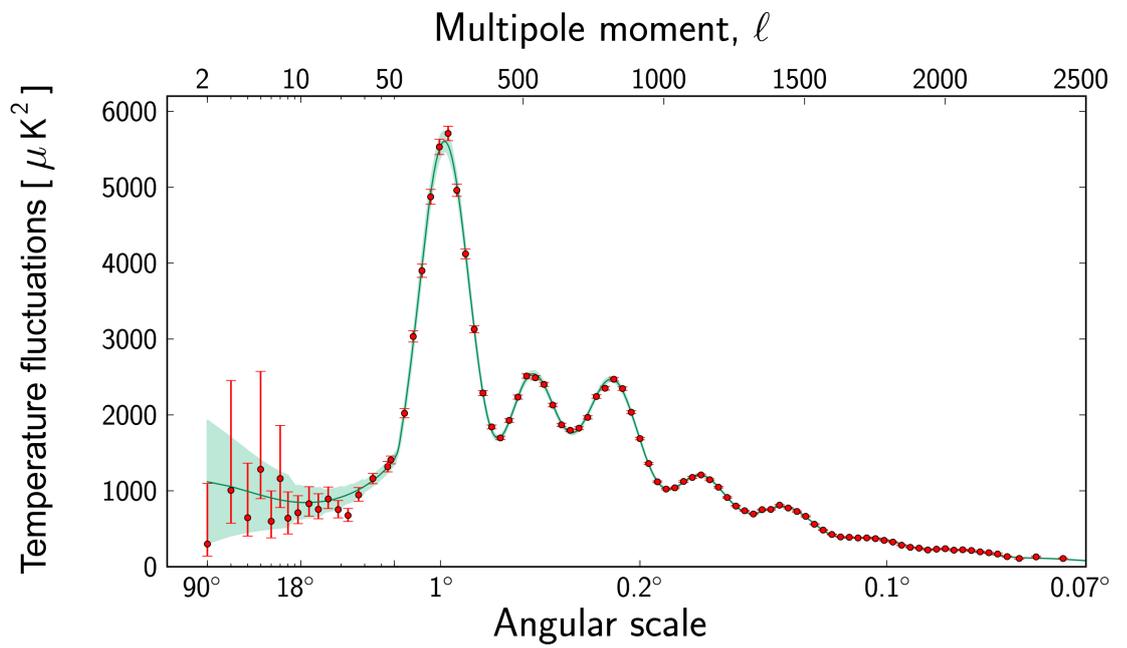


Figura 2.2: Espectro angular de potência da radiação cósmica de fundo fornecido pelo Planck. A linha sólida corresponde ao modelo Λ CDM. Imagem retirada do site da ESA (European Space Agency).

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.725K \quad (2.44)$$

é a média sobre todas as direções.

Como as flutuações estão definidas na esfera celeste, assim é útil explorar a simetria do problema e expandir as anisotropias em termos dos harmônicos esféricos,

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.45)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) \Delta T(\theta, \phi). \quad (2.46)$$

Para estudar as flutuações precisamos definir a função de correlação de dois pontos

$$C(\gamma) = \langle \Delta T(\theta_1, \phi_1) \Delta T(\theta_2, \phi_2) \rangle, \quad (2.47)$$

onde γ é a separação angular entre dois pontos na esfera celeste.

O espectro associado à função correlação é chamado de espectro angular de potência. Para determiná-lo devemos expandir a função de correlação em termos dos polinômios de Legendre

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l P_l(\cos \gamma), \quad (2.48)$$

e, temos que, pelo teorema da adição dos harmônicos esféricos [14],

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2). \quad (2.49)$$

Para que B_l forneça um coeficiente normalizado para a expansão é necessário que o espectro angular de potência, C_l , seja dado por:

$$C_l = B_l \frac{4\pi}{2l+1}, \quad (2.50)$$

ou seja

$$C(\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos\gamma). \quad (2.51)$$

Onde C_l é uma medida das flutuações de temperatura em escalas angulares $\theta \sim 180^\circ/l$. Figura 2.2 mostra o espectro angular de potência da RCF.

2.4.4 Formação de estruturas em grande escala

Nesta seção vamos apresentar temas ligados ao processo de formação de estrutura no Universo (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias). Iremos revisar importantes conceitos que serão aplicados na obtenção de resultados nos capítulos posteriores desta tese. Aqui vamos somente apresentar os desenvolvimentos que foram necessários para descrever nossos resultados. Assim, nesta tese não serão descritas as perturbações relativísticas, uma vez que tal desenvolvimento não foi utilizado para obter os resultados presentes aqui. Ver [12, 19] para uma boa revisão geral sobre o tema.

Sistemas estelares têm massa no intervalo aproximado de 1 a $10 M_\odot$, que são encontrados em galáxias, que possuem massas entre $10^6 M_\odot$ (galáxias pequenas) a $10^{12} M_\odot$ (grandes galáxias, como a nossa, a Via Láctea). Em geral, uma galáxia que tem um centro luminoso contendo praticamente todas as estrelas e um halo escuro de composição indefinida, que se estende 10 vezes mais longe que a parte luminosa e contém 10 vezes mais massa que a parte luminosa. Galáxias gravitacionalmente ligadas formam os chamados aglomerados de galáxias, que podem chegar a ser formados por dezenas de centenas de galáxias e possuem raio da ordem de 10 Mpc. Existem também os superaglomerados com tamanho da ordem de 100 Mpc, que podem ser considerados as maiores estruturas ligadas do Universo. Em escalas maiores do que 100 Mpc a distribuição de matéria no Universo é muito homogênea, o que pode ser provado pelas observações diretas das levantamentos de galáxias e pela isotropia da RCF.

A maior distância que podemos observar é aproximadamente da ordem de 10^4 Mpc, que é a distância que a luz percorreu desde a última superfície de espalhamento até hoje. Assim, um esfera em torno deste raio é então nosso Universo observável. Flutuações de temperatura na RCF são da ordem de 10^{-5} , portanto podemos inferir que flutuações na densidade de matéria são aproximadamente $\delta \sim 10^{-5}$ nestas escalas. Embora a RCF indique que o Universo no passado era homogêneo, sabemos que o Universo hoje não é exatamente homogêneo pois observamos galáxias e aglomerados de galáxias. Tais estruturas se originaram de flutuações quânticas primordiais que cresceriam no tempo via instabilidade gravitacional. Portanto, precisamos de uma teoria que explique uma amplitude $\delta \sim 10^{-5}$ na última superfície de espalhamento ($z \simeq 1090$) até flutuações de densidade da ordem de $\delta \sim 100$ para $z \ll 1$.

Para descrever a evolução das perturbações em um Universo em expansão (ou sistemas estáticos), devemos introduzir as equações básicas que descrevem a dinâmica de um fluido, que são:

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad (2.52)$$

$$\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\phi = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)S = 0, \quad (2.54)$$

e

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.55)$$

que representam as equações da continuidade, de Euler, conservação da entropia e de Poisson, respectivamente.

As equações acima devem ser tomadas juntamente com uma equações de estado $p(\rho, S)$. As equações hidrodinâmicas são não-lineares e, em geral, não é fácil encontrar suas soluções. No entanto, para estudar o comportamento de pequenas perturbações em torno de um fundo homogêneo e

isotrópico é apropriado linearizar as equações acima. Assim, tomando pequenas perturbações: $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \delta v$, $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}, t)$, $S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t)$, onde $\delta\rho \ll \rho_0$, ect. Aqui a pressão é igual a $p(\mathbf{x}, t) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t)$, e na aproximação linear sua perturbação δp pode ser expressa em termos da densidade de energia e perturbações de entropia como

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S, \quad (2.56)$$

onde $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$ é o quadrado da velocidade do som e $\sigma = (\partial p / \partial S)_\rho$. Para matéria não-relativística ($p \ll \rho$), a velocidade do som, bem como o campo de velocidades δv são muito menores do que a velocidade da luz.

Tomando um conta as pequenas perturbações definidas acima e após um algebrismo, temos

$$\delta\ddot{\rho} + c_s^2 \Delta \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = \sigma \Delta \delta S. \quad (2.57)$$

Assumindo perturbações entrópicas, $\delta S = 0$, e a transformada de Fourier de $\delta\rho$, a equação acima se escreve como

$$\delta\ddot{\rho} + (k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0) \rho = 0. \quad (2.58)$$

A equação (2.58) tem duas soluções independentes,

$$\delta\rho \propto \exp(\pm i\omega(k)t), \quad (2.59)$$

onde $\omega(k) = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0}$.

O comportamento dessas perturbações adiabáticas depende fundamentalmente do sinal da expressão sob a raiz quadrada. Definindo o comprimento de Jeans como

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2}, \quad (2.60)$$

de modo que $\omega(k_J) = 0$, concluímos que se $\lambda < \lambda_J$, as soluções descrevem ondas sonoras, $\delta\rho \propto \text{sen}(wt + \mathbf{k}\mathbf{x} + \alpha)$, propagando com velocidade de fase

$$c_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 - \frac{k_J^2}{k^2}}. \quad (2.61)$$

No limite $k \gg k_J$, ou sobre escalas muito pequenas ($\lambda \ll \lambda_J$), onde a gravidade é desprezível comparada com a pressão, temos $c \mapsto c_s$, como deve ser. Sobre largas escalas de domínio da gravidade, e se ($\lambda > \lambda_J$), temos

$$\delta\rho \propto \exp(\pm\omega(k)t). \quad (2.62)$$

Uma dessas soluções descreve o crescimento exponencialmente rápido das inhomogeneidades, enquanto o outro corresponde a um modo de decaimento. Quando $k \mapsto 0$, $|\omega| t \mapsto t/t_c$, onde $t_c = (4\pi G\rho_0)^{-1/2}$. Interpretamos t_c como o tempo de colapso característico para uma região com densidade inicial ρ_0 .

O comprimento de onda de Jeans $\lambda_J \sim c_s t_c$ é a escala de “comunicação do som” sobre a qual a pressão pode ainda reagir às mudanças de densidade de energia devido à instabilidade gravitacional. A instabilidade gravitacional é muito eficiente em um Universo estático. Mesmo se as perturbações adiabáticas são inicialmente extremamente pequenas, digamos 10^{-100} , a gravidade requer apenas um curto tempo $t \sim 230t_c$ para ampliá-las até a ordem da unidade.

O desenvolvimento descrito acima é muito útil para descrever colapsos em sistemas astrofísicos. Agora vamos considerar os efeitos da expansão do Universo sobre a evolução das inhomogeneidades, que também será importante nos resultados apresentados nessa tese nos capítulos posteriores. Considerando um Universo em expansão e aplicando perturbações lineares em (2.52)-(2.55) podemos mostrar que a evolução das perturbações da densidade de matéria é dada (ver [12]) por

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \left(\frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0\right)\rho = 0, \quad (2.63)$$

onde escrevemos a equação no espaço de Fourier e consideramos também perturbações entrópicas. Também usamos a definição $\delta = \delta\rho/\rho$.

O comportamento de cada modo de perturbação depende fundamentalmente

do seu tamanho espacial. A escala de comprimento crítico é o comprimento de Jeans

$$\lambda_J^f = \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2}, \quad (2.64)$$

onde λ_J^f é o comprimento de onda físico (medido, por exemplo, em centímetros), o relacionamento com comprimento de onda comovel é dado por $\lambda = 2\pi/k$ via $\lambda^f = a\lambda$. Considerando um Universo plano, dominado por matéria sem pressão, $\rho = (6\pi Gt)^{-1}$ e, portanto temos

$$\lambda_J^f \sim c_s t, \quad (2.65)$$

ou seja, o comprimento de Jeans é da ordem do horizonte do som. Às vezes, em vez de definir o comprimento de Jeans, usa-se a massa Jeans, definida como $M = (\rho\lambda_J^f)^3$. Perturbações em escalas muito menores do que o comprimento de Jeans ($\lambda \ll \lambda_J$) são basicamente ondas sonoras. Se c_s muda de forma adiabática, então a solução de (2.63) é

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} \exp\left(\pm k \int \frac{c_s dt}{a}\right). \quad (2.66)$$

Em geral, e para o nosso propósito mais adiante, vamos precisar usar a forma completa da equação (2.63). Assim é mais pratico escrever (2.63) em termos do fator de crescimento,

$$f = \frac{d \ln \delta}{d \ln a}, \quad (2.67)$$

assim temos (2.63) na forma

$$f' + f^2 \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 2 \right) f = \frac{3}{2} \Omega_m, \quad (2.68)$$

onde $f' = df/d \ln a$ e $\Omega_m = 8\pi G\rho/3H^2$ (parâmetro de densidade da matéria).

É útil escrever a evolução das perturbações lineares da matéria como em (2.68), uma vez que alguns dados observacionais relacionados á formação de estruturas em grande escala são dados em termos da função f , a função

de crescimento. Para uma discussão geral sobre formação de estrutura em grande escala, mencionamos os livros textos [12, 20], em especial [19].

2.4.5 Matéria Escura

O objetivo desta tese não envolve desenvolvimento/resultados na direção de investigar a natureza da matéria escura. Uma vez que esse componente desempenha importante e indispensável papel em qualquer modelo cosmológico, aqui vamos brevemente comentar de forma qualitativa sobre a matéria escura.

Até recentemente os cosmólogos assumiram que a matéria comum, isto é, os elementos que compõem a tabela periódica eram os únicos constituintes significativos do Universo. Esta suposição foi desafiada pela acumulação gradual de dados contrários ao longo das últimas décadas. A primeira sugestão de que alguma coisa estava errada veio devido às observações das velocidades de rotação de galáxias. A velocidade de rotação permanece constante ou mesmo aumentada na borda de uma galáxia, mesmo quando a luminosidade caiu para zero. De acordo com a lei de Kepler, a velocidade de rotação diminui com o raio, supondo que a maior parte da massa da galáxia está concentrada em seu centro. As observações mostraram que enquanto a luz diminuiu em função do raio, a massa não. Em outras palavras, havia uma grande quantidade de “matéria escura” (matéria que não interage eletromagneticamente) nas galáxias, ou mais especificamente no halo das galáxias.

Dados de aglomerados de galáxias fornecem evidências abundantes para a presença de matéria escura. Embora os aglomerados não exibam rotação sistemática como faz uma galáxia espiral, as velocidades das galáxias membros ainda dependem sobre a quantidade e distribuição de massa dentro do aglomerado. As velocidades observadas implicam que substancialmente mais massa está presente do que pode estar contido a partir da matéria visível. Apoio adicional à presença considerável de matéria escura veio de uma geração inicial de satélites de raios-X lançados na década de 1970. Muitos desses grupos de galáxias englobam uma quantidade significativa de gás emissor de

raios-X distribuído ao longo do grupo. A temperatura deste gás é suficientemente alta para escapar se o aglomerado não fosse muito maciço. Essa massa não visível presente nos aglomerados, também é uma forte evidência da matéria escura. Vários levantamentos de medidas de lentes gravitacionais também determinaram que a matéria gravitante em primeiro plano nos aglomerados de galáxias é escura. Aqui novamente a massa implícita é muitas vezes o que pode ser acomodado por matéria luminosa. Claramente, uma fração considerável, se não a maior parte da massa das galáxias e aglomerados de galáxias são escuras. Como essa matéria escura não pode estar na forma de bárions, gás interestelar, etc ..., então parece haver mais massa (matéria escura) do que pode ser acomodado pelos dados observacionais nesses sistemas astrofísicos.

