

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Acadêmico em Matemática

William Massayuki Sakaguchi Yamashita

*Estudos de Modelos Dispersivos da Dinâmica
de Populações*

Juiz de Fora

2014

William Massayuki Sakaguchi Yamashita

*Estudos de Modelos Dispersivos da Dinâmica
de Populações*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre, na Área de Matemática Aplicada.

Orientador: Dr. Grigori Chapiro.

Coorientadora: Dra. Lucy Tiemi Takahashi.

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Yamashita, William Massayuki Sakaguchi.
Estudos de Modelos Dispersivos da Dinâmica de Populações /
William Massayuki Sakaguchi Yamashita. -- 2014.
81 f.

Orientador: Grigori Chapiro
Coorientadora: Lucy Tiemi Takahashi
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-
Graduação em Matemática, 2014.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Solução na forma de
Onda Viajante. 3. Leis de Conservação. 4. Dengue. I. Chapiro,
Grigori, orient. II. Takahashi, Lucy Tiemi, coorient. III.
Título.

WILLIAM MASSAYUKI SAKAGUCHI YAMASHITA

ESTUDOS DE MODELOS DISPERSIVOS DA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



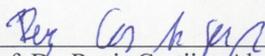
Prof. Dr. Grigori Chapiro
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



Prof. Dr.^a Lucy Tiemi Takahashi
(Coorientadora)
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



Prof. Dr. Alexei Abaevich Mailybaev
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada



Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Juiz de Fora, 25 de março de 2014.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar esta Dissertação indicando o final do percurso do Mestrado, meta conseguida com muito esforço e trabalho, para o qual interviram pessoas que colaboraram para cumprir este objetivo.

Quero agradecer o meu orientador professor Dr. Grigori Chapiro. Agradeço a ele por me aceitar, muito antes da dissertação, mas na minha iniciação científica que começou em 2010. Sua paciência, tempo, dedicação, confiança, amizade e capacidade para guiar minhas ideias foram de muito valor, não só no desenvolvimento deste trabalho, mas também na minha formação como pesquisador. Agradeço as ideias, rigorosidade e críticas com a finalidade de realizar um bom trabalho. Muito obrigado Professor.

A minha coorientadora professora Dra. Lucy Takahashi pela paciência, apoio e dedicação para me orientar. Os professores Dr. Alexei Mailybaev e Dr. Regis Soares Junior por aceitarem participar da banca examinadora. O professor Dr. Rodrigo dos Santos por aceitar a trabalhar comigo no doutorado. Aos professores Dr. Eduard Toon e Dr^a. Valéria da Rosa que muito contribuíram neste trabalho. Agradeço ao Departamento de Matemática da UFJF, aos professores, pessoal administrativo e funcionários que contribuíram na minha formação. Muito obrigado Professores e Funcionários.

A minha mãe Regina, que sempre acreditou e me apoiou nos meus objetivos. A todos meus amigos, que compartilharam comigo tempo de estudos, conversas e brincadeiras, tornando estes anos de estudos mais leves.

É claro, não poderia esquecer aos meus amigos especiais: a Gisele pelos 5 anos de muito estudo, amizade e paciência, aos meus irmãos Wilker e Pedretti pelas diversões, festas e muito futebol, à Karen, Ceili e Marina pelas conversas, brincadeiras e abraços, ao Gladston pela ajuda e brincadeiras. Aos amigos que fiz no mestrado: Rafael, Marianna, Carlos, Juan, Mariana, Sandra, Lívia, Erasmo e Pavel. Obrigado a todos os amigos que fiz nestes 5 anos em Juiz de Fora.

Agradeço o apoio financeiro da Fapemig e da Capes.

RESUMO

Nas últimas décadas, a incidência global da dengue tem crescido dramaticamente favorecida pelo aumento da mobilidade humana e da urbanização. O estudo da população do mosquito é de grande importância para a saúde pública em países como o Brasil, onde as condições climáticas e ambientais são favoráveis para a propagação desta doença. Este trabalho baseia-se no estudo de modelos matemáticos que tratam do ciclo de vida do mosquito da dengue usando equações diferenciais parciais. Nós investigamos a existência de solução na forma de onda viajante para ambos os modelos. Nós usamos um método semi-analítico combinando técnicas de Sistemas Dinâmicos (como a seção de Poincaré e análise local com base no Teorema de Hartman-Grobman) e integração numérica usando Matlab.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Solução na forma de Onda Viajante. Leis de Conservação. Dengue.

ABSTRACT

In recent decades the global incidence of dengue has grown dramatically by increased human mobility and urbanization. The study of the mosquito population is of great importance for public health in countries like Brazil, where climatic and environmental conditions are favorable for the propagation of this disease. This work is based on the study of mathematical models dealing with the life cycle of the dengue mosquito using partial differential equations. We investigate the existence of a solution in the form of travelling wave for both models. We use a semi-analytical method combining dynamical systems techniques (e.g. Poincaré section and local analysis based on Hartman-Grobman theorem) and numerical integration using Matlab.

Key-words: Partial Differential Equations. Solution in the form of Travelling Wave. Conservation Laws. Dengue.

LISTA DE FIGURAS

0.1	Localização das 20 cidades-sede da Copa do Mundo de 2014.	14
1.1	Exemplo de uma órbita homoclínica.	25
1.2	Exemplo de uma órbita heteroclínica.	26
1.3	Plano de Poincaré	27
2.1	Um fluido que atravessa um tubo com velocidade constante c em uma dimensão.	32
2.2	Interseção das características.	37
2.3	Construção das características.	37
2.4	Condição inicial para o problema de Riemann.	38
2.5	Solução do problema de Riemann no plano xt	39
2.6	(a) Curvas características. (b) Curva de choque.	44
2.7	Curvas características para uma onda de contato, onde $f'(u) > 0$ e o salto ocorre em $x_0 = 0$	47
2.8	Curvas características para uma onda de rarefação.	52
4.1	Órbita heteroclínica (γ), onde W_i^s e W_i^u são as variedades estável e instável, respectivamente, em A e B	61
4.2	Gráfico do polinômio $p_{A_1}(\lambda, c)$, onde variamos o valor de c	63
4.3	Representação do método semi-analítico para o Problema (4.6, 4.7).	65
4.4	Plano de Poincaré para o Problema (4.6, 4.7).	66
4.5	Representação do método semi-analítico para o Problema (4.26, 4.27).	70
4.6	Plano de Poincaré para o Problema (4.26, 4.27).	71

5.1	A solução do Problema (5.2) é uma onda de contato.	73
5.2	Solução do Problema (5.6), onde $m_r < m_l$	75
5.3	Solução do Problema (5.6), onde $m_l < m_r$	77

LISTA DE TABELAS

4.1	Valores para os parâmetros dimensionais no seguinte sistema de unidades: Espaço (x) = km e Tempo (t) = 1 dia.	64
4.2	Valores para os parâmetros adimensionais ν , γ , k , μ_1 , μ_2 correspondentes a Tabela 4.1.	64

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	18
1.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES	18
1.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES	19
1.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES	21
1.4 SEÇÃO DE POINCARÉ	26
2 LEIS DE CONSERVAÇÃO	28
2.1 EXEMPLOS	28
2.1.1 Equação de Burgers	29
2.1.2 Equação de Continuidade	29
2.1.3 Equação de Balanço	31
2.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO LINEARES	31
2.2.1 Caso homogêneo	31
2.2.2 Caso não-homogêneo	34
2.3 LEIS DE CONSERVAÇÃO NÃO-LINEARES	36
2.4 PROBLEMA DE RIEMANN	38
2.5 SOLUÇÕES FRACAS	39
2.6 CHOQUES	42
2.6.1 Condição de entropia	44

2.6.2	Contato	46
2.7	RAREFAÇÃO	48
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	54
3.1	MODELO SIMPLES	55
3.2	MODELO GENERALIZADO	56
4	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO EM FORMA DE ONDA VIA- JANTE	58
4.1	MODELO SIMPLES	58
4.1.1	Análise de pontos fixos	59
4.1.2	Estudo de análise local	62
4.1.3	A existência da onda viajante	64
4.2	MODELO GENERALIZADO	67
4.2.1	Análise de pontos fixos	68
4.2.2	Estudo de análise local	68
4.2.3	A existência da onda viajante	70
5	SOLUÇÃO PARTICULAR	72
5.1	MODELO SIMPLES	72
5.2	MODELO GENERALIZADO	73
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79

INTRODUÇÃO

Invasões biológicas são processos ocasionados pela introdução acidental, ou não, de espécies exóticas em um ambiente diferente de sua distribuição natural. Ao longo da história, o ser humano tem redistribuído espécies de plantas e animais no planeta, levando sementes, mudas e até animais para locais diferentes da origem deles. Estas redistribuições e adaptações provocam impactos positivos e negativos no ambiente e na qualidade de vida das pessoas.

Uma espécie exótica quando colocada num ambiente novo, geralmente não sobrevive. Mas se ela consegue se adaptar e se reproduzir, pode se tornar uma espécie que chamamos de invasora, ocupar o lugar de espécies nativas e ameaçar os *habitats* naturais fora do seu território de origem. Estas invasões biológicas constituem a segunda maior causa de perda de Biodiversidade no planeta.

O ritmo do trânsito de espécies, voluntário ou involuntário, aumentou muito nos últimos séculos, principalmente com a evolução dos meios de transporte. Isto tem permitido que espécies ultrapassem barreiras geográficas que não poderiam ser ultrapassadas naturalmente. Por exemplo, o mosquito que transmite a dengue é originário do Sudeste da Ásia e foi disseminado no Brasil, provocando epidemias da doença em algumas épocas do ano.

Invasões Biológicas é uma área importante nas pesquisas em Biomatemática e, mais ainda, quando diz respeito às espécies que são vetores de doenças que ameaçam a saúde pública de grandes populações [28]. Mosquitos do gênero *Aedes* são vetores de várias arboviroses humanas. Um dos mais importantes, talvez o mais importante, é o vírus da dengue que é uma doença viral trazendo febres e mialgias [30].

Nas últimas décadas, a incidência global da dengue tem crescido dramaticamente, favorecida pelo aumento da mobilidade humana e da urbanização [16]. Atualmente, mais de 2,5 bilhões de pessoas no mundo vivem em risco da dengue [16], principalmente em países tropicais. Mas também é possível encontrar o *Aedes aegypti* em todo o mundo (não

só nas regiões tropicais, mas também além delas, atingindo climas temperados). O *Aedes aegypti* representa o principal vetor da dengue e da febre amarela urbana, devido à sua marcada *antropofilia* e por sua capacidade de proliferar em estreita proximidade com as comunidades humanas, usando armazenamentos artificiais de água tais como: tanques, tambores, baldes, vasos de flores, etc., como locais de reprodução [2]. Devido à sua importância como vetor de doenças mortais, o significado de sua distribuição em áreas urbanas e a existência de instalações laboratoriais, torna o *Aedes aegypti* um dos mosquitos mais bem estudados. Assim, o estudo desta população é útil para a saúde pública em países onde as condições climáticas e ambientais são favoráveis ao seu desenvolvimento [10].

Neste sentido de epidemias, Hay [13] relata uma possível epidemia de dengue no Brasil em 2014. Mais especificamente, em algumas cidades-sede da 20^o Copa do Mundo FIFA de futebol, que pode afetar o turismo em grande escala, pois neste torneio de futebol espera-se vender mais de 3 milhões de ingressos e atrair mais de meio milhão de fãs internacionais. Mas os frequentadores terão mais com o que se preocupar do que a aptidão de seus principais goleadores: a dengue pode ser um problema significativo em alguns dos locais do torneio, e são necessárias medidas preventivas. Pois a dengue não é familiar para os europeus. Depois do sorteio para os jogos da fase de grupos, os fãs planejarão suas viagens. Uma coisa que já sabemos é que o risco da dengue estará perto de seu pico quando os jogos serão disputados em três das cidades-sede: Fortaleza, Natal e Salvador, todos no nordeste do país. Para explorar esse risco, Hay e seus colegas avaliaram os potenciais níveis de exposição através da análise de mapas de distribuição de dengue no Brasil e os registros de sua variação sazonal nestes locais-chave [13].

Agora, um pouco sobre a parte histórica do mosquito da dengue: temos Nishiura [21], que classificou as contribuições de abordagens matemáticas e estatísticas para a epidemiologia da dengue sem se aprofundar em detalhes matemáticos e compartilhar a teoria básica e suas aplicações, independentemente da formação matemática do leitor. Abordagens estatísticas para determinar a periodicidade de epidemias, cocirculação de diferentes sorotipos (relevantes para a patogênese da febre hemorrágica da dengue) e a importância da heterogeneidade espacial são discutidos [21].

A descrição matemática vem sendo utilizada como meio de se determinar mecanismos viáveis de controle, pois predições em relação a tempo e localização destes mosquitos permitirão um melhor direcionamento dos recursos do sistema de vigilância pública



Figura 0.1: A localização das cidades dos vinte estádios no Brasil selecionados para sediar os jogos da Copa do Mundo de futebol. O fundo corresponde a probabilidade da ocorrência de dengue, escala entre 0 (verde que representa 0% de probabilidade) e 1 (vermelho que representa 100% de probabilidade) [13].

em nosso país, tornando-o mais eficiente [30].

