

Integração Fracionária nos Ciclos Econômicos de Longo Prazo no Brasil: Evidências Iniciais de Criticalidade Auto-Organizada

Lucas Sabioni Lopes^{*}

Leandro Roberto de Macedo[†]

Silvia Harumi Toyoshima[‡]

Sumário: 1. Introdução; 2. Criticalidade auto-organizada: ciclos econômicos como pilhas de areia; 3. Metodologia e base de dados; 4. Resultados; 5. Conclusão; Apêndice.

Palavras-chave: Ciclos Econômicos, Criticalidade Auto-Organizada, Análise do Espectro Singular, ARFIMA, Brasil.

Códigos JEL: E32, C22.

O presente artigo estuda os ciclos econômicos no Brasil sob a ótica da teoria da criticalidade auto-organizada (SOC), em que as flutuações ocorrem como avalanches que se constroem lentamente no tempo, em um sistema dinâmico conduzido endogenamente para o ponto crítico. Para tanto, obteve-se uma série de ciclos de longo prazo com a técnica de Análise do Espectro Singular, a qual foi, então, utilizada em modelos ARFIMA(p, d, q). A série considerada foi o produto interno bruto (PIB) trimestral, disponível entre 1947 e 2012. Os resultados mostram que os ciclos de longo prazo podem durar de três a pouco mais de 12 anos, com média de nove anos. Os períodos de arrefecimento da atividade têm duração aproximada de cinco anos e taxa de crescimento relativamente baixa, de 2,9% a.a. Nos períodos expansivos a duração é ligeiramente menor, 3,75 anos, e a taxa de crescimento é elevada, de 6,9% a.a. Em adição, a volatilidade da produção apresenta um padrão em “U” invertido, atingindo um pico na metade da década de 1980. As estimações ARFIMA indicam fortemente que $d \approx 0,5$, exatamente o valor previsto pelo modelo seminal SOC. Assim, não é possível rejeitar a viabilidade desta teoria para o caso brasileiro, a qual diz, como corolário, que as flutuações cíclicas da produção são em grande parte inevitáveis.

^{*}Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Economia. Av. Dr Raimundo Monteiro de Rezende, 330, Centro, Governador Valadares, MG, Brasil. CEP35010-177. Email: lucas.lope@ufjf.edu.br

[†]Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Economia. Email: leandro.macedo@ufjf.edu.br

[‡]Universidade Federal de Viçosa (UFV), Departamento de Economia. Av. Peter Henry Rolfs, s/n, Campus Universitário, Viçosa, MG, Brasil. CEP 36570-000. Email: htsilvia@ufv.br



In this paper, we search for evidence of self-organized criticality (SOC) in the Brazilian aggregate production. In order to do so, long-term growth cycles are extracted from gross domestic product (GDP) data, by using the Singular Spectrum Analysis. Then, this time series is utilized in ARFIMA(p, d, q) regressions. Data set consists of quarterly observations from 1947 to 2012. As our results show, long-term growth cycles may range between 3 and 12 years, with an average duration of 9 years. Slow-down phases usually last 5 years, with a relatively low growth-rate of 2.9% p.a. By the other hand, expansions average 375 years, but have a higher rate of variation (6.9% p.a.). Additionally, volatility in Brazil has presented an inverted U-shape pattern, reaching a peak in the middle of the 1980s. Our ARFIMA estimations strongly point out towards $d \approx 0.5$, which is exactly the value predicted by canonical SOC models. Therefore, when explaining Brazilian growth cycles, we cannot reject the viability of this theory, which implies, as a corollary, that output fluctuations are in a large extent unavoidable.

1. INTRODUÇÃO

Desde meados da década de 1980, grande parte dos países desenvolvidos experimentaram um extenso período de crescimento econômico estável, conhecido como Grande Moderação (Kim & Nelson, 1999; McConnell & Perez-Quiros, 2000; Stock & Watson, 2002). No Brasil, em função dos diversos problemas com a contenção da inflação, só se pode usufruir deste contexto mais tarde. Existia, contudo, uma visão disseminada de que a ciência macroeconômica, especialmente na área monetária, fora exitosa, havendo pouco espaço para ganhos adicionais de bem-estar advindo das políticas discricionárias (Lucas, 2003).

Como argumenta Caballero (2010), a crise internacional do final de 2007 desafiou essa noção, reacendendo o interesse dos pesquisadores para a área dos ciclos econômicos e colocando à prova modelos teóricos consolidados na literatura, como o dos Ciclos Reais de Negócios (RBC) e as formulações de equilíbrio geral estocástico (DSGE).¹ Segundo este autor, atualmente é possível distinguir duas linhas de estudo na área: a “central”, que enquadra os modelos RBC e DSGE, em que as flutuações econômicas são geradas por choques exógenos aleatórios em sistemas essencialmente lineares (Kydland & Prescott, 1982; Plosser, 1989; Clarida, Galí & Gertler, 1999; entre outros); e, a “periférica”, que procura introduzir complexidades nos modelos, como efeitos dominó, avalanches e surtos de pânico (ver, por exemplo, Bak, Chen, Scheinkman & Woodford, 1993; Allen & Gale, 2000; Caballero & Simsek, 2009).

O presente artigo destaca uma destas novas abordagens, a da criticalidade auto-organizada (SOC),² em que os ciclos econômicos ocorrem como avalanches (Bak et al., 1993; Scheinkman & Woodford, 1994). A analogia básica do modelo é uma pilha de areia onde são adicionados grãos sucessivamente: a princípio, um grão deixado sobre a pilha produz um efeito ínfimo no agregado, entretanto, ao passo que a inclinação do monte se acentua, um grão adicional pode gerar uma grande avalanche. No limite, oscilações de várias intensidades podem ser iniciadas por pequenas perturbações aleatórias exógenas (Scheinkman & Woodford, 1994).

Dessa forma, o principal objetivo deste artigo é averiguar se os ciclos econômicos no Brasil exibem características de sistemas com criticalidade auto-organizada, possibilidade ainda não explorada pela literatura prévia. Especificamente, pretendeu-se filtrar da série do produto interno bruto (PIB) o componente relativo aos ciclos de longa duração e, após isso, verificar se essa série tem uma constante de

¹RBC vem do termo em inglês *Real Business Cycles*. A sigla DSGE deriva da expressão *dynamic stochastic general equilibrium model*.

²Do termo em inglês *self-organized criticality*.

integração fracionária, como prevê os modelos SOC. Para tanto, as técnicas de Análise do Espectro Singular (Broomhead & King, 1986) e ARFIMA (Hosking, 1981) foram utilizadas. A base de dados é constituída de dados trimestrais entre 1947 e 2012, estando disponível em Bonelli & Rodrigues (2010).

Estudos que avaliam a persistência das séries macroeconômicas no Brasil consideram, em sua maioria, a taxa de inflação (Fava & Alves, 1998; Reisen, Cribari-Neto & Jensen, 2003; Figueiredo & Marques, 2009; Figueiredo & Marques, 2011; Silva & Vieira, 2013). Em que se pese alguma divergência de resultados em função de amostras diferentes, as estimativas têm apontando para uma constatação de integração no intervalo entre zero (excluso) e 0,5 (incluso), principalmente no período pós Plano Real. Marques & Fava (2011), por sua vez, encontram suporte à hipótese de memória longa na média e no componente sazonal do desemprego na região metropolitana de São Paulo.

Para o caso dos agregados produtivos, a evidência disponível na literatura é bastante escassa. O único estudo prévio de que se tem conhecimento é devido a Silva & Gomes (2011). Tais autores, ao estudar os dados anuais do PIB e do PIB per capita entre 1900 a 2008 com modelos ARFIMA, encontram evidências favoráveis à hipótese de raiz unitária na tendência secular do crescimento do país.³ Portanto, o presente estudo contribui em uma direção complementar, ampliando o entendimento da dinâmica do PIB ao testar uma teoria promissora para a explicação da mecânica de suas flutuações cíclicas.

O restante do artigo está dividido em mais quatro seções, além da introdução: na seção 2, descreve-se o do modelo de ciclos econômicos com SOC; na seção 3, discorre-se sobre a base de dados e a metodologia utilizada; na seção 4, apresentam-se os resultados; e, na seção 5, conclui-se o artigo.

2. CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA: CICLOS ECONÔMICOS COMO PILHAS DE AREIA

Ao longo dos anos, diversos modelos têm sido sugeridos para explicar a instabilidade dos sistemas econômicos. Um estudo seminal nesse contexto é o de Slutsky (1937). Segundo o autor, o componente cíclico da produção poderia ser caracterizado, de maneira bastante satisfatória, linearmente, como uma média ponderada de choques aleatórios, isto é, por meio do modelo econométrico de médias móveis do tipo $MA(q \rightarrow \infty)$.

A tradição de Slutsky (1937) está presente nas modernas teorias dos ciclos econômicos como, por exemplo, na dos Ciclos Reais de Negócios (RBC) e nos modelos dinâmicos de equilíbrio geral estocástico (DSGE) novo-keynesianos. Na estrutura RBC básica (Kydland & Prescott, 1982, e Plosser, 1989, entre outros), as oscilações dos agregados são explicadas dentro de um arcabouço teórico de equilíbrio geral, com agentes maximizadores e concorrência perfeita, em que as flutuações são geradas por choques tecnológicos aleatórios em equações estruturalmente lineares e são respostas dos agentes face às perturbações percebidas. Portanto, intervenções governamentais são indesejáveis, pois afastam os indivíduos do ótimo econômico.

Nas formulações novo-keynesianas (Galí & Gertler, 2007, e Clarida et al., 1999, entre outros) são adicionadas moeda, competição monopolística e rigidezes nominais à estrutura básica RBC. Mudam-se as conclusões a respeito da condução da política, que passa a ter o potencial de elevar o bem-estar. Contudo, a força motora dos ciclos e os mecanismos de transmissão dessas das duas correntes teóricas são essencialmente iguais.