Sem dúvidas a maior prova indireta da existência da matéria escura no Universo são as flutuações de temperatura observada na radiação cósmica de fundo (tanto nos efeitos primários como em secundários). A presença de uma matéria escura desempenha papel crucial tanto no início do Universo, bem como em tempos recentes, em ordem de explicar como flutuações de densidade da ordem de $\delta \sim 10^{-5}$ evoluíram até $\delta \sim 100$ observado em pequenas escalas hoje. Sem a presença da matéria escura não é possível explicar as anisotropias da RCF bem como o processo de formação de estruturas. Alguns mecanismos físicos alternativos têm sido propostos para explicar os dados sem a necessidade da existência de uma matéria escura. Alguns modelos como modificação na dinâmica newtoniana e sua extensão relativística têm sido usados para explicar dados de curva de rotação de galáxias com parcial sucesso. Mas, esses modelos falham fortemente ao tentar explicar os outros conjuntos de dados, principalmente RCF. Em geral, não é possível explicar os dados de RCF sem a presença de uma componente de matéria escura. Dados recentes mostram que essa componente representa aproximadamente 25% do conteúdo de energia do Universo. Esta componente não bariônica pode ser classificada em dois tipos: fria e quente. A distinção se faz baseada na magnitude da dispersão de velocidades que a componente de matéria escura tem

no momento em que há o desacoplamento com a matéria ordinária. Se, no momento do desacoplamento as partículas que compõem a matéria escura tiverem velocidade relativística, temos o caso de uma matéria escura quente; no caso contrário, a componente não-bariônica será fria.

Certamente a explicação para a origem da matéria escura está na física além do modelo padrão. Muitos candidatos à matéria escura foram e são continuamente propostos na literatura, podemos aqui mencionar entre os mais populares candidatos, as partículas fracamente interagentes (como axions, por exemplo), neutralino (partícula de mais baixa massa prevista por teorias supersimétricas), entre outros. Essas partículas são capazes de se aglomerar gravitacionalmente em grandes regiões e fazem parte do conjunto “frio”. Na parte dos candidatos à matéria escura quente, já sabemos que os neutrinos compõem uma parte significativa deste setor. Qualquer evidência para uma nova componente relativística além do modelo padrão se enquadra com matéria escura quente. A detecção direta da matéria escura ainda não foi realizada, sua natureza física ainda está indeterminada e diversos experimentos estão atualmente em fase de operação ou construção para detectar essas partículas.

2.4.6 Inflação Cósmica

Aqui descreveremos brevemente a teoria da inflação cósmica de forma qualitativa. Uma vez que o objetivo desta tese não envolve desenvolvido nesse sentido, vamos simplesmente comentar esse último pilar do modelo cosmológico padrão.

Como mencionado na seção anterior, a matéria é distribuída de forma muito homogênea e isotrópica em escalas maiores do que 100 Mpc. A RCF nos dá uma "fotografia" do início do Universo, que mostra que a recombinação do Universo foi extremamente homogênea e isotrópica em todas as escalas. Dado que o Universo evolui de acordo com a lei de Hubble, é natural perguntar quais as condições iniciais que levaram a tal homogeneidade e isotropia. A teoria da inflação cósmica, proposta inicialmente por Guth em

1981 e Linde em 1982, está motivada a explicar esse problema e alguns outros enfrentados pela teoria do Big Bang. Os principais problemas dos modelos do Big Bang no final da década de 70 do século passado são:

1 - O problema da planura originasse devido ao fato de que de uma mínima flutuação de densidade em relação ao valor previsto para a densidade crítica na era da radiação preve que o nosso universo não poderia existir. Em outras palavras, se o parâmetro de curvatura fosse levemente diferente de zero nesta época, não estaríamos aqui lendo essa tese. E se a curvatura do universo poderia ser qualquer, por que tinha que ser exatamente nula ?

2 - O problema de horizonte decorre da extrema uniformidade do Universo em grande escala, uniformidade esta que é evidenciada pela RCF. Estas regiões até o desacoplamento matéria-radiação não tiveram qualquer contato causal e só seria possível que elas tivessem desenvolvido condições quase idênticas se o Universo tivesse começado num estado de uniformidade quase perfeita. Estado este que é possível devido ao reaquecimento ao final da era da inflação.

3 - Por último temos o problema de monopólos (como o magnético, por exemplo) que, de acordo com as teorias de unificação seriam gerados nas transições de fase do Universo primordial e deveriam ser observados nos dias de hoje ou, mais especificamente, teriam feito nosso Universo recolapsar antes da formação das primeiras estruturas. A teoria da inflação é o mecanismo que dilui tais monopólos, impedindo que eles façam o Universo recolapsar.

Além de resolver os problemas das condições iniciais do Universo, a inflação cósmica relaciona a escala quântica com o Universo atual em grande escala, explicando como as inhomogeneidades primordiais na densidade de matéria evoluíram e geraram todas as estruturas presentes hoje no Universo a partir de flutuações quânticas primordiais.

A maneira mais popular de descrever a inflação é em termos de um campo escalar ϕ , de forma que a densidade de energia nesta época é dominada por um potencial escalar $V(\phi)$, levando o Universo a um estágio de super ex-

pansão acelerada. Assim, o Universo esfria adiabaticamente chegando a uma temperatura extremamente baixa e às custas da energia do campo que decai em partículas relativísticas devido a seu acoplamento com os outros campos de matéria, o Universo é reaquecido enquanto o campo ϕ oscila rapidamente e decai produzindo toda a entropia do nosso Universo. O processo efetivamente termina quando a densidade de energia do campo assume valores extremamente pequenos ou zero. Após o fim da inflação o Universo evolui como previsto pelo modelo do padrão do Big Bang. Para uma revisão da inflação ver [21].

Capítulo 3

A Expansão Acelerada do Universo

As supernovas do tipo Ia (SNIa) estão associadas com a queima explosiva do carbono que ocorre em sistemas binários, quando uma estrela anã branca recebe massa de sua companheira e atinge a massa de Chandrasekhar ($\sim 1.4M_{\odot}$). Sua curva de luz é tão similar de supernova para supernova, que as SNs Ia são utilizadas como indicadores de distâncias, objetos assim são chamados de vela padrão.

Em 1998, dois grupos de pesquisa independentes, *Supernova Cosmology Project* [22] e *High-Z Supernova Search Team* [23] obtiveram, a partir de observações de SNs Ia no intervalo de *redshifts* $0.16 < z < 0.62$, estimativas do valor do parâmetro de Hubble e do parâmetro de desaceleração revelando assim que o Universo encontra-se atualmente num estágio de expansão acelerada (i.e., $q_0 < 0$). Esta descoberta rendeu a Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt e Adam G. Riess o prêmio Nobel de física em 2011.

A interação gravitacional entre as componentes materiais conhecidas até então (matéria ordinária e radiação) não é capaz de explicar esta aceleração, de forma que, supondo que a teoria da relatividade geral (TRG) permanece válida, a maneira mais simples de resolver esse problema é adicionar uma componente extra de energia com pressão negativa, denominada de energia

escura às equações de campo da TRG.

A explicação teórica mais simples para a atual fase de expansão acelerada do Universo é uma constante cosmológica (CC) Λ positiva que pode ser associada à densidade de energia do vácuo [3, 4, 5]. Esse modelo é chamado de Λ CDM ou modelo de concordância cósmica.

A equação de Friedmann e a equação de aceleração para um Universo plano com uma CC são, respectivamente,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.2)$$

A CC tem dimensão de comprimento⁻² e atua nas equações de movimento como um fluido perfeito cuja equação de estado é $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Do ponto de vista da física de partículas elementares a CC é interpretada como a densidade de energia associada ao vácuo quântico (soma das energias de ponto zero de todos os campos). A teoria quântica de campos estabelece que todo campo quântico pode ser tratado como um conjunto infinito de osciladores independentes com frequência $\omega(k)$, onde k é o número de onda. Assim, a densidade de energia do vácuo pode ser expressa na forma [24]

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk. \quad (3.3)$$

A integral acima diverge quarticamente, $\rho_\Lambda \propto k^4$. Visto que uma teoria quântica de campos é válida apenas até alguma escala de corte k_{max} , temos

$$\rho_\Lambda \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (3.4)$$

A Tabela 2.1 mostra a escala de corte para a energia de vácuo para a cromodinâmica quântica, a teoria eletrofraca, a teoria de grande unificação e para caso extremo onde acredita-se ser o limite clássico da TRG, a escala de Planck.

Escala de Energia	ρ_Λ (GeV^4)	ρ_Λ (erg/cm^3)
Cromodinâmica	0.3	10^{36}
Eletrofraca	10^2	10^{47}
Grande Unificação	10^{16}	10^{102}
Planck	10^{18}	10^{110}

Tabela 2.1: Informações sobre as escalas de energia da cromodinâmica quântica, teoria eletrofraca, teoria da grande unificação e escala de Planck.

As observações cosmológicas indicam que,

$$\rho_\Lambda \leq (10^{-12} GeV)^4 \sim 2 \times 10^{-10} erg/cm^3. \quad (3.5)$$

Como podemos ver as estimativas teóricas e observacionais diferem por pelo menos 46 ordens de magnitudes em escalas de energia. Esta discrepância para a densidade de energia do vácuo constitui o chamado problema da CC [3, 4, 5].

Este problema tem motivado os físicos a propor candidatos alternativos à energia escura, que se ajustam aos dados observacionais ou amenizam o problema da CC. Vamos discutir brevemente algumas propostas a seguir.

3.1 Campos Escalares

Inspirados em cenários inflacionários, surge a ideia de tentar explicar que a atual fase de expansão acelerada do Universo tem sua origem num campo escalar ϕ [24, 25, 26, 27, 28] minimamente acoplado com a matéria cuja dinâmica é basicamente determinada pelo potencial $V(\phi)$. O termo quinte-essência é normalmente utilizado para designar esses tipos de modelos de energia escura.

Podemos descrever a dinâmica do campo escalar através da ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (3.6)$$

onde g é o determinante métrico, L a lagrangiana do campo escalar ϕ . Um campo escalar canônico é dado pela lagrangiana

$$L = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi). \quad (3.7)$$

Variando-se a ação (3.6) em relação ao tensor métrico obtemos o tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \right) - V(\phi). \quad (3.8)$$

Inomogeneidades no campo, como as da matéria, são relevantes apenas no estudo de formação de estruturas e não influenciam na evolução da densidade de energia escura á nível de fundo. Assim, para um campo escalar homogêneo espacialmente, temos

$$T_0^0 = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.9)$$

e

$$T_i^i = \frac{1}{3} p_\phi \delta_i^i = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.10)$$

Portanto, a equação de estado associada ao campo escalar é dada por:

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}. \quad (3.11)$$

Observa-se que um regime acelerado é obtido se o campo escalar evolui lentamente, ou seja, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ de forma que $\rho_\phi \approx V(\phi)$ domina o conteúdo energético.

Substituindo (3.9) e (3.10) em (2.13), obtemos a equação de movimento do campo escalar (equação de Klein-Gordon)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.12)$$

No mínimo do potencial, ou suficientemente próximo dele, temos $\dot{\phi} \approx 0$ e $\omega_\phi = -1$. Assim, o campo tem comportamento semelhante ao de uma

constante cosmológica. Em analogia a um sistema de partículas sujeitas a um potencial $V(\phi)$, tal processo é chamado rolagem de campo. O termo $3H\dot{\phi}$ age como um termo de fricção que dificulta a rolagem do campo pois age no sentido contrário ao de $\dot{\phi}$.

Além de campos escalares canônicos, campos escalares com termo cinético negativo, denominados campos fantasmas, vêm sendo largamente estudados na literatura. Para estes modelos o parâmetro de equação de estado assume valores $w < -1$. Algumas recentes análises observacionais mostram que a dinâmica do Universo pode estar dominado pelo um campo fantasma. Outros campos escalares não convencionais também são usados para modelar a energia escura como, por exemplo, campos de k-essência, taquiônico, dilatônicos, entre muitas outras propostas de modelos de energia escura, ver [24, 25] para uma revisão geral de modelos de energia escura.

3.2 Gravidade Modificada

De acordo com o modelo Λ CDM, o Universo deve ter experimentado duas fases de expansão acelerada, uma no início dos tempos e outro em tempos recentes. Esse comportamento não pode ser reproduzido dentro da estrutura padrão da TRG ou do modelo padrão de partículas e, portanto, graus adicionais de liberdade devem ser introduzidos. Em primeiro lugar, podemos atribuir esses graus adicionais de liberdade para novas e exóticas formas de matéria, tais com campos inflacionários no início do Universo e uma energia escura em tempos recentes como discutido na seção anterior. Alternativamente, podemos considerar graus adicionais de liberdade de origem gravitacional, ou seja, sugerir uma modificação gravitacional que possui a TRG como limite particular. Ver [29, 30] para revisão de vários cenários alternativos a TRG.

No entanto, assim como para energia escura, pode-se construir muitas classes de gravidade modificada baseadas em curvatura, tais como $f(R)$ gravidade, $f(G)$ gravidade, gravidade de Lovelock, gravidade de Weyl, entre ou-

tras, ou mesmo extensões baseadas em torção, como gravidade $f(T)$. Aqui, vamos discutir duas classes específicas em ordem de mostrar esses feitos quantitativos.

A proposta mais popular de modificação de TRG são os modelos $f(R)$ de gravidade. Onde uma simples extensão na ação de Einstein-Hilbert é realizada na forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{f(R)}{16\pi G} + S_m, \quad (3.13)$$

onde $f(R)$ é uma função do escalar de curvatura e S_m é a ação dos campos de matéria. Evidentemente, para $f(R) = R$ a TRG é obtida. Variando a ação (3.13) com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$ teremos as equações de campo [31, 32] na forma

$$FG_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(FR - f) + \nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \square F + 8\pi G [T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(r)}], \quad (3.14)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ e $T_{\mu\nu}^{(m)}$ são o tensor de Einstein e o tensor de energia momento para os campos de matéria, respectivamente. Aqui estamos adotando a notação $F(R) \equiv f_{,R} = df(R)/dR$, onde para $f(R) = R$ recuperamos a TRG.

Uma vez supondo uma função específica de $f(R)$, a modificação apresentada no lado direito das equações de campos acima pode gerar um energia escura efetiva, gerando assim uma expansão acelerada em tempos recentes. Essa classe de modelos tem sido investigada também pelo presente autor desta tese em [33]. Ver esse artigo e referências mencionadas nele para mais detalhes sobre gravidade $f(R)$.

Outra bem conhecida possibilidade, é considerar um cenário de gravidade $f(T)$, onde T representa torção escalar. Semelhante a todas as formulações de torção, vamos deixar e_A^μ representar o *vierbein fields* que formam uma base ortonormal no espaço tangente em cada ponto x^μ . A métrica então é lida como $g_{\mu\nu} = \eta_{AB}e_\mu^A e_\nu^B$ (aqui índices gregos e os índices latinos abrangem

respectivamente os espaços de coordenadas e tangentes). Além disso, em vez da conexão sem torção de Levi-Civita, usamos o sem curvatura Weitzenböck $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \equiv e_A^\lambda \partial_\mu e_\nu^A$ (ver [34] para detalhes), e portanto, o campo gravitacional é descrito pelo tensor de torção

$$T^\rho{}_{\mu\nu} \equiv e_A^\rho (\partial_\mu e_\nu^A - \partial_\nu e_\mu^A). \quad (3.15)$$

O Lagrangeano equivalente teleparalelo da relatividade geral, isto é, o escalar de torção T , é construído por contrações do tensor de torção como [34]

$$T \equiv \frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} T_{\nu\mu\rho} - T_{\rho\mu}{}^\rho T^{\nu\mu}{}_\nu. \quad (3.16)$$

Inspirado por modelos $f(R)$, podemos estender T a uma função $T + f(T)$, construindo a ação de $f(T)$ gravidade [35, 36]:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e [T + f(T)], \quad (3.17)$$

onde $e = \det(e_\mu^A) = \sqrt{-g}$ e G é a constante gravitacional e onde impusermos unidades onde a velocidade da luz é igual a 1. Observe que a TRG é restaurada quando $f(T) = 0$, enquanto que para $f(T) = \text{const.}$, recuperamos a relatividade geral.