Neste sentido, temos o trabalho de Aldila *et. al* [1], que propõe um problema de controle ótimo vetor-hospedeiro para um modelo de transmissão da dengue. No modelo, os tratamentos com repelente são aplicados em adultos e crianças, e aqueles que se submetem ao tratamento são classificados como compartimentos tratados. Com esta classificação, o modelo é composto por 11 equações dinâmicas. O problema de controle ótimo é projetado com quatro parâmetros de controle, ou seja, as taxas de tratamento para crianças e adultos (compartimentos tratados) e as taxas de abandono de ambos os compartimentos, isto é desistir dos tratamentos. As contas de custos funcionais para o número total de pessoas infectadas, o custo do tratamento, e os custos relacionados à redução das

taxas de abandono são considerados. Os resultados numéricos para os controles ótimos e as dinâmicas relacionadas são demonstrados para o caso de estratégias de redução da epidemia e prevenção [1].

Existem várias abordagens sobre a invasão e busca de controle da dengue. Destacamos os trabalhos de Dufourd e Dumont [8], e Lee *et. al* [27]. O objetivo do trabalho de Dufourd e Dumont [8] foi desenvolver um modelo matemático para simular a dispersão do mosquito e seu controle tendo em conta os parâmetros ambientais, como elementos do vento, da temperatura, ou da paisagem. Eles particularmente focam no mosquito *Aedes albopictus*, que é agora reconhecido como um importante vetor de arboviroses humanas, como *chikungunya*, dengue, ou febre amarela. Uma forma de prevenir essas epidemias é controlar a população do vetor. Os autores usam ferramentas de controle biológico, como a Técnica do Inseto Estéril (SIT), método específico de uma espécie de controle de insetos que depende da criação em massa, a esterilização e a liberação de um grande número de insetos estéreis. Métodos como esse são de grande interesse como uma alternativa para ferramentas de controle de produtos químicos que são muito prejudiciais para o meio ambiente. O sucesso do SIT é baseado não somente em um bom conhecimento da biologia do inseto, mas também em uma modelagem precisa da distribuição do inseto. Eles consideram uma abordagem compartimental e obtiveram modelos temporais e espaço-temporais, utilizando Equações de Advecção-Difusão-Reação para modelar a dispersão do mosquito. Liberações periódicas de machos esterilizados são modelados com uma equação diferencial de impulso. Usando o operador de divisão aproximado e métodos numéricos bem adequados para cada operador, fornecem simulações numéricas para o mosquito se dispersando, e testam diferentes cenários de controle de vetores. Mostram que os parâmetros ambientais, como a vegetação, podem ter uma forte influência sobre a distribuição do mosquito e na eficiência das ferramentas de controle de vetores, como SIT [8].

Já Lee *et. al* [27], também fala sobre controle biológico. Em relação, as questões como os efeitos ambientais de métodos de controle químico, a carga econômica de manter as estratégias de controle e risco de resistência a pragas ainda permanecem, e doenças transmitidas por mosquitos prevalecem em muitos países. Outro método alternativo transgênico para o controle do mosquito é a liberação de insetos carregando um Dominante Letal (RIDL). O objetivo é considerar o controle de contraste de estratégias de dois cenários invasores via SIT e RIDL: um caso endêmico e um surto emergente. Investiga-se

como a taxa e o tamanho da liberação influenciam a região tanto o potencial de sucesso de controle e os recursos necessários para alcançá-lo, sob uma série de condições e estratégias de controle, discutem estratégias vantajosas no que diz respeito à redução dos recursos de lançamento e os custos da estratégia (em termos de números de controle de mosquito) necessária para alcançar a erradicação completa dos mosquitos [27].

Maidana e Yang [17], e Martínez e Marquina [19], determinam a existência de soluções em forma de onda viajantes, em processos de invasão do mosquito *Aedes aegypti*. Maidana e Yang [17], analisam o risco de surtos da dengue em regiões infestadas por essa espécie de mosquito. Para isso propuseram um modelo matemático baseado na difusão espacial da dengue por meio de um sistema de equações diferenciais parciais de Reação-Difusão, relacionando as populações humanas e de mosquito, em suas respectivas subclasses de indivíduos infectados e não infectados. A dinâmica da população de mosquitos considera apenas duas subpopulações: a forma alada (mosquitos fêmeas maduras) e uma população aquática (ovos, compreendendo, larvas e pupas). Ignora-se o movimento de longa distância por meios de transporte, razão pela qual a difusão é considerada restrita apenas à forma alada. A população humana é considerada homogeneamente distribuídas no espaço, de modo a descrever a difusão da dengue localizada durante um curto período de epidemias. O que ressalta uma visão macroscópica do problema. A infecção cruzada é modelada pela lei da ação das massas. Um valor limiar como uma função dos parâmetros do modelo, é obtido, o que determina a taxa de difusão e o risco de surto da dengue. Assumindo que uma área foi previamente colonizada pelos mosquitos, a taxa de difusão da doença é determinada como uma função dos parâmetros do modelo. Esta taxa de disseminação da doença é determinada pela aplicação das soluções de ondas viajantes para o sistema correspondente de equações diferenciais parciais [17].

Martínez e Marquina [19], propõem uma técnica numérica, sem oscilação, para calcular a solução da onda viajante das leis de conservação escalares com um termo de fonte rígido. Este procedimento é baseado no comportamento dinâmico descrito pela Equação Diferencial Ordinária Estacionária associada e reduz erros numéricos normalmente encontradas com estes problemas, por exemplo, oscilações espúrias e incorretas da velocidade de propagação da onda [19].

Neste trabalho, a nossa atenção está focada nos modelos matemáticos do *Aedes aegypti* e buscaremos resultados relacionados com os estudos dessas populações a partir de conceitos de Leis de Conservação e Sistemas Dinâmicos. Os aspectos selecionados de tais teorias

são essenciais para a análise das equações que governam o ciclo de vida do mosquito da dengue e para a implementação numérica.

Em geral, os modelos propostos vem de um processo de Reação e Difusão mais o termo fonte, que em geral apresentam soluções em forma de ondas viajantes ou soluções gaussianas, que se baseiam nas leis de balanceamento. No Capítulo 1, daremos uma introdução sobre a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. No Capítulo 2, apresentaremos a teoria sobre as Leis de Conservação. No Capítulo 3, destacamos o trabalho de Takahashi *et. al* [30], que propôs e fez um estudo sobre um modelo matemático da dinâmica vital do mosquito da dengue. Ainda neste capítulo, será apresentado o modelo proposto por Freire e Torrisi [10], que visam uma generalização do modelo de [31]. Já No Capítulo 4, aplicaremos as teorias dos Capítulos 1 e 2 nos modelos do Capítulo 3 e faremos verificações numéricas para estudarmos e provarmos a existência da solução em forma de onda viajante para os modelos apresentados. No Capítulo 5, aplicaremos a teoria do Capítulo 2 para encontrarmos soluções em forma de ondas para casos particulares dos modelos apresentados. No Capítulo 6, teremos as considerações finais e resultados do trabalho.

1 TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, um objeto de estudo muito importante, dado que não se conhecem métodos para resolver todas as equações diferenciais, e, por muitas vezes, o objetivo ao estudar um sistema não é quantitativo, mas qualitativo, ou seja, por vezes, não se está interessado em saber quanto vale a função solução em determinados pontos, mas sim como esta se comporta dentro de alguns cenários [32].

1.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Apresentaremos dois teoremas que garantem a existência e a unicidade da solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), e, além disso, são definidos também dois conjuntos, chamados ω -limite e α -limite, importantes para o estudo das equações diferenciais.

Seja $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde D é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n .

Teorema 1.1. (Teorema de Peano)

Seja f contínua em $\Omega = I_\alpha \times B_b$, onde $I_\alpha := \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\}$, $B_b := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| < M$ em Ω , o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

tem pelo menos uma solução em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Teorema 1.2. (Teorema de Picard)

Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_\alpha \times B_b$, onde I_α e B_b definimos acima. Se $|f| < M$ em Ω , o sistema (1.1) admite uma única solução em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [32].

Definição 1.1. Se $f \in C^1$, a solução de (1.1) é única e ela é chamada de trajetória de f por x_0 do Problema (1.1). O conjunto imagem de cada trajetória passando por (t, x) é denominado de órbita de f por (t, x) . Como cada Solução de (1.1) é de classe C^2 , cada órbita é um conjunto conexo, constituindo uma curva parametrizada de classe C^2 e sem auto-interseções. Uma órbita orientada é uma órbita munida da orientação do tempo crescente da trajetória associada. O retrato de fase de f é a partição do conjunto Ω em órbitas orientadas.

Desses dois teoremas, pode-se afirmar que dadas certas condições (f contínua) existe $\phi(t, x_0)$ solução da EDO (se f for lipschitziana garante-se também a unicidade de $\phi(t, x_0)$) por um tempo determinado. Caso $I_\alpha = (-\infty, \alpha)$ ou $I_\alpha = (\alpha, +\infty)$ define-se dois conjuntos de pontos de \mathbb{R}^n interessantes.

Definição 1.2. Sejam

- $\omega(x_0) = \{p \in D; \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n, x_0) \rightarrow p, \text{ quando } n \rightarrow \infty\};$
- $\alpha(x_0) = \{p \in D; \exists (s_n) \text{ com } s_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(s_n, x_0) \rightarrow p, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$

Estes conjuntos são chamados, respectivamente, de ω – *limite* e α – *limite* de x_0 .

Definição 1.3. Dizemos que $(t, x) \in \Omega$ é uma singularidade, ou ponto de equilíbrio, de f , quando $f(t, x) = 0$. Um ponto que não é de equilíbrio é chamado de ponto regular.

Observação 1.1. A trajetória do Sistema (1.1) por um ponto singular x_0 é sempre trivial, isto é, $x(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

1.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Nesta seção são apresentados algumas definições e alguns teoremas sobre sistemas lineares que serão utilizados mais a frente.

Definição 1.4. Um sistema de equações diferenciais lineares é um sistema da forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

ou então, na forma matricial:

$$x' = Ax, \quad (1.2)$$

onde

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esse sistema possui uma solução, conforme garantido pelo teorema a seguir.

Teorema 1.3. (Teorema Fundamental para Sistemas Lineares)

Seja A uma matriz $n \times n$. O Sistema (1.2), onde $x(0) = x_0$ possui uma única solução, dada por: $x(t) = e^{At}x_0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [26].

A seguir é apresentada a definição dos subespaços estável, instável e central do Sistema (1.2).

Definição 1.5. Sejam $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, \dots, k$ em que $k \leq n$, os autovalores de (1.2) com seus respectivos autovetores $w_j = u_j + iv_j$. Então os subespaços estável E^s , instável E^u e central E^c do Sistema (1.2) são dados por

- $E^s = [u_j, v_j]$, tais que $a_j < 0$,
- $E^u = [u_j, v_j]$, tais que $a_j > 0$,
- $E^c = [u_j, v_j]$, tais que $a_j = 0$,

ou seja, E^s , E^u e E^c são os subespaços de \mathbb{R}^n gerados pelas partes real e imaginária dos autovetores associados aos autovalores com parte real menor que, maior que e igual a zero, respectivamente.

Portanto, os autovalores da matriz A tem um papel fundamental no comportamento do Sistema (1.2), e saber calculá-los é importante.

Definição 1.6. A aplicação $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado o fluxo do Sistema (1.2). Quando todos os autovalores de A tem a parte real não-nula, e^{At} é dito um fluxo hiperbólico e o Sistema (1.2) é dito hiperbólico.

Definição 1.7. Um subespaço $E \subset \mathbb{R}^n$ é dito invariante com respeito ao fluxo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando $e^{At}E \subset E$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.2. Os subespaços estável, instável e central são invariantes com respeito ao fluxo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Além disso, os subespaços estável, instável e central são invariantes por A .

As demonstrações destes fatos podem ser encontradas em [26].

1.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES

Nesta seção são apresentadas alguns resultados e algumas definições que estendem conceitos já estabelecidos para sistemas lineares. Além disso, apresentaremos o teorema de Hartman-Grobman, uma peça chave na ligação entre sistemas lineares e não-lineares e o teorema da variedade estável.

Consideremos um sistema de duas EDOs autônomas não-lineares

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f e g são de classe C^1 .

Para calcular $f(x, y)$ e $g(x, y)$, em torno do ponto (x^*, y^*) pode-se utilizar, como uma aproximação, a série de Taylor, ou seja, $f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*)$ e $g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*)$. Assim,

ao substituir as aproximações de f e g na Equação (1.3) obtém-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} (y - y^*). \end{cases} \quad (1.4)$$

Considerando (x^*, y^*) um ponto de equilíbrio de f e g , ou seja, $f(x^*, y^*) = 0$ e $g(x^*, y^*) = 0$ o Sistema (1.4) se torna

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = a(x - x^*) + b(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = c(x - x^*) + d(y - y^*), \end{cases} \quad (1.5)$$

pois $a = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)}$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)}$, $c = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)}$ e $d = \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)}$ são constantes.

Considere, agora, a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$. Para transformar o Sistema (1.5) para as novas variáveis u e v é necessário calcular $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$, o que não é difícil, pois como $u(t) = x(t) - x^*$ e $v(t) = y(t) - y^*$ (uma vez que x^* e y^* são constantes) obtém-se $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$. Logo, o Sistema (1.5), após a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ se torna

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au + bv \\ \frac{dv}{dt} = cu + dv. \end{cases} \quad (1.6)$$

Portanto, para valores próximos dos pontos de equilíbrio do Sistema não linear (1.3), uma boa aproximação para isto é o Sistema linearizado (1.6), onde a matriz J , formada pelos coeficientes é chamada a matriz Jacobiana

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} \end{pmatrix}.$$

Note que a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ permite o estudo do sistema em torno da origem. Assim, é suficiente compreender a dinâmica de sistemas lineares em torno da origem, pois ao realizar a mudança inversa ($x = u + x^*$ e $y = v + y^*$) o

comportamento deste não se altera [23].