A teoria RBC e os modelos DSGE obtiveram grande difusão no meio acadêmico, possivelmente em razão de sua construção baseada em micro-fundamentos e na evidência disponível internacionalmente de que as variáveis macroeconômicas, com exceção do emprego, teriam uma raiz unitária (Nelson & Plosser, 1982, e King, Plosser, Stock & Watson, 1991, entre outros). Entretanto, elas ainda são alvo de sério criticismo.

³Para o caso dos Estados Unidos da América, Diebold & Rudebusch (1989) encontraram persistência de longa duração em diversos indicadores da atividade econômica.



Em particular, [Caballero \(2010\)](#) argumenta que mesmo após muita calibração, os modelos RBC e novo-keynesiano só foram capazes de reproduzir oscilações leves na produção e tiveram desempenho insatisfatório no que concerne às variações do nível geral de preços ([Mankiw, 1989](#), e [Rotemberg & Woodford, 1996](#), encontram resultados semelhantes).

[Scheinkman & Woodford \(1994\)](#) explicam que o problema com as teorias citadas anteriormente advém do fato de que é mais razoável supor os choques exógenos nas preferências e nos custos de produção como variáveis aleatórias independentes, de forma que a lei dos grandes números faria com que seus efeitos sobre o agregado da economia desaparecessem (isto é, várias perturbações que somam zero). Constatação que torna os eventos extremos mais improváveis do que realmente se observa nos dados.

Segundo [Caballero \(2010\)](#), essa necessidade de ampliar o entendimento a respeito da mecânica dos ciclos econômicos tem estimulado a consideração de novos elementos teóricos. Nessa perspectiva, surge o modelo de criticalidade auto-organizada aplicado à economia de [Bak et al. \(1993\)](#). Na abordagem SOC, recessões e expansões podem ser geradas por uma série de choques independentes e de baixa magnitude que atingem setores produtivos específicos.

Comparam-se os ciclos com avalanches em pilha de areia: imagina-se um monte de areia, que representa a atividade econômica agregada, onde são despejados novos grãos sucessivamente, que denotam os choques exógenos. Se o estado inicial do monte não é muito íngreme, um grão adicional produz apenas um pequeno rearranjo dos outros em sua vizinhança. Contudo, à medida que a inclinação da pilha se acentua e chega em um nível crítico, o cair de um único novo grão pode gerar uma grande avalanche. De maneira similar, se a pilha de areia se inicia acima do ponto crítico, então ela imediatamente colapsa em uma avalanche. Assim, sistemas que exibem SOC tendem naturalmente ao ponto crítico, em que grande instabilidade macro pode ser gerada na presença de choques aleatórios setoriais e pouco significativos ([Bak et al., 1993](#); [Scheinkman & Woodford, 1994](#)).

[Bak et al. \(1993\)](#) postulam que esse tipo de dinâmica pode surgir em uma economia com dois elementos centrais, a saber: i) interações locais entre as firmas; e, ii) não linearidades na função de produção, geradas por indivisibilidades. Em “i”, assume-se que cada firma tenha relações comerciais (compra de insumos e venda de produtos) com um número reduzido de outras unidades próximas geograficamente. Esquemáticamente, os autores organizam as unidades produtivas em uma grade com L linhas e colunas, onde cada firma específica compra insumos de duas firmas abaixo e vende produtos para outras duas firmas acima. Em “ii”, considera-se uma tecnologia em que a produção ocorre em conjuntos de duas unidades. Além disso, considera-se igualmente ótimo reter zero ou uma unidade do produto em estoque.⁴

É possível demonstrar que, em conjunto, interações locais e descontinuidades no processo produtivo podem produzir o tipo de oscilação da pilha de areia. Como explicam [Scheinkman & Woodford \(1994, pp.420 e 421\)](#), a lógica é a seguinte: cada encomenda recebida por um produtor inicia uma reação em cadeia no setor produtivo com extensão que varia de acordo com a configuração inicial dos estoques. Se a ordem pode ser suprida com o estoque existente, o efeito desencadeado é nulo. Caso contrário, cada produtor envia encomendas para dois fornecedores adjacentes, que podem transmiti-la para seus próprios fornecedores e, assim, sucessivamente.

De acordo com [Scheinkman & Woodford \(1994\)](#), quando L tende ao infinito, as avalanches de encomendas continuam a existir, pois elas convergem em probabilidade para uma distribuição leptocúrtica, em que os eventos extremos ocorrem com frequência mais alta que a normal. Especificamente, [Bak \(1996\)](#) argumenta que a probabilidade de uma determinada avalanche, $N(s)$, é uma lei de potência do tamanho da avalanche, s , na seguinte forma: $N(s) = s^{-\alpha}$, com $\alpha = 4/3$. Ao se comparar com a lei de potência de

⁴Modela-se um processo produtivo em que a produção de duas unidades minimiza os custos médios. Assim, se os estoques da firma estão em zero e ela recebe a encomenda de uma unidade do bem, produzem-se duas unidades e a adicional é retida em seu inventário.

um ruído branco, $N(s) = s^0$, uma constante, em que cada evento têm a mesma probabilidade, e com a de um passeio aleatório, $N(s) = s^{-2}$, que tem um decaimento mais rápido das probabilidades de eventos extremos, percebe-se que as séries de tempo do modelo de Bak et al. (1993) se situam em algum lugar entre esses dois processos bem disseminados na literatura econômica. De fato, a teoria original da pilha de areia (Bak, Tang & Wiesenfeld, 1987) prevê avalanches que seguem uma regra de potência do tipo $N(s) = s^{-1}$.

Decorre daí outra maneira de interpretar as séries de tempo implicadas pelo modelo SOC: suas flutuações (avalanches) têm memória longa. Hosking (1981), em um amplo estudo sobre o tema, conclui que a lei de potência “1/s” está no limiar entre estacionariedade e não estacionariedade, possuindo uma constante de integração, d , igual a 0,5.⁵ Neste caso, a série é invertível, com uma função impulso reposta (FIR) que apresenta diversas defasagens significativas, mas é não estacionária, tendo variância indefinida. De maneira mais geral, testes empíricos para criticalidade auto-organizada consistem em investigar se as séries de avalanches apresentam memória longa. Assim, objetiva-se verificar se o parâmetro $d \in (0, 1/2]$ (Hosking, 1981). No presente artigo, as avalanches são aproximadas pelos ciclos econômicos de longo prazo, obtidos por meio da filtragem da série original pela Análise do Espectro Singular. Em seguida, estimam-se coeficientes de diferenciação fracionários em modelos ARFIMA(p, d, q). Detalhes adicionais acerca dos métodos e da base de dados são fornecidos na seção seguinte.

3. METODOLOGIA E BASE DE DADOS

A metodologia do presente artigo está dividida em duas seções. A primeira descreve a Análise do Espectro Singular, utilizada com o propósito de filtrar os ciclos econômicos dos dados originais e das oscilações irregulares, ruidosas e de elevada frequência que dificultam a estimação dos parâmetros referentes à memória da série. A segunda apresenta o método de cálculo do parâmetro de diferenciação fracionário, d .

As pesquisas que estudam os ciclos econômicos têm se dividido em duas vertentes, a saber: a dos ciclos de negócios (*business cycles*), que assume que as movimentações da atividade agregada afetam simultaneamente a tendência e os ciclos, considerando impraticável, portanto, uma distinção precisa dos componentes das séries de tempo; e, a dos ciclos de crescimento (*growth cycles*), que modela as flutuações cíclicas como desvios ao redor de uma tendência temporal identificável.

Apesar das dificuldades empíricas,⁶ a abordagem dos ciclos de crescimento é interessante por uma série de razões, como exposto por Zarnowitz & Ozyildirim (2006). Especificamente no contexto desta pesquisa, argumenta-se que nos últimos anos diversos países têm experimentado fases de arrefecimento do crescimento, em vez de quedas absolutas da atividade em geral, fato que é bem caracterizado pelo desvios em torno da tendência. Em adição, a filtragem dos componentes das séries de tempo possibilita testar teorias e realizar previsões. Por essas razões e pela necessidade de se obter uma série de tempo para avaliar a memória dos ciclos no país, emprega-se aqui a abordagem *growth cycles*.

O agregado em estudo é o produto interno bruto (PIB) real e dessazonalizado, disponibilizado por Bonelli & Rodrigues (2010) para os anos de 1947 a 2012, com periodicidade trimestral, isto é, com 264 observações.⁷ A Figura 1 apresenta os logaritmos desta série, denotada por $y(t)$ quando conveniente.

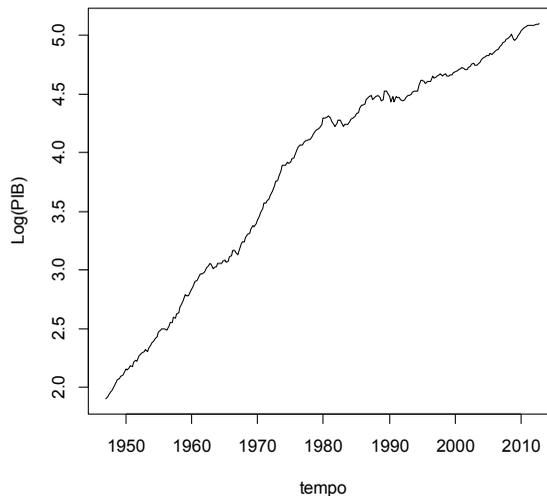
⁵A relação entre este parâmetro e a constante da regra de potência é dada por $2d = \alpha$ (Baillie, 1996).