Vamos aplicar gravidade $f(T)$ em cosmologia. Em primeiro lugar, precisamos incorporar matéria e radiação e, portanto, a ação total é escrita como

$$\mathcal{S}_{tot} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e [T + f(T)] + \mathcal{S}_m + \mathcal{S}_r, \quad (3.18)$$

onde a matéria e a radiação são considerados fluidos com densidades de energia ρ_m , ρ_r e pressões P_m , P_r , respectivamente. Variando a ação (3.18) com o respeito aos *vierbeins*, temos as equações de campo como

$$\begin{aligned} e^{-1} \partial_\mu (e e_A^\rho S_\rho^{\mu\nu}) [1 + f_T] + e_A^\rho S_\rho^{\mu\nu} \partial_\mu (T) f_{TT} - [1 + f_T] e_A^\lambda T^\rho{}_{\mu\lambda} S_\rho{}^{\nu\mu} + \frac{1}{4} e_A^\nu [T + f(T)] \\ = 4\pi G e_A^\rho [\mathcal{T}^{(m)\rho}{}_\nu + \mathcal{T}^{(r)\rho}{}_\nu], \end{aligned} \quad (3.19)$$

com $f_T = \partial f / \partial T$, $f_{TT} = \partial^2 f / \partial T^2$, e onde $\mathcal{T}^{(m)}{}_{\rho}{}^{\nu}$ e $\mathcal{T}^{(r)}{}_{\rho}{}^{\nu}$, são os tensores de energia e momento da matéria e radiação, respectivamente.

Assim como na classe $f(R)$, aqui as modificações geradas pela função $f(T)$ pode fornecer uma energia escura efetiva e também gerar uma expansão acelerada sem a necessidade de uma energia escura. Essa classe de modelos tem sido investigada também pelo presente autor em [37]. Ver o artigo e referência mencioandas para mais detalhes, onde claramente podemos explicar os recentes dados observacionais através de uma energia escura efetiva.

Capítulo 4

Sondando a viabilidade cosmológica de estatísticas não-gaussianas

Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados em :

Probing the cosmological viability of non-gaussian statistics, JCAP **1608** 08, 051 (2016) [38];

Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **441** (2016) [39];

Jeans instability criterion from the viewpoint of Kaniadakis' statistics EPL **114** 5, 55001 (2016) [40].

Antes de apresentar os resultados principais das investigações relacionadas acima, vamos revisar alguns tópicos importantes para a compreensão dos mesmos.

4.1 Mecânica estatística não gaussiana

Embora a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) tenha tido um grande sucesso na descrição termodinâmica de sistemas de muitas partículas, é amplamente reconhecido que esta não é a mais adequada para descrever as propriedades estatísticas de vários sistemas físicos e matemáticos recentemente investigados nos campos de economia, astronomia, biologia, física de partículas, entre muito outros. Em virtude disso, algumas generalizações da estatística de BG têm sido desenvolvidas na literatura recente. Aqui, vamos discutir as duas principais generalizações de BG, que são conhecidas por estatística de Tsallis e Kaniadakis.

4.1.1 O formalismo de Tsallis

Em 1988 C. Tsallis introduziu um nova definição de entropia que posteriormente deu origem ao que hoje é conhecido por mecânica estatística e termodinâmica não extensiva, com o objetivo de estender o domínio de aplicabilidade da mecânica estatística de BG para sistemas onde este apresenta problemas de aplicabilidade. No que segue, vamos introduzir a estatística de Tsallis seguindo a metáfora apresentada em [41].

A equação diferencial ordinária mais simples que podemos imaginar é

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (4.1)$$

dada a condição inicial $y(0) = 1$, facilmente obtemos a solução $y = 1$. A próxima equação diferencial mais simples que podemos imaginar é

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (4.2)$$

e considerando a mesma condição inicial ($y(0) = 1$), encontramos $y = 1 + x$. A próxima equação de complexidade crescente que podemos imaginar é

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (4.3)$$

cuja solução é $y = e^x$, e sua função inversa é dada por $y = \ln x$, que tem a mesma forma funcional da entropia BG, e satisfaz á propriedade de aditividade $\ln(x_a x_b) = \ln x_a + \ln x_b$.

Podemos unificar as três equações diferenciais acima considerando,

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (y(0) = 1; q \in \mathfrak{R}), \quad (4.4)$$

cuja solução é

$$y = [1 + (1 - q)]^{1/1-q} \equiv e_q^x \quad (e_1^x = e^x) \quad (4.5)$$

e sua inversa é

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x \quad (x > 0 : \ln_1 x = \ln x), \quad (4.6)$$

que satisfaz á seguinte propriedade : $\ln_q(x_a x_b) = \ln_q x_a + \ln_q x_b + (1 - q)(\ln_q x_a)(\ln_q x_b)$.

Essas duas funções acima são chamadas de q -exponencial (4.5) e q -logaritmo (4.6), respectivamente. Eles desempenham um papel importante na formulação da estatística de Tsallis.

A generalização da entropia BG pode ver feita postulando a q -entropia

$$S_q = k \ln_q W \quad (S_1 = S_{BG}), \quad (4.7)$$

onde $W = 1/p_i$ é o número total de configurações microscópicas cujas probabilidades são p_i .

A entropia de Tsallis é uma generalização da entropia de BG, onde no limite $q \rightarrow 1$, esta entropia reproduz a entropia usual de BG. As principais propriedades da entropia de Tsallis são:

1 - Seja A e B dois sistemas independentes, então a aditividade do q -logaritmo imediatamente implica, $S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B)$.

2 - A entropia S_q é côncava (convexa) para $q > 0$ ($q < 0$). Para o caso de probabilidades iguais isso corresponde a um máximo para $q > 0$ e um mínimo para $q < 0$.

3 - Os casos $q = 1$, $q < 1$ e $q > 1$ correspondem, respectivamente, aos casos extensivo, superextensivo e subextensivo. Em todos os casos sempre temos $S_q \geq 0$. Dessa propriedade pode-se mostrar a generalização da mecânica estatística de BG, que é frequentemente referida como mecânica estatística não extensiva, ou estatística de Tsallis.

Aplicações têm sido exploradas intensamente na literatura usando a estatística de Tsallis. Elas englobam os campos da física, astrofísica, geofísica, química, biologia, matemática, economia, engenharia, medicina, fisiologia, esportes e muitos outros (ver [42] para a revisão geral, mas não atualizada).

A teoria cinética não extensiva

Vamos aqui apresentar de forma resumida a teoria cinética não extensiva, que será muito importante nos desenvolvimentos seguintes.

A distribuição Maxwelliana de velocidades é dada por [42]

$$f(v)_{BG} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{mv^2}{k_B T} \right), \quad (4.8)$$

onde m é a massa das partículas, T é a temperatura e n_0 é a densidade numérica das partículas na ausência de campo de forças externas.

A generalização da teoria cinética para a estatística não extensiva foi realizada em [43]. Esses autores deduziram uma distribuição de velocidades na forma

$$f(v)_q = B_q \left[\left(1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2k_B T} \right) \right]^{\frac{1}{1-q}} = B_q \exp_q(E/k_B T), \quad (4.9)$$

onde E é a energia total das partículas e

$$B_q = n(1+q)^{1/2} \left(\frac{5-3q}{2}\right) \left(\frac{3-q}{2}\right) \frac{\Gamma(1/2 + 1/(1-q))}{\Gamma(1/(1-q))} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}, \quad (4.10)$$

se $1/3 < q < 1$, e

$$B_q = n(1+q)^{3/2} \frac{\Gamma(1/(1-q))}{\Gamma(1/(1-q) - 3/2)} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \quad (4.11)$$

se $q > 1$ e n é o número de partículas.

O valor esperado de v^2 para cada grau de liberdade é dado por

$$\langle v^2 \rangle_q = \frac{\int_0^\infty f_q v^2 dv}{\int_0^\infty f_q dv} = \frac{2}{5q-3} \frac{k_B T}{m}. \quad (4.12)$$

O teorema da equipartição é então obtido usando eq. (4.12)

$$E_q = \frac{1}{2} N m \langle v^2 \rangle_q, \quad (4.13)$$

e obtemos

$$E_q = \frac{1}{5q-3} N k_B T, \quad (4.14)$$

onde, como esperado, para $q = 1$ temos a relação padrão para o teorema da equipartição da energia.

4.1.2 O formalismo de Kaniadakis

Outra generalização da entropia BG foi proposta por G. Kaniadakis, que introduziu uma estatística do tipo lei de potência conhecida como κ -estatística [50]. Essa estatística preserva a estrutura epistemológica e termodinâmica da teoria BG. O formalismo do Kaniadakis está baseado na seguinte entropia generalizada

$$S_\kappa(f) = - \int d^3 p f \frac{f^\kappa - f^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (4.15)$$

onde recuperamos a entropia BG no limite de $\kappa = 0$.

Assim como no formalismo de Tsallis, aqui também temos as definições de funções generalizadas como a κ -exponencial e κ -logaritmo como segue

$$\exp_{\kappa}(f) = (\sqrt{1 + \kappa^2 f^2} + \kappa f)^{1/\kappa}, \quad (4.16)$$

$$\ln_{\kappa}(f) = \frac{f^{\kappa} - f^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (4.17)$$

onde a seguinte operação é satisfeita $\ln_{\kappa}(\exp_{\kappa}(f)) = \exp_{\kappa}(\ln_{\kappa}(f)) = f$

A entropia de Kaniadakis satisfaz as propriedades de concavidade, aditividade e extensividade. A entropia de Tsallis é côncava, não aditiva, e não extensiva. A κ -estatística também tem sido aplicada com sucesso em muitos experimentos. Podemos mencionar raios cósmicos [51], plasma de quark-gluons [44], modelos cinéticos que descrevem interação entre átomos e fótons [45], modelos financeiros [46], entre outros.

A partir dos fundamentos da teoria cinética, a velocidade de distribuição de partículas livres é dada por [47]

$$f_{\kappa}(v) = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 \frac{mv^2}{2k_B T}} - \kappa \frac{mv^2}{2k_B T} \right)^{1/\kappa}. \quad (4.18)$$

O valor esperado de v é dado por

$$\langle v^2 \rangle_{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} f_{\kappa} v^2 dv}{\int_0^{\infty} f_{\kappa} dv} \quad (4.19)$$

Usando a relação integral [48]

$$\int_0^{\infty} dx x^{r-1} \exp_{\kappa}(-x) = \frac{2 |\kappa|^{-r} \Gamma(\frac{1}{2|\kappa|} - \frac{r}{2})}{1 + r |\kappa| \Gamma(\frac{1}{2|\kappa|} + \frac{r}{2})} \Gamma(r), \quad (4.20)$$

temos que

$$\langle v^2 \rangle_{\kappa} = \frac{2k_B T}{m} \frac{1}{2\kappa} \frac{1 + \frac{1}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})}{1 + \frac{3}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})}. \quad (4.21)$$

O teorema de equipartição da energia no contexto da κ -estatística é obtido como

$$E_\kappa = \frac{1}{2} N \frac{1}{2\kappa} \frac{1 + \frac{1}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})}{1 + \frac{3}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})} k_B T. \quad (4.22)$$

A equação é válida no intervalo de $0 \leq \kappa < 2/3$. Para $\kappa = 2/3$ (valor crítico) a expressão da equipartição da energia diverge. Para $\kappa = 0$, o teorema de equipartição clássico BG é recuperado. Essas expressões foi apresentada por nós em [49].

Assim como para a q -estatística, também existe um longa literatura de discussões sobre a κ -estatística (ver [50, 51] e referências citadas nesses artigos). Aqui vamos nos limitar a apresentar somente essa pequena revisão básica que foi descrita acima, que será necessário mais adiante.

4.2 Gravitação entrópica

Agora iremos apresentar um resumo do cenário de gravitação entrópica proposto pelo Verlinde [52], que será de fundamental importância na apresentação do resultados nas próximas seções.

Existem evidências teóricas de que a compreensão da gravidade está em direta conexão com a termodinâmica. Trabalhos pioneiros de Bekenstein [53] e Hawking [54] descreveram esta questão. Por exemplo, quantidades como área e massa de um buraco negro estão associadas com entropia e temperatura, respectivamente. Trabalhando nessa linha, Jacobson [55] interpretou as equações de campo de Einstein como uma identidade termodinâmica. Padmanabhan [56] deu uma interpretação para a gravidade a partir do teorema da equipartição da energia. Recentemente, Verlinde [52] trouxe uma derivação heurística para a gravidade, tanto newtoniana como relativística, onde a lei de equipartição da energia também desempenhou um papel importante. Por outro lado, pode-se perguntar: qual é o ponto de vista de modelos gravitacionais acoplados a teorias termoestatísticas e vice-versa? No que segue, vamos focalizar sobre o modelo de gravitação entrópica proposto por Verlinde.

O conceito introduzido por Verlinde é análogo ao de Jacobson, que propôs uma derivação termodinâmica para as equações de campo de Einstein. Os resultados têm mostrado que as leis da gravidade derivada por Newton pode ser interpretada como uma força entrópica originada por perturbações das informações contidas em uma determinada variedade devido ao movimento de um corpo maciço quando este se afasta de uma tela holográfica. Uma tela holográfica pode ser entendida como um dispositivo de armazenamento para informações que é constituída por bits. Os bits são as menores unidades de informação. Verlinde usou essa ideia junto com o resultado de Unruh [58] e ele obteve a segunda lei de Newton. A ideia de uma gravidade entrópica em cosmologia tem sido amplamente investigada em diferentes contextos, ver [59, 60] para algumas abordagens. No que segue, revisamos o formalismo de Verlinde.

O formalismo proposto por Verlinde deriva a aceleração gravitacional usando basicamente o princípio holográfico e a lei de equipartição da energia. Supondo que o princípio holográfico é válido, o espaço máximo de armazenamento ou o número total de bits é proporcional a área A de uma determinada região. De fato, em uma teoria do espaço emergente, essa área pode ser definida: cada bit fundamental ocupa uma unidade de célula.

Vamos considerar uma superfície esférica como a tela holográfica, com uma partícula de massa M posicionada em seu centro, como mostra a figura 4.2. Uma tela holográfica pode ser imaginada como um dispositivo de armazenamento para obter informações, como já mencionada acima. O número de bits é suposto ser proporcional a área A da tela holográfica,

$$N = \frac{c^3 A}{G\hbar} = \frac{A}{l_p^2}, \quad (4.23)$$

onde $A = 4\pi r^2$ e $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$. Onde introduzimos uma nova constante G . Eventualmente essa constante será identificada com a constante de Newton, claro, mas, como não assumimos nada ainda sobre a existência de uma força gravitacional, pode-se simplesmente considerar esta equação como a definição de G . Assim, a única suposição feita aqui é que o número de bits é

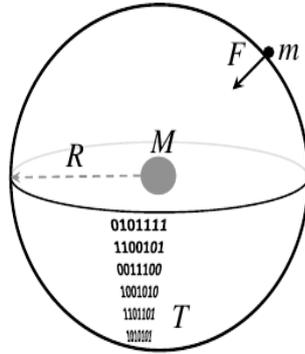


Figura 4.1: Uma partícula com massa m perto de uma tela holográfica esférica. A energia é uniformemente distribuída sobre os bits ocupados, e é equivalente à massa M que surgirá na parte do espaço cercado pela tela.

proporcional à área.

Vamos supor que há uma energia total E presente no sistema. Fazemos agora uma simples suposição de que a energia é dividida uniformemente sobre os N bits. A temperatura T é então determinada pelo teorema da equipartição da energia

$$E = \frac{1}{2} N k_B T, \quad (4.24)$$

como a energia média por bits. Depois disso, precisamos apenas de mais uma equação

$$E = M c^2, \quad (4.25)$$

e igualando (4.24) e (4.26), temos

$$M c^2 = \frac{1}{2} N k_B T. \quad (4.26)$$

Usando a temperatura de Unruh [58] obtém-se

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}. \quad (4.27)$$

Em combinação com eq. (4.23), podemos derivar a fórmula para a aceleração gravitacional, ou seja:

$$a = \frac{l_p^2 c^3}{\hbar} \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{r^2}. \quad (4.28)$$

Aqui é importante mencionar que (4.24) é o usual teorema da equipartição da energia na termodinâmica de BG. Em (4.26) M representa a massa que surgirá na parte do espaço encerrada pela tela holográfica, veja figura 4.1.

