

Patrick Paolo Silva

**Formulação Lagrangeana para um fluido compressível -
Geração de helicidade e vorticidade**

JUIZ DE FORA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

Patrick Paolo Silva

**Formulação Lagrangeana para um fluido compressível -
Geração de helicidade e vorticidade**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Juiz de Fora como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física para obtenção do título de *Mestre em Física*.

Orientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes

JUIZ DE FORA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

Dedico este trabalho à minha família e amigos.

“Not every solution of equations of motion can actually occur in Nature, even if it is exact. Those which do actually occur, not only must obey the equations of fluid dynamics, but must be also stable.”

Landau, LD and Lifshitz, EM, 1987, Fluid Mechanics, 2nd edition.

Agradecimentos

A Deus, que sempre me deu forças para superar os desafios ao longo do caminho.

À meu Pai Edison Jacy da Silva e à minha Mãe Maria de Marilack Pires Silva por todo suporte em minha jornada de estudos;

À meu irmão Raphael Pires da Silva e à minha irmã Paloma Juliana Silva por todo apoio em minha jornada de estudos;

Ao professor Albert Carlo Rodrigues Mendes, pela orientação, apoio, confiança e paciência.

À todos os meus amigos por contribuírem de maneira direta ou indireta para a elaboração deste trabalho;

Ao departamento de física da Universidade Federal de Juiz de Fora por ceder os meios mínimos necessários para a realização deste trabalho;

Ao secretário da pós graduação Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes pela dedicação e empenho aos assuntos referentes à pós graduação;

Aos funcionários responsáveis pela limpeza das dependências do departamento;

À todos os integrantes da sala 6 dos alunos da pós graduação. Certamente a sala mais ousada;

À CAPES pelo apoio financeiro;

À todo o corpo docente e discente do departamento de física da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Dinâmica dos Fluidos	4
2.1 Equações Tipo Maxwell para o fluido	5
2.2 Equações do tipo Maxwell	13
3 Formulação Lagrangeana: Fluido compressível e viscoso	19
3.1 Formulação covariante	21
4 Equações Tipo Maxwell para um fluido carregado	26
4.1 Dinâmica de um fluido carregado	26
4.2 Equação da onda	34
5 Evolução da Circulação e Helicidade	36
5.1 Circulação	36
5.2 Helicidade	38
6 Conclusões	42

Lista de Figuras

1.1	Turbulência isotrópica homogênea atrás de uma grade. Fotografia T. Corke e H. Nagib	3
2.1	$\langle v^2 \nabla \times \vec{w} \rangle$ comparado a $\langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$ para um escoamento em um canal com $R_e = 5000$. Imagem retirada de H.Marmanis. Anology between the Navier-Stokes equations and Maxwell equations[1].	16

SILVA, Patrick Paolo, Pós graduação em Física, Universidade Federal de Juiz de Fora, Fevereiro de 2018. **Formulação lagrangiana para um fluido compressível - Geração de helicidade e vorticidade**. Orientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes.

Formulações alternativas para a descrição da dinâmica de fluidos, tem se mostrado de grande importância. Destas, chamamos atenção para o conjunto de equações tipo Maxwell, que tem como variáveis principais a vorticidade e o vetor de Lamb na descrição do fluido, pois possibilitam uma estrutura matemática análoga a das equações de Maxwell no vácuo para o eletromagnetismo clássico. Neste trabalho, vamos apresentar a obtenção do sistema de equações tipo Maxwell, bem como a derivação da representação covariante para o fluido. Será abordado o caso de um fluido inicialmente neutro e, em seguida, carregado. Por fim, apresentamos a evolução da circulação e da helicidade do fluido, com a intenção de identificar suas fontes, onde apresentamos um novo termo relacionado à geração de helicidade que não consta na literatura especializada.

SILVA , Patrick Paolo, Universidade Federal de Juiz de Fora, February, 2018. **Lagrangian formulation for a compressible fluid - Generation of helicity and vorticity.**
Advisor: Albert Carlo Rodrigues Mendes.

Alternative formulations for the description of fluid dynamics have been shown to be of major importance. From these last ones, we call attention to the Maxwell-type set of equations, which have as main variables the vorticity and the Lamb vector in the fluid description, since they make possible a mathematical structure analogous to Maxwell's equations in vacuum for classical electromagnetism. In this work, we will present the Maxwell equation system, as well as the derivation of the covariant representation for the fluid. We will address the case of a fluid initially compressible and viscous, and after that, a charged one. Finally, we present the evolution of the circulation and the helicity of the fluid, with the intention of identifying its sources, where we present a new term related to the generation of helicity which does not appear in the specialized literature.

Capítulo 1

Introdução

Sabemos que a mecânica dos fluidos é de grande interesse para áreas como a Física, Engenharia, Biologia, Meteorologia, Oceanografia, Química, Astronomia, entre outras. Como exemplos, podem ser mencionadas aplicações tais como vórtices em hélio líquido, oscilações sísmicas do sol, circulação sanguínea, tornados. Vale salientar que o fenômeno da turbulência também é muito importante para se tratar corretamente casos como camada limite, atrito e transferência de calor e difusão de meios fluidos.[2]

É observado que, a dinâmica dos fluidos e o eletromagnetismo clássico de Maxwell, são duas áreas que apresentam várias semelhanças. Assim como foi feito para o eletromagnetismo, espera-se uma generalização não-Abeliana para a dinâmica dos fluidos. Um objetivo desta abordagem não-Abeliana do fluido, é a aplicação ao plasma quark gluon (QGP), que é um produto de colisões entre núcleos pesados em altas energias. O plasma quark gluon é de grande interesse tanto para a física teórica, quanto para a experimental [3].

É conhecido que o plasma de quarks e gluons (QGP) é um fluido denso. Entretanto, apresenta pouca viscosidade, característica de um fluido ideal. Portanto, uma análise adequada considerando cargas não-Abelianas para os quarks e gluons deve ser desenvolvida a fim de analisar corretamente suas características.

Encontra-se na literatura, trabalhos abordando a interação de fluido ideal com campos de Yang-Mills [4, 5, 6, 7, 8]. Um dos motivadores para a geração de plasma de quarks e gluons, é testar as previsões de transição *Confinamento de Cor* para fase não confinada em cromodinâmica quântica (QCD) em altas temperaturas e densidade.

Trabalhos atuais tem apresentado abordagens alternativas para a descrição da dinâmica de fluidos, como, por exemplo, fluidos compressíveis [9] e para a dinâmica de plasmas [10]. Estes resultados são obtidos através da reformulação das equações do fluido e da construção do sistema de equações tipo Maxwell do fluido, que ocasionará uma generali-

zação dos conceitos de carga e corrente apresentados por Marmanis[1]. Estes termos de fonte dependeram da escolha das principais grandezas na descrição da dinâmica. Além disso, há trabalhos como o de Lighthill[11], onde o tensor de tensões do fluido é apontado como a fonte de radiação sonora.

Nesta dissertação será considerado um fluido (Abeliano) compressível e viscoso, e logo depois carregado. Obteremos as equações tipo Maxwell para o fluido neutro e carregado, na sequência estas serão derivadas a partir da densidade de Lagrangeana tanto para o fluido neutro quanto para o carregado. Além disso, será analisada a equação que governa a evolução da helicidade e também o mecanismo de geração de vórtices a partir da evolução da circulação associada ao campo de velocidades em torno de um contorno γ que se move junto ao fluido.

O estado do fluido na qual o presente trabalho se refere, é o de turbulência. Turbulência é um sistema físico de dinâmica não linear. Em outras palavras, a turbulência exhibe todas as flutuações possíveis para o movimento sem quebrar as leis fundamentais da mecânica dos meios contínuos (conservação de momentum, massa e energia).

Quando as propriedades estatísticas do fluxo turbulento são uniformes no espaço, ou seja, os valores estatísticos são equivalentes em cada ponto do espaço (invariância de escala), a turbulência é dita homogênea e isotrópica[12].

Turbulência com propriedades estatísticas equivalentes em qualquer direção do espaço, como a descrita acima, para altos números de Reynolds (grandeza adimensional que caracteriza a natureza do fluxo em laminar ou turbulento) é dita turbulência completamente desenvolvida. O estado dos fluidos abordados nesta dissertação estão em regime de turbulência completamente desenvolvida. A figura 1.1 ilustra a turbulência homogênea e isotrópica.