⁶Usualmente, é difícil estimar tendências de crescimento adequadas aos agregados econômicos. Sabe-se ainda que quando esse componente é grosseiramente aproximado, as conclusões a respeito das oscilações são seriamente afetadas (Canova, 1998).

⁷A série calculada pelos autores varia de 1947 a 1980, uma vez que após este último ano os dados são disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A metodologia, baseada em Mönch & Uhlig (2005), consiste em encontrar séries mensais ou trimestrais coincidentes com o PIB trimestral pós-1980 e que também estão disponíveis durante o período anterior (1947–1980). Em seguida, utiliza-se o filtro de Kalman para estimar os valores do PIB trimestral. Utiliza-se, ainda, a restrição de que a taxa de variação da série recuperada seja igual à do PIB anual, fornecido pelas Contas Nacionais do IBGE.



Figura 1. Série de tempo do logaritmo do PIB real variando de 1947 a 2012, $y(t)$.



Fonte: Elaboração do autor; dados de Bonelli & Rodrigues (2010).

Tratamentos adicionais realizados sobre os dados são descritos nas seções seguintes. A seção de resultados traz também uma discussão das características dos ciclos econômicos brasileiros obtidos após a filtragem da série com a Análise do Espectro Singular.

3.1. Análise do Espectro Singular

A aplicação da Análise de Espectro Singular (SSA)⁸ no contexto de sistemas dinâmicos foi proposta inicialmente por Broomhead & King (1986). Nela, a série original é dividida em partes que representam características específicas para, em seguida, ser reconstruída com aquelas que se julgam necessárias à análise. Desse modo, a SSA pode ser utilizada, inclusive, como um método de decomposição de séries temporais. Nota-se que o presente artigo parece ser o primeiro a utilizar a SSA com intuito de filtrar os componentes do PIB brasileiro.⁹ A SSA está bastante relacionada com a técnica de componentes principais, utilizada no estudo de fenômenos multivariados, baseando-se, assim, na extração de autovetores que explicam proporções decrescentes da variância da série de tempo original (Broomhead & King, 1986).

Para descrever o método, consideram-se, inicialmente, os elementos de (1) a seguir, um vetor reconstruído dos dados originais, $y(t)$, definindo um ponto no espaço \mathbb{R}^n ou seja,

$$y(t), y(t + 1), y(t + 2), \dots, y(t + (n - 1)). \tag{1}$$

onde n corresponde ao atraso de reconstrução utilizado e $t + (n - 1)$ representa o tamanho do vetor escolhido.

O objetivo central do método é decompor $y(t)$ em vários elementos para, em seguida, agrupá-los em conjuntos que façam sentido à análise, como tendência, ciclos de diversas durações, sazonalidade e resíduo. Introduce-se, agora, o conceito de n -janela, entendida como uma caixa deslizante que deixa visível n elementos consecutivos da série temporal. Uma vez definida a n -janela, à medida que se avança

⁸Do termo em inglês *singular spectrum analysis*.

⁹Hassani & Zhigljavsky (2009) e Hassani, Soofi & Zhigljavsky (2013) aplicam o método para a análise do PIB no Irã e da inflação nos Estados Unidos da América, respectivamente.

sobre os dados são construídos vetores no espaço n -dimensional denotados por

$$w_i \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

tal que $N = \tilde{N} - n + 1$, \tilde{N} sendo o número de observações. Essas sequências, conhecidas como n -histórias, são utilizadas para construir uma matriz W de ordem $N \times n$, a qual será chamada, doravante, de matriz de trajetórias. Assim,

$$w = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_N \end{pmatrix}. \quad (3)$$

O fator $N^{-1/2}$ é introduzido em (3) para fins de ponderação.

Para poder filtrar a série, obtendo-se os componentes de interesse, [Broomhead & King \(1986\)](#) propõem que se encontre um conjunto de vetores $s_i \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, N$ que geram, por sua ação em W , um conjunto de autovetores linearmente independentes e ortogonais, $c_i \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, N$. Sem perda de generalidade, considera-se que os c_i sejam normalmente distribuídos, formando uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . A partir disso, pode-se derivar a seguinte relação:

$$s'_i W = \sigma_i c'_i, \quad (4)$$

em que σ_i é um conjunto de constantes reais empregadas para normalizar os vetores. Efetua-se agora a extração dos autovetores.

Pela ortonormalidade de c_i , pode-se escrever

$$s'_i W W' s_j = \sigma_i \sigma_j \delta_{ij}, \quad (5)$$

relação advinda do teorema da decomposição espectral de $W W'$, de ordem $N \times N$, com δ representando o delta de Kronecker, que assume valor um quando $i = j$ e zero caso contrário. Os autovetores de $W W'$ formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n e são eles que satisfazem (5) precisamente, do que se pode escrever seguinte relação:

$$W W' s_i = \sigma_i^2 s_i. \quad (6)$$

Da relação (6), mostra-se que o conjunto de autovetores s_i é obtido da decomposição espectral da matriz de covariâncias de $W W'$, com $\sigma_i^2 s_i$ representando os autovalores deste procedimento. Contudo, um problema que surge ao utilizar (6) para calcular os autovetores é que a ordem da matriz $W W'$ é, em geral, muito elevada, tornando sua diagonalização trabalhosa. É mais eficiente obtê-los da matriz $V = W' W$ que tem ordem $n \times n$, igual ao comprimento da janela analisada ([Broomhead & King, 1986](#)). Ao proceder desta forma, os autovetores de V são derivados da seguinte relação:

$$V c_i = \sigma_i^2 c_i. \quad (7)$$

Para finalizar a descrição do método, define-se C como a matriz com colunas formadas pelos autovetores c_i . Portanto, tem-se que $V C = C \Sigma^2$. Mas, pela definição de V , isto é igual a $(W C)' (W C) = \Sigma^2$, em que Σ^2 denota a matriz diagonal constituída pelos autovalores de V em ordem decrescente.

A filtragem da série de tempo em diferentes componentes requer a definição do comprimento dos vetores constantes na matriz de trajetórias. Segundo [Golyandina, Nekrutkin & Zhigljavsky \(2001\)](#), o número escolhido deve ser suficientemente grande para proporcionar uma detalhada descrição dos dados. Ademais, os autores sugerem a análise gráfica dos logaritmos dos autovalores. Uma lenta redução em seus valores indica a presença de ruído. Assim, após alguns exercícios de tentativa e erro, optou-se por $n = 24$. A opção $n = 12$ provou-se demasiadamente curta, enquanto que $n > 24$ foi desnecessariamente longa.



Após discriminar os componentes da série $y(t)$, prossegue-se com sua reconstrução utilizando apenas os componentes desejáveis. [Broomhead & King \(1986\)](#) sugerem a inspeção da forma dos vetores como um método adequado alegando sem, contudo, apresentar prova matemática, que “autovetores determinísticos” têm uma forma regular, ao contrário dos “autovetores estocásticos” que apresentam formas irregulares. A série deve, então, ser reconstruída com os seus componentes regulares. Aqui emprega-se, além da análise do formato dos autovetores, a inspeção gráfica dos autovalores. [Golyandina et al. \(2001\)](#) argumentam que, como regra, as parcelas ruidosas aparecem com um decaimento lento no gráfico dos autovalores.

Para distinguir quais são os componentes associados à tendência, ao ciclo e ao resíduo utilizam-se a análise gráfica e a matriz de correlação dos componentes reconstruídos, w -correlation. Se dois componentes reconstruídos têm w -correlation igual a zero, isso indica que se deve considerá-los separadamente. Ao contrário, valores altos para essas correlações significam que os componentes podem ser agrupados ([Hassani, Heravi & Zhigljavsky, 2009](#)).

Assim, uma vez de posse da série de tempo reconstruída dos ciclos econômicos, livre dos ruídos e das baixas frequência, $c(t)$, considera-se esta variável como a proxy para as avalanches.¹⁰ Assim, o próximo passo para o teste da criticalidade auto-organizada nas flutuações da atividade econômica brasileira consiste em computar os coeficientes de diferenciação fracionária da série $c(t)$, como se descreve na seção seguinte.

3.2. Modelos de memória longa ARFIMA(p, d, q)

Uma forma natural de conciliar o bom desempenho preditivo em curto prazo do método ARIMA de [Box & Jenkins \(1976\)](#) com a possibilidade teórica de processos com memória longa, como é o caso do modelo SOC explorado pelo presente artigo, é flexibilizar a constante de integração para valores no conjunto dos números reais, o que conduz ao ARFIMA(p, d, q). Espera-se que as autocorrelações de curto prazo sejam descritas apropriadamente pela escolha de p e q , enquanto que o comportamento de longo prazo seja bem caracterizado pelo parâmetro d ([Hosking, 1981](#)). O modelo ARFIMA para a série filtrada dos ciclos econômicos, $c(t)$, pode ser assim descrito ([Hosking, 1981](#)):

$$\phi(B)(1 - B)^d(c(t) - \bar{c}) = \theta(B)\varepsilon(t), \tag{8}$$

em que B é o operador de defasagens; $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio com os termos autorregressivos; $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio com os termos média móvel; \bar{c} é uma constante; e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco. O operador de diferenças fracionário é definido como a expansão binomial (9), na forma:

$$\begin{aligned} (1 - B)^d &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k \\ &= 1 - dB - \frac{1}{2}d(1-d)B^2 - \frac{1}{6}d(1-d)(2-d)B^3 - \dots \end{aligned} \tag{9}$$

Dada a esperada estacionariedade da série cíclica,¹¹ o método de máxima verossimilhança exata (EML, *exact maximum likelihood*) é, a priori, adequado à estimação de (8). Contudo, segundo [Doornik & Ooms \(2004\)](#), os valores obtidos para d pelo EML podem ser enviesados quando a média de $c(t)$ é uma função de parâmetros incidentais. Estes autores sugerem, então, a abordagem da máxima verossimilhança modificada (MPL, *modified profile likelihood*) como forma de contornar o problema do viés. Contudo, para

¹⁰[Bartolozzi, Leinweber & Thomas \(2005\)](#) utilizam procedimento similar, porém trabalhando no domínio da frequência.