Com o objetivo de completar a derivação das leis de Newton, temos que entender porque o símbolo a , que basicamente foi introduzido à mão em (4.28) é igual à aceleração física. Vamos considerar o que acontece com a partícula de massa m quando ela se aproxima da tela. Aqui, ela deverá emergir com graus de liberdade microscópicos e deve se fundir com os graus de liberdade na tela e, portanto, será composto dos mesmos bits que vivem na tela. Uma vez que cada bit carrega uma energia $k_B T/2$, o número de bits segue como

$$mc^2 = \frac{1}{2} n k_B T. \quad (4.29)$$

Com isso, pode-se mostrar a mudança de entropia em termos de aceleração como (ver [52] para detalhes em geral)

$$\frac{\Delta S}{n} = k_B \frac{a \Delta x}{2c^2}. \quad (4.30)$$

Combinando as equações acima, obtemos $F = ma$ como uma força entrópica. Mas, ao introduzir o número de bits N associado com a partícula conseguimos tornar as identidades mais naturais em termos de seu caráter escalar e vetorial. Na verdade, eliminando \hbar das equações se torna uma boa escolha. Assim, concluimos que a aceleração está relacionada a um gradiente de entropia *via* (4.30). Ver o artigo original do Verlinde para mais detalhes heurísticos dessa dedução.

Um dos principais princípios da gravitação entrópica $\tilde{A}\textcircled{C}$: a inércia é uma consequência do fato de que uma partícula em repouso ficará em repouso porque não há gradientes de entropia. Dado o fato que é natural introduzir o potencial newtoniano Φ , podemos escrever a aceleração como um gradiente na forma

$$a = -\nabla\Phi, \quad (4.31)$$

isso nos permite expressar a mudança de entropia como

$$\frac{\Delta S}{n} = -k_B \frac{\Delta\Phi}{2c^2} \quad (4.32)$$

Assim, podemos concluir que o potencial de Newton acompanha a variação da entropia por bit. Verlinde também faz um tratamento heurístico para deduzir as equações de campo de Einstein, ou seja, a TRG, a partir de um cenário entrópico, ver [52]. Mais recentemente, Verlinde tenta introduzir as componentes escuras do Universo (matéria e energia escura), que são fortemente sustentadas pelas atuais observações, no artigo *Emergent Gravity and the Dark Universe* [62]. O desenvolvimento resumido apresentado acima é suficiente para compreensão dos nossos resultados no que segue. Assim, para maiores detalhes do cenário de gravitação entrópica do Verlinde, mencionamos [52, 62].

4.3 Energia escura modificada por estatísticas não-gaussianas

Com base na relação entre termodinâmica e gravidade, vamos propor, com ajuda do formalismo de Verlinde, uma interpretação alternativa da dinâmica de um Universo de Friedmann-Robertson-Walker. Nossa descrição leva em conta a entropia e a temperatura intrínseca ao horizonte do Universo devido á informação armazenada holograficamente através de teorias estatísticas não-gaussianas propostas por Tsallis e Kaniadakis. O efeito dessas estatísticas não

gaussianas no contexto cosmológico pode ser quantificado por uma mudança na constante gravitacional G , que por sua vez afeta diretamente a intensidade do campo gravitacional, tornando-o mais forte ou fraco, dependendo das características de cada formulação não gaussiana adotada. No que segue, vamos apresentar nossos resultados, onde obtemos vínculos observacionais sobre ambas formulações não gaussianas (Tsallis e Kaniadakis) a partir de dados cosmológicos. Para analisar os parâmetros livres do modelo, vamos usar dados de: Supernovas tipo Ia (SNIa), oscilações acústicas bariônicas (OAB), taxa de expansão do Universo ($H(z)$) e de crescimento linear das perturbações da matéria (f). No Apêndice A, apresentamos detalhes acerca da análise realizada, bem como dos dados observacionais utilizados aqui.

Foi demonstrado em [61] que uma modificação direta na dinâmica FRW no contexto da estatística de Tsallis pode ser feita assumindo $G \mapsto G_q$ nas equações de campo. Isso pode ser feito, em termos gerais, com uma aplicação direta do teorema da equipartição no formalismo de Verlinde, substituindo (4.14) em (4.29). Sem perda de generalidade, aplicando as mesmas etapas descritas da seção 4.2, podemos obter uma equação de aceleração modificada na forma

$$a = G_q \frac{M}{r^2}, \quad (4.33)$$

onde G_q é interpretada como uma constante gravitacional efetiva dada por

$$G_q = \frac{5 - 3q}{2} G. \quad (4.34)$$

A partir de (4.34) podemos notar que a constante gravitacional efetiva depende diretamente de q : para $q = 1$ temos que $G_q = G$; para $q = 5/3$ tem um curioso e hipotético resultado de $G = 0$, ou seja, ausência completa de força gravitacional. Isso mostra que $q = 5/3$ é um limite superior quando estamos lidando com a tela holográfica nesse contexto. Por outro lado, também podemos usar o teorema da equipartição da energia dentro do formalismo de Kaniadakis na gravidade de Verlinde e obter

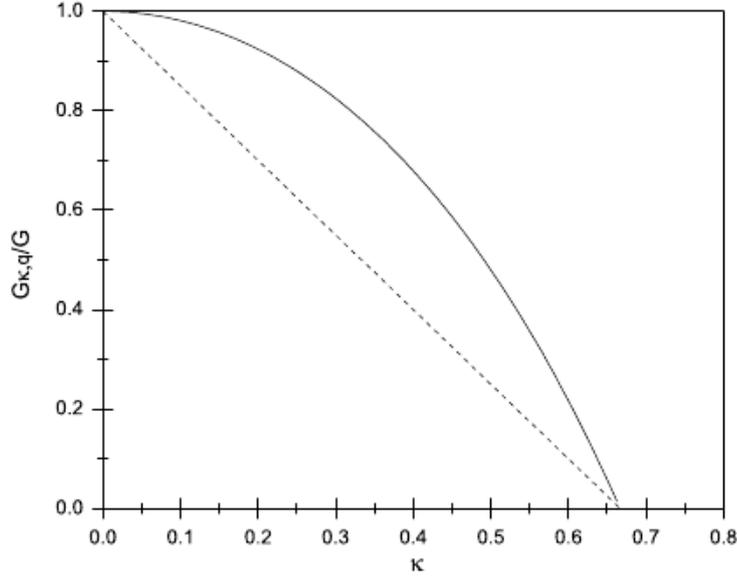


Figura 4.2: As constantes gravitacionais modificadas normalizadas a unidade, $G_{q,\kappa}/G$, para o formalismo de Tsallis (linha tracejada) e Kaniadakis (linha sólida) como uma função de κ .

$$a = G_{\kappa} \frac{M}{r^2}, \quad (4.35)$$

onde G_{κ} também é interpretada como uma constante gravitacional efetiva dada por

$$G_{\kappa} = 2\kappa \frac{1 + \frac{3}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})}{1 + \frac{1}{2}\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})} G. \quad (4.36)$$

Figura 4.2 mostra as constantes gravitacionais modificadas normalizadas a unidade, $G_{q,\kappa}/G$, para o formalismo de Tsallis (linha tracejada) e Kaniadakis (linha sólida) como uma função de κ . Onde foi adotada a relação $q = \kappa + 1$ (ver [39] para uma discussão dessa relação). Podemos ver que no limite $\kappa \rightarrow 0$, temos $G_{q,\kappa}/G \rightarrow 1$. Podemos também notar que as correções sobre a força do campo gravitacional é maior no formalismo de Kaniadakis.

Podemos modificar a dinâmica FRW assumindo $G \mapsto G_\kappa$ e investigar os efeitos gravitacionais da termodinâmica não gaussiana de Kaniadakis. Para um Universo homogêneo e isotrópico, as equações de movimento modificadas pelos efeitos não gaussianos são escritas como

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G_{q(\kappa)} \rho, \quad (4.37)$$

e

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi}{3} G_{q(\kappa)} (\rho + 3p), \quad (4.38)$$

onde $H = \dot{a}/a$ e a função de Hubble, $G_{q(\kappa)}$ denota a constante gravitacional efetiva no formalismo de Tsallis (Kaniadakis) e ρ and p são, a densidade total e pressão de cada fluido/espécie correspondente que obedece a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0. \quad (4.39)$$

Vamos considerar um Universo contendo radiação, matéria não-relativística (bariônica + escura) e uma energia escura na forma de um fluido perfeito. Tendo isso em conta, podemos escrever (4.37) como

$$\frac{H^2(a)}{H_0^2} = \frac{G_{q(\kappa)}}{G} \left(\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{x,0} f(a) \right), \quad (4.40)$$

onde $\Omega_{i,0} = 8\pi G \rho_{i0} / (3H_0^2)$ é o parâmetro de densidade da i -componente ($i = r, m$, and x para radiação, matéria (bariônica + escura) e energia escura, respectivamente). Na equação acima a função $f(a)$ é definida como

$$f(a) = \frac{\rho_x}{\rho_{x0}} = a^{-3} \exp \left(-3 \int_1^a \frac{w(a') da'}{a'} \right), \quad (4.41)$$

ou seja, representa a razão entre a densidade de energia (da energia escura) ao longa da história cósmica e a energia avaliada no presente momento. A função $w(a) \equiv p_x / \rho_x$ representa uma equação de estado genérica.

Aplicando a condição de normalização, temos

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{k,0} + \Omega_{x0} = \frac{G}{G_{q(\kappa)}}, \quad (4.42)$$

que é um resultado interessante, pois pode nos mostrar mais uma vez que o valor $q = 1$ ($\kappa = 0$) recupera a condição de normalização padrão. Valores tais como $q > 5/3$ e $\kappa < 0$, trazem uma condição de normalização negativa, que não faz sentido e iremos descartar essa possibilidade de *prior* em nossa análise de dados.

No que segue, vamos considerar $w = \text{constante}$. Portanto, podemos escrever (4.40) como

$$\begin{aligned} \frac{H^2(a)}{H_0^2} &= \frac{G_{q(\kappa)}}{G} \left[\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} \right. \\ &\left. + \left(\frac{G}{G_{q(\kappa)}} - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} \right) (1+z)^{3(1+w)} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

A partir das eqs. (4.34), (4.36), (4.42) é possível notar que os parâmetros q e κ afetam diretamente o balanço energético do universo. Se $q < 1$ (> 1) então a constante gravitacional efetiva é maior (menor) que G , de modo que mais (menos) energia escura será necessária para fornecer a aceleração observada no Universo em tempo recentes. Por sua vez, no contexto de Kaniadakis, se $\kappa > 0$, o campo gravitacional é mais fraco em comparação como o cenário padrão BG. De modo que precisamos de menos energia escura para acomodar a aceleração cósmica. Uma vez que $\kappa \geq 0$, a estatística de Kaniadakis é mais restritiva do que a estatística de Tsallis.

Como discutido no capítulo 1, no regime linear as perturbações da matéria, $\delta = \delta\rho_m/\rho_m$, satisfazem

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{eff}\rho_m\delta = 0, \quad (4.44)$$

onde G_{eff} é uma constante gravitacional efetiva para uma dada teoria de gravidade. Para os modelos propostos aqui, G_{eff} é dado por (4.34) para a estatística de Tsallis e (4.36) para a estatística de Kaniadakis. Definindo a função de crescimento, $f \equiv d \ln \delta / \ln a$, e equação (4.44) se reduz a

$$f' + f^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\Omega_m\right)f - \frac{3}{2}\Omega_m^{eff} = 0, \quad (4.45)$$

onde $f' = df/d\ln a$ e estamos definindo a função Ω_m^{eff} como

$$\Omega_m^{eff} = \frac{8\pi G_{eff}\rho_m}{3H^2} = \frac{\Omega_{m,0}a^{-3}}{\left[\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \left(\frac{G}{G_q(\kappa)} - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0}\right)a^{-3(1+w)}\right]}. \quad (4.46)$$

Uma vez que temos nossa função de crescimento f definida para nossos modelos podemos usar dados de formação de estruturas para sondar a viabilidade de nossos modelos também sobre os efeitos da evolução das perturbações lineares da matéria. Os dados que vamos utilizar aqui são apresentados em uma tabela no apêndice A, bem como a metodologia estatística adotada.

Na Figura 4.3 mostramos os vínculos observacionais em 68% e 95% *confidence level* (CL) no plano $w-q$, $w-\kappa$ e $w-\Omega_{m,0}$ para o modelo w CDM modificado. No painel esquerdo estão os resultados para a estatística de Tsallis e no painel direito para a estatística de Kaniadakis. Dentro de 95% CL, os valores de melhor ajuste são : ($q = 0.907_{-0.137}^{+0.093}$, $w = -1.021_{-0.099}^{+0.089}$, $\Omega_{m,0} = 0.270_{-0.041}^{+0.038}$) com $\chi_{\min}^2 = 590.55$ para a estatística de Tsallis e ($\kappa = 0.026_{-0.026}^{+0.146}$, $w = -0.995_{-0.091}^{+0.085}$, $\Omega_{m,0} = 0.308_{-0.000}^{+0.018}$) com $\chi_{\min}^2 = 594.40$ para a estatística de Kaniadakis.

Podemos notar que os regimes de quintessência ($w > -1$) e fantasma ($w < -1$) são compatíveis com ambas as estatísticas e não podemos diferenciar entre esses dois regimes para os atuais dados utilizados aqui dentro desse modelo que foi abordado. Ainda, podemos notar que a estatística de Tsallis produz um ajuste melhor a 68% CL em comparação com o cenário BG. Por outro lado, a termodinâmica de Kaniadakis é totalmente fechada em BG, ou seja, $\kappa \simeq 0$. Entretanto é importante notar que em 95% CL, esses dados não excluem a estatística de BG, ou seja, $q = 1$ e $\kappa = 0$. Para Tsallis temos, $0 \leq G_{eff}/G \leq 2.5$, enquanto para Kaniadakis podemos notar, $0 \leq G_{eff}/G \leq 1$. Assim, podemos atribuir esse resultado à liberdade adicional permitida pela

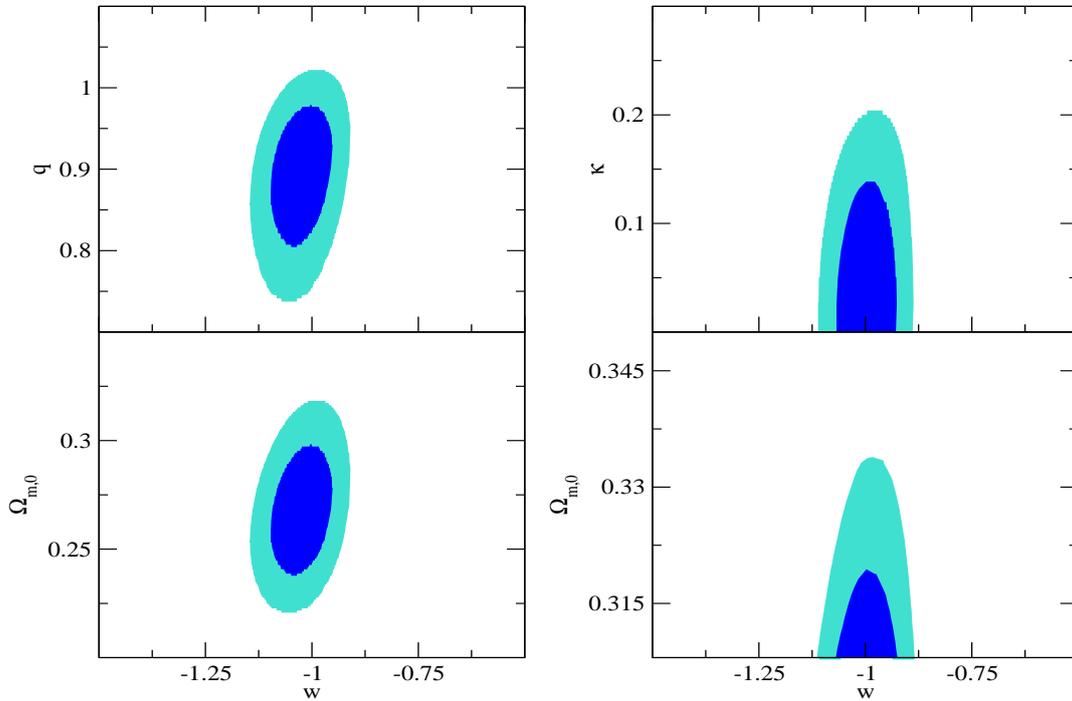


Figura 4.3: Regiões de confiança estatística em 68% and 95% para o model w CDM modificado a partir de nossa análise conjunta com SNIa + $f + H(z)$ + BAO. Painel esquerdo: estatística de Tsallis . Painel direito: estatística de Kaniadakis.

estatística de Tsallis, uma vez que os dados parecem escolher uma constante gravitacional ligeiramente maior. Como o campo gravitacional é cada vez mais fraco no cenário de Kaniadakis, precisamos de mais matéria escura no contexto da estatística de Kaniadakis, do que no formalismo de Tsallis.