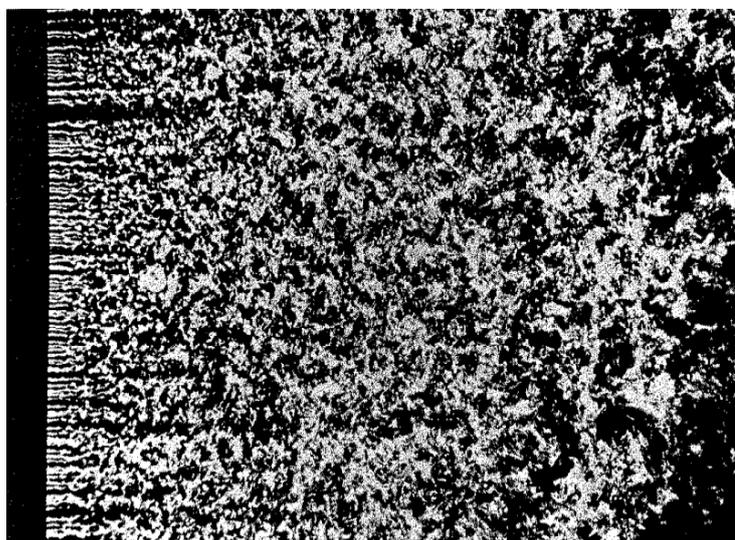


Figura 1.1: Turbulência isotrópica homogênea atrás de uma grade. Fotografia T. Corke e H. Nagib

Capítulo 2

Dinâmica dos Fluidos

Para se obter as equações do tipo Maxwell para um fluido, parte-se da equação de Navier-Stokes. Nesta equação aplicam-se os operadores divergente, rotacional e derivada temporal e também é considerado a equação termodinâmica que relaciona entalpia por unidade de massa h , entropia por unidade de massa s e pressão P . Com essa premissa iremos começar o processo de obtenção das equações tipo Maxwell.

A equação de Navier-Stokes para um fluido newtoniano isotrópico (fluido que admite uma relação linear entre a tensão e os gradientes de velocidades), compressível e viscoso é

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \nabla \sigma, \quad (2.1)$$

onde o tensor de segunda ordem σ é dado por

$$\sigma_{ik}^\nu = 2\mu D_{ij} + \zeta D \delta_{ij},$$

onde μ e ζ são coeficientes de viscosidade e o índice ν indica que σ é referente às componentes da tensão de cisalhamento. Além disso,

$$D_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} D \delta_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{1}{3} (\partial_k v_k) \delta_{ij}$$

com

$$D = \nabla \cdot \vec{v}$$

assim σ'_{ik} se reduz a

$$\sigma'_{ik} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \left(\frac{2}{3}\right) D\delta_{ij}) + \zeta D\delta_{ij}$$

onde

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \mu \left(\nabla^2 v_i + \frac{\partial(\partial_k v_k)}{\partial x_i} - \left(\frac{2}{3}\right) \frac{\partial \nabla \cdot \vec{v}}{\partial x_i} \right) + \zeta \frac{\partial \nabla \cdot \vec{v}}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Admitindo que μ e ζ são constantes (μ é denominado coeficiente de viscosidade superficial e ζ coeficiente de viscosidade volumétrica). Em notação vetorial

$$\nabla \sigma = \mu \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3}\mu + \zeta\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.3)$$

A quação (2.1) em termos do tensor (2.3) pode ser escrita

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3}\mu + \zeta\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ser aplicada a fluidos newtonianos com altos números de Reynolds (da ordem de 5000, por exemplo), ou seja, fluxos turbulentos.

Devido ao fato da equação (2.4) ser não linear, este capítulo constitui-se da busca por equações com o intuito de contornar esta não linearidade. Para isso apresentamos parte da não linearidade como fonte de turbulência.

2.1 Equações Tipo Maxwell para o fluido

Com a finalidade de se obter as equações tipo Maxwell que descrevem a dinâmica do fluido, iniciaremos com a equação de Navier-Stokes para um fluido viscoso e compressível.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho}\right) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}), \quad (2.5)$$

usando a identidade

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (2.6)$$

e substituindo em (2.5), temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \left(\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.7)$$

Fazendo $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$ e $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$, que são a vorticidade e o vetor de Lamb respectivamente, temos.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{l} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \left(\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.8)$$

Usando na equação (2.8) a relação termodinâmica

$$dh = Tds + VdP = Tds + \frac{1}{\rho}dP, \quad (2.9)$$

ou

$$\frac{1}{\rho}dP = dh - Tds \Rightarrow -\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla h + T\nabla s, \quad (2.10)$$

onde h é a entalpia por unidade de massa, s é a entropia por unidade de massa e o volume específico é $V = 1/\rho$. A equação (2.8) é reescrita como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{l} = -\nabla h + T\nabla s - \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \left(\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.11)$$

Definimos agora a grandeza \vec{Z} . Este é um vetor que relaciona a contribuição viscosa e estatística do fluido e tem dimensão de aceleração. Sua definição matemática é

$$\vec{Z} = T\nabla s + \frac{1}{\rho}\nabla\sigma. \quad (2.12)$$

Assim, a equação (2.11) fica

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{l} = -\nabla\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) + \vec{Z}. \quad (2.13)$$

O termo $h + \frac{1}{2}v^2$, que é um termo semelhante à energia de Bernoulli (ϕ) dada por $\phi = \frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2}$ (ρ_0 é a densidade constante do fluido), é a função de energia do fluido, e será definida como

$$\Theta = h - \frac{1}{2}v^2. \quad (2.14)$$

Deste modo a equação (2.13) fica

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{l} = -\nabla\Theta + \vec{Z}. \quad (2.15)$$

Agora, aplicando o rotacional à equação (2.15)

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{v})}{\partial t} + \nabla \times \vec{l} = \nabla \times \vec{Z}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + \nabla \times \vec{l} = \nabla \times \vec{Z}. \quad (2.17)$$

Além disso, através da definição da vorticidade $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$, a seguinte igualdade é encontrada

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{w} = 0. \quad (2.18)$$

A equação (2.17) descreve a dinâmica da vorticidade do fluido. A dinâmica da vorticidade será abordada mais a frente para o tratamento da helicidade.

Agora busquemos a evolução e a divergência do vetor \vec{l} para que tenhamos um sistema de quatro equações diferenciais.

Partindo da equação (2.15) vem

$$\vec{l} = -\nabla\Theta - \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{Z}, \quad (2.19)$$

aplicando o divergente na equação (2.19), temos

$$\nabla \cdot \vec{l} = -\nabla^2\Theta - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{Z}. \quad (2.20)$$

Com base nas ideias propostas por H. Marmanis[1] acerca da densidade de carga turbulenta para um fluido turbulento incompressível, façamos

$$n(\vec{x}, t) = -\nabla^2\Theta - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{v})}{\partial t}, \quad (2.21)$$

onde $n(\vec{x}, t)$ é definida como densidade de carga turbulenta de um fluido viscoso compressível. Desta maneira

$$\nabla \cdot \vec{l} = n(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{Z}, \quad (2.22)$$

que é equivalente à lei de Gauss para o fluido, mas com um termo de correção que corresponde à contribuição viscosa e estatística ($T\nabla s$) do fluido.

Para obter a evolução do vetor de Lamb, derivamos (2.19) em relação ao tempo

$$\frac{\partial\vec{l}}{\partial t} = -\nabla\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Nesta equação, o primeiro e o segundo termos podem ser considerados como sendo as contribuições não viscosas para a dinâmica do vetor de Lamb, já o terceiro termo pode ser visto como a correção viscosa[1]. Assim, obteremos a evolução de \vec{l} para o caso não viscoso e logo depois consideraremos que a viscosidade ocorre devido a este último termo.

Segue que $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$, assim

$$\frac{\partial(\vec{w} \times \vec{v})}{\partial t} = \vec{w} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \times \vec{v}. \quad (2.24)$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.17) sem seus termos viscosos na equação (2.24), temos

$$\frac{\partial(\vec{w} \times \vec{v})}{\partial t} = \vec{w} \times (-\nabla\Theta - \vec{l}) + (-\nabla \times \vec{l}) \times \vec{v} = -\vec{w} \times \nabla\Theta - \vec{w} \times \vec{l} - (\nabla \times \vec{l}) \times \vec{v}, \quad (2.25)$$

da identidade

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{l}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{l}) + \vec{l} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l}, \quad (2.26)$$

mas $\vec{v} \cdot \vec{l} = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = 0$, assim

$$-(\nabla \times \vec{l}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{l} \times \vec{w}. \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.27) em (2.25), vem

$$\frac{\partial(\vec{w} \times \vec{v})}{\partial t} = -\vec{w} \times \nabla\Theta - \vec{w} \times \vec{l} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{l} \times \vec{w}, \quad (2.28)$$

ou

$$\frac{\partial(\vec{w} \times \vec{v})}{\partial t} = -\vec{w} \times \nabla\Theta - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (2.29)$$

Além disso,

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{l}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{l}) - \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l}. \quad (2.30)$$

Considerando apenas os termos não viscosos do $\nabla \cdot \vec{l}$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{l}) = \vec{v}n(\vec{x}, t) - \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l}, \quad (2.31)$$

onde $n(\vec{x}, t)$ é a densidade de carga turbulenta definida em (2.22).