¹¹A série é definida como desvios ao longo da tendência, oscilando ao redor de uma média muito próxima a zero.

fins de robustez e comparação, aplica-se também o método de mínimos quadrados não lineares (NLS, *nonlinear least squares*). O NLS tem o benefício de ser não viesado se $d > -0,5$, sendo adequado aos casos não estacionários (Baillie, 1996).

4. RESULTADOS

4.1. Decomposição e reconstrução dos componentes do PIB

A decomposição da série do logaritmo PIB real com a metodologia SSA produziu os autovalores representados na Figura 2, parte (a). Veja-se que a partir do décimo primeiro vetor o decaimento fica bastante lento, indicando a presença de ruído. A matriz de correlação w dos doze primeiros e dos últimos doze autovetores é apresentada nas partes (c) e (d) da figura, respectivamente. Tal matriz é desenhada em escala de cinza, com a cor branca para correlação zero e a cor preta para alta correlação, próxima da unidade. Com a análise da matriz de correlação w da parte (c) da figura mencionada, pode-se perceber que o primeiro vetor é o único não correlacionado com os demais. Os autovetores dois e três apresentam movimentações comuns. O mesmo ocorre com os de número três e quatro. Há, ainda, um agrupamento entre os vetores de número cinco a 12, e entre os restantes, apresentados na parte (d) da Figura 2.

A inspeção da forma dos autovetores permite verificar que os quatro primeiros contêm elementos compatíveis com a tendência da série:¹² o primeiro, captura a curva de crescimento linear, que domina a dinâmica da variável; o segundo, a quebra estrutural ocorrida em 1980, quando a taxa de crescimento secular da economia brasileira se reduziu; e, o terceiro e quarto, movimentos lentos de aceleração e decréscimo da taxa de crescimento de longo prazo. Dessa forma, pôde-se reconstruir uma tendência temporal para o PIB potencial com componentes que variam suavemente ao longo do tempo, em concordância com as sugestões de Zarnowitz & Ozyildirim (2006). As séries reconstruídas estão ilustradas na Figura 3, com a tendência destacada na parte (b).

Os vetores de cinco a 12 representam a série dos ciclos de longo prazo, escolhidos de forma que as oscilações de elevada frequência e ruidosas fossem deixadas como resíduo da análise espectral (veja-se o comportamento aparentemente estocástico dos autovetores de número 13 a 24, na Figura A-1). Assim, a parte (b) da Figura 2 traz a matriz de correlações w para os três elementos reconstruídos, quais sejam, a tendência (vetores um a quatro), os ciclos econômicos de longo prazo (cinco a 12) e o resíduo (13 a 24). Nota-se que a cor branca das correlações entre estes componentes mostra que a separação foi bastante satisfatória.

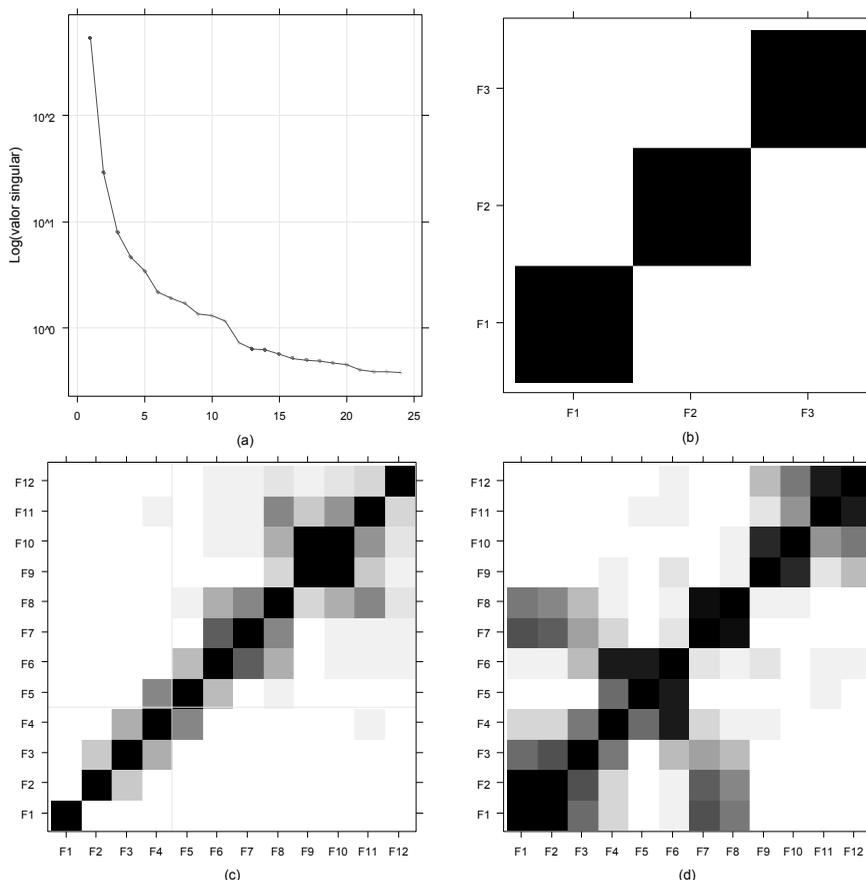
É possível perceber que a série cíclica filtrada com a metodologia SSA, representada na parte (c) da Figura 3, tem ondas de duração elevada e picos e vales facilmente identificados visualmente. Ressalta-se que a referida série se comporta como um versão suavizada das obtidas com o filtro HP (Hodrick & Prescott, 1997) ou de bandas (Baxter & King, 1999).¹³ Por outro lado, o resíduo engloba as frequências mais altas — parte (d) da mesma figura —, as quais podem prejudicar a obtenção do parâmetro de diferenciação da série. A caracterização dos ciclos econômicos de longo prazo no Brasil e a estimação do parâmetro de diferenciação fracionário são realizadas a seguir, na próxima seção.

¹²A Figura A-1, do Apêndice, ilustra os autovetores. A Figura A-2 traz as séries de tempo reconstruídas utilizando cada autovetor individual, facilitando a visualização das argumentações apresentadas.

¹³Após utilizar o parâmetro λ de 12.000 no filtro HP, e três e 32 trimestres no filtro de bandas, como sugerido por Zarnowitz & Ozyildirim (2006). A Figura A-3 do Apêndice, ilustra a tendência e os ciclos de cada série. É fácil perceber que o filtro SSA e HP ($\lambda = 12.000$) extraem praticamente a mesma tendência. O filtro BP gera uma curva um pouco mais sinuosa do que as anteriores. A maior diferença se dá entre as séries cíclicas, em que a obtida com a análise do espectro singular se comporta como uma versão suavizada das outras, destacando as ondas de longo prazo.



Figura 2. Resultados da decomposição do espectro singular do $\log(\text{PIB})$.



Notas: (a) Autovalores; (b) correlações w dos componentes reconstruídos; (c) correlações w dos 12 primeiros autovetores; (d) correlações w dos últimos 12 autovetores.

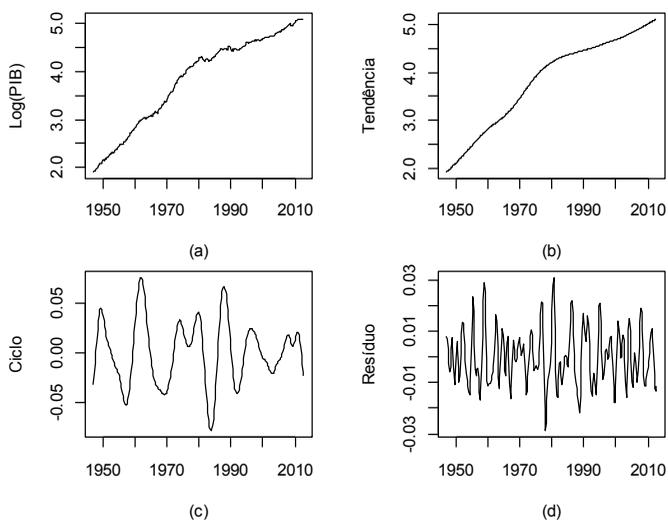
4.2. Caracterização dos ciclos econômicos e estimação do parâmetro de integração

Os fatos obtidos com a decomposição dos ciclos de longo prazo da economia brasileira no período de 1947 a 2012 são resumidos na [Tabela 1](#). Os painéis A e B trazem, respectivamente, as informações a respeito das recessões ou contrações, períodos em que o crescimento se encontra aquém da linha de tendência estimada, e das expansões, momentos em que o crescimento é acelerado (acima da tendência). Nas datações, apresentam-se os anos em formato de dois dígitos, seguidos do trimestre em algarismos romanos.

A duração das fases de arrefecimento e crescimento são significativamente maiores que as apresentadas pelo Comitê de Datação dos Ciclos econômicos, CODACE.¹⁴ Em média, a duração das recessões e expansões datadas por este órgão é de cinco e 12 trimestres, respectivamente, enquanto que a datação dos ciclos de longo prazo indica os números de 20 (recessões) e 15 (expansões) trimestres. Isso se dá porque, primeiramente, o filtro utilizado suaviza as flutuações de menor magnitude, destacando as grandes ondas da série e, em segundo lugar, pela abordagem dos ciclos de crescimento, que considera

¹⁴Iniciativa do Instituto Brasileiro de Economia, IBRE, da Fundação Getúlio Vargas. O CODACE segue técnicas difundidas internacionalmente para marcar o início e o fim das expansões e recessões no Brasil.