Definição 1.8. Um homeomorfismo é uma função $h : A \rightarrow B$ bijetiva, contínua com inversa $h^{-1} : B \rightarrow A$ contínua. Dois espaços A e B são ditos homeomorfos quando existe um homeomorfismo entre eles. Um difeomorfismo é uma função $h : A \rightarrow B$ bijetiva, contínua, diferenciável com inversa $h^{-1} : B \rightarrow A$ contínua e diferenciável. Dois espaços A e B são ditos difeomorfos quando existe um difeomorfismo entre eles.

Consideremos a EDO não-linear

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Definição 1.9. Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e seja $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 . Para cada $x_0 \in E$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução da Equação (1.7), onde $x(0) = x_0$. Para t no domínio de $\phi(t, x_0)$, a aplicação $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ é dito ser o fluxo da Equação Diferencial (1.7).

Segue agora o teorema de Hartman-Grobman, o teorema responsável por realizar a ligação entre os fluxos de sistemas lineares e não-lineares.

Teorema 1.4. (Teorema de Hartman-Grobman)

Sejam p um ponto de equilíbrio ($f(p) = 0$), E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo p , $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e ϕ_t o fluxo do Sistema não-linear (1.7). Suponha que a matriz $J(p)$, a matriz Jacobiana calculada em p , não tenha autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^n$ contendo p em um conjunto $V \in \mathbb{R}^n$ também contendo p tal que, para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo 0 tal que para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$, $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$, ou seja, H mapeia trajetórias do Sistema Não-linear (1.7) próximas à p em trajetórias do Sistema Linear (1.6) próximas à p e preserva a parametrização.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [32].

Definição 1.10. Sejam E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e $\phi_t : E \rightarrow E$ o fluxo da equação definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Um conjunto $M \subset E$ é dito ser invariante com respeito ao fluxo ϕ_t quando $\phi_t(M) \subset M$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Conforme dito anteriormente E^s , E^u e E^c (os subespaços estável, instável e central) do sistema linear $x' = Ax$ são invariantes pelo fluxo $\phi_t = e^{At}$. A fim de enunciar um

resultado similar para sistemas não-lineares (o teorema da variedade estável) é necessário definir o conceito de variedade.

Definição 1.11. Uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $h_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n tais que

1. $\bigcup_\alpha h_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo α, β , com $h_\alpha(U_\alpha) \cap h_\beta(U_\beta) = E \neq \emptyset$, os conjuntos $h_\alpha^{-1}(E)$ e $h_\beta^{-1}(E)$ abertos de \mathbb{R}^n e as aplicações $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par (U_α, h_α) com $p \in h_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização de M em p ; $h_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M [4].

Definição 1.12. A variedade estável (instável) de $p \in \mathbb{R}^n$ são os pontos de \mathbb{R}^n que tem p como ω -limite (α -limite).

Consideremos o sistema linearizado de (1.7)

$$\frac{dx}{dt} = Jx, \quad (1.8)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $J = Df(x_0)$.

Teorema 1.5. (Teorema da Variedade Estável)

Sejam E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e ϕ_t o fluxo do Sistema não-linear (1.7). Suponha que $f(0) = 0$ e que a matriz $J(0)$, a matriz Jacobiana calculada na origem, tenha k autovalores com parte real negativa e $n - k$ autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade diferenciável k -dimensional S tangente ao subespaço estável E^s do Sistema linear (1.8) na origem, tal que, para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ e para todo $x_0 \in S$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$; e existe uma variedade diferenciável $n - k$ -dimensional U tangente ao subespaço instável E^u do Sistema linear (1.8) na origem, tal que, para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ e para todo $x_0 \in U$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [26].

Agora, passaremos ao estudo de Sistemas Dinâmicos Discretos.

Definição 1.13. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um ponto fixo hiperbólico de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se, $F(p) = p$ e todos os autovalores de $J(p)$ tem norma diferente de 1.

Agora, enunciamos uma versão do teorema da variedade estável para difeomorfismos [26].

Teorema 1.6. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 com um ponto fixo hiperbólico $0 \in \mathbb{R}^n$. Então existem as variedades invariantes estável e instável locais S e U tangentes ao subespaços estável e instável E^s e E^u de $J(0)$, respectivamente, de mesma dimensão, ou seja, $\dim(E^s) = \dim(S)$ e $\dim(E^u) = \dim(U)$, tais que para todo $x \in S$ e $n \geq 0$, $F^n(x) \in S$ e $F^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e para todo $x \in U$ e $n \geq 0$, $F^{-n}(x) \in U$ e $F^{-n}(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

A partir do enunciado desta versão do teorema da variedade estável, as variedades estável e instável globais do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ podem ser redefinidas.

Definição 1.14. A variedade estável global do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $W^s(0) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(S)$ e, analogamente, a variedade instável global do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $W^u(0) = \bigcup_{n \geq 0} F^n(U)$.

Definição 1.15. Uma órbita homoclínica é uma curva $\gamma(t)$ solução do Sistema (1.7), que satisfaz $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_0)$, $\forall x_0 \in \{\gamma(t); t \in \mathbb{R}\}$, com 0 um ponto de sela, conforme a Figura 1.1.

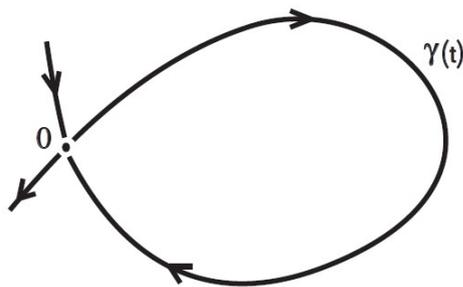


Figura 1.1: Exemplo de uma órbita homoclínica.

Observação 1.3. Note que $\gamma \subset W^s(0) \cap W^u(0)$.

Definição 1.16. Uma órbita heteroclínica para um sistema dinâmico suave é uma trajetória $\beta(t)$ que conecta dois equilíbrios diferentes do sistema, β_0 e β_1 , isto é, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} \beta(t) = \beta_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \beta_1$.

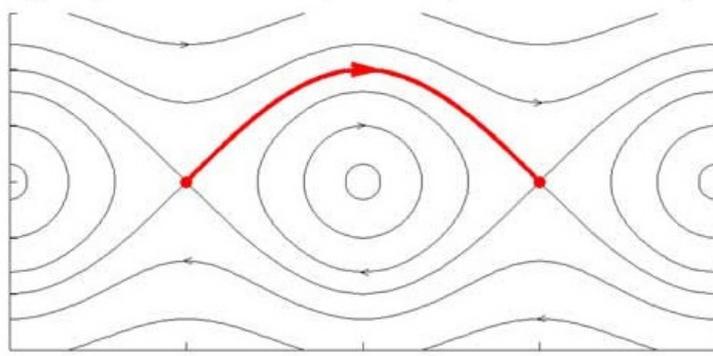


Figura 1.2: Exemplo de uma órbita heteroclínica.

1.4 SEÇÃO DE POINCARÉ

A seção de Poincaré é um procedimento muito utilizado, que possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema através de uma identificação do comportamento apresentado no espaço de fase. Este procedimento permite que um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) seja modelado como um sistema discreto (transformação), reduzindo-se, desta forma, uma dimensão do sistema.

A construção particular da transformação baseia-se na determinação dos pontos de interseção da trajetória do sistema com um hiperplano, podendo ser até uma superfície. A transformação, então, é definido por um ponto escolhido arbitrariamente no espaço de fase e pela condição de perpendicularidade desse hiperplano com a trajetória que passa pelo plano escolhido. O conjunto desses pontos de interseção constitui uma transformação de Poincaré do sistema e o hiperplano escolhido é chamado de seção de Poincaré.

Na prática, a seção de Poincaré pode ser gerada pela escolha de um plano de Poincaré e quando uma trajetória atravessa este plano, o ponto de cruzamento é registado. Um dos métodos mais simples para a escolha do plano é definir uma das variáveis dinâmicas como uma constante. O plano deve ser escolhido de modo a que as trajetórias cortem a superfície transversalmente, isto é, as trajetórias não sejam paralelas à superfície que atravessam [22]. A Figura 1.3 representa a ideia deste método.

Neste caso, o procedimento de estudar as interseções das linhas de campo com um plano transforma o estudo de um sistema tridimensional contínuo no estudo de um sistema bidimensional discreto. Ou seja, em vez de se analisar diretamente as equações que descrevem as trajetórias, analisa-se a transformação decorrente da sequência de interseções com o plano.

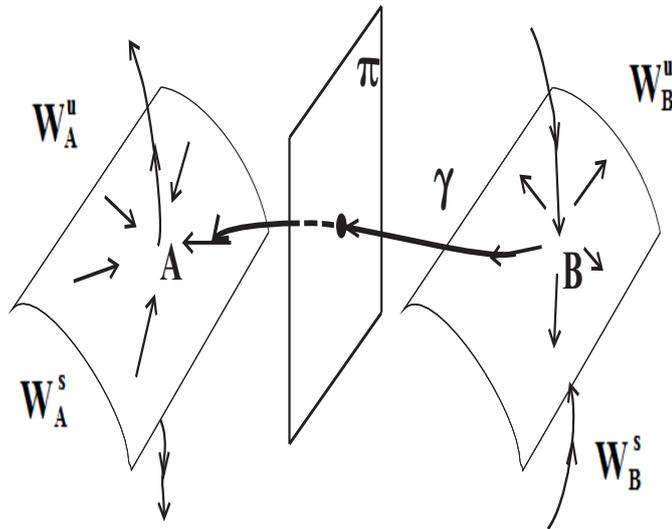


Figura 1.3: Exemplo de um plano de Poincaré, em que o plano é escolhido de modo a que as trajetórias cortem a superfície transversalmente.

Este método será de fundamental importância para o estudo dos modelos apresentados no Capítulo 3 e analisados no Capítulo 4. Descreveremos aqui o caminho que utilizaremos, considerando o sistema com três EDOs e deste sistema encontramos os pontos singulares (A e B).

- No sistema de EDOs, encontramos a matriz Jacobiana.
- Para cada ponto singular aplicado na Jacobiana, determinamos os autovalores (λ_i) e autovetores (w_i) correspondentes. Assim definiremos quem estará na variedade estável (W_1^s , pois $Real(\lambda_i) < 0$) e na variedade instável (W_1^u , pois $Real(\lambda_i) > 0$).
- Criamos o Plano de Poincaré (π), com um ponto entre os pontos singulares, por exemplo, no ponto médio dos pontos singulares ($C = (A + B)/2$), e com um vetor, por exemplo $N = \overrightarrow{CB}$, de modo que o plano corte as variedades transversalmente.
- Com as interseções das variedades W_1^s e W_1^u com o Plano de Poincaré, buscaremos uma interseção entre as curvas no plano π , isto é, uma órbita Γ que parta de um equilíbrio em W_1^u (variedade instável), intersepte π e ligue ao outro ponto de equilíbrio em W_1^s (variedade estável). Assim, teremos uma órbita heteroclínica.

Este método foi inspirado em [18].

2 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas propriedades matemáticas para a aproximação da solução de equações na forma conservativa, essenciais para o desenvolvimento e para as aplicações dos métodos numéricos.

A modelagem dinâmica de fenômenos físicos é frequentemente baseada em princípios físicos chamados Leis de Conservação, que podem ser escritas na forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.1)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de estado, $n > 1$, $(x, t) \in Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Uma dificuldade que estas equações apresentam é que nem sempre elas admitem soluções clássicas. As soluções deste tipo de equação são estudadas para o problema de Riemann, cuja solução é uma sequência de ondas. Introduziremos de forma gradativa os conceitos de ondas viajantes, de choque, de contato e de rarefação, presentes no estudo de fenômenos de ondas não-lineares.

A seguir apresentaremos alguns exemplos importantes de Leis de Conservação. Depois falaremos de Leis de Conservação Lineares em geral e algumas técnicas que nos ajudem a resolvê-las.

2.1 EXEMPLOS

Como nosso primeiro exemplo apresentaremos a Equação de Burgers. A seguir, teremos uma equação de primeira ordem, chamada Equação de Continuidade, mostrando como ela é obtida da Lei de Conservação da Massa e depois obtemos a Equação de Balanço.

2.1.1 Equação de Burgers

Um exemplo de grande importância dentro das Leis de Conservação, é a Equação de Burgers, atualmente chamada de Equação de Burgers sem viscosidade. Ela é dada por

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.2)$$

Esta equação foi introduzida originalmente por J. M. Burgers em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de advecção não-lineares e difusão linear desempenham papel importante [24].

2.1.2 Equação de Continuidade

Em uma dimensão, essa equação pode ser obtida, por exemplo, com um problema de dinâmica de gás. Um fluido em um tubo, onde as propriedades do gás como densidade e velocidade são assumidas constantes através de cada seção do tubo. Seja x a distância ao longo do tubo e seja $\rho(x, t)$ a densidade do gás no ponto x e tempo t .

A taxa de transferência de massa de um fluido especificado ao longo de uma certa direção é chamada o fluxo de massa. A densidade do fluxo de massa ϕ é a taxa de transferência de massa por unidade de área. C é o campo de velocidades de escoamento do fluido, o fluxo de massa é dado por

$$\phi = \rho C. \quad (2.3)$$

Estamos assumindo que o transporte da substância no espaço é totalmente devido ao movimento do fluido, isto é, à convecção. Note que a densidade $\rho(x, t)$ de um fluido, assim como o seu campo de velocidades $C(x, t)$, são funções da posição no espaço e do instante de tempo considerado, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$ no modelo físico) e $t \in \mathbb{R}$.