Conclusão

Atualmente, duas extensões da mecânica estatística padrão, conhecidas como estatísticas de Kaniadakis e Tsallis têm sido usados para explicar vários fenômenos observados experimentalmente em diferentes áreas. Aqui, exploramos a possibilidade de uma modificação na dinâmica do Universo

obtida através de uma gravitação entrópica baseada nas estatísticas não-gaussianas de Kaniadakis e Tsallis. A partir de uma combinação de dados, SNIa+BAO+ $H(z)+f(z)$, temos obtidos novos valores para os parâmetros q e κ . Com base nos dados atualizados, temos observado um pequeno desvio (em 68% CL) da estatística de BG, dentro do contexto da estatística de Tsallis. A partir dos resultados obtidos aqui, podemos concluir que os parâmetros q and κ afetam o balanço energético do universo. O campo gravitacional é mais fraco para $q > 1$ e $\kappa > 0$. Assim, precisamos de mais energia escura do que o valor que teríamos se considerarmos o cenário BG padrão. Para $0 \leq q < 1$, a força do campo gravitacional é maior que a do cenário BG padrão. Além disso, menos energia escura é necessária para explicar as observações cosmológicas. Os resultados obtidos aqui favorecem as estatísticas de Tsallis e um campo gravitacional mais forte em 68% CL.

4.4 O critério de instabilidade de Jeans sobre o ponto de vista de estatísticas não gaussianas

Neste capítulo vamos derivar o comprimento de Jeans no contexto da estatística de Kaniadakis. Comparamos nosso resultado com o comprimento de Jeans já obtido para a estatística de Tsallis em [65] e discutiremos as principais diferenças entre esses dois modelos. Também obteremos a κ velocidade do som. Finalmente, aplicamos nossos resultados obtidos aqui para analisar um sistema astrofísico específico (massa de aglomerados de galáxias). Esses resultados foram publicados em *Europhys. Lett.* 114 no.5, 55001 (2016).

A estabilidade dinâmica de um sistema auto-gravitante geralmente pode ser descrita pelo critério da instabilidade gravitacional de Jeans. O chamado comprimento de Jeans [63] é dado por

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{\mu m_H G \rho_0}}, \quad (4.47)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura, μ é o peso molecular médio, m_H é a massa atômica de hidrogênio, G é a constante gravitacional e ρ_0 é a densidade de massa de equilíbrio. O valor crítico de λ_J , eq.(4.47), é obtido considerando uma pequena perturbação em um conjunto de quatro equações já discutidas no capítulo 2. A saber são, a equação de continuidade, equação de Euler, equação de Poisson e a equação de estado de um gás ideal. O comprimento de Jeans estabelece que se o comprimento de onda λ de flutuações de densidade for maior do que λ_J , então a densidade crescerá com o tempo de maneira exponencial e o sistema irá tornar-se gravitacionalmente instável.

Como já descrito acima, a lei de equipartição da energia e derivada dentro do contexto da termodinâmica de Tsallis, é dada por

$$E_q = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T. \quad (4.48)$$

onde q pertence ao intervalo de $0 \leq q < 5/3$, conforme discutido anteriormente.

Aplicando a equipartição da energia dentro do formalismo de Verlinde, temos que G deve ser substituído por um G_q . A partir disso podemos obter a mesma expressão na qual o comprimento de onda crítico não extensivo é dado por [65]

$$\lambda_c^q = \sqrt{\frac{2}{5 - 3q} \frac{\pi k_B T}{\mu m_H G \rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{5 - 3q}} \lambda_J. \quad (4.49)$$

Esta modificação não extensiva do critério de Jeans leva a um novo comprimento crítico λ_c^q que depende do parâmetro q de acordo com o seguintes critérios:

- Se $q = 1 \Rightarrow \lambda > \lambda_c^q = \lambda_J$, o habitual critério de Jeans é recuperado;
- Se $0 < q < 1$ o critério Jeans é modificado como $\lambda > \lambda_c^q < \lambda_J$;
- Se $1 < q < 5/3$, o critério Jeans é modificado como $\lambda > \lambda_c^q > \lambda_J$;
- Se $q \rightarrow 5/3, \lambda_c^q \rightarrow \infty$, o sistema auto-gravitante é sempre estável.

Portanto, usamos o formalismo de Verlinde bem como a termodinâmica de Tsallis para derivar o comprimento de Jeans não extensivo. Por outro lado, podemos considerar também a estatística de Kaniadakis, a κ estatística. Mostramos na seção 4.1.2 que a equipartição da energia dentro da κ -estatística é dada por

$$E_\kappa = \frac{1}{2} N \frac{(1 + \frac{\kappa}{2})}{(1 + \frac{3}{2}\kappa)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})}{2\kappa \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})} k_B T, \quad (4.50)$$

onde κ está definido no intervalo $0 \leq \kappa < 2/3$. Para $\kappa = 2/3$ (valor crítico) a expressão da lei de equipartição da energia diverge, o que seria equivalente a $q = 5/3$ no formalismo de Tsallis. Para $\kappa = 0$, o teorema de equipartição clássico para cada grau microscópico de liberdade pode ser recuperado.

Se usarmos o teorema da equipartição de Kaniadakis no formalismo de Verlinde, temos a seguinte G_κ (também já discutido anteriormente)

$$G_\kappa = \frac{(1 + \frac{3}{2}\kappa) 2\kappa}{(1 + \frac{\kappa}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})} G. \quad (4.51)$$

Usando (4.51) em (4.47), podemos derivar a expressão para o comprimento de onda crítico na estatística de Kaniadakis como segue

$$\lambda_c^\kappa = \sqrt{\frac{(1 + \frac{\kappa}{2})}{(1 + \frac{3}{2}\kappa)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})}} \lambda_J. \quad (4.52)$$

Essa κ modificação sobre o critério do Jeans leva a um novo comprimento crítico λ_c^κ que depende do parâmetro κ na forma:

- Se $\kappa = 0 \Rightarrow \lambda > \lambda_c^\kappa = \lambda_J$, o critério de Jeans habitual é recuperado;
- Se $0 < \kappa < 2/3$, o critério de Jeans é modificado como $\lambda > \lambda_c^\kappa > \lambda_J$;
- Se $\kappa \rightarrow 2/3-$, $\lambda_c^\kappa \rightarrow \infty$, o sistema auto-gravitante é sempre estável.

É possível ainda definir uma temperatura física no contexto de Tsallis. A partir de eq.(4.48) e (4.49) podemos escrever

$$T_q = \frac{2T}{5 - 3q}. \quad (4.53)$$

É fácil ver que $T_q = T$ se $q \rightarrow 1$. Consequentemente, temos a velocidade do som não extensiva dada por

$$v_{sq} = \sqrt{\frac{k_B T_q}{m}}. \quad (4.54)$$

Também podemos definir uma temperatura física no contexto de Kaniadakis. A partir de (4.50) e (4.52) temos

$$T_\kappa = \frac{(1 + \frac{\kappa}{2})}{(1 + \frac{3}{2}\kappa) 2\kappa} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4})} T. \quad (4.55)$$

É fácil ver que $T_\kappa = T$ se $\kappa \rightarrow 0$. Consequentemente, temos a velocidade do som para a κ estatística dada por

$$v_{s\kappa} = \sqrt{\frac{k_B T_\kappa}{m}}. \quad (4.56)$$

Vamos agora aplicar os resultados desenvolvidos acima e investigar como as estatísticas não gaussianas podem afetar um sistema astrofísico. Utilizaremos 16 medidas de massa a partir de *high X-ray luminosity clusters* na faixa de *redshift* 0,17 a 0,55. A luminosidade em raios-X das galáxias nos fornece algumas informações sobre sua evolução, mas aqui vamos analisar especificamente as massas desses 16 aglomerados obtidos em [66]. Se as galáxias estiverem em equilíbrio, a massa virial de um *cluster* pode ser calculada como

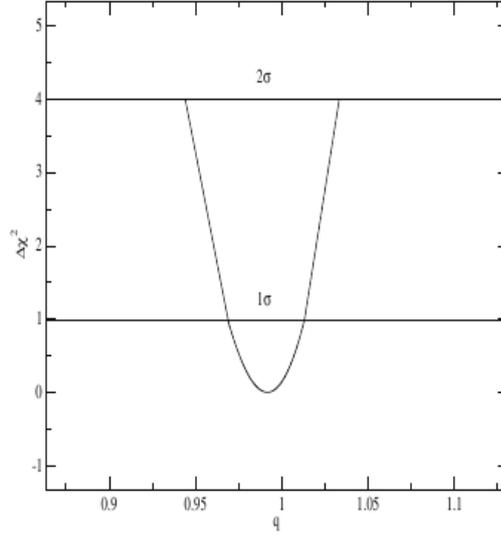


Figura 4.4: Variação de $\Delta\chi^2$ como uma função do parâmetro q .

$$M = \frac{3}{G} \sigma_1^2 r, \quad (4.57)$$

onde σ_1 e r são a velocidade de dispersão do aglomerado e o raio virial tridimensional, respectivamente. A massa virial pode ser reescrita como

$$M_q = \frac{3}{G_q} \sigma_1^2 r, \quad (4.58)$$

para o cenário modificado através das estatísticas de Tsallis e

$$M_\kappa = \frac{3}{G_\kappa} \sigma_1^2 r, \quad (4.59)$$

para o cenário modificado através das estatísticas de Kaniadakis. Em (4.58) e (4.59), $G_{q,\kappa}$ está definido por (4.34) e (4.51), respectivamente.

Em [67] os autores analisaram um sistema auto-gravitante com interação de longo alcance e suas funções de distribuição para obter uma expressão para o parâmetro não extensivo dado por

$$(1 - q) \nabla \varphi + 2\sigma \nabla \sigma = 0, \quad (4.60)$$

que relaciona o parâmetro não extensivo, a dispersão de velocidade e a aceleração gravitacional. Na expressão acima φ é o potencial gravitacional.

Para sistemas esfericamente simétricos, podemos escrever (4.60) como

$$1 - q = -2\sigma \frac{d\sigma/dr}{d\varphi/dr} = -2\sigma \frac{d\sigma/dr}{GM(r)/r^2}, \quad (4.61)$$

onde podemos ver o caso de uma massa variável, $M = M(r)$. A partir de (4.60) e (4.61) podemos ver que o parâmetro q é igual a unidade se e somente se $\nabla\sigma = 0$.

Para justificar nossa abordagem para a massa virial, podemos reescrever (4.61) na forma

$$M = -\frac{2\sigma r^2 d\sigma/dr}{G_q(1-q)}. \quad (4.62)$$

Então, (4.58) pode ser re-obtida se impormos a condição

$$-\frac{2\sigma r^2 d\sigma/dr}{G_q(1-q)} = \frac{3}{G_q} \sigma_1^2 r, \quad (4.63)$$

o que leva a uma solução para $\sigma^2(r)$ dada por

$$\sigma^2(r) = 3(q-1) \sigma_1^2 \ln(r) + \sigma_1^2. \quad (4.64)$$

Aqui, no limite $q \rightarrow 1$, recuperamos $\sigma^2(r) = \sigma_1^2$. Esse resultado é compatível com (4.61). Portanto, se a dispersão de velocidade para o aglomerado de galáxias satisfaz (4.64), então a massa virial não extensiva pode ser escrita como (4.58). Um procedimento semelhante pode ser feito para justificar a forma da massa virial dada por (4.59), usando a estatísticas de Kaniadakis, isso é redundante, somente repetir os mesmo passos.

Vamos estimar agora como as previsões teóricas dadas pelas eqs. (4.58) e (4.59) podem ajustar os dados de massa de aglomerados compilados em [66]. Seguimos o mesmo procedimento da seção anterior e vamos minimizar a função chi-quadrado dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{16} \frac{(M_{obs} - M_{th})^2}{\sigma_M^2}, \quad (4.65)$$

onde M_{obs} , M_{th} , e σ_M , representam as estimativas observacionais para a massa total do aglomerado, as previsões teóricas (dada pelas eqs. (4.58) e (4.59)) e o erro associado às medidas observacionais, respectivamente.

As Figuras 4.3 e 4.4 mostram os resultados de nossa análise estatística como uma função de $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2$ em 1σ and 2σ CL para as estatísticas de Tsallis e Kaniadakis, respectivamente. Notamos $q = 0.9918_{-0.0242}^{+0.0192}$ e $\kappa = 0.0119_{-0.0119}^{+0.0231}$ em 1σ CL. Durante a realização da análise consideramos $\kappa \geq 0$, a fim de sempre manter $G_\kappa \geq 0$. Como podemos notar, ambos resultados são fechados em BG.

Por fim, podemos dizer que neste trabalho, com os formalismos estatísticos não gaussianos, Tsallis e Kaniadakis, podemos modificar o critério de Jeans. Vimos que o limite para a condições de instabilidade de Jeans é coerente com os valores padrões de q e κ da literatura. Também obtemos as expressões para a velocidade do som dentro de cada contexto. Investigamos como os efeitos não gaussianos podem se adequar as massas de 16 aglomerados de galáxias. Descobrimos que o valor de melhor ajuste é completamente compatível com a estatística de BG, mas os efeitos não gaussianos não podem ser descartados com o conjunto atual de dados. Mais especificamente, observamos $(0.943) 0.968 \leq q \leq 1.01 (1.035)$ e $0 \leq \kappa \leq 0.034 (0.054)$ em 1σ (2σ) CL.

4.5 Comentários finais

É bem conhecido que a estatística de BG tem apresentado impossibilidades em descrever vários sistemas físicos, em especial sistemas de longo alcance. Nos últimos anos tem sido difundida a ideia de tentar explicar a força gravitacional com uma força emergente, ou seja, interpretar a dinâmica gravitacional como um sistema termodinâmico e não como um força fundamental da natureza. Várias propostas tem surgido e uma que tem chamado a

atenção da comunidade é a chamada gravitação entrópica de Verlinde. Nesse formalismo proposto por Verlinde a força gravitacional, newtoniana e geral, é obtida basicamente usando o princípio holográfico e a lei de equipartição da energia. Aqui, a termodinâmica desempenha um papel fundamental na descrição de tais cenários. Então podemos nos perguntar: uma vez que a estatística de BG apresenta alguns limites já observados em vários campos da ciência, como podemos testar se a estatística de BG é realmente a melhor descrição termodinâmica para sistemas gravitacionais. Assim, com o advento da gravitação entrópica essa é a melhor maneira de investigar esse ponto.