Figura 3. Séries reconstruídas.



Notas: (a) logaritmo do PIB; (b) tendência de crescimento; (c) ciclos de longo prazo; (d) resíduo.

Tabela 1. Informações das fases dos ciclos econômicos de longo prazo – duração, amplitude e volatilidade.

Período	Duração	Variação acumulada do PIB (%)	Crescimento anualizado do PIB (%)	Desvio padrão dos ciclos (%)
<i>Painel A: recessões/contrações</i>				
49-II/57-II	32	49,9	6,2	2,85
61-IV/69-II	30	40,2	5,4	4,1
74-I/76-IV	11	17,4	6,3	0,95
79-IV/83-IV	16	0,1	0,0	4,37
87-IV/92-I	17	-2,4	-0,6	4,01
96-II/03-I	27	14,3	2,1	1,51
07-IV/09-II	6	1,1	0,7	0,46
Média	20	17,2	2,9	3,3
<i>Painel B: expansões</i>				
57-II/61-IV	18	51,5	11,4	4,53
69-II/74-I	19	41,8	8,8	2,75
76-IV/79-IV	12	17,4	5,8	1,3
83-IV/87-IV	16	22,4	5,6	5,34
92-I/96-II	17	16,2	3,8	2,36
03-I/07-IV	19	21,3	4,5	1,22
09-II/10-IV	6	10,1	6,8	0,52
Média	15	25,8	6,7	3,3



como recessões tanto os períodos de queda da atividade em valor absoluto, como aqueles em que o desempenho da economia cai abaixo do potencial.

As quedas da atividade variam de seis a 32 trimestres, isto é, podem alcançar até oito anos. Os três períodos mais longos de atividade abaixo do normal foram entre 1949 e 1957; 1961 e 1969; e 1996 e 2003. No primeiro, a queda na atividade pode estar associada às tentativas de estabilização da inflação nos anos de 1947 a 1949, bem como a uma queda acentuada das exportações, dado o restabelecimento da produção nos países afetados pelas grandes guerras, e a reorientação dos financiamentos norte-americanos para outras partes do mundo (Vianna, 1989). Não obstante, o crescimento no período foi bastante satisfatório para os parâmetros atuais, atingindo 6,2% ao ano em média. No segundo, datado de 1961-IV a 1969-II, demarca-se um movimento de correção dos desequilíbrios gerados pelo forte crescimento do período anterior (entre 1957 e 1961), com destaque para o Programa de Ação Econômica do Governo (PAEG), implementado com o objetivo de conter a alta da inflação (Resende, 1989). No terceiro, com duração de 27 trimestres entre 1996 e 2003, a relativamente baixa taxa de crescimento média de 2,1% ao ano pode ser explicada, entre outros fatores, pelos ajustes necessários à contenção da escalada de preços do período precedente, a qual atingiu níveis hiperinflacionários e demandou a adoção de políticas fiscais e monetárias contracionistas.

Veja-se, contudo, que apesar das três recessões citadas terem sido as mais longas, elas não foram as mais severas. As quedas mais acentuadas na atividade econômica no país aconteceram na década de 1980 e na última recessão financeira internacional, ao fim de 2007. Nos anos de 1979 a 1983 e de 1987 a 1992 a variação acumulada da produção foi de 0,1% e -2,4%, respectivamente, com taxas de crescimento anuais nulas ou negativas em média. Fato associado aos graves desajustes nas esferas fiscal e externa do governo brasileiro, os quais alimentaram altas históricas na inflação que abalaram severamente o funcionamento da economia. A crise de 2007, apesar de ser a mais curta na datação realizada, gerou uma retração significativa, quando o país cresceu a 0,7% ao ano, em comparação com a taxa média de 4,5% ao ano, ocorrida anteriormente a este evento. Historicamente, as recessões têm apresentado uma taxa de crescimento de cerca de 3% ao ano. Entretanto, verifica-se que desde 1980 a taxa média nas fases de arrefecimento declinou bastante, de algo em torno de 6% a.a., entre 1947 e 1979, para 0,5% a.a. após essa data.

As expansões têm duração média de 15 trimestres, isto é, cerca de quatro anos. Além disso, o desvio padrão do comprimento desta fase é menor. As expansões mais longas ocorreram por 19 trimestres, entre 1969 e 1974, e 2003 e 2007. Em média, a taxa de crescimento anual nesta fase é de 6,7%, valor que tem se mantido estável desde o final da década de 1970. Infere-se, portanto, que os ciclos do crescimento econômico no Brasil são caracterizados por períodos de crescimento acelerado (expansões) de menor duração que as fases de crescimento abaixo da tendência (recessões).

Duas das expansões mais longas e acentuadas ocorreram no início da amostra. A primeira, com uma duração de 18 trimestres (4,5 anos) e crescimento acumulado de mais de 50%, foi datada de 1957 ao fim de 1961, estando intimamente relacionada com o crescimento induzido pelo Plano de Metas. A segunda, ocorrida no período de 1969 a 1974, obteve duração de 19 trimestres (4,75 anos) e crescimento acumulado de quase 42%, englobando a fase conhecida como milagre econômico. Destaca-se também o período entre 2003 e 2007, com 19 trimestres, no qual a economia do país pôde usufruir dos benefícios da estabilização inflacionária e de condições macroeconômicas externas favoráveis.

Quanto à instabilidade da atividade econômica agregada em longo prazo, as recessões e expansões parecem ser igualmente voláteis, com média de 3,3% para o desvio padrão da série cíclica em ambas as fases. Desse modo, não é possível falar em recessões ou expansões mais ou menos voláteis, mas apenas em conjunturas de maior ou menor instabilidade. Ademais, os dados mostram que a volatilidade segue um padrão em “U” invertido, atingindo o valor máximo na década de 1980, reduzindo-se desde então.

A Tabela 2 mostra a duração dos ciclos completos da produção agregada. Duas formas de medição são fornecidas: a primeira, que demarca um ciclo como o tempo necessário para que dois picos consecuti-

Tabela 2. Duração completa dos ciclos de longo prazo no Brasil – 1947 a 2012.

<i>Painel A: ciclos pico a pico</i>							
Picos	49-II	61-IV	74-I	79-IV	87-IV	96-II	07-IV
	61-IV	74-I	79-IV	87-IV	96-II	07-IV	10-IV
Duração	51	50	24	33	35	47	13
Média (anos)	36	(9)					
Maior (anos)	51	(13)					
Menor (anos)	13	(3)					
<i>Painel B: ciclos vale a vale</i>							
Vales	57-II	69-II	76-IV	83-IV	92-I	03-I	–
	69-II	76-IV	83-IV	92-I	03-I	09-II	–
Duração	49	31	29	34	45	26	–
Média (anos)	36	(9)					
Maior (anos)	49	(12)					
Menor (anos)	26	(7)					

vos sejam atingidos, no Painel A; e a segunda, como o intervalo entre dois vales da atividade econômica, no Painel B.

É possível perceber que a economia brasileira tem passado por uma vasta gama de ciclos diferentes, não havendo, necessariamente, uma tendência à redução do comprimento das ondas nos últimos anos. Os ciclos mais longos têm duração média de 50 trimestres, ou pouco mais de 12 anos, e o mais curto perdurou por 13 trimestres, isto é, cerca de três anos. Assim, a datação realizada fornece ciclos econômicos que muito se assemelham com a definição clássica de [Burns & Mitchell \(1946\)](#), segundo os quais as flutuações são movimentos recorrentes, mas não periódicos, variando de mais de um ano até dez ou 12 anos.

Destaca-se agora um resultado interessante: veja-se que ambas as medições fornecem o valor médio de 36 trimestres (nove anos) para os ciclos de longo prazo no Brasil. Conforme [Tvede \(1997\)](#), ciclos que variam de 32 a 40 trimestres recebem a alcunha de “ciclos de Juglar”, em homenagem ao trabalho do estatístico francês Clément Juglar de 1.862, intitulado “Les Crises Commerciales et Leur Retour Périodeque en France, en Angleterre et aux Etats Unis”.

Os ciclos de Juglar são explicados pelas flutuações do investimento em capital fixo. No início de uma expansão, com a demanda pressionando a oferta agregada, a produção é aumentada com a utilização crescente da capacidade ociosa. Com a acentuação do movimento altista da atividade, contudo, novas ordens só podem ser supridas com investimento adicional. Nessa fase, preços e taxas de juros sobem, produção se eleva e como o crédito está disponível, um número crescente de inversões é realizado. Ao longo do tempo, o aumento paulatino da taxa de juros faz a seleção adversa ganhar contorno e, mais cedo ou mais tarde, prejuízos gerados por negócios com resultados negativos são disseminados via cadeia de crédito na economia, iniciando a recessão.

Dada a estrutura de defasagens envolvidas com a imobilização do capital, geram-se os ciclos de oito a 10 anos de Juglar. A longa década perdida de 1980 pode ser interpretada sob a luz desse referencial. Sabe-se que ela foi precedida por intenso investimento em plantas produtivas, com a esfera pública sendo um elemento central nesse processo. Não deveria ser surpresa, portanto, que as severas crises do período tenham sido acompanhadas de graves desequilíbrios do governo.



A duração média de nove anos para os ciclos econômicos no país indica que essa série de tempo pode apresentar memória longa. Nesse sentido, a **Tabela 3** traz estimativas do parâmetro de integração fracionário. Há, contudo, um problema prático ao estimar d de séries de tempo em que esse parâmetro pode ser 0,5: estimativas EML deverão ser ligeiramente inferiores a este valor, ao passo que o método MPL não irá convergir (Doornik & Ooms, 2004). Os autores sugerem, neste caso, obter estimativas MPL do parâmetro usando a primeira diferença da série, o que foi realizado por este estudo (a quarta coluna apresenta os d 's estimados para a $\Delta c(t)$ com o método MPL). A sexta e oitava colunas trazem as estimativas EML de d para a série cíclica do PIB obtida com o filtro HP e de bandas (BP), sem diferenciar.