A lei de conservação da massa pode ser expressa matematicamente em forma integral da seguinte forma. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região do espaço fixada por onde o fluido atravessa e para o qual vale o Teorema da Divergência; Ω é comumente chamado de um volume de controle. Aplicado a este volume de controle, o princípio físico fundamental de que a massa é conservada significa que

Taxa de transferência de	Taxa de variação
(i) massa através da fronteira	da massa dentro do
do volume de controle	volume de controle. (ii)

O lado esquerdo (i) é dado pela integral do fluxo

$$-\int_{\partial\Omega} \phi(x, t) \cdot \vec{n} \, dS = -\int_{\partial\Omega} \rho(x, t)C(x, t) \cdot \vec{n} \, dS, \quad (2.4)$$

onde \vec{n} é o vetor normal unitário à superfície $\partial\Omega$, apontando para fora. Como o fluxo é para fora da região, o sinal é negativo. O lado direito (ii) é dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dV, \text{ pois a massa é } m(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) dV.$$

Assim, obtemos a equação integral

$$\int_{\partial\Omega} \rho(x, t)C(x, t) \cdot \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dV = 0. \quad (2.5)$$

Esta é a nossa Lei de Conservação da Massa.

Agora, utilizamos o Teorema da Divergência para obtermos a equação diferencial

$$\int_{\partial\Omega} \rho C \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Omega} \text{div}(\rho C) dV. \quad (2.6)$$

Aplicando em (2.5), temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV + \int_{\Omega} \text{div}(\rho C) dV = 0. \quad (2.7)$$

Se ρ for de Classe C^1 , podemos passar a derivada em relação a t para dentro da integral e teremos

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho C) \right] dV = 0. \quad (2.8)$$

Como isto é válido para qualquer volume de controle Ω arbitrário, obtemos a Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho C) = 0. \quad (2.9)$$

Ela é equivalente à Lei de Conservação da Massa: elas expressam o mesmo fenômeno em formulações diferentes, uma integral e outra diferencial [3].

2.1.3 Equação de Balanço

Existe a possibilidade de que massa seja criada ou destruída através de alguma fonte interna ou externa (por exemplo, reações químicas, processos nucleares, etc.) [3]. Neste caso, o princípio físico de conservação da massa precisa ser reescrito como

(i)	(ii)	(iii)
Taxa de transferência de massa através da fronteira do volume de controle	+ Taxa de criação ou destruição de massa dentro do volume de controle	= Taxa de variação da massa dentro do volume de controle.

Se $F(x, t)$ é a taxa de criação ou destruição de massa (a taxa tem sinal negativo se ocorre destruição de massa). A lei de conservação de massa torna-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dV + \int_{\partial\Omega} \rho(x, t) C(x, t) \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} F(x, t) dV, \quad (2.10)$$

e a correspondente equação diferencial, através do Teorema da Divergência (2.6), é a Equação de Balanço

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho C) = F. \quad (2.11)$$

2.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO LINEARES

2.2.1 Caso homogêneo

Dada a Equação (2.9), se o campo de velocidades do fluido é um campo vetorial constante, digamos $C(x, t) \equiv c$, onde $c \in \mathbb{R}^n$, a equação de continuidade torna-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x, t) = 0, \quad (2.12)$$

ou, em notação mais compacta,

$$\rho_t(x, t) + c \cdot \nabla \rho(x, t) = 0. \quad (2.13)$$

Esta equação é chamada a Equação do Transporte ou Equação da Advecção. Ela é uma equação linear de primeira ordem com coeficientes constantes.

Exemplo 2.1. Caso Unidimensional.

Imaginando um fluido restrito a movimento em apenas uma dimensão, por exemplo um fluido contido dentro de um tubo ou cano muito longo (Figura 2.1), a equação da continuidade torna-se

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0,$$

onde $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e c é a velocidade escalar do fluido.

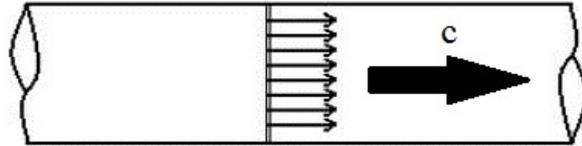


Figura 2.1: Um fluido que atravessa um tubo com velocidade constante c em uma dimensão.

Teorema 2.1. A solução geral da equação de transporte

$$u_t + cu_x = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2.14)$$

é $u(x, t) = g(x - ct)$, para alguma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Prova. Seja $u(x, t) = g(x - ct)$, mostraremos que u é solução para a equação de transporte. Logo,

$$\begin{aligned} u_t &= g'(x - ct) \cdot (-c) \text{ e } u_x = g'(x - ct) \\ \Rightarrow u_t &= g'(x - ct) \cdot (-c) = u_x \cdot (-c) \Rightarrow u_t + cu_x = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $u(x, t)$ solução para a equação de transporte. Definimos uma função $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $z(s) = u(x_0 + cs, t_0 + s)$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fixo. Então,

$$z'(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(c) + \frac{\partial u}{\partial t} = cu_x + u_t = 0.$$

Portanto, z na variável s é uma função constante.

Definimos uma função diferenciável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = u(x, 0)$.

$$g(x - ct) = u(x - ct, 0) = z(-t) = z(0) = u(x, t). \quad \blacksquare$$

Este tipo de solução, é o que chamamos de solução em forma de uma onda viajante.

Definição 2.1. A variável $\xi = x - ct$ é dita variável viajante, onde a velocidade de propagação é constante e será denotada por c . Uma solução de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que pode ser escrita na forma $u(\xi)$ é chamada solução na forma de uma onda viajante. A forma da solução será a mesma para todo o tempo t [20].

Ondas viajantes são ondas que se movem à uma velocidade constante. Soluções na forma de uma onda viajante são um tipo especial de soluções de equações diferenciais parciais, que aparecem em diversos problemas da matemática aplicada [5, 6, 11]. No Capítulo 4, procuraremos este tipo de solução para os problemas abordados neste trabalho.

Definição 2.2. Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI) consiste de um sistema de Equação Diferencial Parcial atrelado à uma Condição Inicial previamente fixada.

Exemplo 2.2. O Problema de Cauchy para a Equação (2.14) é

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.15)$$

A Equação do Sistema (2.15) é uma equação diferencial parcial escalar, linear com coeficientes constantes.

Definição 2.3. Uma solução clássica do problema de Cauchy é uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} (i) & \quad u \text{ é contínua para todos } x \text{ e } t > 0; \\ (ii) & \quad u_x \text{ e } u_t \text{ existem e são contínuas para todos } x \text{ e } t > 0; \\ (iii) & \quad u \text{ satisfaça (2.15) para todos } x \text{ e } t > 0; \\ (iv) & \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ para todo } x. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Corolário 2.1. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . O problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.17)$$

tem solução única $u(x, t) = g(x - ct)$.

Observação 2.1. Pela demonstração do Teorema 2.1, temos que z é constante em s . Em particular, fixando (x_0, t_0) , u é constante ao longo da reta que passa por (x_0, t_0) e tem inclinação c . Isto é, $r : (x_0, t_0) + s(c, 1), s \in \mathbb{R}$, estas são as retas $x - ct = \text{constante}$.

Portanto, se soubermos o valor de u em um ponto desta reta, saberemos o valor de u em todos os pontos da reta. Isto nos diz que a informação sobre o valor de u em um ponto da reta é transmitida para todos os pontos da reta; se o parâmetro t é interpretado como representando o tempo decorrido, então podemos dizer que a informação é transmitida com velocidade c . Esta reta é chamada uma reta característica do problema.

Exemplo 2.3. Caso n -dimensional.

Agora para o caso n -dimensional, a equação de transporte com coeficientes constantes é

$$u_t(x, t) + \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

ou, em notação mais compacta,

$$u_t(x, t) + c \cdot \nabla u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

onde $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixado. Uma solução para esta equação é uma função diferenciável $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O tratamento da equação do transporte n -dimensional com coeficientes constantes é completamente análogo ao caso unidimensional.

Teorema 2.2. A solução geral da Equação do Transporte (2.19)

$$u_t(x, t) + c \cdot \nabla u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

é $u(x, t) = g(x - ct)$, para alguma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Corolário 2.2. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . O problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) + c \cdot \nabla u(x, t) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.20)$$

tem solução única $u(x, t) = g(x - ct)$.

As demonstrações do teorema e do corolário podem ser encontradas em [3].

2.2.2 Caso não-homogêneo

O problema de valor inicial não-homogêneo da Equação do Transporte

$$\begin{cases} u_t(x, t) + c \cdot \nabla u(x, t) = h(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.21)$$

pode ser resolvido de modo análogo ao usado para resolver o caso homogêneo [9].

Proposição 2.1. Sejam $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . O Problema de Valor Inicial (2.21)

$$\begin{cases} u_t(x, t) + c \cdot \nabla u(x, t) = h(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

tem solução única

$$u(x, t) = g(x - ct) + \int_0^t h(x + (s - t)c, s) ds. \quad (2.22)$$

Prova. Seja $u(x, t)$ como (2.22). Fazendo $t = 0$, temos que

$$u(x, 0) = g(x) + \int_0^0 h(x + sc, s) ds.$$

Agora, derivando (2.22) em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -c \cdot \nabla g(x - ct) - \int_0^t c \cdot \nabla h(x + (s - t)c, s) ds + h(x, t) \\ &= -c \cdot [\nabla g(x - ct) - \int_0^t \nabla h(x + (s - t)c, s) ds] + h(x, t) \\ &= -c \cdot \nabla [g(x - ct) + \int_0^t h(x + (s - t)c, s) ds] + h(x, t) \\ &= -c \cdot \nabla u(x, t) + h(x, t). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $u(x, t)$ uma solução para o PVI (2.21).

Definimos uma função diferenciável $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $v(s) = u(x_0 + sc, t_0 + s)$.

Derivando $v(s)$, temos

$$v'(s) = c \cdot \nabla u(x_0 + sc, t_0 + s) + u_t(x_0 + sc, t_0 + s) = h(x_0 + sc, t_0 + s).$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) - g(x_0 - t_0 c) &= u(x_0, t_0) - u(x_0 - t_0, 0) = v(0) - v(-t_0) \\ &= \left(\int_{-t_0}^0 v'(s) ds \right) = \int_{-t_0}^0 h(x_0 + sc, t_0 + s) ds \end{aligned}$$

fazendo uma mudança de variáveis $\xi = t_0 + s$,

$$u(x_0, t_0) - g(x_0 - t_0 c) = \int_0^{t_0} h(x_0 + (s - t_0)c, s) ds. \quad \blacksquare$$

2.3 LEIS DE CONSERVAÇÃO NÃO-LINEARES

Nesta seção, estudaremos equações diferenciais parciais não-lineares. A grande diferença é que a função fluxo f é não-linear, o que dará origem as curvas características. Consideraremos por simplicidade $f \in C^2(\mathbb{R})$, f uma função convexa, $Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ [33]. Consideremos o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sobre } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Proposição 2.2. Se $u(x, t) \in C^1$ é solução da equação $u_t + (f(u))_x = 0$ do PVI (2.23) em Q , então, $u(x, t)$ é não-decrescente em x para cada $t > 0$ fixo.

Prova. Seja $u \in C^1(Q)$ solução de $u_t + (f(u))_x = 0$ do PVI (2.23). Considere um ponto $(x_0, t_0) \in Q$ e o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(u(x, t)) & \text{para } t > 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.24)$$

A única solução $x(t)$ é uma curva característica da Equação de (2.23). Ao longo desta curva temos que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + \frac{dx}{dt}u_x = u_t + f'(u)u_x = 0.$$

Então u é constante ao longo das características. Logo, $\frac{dx}{dt}(t) = f'(u(x_0, t_0))$ para $t > 0$ também é constante. Note-se que características são linhas retas no plano xt . Como existem pontos (x_1, t_1) , (x_2, t_1) , onde $x_2 > x_1$, tal que

$$u_1 := u(x_1, t_1) > u(x_2, t_1) =: u_2.$$

Logo, $\frac{dx_1}{dt} = f'(u_1) > f'(u_2) = \frac{dx_2}{dt}$ para todo $t > 0$.

Consequentemente, as características se interceptam em algum $t_2 > t_1$ (Figura 2.2), contradizendo a suavidade de u . ■

Lembrando que

- u é constante ao longo de qualquer característica $x(t)$;
- $\frac{dx}{dt} = f'(u(x, t))$ para $t > 0$.

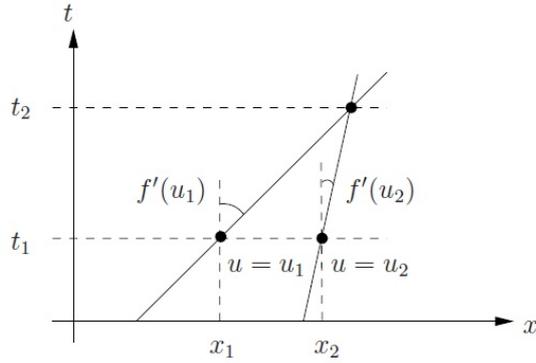


Figura 2.2: Interseção das características.

Seja $(x, t) \in Q$ um ponto dado. O conjunto

$$\begin{cases} u = u_0(y) \\ x - y = f'(u)t \Rightarrow y = x - f'(u)t. \end{cases}$$

Então $u = u(x, t)$ é implicitamente dado pela equação

$$u = u_0(x - f'(u)t), \quad \text{para } (x, t) \in Q,$$

ver a Figura 2.3 para uma explicação da construção.

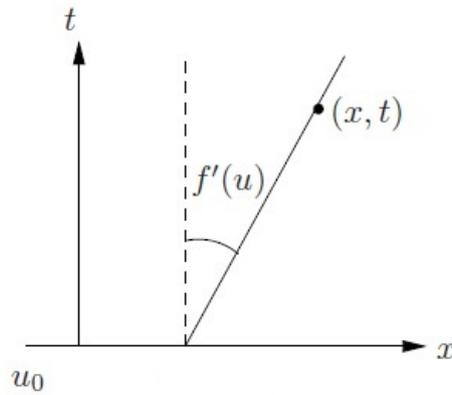


Figura 2.3: Construção das características.