Colocando em evidência o termo $-(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l}$ na equação (2.31) e usando a identidade

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

para \vec{v} e \vec{l} , temos

$$\vec{v} \times \vec{l} = \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{v}).$$

Ainda na equação (2.31), temos

$$-(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{l} = v^2(\nabla \times \vec{w}) + \nabla v^2 \times \vec{w} - \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} - \vec{v}n(\vec{x}, t) + \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (2.32)$$

Introduzindo a equação (2.32) em (2.29), temos

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -\vec{w} \times \nabla(\Theta + v^2) + v^2(\nabla \times \vec{w}) - \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} - \vec{v}n(\vec{x}, t) + \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) - 2(\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (2.33)$$

Neste ponto notamos que o termo $v^2(\nabla \times \vec{w})$ é semelhante a $\nabla \times \vec{l}$ da equação (2.17), sem a parte viscosa e a menos do fator v^2 , da equação que descreve a evolução da vorticidade. Os demais termos não têm correspondentes na equação da vorticidade e também não podem ser apresentados como combinações de \vec{w} ou \vec{l} . Assumindo que os demais termos em (2.33) são termos de fonte para a turbulência, definimos a corrente turbulenta $\vec{j}(\vec{x}, t)$ da seguinte maneira

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{w} \times \nabla(\Theta + v^2) + \nabla \times (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} + \vec{v}n(\vec{x}, t) - \vec{l}(\nabla \cdot \vec{v}) + 2(\vec{l} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (2.34)$$

Com isso, a evolução do vetor de Lamb fica

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2(\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t). \quad (2.35)$$

Introduzindo a parte viscosa à equação (2.35)

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \nu^2 (\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}. \quad (2.36)$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais para o caso compressível e não isentrópico

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \nu^2 (\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{Z}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \nabla \times \vec{Z}, \quad (2.39)$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0. \quad (2.40)$$

Este sistema de equações tipo Maxwell, junto à condições de contorno apropriadas, descreve toda a dinâmica para um fluido compressível e viscoso.

Vejamos como fica a divergência, derivada temporal e o rotacional de \vec{Z} para um fluido isentrópico e incompressível.

$$\nabla \cdot \vec{Z} = \nabla \cdot \left[T \nabla_s + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right] = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v}) = 0, \quad (2.41)$$

$$\nabla \times \vec{Z} = \nabla \times \left[T \nabla_s + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right] = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{w}. \quad (2.42)$$

A derivada temporal fica

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[T \nabla_s + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right] = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t},$$

ou

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \left[-\vec{l} - \nabla \phi + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} \right], \quad (2.43)$$

onde ϕ é chamada energia de Bernoulli, que é definida como

$$\phi = \frac{P}{\rho_0} + \frac{v^2}{2}.$$

Logo

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = -\frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{l} - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \phi) + \left(\frac{\mu}{\rho_0}\right)^2 \nabla^4 \vec{v}. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.36), temos

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2 (\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{l} - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \phi) + \left(\frac{\mu}{\rho_0}\right)^2 \nabla^4 \vec{v}, \quad (2.45)$$

que é a evolução do vetor de Lamb para o caso isentrópico e incompressível.

Deste modo as equação (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40) se reduzem a

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2 (\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{l} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla n(\vec{x}, t), \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n(\vec{x}, t), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.48)$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0, \quad (2.49)$$

onde o termo $(\mu/\rho_0)^2 \nabla^4 \vec{v}$ é uma correção em segunda ordem na viscosidade e foi negligenciada por ser consideravelmente pequena. O sistema de equações (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49) descreve a dinâmica de \vec{w} e \vec{l} para um fluido isentrópico e incompressível [1], chamada de dinâmica metafluida.

Voltando a atenção para o caso compressível e não isentrópico, as equações (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40) descrevem escoamentos laminares e turbulentos. Além disso formam um sistema de equações lineares.

2.2 Equações do tipo Maxwell

Nesta seção trataremos os campos por seus valores médios devido suas rápidas variações e consideraremos o vetor \vec{Z} como uma polarização para o vetor de Lamb.

No sistema de equações do tipo Maxwell, o vetor \vec{Z} pode ser interpretado como uma polarização para o vetor de Lamb \vec{l} [13], assim como o vetor \vec{P} é uma polarização para o vetor campo elétrico \vec{E} no eletromagnetismo de Maxwell. Para o sistema de equações

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = v^2(\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{Z}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \nabla \times \vec{Z}, \quad (2.52)$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0, \quad (2.53)$$

podemos definir uma nova grandeza \vec{l}' expressa por

$$\vec{l}' = \vec{l} - \vec{Z}.$$

A partir desta mudança de variáveis, encontram-se equações semelhantes às apresentadas em [9], ou seja,

$$\frac{\partial \vec{l}'}{\partial t} = v^2(\nabla \times \vec{w}) - \vec{j}(\vec{x}, t), \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \vec{l}' = n(\vec{x}, t), \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l}', \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0. \quad (2.57)$$

Comparando com as equações de Maxwell no vácuo

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2(\nabla \times \vec{B}) - 4\pi \vec{j}(\vec{x}, t), \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (2.60)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.61)$$

Os dois sistemas anteriores compartilham a propriedade de seus campos variarem muito rápido no tempo e espaço. Essa variação é de tal modo (da ordem de $10^{-8}cm$ e $10^{-13}s$ para vibrações nucleares) que medidas macroscópicas duram tempos muito maiores que este. As flutuações microscópicas durante uma medida macroscópica, entram como médias de suas variações, que contribuem com flutuações lentas e suaves para os valores macroscópicos. As características das fontes turbulentas para a dinâmica do fluido são semelhantes às das fontes eletromagnéticas.

A partir do sistema de equações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57) aplicamos médias sobre o espaço em todas as quantidades através do método de Russakoff.

Usando a técnica da filtragem[14], temos que a média espacial de uma função $A(\vec{x}, t)$ é

$$\langle A(\vec{x}, t) \rangle = \int f(\vec{x}') A(\vec{x} - \vec{x}', t) d^3x', \quad (2.62)$$

com $f(\vec{x}) > 0$ para uma vizinhança em $\vec{x} = 0$, $\int f(\vec{x}') d^3x' = 1$, $f(\vec{x})$ deve ser isentrópica e deve pertencer a classe $c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Uma função que atende a essas condições é

$$f(\vec{x}) = (\pi R^2)^{-\frac{3}{2}} \exp - \left(\frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.63)$$

Assim, podemos expandir $f(\vec{x})$ para pequenas distâncias, da ordem da escala de Kolmogorov η ,

$$f(\vec{x} + \vec{a}) \approx f(\vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla) f(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}), \quad (2.64)$$

com $|\vec{a}| \sim \eta$, $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$ e $\nu = \mu/\rho$, onde ε é a média da taxa de energia por unidade de massa.

Usando o método de filtragem nas equações (2.54),(2.55), (2.56) e (2.57), temos

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \langle v^2(\nabla \times \vec{w}) \rangle - \langle \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle, \quad (2.65)$$

$$\nabla \cdot \vec{L} = \langle n(\vec{x}, t) \rangle, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = - \langle \nabla \times \vec{L} \rangle, \quad (2.67)$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0, \quad (2.68)$$

com o novo vetor de Lamb e a nova vorticidade dados por

$$\vec{L} = \langle \vec{l}'(\vec{x}, t) \rangle$$

e

$$\vec{W} = \langle \vec{w}(\vec{x}, t) \rangle .$$

Com a intenção que o sistema (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68) tenha solução, segue a aproximação

$$\langle v^2(\nabla \times \vec{w}) \rangle = \langle v^2 \rangle \nabla \times \langle \vec{w} \rangle = \langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}.$$

No artigo de H. Marmanis [1], a comparação dos campos $\langle v^2 \nabla \times \vec{w} \rangle$ e $\langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$ para um fluxo em um canal com número de Reynolds $R_e = 5000$ pode ser vista através de uma simulação numérica direta (DNS), onde é simulado $\langle v^2 \nabla \times \vec{w} \rangle$ (primeira figura) e $\langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$ (segunda figura). A figura 2.1 mostra campos instantâneos de vórtices e suas concentrações para escoamento com um número de Reynolds igual a 5000 para os termos $\langle v^2 \nabla \times \vec{w} \rangle$ e $\langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$.

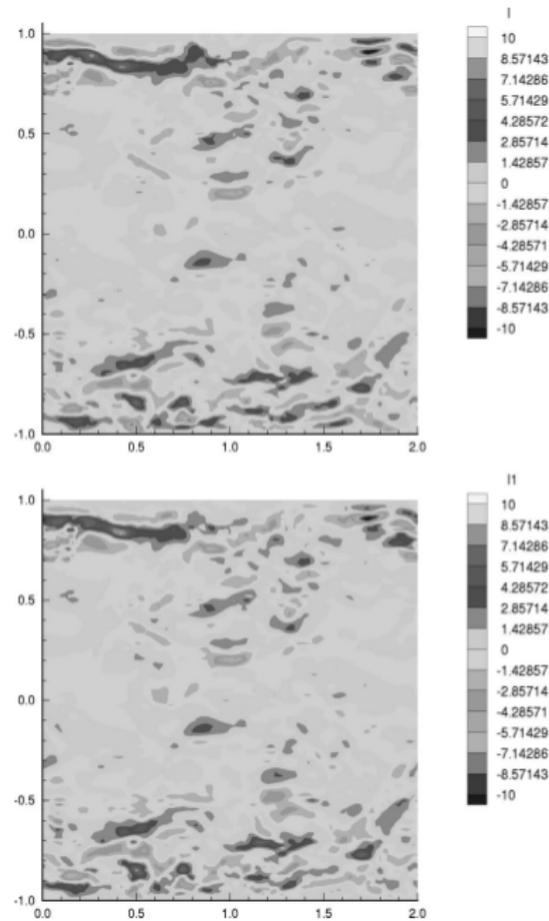


Figura 2.1: $\langle v^2 \nabla \times \vec{w} \rangle$ comparado a $\langle v^2 \rangle \nabla \times \vec{W}$ para um escoamento em um canal com $R_e = 5000$. Imagem retirada de H.Marmanis. Analogy between the Navier-Stokes equations and Maxwell equations[1].