Percebe-se que as estimativas da constante de integração fracionária pelos métodos EML e MPL são muito similares quando se considera a série cíclica obtida com o filtro SSA, estando acima do valor de 0,45 em quase todas as especificações. De fato, as diferenças ocorrem na terceira ou quarta casas decimais. Adicionalmente, verifica-se que dentre as especificações testadas, a que obteve menor valor AIC foi a ARFIMA(2, d , 2), com $d = 0,493$ no caso do estimador EML, e $d = 0,43$ quando se considera o estimador MPL. Caracteriza-se, assim, a longa dependência temporal dos dados.

Os exercícios de comparação, reforçam essa visão. Veja-se que, em três dos sete modelos os ciclos HP exibiram memória longa ((0, d , 0), (0, d , 1) e (0, d , 2)), contra dois casos de antipersistência ((1, d , 1) e (1, d , 2)) e um de memória curta ((1, d , 0)). No que concerne aos ciclos do filtro de bandas, em sete dos nove modelos houve memória longa (sequencialmente, de (0, d , 0) a (2, d , 1)), com a maioria das estimativas de d maiores ou iguais a 0,45, contra duas estimações em que se obteve memória curta ((1, d , 2) e (2, d , 2)). Nota-se que a maior variabilidade dos valores de d para as duas últimas séries é provavelmente gerada pelo ruído existente, algo que não ocorre com os ciclos filtrados, que obtêm valores mais estáveis para o parâmetro.

A **Tabela 4** traz as estimativas do método de mínimos quadrados não linear para o parâmetro de integração da série de ciclos de longo duração (representado como d_{NLS} na tabela). As estimativas iniciais realizadas com modelos similares aos apresentados na **Tabela 3** proporcionaram valores demasiadamente altos para d . Tal fato pode ser observado pelos valores obtidos pelas especificações ((0, d , 0), (1, d , 0)) da **Tabela 4**. Contudo, tal fato pode ter sido ocasionado pelo erro de variáveis omitidas, dado que o valor de d reduziu com a introdução de novas defasagens. A partir do modelo (6, d , 0), d converge para valores próximos a 0,5, confirmando os resultados obtidos anteriormente. Portanto, mesmo quando

Tabela 3. Estimativas do parâmetro de integração fracionário.

Modelo ARIMA(p, d, q)	\hat{d}_{EML}	E.P.	\hat{d}_{MPL}	E.P.	\hat{d}_{HP}	E.P.	\hat{d}_{BP}	E.P.
(0, d , 0)	0,499*	(0,002)	0,499*	(0,001)	0,493*	(0,009)	0,495*	(0,007)
(1, d , 0)	0,499*	(0,002)	0,498*	(0,002)	0,036 ^{NS}	(0,119)	0,447*	(0,064)
(2, d , 0)	0,498*	(0,003)	0,491*	(0,013)	NC	–	0,482*	(0,025)
(0, d , 1)	0,499*	(0,002)	0,499*	(0,002)	0,437*	(0,058)	0,491*	(0,013)
(0, d , 2)	0,499*	(0,002)	0,499*	(0,002)	0,281*	(0,082)	0,423*	(0,060)
(1, d , 1)	NC	–	0,498*	(0,003)	–0,283**	(0,137)	0,247**	(0,120)
(2, d , 1)	0,497*	(0,005)	0,453*	(0,060)	NC	–	0,462*	(0,050)
(1, d , 2)	NC	–	0,496*	(0,006)	–0,494*	(0,139)	–0,107 ^{NS}	(0,176)
(2, d , 2)	0,493*	(0,010)	0,430*	(0,080)	NC	–	0,275^{NS}	(0,172)

Notas: *, ** e *** denotam significância estatística a, respectivamente, 1, 5 e 10%. E.P. é o erro padrão da estimativa. NS e NC representam ausência de significância ao nível de 10% e falta de convergência do algoritmo de estimação, respectivamente. Valores em negrito minimizaram o critério de informação de AIC. As siglas EML, MPL, HP e BP representam, nessa ordem, máxima verossimilhança exata, de perfil modificado, método de decomposição HP (Hodrick & Prescott, 1997) e de bandas (Baxter & King, 1999).

Tabela 4. Estimativas de d com o método de mínimos quadrados não linear.

Modelo ARIMA	(0, d , 0)	(1, d , 0)	(2, d , 0)	(3, d , 0)	(4, d , 0)	(5, d , 0)	(6, d , 0)
\hat{d}_{NLS}	3,188	2,501	NC	NC	NC	1,651	0,403
E.P.	0,052	0,040	–	–	–	0,368	0,129
p -valor	0,000	0,000	–	–	–	0,000	0,000
AIC	–12,652	–13,584	–	–	–	–14,263	–14,341
Modelo ARIMA	(7, d , 0)	(8, d , 0)	(9, d , 0)	(10, d , 0)	(11, d , 0)	(12, d , 0)	–
\hat{d}_{NLS}	0,505	0,548	0,669	0,792	0,536 ^a	0,505	–
E.P.	0,109	0,100	0,130	0,237	0,152	0,159	–
p -valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	–
AIC	–14,464	–14,479	–14,487	–14,492	–14,542	–14,540	–

Notas: \hat{d}_{NLS} refere-se à estimativa do parâmetro de diferenciação estimada pelo método dos mínimos quadrados não lineares. NC representa “não convergiu”. ^a Valor de d estimado que minimiza o critério AIC.

se usa diversas defasagens para a estrutura de correlações de curto prazo, o parâmetro de integração fracionário continua a indicar memória longa.

Assim, a evidência não permite rejeitar a hipótese $d = 0,5$ para a série cíclica de longo prazo, sendo importante aprofundar um pouco mais sobre essa questão. A [Tabela A-1 do Apêndice](#) traz os testes clássicos de raiz unitária realizados sobre a série (ADF, KPSS, Phillips-Perron e Zivot-Andrews). Em todas as abordagens existem indicações de estacionariedade, o que, segundo [Baillie \(1996\)](#), é um indicio de processo covariância-estacionário. Assim, a análise conjunta dos resultados dos modelos ARFIMA e dos testes clássicos de raiz unitária parecem apontar na direção de ciclos econômicos de longo prazo próximos da região entre estacionariedade e não estacionariedade, isto é, na vizinhança de $d = 0,5$.

O fato de que a constante de integração da série dos ciclos de longo prazo possa assumir esse valor, o mesmo previsto pelos modelos clássicos de criticalidade auto-organizada, chama a atenção. Se os ciclos econômicos no país são gerados por um mecanismo SOC, um corolário que se segue para a formulação de políticas é o de que as flutuações das diversas magnitudes são inevitáveis. Não há política monetária ou fiscal que possa produzir crescimento prolongado, sem ser seguida de uma crise, engatilhada por um choque inesperado que produz um efeito em cadeia.

Nesse contexto, governos e bancos centrais poderiam ser tentados a conduzir a produção agregada para o estado crítico, levando a atividade econômica ao seu máximo. Mas, isso exigiria uma capacidade implausível de coordenação, a qual colocaria todo o sistema em risco no caso de uma pequena perturbação. Assim, as políticas micro e macroprudenciais adotadas por alguns bancos centrais após a última crise internacional (iniciada no final de 2007) parecem ser as mais adequadas no contexto de SOC. A noção de frear o crescimento das bolhas de crescimento, controlando o grau de alavancagem da economia, e de prover a liquidez necessária às instituições fragilizadas uma vez que as avalanches irrompem reduz a incerteza que emerge da complexidade dos sistemas econômicos ([Caballero, 2010](#)).¹⁵

Como um resultado final, apresentam-se evidências de que os ciclos de longo prazo podem obedecer a uma regra de potência da forma $N(s) = s^\alpha$. Para isso, a série $c(t)$ foi transformada em desvios quadráticos ($s = c(t)^2$) e absolutos ($s = |c(t)|$). Em seguida, seus valores foram organizados de acordo com a frequência de ocorrência, $n = N(s)$, em que se implementaram regressões do tipo $\text{Log}(n)$ versus $\text{Log}(s)$ (procedimento similar é explorado por [Bak \(1996\)](#)). Se o sistema exibe SOC, essas relações deveriam ser aproximadamente lineares, com o coeficiente angular α informando a potência. A [Figura 4](#)

¹⁵ [Cajueiro & Andrade \(2010\)](#) formalizam a política em contexto SOC em linha com o raciocínio apresentado.



ilustra graficamente os resultados obtidos com os dados brasileiros.