Se $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ com u_0 e u'_0 limitados sobre \mathbb{R} , usamos o Teorema da Função Implícita para resolver esta equação para u como uma função diferenciável de x e t (com t suficientemente pequeno). Em particular

$$\begin{aligned} u &= u_0(x - f'(u)t), & (x, t) \in Q, \\ u_t &= u'_0[-f''(u)u_t t - f'(u)] & \Rightarrow u_t = -\frac{f'(u)u'_0}{1 + f''(u)u'_0 t}, \\ u_x &= u'_0[1 - f''(u)u_x t] & \Rightarrow u_x = \frac{u'_0}{1 + f''(u)u'_0 t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Desta expressão, pela Proposição 2.2, se $f''(u)u'_0 \geq 0$, então u_t e u_x permanecem delimitadas: as características divergem e nenhuma descontinuidade ocorre. Por outro lado, se $f''(u)u'_0 < 0$, então as derivadas explodem quando $1 + f''(u)u'_0 t \rightarrow 0$.

2.4 PROBLEMA DE RIEMANN

Definição 2.4. O problema de Riemann para o sistema de Leis de Conservação é um caso particular do problema de Cauchy em que as condições iniciais são tomadas constantes por partes possuindo um salto em um ponto x_0 .

Exemplo 2.4. Para o Sistema (2.15), o problema de Riemann é

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.26)$$

onde u_l e u_r são valores constantes, ver Figura 2.4. No caso, u_l é chamado de estado inicial à esquerda e u_r de estado inicial à direita [33].

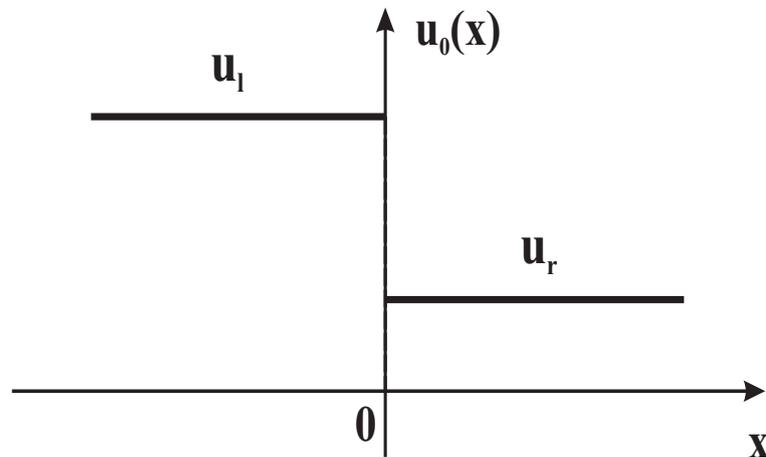


Figura 2.4: Condição inicial para o problema de Riemann.

Note que a condição inicial tem uma descontinuidade em $x = 0$. O caso trivial acontece quando $u_l = u_r$. Da Proposição 2.2, no PVI (2.24), determinamos uma curva característica particular $x = ct$ que separa as curvas características à esquerda, nas quais a solução tem valor u_l , daquelas curvas à direita, nas quais a solução assume o valor u_r .

Uma solução do problema de Riemann (2.26) é simplesmente

$$u(x, t) = u_0(x - ct) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x - ct < 0, \\ u_r, & \text{se } x - ct > 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Esta solução será encontrada na Seção 2.6.2 e pode ser representada no plano xt , como ilustra a Figura 2.5.

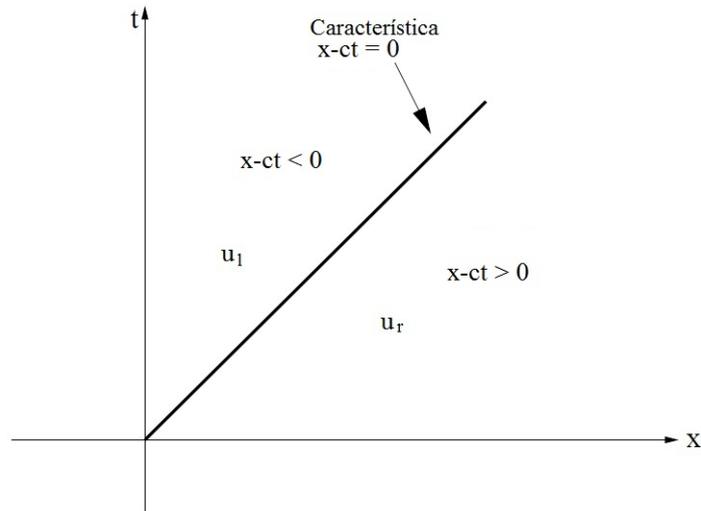


Figura 2.5: Solução do problema de Riemann no plano xt .

Por qualquer ponto x_0 no eixo x passa uma reta característica. Como c é constante essas retas serão todas paralelas umas as outras. Para o problema de Riemann, a característica que passa por $x = 0$ é significativa, pois é a única através da qual a solução muda.

2.5 SOLUÇÕES FRACAS

Observemos que a Solução (2.27) não pode ser uma solução clássica de (2.26) em todo o plano xt , por não ser diferenciável ao longo da reta $x = ct$. Para função da forma de (2.27) que satisfaz a equação diferencial em parte do domínio chamamos de solução fraca de (2.26). Para função que satisfaz (2.26) em todo domínio chamamos de solução clássica. A seguir damos uma breve interpretação do significado de uma solução fraca.

Consideremos o seguinte PVI

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & \text{em } Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sobre } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Definição 2.5. Definimos o conjunto das Funções Testes de (2.28), C_0^1 , como

$$C_0^1 := \{\phi \in C^1 : \{(x, t) \in Q : \phi(x, t) \neq 0\} \subset [a, b] \times [0, T] \text{ para algum } a, b \text{ e } T\}.$$

Logo, ϕ é continuamente diferenciável e pode se anular fora de algum retângulo no plano xt .

Definição 2.6. O Suporte da Função ϕ , $\text{supp}(\phi)$, em relação a Q é o fecho do conjunto dos pontos $(x, t) \in Q$ tais que $\phi(x, t) \neq 0$. Dizemos que ϕ tem Suporte Compacto em Q se $\text{supp}(\phi)$ é um conjunto compacto.

Consideremos a Equação (2.1)

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Multiplicando (2.1) por $\phi \in C_0^1$ e integrando em relação à x de $-\infty$ a ∞ e em relação à t de 0 a ∞ , obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + f(u)_x] \phi(x, t) dx dt. \quad (2.29)$$

Como $\phi \in C_0^1$ e tem suporte compacto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_a^b [u_t + f(u)_x] \phi(x, t) dx dt &= 0, \\ \int_a^b \int_0^T u_t \phi(x, t) dt dx + \int_0^T \int_a^b f(u)_x \phi(x, t) dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes as integrais na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left\{ [u\phi(x, t)]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T u\phi_t(x, t) dt \right\} dx \\ &+ \int_0^T \left\{ [f(u)\phi(x, t)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(u)\phi_x(x, t) dx \right\} dt. \\ \Rightarrow 0 &= \int_a^b u(x, T)\phi(x, T) dx - \int_a^b u(x, 0)\phi(x, 0) dx - \int_a^b \int_0^T u\phi_t(x, t) dt dx \\ &+ \int_0^T f(u)\phi(b, t) dt - \int_0^T f(u)\phi(a, t) dt - \int_0^T \int_a^b f(u)\phi_x(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $\phi(x, T) = \phi(a, t) = \phi(b, t) = 0$, podemos escrever (2.29) e (2.30) como

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx = 0, \quad (2.31)$$

onde $u_0 = u(x, 0)$ é a condição inicial e ϕ_0 é uma notação para $\phi(x, 0)$.

Note que o suporte de ϕ está contido em $[a, b] \times [0, T]$ e ϕ é definida em Q , logo, $\phi(x, 0)$ não precisa ser zero. Assim, o que apresentamos acima é a demonstração da seguinte proposição.

Proposição 2.3. Se u é uma solução clássica para o PVI (2.28), então u satisfaz (2.31) para todo $\phi \in C_0^1$.

Invertendo os cálculos realizados acima, partindo de (2.31), até obtermos a Equação (2.29) e usando o fato de $\phi \in C_0^1$ ser arbitrária, mostramos que u deve satisfazer a EDP (2.1), demonstrando assim, o seguinte resultado.

Proposição 2.4. Se u é continuamente diferenciável em relação a x e t e satisfaz a Equação (2.31) para todo $\phi \in C_0^1$, então u é uma solução clássica do PVI (2.28).

Devemos estar cientes de que podem existir soluções na forma (2.31) que não são soluções clássicas para o PVI (2.28), por exemplo, funções que satisfazem a Equação (2.31) podem não ser diferenciáveis. Por essa razão fazemos a seguinte definição.

Definição 2.7. Se u satisfaz a Equação (2.31) para todo $\phi \in C_0^1$, u é dito ser uma Solução Fraca para o Problema de Valor Inicial (2.28).

A seguir enunciaremos o teorema de existência de soluções fracas, a demonstração deste teorema pode ser encontrado em [29].

Teorema 2.3 (Existência de soluções fracas). Seja $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ com $f'' > 0$ em $\{u : |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$. Então existe uma solução u de (2.28) com as seguintes propriedades

1. $|u(x, t)| \leq \|u_0\|_\infty \equiv M, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
2. Existe uma constante $E > 0$ dependendo somente de M ,

$$\mu = \min\{f''(u) : |u| \leq \|u_0\|_\infty\} \quad \text{e} \quad A = \max\{|f'(u)| : |u| \leq \|u_0\|_\infty\},$$

tal que para todo $a > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}, \quad a > 0, t > 0.$$

3. u é estável e depende continuamente de u_0 no seguinte sentido:

se $u_0, v_0 \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ com $\|v_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$, e v é solução de (2.28) correspondente a v_0 , então para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$ e todo $t > 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (2.32)$$

2.6 CHOQUES

Nesta seção, abordaremos um tipo de solução para EDP's, solução por Onda de Choque. Apresentaremos condições pra que tal solução ocorra, Condição de Entropia, e uma forma particular da solução chamada de soluções por Onda de Contatos.

Sejam u uma densidade e f um fluxo de massa. Além disso, seja $f = f(u)$ uma determinada relação [33]. Seja a Equação (2.1)

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Usando a forma integral da lei de conservação (2.5), temos que

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t). \quad (2.33)$$

Suponha que u é descontínua através de uma curva suave $x(t)$. Nesse caso, a Equação (2.33) é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^{x(t)^-} u(x, t) dx + \int_{x(t)^+}^b u(x, t) dx \right\} \\ &= \int_a^{x(t)^-} u_t dx + \frac{dx}{dt} u(x(t)^-, t) + \int_{x(t)^+}^b u_t dx - \frac{dx}{dt} u(x(t)^+, t) \\ &= \int_a^{x(t)^-} u_t dx + \int_{x(t)^+}^b u_t dx + \frac{dx}{dt} (u(x(t)^-, t) - u(x(t)^+, t)) = f(a, t) - f(b, t) \end{aligned}$$

Fazendo $a \rightarrow x(t)^-$ e $b \rightarrow x(t)^+$, temos

$$\frac{dx}{dt}(u(x(t)^-, t) - u(x(t)^+, t)) = f(x(t)^-, t) - f(x(t)^+, t). \quad (2.34)$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x(t)^-, t) - f(x(t)^+, t)}{u(x(t)^-, t) - u(x(t)^+, t)} =: \frac{[f]}{[u]}. \quad (2.35)$$

Definição 2.8. A Equação (2.35) é denominado Condição de Choque de Rankine-Hugoniot (Condição R-H). É uma consequência direta do princípio de conservação através do choque. Fisicamente, dx/dt é interpretado como velocidade da onda de choque.

Definição 2.9. Uma solução contínua por partes $u(x, t)$ de (2.23) com salto ao longo de uma curva $x(t)$ satisfazendo a condição de salto de Rankine-Hugoniot é denominada uma Solução Onda de Choque da Lei de Conservação.

Exemplo 2.5. Como exemplo de aplicação, podemos encontrar a solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.36)$$

As características para o problema são dadas por $x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0$, onde $f'(u) = u^2$, o que dá

$$x(t) = \begin{cases} 4t + x_0, & \text{se } x_0 \leq 0, \\ t + x_0, & \text{se } x_0 > 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Para esta equação, $f(u) = \frac{u^3}{3}$ e $x(0) = 0$, e a condição R-H (2.35) é

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{f_r - f_l}{u_r - u_l} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{8}{3}}{1 - 2}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{7}{3} \Rightarrow x(t) = \frac{7}{3}t. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A solução do PVI é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < \frac{7}{3}t, \\ 1, & \text{se } x > \frac{7}{3}t. \end{cases} \quad (2.39)$$

As curvas características no plano xt são ilustradas na Figura 2.6.