Podemos classificar escoamentos como homogêneos e não homogêneos. Nos escoamentos homogêneos as fontes turbulentas são iguais a zero. Neste caso temos

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \langle v^2 \rangle (\nabla \times \vec{W}), \quad (2.69)$$

$$\nabla \cdot \vec{L} = 0, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = - \langle \nabla \times \vec{L} \rangle, \quad (2.71)$$

$$\nabla \cdot \vec{W}, \quad (2.72)$$

onde $\langle v^2 \rangle$ pode assumir a raiz quadrada da energia cinética total dividida por unidade de massa e volume filtrado.

As equações (2.69), (2.70), (2.71) e (2.72) apresentam soluções para condições de contorno satisfatórias, como por exemplo um cubo periódico. O caso não homogêneo tem as fontes turbulentas diferentes de zero. As equações (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68) ficam

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \langle v^2 \rangle (\nabla \times \vec{W}) - \vec{J}(\vec{x}, t), \quad (2.73)$$

$$\nabla \cdot \vec{L} = N(\vec{x}, t), \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{L}, \quad (2.75)$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0. \quad (2.76)$$

Onde

$$N(\vec{x}, t) = \langle n(\vec{x}, t) \rangle,$$

e

$$J(\vec{x}, t) = \langle \vec{j}(\vec{x}, t) \rangle .$$

Por questão de generalidade, pode-se definir $\vec{\tilde{L}}$ e $\vec{\tilde{W}}$. Estes transportam os efeitos de filtragem causados pelas fontes turbulentas aos campos \vec{L} e \vec{W} . Suas relações podem ser

apresentadas como segue

$$\widetilde{L}_\alpha = L_\alpha + 4\pi \left(P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \right), \quad (2.77)$$

$$\widetilde{W}_\alpha = W_\alpha - 4\pi (M_\alpha + \dots), \quad (2.78)$$

onde \vec{P} , \vec{M} e $Q_{\alpha\beta}$ são respectivamente as médias do dipolo de carga turbulenta, dipolo de vórtice e quadrupolo de carga turbulenta do fluxo em questão. Essas quantidades são nulas no caso de escoamento homogêneo.

Podemos expressar $\widetilde{\vec{L}}$ e $\widetilde{\vec{W}}$ em termos de \vec{L} e \vec{W} da seguinte maneira

$$\widetilde{\vec{L}} = \varepsilon \vec{L}$$

e

$$\widetilde{\vec{W}} = \xi \vec{W},$$

onde as constantes ε e ξ podem ser interpretadas como o análogo da hidrodinâmica para constante dielétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Para o caso de meios lineares e isotrópicos, podem ser considerados escalares, mas para meios anisotrópicos serão tensores de segunda ordem.

Capítulo 3

Formulação Lagrangeana: Fluido compressível e viscoso

A descrição Lagrangeana para fluidos tem se mostrado uma área de grande relevância. Arnold em seu livro [15] mostra que através de uma abordagem geométrica e aplicando algebra de Lie, escoamentos Eulerianos ($\mu/\rho = 0$) podem ser representados por uma formulação Hamiltoniana em qualquer dimensão. Este resultado motivou algumas aplicações interessantes, que podem ser encontradas nos trabalhos de V. I. Arnold *etal*[16], onde são tratados aspectos topológicos em hidrodinâmica como leis de conservação, e no trabalho de V. Zeitlin [17], onde são tratados aspectos referentes a instabilidade e equilíbrio termodinâmico.

No trabalho de A. C. R. Mendes *etal* [18] foi apresentado que, considerando-se as equações da dinâmica metafluida obtidas por Marmanis [1], é possível obter uma Lagrangeana para fluidos viscosos. Haja vista que a estrutura das equações (2.73), (2.74), (2.75), (2.76) do capítulo 2 tem a mesma estrutura matemática das equações da dinâmica metafluida, assim como mostrado em [13], onde para um fluido compressível e viscoso, escrevesse a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{l}^2 - a^2\vec{w}^2), \quad (3.1)$$

sem termos de fonte (\vec{J} e N), ou seja, turbulência homogênea. Iremos considerar a partir de agora, que todas as grandezas tem seus valores médios computados, para evitar notações carregadas, ou seja, serão omitidos os símbolos de valor médio. Substituindo \vec{l} e \vec{w} na equação (3.1).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Theta + \vec{Z} \right)^2 - \frac{1}{2} a^2 (\nabla \times \vec{v})^2, \quad (3.2)$$

onde Θ é a função energia do fluido definida em (2.14) e o vetor de Lamb é

$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Theta + \vec{Z} \quad (3.3)$$

e a vorticidade é dada por

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v}. \quad (3.4)$$

Calculando o momento conjugado à velocidade, resulta em

$$\vec{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Theta - \vec{Z} = -\vec{l}, \quad (3.5)$$

que é a equação de Navier-Stokes (esta não é derivada diretamente das equações de Euler-Lagrange) considerando que $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$. A viscosidade e a contribuição estatística ($T\nabla s$) estão presentes em \vec{Z} .

Calculando a equação de Euler-Lagrange para Θ e \vec{v} , temos para $\Theta(\vec{x}, t)$, na forma vetorial

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Theta - \vec{Z} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{l} = 0, \quad (3.6)$$

e para $\vec{v}(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Theta - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{Z} \right) = a^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{v}). \quad (3.7)$$

A equação (3.7) combinada a (3.3) e (3.4), pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = a^2 (\nabla \times \vec{w}) + \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

As outras duas equações podem ser obtidas através da definição de \vec{w} e \vec{l} da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \vec{w} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0, \quad (3.9)$$

e

$$\nabla \times \vec{l} = -\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla \times \vec{Z}. \quad (3.10)$$

Para o caso onde os termos de fonte estão presentes (\vec{J} e N diferentes de zero), haverá mais dois termos na densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{l}^2 - a^2 \vec{w}^2) + \vec{J} \cdot \vec{v} - N\Theta, \quad (3.11)$$

onde os dois últimos termos do lado direito em (3.11) são semelhantes a $-\rho_e \phi + \vec{A} \cdot \vec{J}_e$ com ρ_e densidade de carga elétrica, ϕ potencial elétrico, \vec{A} potencial vetor e \vec{J}_e densidade de corrente elétrica do eletromagnetismo clássico.

A partir da substituição proposta no capítulo 2

$$\vec{l} = \langle \vec{l} - \vec{Z} \rangle = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Theta, \quad (3.12)$$

escrever-se a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{l}'^2 - a^2 \vec{w}^2) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Theta \right)^2 - \frac{1}{2} a^2 (\nabla \times \vec{v})^2. \quad (3.13)$$

A equação (3.13), já com o vetor \vec{Z} como uma polarização para o vetor de Lamb \vec{l} , mostra que a densidade de Lagrangeana para o campo eletromagnético no vácuo e a densidade (3.13) tenham a mesma estrutura matemática.

3.1 Formulação covariante

Observando a densidade de Lagrangeana (3.13), nota-se que assim como o campo elétrico e magnético constituem um tensor de segunda ordem antissimétrico, \vec{l}' e \vec{w} também podem ser escritos nesta mesma forma matemática. O tensor de segunda ordem antissimétrico para o fluido (Abeliano) será dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu, \quad (3.14)$$

com o 4-potencial e a 4-divergência respectivamente dados por

$$U^\mu = (\Theta, a\vec{v}), \quad (3.15)$$

e

$$\partial^\mu = \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (3.16)$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ para o fluido em forma matricial obtido de maneira análoga ao tensor de campo do eletromagnetismo $F^{\mu\nu}$ é

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & l^1 & l^2 & l^3 \\ -l^1 & 0 & aw^3 & -aw^2 \\ -l^2 & -aw^3 & 0 & aw^1 \\ -l^3 & aw^2 & -aw^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo a densidade de Lagrangeana (3.13) com os termos de fonte diferentes de zero e com o tensor $T^{\mu\nu}$, fica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{a} J_\mu U^\mu, \quad (3.17)$$

onde a 4-corrente turbulenta é dada por

$$J^\mu = (aN, \vec{J}).$$

Desta formulação covariante para fluidos, podem-se obter as equações não homogêneas tipo Maxwell através de

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{a} J^\mu, \quad (3.18)$$

a saber, $\mu = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{10} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{12} + \partial_3 T^{13} &= \frac{1}{a} J^1, \\ -\frac{\partial(l^1)}{\partial t} + a^2(\nabla \times \vec{w})_1 &= \frac{1}{a} J^1,\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{20} + \partial_1 T^{21} + \partial_2 T^{22} + \partial_3 T^{23} &= \frac{1}{a} J^2, \\ -\frac{\partial(l^2)}{\partial t} + a^2(\nabla \times \vec{w})_2 &= \frac{1}{a} J^2,\end{aligned}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{30} + \partial_1 T^{31} + \partial_2 T^{32} + \partial_3 T^{33} &= \frac{1}{a} J^3, \\ -\frac{\partial(l^3)}{\partial t} + a^2(\nabla \times \vec{w})_3 &= \frac{1}{a} J^3,\end{aligned}\tag{3.21}$$

somando (3.19), (3.20), (3.21),

$$-\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + a^2 \nabla \times \vec{w} = \vec{J}.\tag{3.22}$$

Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{01} + \partial_2 T^{02} + \partial_3 T^{03} &= \frac{1}{a} J^0, \\ \frac{\partial l^1}{\partial x^1} + \frac{\partial l^2}{\partial x^2} + \frac{\partial l^3}{\partial x^3} &= \frac{1}{a}(aN) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{l} = N,\end{aligned}\tag{3.23}$$

As duas equações homogêneas para o fluido podem ser obtidas através de

$$\partial_\nu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0,\tag{3.24}$$

onde $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ é o dual de $T^{\mu\nu}$ e pode ser obtido através de

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta},\tag{3.25}$$

com $T_{\mu\nu}$ em forma matricial dado por

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -l'^1 & -l'^2 & -l'^3 \\ l'^1 & 0 & aw^3 & -aw^2 \\ l'^2 & -aw^3 & 0 & aw^1 \\ l'^3 & aw^2 & -aw^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, usando a definição (3.25), $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ resulta na matriz

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & aw^1 & aw^2 & aw^3 \\ -aw^1 & 0 & -l'^3 & l'^2 \\ -aw^2 & l'^3 & 0 & -l'^1 \\ -aw^3 & -l'^2 & l'^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da equação (3.24) para $\mu = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{T}^{10} + \partial_1 \mathcal{T}^{11} + \partial_2 \mathcal{T}^{12} + \partial_3 \mathcal{T}^{13} &= 0, \\ -\frac{\partial w^1}{\partial t} - (\nabla \times \vec{l}')_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{T}^{20} + \partial_1 \mathcal{T}^{21} + \partial_2 \mathcal{T}^{22} + \partial_3 \mathcal{T}^{23} &= 0, \\ -\frac{\partial w^2}{\partial t} - (\nabla \times \vec{l}')_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{T}^{30} + \partial_1 \mathcal{T}^{31} + \partial_2 \mathcal{T}^{32} + \partial_3 \mathcal{T}^{33} &= 0, \\ -\frac{\partial w^3}{\partial t} - (\nabla \times \vec{l}')_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Somando (3.26), (3.27) e (3.28)

$$-\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - (\nabla \times \vec{l}') = 0. \quad (3.29)$$

Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{*00} + \partial_1 T^{*01} + \partial_2 T^{*02} + \partial_3 T^{*03} &= 0, \\ \frac{\partial a w^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a w^3}{\partial x^3} &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{w} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim, escrevemos as quatro equações tipo Maxwell para um fluido compressível e viscoso através de (3.18) e (3.24). A formulação Lagrangeana para o fluido possibilita a obtenção de uma Hamiltoniana, que pode ser usada para a formulação estatística da turbulência.

Capítulo 4

Equações Tipo Maxwell para um fluido carregado

Neste capítulo vamos considerar e analisar o comportamento de um fluido carregado composto por partículas com carga elétrica da espécie α , ou seja, considerar uma nova lagrangiana que leve em consideração a presença do campo eletromagnético ao qual as partículas estarem sujeitas, pois tal sistema físico é usado na descrição da dinâmica de plasmas. Este fluido será compressível e viscoso, de modo que as ideias expostas nos capítulos anteriores permanecem válidas aqui. Dentre estas as equações tipo Maxwell do fluido e a formulação covariante.

4.1 Dinâmica de um fluido carregado

De modo semelhante ao realizado por R. J. Thonpson *etal* em [10], indexamos as grandezas relativas ao fluido com um índice α relativo à espécie portadora de carga elétrica. Representamos o conjunto de equações tipo Maxwell da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \vec{l}'_{\alpha} = N_{\alpha}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \vec{l}'_{\alpha} + \frac{\partial \vec{w}_{\alpha}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \vec{l}'_{\alpha}}{\partial t} - a_{\alpha}^2 \nabla \times \vec{w}_{\alpha} = -\vec{J}_{\alpha}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{w}_{\alpha} = 0. \quad (4.4)$$

Como mostrado nos capítulos 1 e 2, $\vec{l}'_{\alpha} = \langle \vec{l}_{\alpha} - \vec{Z}_{\alpha} \rangle$. Para um fluido carregado composto por partículas α , escrevesse a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\vec{l}'_{\alpha}{}^2 - a_{\alpha}^2 \vec{w}_{\alpha}{}^2 \right), \quad (4.5)$$

onde $a_{\alpha}^2 = \langle \vec{v}_{\alpha}^2 \rangle$.

A fim de representar um fluido interagindo com o campo eletromagnético, definimos o acoplamento de \vec{l}'_{α} e \vec{w}_{α} com o campo elétrico e magnético, demodo análogo ao acoplamento do momento canônico $m\vec{v}$ (m massa da partícula) com o potencial vetor \vec{A} [19]

$$\vec{l}'_{\alpha} \rightarrow \hat{\vec{l}}_{\alpha} = \vec{l}'_{\alpha} + g\vec{E}, \quad (4.6)$$

$$\vec{w}_{\alpha} \rightarrow \hat{\vec{w}}_{\alpha} = \vec{w}_{\alpha} + b\vec{B}. \quad (4.7)$$

As constantes de acoplamento g e b serão determinadas mais a frente. Introduzindo $\hat{\vec{l}}_{\alpha}$ e $\hat{\vec{w}}_{\alpha}$, já com os termos de acoplamento, uma nova densidade de lagrangiana é escrita

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \left(\vec{l}'_{\alpha}{}^2 - a_{\alpha}^2 \vec{w}_{\alpha}{}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial t} - \nabla \Theta_{\alpha} + \vec{Z}_{\alpha} + g\vec{E} \right)^2 - \frac{1}{2} a_{\alpha}^2 (\nabla \times \vec{v}_{\alpha} + b\vec{B})^2, \quad (4.8)$$

onde

$$\vec{l}_\alpha = -\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla \Theta_\alpha + \vec{Z}_\alpha, \quad (4.9)$$

$$\vec{w}_\alpha = \nabla \times \vec{v}_\alpha. \quad (4.10)$$

Esta é a densidade de lagrangiana para um fluido carregado na presença de um campo eletromagnético. \vec{Z}_α contém o caráter estatístico ($T\nabla s$) e viscoso do fluido.

Calculando o momento relativo a velocidade

$$\vec{\Pi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{v}}_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \nabla \Theta_\alpha - \vec{Z}_\alpha - g\vec{E} = -\hat{\vec{l}}_\alpha, \quad (4.11)$$

substituindo $\hat{\vec{l}}_\alpha = \hat{\vec{w}}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$ e $\hat{\vec{w}}_\alpha = \vec{w}_\alpha + b\vec{B}$ em (4.11), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \nabla \Theta_\alpha - \vec{Z}_\alpha - g\vec{E} &= -\left(\vec{w}_\alpha \times \vec{v}_\alpha + b\vec{B} \times \vec{v}_\alpha\right), \\ \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{w}_\alpha \times \vec{v}_\alpha &= -\nabla \Theta_\alpha + \vec{Z}_\alpha + g\vec{E} + b(\vec{v}_\alpha \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Comparando a equação (4.12) com a equação do momentum para um fluido carregada [10], nota-se que os últimos dois termos do lado direito da equação (4.12) é a força de Lorentz por unidade de massa. Isso implica que as constantes g e b são iguais a $\frac{q_\alpha}{m_\alpha}$, onde q_α é a carga da partícula de espécie α e m_α é a massa da partícula, ou seja,

$$g = b = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}.$$

Substituindo g e b em (4.12), a equação de Navier-Stokes para um fluido compressível, viscoso e carregado, fica

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{w}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = -\nabla \Theta_\alpha + \vec{Z}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B} \right]. \quad (4.13)$$

Escrevendo a lagrangiana (4.8) em termos do potencial elétrico ϕ e do potencial vetor

magnético \vec{A}

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla \Theta_\alpha + \vec{Z}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \right]^2 - \frac{1}{2} a_\alpha^2 \left(\nabla \times \vec{v}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \times \vec{A} \right)^2. \quad (4.14)$$

Através da mudança de variáveis

$$\hat{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{A}, \quad (4.15)$$

e

$$\hat{\Theta}_\alpha = \Theta_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \phi, \quad (4.16)$$

escrevesse \mathcal{L}' como

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial \hat{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla \hat{\Theta}_\alpha + \vec{Z}_\alpha \right]^2 - \frac{1}{2} a_\alpha^2 \left[\nabla \times \hat{v}_\alpha \right]^2. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) tem a mesma estrutura matemática que a da densidade de lagrangiana (3.3) apresentada no capítulo anterior quando o campo eletromagnético é zero.