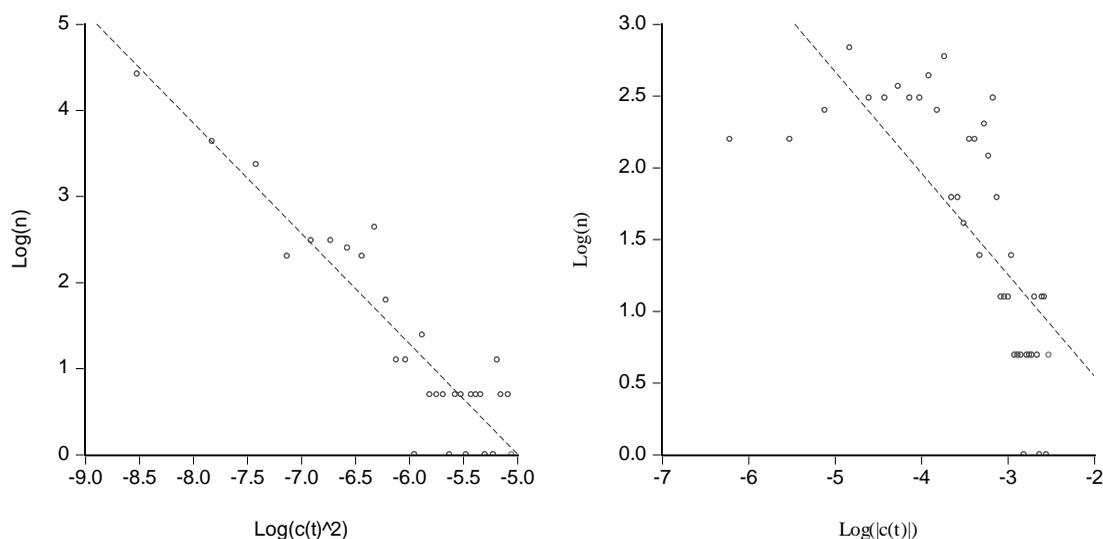
Como pode ser visto no primeiro gráfico da **Figura 4**, o ajustamento linear é bastante satisfatório para o caso dos desvios quadrados. O coeficiente angular estimado é $-1,282$, significativo a 1%, com R^2 de 85%, valores descritos em detalhes na **Tabela 5**. É possível ver que o intervalo de confiança de 99% não permite rejeitar a hipótese de que $\alpha = -1$. O ajuste dos dados em valores absolutos, exibido no segundo gráfico da **Figura 4**, foi menos preciso, em que se obteve a estimativa pontual de $-0,707$ para α , significativa a 1%, com R^2 de 53%. Como anteriormente, intervalos de confiança mais amplos incluem valores próximos a -1 para o coeficiente em questão, isto é, o valor previsto pelo modelo da pilha de areia. Mais seguro ainda é afirmar que todos os intervalos de confiança rejeitam as hipóteses $\alpha = 0$ (ruído branco) e $\alpha = -2$ (passeio aleatório). Conforme os resultados apontam, os ciclos de longo prazo podem obedecer a uma regra de potência, linear, em que se tem o mesmo mecanismo gerador, ou seja, a mesma dinâmica temporal, para grandes e pequenas avalanches.

5. CONCLUSÃO

O presente artigo estudou quantitativa e qualitativamente os ciclos econômicos de longa duração no Brasil, durante o período de 1947 a 2012, com o objetivo de testá-los sob a ótica da teoria da criticidade auto-organizada. Esta última modela as flutuações da atividade agregada como fruto de micro-oscilações independentes, que se somam lentamente no tempo e conduzem o sistema a um ponto crítico, a partir do qual podem ocorrer crises de diferentes magnitudes. A série cíclica utilizada foi obtida com o método de análise do espectro singular, capaz de filtrar as frequências altas e ruidosas dos dados. Em seguida, modelos ARFIMA(p, d, q) foram ajustados para estimar a ordem de integração do componente cíclico.

A caracterização dos ciclos econômicos mostrou que eles apresentam diversas durações e amplitudes, podendo variar de três a pouco mais de 12 anos. A atividade econômica em longo prazo distinguiu-se por duas fases: i) períodos recessivos, com duração média de 5 anos e taxa de crescimento relativamente baixa, de 2,9% a.a.; e ii) períodos expansivos, com duração média menor, de 3,75 anos, e taxa de cresci-

Figura 4. Relações da regra de potência da série cíclica do PIB.



Notas: (esquerda) quadrado da série cíclica, $c(t)^2$. (direita) valor absoluto da série cíclica, $|c(t)|$.

Tabela 5. Estimativas pontuais e intervalos de confiança da regra de potência.

Variável	α	R^2	I.C. 90%		I.C. 95%		I.C. 99%	
			L.I.	L.S.	L.I.	L.S.	L.I.	L.S.
$\text{Log}(c(t)^2)$	-1,282	85%	-1,457	-1,108	-1,492	-1,072	-1,565	-0,999
$\text{Log}(c(t))$	-0,707	53%	-0,890	-0,525	-0,927	-0,488	-1,002	-0,413

Notas: α denota o coeficiente da regra de potência; I.C. o intervalo de confiança; L.I. o limite inferior; e L.S. o limite superior.

mento acelerada, de 6,9% a.a. Como um todo, os ciclos no país, sejam eles medidos de pico a pico, ou de vale a vale, tiveram uma duração aproximada de nove anos, muito próxima da sugerida por Juglar (ver Tvede (1997), a respeito). Adicionalmente, a volatilidade da produção agregada apresentou um padrão em “U” invertido, atingindo seu máximo em meados da década de 1980.

As estimações ARFIMA realizadas proporcionaram um resultado de grande relevância. A maioria delas mostrou que $d \approx 0,5$ para os ciclos econômicos de longo prazo no Brasil, exatamente o valor previsto pelo modelo seminal de criticalidade auto-organizada, proposto por Bak et al. (1987). Por essa razão, não é possível rejeitar a hipótese de que as oscilações cíclicas são inevitáveis no país, sendo geradas por elevadas não linearidades.

Isso não se traduz, contudo, em ineficácia da política econômica. Ao contrário, a teoria SOC diz que os sistemas dinâmicos se organizam lentamente para uma região de atração crítica, em que o tamanho das avalanches depende do nível em que se encontrava a atividade econômica anteriormente (a inclinação da pilha de areia). Assim, políticas de caráter preventivo, como as micro e macroprudenciais adotadas pelos bancos centrais recentemente são bastante interessantes. Conforme argumenta Cabalero (2010), deve-se objetivar o controle do tamanho das bolhas de crescimento econômico, em vez de inflá-las ainda mais, o que se conhece atualmente por *lean policy* (Mishkin, 2011). Adicionalmente, é igualmente recomendado fornecer liquidez e ativos confiáveis quando as crises irrompem, pois, essas medidas podem reduzir seu espalhamento e as incertezas existentes nesses períodos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allen, F., & Gale, D. (2000). Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1), 1–33.
- Baillie, R. T. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Bak, P. (1996). *How nature works: The science of self-organized criticality*. Copernicus.
- Bak, P., Chen, K., Scheinkman, J. & Woodford, M. (1993). Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: Self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics. *Ricerche Economiche*, 47(1), 3–30.
- Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59(4), 381–384.
- Bartolozzi, M., Leinweber, D. B. & Thomas, A. W. (2005). Self-organized criticality and stock market dynamics: An empirical study. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 350(2), 451–465.
- Baxter, M., & King, R. G. (1999). Measuring business cycles: Approximate band-pass filters for economic time series. *Review of Economics and Statistics*, 81(4), 575–593.
- Bonelli, R., & Rodrigues, C. F. (2010, Dezembro). *PIB trimestral: Proposta metodológica e resultados para o período 1947–79* (Texto para Discussão N° 3). Rio de Janeiro: FGV/IBRE. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10438/11687>



- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis, control, and forecasting*. San Francisco, CA: Holden Day. (edição revisada)
- Broomhead, S., & King, G. (1986). Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 20(2-3), 217–236.
- Burns, A. F., & Mitchell, W. C. (1946). *Measuring business cycles* [NBER Book Series Studies in Business Cycles]. Disponível em: <http://papers.nber.org/books/burn46-1>
- Caballero, R. J. (2010, October). *Macroeconomics after the crisis: Time to deal with the pretense-of-knowledge syndrome* (Working Paper N° 16429). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: [10.3386/w16429](https://doi.org/10.3386/w16429)
- Caballero, R. J., & Simsek, A. (2009, May). *Complexity and financial panics* (Working Paper N° 14997). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: [10.3386/w14997](https://doi.org/10.3386/w14997)
- Cajueiro, D. O., & Andrade, R. F. (2010). Controlling self-organized criticality in sandpile models. *Physical Review E*, 81(1), 015102.
- Canova, F. (1998). Detrending and business cycle facts. *Journal of Monetary Economics*, 41(3), 475–512.
- Clarida, R., Galí, J., & Gertler, M. (1999). The science of monetary policy: A new Keynesian perspective. *Journal of Economic Literature*, 37(4), 1661–1707.
- Diebold, F. X., & Rudebusch, G. D. (1989). Long memory and persistence in aggregate output. *Journal of Monetary Economics*, 24(2), 189–209.
- Doornik, J. A., & Ooms, M. (2004). Inference and forecasting for ARFIMA models with an application to US and UK inflation. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 8(2). doi: [10.2202/1558-3708.1218](https://doi.org/10.2202/1558-3708.1218)
- Fava, V. L., & Alves, D. C. (1998). Longa persistência nas taxas de inflação. *Brazilian Review of Econometrics*, 18(2), 245–264.
- Figueiredo, E. A., & Marques, A. M. (2009). Inflação inercial como um processo de longa memória: Análise a partir de um modelo Arfima-Figarch. *Estudos Econômicos*, 39(2), 437–458.
- Figueiredo, E. A., & Marques, A. M. (2011). Inflação inercial sob mudanças de regime: Análise a partir de um modelo MS-ARFIMA, 1944–2009. *Economia Aplicada*, 15(3), 443–457.
- Galí, J., & Gertler, M. (2007, October). *Macroeconomic modeling for monetary policy evaluation* (Working Paper N° 13542). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: [10.3386/w13542](https://doi.org/10.3386/w13542)
- Golyandina, N., Nekrutkin, V. & Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of time series structure: SSA and related techniques*. New York: Chapman & Hall – CRC.
- Hassani, H., Heravi, S. & Zhigljavsky, A. (2009). Forecasting European industrial production with singular spectrum analysis. *International Journal of Forecasting*, 25(1), 103–118.
- Hassani, H., Soofi, A. S. & Zhigljavsky, A. (2013). Predicting inflation dynamics with singular spectrum analysis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 176(3), 743–760.
- Hassani, H., & Zhigljavsky, A. (2009). Singular spectrum analysis: Methodology and application to economics data. *Journal of Systems Science and Complexity*, 22(3), 372–394.
- Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997). Postwar US business cycles: An empirical investigation. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 29(1), 1–16.
- Hosking, J. R. (1981). Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1), 165–176.
- Kim, C. J., & Nelson, C. R. (1999). Has the US economy become more stable? A Bayesian approach based on a Markov-switching model of the business cycle. *Review of Economics and Statistics*, 81(4), 608–616.
- King, R. G., Plosser, C. I., Stock, J. H. & Watson, M. W. (1991). Stochastic trends and economic fluctuations. *American Economic Review*, 81(4), 819–840.
- Kydland, F., & Prescott, E. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50(6), 1345–1370.