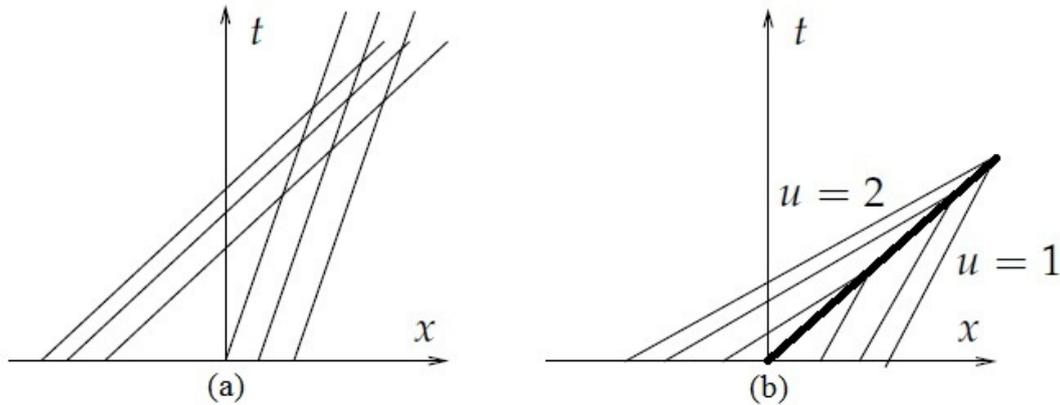


Figura 2.6: (a) Curvas características. (b) Curva de choque.

2.6.1 Condição de entropia

Soluções fracas para problemas de valor inicial podem não ser únicas, elas podem conter descontinuidades que são propagadas da descontinuidade da condição inicial ou obtidas da interseção das características.

Como nosso objetivo é calcular numericamente as soluções das Leis de Conservação, precisamos escolher qual é a solução “correta”, no caso em que as soluções não são únicas. Essa escolha é feita utilizando a condição de entropia, ou seja, escolhamos a solução entrópica do problema como solução correta [14].

Uma maneira de escolher a solução fisicamente correta é decidir pela solução viscosa. Esta solução é definida como o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ das funções $u^\epsilon(x, t)$ onde $u^\epsilon(x, t)$ é solução da EDP

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon, \quad (2.40)$$

com condição inicial $u^\epsilon(x, 0) = u_0^\epsilon(x)$ [33]. Uma das características mais importante da solução viscosa é o seguinte resultado.

Proposição 2.5. Todo limite de solução viscosa, quando $\epsilon \rightarrow 0$, do Problema (2.40), é uma solução fraca.

Prova. Consideramos a Equação Viscosa (2.40), multiplicando-a por uma função teste pertencente a C_0^2 (onde ϕ e ϕ_x são nulas fora de algum retângulo fechado $[a, b] \times [0, T]$) e realizando a integração como em (2.31) (mais duas integrações por partes no termo

viscoso), obtemos

$$-\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u^\epsilon \phi_t + f(u^\epsilon) \phi_x] dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0^\epsilon \phi_0 dx = \epsilon \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^\epsilon \phi_{xx} dx dt. \quad (2.41)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, então como por hipótese $u^\epsilon \rightarrow u$ e $f(u^\epsilon) \rightarrow f(u)$, vemos que a solução viscosa u é uma solução fraca para a Equação (2.1) $u_t + f(u)_x = 0$. ■

Definição 2.10. Condição de Entropia I (Lax): Uma descontinuidade propagando com velocidade $s = dx/dt$ dada pela condição de R-H satisfaz a condição de entropia se

$$f'(u_l) > s > f'(u_r), \quad (2.42)$$

onde u_l e u_r são os valores da solução u à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente [15].

Note que $f'(u)$ é a velocidade característica.

Observação 2.2. De uma maneira geral, para qualquer função de fluxo $f(u)$ convexa, ou seja, $f''(u) \geq 0$ ou $f'(u)$ crescente, para todo u , qualquer salto de u_l para u_r com $u_l > u_r$ que satisfaz a condição R-H, satisfaz a Condição de Entropia I, e qualquer salto de u_l para u_r com $u_l < u_r$ que satisfaz a condição R-H, não satisfaz a Condição de Entropia I.

Observação 2.3. A principal dificuldade das Leis de Conservação não é a existência de soluções, mas a unicidade delas.

Definição 2.11. Condição de Entropia II: $u(x, t)$ é a solução entrópica de (2.31) se toda a descontinuidade tem a seguinte propriedade

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r} \quad (2.43)$$

para todo u entre u_l e u_r , onde u_l e u_r são os valores da solução u à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente [15].

Como no caso em que $f(u)$ é convexa, no caso não convexo, a solução u é única, sendo uma solução viscosa se u satisfaz a condição de entropia definida pela Equação (2.43) sobre todos os saltos.

Outra forma de condição de entropia baseia-se na propagação das características de um leque de rarefação, que será apresentado no próximo capítulo. Se $u(x, t)$ é uma função crescente de x em alguma região, então as características espalham se $f'' > 0$. A taxa de propagação pode ser quantificada, e dá a seguinte condição, também devido à Oleinik.

Definição 2.12. Condição de Entropia III (Oleinik): $u(x, t)$ é a solução entrópica se existe uma constante $E > 0$ tal que para todo $a > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}. \quad (2.44)$$

A seguir enunciaremos o teorema de unicidade de soluções fracas, a demonstração deste teorema pode ser encontrado em [29].

Teorema 2.4 (Unicidade de soluções fracas). Seja $f \in C^2$, $f'' > 0$ e sejam u e v duas soluções fracas satisfazendo a Condição 2.44. Então $u = v$ em quase todos os pontos, em $t > 0$.

A unicidade para o PVI (2.23) dentro da classe de soluções fracas que satisfazem a Condição de Entropia III (2.44) é chamada solução de entropia fraca [33].

Para funções de fluxo convexo f , a Desigualdade (2.44) captura o comportamento ao longo de características, bem como a desigualdade de choque de Lax (2.42), $u_l > u_r$. Para soluções suaves devemos ter $u'_0 \geq 0$ e o método de características dá

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + f''(u)u'_0 t},$$

já calculado em (2.25).

Assim, se $u_0 = 0$, então $u_x = 0$ ao longo da característica correspondente e se $u'_0 > 0$ então

$$u_x < \frac{u'_0}{1 + f''(u)u'_0 t} = \frac{1}{f'' t} \leq \frac{E}{t} \quad \text{com} \quad E = \frac{1}{\inf f''}. \quad (2.45)$$

Se um choque ocorre em algum $t > 0$, então (2.44) implica (tendo a suficientemente pequeno) que a solução só pode saltar para baixo, dando $u_l > u_r$ [33].

Ao lidar com soluções descontínuas, temos que ter cuidado com a aplicação de transformações.

2.6.2 Contato

Como tipo particular de descontinuidade para o Problema de Riemann, temos a Descontinuidade de Contato. Este tipo de descontinuidade ocorre quando a velocidade $f'(u)$

é constante para todo $u \in Q$ no PVI

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.46)$$

As curvas características são paralelas, pois $f'(u_l) = f'(u_r)$, podemos ver isso na Figura 2.7.

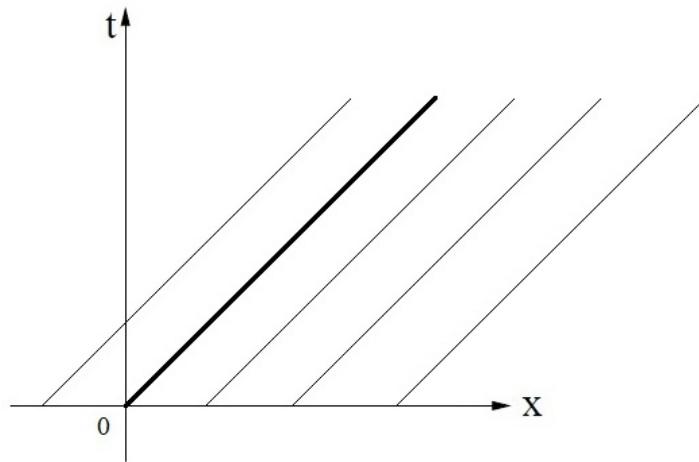


Figura 2.7: Curvas características para uma onda de contato, onde $f'(u) > 0$ e o salto ocorre em $x_0 = 0$.

Definição 2.13. Soluções do Problema (2.46) são chamados soluções por ondas de contato.

Considerando $f'(u) = c$, $c > 0$, temos pelo método das características

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(u) = c \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Desta forma, as curvas características são

$$x_s(t) = \begin{cases} f'(u_l)t + x_0 = ct + x_0, & \text{se } x_0 < 0 \\ f'(u_r)t + x_0 = ct + x_0, & \text{se } x_0 > 0, \end{cases} \quad (2.48)$$

isto é,

$$x_s = ct + x_0, \quad \text{se } x_0 \neq 0. \quad (2.49)$$

Pela condição R-H (Condição 2.35), temos que

$$s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{cu_l - cu_r}{u_l - u_r} = c. \quad (2.50)$$

Além disso, cumpre a Condição de Entropia II (2.43), pois

$$\begin{aligned} c &\geq s \geq c \\ c \left(\frac{u - u_l}{u - u_l} \right) &\geq s \geq c \left(\frac{u - u_r}{u - u_r} \right) \\ \frac{cu - cu_l}{cu - cu_l} &\geq s \geq \frac{cu - cu_r}{cu - cu_r} \\ \frac{u - u_l}{f(u) - f(u_l)} &\geq s \geq \frac{u - u_r}{f(u) - f(u_r)}. \end{aligned}$$

para todo u entre u_l e u_r .

Logo a solução será em forma de choque. Portanto, a solução é

$$u(x, t) = u_0(x - ct) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < ct, \\ u_r, & \text{se } x > ct. \end{cases} \quad (2.51)$$

2.7 RAREFAÇÃO

Além da interseção das características, uma outra particularidade das equações não-lineares, é a possibilidade de existir regiões do plano xt onde as curvas caracterísiticas não estão definidas. Modificaremos o método das características nessas regiões de modo que possamos obter soluções do problema em todo o plano xt . Essa modificação gera o que chamamos de ondas de rarefação [33].

Seja $-\infty < u_l < u_r < \infty$ e considere o PVI

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{se } x < 0, \\ u_r, & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.52)$$

Primeiramente, damos um argumento intuitivo. Seja $u = u(x, t)$ que denota a única solução entrópica de (2.52). Então, para cada $k > 0$, as funções de translações

$$u_k(x, t) = u(kx, kt) \quad (2.53)$$

são também soluções de (2.52) satisfazendo a Condição de Entropia (2.44). Então, a

unicidade dá $u(x, t) = u_k(x, t) = u(kx, kt)$ para todo $k > 0$ e para todo $(x, t) \in Q$. Portanto, $u(x, \frac{1}{k}) = u(kx, 1)$ para todo $k > 0$ e para todo $x \in Q$.

Consequentemente, u precisa ser da forma

$$u(x, t) = r(\eta) \quad \text{com } \eta = \frac{x}{t}. \quad (2.54)$$

Formalmente, de $u_t + f(u)_x = 0$, isto dá para r a equação

$$-\eta \frac{dr}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} f(r) = \{-\eta + f'(r)\} \frac{dr}{d\eta} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \quad (2.55)$$

e as condições de contorno

$$r(-\infty) = u_l, \quad r(+\infty) = u_r. \quad (2.56)$$

Definição 2.14. A solução do problema de valor contorno (2.55) e (2.56) é chamado de solução por onda de rarefação.

Queremos obter uma forma fraca apropriada para o problema do valor contorno (2.55) e (2.56). Esta forma fraca nos permite considerar a Equação (2.55) para uma classe maior de não-linearidades de f . O ponto de partida é a formulação fraca para (2.52).

Encontremos $u \in L^\infty(Q)$, $u_l \leq u \leq u_r$ em quase todo Q , tal que

$$\int_Q \{u\varphi_t + f(u)\varphi_x\} dxdt + u_l \int_{-\infty}^0 \varphi(x, 0) dx + u_r \int_0^{\infty} \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.57)$$

para toda função teste admissível.

Suponha que esse problema tem uma única solução de entropia fraca u , que satisfaz $u \in C(\overline{Q} \setminus O)$ e $u(x, 0) = u_l$ para $x < 0$ e $u(x, 0) = u_r$ para $x > 0$. Novamente por um argumento de translação simples verifica-se que

$$u_k(x, t) := u(kx, kt)$$

é também uma solução de entropia fraca para qualquer $k > 0$. Como antes, isso implica que a solução fraca deve ser da forma

$$u(x, t) = r(\eta) \quad \text{com } \eta = \frac{x}{t},$$

onde $r \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. A condição inicial e a continuidade implicam que r satisfaz as Condições de Contorno (2.56). Na identidade da integral, nós agora escolhemos as

funções teste. Isto é,

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(\eta) \cdot \varphi_2(t),$$

onde $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Para estas funções teste, temos

$$\int_Q \{u\varphi_t + f(u)\varphi_x\} dx dt = 0.$$

Desde que

$$\varphi_t = -\frac{d\varphi_1}{d\eta} \eta \frac{1}{t} \varphi_2 + \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt}$$

e

$$\varphi_x = \frac{d\varphi_1}{d\eta} \frac{1}{t} \varphi_2,$$

obtemos

$$\int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(r(\eta) \left[t \frac{d\varphi_2}{dt} \varphi_1 - \eta \frac{d\varphi_1}{d\eta} \varphi_2 \right] + f(r) \frac{d\varphi_1}{d\eta} \varphi_2 \right) d\eta \right\} dt = 0$$

ou

$$\int_0^\infty t \frac{d\varphi_2}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} r \varphi_1 d\eta \right) dt + \int_0^\infty \varphi_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} (f(r) - \eta r) \frac{d\varphi_1}{d\eta} d\eta \right\} dt = 0.$$

As integrais internas (com respeito a η) não dependem de t . Por isso, podemos integrar o primeiro termo por partes. Isso leva à seguinte identidade integral para r (descartamos o índice 1 por conveniência)

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ (f(r) - \eta r) \frac{d\varphi}{d\eta} - r\varphi \right\} d\eta = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.58)$$

Definição 2.15. (Formulação Fraca para uma Onda de Rarefação) Uma função $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de uma onda de rarefação correspondente as Condições de Contorno (2.56) se

- (i) $r \in C^1(\mathbb{R})$,
- (ii) $Im(r) \in [u_l, u_r]$ e $r(-\infty) = u_l$, $r(+\infty) = u_r$,
- (iii) r satisfaz a identidade (2.58).