A fim de escrevermos o sistema de equações tipo Maxwell, tomamos o divergente, rotacional e a derivada temporal da equação (4.6)

$$\nabla \cdot \hat{l}_\alpha = \nabla \cdot \vec{l}_\alpha + g \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \nabla \cdot \hat{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla^2 \hat{\Theta}_\alpha + \nabla \cdot \vec{Z}_\alpha + \frac{q_\alpha \rho_e}{m_\alpha \epsilon_0}, \quad (4.18)$$

onde ρ_e é a densidade de carga elétrica e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, substituindo $\hat{N}_\alpha = -\frac{\partial \nabla \cdot \hat{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla^2 \hat{\Theta}_\alpha$ na equação (4.18)

$$\nabla \cdot \hat{l}_\alpha = \hat{N}_\alpha + \frac{q_\alpha \rho_e}{m_\alpha \epsilon_0} + \nabla \cdot \vec{Z}_\alpha. \quad (4.19)$$

Para o rotacional escrevesse a equação

$$\nabla \times \hat{l}_\alpha + \frac{\partial \hat{w}_\alpha}{\partial t} = \nabla \times \vec{Z}_\alpha. \quad (4.20)$$

Usando $\hat{l}_\alpha = \hat{w}_\alpha \times \hat{v}_\alpha$ e $\frac{\partial \hat{w}_\alpha}{\partial t} = \nabla \times \hat{l}_\alpha$ para o cálculo da derivada temporal

$$\frac{\partial \hat{l}_\alpha}{\partial t} = (-\nabla \times \hat{l}_\alpha) \times \hat{v}_\alpha + \hat{w}_\alpha \times \frac{\partial \hat{v}_\alpha}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Fazendo considerações análogos às feitas para a obtenção da equação (2.35) e (2.36), escrevesse a densidade de corrente para um fluido carregado, temos

$$\hat{J}_\alpha = \left(\hat{N}_\alpha + \nabla \cdot \vec{Z}_\alpha \right) \hat{v}_\alpha + \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \vec{A} + 2\hat{l}_\alpha \cdot \nabla \hat{v}_\alpha - \hat{l}_\alpha (\nabla \cdot \hat{v}_\alpha) + \hat{l}_\alpha \times \hat{w}_\alpha - \hat{w}_\alpha \times \frac{\partial \hat{v}_\alpha}{\partial t} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \hat{v}_\alpha. \quad (4.22)$$

Assim

$$\frac{\partial \hat{l}_\alpha}{\partial t} - a_\alpha^2 \nabla \times \hat{w}_\alpha = -\hat{J}_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \vec{v}_\alpha + \frac{\partial \vec{Z}_\alpha}{\partial t}, \quad (4.23)$$

através do divergente de \hat{w}_α encontra-se a última equação

$$\nabla \cdot \hat{w}_\alpha = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{B}) = 0. \quad (4.24)$$

Em síntese, temos o conjunto de equações diferenciais para o fluido carregado

$$\nabla \cdot \hat{l}_\alpha = \hat{N}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \vec{Z}_\alpha, \quad (4.25)$$

$$\nabla \times \hat{l}_\alpha + \frac{\partial \hat{w}_\alpha}{\partial t} = \nabla \times \vec{Z}_\alpha, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \hat{l}_\alpha}{\partial t} - a_\alpha^2 \nabla \times \hat{w}_\alpha = -\hat{J}_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \vec{v}_\alpha + \frac{\partial \vec{Z}_\alpha}{\partial t}, \quad (4.27)$$

$$\nabla \cdot \hat{w}_\alpha = 0. \quad (4.28)$$

Assumindo \vec{Z}_α como uma polarização para \hat{l}_α , ou seja,

$$\hat{l}'_\alpha = \langle \hat{l}_\alpha - \vec{Z}_\alpha \rangle, \quad (4.29)$$

e escrevendo uma densidade de carga e corrente totais respectivamente como

$$\hat{N}'_{\alpha} = \hat{N}_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (4.30)$$

e

$$\hat{J}'_{\alpha} = \hat{J}_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_e, \quad (4.31)$$

onde \vec{J}_e é a densidade de corrente elétrica. Chegamos ao sistema de equações

$$\nabla \cdot \hat{l}'_{\alpha} = \hat{N}'_{\alpha}, \quad (4.32)$$

$$\nabla \times \hat{l}'_{\alpha} + \frac{\partial \hat{w}_{\alpha}}{\partial t} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \hat{l}'_{\alpha}}{\partial t} - a_{\alpha}^2 \nabla \times \hat{w}_{\alpha} = -\hat{J}'_{\alpha}, \quad (4.34)$$

$$\nabla \cdot \hat{w}_{\alpha} = 0. \quad (4.35)$$

Este é o sistema de equações tipo Maxwell para um fluido carregado. Este descreve toda a dinâmica do fluido imerso em um campo eletromagnético externo.

A partir de $\hat{l}' = -\frac{\partial \hat{v}_{\alpha}}{\partial t} - \nabla \hat{\Theta}_{\alpha}$ e $\hat{w}_{\alpha} = \nabla \times \hat{v}_{\alpha}$, constrói-se uma formulação covariante. Considerando o tensor de segunda ordem assimétrico $G^{\mu\nu}$ composto pelo tensor do fluido e o fator de acoplamento com o tensor $F^{\mu\nu}$ do eletromagnetismo, temos

$$G^{\mu\nu} = T_{\alpha}^{\mu\nu} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} F^{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & cB^3 & -cB^2 \\ -E^2 & -cB^3 & 0 & cB^1 \\ -E^3 & cB^2 & -cB^1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ e

$$T_{\alpha}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & l_{\alpha}^1 & l_{\alpha}^2 & l_{\alpha}^3 \\ -l_{\alpha}^1 & 0 & aw_{\alpha}^3 & -aw_{\alpha}^2 \\ -l_{\alpha}^2 & -aw_{\alpha}^3 & 0 & aw_{\alpha}^1 \\ -l_{\alpha}^3 & aw_{\alpha}^2 & -aw_{\alpha}^1 & 0 \end{bmatrix},$$

é o tensor de campo eletromagnético e do fluido carregado.

Assim como feito para o fluido neutro em (3.17), temos a densidade de lagrangiana para o fluido carregado

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}G_{\alpha}^{\mu\nu}G_{(\alpha)\mu\nu} - \frac{1}{a_{\alpha}}J_{\alpha}^{\mu}U_{(\alpha)\mu}, \quad (4.37)$$

onde o 4-potencial e a 4-densidade de corrente são dados por

$$U_{\alpha}^{\mu} = \left(\hat{\Theta}_{\alpha}, a_{\alpha} \hat{v}_{\alpha} \right), \quad (4.38)$$

$$J_{\alpha}^{\mu} = \left(a_{\alpha} \hat{N}'_{\alpha}, \hat{J}_{\alpha} \right). \quad (4.39)$$

As equações não homogêneas (4.32), (4.34) são derivadas de

$$\partial_{\nu}G_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{1}{a_{\alpha}}J_{\alpha}^{\mu}, \quad (4.40)$$

onde $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ em forma matricial é

$$G_{\alpha}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^1 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^2 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^3 \\ -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^1 & 0 & aw_{\alpha}^3 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^3 & -aw_{\alpha}^2 - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^2 \\ -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^2 & -aw_{\alpha}^3 - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^3 & 0 & aw_{\alpha}^1 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^1 \\ -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^3 & aw_{\alpha}^2 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^2 & -aw_{\alpha}^1 - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^1 & 0 \end{bmatrix},$$

a saber, para $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \partial_0 G_{\alpha}^{00} + \partial_1 G_{\alpha}^{01} + \partial_2 G_{\alpha}^{02} + \partial_3 G_{\alpha}^{03} &= \frac{1}{a_{\alpha}} J_{\alpha}^1 \\ \nabla \cdot \vec{l}'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \cdot \vec{E} &= \hat{N}_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \hat{\vec{l}}'_{\alpha} = \hat{N}'_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Analogamente para $\mu = 1, 2, 3$, temos

$$\frac{\partial \hat{\vec{l}}'_{\alpha}}{\partial t} - a_{\alpha}^2 \nabla \times \hat{\vec{w}}_{\alpha} = \hat{\vec{J}}'_{\alpha}. \quad (4.42)$$

As equações homogêneas (4.33) e (4.35) são obtidas através de

$$\partial_{\nu} \mathcal{G}_{\alpha}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.43)$$

O dual de $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ é obtido por $\mathcal{G}_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\gamma\beta} G_{(\alpha)\gamma\beta}$, que pode ser representado em forma matricial da seguinte maneira

$$\mathcal{G}_{\alpha}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & aw_{\alpha}^1 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^1 & aw_{\alpha}^2 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^2 & aw_{\alpha}^3 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^3 \\ -aw_{\alpha}^1 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^1 & 0 & -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^3 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^2 \\ -aw_{\alpha}^2 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^2 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^3 & 0 & -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^1 \\ -aw_{\alpha}^3 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} cB^3 & -l'_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^2 & l'_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E^1 & 0 \end{bmatrix},$$

Assim são obtidas as equações tipo Maxwell e o tensor de campo para o fluido carregado. O tensor $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ contém as componentes dos campos do fluido e do campo eletromagnético, neste sentido pode-se dizer que esta é uma representação unificada para este sistema físico.