Nessa seção apresentamos resultados nessa direção, onde usamos estatísticas não gaussianas para investigar um Universo que se expande de forma acelerada em tempos recentes dentro do contexto da estatística de Tsallis e Kaniadakis. Encontramos que a força gravitacional em grande escala depende diretamente dos parâmetros não gaussianos que descrevem essas estatísticas, podendo ser mais forte ou mais fraco em comparação com o cenário BG padrão. Em geral, encontramos que o cenário de Tsallis pode ser melhor que o cenário padrão BG em 68% CL. Mas, fora desse limite o cenário BG é recuperado. Também investigamos como esses cenários não gaussianos podem modificar os critérios de instabilidade de Jeans e aplicamos nosso formalismo a massas de 16 aglomerados de galáxias. Concluímos que o efeito das termodinâmicas não gaussianas não podem ser descartados com os dados atuais de massa de aglomerados. Mais esforços e desenvolvimentos ainda devem ser realizados de modo a verificar qual cenário termodinâmico melhor descreve sistemas gravitacionais, seja dentro de um cenário de gravitação entrópica ou independente disso.

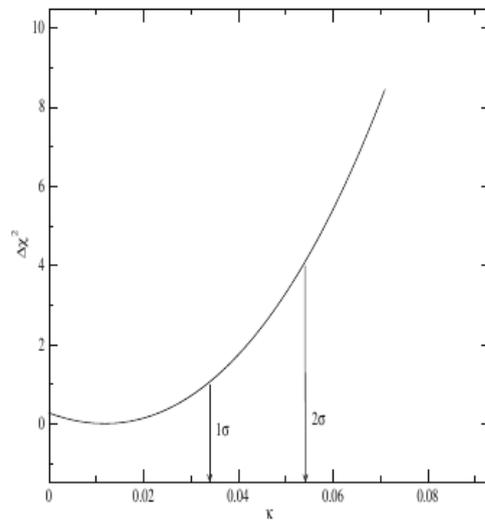


Figura 4.5: Variação de $\Delta\chi^2$ como uma função do parâmetro κ .

Capítulo 5

Aspectos termodinâmicos da energia escura

Neste capítulo vamos investigar os limites impostos pela termodinâmica para um fluido de energia escura. Vamos obter as capacidades de calor e a compressibilidade térmica para um fluido com $w < 0$. É bem conhecido que as estabilidades térmicas e mecânicas exigem que essas quantidades sejam positivas. Vamos mostrar que se fluidos escuros satisfazem essas condições de estabilidade, tal exigência coloca dificuldades sobre tais modelos de fluidos cósmico. Investigaremos também as restrições observacionais impostas por dados de Supernovas tipo Ia (SNIa), oscilações acústicas bariônicas (OAB) e taxa de expansão do universo ($H(z)$) sobre tais fluidos. Em geral, tais fluidos de energia escura com um parâmetro de equação de estado dependente do tempo estão em conflito com as restrições impostas pela termodinâmica. Nossos resultados, dentro do presente desenvolvimento, indicam que os modelos de fluidos de energia escura não são físicos.

Os resultados apresentados a seguir foram publicados em *Physical Review D* **92**, 083526 (2015) [68].

5.1 Mais sobre energia escura

Desde que o modelo Einstein-de Sitter foi descartado pelas observações de SNIa, que apontam para um Universo acelerado nos tempos atuais [22, 23], físicos tem-se tentado encontrar um modelo que se ajuste bem aos dados e ao mesmo tempo possua uma sólida base teórica. Contudo, esta tarefa não é fácil. Normalmente começamos por considerar os modelos mais simples. Assim, a primeira tentativa é re-introduzir Λ nas equações de campo de Einstein. Um termo Λ positivo atua nas equações de movimento como uma força repulsiva e, portanto, pode acelerar o Universo em grande escalas. O chamado modelo Λ CDM é capaz de explicar muito bem grande parte dos dados atuais e tem uma forte interpretação teórica, uma vez que pode ser associado à energia do ponto zero de todos os campos quânticos que preenchem o Universo. Os físicos teriam decidido a favor de Λ se ela não apresentasse um grande problema: o valor da densidade de energia do vácuo obtido pelas observações diferem do valor fornecido pela teoria quântica de campos em pelo menos 60 ordens de grandeza (ver tabela I). Se pensarmos em termos de uma constante cosmológica efetiva onde seu valor é a soma de um termo Λ geométrico com a densidade de energia de vácuo para explicar um valor tão pequeno, isso geraria um problema de *fine-tuning*: o valor absoluto das contribuições geométricas e de matéria para a constante cosmológica (CC) líquida deveria ser extremamente próximo. Além disso, argumentos de simetria não são o suficiente para explicar o pequeno valor da energia de vácuo observado hoje. Outros mecanismos tem sido propostos para explicar a valor da CC, ver [3, 4, 5] para revisão.

A falta de uma explicação razoável para o problema da CC levou os físicos a explorar outras rotas para explicar as atuais observações. A mais simples, embora controversa, é assumir que a energia do vácuo é cancelada por alguma simetria desconhecida na natureza. Em tais cenários, os campos escalares (quintessência, ver capítulo 2) se destacam entre as alternativas para a CC, pois fornecem uma conexão entre física de partículas e cosmologia. Tais campos são também motivados por modelos inflacionários. Mas, a energia

de vácuo ou um campo escalar canônico não são as únicas possibilidades para explicar a aceleração cósmica. Uma grande quantidade de modelos tem sido propostos na literatura para explicar as atuais observações. Ver [24, 25, 26] para revisão.

Em geral, todos os modelos que invocam fontes adicionais de energia para explicar a aceleração cósmica são chamados de energia escura (EE). A maneira mais fácil de implementar a energia escura é através de um fluido escuro. Assumindo que a TRG é a teoria correta de gravitação, um fluido escuro com equação de estado (EdE) $w < -1/3$ é suficiente para gerar um regime acelerado. Em geral, w pode ser constante ou dependente do tempo. Essa abordagem fenomenológica imita a energia do vácuo com $w = -1$. Aqui devemos salientar que a ligação entre a energia de ponto zero de todos os campos da matéria presentes no Universo e a CC vem de um processo de quantização semiclássica, onde os efeitos quânticos são levados em conta apenas no tensor de momentum-energia. Como um fluido definido por uma EdE na forma $p = -\rho$ atua nas equações de campo da mesma maneira que as contribuições da energia do ponto zero, a energia do vácuo é normalmente denominada por EE. Mas, apesar de sua equivalência matemática, um fluido de EE com $w = -1$ é fisicamente distinto da energia de vácuo. Em geral, a energia escura pode ser classificada como quintessência se $-1 < w < -1/3$ ou fantasma se $w < -1$.

Na verdade, se a aceleração do Universo é devida a algum tipo de EE, então é razoável se perguntar: O que é energia escura? A energia de vácuo?, um campo escalar?, ou mesmo qualquer outra forma exótica de matéria?. Os dados observacionais ainda não são precisos e numerosos o suficiente para podermos distinguir entre os vários modelos de EE propostos na literatura. Portanto, precisamos ir mais fundo na teoria a fim de alcançar um melhor entendimento por trás do mecanismo da aceleração cósmica. Nessa direção, a termodinâmica tem um papel importante para investigar EE. As leis da termodinâmica são baseadas em evidências experimentais e elas aplicam-se a todos os tipos de sistemas macroscópicos. Ao contrário da mecânica clás-

sica e do eletromagnetismo, a termodinâmica não prevê valores numéricos específicos para observáveis. A termodinâmica estabelece limites gerais nos processos físicos. O poder da termodinâmica reside na sua generalidade. Assim, explorar o comportamento termodinâmico de fluidos cósmicos que permeiam nosso Universo pode ser uma linha de ataque para revelar a natureza do conteúdo do Universo, particularmente sobre a EE. Por exemplo, a positividade da entropia pode ser uma das principais armas para impor limites a EdE da EE [69, 70]. Aplicar as leis da termodinâmica ao fluido de EE pode nos ajudar a restringir ou mesmo descartar alguns modelos de EE. Abaixo, iremos realizar essa tarefa.

5.2 Termodinâmica de fluidos cósmicos

Vamos considerar uma expansão homogênea e isotrópica do Universo, sendo este preenchido por matéria (bariônica e escura) descrito por um fluido sem pressão ($w = 0$); por radiação descrita por um fluido com $w = 1/3$; e EE descrita por um fluido perfeito com EdE na forma $p = w\rho$. A homogeneidade e a isotropia do Universo implicam que todas as distâncias físicas têm o mesmo fator de escala $a(t)$. Assim, o volume físico do Universo em um dado tempo é $V = a^3V_0$. Em tais modelos, a energia interna de um fluido i pode ser escrita como

$$U_i = \rho_i V. \quad (5.1)$$

Assumindo uma expansão adiabática reversível, a primeira lei da termodinâmica

$$T_i dS_i = dU_i + p_i dV_i, \quad (5.2)$$

leva à chamada equação da continuidade

$$d \ln \rho_i + 3(1 + w_i) d \ln a = 0, \quad (5.3)$$

que expressa a conservação da energia e momento para um dado fluido i . Assumindo que a densidade é uma função da temperatura e do volume, isto é, $\rho_i = \rho_i(T_i, V)$, usando fato de que dS_i é uma diferencial exata, temos

$$d \ln T_i = -3w_i d \ln a, \quad (5.4)$$

ou usando (5.3), para eliminar w_i , encontramos

$$d \ln T_i = d \ln \rho_i + 3d \ln a. \quad (5.5)$$

Integrando a lei de temperatura (5.5), obtemos

$$\frac{T_i}{T_{i,0}} = \frac{\rho_i}{\rho_{i,0}} a^3, \quad (5.6)$$

ou,

$$\frac{p_i V}{w_i T_i} = \frac{p_{i,0} V}{w_{i,0} T_{i,0}} = \text{const.} \quad (5.7)$$

A equação acima generaliza a lei de gases ideais para uma EdE dinâmica. Finalmente, a energia do fluido pode ser escrita em termos da temperatura como

$$U_i = U_{i,0} \frac{T_i}{T_{i,0}}. \quad (5.8)$$

No que se segue, vamos derivar as expressões para a capacidade de calor, compressibilidade e expansibilidade térmica em um Universo em expansão. Estas quantidades termodinâmicas são de fácil acesso sobre qualquer fluido terrestre conhecido.

5.2.1 A capacidade de calor do Universo

A definição termodinâmica da capacidade térmica C_i de um fluido é

$$dQ_i = C_i dT_i, \quad (5.9)$$

onde dT_i é o aumento da temperatura do fluido devido ao calor absorvido $dQ_i = T_i dS_i$. A capacidade calorífica de um fluido será diferente e dependo se o fluido é aquecido á volume constante ou á pressão constante. Da primeira lei de termodinâmica, eq. (5.2), á volume constante, eq. (5.9) torna-se

$$dU_i = C_{iV} dT_i, \quad (5.10)$$

onde

$$C_{iV} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial T_i} \right)_V, \quad (5.11)$$

é a capacidade de calor a volume constante. A capacidade de calor á pressão constante pode ser obtida a partir da entalpia

$$h_i = U_i + p_i V. \quad (5.12)$$

De (5.12), a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como

$$dQ_i = dh_i - V dp_i. \quad (5.13)$$

Assim, á pressão constante a eq. (5.9) torna-se

$$dh_i = C_{pi} dT_i, \quad (5.14)$$

onde

$$C_{pi} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial T_i} \right)_{pi}, \quad (5.15)$$

é a capacidade de calor do fluido á pressão constante. A partir de (5.8), vemos que

$$C_{iV} = \frac{U_{i,0}}{T_{i,0}} = const, \quad (5.16)$$

para qualquer componente do Universo. Sendo, $p_i V = w_i U_i$, a entalpia (5.12) torna-se

$$h_i = (1 + w_i)U_i, \quad (5.17)$$

e, por (5.8) e (5.4), temos

$$C_{pi} = \left(1 + w_i - \frac{1}{3} \frac{d \ln |w_i|}{d \ln a}\right) C_{iV} \quad (5.18)$$

Uma vez que $U_{i,0} = \rho_{i,0}V_0$, o calor específico (a capacidade de calor por unidade de massa) á volume constante é

$$c_{iV} = \frac{C_{iV}}{\rho_{i,0}V_0} = \frac{1}{T_{i,0}}. \quad (5.19)$$

Para fótons, $T_{r,0} = 2.724$ K. Assim, c_V and c_p são da ordem de $\sim 10^{13}$ cal/g/K. Uma vez que a temperatura das outras componentes deve ser muito menor que a temperatura dos fótons, o calor específico da matéria sem pressão é um limite inferior para a capacidade de calor do Universo. Como esperado, esse resultado mostra que o Universo é um grande reservatório térmico. Infelizmente, apesar das experiências serem de fácil acesso para fluidos terrestres, não podemos isolar uma parte cosmológicamente significativa do Universo para fornecer uma enorme quantidade de calor e medir a mudança de temperatura da nossa amostra do Universo para se obter experimentalmente seu calor específico.

5.2.2 Compressibilidade e expansibilidade

Se consideramos o volume como a função da temperatura e pressão, temos

$$dV = \sum_i \left[\left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \right)_{pi} dT_i + \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)_{Ti} dp_i \right]. \quad (5.20)$$

Podemos definir a expansividade térmica, que mede a alteração relativa do volume em relação a temperatura á pressão constante, por

$$\alpha_i = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \right)_{pi}, \quad (5.21)$$

e a compressibilidade isotérmica, que mede a alteração relativa do volume em relação à pressão e à temperatura fixa por

$$\kappa_i = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p_i} \right)_{T_i}. \quad (5.22)$$

Analogamente à compressibilidade isotérmica, podemos definir a compressibilidade adiabática, κ_{Si} , se em vez da temperatura, a entropia for mantida constante. Pode ser mostrado que a compressibilidade isotérmica e a expansibilidade térmica, a compressibilidade adiabática estão conectadas por

$$\frac{\alpha_i}{\kappa_{Ti}} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial T_i} \right)_V, \quad (5.23)$$

e que a relação entre as compressibilidades adiabática e isotérmica são iguais a razão entre a capacidade de calor à volume constante e à pressão constante, isto é,

$$\frac{\kappa_{Si}}{\kappa_{Ti}} = \frac{C_{iV}}{C_{pi}}. \quad (5.24)$$

Observando que $p_i V = w_i C_{iV} T_i$ e usando (5.4), temos

$$\alpha_i = \frac{C_{iV}}{p_i V} \left(w_i - \frac{1}{3} \frac{d \ln |w_i|}{d \ln a} \right). \quad (5.25)$$

A partir de (5.23), encontramos

$$\kappa_{Ti} = \frac{\alpha_i V}{w_i C_{iV}}, \quad (5.26)$$

e a partir das equações acima e (5.24), temos

$$\kappa_{Si} = \frac{\alpha_i V}{w_i C_{pi}}. \quad (5.27)$$

5.2.3 Condições de estabilidade

Um sistema termodinâmico envolvendo apenas o trabalho devido à mudança em seu volume, estará em equilíbrio se a variação de segunda ordem dado por

$$\delta^2 U_i = \delta T_i \delta S_i - \delta p_i \delta V, \quad (5.28)$$

for maior que zero, ou seja, $\delta^2 U_i > 0$. Caso contrário a estabilidade termodinâmica não será atingida. Se T_i e V são variáveis independentes, podemos escrever a equação acima na forma

$$\delta^2 U_i = \frac{C_{iV}}{T_i} \delta T_i^2 + \frac{1}{V \kappa_{Ti}} \delta V^2. \quad (5.29)$$

Também, tomando S_i e p_i como variáveis independentes, eq. (5.28) torna-se

$$\delta^2 U_i = \frac{T_i}{C_{pi}} \delta S_i^2 + V \kappa_{Si} \delta p_i^2. \quad (5.30)$$

É fácil ver que para um fluido cósmico que obedece estabilidade termodinâmica, ou seja, $\delta^2 U_i \geq 0$, (5.29) e (5.30) implicam que

$$C_{iV}, C_{pi}, \kappa_{Ti}, \kappa_{Si} \geq 0, \quad (5.31)$$

simultaneamente. Por outro lado, se a estabilidade não é alcançada, isto é, $\delta^2 U_i < 0$, a capacidade de calor e a compressibilidade são negativas simultaneamente. De acordo com (5.16), C_{iV} é constante e positiva para qualquer fluido, mostrando que as componentes do Universo, vistas como fluidos não interagentes, são necessariamente limitadas por (5.31). A positividade da capacidade calorífica está relacionada à estabilidade térmica, e a positividade da compressibilidade está relacionada à estabilidade mecânica. Além disso, podemos mostrar que C_{iV} , C_{pi} , κ_{Ti} , κ_{Si} estão relacionadas por

$$C_{pi} = C_{iV} + \frac{TV\alpha_i^2}{\kappa_{Ti}}, \quad (5.32)$$

e

$$\kappa_{Ti} = \kappa_{Si} + \frac{TV\alpha_i^2}{C_{pi}}. \quad (5.33)$$

Portanto, uma vez que o sistema satisfaz às condições de estabilidades (5.31), temos que

$$C_{pi} \geq C_{iV} \text{ e } \kappa_{Ti} \geq \kappa_{Si}. \quad (5.34)$$

5.3 Vínculos observacionais independentes de modelo para energia escura

Iremos agora obter vínculos observacionais independentes de modelo para a EdE e comparar com os resultados desenvolvidos anteriormente. A partir de (5.18) e (5.25) podemos ver que as condições (5.31) e (5.34) são somente satisfeitas se a EE com EdE obedecer o vínculo teórico

$$w_i - \frac{1}{3} \frac{d \ln |w_i|}{d \ln a} \geq 0. \quad (5.35)$$

É óbvio que se w é uma constante, as estabilidades térmica e mecânica imediatamente implicam em $w_i \geq 0$. Esse resultado implica que pressões homogêneas negativas para EdE são não físicas.