Pela razão de $r \in C^1(\mathbb{R})$, a Identidade (2.58) implica

$$f(r) - \eta r \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e então } \frac{d}{d\eta} \{f(r) - \eta r\} + r = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R} \quad (2.59)$$

no sentido clássico. Para obter a segunda parte de (2.59), escrevemos a Identidade (2.58)

e integramos por partes

$$\int_{\mathbb{R}} r\varphi d\eta = \int_{\mathbb{R}} R(\eta) \frac{d\varphi}{d\eta},$$

onde $R(\eta) = \int_0^\eta r(s)ds$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ f(r) - \eta r + \int_0^\eta r(s)ds \right\} \frac{d\varphi}{d\eta} d\eta = 0$$

e usamos o seguinte Lema 2.1.

Lema 2.1. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e seja $h \in L_{loc}(I)$. Suponha

$$\int_I h \frac{d\xi}{d\eta} = 0 \quad \text{para todo } \xi \in C_0^\infty(I). \quad (2.60)$$

Então h é constante em quase todo I .

Prova. Sejam $\varphi, \varphi_1 \in C_0^\infty(I)$ tal que $\int_I \varphi_1 = 1$. Seja

$$\xi(\eta) = \int_0^\eta \left\{ \varphi_1(x) \int_I \varphi(y)dy - \varphi(x) \right\} dx.$$

Então

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \varphi_1(\eta) \int_I \varphi(y)dy - \varphi(\eta)$$

e

$$\begin{aligned} \int_I h \frac{d\xi}{d\eta} &= \int_I h \left\{ \varphi_1 \int_I \varphi - \varphi \right\} = 0 \\ \Rightarrow \int_I \left\{ h\varphi_1 \int_I \varphi \right\} &= \int_I h\varphi. \end{aligned}$$

Seja $c := \int_I h\varphi_1$. Então

$$\int_I c\varphi = \int_I h\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(I),$$

o que implica que $h = c$ em quase todo I .

Proposição 2.6. Seja $f \in C^2((u_l, u_r)) \cap C([u_l, u_r])$ que satisfaz $f'' > 0$. Então existe uma onda de rarefação r da forma

$$r(\eta) = \begin{cases} u_l, & \text{se } \eta \leq \eta_l, \\ (f')^{-1}(\eta), & \text{se } \eta_l < \eta < \eta_r, \\ u_r, & \text{se } \eta \geq \eta_r, \end{cases} \quad (2.61)$$

onde $\eta_l := f'_r(u_l) \geq -\infty$ e $\eta_r := f'_l(u_r) \leq \infty$.

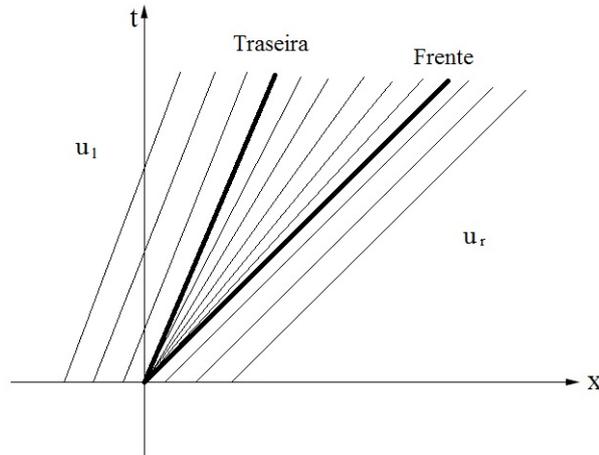


Figura 2.8: Curvas características para uma onda de rarefação.

Prova. As hipóteses sobre f implicam que f' é C^1 e estritamente crescente ($f'' > 0$) em (u_l, u_r) . Consequentemente, o limite à direita de u_l e o limite à esquerda de u_r satisfazem

$$\lim_{u \downarrow u_l} f'(u) = f'_r(u_l) \geq -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{u \uparrow u_r} f'(u) = f'_l(u_r) \leq +\infty.$$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ que denota o intervalo de f' , isto é

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists u \in (u_l, u_r) \text{ tal que } f'(u) = a\}.$$

Claramente, $A = (f'_r(u_l), f'_l(u_r)) = (\eta_l, \eta_r)$. Agora, definimos $r : (\eta_l, \eta_r) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f'(r(\eta)) = \eta$ ou $r(\eta) = (f')^{-1}(\eta)$ para $\eta \in (\eta_l, \eta_r)$.

Então $Im(r) \in (u_l, u_r)$ e

$$\lim_{\eta \downarrow \eta_l} r(\eta) = u_l \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \uparrow \eta_r} r(\eta) = u_r.$$

Nós estendemos essa função de u_l para $\eta \leq \eta_l$ (se $\eta_l > -\infty$) e de u_r para $\eta \geq \eta_r$ (se $\eta_r < \infty$) e obtemos (2.61). Para mostrar que (2.61) realmente é uma onda de rarefação, verificamos as condições da definição anterior (2.59). A partir da construção, nós imediatamente vemos que (i) e (ii) são satisfeitas. Para verificar (iii), nós mostraremos que r satisfaz (2.59). As condições de suavidade sobre f implicam

$$r \in C^1(\eta_l, \eta_r) \quad \text{com} \quad r'(\eta) = \frac{1}{f''(r(\eta))}, \quad \text{for } \eta_l < \eta < \eta_r.$$

Assim, (2.59) é satisfeita em (η_l, η_r) . Suponha que $\eta_l > -\infty$. Obviamente (2.59) também

está satisfeito em $(-\infty, \eta_l)$. Em $\eta = \eta_l$, temos

$$(f(r) - \eta r)'(\eta_l^-) = -u_l$$

e

$$(f(r) - \eta r)'(\eta_l^+) = \lim_{\eta \downarrow \eta_l} \left\{ f'(r(\eta)) \frac{dr}{d\eta} - \eta \frac{dr}{d\eta} - r(\eta) \right\} = -u_l.$$

Logo, $f(r) - \eta r$ é diferenciável em η_l e satisfaz (2.59). Analogamente, obtemos o resultado para η_r . ■

3 *MODELAGEM MATEMÁTICA*

Neste capítulo apresentaremos modelos matemáticos para a dinâmica espacial da população de *Aedes aegypti*, [10, 30]. No próximo capítulo, faremos um estudo dos modelos buscando soluções com sentido biológico.

Dengue é uma doença viral causada por um arbovírus transmitido na natureza por artrópodes (animais invertebrados, cujo corpo se constitui de anéis, suavemente articulados entre si) do gênero *Aedes*. O *Aedes aegypti* é o seu principal vetor. Trata-se de um mosquito encontrado em várias regiões do mundo, principalmente onde o clima quente e úmido é predominante [34]. O mosquito *Aedes aegypti* habita principalmente as áreas urbanas e pica a qualquer hora durante o dia, o que o transforma em um vetor muito eficiente [30].

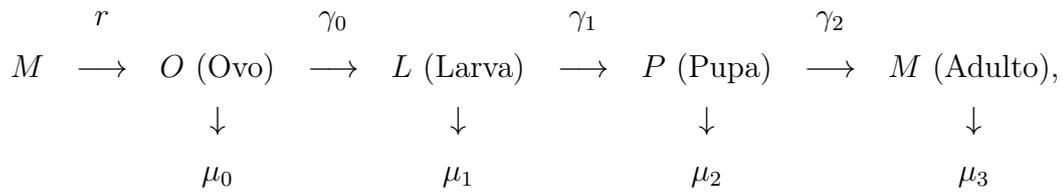
A dengue pode tornar-se endêmica numa região infestada pela população de *Aedes aegypti*. Assim, para desenvolver políticas públicas para prevenção e estratégias de controle desta doença é indispensável obter um sólido e tratável conhecimento sobre o comportamento e a dinâmica da população do *Aedes aegypti*, com o objetivo de encontrar parâmetros apropriados para uma intervenção prática. Modelos matemáticos podem dar tais conhecimentos sendo eles necessariamente uma descrição simplificada da realidade, e se razoavelmente fiéis, eles produzem o desejado controle de parâmetros, [7, 20].

A principal razão da dispersão populacional local do *Aedes aegypti* e do lento avanço da sua infestação é a busca, pelas fêmeas aladas, por sangue humano ou por lugares para oviposição. Por outro lado, a ocorrência de ventos pode também resultar em um movimento de advecção de grande massa de mosquitos e conseqüentemente causar um rápido avanço da infestação. Além disso, como o *Aedes aegypti* é encontrado principalmente em regiões urbanas, seu movimento é também intensamente influenciado pelas atividades relacionadas aos humanos.

Os autores de [30] focam sua atenção numa escala espacial urbana onde um processo

(local) de difusão é devido a um movimento de busca autônomo e aleatório da fêmea *Aedes aegypti* alada e é acoplado com uma constante de advecção que pode ser interpretada como um resultado de transporte pelo vento. Faremos nossa análise para o caso unidimensional.

Para simplificar a dinâmica biológica vital do mosquito, este modelo considera somente duas subpopulações, a forma alada e móvel, mosquitos adultos fêmeas, e uma população aquática e estática, na qual incluem as formas ovo, larva e pupa. Considere o seguinte esquema compartimental baseado no processo de desenvolvimento do mosquito



onde no esquema $O(x, t)$, $L(x, t)$, $P(x, t)$ e $M(x, t)$ são as densidades de ovos, larvas, pupas e mosquitos fêmeas aladas, respectivamente. Em cada uma destas fases existe uma taxa μ_i , $i = 0, 1, 2, 3$ de mortalidade, outra taxa γ_i de passagem da fase i para a fase $i + 1$, $i = 0, 1, 2$, e uma taxa r de oviposição. Consideramos que o *A. aegypti* possui duas fases: ovo, larva e pupa compõem a fase aquática e estática ($\bar{A}(x, t)$), e mosquitos fêmeas a sua fase alada e móvel ($\bar{M}(x, t)$).

3.1 MODELO SIMPLES

Para representar o modelo populacional, teremos

- $\bar{\mu}_i$ - taxa de mortalidade ($i = 1$ da fase alada e $i = 2$ da fase aquática);
- \bar{k}_i - é a capacidade suporte de cada fase;
- $\bar{\gamma}$ - taxa de maturação da forma aquática para a forma alada dos mosquitos fêmeas;
- \bar{r} - taxa de oviposição pelos mosquitos fêmeas;
- $\bar{\gamma}\bar{A}(x, t)\left(1 - \frac{\bar{M}(x, t)}{\bar{k}_1}\right)$ - termo de Verhulst o qual descreve uma capacidade suporte \bar{k}_1 relacionada a quantidade de sangue disponível;
- $\bar{r}\bar{M}(x, t)\left(1 - \frac{\bar{A}(x, t)}{\bar{k}_2}\right)$ - taxa de oviposição é proporcional a sua densidade que é regulada pelo efeito da capacidade suporte sobre a ocupação dos criadouros viáveis.

Consideramos a dispersão da dengue como um resultado de um movimento aleatório (e local) do vôo, representado macroscopicamente pelo processo de difusão \overline{D} , acoplado a uma advecção causada pelo vento e um fluxo com velocidade constante $\overline{\nu}$. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \overline{M}_t &= \overline{D} \overline{M}_{xx} - (\overline{\nu} \overline{M})_x + \overline{\gamma} \overline{A} \left(1 - \frac{\overline{M}}{\overline{k}_1}\right) - \overline{\mu}_1 \overline{M} \\ \overline{A}_t &= \overline{r} \left(1 - \frac{\overline{A}}{\overline{k}_2}\right) \overline{M} - (\overline{\mu}_2 + \overline{\gamma}) \overline{A}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Após introduzir a escala apropriada, adimensionalizamos o sistema acima usando as seguintes unidades

$$\begin{aligned} \overline{k}_1 & \text{ para a população de mosquitos alados;} \\ \overline{k}_2 & \text{ para a população de mosquitos na forma aquática;} \\ \overline{r}^{-1} & \text{ para o tempo e} \\ \sqrt{\frac{\overline{D}}{\overline{r}}} & \text{ para o espaço,} \end{aligned}$$

os quais nos fornecem 5 novos parâmetros adimensionais

$$\mu_1 = \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{r}}, \mu_2 = \frac{\overline{\mu}_2}{\overline{r}}, \gamma = \frac{\overline{\gamma}}{\overline{r}}, \nu = \frac{\overline{\nu}}{\sqrt{\overline{r} \overline{D}}}, k = \frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}$$

e assim obtemos

$$\begin{cases} M_t &= M_{xx} - \nu M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t &= k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases} \quad (3.2)$$

Após descrever o modelo, os autores de [30] buscam formas para encontrar soluções para o problema, levando em conta o sentido biológico da solução. Como não foi possível encontrar a solução clássica, eles analisaram um exemplo numérico. Estudaram a solução em forma de ondas viajantes. Buscaram a solução das EDOs pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e validaram essa solução resolvendo numericamente as EDPs, usando o método de Crank-Nicolson.

3.2 MODELO GENERALIZADO

O modelo proposto em [31], foi utilizado em muitos trabalhos. Por exemplo, em [10], que buscaram uma generalização deste modelo.

O modelo de [10] traz modificações na difusão e na velocidade, que se tornam não-lineares. Podemos justificar tais modificações como sendo o quanto a nuvem de mosquitos está influenciando na propagação da epidemia.