- Lucas, R. E. (2003). Macroeconomic priorities. *The American Economic Review*, 93(1), 1–14.
- Mankiw, N. (1989). Real business cycles: A new keynesian perspective. *Journal of Economic Perspectives*, 3(3), 79–90.
- Marques, G. D. O., & Fava, V. L. (2011). Persistência e memória longa sazonal na série de desemprego da região metropolitana de São Paulo. *Economia Aplicada*, 15(2), 177–198.
- McConnell, M., & Perez-Quiros, G. (2000). Output fluctuations in the United States: What has changed since the early 1980s? *American Economic Review*, 90(5), 1464–1476.
- Mishkin, F. S. (2011, February). *Monetary policy strategy: Lessons from the crisis* (Working Paper N° 16755). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: [10.3386/w16755](https://doi.org/10.3386/w16755)
- Mönch, E., & Uhlig, H. (2005). Towards a monthly business cycle chronology for the Euro area. *Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, 2005(1), 43–69.
- Nelson, C., & Plosser, C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10(2), 139–162.
- Plosser, C. (1989). Understanding real business cycles. *Journal of Economic Perspectives*, 3(3), 51–77.
- Reisen, V. A., Cribari-Neto, F. & Jensen, M. J. (2003). Long memory inflationary dynamics: The case of Brazil. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 7(3), 1558–3708.
- Resende, A. L. (1989). Estabilização e reforma: 1964–1967. In M. P. Abreu (Ed.), *A ordem do progresso: Cem anos de política econômica republicana, 1889–1989* (pp. 213–231). Rio de Janeiro: Campus.
- Rotemberg, J., & Woodford, M. (1996). Real-business-cycle models and the forecastable movements in output, hours, and consumption. *The American Economic Review*, 86(1), 71–89.
- Scheinkman, J. A., & Woodford, M. (1994). Self-organized criticality and economic fluctuations. *The American Economic Review*, 84(2), 417–421.
- Silva, C. G., & Gomes, F. A. R. (2011). A persistência das flutuações no produto: Uma análise secular do crescimento econômico brasileiro. *Economia*, 12(3), 383–406.
- Silva, C. G., & Vieira, F. V. (2013). Persistência inflacionária regional brasileira: Uma aplicação dos modelos arfima. *Economia Aplicada*, 17(1), 115–134.
- Slutzky, E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5(2), 105–146.
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (2002, August). *Has the business cycle changed and why?* (Working Paper N° 9127). National Bureau of Economic Research (NBER). doi: [10.3386/w9127](https://doi.org/10.3386/w9127)
- Tvede, L. (1997). *Business cycles: From John Law to chaos theory*. Harwood Academic Publishers.
- Vianna, S. B. (1989). Política econômica externa e industrialização. In M. P. Abreu (Ed.), *A ordem do progresso: Cem anos de política econômica republicana, 1889–1989* (pp. 105–122). Rio de Janeiro: Campus.
- Zarnowitz, V., & Ozyildirim, A. (2006). Time series decomposition and measurement of business cycles, trends and growth cycles. *Journal of Monetary Economics*, 53(7), 1717–1739.



APÊNDICE.

Figura A-1. Autovetores extraídos do PIB, 1947 a 2012.

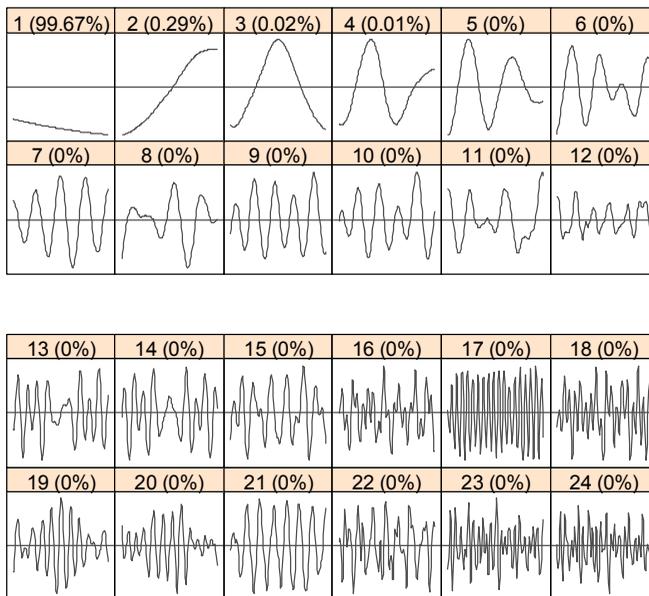


Figura A-2. Séries reconstruídas com os autovetores extraídos do PIB, 1947 a 2012.

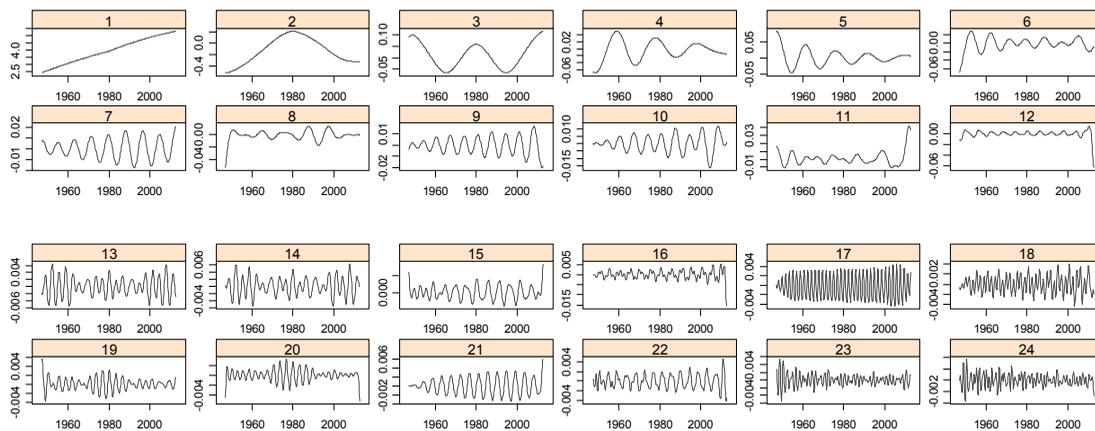
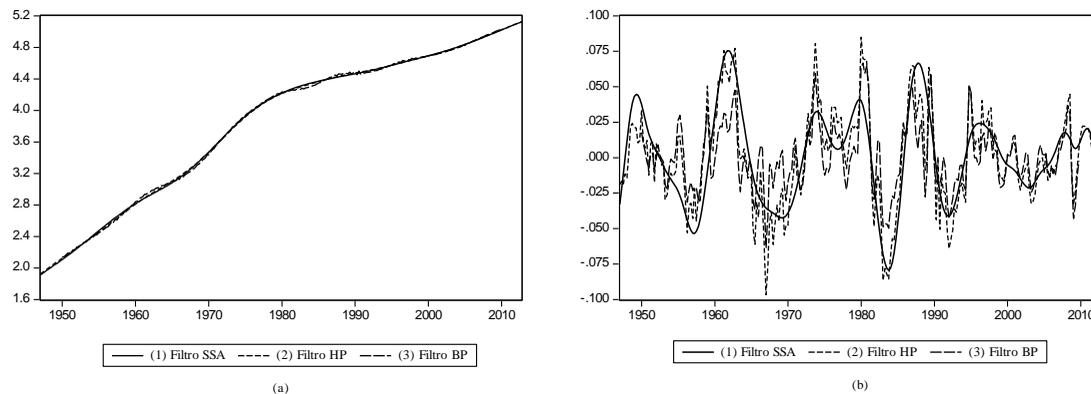


Figura A-3. Comparação de filtragens alternativas.



Notas: (a) tendências; (b) ciclos.

Tabela A-1. Testes de raiz unitária sobre a série dos ciclos de longo prazo em nível.

Teste	Modelo	Estatística	Valor crítico			Conclusão
			1%	5%	10%	
ADF	–	–5,03	–2,57	–1,94	–1,62	R_{H_0} 1%
ADF	C	–5,02	–3,46	–2,87	–2,57	R_{H_0} 1%
ADF	$C + T$	–5,02	–3,99	–3,43	–3,14	R_{H_0} 1%
PP	–	–3,78	–2,57	–1,94	–1,62	R_{H_0} 1%
PP	C	–3,78	–3,46	–2,87	–2,57	R_{H_0} 1%
PP	$C + T$	–3,79	–3,99	–3,43	–3,14	R_{H_0} 1%
KPSS	C	0,024	0,739	0,463	0,347	NR_{H_0} 10%
KPSS	$C + T$	0,024	0,216	0,146	0,119	NR_{H_0} 10%
Zivot-Andrews	C	–5,30	–5,34	–4,93	–4,58	R_{H_0} 5%
Zivot-Andrews	$C + T$	–5,34	–5,57	–5,08	–4,82	R_{H_0} 5%

Notas: C e T denotam constante e tendência, respectivamente. R_{H_0} e NR_{H_0} representam, nesta ordem, a rejeição ou não da hipótese nula ao nível de significância indicado.