Isso não significa que a energia do vácuo não pode ser a quantidade física responsável pela aceleração cósmica. Como já ressaltamos, embora matematicamente equivalentes, fisicamente um fluido com pressão $p = -\rho$ é bastante diferente da energia do vácuo. Portanto, se a expansão acelerada do Universo é causada por um fluido escuro (isto é, EE com fluido), o parâmetro de EdE deve ser dependente do tempo. Na tabela II, listamos alguns modelos de EdE dependente do tempo. Embora em excelente acordo com os dados observacionais, esses modelos fenomenológicos não satisfazem os limites termodinâmicos dados por (5.35).

Uma que vez w evolui no tempo, podemos usar (5.3) e re-escrever (5.35) como

$$3 + \frac{d \ln \rho_{EE}}{d \ln a} \leq \frac{d \ln |w_i|}{d \ln a}. \quad (5.36)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, temos

$$\left| \frac{w_i}{w_0} \right| \leq \frac{\rho_{EE,0}}{\rho_{EE} a^3} = \frac{T_{EE,0}}{T_{EE}}, \quad (5.37)$$

onde usamos (5.6). De acordo com (5.4) a temperatura do fluido aumentará (diminuirá) com a expansão do Universo se $w < 0$ ($w > 0$). O vínculo (5.37) revela que uma expansão acelerada eterna não pode ser sustentada por um fluido de EE. Se $w < 0 \forall a \geq 1$, $T_{EE}(a \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ e $|w(a \rightarrow \infty)| \rightarrow 0$, que significa que a expansão acelerada tem que parar no futuro. Por outro lado, se o sinal de w mudar no curso da expansão, o Universe pode entrar e sair em uma expansão acelerada que depende de quantas vezes o sinal de w irá mudar, mas não pode manter uma fase de expansão de acelerada para sempre.

Analizando (5.35) no presente momento, ou seja, em $z = 0$ temos

$$w'_0 \geq 3w_0^2. \quad (5.38)$$

A relação acima é muito importante, uma vez que ela representa um vínculo teórico sobre a dinâmica de EE. Para verificar a compatibilidade dos dados observacionais com a restrição termodinâmica acima (5.38), seguimos o desenvolvimento apresentado em [71], que é um dos métodos menos dependentes do modelo para investigar a evolução temporal da EdE da EE. Essa aproximação consiste em assumir que a densidade de EE admite uma expansão de Taylor no intervalo $(\tilde{a} - \epsilon, \tilde{a} + \epsilon)$, ou seja,

$$\rho_{EE}(a) = \rho_{EE}(\tilde{a}) + \frac{d\rho_{EE}}{da}(a - \tilde{a}) + \frac{d^2\rho_{EE}}{d^2a}(a - \tilde{a})^2 + \dots, \quad (5.39)$$

onde as derivadas acima são avaliadas em $a = \tilde{a}$. Usando a equação de conservação (5.3), temos

$$\frac{d\rho_{EE}}{da} = -\frac{3}{a}(1+w)\rho_{EE}, \quad (5.40)$$

e

$$\frac{d^2\rho_{EE}}{d^2a} = \left[\frac{3}{a^2}(1+w) + \frac{9}{a^2}(1+w)^2 - \frac{3}{a} \frac{dw}{da} \right] \rho_{EE}, \quad (5.41)$$

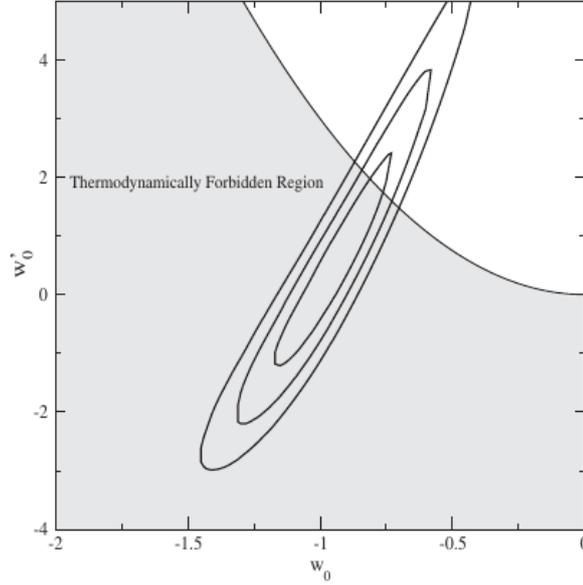


Figura 5.1: O espaço paramétrico $w_0 - w'_0$ em 1σ C. L, 2σ C. L e 3σ C. L. A região termodinamicamente proibida corresponde a pontos no espaço de fase para os quais a desigualdade (5.35) não está satisfeita.

e analogamente para ordens superiores.

Esta abordagem nos permite restringir w e suas derivadas em diferentes *redshifts*. Uma vez que para valores suficientemente pequenos de ϵ a aproximação de segunda ordem deve funcionar razoavelmente bem. Restringimos nossa análise até a expansão de segunda ordem em ρ_{EE} e em torno de $\tilde{a} = a_0 = 1$. Dessa forma, escolhendo a expansão centrada em a_0 , a densidade de energia da EE torna-se

$$\rho_{EE}(a) = \rho_{EE,0} \left\{ 1 + 3(1 + w_0)(1 - a) + \frac{1}{2} [3(1 + w_0) - 3w'_0 + 9(1 + w_0)^2(1 - a)^2] \right\} \quad (5.42)$$

A Figura 5.1 mostra os vínculos observacionais em 68%, 95% e 99% C. L sobre w_0 e w'_0 considerando um Universo plano, homogêneo e isotrópico com matéria relativística, matéria não relativística, e um fluido de EE como

descrito por (5.42) obtidos usando dados de 580 SNIa a partir da compilação Union 2.1, 6 medidas de OAB, e 28 medidas da função de Hubble. Esse dados est ao apresentados no apêndice A. Aqui, o presente valor do parâmetro de Hubble H_0 e a densidade de matéria são marginalizados. Para essa combinação de dados, encontramos $w_0 = -0.96^{+0.22}_{-0.21}$ e $w'_0 = -0.33^{+2.00}_{-1.53}$ em 68% C. L. Como podemos ver, uma larga porção do espaço paramétrico $w_0 - w'_0$ representa um região não física imposta pela condição termodinâmica $w'_0 \geq 3w_0$. No entanto, se a EE não pode ser descrita como um fluido com pressão negativa, não se deve esperar que os dados sigam as propriedades físicas apresentadas aqui.

5.4 Comentários gerais

O que está causando a expansão acelerada do Universo? É a EE ou é porque a TRG não funciona bem em grandes escalas? Os físicos têm trabalhando em ambas as frentes para responder essa pergunta. Particularmente, do lado da EE, muitos modelos foram propostos na literatura. No desenvolvimento deste capítulo, acreditamos ter dado um grande passo na compreensão da atual fase de expansão acelerada do Universo. Investigamos os aspectos termodinâmicos de um Universo isotrópico e homogêneo em expansão, preenchido por matéria (bariônica mais escura), matéria relativística (radiação mais neutrinos) e um modelo geral de EE. Ao considerar que os componentes cósmicos são como fluidos perfeitos, estimamos o calor específico do Universo e examinamos os vínculos impostos pela termodinâmica clássica sobre EE. Mostramos como tais fluidos cósmicos devem se vinculados via as estabilidades termodinâmicas. Tal requisito implica que a pressão negativa com um parâmetro de EdE constante não são físicos. Mostramos que as restrições observacionais de um fluido EE com um parâmetro de EdE dependente do tempo estão em conflito com as restrições físicas impostas pela termodinâmica. Este resultado sugere que a adição de um fluido de EE ao conteúdo do Universo pode não ser a resposta para problema da aceleração cósmica.

Embora nossa análise implique que um $w = -1$ não seja físico, a energia de vácuo permanece intocada, uma vez que é fisicamente diferente de um fluido de EE com $p = -\rho$.

Se ignorarmos o problema da CC ao definir $\rho_\Lambda = 0$, então a aceleração cósmica devido a algum tipo de fluido de EE não parece ser uma boa maneira de resolver o problema. Fazendo isso, estamos substituindo uma explicação fisicamente bem motivado por uma hipótese de que, pelo menos na sua mais simples formulação não está de acordo com os princípios básicos da física. No entanto, ainda permanece uma questão: a CC é a melhor explicação para a expansão acelerada? O termo Λ certamente é a solução mais simples, mas ninguém pode garantir que seja essa a verdadeira resposta. Campos escalares e outros modelos que não requerem fontes adicionais de energia, tais como gravidade modificada, são possíveis candidatos a explicar os presentes dados observacionais.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Na ausência de uma fundamentação teórica para explicar o atual estágio de expansão acelerada do Universo tem surgido ao longo dos últimos anos vários modelos cosmológicos com o intuito de resolver tal problema. Com o crescente número de dados astrofísicos coletados podemos impor limites aos parâmetros cosmológicos e estudar o comportamento físico das componentes energéticas do Universo e assim ter um melhor entendimento acerca destes cenários e buscar qual modelo decreve melhor o Universo observado. Dentro da fenomenologia de cenários que tentam explicar a aceleração cósmica temos duas grandes frentes de batalha. A adição de uma componente exótica de energia com pressão negativa ou podemos também obter um regime acelerado considerando novos graus de liberdade gravitacionais, ou seja, modificando a TRG sobre grandes escalas.

Nesta tese aplicamos alguns fundamentos termodinâmicos para investigar a dinâmica do Universo bem como as propriedades da energia escura. Primeiramente, consideramos duas formulações termodinâmicas não-gaussianas bem conhecidas chamadas de estatísticas não-gaussianas de Tsallis e Kaniadakis dentro de um cenário de gravitação entrópica e investigamos seus efeitos em um Universo plano de tipo FRW. Usando o formalismo entrópico do Verlinde, obtemos uma modificação na constante de gravitação que depende diretamente dos parâmetros característicos de cada termodinâmica

não-gaussiana. Encontramos que o campo gravitacional em grandes escalas pode ser mais fraco ou forte do que a previsão padrão, requerendo assim mais ou menos energia escura para acelerar o Universo em tempos recentes na história cósmica. Concluimos que a estatística de Tsallis é um pouco favorecida (em 68% CL) em comparação com a estatística padrão de Boltzmann-Gibbs. Em geral, dentro da nossa análise notamos que ambos cenários não-gaussianos aqui investigados são fechados em Boltzmann-Gibbs para uma maior confiabilidade estatística mas, os presentes dados ainda não são capazes de distinguir entre os efeitos não-gaussianos e a estatística de Boltzmann-Gibbs. Também investigamos como esses cenários não-gaussianos podem modificar os critérios de instabilidade gravitacional de Jeans e aplicamos nosso formalismo á massas de 16 aglomerados de galáxias. Concluimos que os efeitos da termodinâmica não gaussiana não podem ser descartados com esse conjunto atual de dados de massa de aglomerados. No capítulo 5, investigamos os limites impostos pelas condições de estabilidade termodinâmica para um fluido de energia escura e mostramos que se fluidos escuros com $w < 0$ satisfazem essas condições de estabilidade, tal exigência coloca dificuldades sobre a existência de tais modelos de fluidos cósmico, dentro das perspectivas aqui desenvolvidas. Comparando nossos limites termodinâmicos com os limites observacionais notamos que uma porção muito significativa do espaço paramétrico da energia escura é excluído devido as restrições termodinâmicas (ver figura 5.1). Acreditamos esse ser um passo importante na modelagem real/fenomenológica da energia escura.

A termodinâmica sem dúvida apresenta importantes ferramentas para investigar sistemas fenomenológicos e a partir disso restringir um determinado mecanismo físico ou fenômeno a partir de suas leis. Como perspectivas futuras pretendemos investigar os limites impostos pela termodinâmica em cenários de gravidade modificada. Dentro do contexto das estatísticas não-gaussianas temos motivações iniciais para investigar dados de colisões de partículas do tipo próton-próton e elétron-pósitron, como medidos pelo LHC, por exemplo. É bem conhecido que tais distribuições de momentos nessas colisões não

podem ser ajustados por uma distribuição gaussiana. Assim, acreditamos que essa proposta também pode ser outro bom laboratório para investigar efeitos não gaussianos.

Apêndice A

Análise Estatística e Testes Cosmológicos

Precisamos definir uma função que quantifique a concordância entre um modelo teórico e os dados observacionais para que, maximizando a concordância, possamos obter os parâmetros que melhor ajustam o modelo. Supondo que nossas observações tenham erros gaussianos não correlacionados, podemos estimar o melhor ajuste para o conjunto de parâmetros $\{x_i\}$ definindo uma função de probabilidade

$$\mathcal{L} \propto \exp[-\chi^2/2], \quad (\text{A.1})$$

onde χ^2 é dado por

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{[D(x_i) - y(x_i | \theta)]^2}{\sigma_i}, \quad (\text{A.2})$$

sendo n o número total de dados e y nos fornece a previsão do modelo ao fixar valores dos parâmetros representados por $\theta = \{\theta_j\}$.

Podemos verificar que, neste caso, os parâmetros que minimizam a função χ^2 são os mesmos que maximizam a probabilidade. Logo, os parâmetros que melhor ajustam são aqueles que têm maior probabilidade de serem os verdadeiros, de acordo com os dados coletados.

Nº de parâmetros	1σ	2σ	3σ
1	1	4	9
2	2,30	6,17	11,80
3	3,53	8,02	14,2

Tabela A.1: $\Delta\chi^2$ com função de nível de confiança e do número de parâmetros livres.

Conhecendo o valor mínimo χ_{min}^2 , associamos os pontos no espaço paramétrico dentro de uma região que podemos fazer variações $\Delta\chi^2$ tal que, $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$, com essas variações podemos obter regiões relacionadas com uma probabilidade que vai depender da quantidade de parâmetros livres. Destacamos os níveis referentes a 1σ , 2σ e 3σ na Tabela A.1.

A.1 SNIa

A informação proveniente das supernovas do tipo Ia (SNIa) são uma ferramenta importante para compreender a evolução recente do universo. Nesta tese, adotamos os dados da compilação Union 2.1 [72], contendo 580 SNs Ia no intervalo de *redshift* $0.015 \leq z \leq 1.41$. O módulo de distância teórico previsto para uma dada SNIa é escrito na forma

$$\mu_i^{th}(z_i) = 5 \log H_0 d_L(z_i) + 5 \log(3/h) + 40, \quad (\text{A.3})$$

onde $h = H_0/100 \text{ Km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ e

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (\text{A.4})$$

é a distância luminosidade para um Universo espacialmente plano.