4.2 Equação da onda

Pode ser analisado as características ondulatórias dos campos do fluido imerso em um campo eletromagnético. Assim como no eletromagnetismo de Maxwell, sob certas circunstâncias é mais apropriado trabalhar com a equação de onda, porque ela permite uma melhor compreensão de como o campo eletromagnético se comporta. Para a equação de onda do campo de velocidades do fluido carregado, basta substituir em (4.27) o vetor de Lamb dado por $\hat{l}_\alpha = -\frac{\partial \hat{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla \hat{\Theta}_\alpha$, temos as seguintes relações

$$-\frac{\partial^2 \hat{v}_\alpha}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \hat{\Theta}_\alpha}{\partial t} - \hat{a}_\alpha^2 \nabla \times \hat{w}_\alpha = -\hat{J}_\alpha - \frac{q_\alpha \rho_e}{m_\alpha \epsilon_0} \vec{v}_\alpha + \frac{\partial \vec{Z}_\alpha}{\partial t}, \quad (4.44)$$

onde

$$\frac{1}{a_\alpha^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2 \hat{v}_\alpha = -\nabla \left[\nabla \cdot \hat{v}_\alpha + \frac{1}{a_\alpha^2} \frac{\partial \hat{\Theta}_\alpha}{\partial t} \right] + \hat{J}_\alpha + \frac{q_\alpha \rho_e}{m_\alpha \epsilon_0} \vec{v}_\alpha + \frac{\partial \vec{Z}_\alpha}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Para a vorticidade, temos

$$\frac{1}{a_\alpha^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2 \hat{w}_\alpha = \nabla \times \left(\hat{J}_\alpha + \frac{q_\alpha \rho_e}{m_\alpha \epsilon_0} \vec{v}_\alpha \right) + \nabla \times \frac{\partial \vec{Z}_\alpha}{\partial t}, \quad (4.46)$$

onde a_α^2 foi considerada constante. Estas são as equações de onda para os campos de velocidade e vorticidade, escritos em termos de fontes turbulentas e com as contribuições devido à interação com o campo eletromagnético, \vec{J}_e , bem como devido à viscosidade e à temperatura em \vec{Z}_α .

A equação (4.45) mostra o caráter ondulatório da dinâmica do fluido descrito pelo conjunto de equações tipo Maxwell. Conseqüentemente, conhecendo os termos de fonte, a evolução de cada espécie pode ser determinada separadamente através das equações de onda.

As equações para os potenciais eletromagnéticos \vec{A} e ϕ , que possuem expressões análogas às equações obtidas acima, podem ser desacopladas através de uma escolha adequada para os potenciais, essas escolhas são chamadas de transformações de gauge. Estes gauge são

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{gauge de Coulomb}), \quad (4.47)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{gauge de Lorentz}) \quad (4.48)$$

que não alteram a física do sistema. Na dinâmica do fluido, essa liberdade não é uma simples escolha de gauge, há implicações sobre a natureza física do fluxo. A relação $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ para o fluido, que equivale ao gauge de Coulomb, não é um gauge verdadeiro, pois este implica que o fluido é incompressível.

Da mesma forma, o gauge de Lorentz possui uma equação na dinâmica dos fluidos dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

que está ligado ao fato do fluido ser compressível. Assim, observamos que uma "escolha de gauge" na dinâmica de fluidos está diretamente relacionada às hipóteses feitas sobre a compressibilidade e incompressibilidade do fluido [10].

Capítulo 5

Evolução da Circulação e Helicidade

O propósito deste capítulo é analisar as equações que governam a evolução da helicidade e o estudo do mecanismo de geração de vórtice a partir da variação da circulação associada com a integral de linha da velocidade em um circuito γ fechado dentro do fluido.

5.1 Circulação

Um funcional de considerável importância na descrição do fluxo de vórtices, é a circulação \mathcal{C} entorno de uma curva fechada γ definida como a integral de linha da velocidade

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x}, \quad (5.1)$$

que é importante em relação a seu princípio de conservação (teorema da circulação de Kelvin). A circulação associada com uma quantidade física, calculada ao longo do loop γ , pode ser zero ou assumir um valor diferente de zero dependendo se esta quantidade é uma diferencial exata ou não. Por exemplo, se esta quantidade física é Tds (T a temperatura e s a entropia), a circulação é geralmente finita e mede a quantidade de calor ganha em um ciclo termodinâmico quase-estático.

Calculando a evolução da circulação com a curva γ movendo com o fluido

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \oint_{\gamma} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x} + \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{x}. \quad (5.2)$$

O segundo termo do lado direito da equação (5.2) se anula, pois

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{x} = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint_{\gamma} d\frac{v^2}{2} = 0, \quad (5.3)$$

pois o campo de velocidades assume o mesmo valor após completar uma volta em γ . Assim

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \oint_{\gamma} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x} = \oint_{\gamma} \left[\frac{\partial \hat{v}_{\alpha}}{\partial t} + (\nabla \times \hat{v}_{\alpha}) \times \vec{v}_{\alpha} \right] \cdot d\vec{x}, \quad (5.4)$$

onde a velocidade generalizada \hat{v}_{α} é expressa por

$$\hat{v}_{\alpha} = \vec{v} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \vec{A}. \quad (5.5)$$

Agora, usando que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e a equação de Navier-Stokes para o fluido carregado

$$\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial t} + \vec{w}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha} = -\nabla\Theta_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\vec{E} + \vec{v}_{\alpha} \times \vec{B} \right] + \vec{Z}_{\alpha}, \quad (5.6)$$

obtem-se

$$\frac{\partial \hat{v}_{\alpha}}{\partial t} + (\nabla \times \hat{v}_{\alpha}) \times \vec{v}_{\alpha} = -\nabla\hat{\Theta}_{\alpha} + \vec{Z}_{\alpha}, \quad (5.7)$$

onde $\hat{\Theta}_{\alpha}$ é definido como

$$\hat{\Theta}_{\alpha} = h + \frac{1}{2}v^2 + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}\phi, \quad (5.8)$$

onde ϕ é o potencial elétrico.

Substituindo (5.7) em (5.4), temos que a variação da circulação \mathcal{C} é

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = -\oint_{\gamma} \nabla\hat{\Theta}_{\alpha} \cdot d\vec{x} + \oint_{\gamma} \vec{Z}_{\alpha} \cdot d\vec{x} = -\oint_{\gamma} \nabla\hat{\Theta}_{\alpha} \cdot d\vec{x} + \int_s \nabla \times \vec{Z}_{\alpha} \cdot d\vec{s}, \quad (5.9)$$

onde

$$\nabla \times \vec{Z}_\alpha = \nabla T \times \nabla s + \nabla \times (\rho^{-1} \nabla \sigma) = \vec{\Gamma}_B + \vec{\Gamma}_\nu, \quad (5.10)$$

onde $\vec{\Gamma}_B = \nabla T \times \nabla s$, é chamado mecanismo de Biermann (Baroclinic) [20] e $\vec{\Gamma}_\nu = \nabla \times (\rho^{-1} \nabla \sigma)$ é referente à viscosidade, são as possíveis fontes de circulação \mathcal{C} . Assim, temos

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = - \oint_\gamma \nabla \hat{\Theta}_\alpha \cdot d\vec{x} + \int_{\partial\gamma} \vec{\Gamma}_B \cdot d^2\vec{x} + \int_{\partial\gamma} \vec{\Gamma}_\nu \cdot d^2\vec{x}, \quad (5.11)$$

onde ∂_γ é a superfície que se movimenta ao longo do fluido.

Nós podemos observar na equação (5.11) que o primeiro termo do lado direito contribui para a evolução da circulação se $\oint_\gamma \nabla \hat{\Theta}_\alpha \cdot d\vec{x} = \oint_\gamma d\Theta \neq 0$, ou seja, se a força derivada da densidade de energia $\hat{\Theta}_\alpha$ não for conservativa.

Além disso, temos outras duas contribuições para a evolução da circulação, o segundo termo do lado direito de (5.11), que pode ser considerado uma forma de geração de vorticidade. Este representa o fluxo de $\vec{\Gamma}_B$ através da superfície ∂_γ . Este termo é zero quando o fluido é barotrópico, ou seja, quando a densidade depende somente da pressão e a temperatura é constante.

O último termo do lado direito de (5.11) também é um termo de fonte devido a viscosidade do fluido, e representa o fluxo de $\vec{\Gamma}_\nu$ através de superfície ∂_γ . Note que, considerando por simplicidade o caso de um fluido ideal com densidade constante ρ_0 , nós temos o termo $\vec{\Gamma}_\nu = \nabla^2 \vec{w}_\alpha$. Portanto o termo $\vec{\Gamma}_\nu$ é proporcional a vorticidade gerada. O termo dissipativo se tornará progressivamente maior à medida que a vorticidade aumenta.

5.2 Helicidade

É conhecido que para o campo eletromagnético no vácuo, a helicidade é definida por

$$h = \int (\vec{A} \cdot \vec{B}) d^3x. \quad (5.12)$$

\vec{A} é o potencial vetor e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

A generalização relativística da helicidade é definida por uma integral sobre a zeroésima componente da 4-corrente $J^\nu = A_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}$, $\int J_e^0 d^3x$, onde $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ é o dual do tensor de segunda ordem do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$. Sendo J^ν conservada, temos

$$\partial_\nu J_e^\nu = -2\vec{E} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.13)$$

somente se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Assim a helicidade é uma constante de movimento.