A discrepância entre teoria e observação será quantificada pela função

$$\chi_{SN}^2 = \sum_i \frac{(\mu_i^{th} - \mu_i^{obs})^2}{\sigma_{\mu_i}^2}, \quad (\text{A.5})$$

onde μ_i^{obs} é o valor observado para o módulo de distância em uma dada *redshift* z_i e σ_{μ_i} são as incertezas nas medidas.

O melhor ajuste ocorre para valores do conjunto de parâmetros livres que minimizam (A.5). Após uma marginalização sobre H_0 , a função χ_{SN}^2 é escrita como

$$\chi_{SN}^2 = A - \frac{B^2}{C}, \quad (\text{A.6})$$

onde as quantidades A , B , e C são dadas por,

$$A = (\mu_i^{th} - \mu_i^{obs}) (C_{SN}^{-1})_{ij} (\mu_j^{th} - \mu_j^{obs}), \quad (\text{A.7})$$

$$B = \sum_i (C_{SN}^{-1})_{ij} (\mu_j^{th} - \mu_j^{obs}), \quad (\text{A.8})$$

e

$$C = \sum_{ij} (C_{SN}^{-1})_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

sendo $(C_{SN}^{-1})_{ij}$ o inverso da matriz de covariância.

A.2 Oscilações acústicas bariônicas (OAB)

Oscilações acústicas bariônicas (OAB) recentemente observadas na função de correlação de galáxias também é uma poderosa ferramenta para explorar a energia escura e restringir parâmetros cosmológicos [73, 74, 75]. Antes do Universo ter se resfriado o suficiente para formar átomos neutros, ele consistia em um plasma quente e denso de fótons, elétrons, prótons e núcleos leves. O acoplamento forte entre fótons e os bárions devido ao espalhamento Thompson produz oscilações no plasma quente. A matéria escura é fria, assim ela praticamente não se propaga enquanto que a perturbação nos neutrinos, já desacoplados, segue livre com velocidade próxima a da luz e tende a diluir-se. Já a perturbação no plasma fóton-bárion propaga-se como uma onda sonora com uma velocidade, $c_s = c/3(1 + 3\rho_b/\rho_\gamma)$, afastando-se do centro, onde há uma maior concentração de matéria escura.

Quando o Universo atinge uma temperatura $T \approx 0.3$ eV, a matéria bariônica forma átomos neutros e, conseqüentemente, os fótons desacoplam, dando origem a RCF. Após esse desacoplamento, não há mais a pressão da radiação sobre os bárions e, assim, estes não mais se propagam como uma onda acústica, ou seja, os bárions estacionam depois do desacoplamento. Os bárions são então influenciados, e influenciam também, a matéria escura, participando do processo de formação das estruturas em grandes escalas.

O horizonte acústico (distância percorrida por essa onda acústica até a recombinação), fica impresso na RCF como uma anisotropia primária mas, aparece também como um pequeno excesso de densidade na distribuição de bárions na escala desse horizonte acústico (150 Mpc). A escala das OABs pode ser medida em vários valores de z a partir da correlação de galáxias nas direções ao longo da linha de visada [proporcional a $1/H(z)$] e transversal proporcional à, $d_A(z)$], nos dando informação sobre a história da expansão cósmica. A medida das OABs pode ser quantificada por um parâmetro A , que é independente de modelos cosmológicos e, para um Universo plano, pode ser expresso como

$$A(z_{BAO}, \mathbf{p}) = \sqrt{\Omega_{m,0}} E(z_{BAO})^{-1/3} \left[\frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz'}{E((z'), \mathbf{p})} \right]^{2/3}. \quad (\text{A.10})$$

Utilizamos nesta tese medidas do parâmetro A obtidas em [80]. Para as OABs, o chi-quadrado será

$$\chi_{BAO}^2(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^6 \frac{[A^{obs}(z_{BAO}) - A^{th}(z_{BAO}, \mathbf{p})]^2}{\sigma(z_{BAO})^2}. \quad (\text{A.11})$$

A.3 Parâmetro de Hubble

Observações do parâmetro Hubble podem ser obtidas usando idades diferenciais de galáxias

$$H = -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (\text{A.12})$$

Usamos dados observacionais de amostra compilada em [77] no capítulo 3 e [78, 79] no capítulo 4. O chi-quadrado é dado por

$$\chi_H^2 = \sum_1^N \frac{[H^{obs}(z_i) - H^{th}(z_i, \mathbf{p})]^2}{\sigma(z_i)^2}, \quad (\text{A.13})$$

onde $H^{th}(z)$ e $H^{obs}(z)$ são os valores teóricos e os observados da função Hubble, σ indica o erro observado em cada medida.

A.4 Função de crescimento

Na teoria de perturbação cosmológica linear, a evolução das perturbações na ausência de pressão é reduzida para a superposição de dois modos com correção na dependência no tempo e na dependência espacial. O comportamento destes modos no tempo é uma função dos parâmetros cosmológicos e essa função que descreve esse comportamento é a chamada função de crescimento. Na teoria linear de formação de estruturas, as perturbações de densidade na matéria satisfazem

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_m\rho = 0, \quad (\text{A.14})$$

onde ρ_m é a densidade de matéria gravitante. Definindo a função de crescimento como $f = d \ln \delta / d \ln a$, a equação acima pode ser re-escrita na forma

$$f' + f^2 + \left(\frac{\dot{H}}{H^2}\right)f = \frac{3}{2}\Omega_m, \quad (\text{A.15})$$

onde $f' = df/d \ln a$.

A equação acima contém informações sobre a evolução das perturbações lineares da matéria com a função do tempo cósmico. Vários levantamentos de dados da distribuição de matéria em grandes escalas tem sido realizado nos últimos anos para medir a função f e a partir dela obter informações sobre matéria escura, energia escura, possíveis desvios da relatividade geral, física de neutrinos, etc. Na tabela a seguir, apresentamos uma compilação de medidas de f que foram utilizadas no capítulo 3.

Tabela A.2: Compilação dos dados observacionais da função de crescimento utilizados no capítulo 3.

z	f	σ_f	Ref.
0.02	0.482	0.09	[81]
0.067	0.56	0.11	[82]
0.11	0.54	0.21	[83]
0.15	0.49	0.14	[84]
0.15	0.51	0.11	[85]; [86]
0.22	0.60	0.10	[87]
0.32	0.654	0.18	[88]
0.34	0.64	0.09	[89]
0.35	0.70	0.18	[90]
0.41	0.70	0.07	[87]
0.42	0.73	0.09	[91]
0.55	0.75	0.18	[92]
0.59	0.75	0.09	[91]
0.60	0.73	0.07	[87]
0.77	0.91	0.36	[84]
0.78	0.70	0.08	[87]
1.4	0.90	0.24	[93]
2.125	0.78	0.24	[94]
2.72	0.78	0.24	[94]
3.0	0.99	0.24	[83]

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber **142** (1917).
- [2] Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, Astronomy & Astrophysics A13 **594** (2016).
- [3] S. M. Carroll, Living Rev. Rel. **4** 1 (2001).
- [4] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61** 1 (1989).
- [5] T. Padmanabhan, Phys. Rept. **380** (2003).
- [6] A. Einstein, Ann. Physik **17** , 891 (1905).
- [7] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber **844** (1915).
- [8] R. d’Inverno, Introducing Einstein’s Relativity, Oxford University Press, New York, UK, 1992.
- [9] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley, New York, USA, 1972.
- [10] S. Carrol, Lecture Notes on General Relativity, University of California, USA, 1997.
- [11] R. Barbara, Introduction to Cosmology, Addison Wesley, USA, 2006.
- [12] V. Mukhanov Physical Foundations of Cosmology, Cambridge University Press, UK, (2015).

- [13] A. G. Riess et. al., A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant, arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO].
- [14] J. D. Jackson, Eletrodinâmica Clássica, Guanabara Dois, 1983.
- [15] T. Rauscher , A. Patkós, Origin of the Chemical Elements.
- [16] K. A. Olive, G. Steigman, and T. P. Walker, Primordial Nucleosynthesis: Theory and Observations, arXiv:astro-ph/9905320v1, 1999.
- [17] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophysical Journal 142 (1965).
- [18] WMAP Collaboration, Nine-Year Wilkinson microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: cosmological Parameter Results, arXiv:1212.5226v1, 2012.
- [19] S. Dodelson, Modern cosmology, Elsevier (2013).
- [20] T. Padmanabhan, Structure Formation in the Universe, Cambridge University Press (1995).
- [21] A. R. Liddle and D. H. Lyth, The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [22] Permuter S. et. al., Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, Astronomical. Journal, (1999).
- [23] Riess A. G et. al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Astronomical. Journal, 1998.
- [24] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15** (2006).
- [25] L. Amendola and S. Tsujikawa, Dark Energy (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010 and 2015).

- [26] J. Yoo and Y. Watanabe, *Int. J. Mod. Phys. D* **21**, 1230002 (2012).
- [27] E. V. Linder, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008).
- [28] S. Tsujikawa, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013).
- [29] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007).
- [30] S. Capozziello and M. De Laurentis, *Phys. Rept.* **509**, 167 (2011).
- [31] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010).
- [32] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** 451 (2010).
- [33] R. C. Nunes, S. Pan, E. N. Saridakis, and E. M. C. Abreu, *JCAP* **1701** 01, 005 (2017).
- [34] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, Springer, Dordrecht (2013).
- [35] G. R. Bengochea and R. Ferraro, *Phys. Rev. D* **79**, 124019 (2009).
- [36] E. V. Linder, *Phys. Rev. D* **81**, 127301 (2010).
- [37] R. C. Nunes, S. Pan, and E. N. Saridakis, *JCAP* **1608** 08, 011 (2016).
- [38] R. C. Nunes, E. M. Barboza, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *JCAP* **1608** 08, 051 (2016).
- [39] E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and R. C. Nunes, *Physica A*, **441** (2015).
- [40] E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and R. C. Nunes, *EPL* **114** 5, 55001 (2016).
- [41] Constantino Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer (2009).

- [42] <http://tsallis.cat.cbpf.br/TEMUCO.pdf>
- [43] R. Silva, A. R. Plastino and J. A. S. Lima, Phys. Lett. A **249** 401 (1998);
A. R. Plastino and J. A. S. Lima, Phys. Lett. A **260** 46 (1999).
- [44] A. M. Teweldeberhan, H. G. Miller and R. Tegen, Int. J. Mod. Phys E **12** 669 (2003).
- [45] A. Rossani and A. M. Scarfone, J. Phys. A: Math Gen. **37** 4855 (2004).
- [46] D. Rajaonarison, D. Bolduc and H. Jayet, Econ. Lett. **86** 13 (2005).
- [47] E. P. Bento, J. R. P. Silva and R. Silva, Physica A **392** 666 (2013).
- [48] G. Kaniadakis, Phys. Rev. E **66** 056125 (2002).
- [49] E. M.C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Barboza, and R. C. Nunes, Physica A **441** 141-150 (2016).
- [50] G. Kaniadakis, Physica A **296** 405 (2001).
- [51] G. Kaniadakis and A. M. Scarfone, Physica A 305 (2002) 69; G. Kaniadakis, P. Quarati and A. M. Scarfone, Physica A 305 (2002) 76.
- [52] E. Verlinde, JHEP **1104**, 029 (2011).
- [53] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [54] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [55] T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **75**, 1260 (1995).
- [56] T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **81**, 124040 (2010).
- [57] D. A. Easson, P. H. Frampton, and G. F. Smoot, Phys. Lett. B **696**, 273 (2011). D. A. Easson, P. H. Frampton, and G. F. Smoot, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250066 (2012).
- [58] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

- [59] M. P. Dabrowski, H. Gohar, V. Salzano, *Entropy* **18** 2, 60 (2016); N. Komatsu and S. Kimura, *Phys. Rev. D* **88**, 083534 (2013); N. Komatsu and S. Kimura, *Phys. Rev. D* **93**, 043530 (2016); N. Komatsu and S. Kimura, *Phys. Rev. D* **90**, 123516 (2014); H. Moradpour, arXiv: 1601.05014 [gr-qc] (2016); S. Basilakos and J. Sola, *Phys. Rev. D* **90**, 023008 (2014)]; Y. F. Cai, J. Liu, and H. Li, *Phys. Lett. B* **690** 213 (2010); D. A. Easson, P. H. Frampton, and G. F. Smoot, *Phys. Lett. B* **696**, 273 (2011); D. A. Easson, P. H. Frampton, and G. F. Smoot, *Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1250066 (2012).
- [60] E. M. Barboza Jr., R. C. Nunes, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *Physica A* **436** 301 (2015).
- [61] E. M. C. Abreu, J. Ananias Neto, A. C. R. Mendes and W. Oliveira, *Physica A* **392**, 5154 (2013).
- [62] E. P. Verlinde, *SciPost Phys.* 2, 016 (2017), arXiv:1611.02269 [hep-th].
- [63] C. Clarke and R. Carswell, "Astrophysical Fluid Dynamics," Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [64] A. R. Plastino and J. A. S. Lima, *Phys. Lett. A* 260 (1999) 46.
- [65] D. Giulini, *Phys. Lett. A* 320 (2004) 347.
- [66] R. Carlberg, H. K. C. Yee, E. Ellingson, R. Abraham, P. Gravel, S. Morris, and C. J. Pritchett, *Astrophys. J.* 462 (1996) 32.
- [67] D. Giulini, *Astrophys. Space Sci.* 312 (2007) 47.
- [68] E. M. Barboza Jr., R. C. Nunes, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto, *Phys. Rev. D* **92**, 083526 (2015).
- [69] J. A. S. Lima and J. S. Alcaniz, *Phys. Lett. B* **600**, 191 (2004)
- [70] H. H. B. Silva, R. Silva, R. S. Gonçalves, Z.-H. Zhu, and J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **88**, 127302 (2013).

- [71] E. M. Barboza Jr. and J. S. Alcaniz, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** 042 (2012).
- [72] N. Suzuki *et al.*, (The Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **746**, (2012).
- [73] C. Blake *et al.*, *MNRAS* **418**, 1707 (2011).
- [74] D. J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* **633** (2005).
- [75] B. A. Bassett, R. Hlozek, "Baryon Acoustic Oscillations", arXiv:0910.5224v1 (2009).
- [76] C. Blake *et al.*, *MNRAS* **418**, 1707 (2011).
- [77] M. Moresco *et al.* *JCAP* **05**, 014 (2016).
- [78] Kai Liao *et al.*, *Phys. Lett. B* **718**, 1166 (2013).
- [79] O. Farooq and B. Ratra, *Astrophys. J.* **766**, L7 (2013).
- [80] C. Blake *et al.*, *MNRAS* **418**, 1707 (2011).
- [81] M. Davis *et al.*, *MNRAS* **413**, 2906 (2011).
- [82] F. Beutler *et al.*, *MNRAS* **423**, 3430 (2012).
- [83] R. Bielby *et al.*, *MNRAS* **430**, 425 (2013).
- [84] L. Guzzo *et al.*, *Nature* **451**, 541 (2008).
- [85] L. Verde *et al.*, *MNRAS* **335**, 432 (2002).
- [86] E. Hawkins *et al.*, *MNRAS* **346**, 78 (2003).
- [87] C. Blake *et al.*, *MNRAS* **415**, 2876 (2011).
- [88] R. Reyes *et al.*, *Nature* **464**, 256 (2010).
- [89] A. Cabré and E. Gatañaga, *MNRAS* **393**, 1183 (2009).

- [90] M. Tegmark *et al.* Phys. Rev. D **74**, 123507 (2006).
- [91] C. Blake *et al.*, MNRAS **406**, 803 (2010).
- [92] N. P. Ross *et al.*, MNRAS **381**, 573 (2007).
- [93] J. da Angela *et al.*, MNRAS **383**, 565 (2008).
- [94] M. Viel, M. G. Haehnelt and V. Springel, MNRAS **354**, 684 (2004).