Assim sendo, a partir da analogia com o eletromagnetismo, representamos

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{G}^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

e

$$A_\mu \rightarrow \hat{U}_\mu = U_\mu + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} A_\mu \quad (5.15)$$

para o fluido. Logo a 4-corrente J^ν pode ser escrita como

$$J_\alpha^\mu = \left(U_{\mu(\alpha)} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} A_\mu \right) \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

Usando que $\partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ para calcular a derivada da 4-corrente, temos

$$\partial_\nu J_\alpha^\nu = \partial_\nu \left[\hat{U}_{(\alpha)\mu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} \right] = \left(\partial_\nu \hat{U}_{(\alpha)\mu} \right) \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} + \hat{U}_{(\alpha)\mu} \partial_\nu \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu}, \quad (5.17)$$

que resulta em

$$\partial_\nu J_\alpha^\nu = \left(\partial_\nu \hat{U}_{(\alpha)\mu} \right) \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} = \left[\partial_\mu \hat{U}_{(\alpha)\nu} - G_{(\alpha)\mu\nu} \right] \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{U}_{(\alpha)\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} - G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

que se reduz a expressão para a 4-corrente

$$\partial_\nu J_\alpha^\nu = -\partial_\mu J_\alpha^\mu - G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\nu J_\alpha^\nu = -\frac{1}{2} G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

O termo $G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu}$ pode ser obtido usando $\mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\gamma\beta} G_{\gamma\beta(\alpha)}$, a saber

$$\begin{aligned} G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{(\alpha)\mu\nu} G_{(\alpha)\rho\sigma} = \frac{1}{2} 4 \varepsilon^{0ijk} G_{0i} G_{jk} \\ &= 2(-\varepsilon_{ijk})(-\hat{l}_{(\alpha)i}) \varepsilon_{jkl} \hat{w}_{(\alpha)l} = 4(\hat{l}_\alpha \cdot \hat{w}_\alpha), \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde $\hat{l}_\alpha = \vec{l}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{E}$ e $\hat{w}_\alpha = \vec{w}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{B}$. A 4-corrente pode ser escrita da seguinte maneira

$$\partial_\nu J_\alpha^\nu = \frac{1}{2} G_{(\alpha)\mu\nu} \mathcal{G}_\alpha^{\mu\nu} \quad (5.21)$$

Assim, obtêm-se

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = -2\hat{l}_\alpha \cdot \hat{w}_\alpha, \quad (5.22)$$

mas das equações

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} + \vec{w}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = -\nabla \Theta_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B} \right] + \vec{Z}_\alpha, \quad (5.23)$$

e

$$\vec{l}_\alpha = -\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} - \nabla \Theta_\alpha, \quad (5.24)$$

obtêm-se em uma forma equivalente à lei de Ohm

$$\left[\vec{l}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} \right] + \vec{v}_\alpha \times \left[\vec{w}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{B}_\alpha \right] = -\vec{Z}_\alpha, \quad (5.25)$$

ou

$$\hat{l}_\alpha + \vec{v}_\alpha \times \hat{w}_\alpha = -\frac{1}{\rho} \nabla \sigma - T \nabla s. \quad (5.26)$$

Assim, podemos ver que

$$\partial_\mu J_\alpha^\mu = -2\hat{l}_\alpha \cdot \hat{w}_\alpha = 2\hat{w}_\alpha \cdot (\rho^{-1} \nabla \sigma) + 2\hat{w}_\alpha (T \nabla s), \quad (5.27)$$

ou seja, so haveria uma corrente conservativa para um campo de vorticidade especial que resulte em anular a soma de produtos escalares do lado direito de (5.27), ou quando a viscosidade e a contribuição da temperatura (T) e gradiente da entropia (∇s) forem

despresíveis, representadas por \vec{Z}_α .

A evolução da helicidade \hat{h}_α

$$\hat{h}_\alpha = \int_\gamma \hat{v}_\alpha \cdot \hat{w}_\alpha d^3x, \quad (5.28)$$

para o fluido, é dada por

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \int_\gamma \partial_0 J_\alpha^0 d^3x = \int_\gamma (\partial_\mu J_\alpha^\mu - \partial_j J_\alpha^j) d^3x = \int_\gamma \partial_\mu J_\alpha^\mu d^3x = -2 \int_\gamma \hat{w}_\alpha \cdot \vec{Z}_\alpha d^3x, \quad (5.29)$$

onde a integral

$$\int_\gamma \partial_j J_\alpha^j d^3x = \int_\gamma \partial_j \left(\hat{\Theta}_\alpha \hat{w}_\alpha + a_\alpha \left(\hat{v}_\alpha \times \hat{l}_\alpha \right) \right)^j d^3x = 0$$

e γ é o tubo de vórtices movendo com o fluido e $\hat{w}_\alpha \cdot \hat{n} = 0$ para todos os vetores normais à ∂_γ .

Quando o fluido é incompressível (densidade ρ_0), temos

$$\frac{d\hat{h}_\alpha}{dt} = -\nu \int_\gamma \hat{w}_\alpha \cdot (\nabla \times \hat{w}_\alpha) d^3x + \int_\gamma \hat{w}_\alpha \cdot (T\nabla\sigma) d^3x, \quad (5.30)$$

onde $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ é a viscosidade cinemática. Notamos que o primeiro termo do lado direito da equação (5.30) é exatamente o mesmo resultado encontrado na literatura [21]. O segundo termo do lado direito é a contribuição devido às características estatísticas do fluido. Este resultado não foi derivado anteriormente na literatura.

Capítulo 6

Conclusões

Com o estudo desenvolvido, foi possível compreender diversos conceitos e resultados relacionados à dinâmica de fluidos.

Foi observado que o vetor de Lamb e a vorticidade constituem um bom par de variáveis para o espaço de configurações do sistema, pois a partir deles foi possível obter uma densidade de lagrangiana e o tensor de campo para o fluido. Além disso, foi mostrado que através da uma descrição via equações tipo Maxwell, é possível revelar o caráter ondulatório do campo de velocidade e do campo de vorticidades do fluido.

Foram apresentados os termos responsáveis por fazerem com que a circulação e a helicidade não sejam constantes de movimento para o caso de um fluido compressível, viscoso e carregado na presença de um campo eletromagnético externo.

Como perspectivas futuras, espera-se a análise de fluidos relativísticos e a generalização não abeliana para o fluido, com a intenção de descrever a dinâmica do plasma de quarks e gluons.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Marmanis, “Analogy between the navier-stokes equations and maxwell’s equations: Application to turbulence,” *Physics of Fluids*, vol. 10, no. 6, pp. 1428–1437, 1998.
- [2] W. Oliveira, *Mecânica de Fluidos para Físicos*.
- [3] R. Jackiw, “Inserting group variables into fluid mechanics,” 2004.
- [4] U. W. Heinz, “Kinetic theory for nonabelian plasmas,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, no. UFTP 108/83, p. 351, 1983.
- [5] Y. Choquet-Bruhat, “Cosmological yang-mills hydrodynamics,” *Journal of mathematical physics*, vol. 33, no. 5, pp. 1782–1785, 1992.
- [6] D. D. Holm and B. A. Kupershmidt, “Yang-mills magnetohydrodynamics: nonrelativistic theory,” *Physical Review D*, vol. 30, no. 12, p. 2557, 1984.
- [7] M. H. van Putten, “The theory of ideal yang-mills fluids in symmetric hyperbolic form,” 1993.
- [8] J.-P. Blaizot and E. Iancu, “Energy-momentum tensors for the quark-gluon plasma,” *Nuclear Physics B*, vol. 421, no. 3, pp. 565–592, 1994.
- [9] T. Kambe, “A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with maxwell’s equations,” *Fluid dynamics research*, vol. 42, no. 5, p. 055502, 2010.
- [10] R. J. Thompson and T. M. Moeller, “A maxwell formulation for the equations of a plasma,” *Physics of Plasmas*, vol. 19, no. 1, p. 010702, 2012.
- [11] M. J. Lighthill, “On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 222, pp. 1–32, The Royal Society, 1954.
- [12] T. Kambe, *Elementary fluid mechanics*. World Scientific, 2007.

- [13] E. M. Abreu, J. A. Neto, A. C. Mendes, and N. Sasaki, “Abelian and non-abelian considerations on compressible fluids with maxwell-type equations and minimal coupling with the electromagnetic field,” *Physical Review D*, vol. 91, no. 12, p. 125011, 2015.
- [14] G. Russakoff, “A derivation of the macroscopic maxwell equations,” *American Journal of Physics*, vol. 38, no. 10, pp. 1188–1195, 1970.
- [15] V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] V. I. Arnold and B. A. Khesin, “Topological methods in hydrodynamics,” *Annual review of fluid mechanics*, vol. 24, no. 1, pp. 145–166, 1992.
- [17] V. Zeitlin, “On the structure of phase-space, hamiltonian variables and statistical approach to the description of two-dimensional hydrodynamics and magnetohydrodynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 25, no. 4, p. L171, 1992.
- [18] A. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, and F. Takakura, “Metafluid dynamics as a gauge field theory,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 33, no. 2, pp. 346–354, 2003.
- [19] S. Mahajan, “Temperature-transformed “minimal coupling”: Magnetofluid unification,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 3, p. 035001, 2003.
- [20] A. Schlüter, “Über den ursprung der magnetfelder auf sternem und im interstellaren raum,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 5, no. 2, pp. 65–71, 1950.
- [21] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. No. v. 6, Elsevier Science, 2013.
- [22] M. Van Dyke, *An album of fluid motion*. An Album of Fluid Motion, Parabolic Press, 1982.
- [23] U. Frisch and A. Kolmogorov, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [24] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [25] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. New York, NY: Wiley, 3rd ed. ed., 1999.
- [26] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.