Utilizando a mesma notação que no Modelo (3.2), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} M_t = (M^p M_x)_x - 2\nu M^q M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$. Desta forma, levamos em consideração uma possível difusão não-linear e advecção não-linear do vento.

Os autores de [10] utilizam métodos de Simetrias de Lie para encontrar classes de soluções para alguns casos especiais. A solução não é verificada numericamente. O trabalho carece de detalhes na demonstração da existência de solução.

4 *EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO EM FORMA DE ONDA VIAJANTE*

Neste capítulo utilizaremos os conceitos de Leis de Conservação e da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias para estudarmos os modelos apresentados no Capítulo 3. Os autores de [10, 30] não provam a existência de soluções na forma de ondas viajantes. Estudaremos a existência de solução na forma de onda viajante para os dois modelos.

4.1 MODELO SIMPLES

Nesta seção, estudaremos o Sistema (3.2). Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - \nu M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases} \quad (4.1)$$

Investigaremos soluções na forma de ondas viajantes no Sistema (4.1), como visto na Definição (2.1). As soluções de ondas viajantes podem ser escritas como

$$\begin{aligned} M(x, t) &= m(\xi) \text{ e} \\ A(x, t) &= a(\xi) \text{ com } \xi = x - ct, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde c é uma velocidade constante, $m(\xi)$ e $a(\xi)$ são os perfis de onda. Olhamos para os perfis que levam para a interpretação de uma invasão tais que

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- \text{ e } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- \text{ e } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

onde m^- e a^- são os limites das populações. Quando $\xi \rightarrow +\infty$ temos que $m = 0$ e $a = 0$ correspondem a ausência de mosquitos e isto caracteriza invasão, pois da situação estável sem mosquitos passamos para situação estável com mosquitos.

De (4.2), temos que

$$\begin{aligned} M_t &= -cm'(\xi), \quad M_x = m'(\xi), \quad M_{xx} = m''(\xi) \text{ e} \\ A_t &= -ca'(\xi), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $m' = \frac{dm}{d\xi}$ e $a' = \frac{da}{d\xi}$. Substituindo em (4.1), obtemos

$$\begin{cases} m''(\xi) = (\nu - c)m'(\xi) + \frac{\gamma}{k}(m(\xi) - 1)a(\xi) + \mu_1 m(\xi) \\ a'(\xi) = \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi). \end{cases} \quad (4.5)$$

Este sistema pode ser reescrito na forma de um sistema de 1^a ordem

$$\begin{cases} m'(\xi) &= h(\xi) \\ h'(\xi) &= (\nu - c)h(\xi) + \frac{\gamma}{k}(m(\xi) - 1)a(\xi) + \mu_1 m(\xi) \\ a'(\xi) &= \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi), \end{cases} \quad (4.6)$$

com as equivalentes condições de contorno de (4.3)

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) = 0 & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Resumindo, utilizando a solução em forma de onda viajante, transformamos o sistema de duas EDPs, Sistema (4.1), em um sistema com três EDOs, Sistema (4.6), nas variáveis (m, h, a) .

4.1.1 Análise de pontos fixos

Utilizando os conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, estudaremos o Sistema (4.6). Buscaremos os pontos singulares do Sistema (4.6), (Definição

1.3), que são obtidos resolvendo o sistema homogêneo

$$\begin{cases} h(\xi) = 0 \\ (\nu - c)h(\xi) + \frac{\gamma}{k}(m(\xi) - 1)a(\xi) + \mu_1 m(\xi) = 0 \\ \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Tomando o limite quando $\xi \rightarrow -\infty$ e usando (4.7), obtemos

$$\begin{cases} \gamma(m^- - 1)a^- + k\mu_1 m^- = 0 \\ k(a^- - 1)m^- + (\mu_2 + \gamma)a^- = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Logo, da 1ª equação do Sistema (4.9), temos que

$$m^- = \frac{\gamma a^-}{\gamma a^- + k\mu_1}. \quad (4.10)$$

Substituindo na 2ª Equação de (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} k(a^- - 1)\frac{\gamma a^-}{\gamma a^- + k\mu_1} &= -(\mu_2 + \gamma)a^- \\ \Rightarrow k\gamma(a^-)^2 - k\gamma a^- &= -(\mu_2 + \gamma)\gamma(a^-)^2 - (\mu_2 + \gamma)k\mu_1 a^- \\ \Rightarrow \gamma(a^-)^2(k + \mu_2 + \gamma) + ka^-(-\gamma + \mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1) &= 0 \\ \Rightarrow a^-[\gamma a^-(k + \mu_2 + \gamma) + k(-\gamma + \mu_1\mu_2 + \gamma\mu_1)] &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a^- = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma a^-(k + \mu_2 + \gamma) &= k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1) \\ \Rightarrow a^- = 0 \quad \text{ou} \quad a^- &= \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo na Equação (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} a^- = 0 &\Rightarrow m^- = 0 \quad \text{ou} \\ a^- = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)} &\Rightarrow m^- = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desta forma, os pontos singulares são $A_1 = (0, 0, 0)$ e $B_1 = (m^-, 0, a^-)$.

Consideraremos uma órbita heteroclínica, pois estamos procurando soluções que tenham significado biológico, assim devemos ter $m^- > 0$ e $a^- > 0$, o que implica nas condições

$$\mu_1 = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{r}} < 1 \quad \text{e} \quad \gamma > \frac{\mu_1\mu_2}{1 - \mu_1}. \quad (4.13)$$

Interpretando esta desigualdade vindas de um ponto de vista biológico, concluímos que

uma condição necessária para a existência da onda viajante é, primeiramente, que $\mu_1 = \bar{\mu}_1/\bar{r} < 1$ (significa que a taxa de maturação dos mosquitos é maior que sua taxa de mortalidade) e, em segundo lugar, que a (adimensional) taxa de produção de mosquitos γ deve ser maior que um valor limiar $(\mu_1\mu_2)/(1 - \mu_1)$.

No caso de $\mu_1 = \bar{\mu}_1/\bar{r} < 1$, a condição extra em (4.13) para existência de ondas viajantes pode ser escrita em unidades dimensionais como

$$R_0^* = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma} + \bar{\mu}_2} \frac{\bar{r}}{\mu_1} > 1 \quad (4.14)$$

e pode ser interpretada de um ponto de vista biológico como segue.

Podemos interpretar o termo $\bar{\gamma}/(\bar{\gamma} + \bar{\mu}_2)$ como sendo a probabilidade de um ovo ter sucesso em se tornar um mosquito (fêmea), $\bar{r}/\bar{\mu}_1$ é o número médio de ovos viáveis ovipostos por cada mosquito fêmea. Então, segue que ondas viajantes podem ocorrer somente se os mosquitos fêmeas produzirem em média um mosquito fêmea durante toda sua vida. Deve-se notar que uma trajetória biologicamente aceitável, isto é, uma “positiva”, deve satisfazer a seguinte desigualdade: $m(\xi) \geq 0$, $a(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \in (-\infty, +\infty)$.

Usamos o método do plano de fase para determinar a existência de uma solução “positiva” para o Sistema (4.6) e Condição (4.7), ou seja, que satisfaça às condições biológicas, que representa uma trajetória partindo do ponto singular $B_1 = (m^-, 0, a^-)$ para a origem $A_1 = (0, 0, 0)$. Esta trajetória é representada na Figura 4.1. É claro, uma condição necessária para a existência de uma trajetória solução é que B_1 deva ter uma variedade instável (partindo) e A_1 uma variedade estável (chegando), [31].

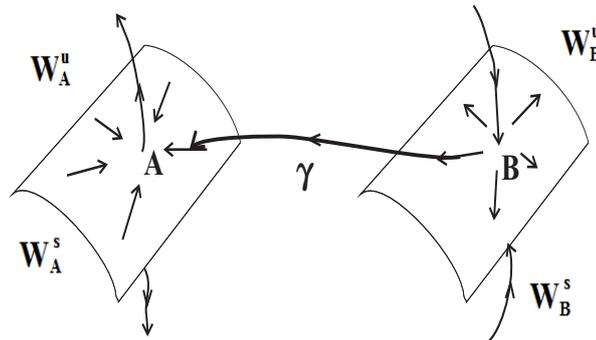


Figura 4.1: Órbita heteroclínica (γ), onde W_i^s e W_i^u são as variedades estável e instável, respectivamente, em A e B .

A princípio poderíamos ter uma solução com uma onda no sentido oposto, partindo de A_1 para B_1 . Este estudo de onda não faz parte do presente trabalho. Focaremos nossos

esforços para provarmos a existência de solução na forma de uma onda viajante de B_1 para A_1 .

4.1.2 Estudo de análise local

Estudamos a estabilidade do fluxo do Sistema (4.6) na vizinhança dos equilíbrios, com base no Teorema Hartman-Grobman (Teorema 1.4), para descrever localmente as variedades estável e instável, Definição (1.12), das EDOs. Consideramos

$$\begin{cases} F(m, h, a) = h \\ G(m, h, a) = (\nu - c)h + \frac{\gamma}{k}(m - 1)a + \mu_1 m \\ H(m, h, a) = \frac{k}{c}(a - 1)m + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a. \end{cases} \quad (4.15)$$

Logo, a matriz Jacobiana é

$$J(m, h, a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial m} & \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{\partial F}{\partial a} \\ \frac{\partial G}{\partial m} & \frac{\partial G}{\partial h} & \frac{\partial G}{\partial a} \\ \frac{\partial H}{\partial m} & \frac{\partial H}{\partial h} & \frac{\partial H}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{k}a + \mu_1 & \nu - c & \frac{\gamma}{k}(m - 1) \\ \frac{k}{c}(a - 1) & 0 & \frac{km + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Temos que o polinômio característico é dado por: $p(\lambda, c) := \det(J(m, h, a) - \lambda Id)$.

Para cada ponto singular, determinaremos os autovalores (λ_i) e autovetores (w_i), correspondentes, e definiremos quem estará na variedade estável ($Real(\lambda_i) < 0$) e na variedade instável ($Real(\lambda_i) > 0$).

Logo, para o ponto $A_1 = (0, 0, 0)$, obtemos

$$J(A_1) = J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \nu - c & -\frac{\gamma}{k} \\ -\frac{k}{c} & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

cujo o polinômio característico é

$$p_{A_1}(\lambda, c) = -\lambda^3 + \left[\frac{\mu_2 + \gamma}{c} + (\nu - c)\right]\lambda^2 + (\mu_1 - (\nu - c)\frac{\mu_2 + \gamma}{c})\lambda - \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\mu_1 + \frac{\gamma}{c}, \quad (4.18)$$

e as raízes desta c-família de polinômios em λ são os autovalores correspondentes. Nós nos restringimos ao caso hiperbólico, isto é, ignoramos a possibilidade de autovalores nulos.

De (4.13), temos $p_{A_1}(0, c) = \frac{1}{c}[\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)] > 0$ e como $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} p_{A_1}(\lambda, c) = \mp\infty$. Assim, cada polinômio em λ desta c -família tem pelo menos uma raiz positiva. Estes polinômios, em princípio, podem ter outras duas raízes reais, ou outras duas raízes complexas conjugadas.

Uma solução em forma de um onda viajante pode existir se para algum $c > 0$, o respectivo polinômio $p_{A_1}(\lambda, c)$ tiver pelo menos uma raiz (real) negativa, isto é uma condição necessária para o surgimento de tal solução.

Entretanto, se $\lambda < 0$ temos que $\lim_{c \rightarrow \infty} p_{A_1}(\lambda, c) = -\infty$ isto implica uma raiz real negativa (λ_1) de $p_{A_1}(\lambda, c)$ existe, se c é escolhido suficientemente grande. Visto que para qualquer $c > 0$, $p_{A_1}(0, c) > 0$, se um polinômio $p_{A_1}(\lambda, c)$ tem uma raiz negativa, ele pode ter outra raiz negativa, ver Figura 4.2. Pois como $p_{A_1}(0, c) > 0$, $p_{A_1}(\lambda_1, c) = 0$ e $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_{A_1}(\lambda, c) = \infty$ isto implica que outra raiz real negativa (λ_2) de $p_{A_1}(\lambda, c)$ pode existir, dependendo da escolha de c .

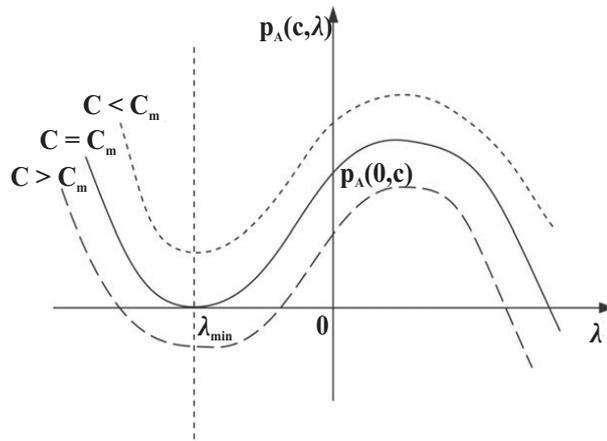


Figura 4.2: Gráfico do polinômio $p_{A_1}(\lambda, c)$, onde variamos o valor de c .

O valor de $c > 0$ para o qual existe uma solução, isto é, $\min c := c_m$ ideal, deve ser determinado. Assim, o parâmetro crucial a ser considerado é o c_m . Neste trabalho, seguiremos [31] e não iremos determiná-lo. O valor limiar c_m é a velocidade mínima c possível, baseado em [20, 35], para a qual deve existir uma onda viajante ou em outras palavras, $c \geq c_m$ é uma condição necessária para a existência da solução em forma de um onda viajante, [31].

Agora, analisamos o ponto $B_1 = (m^-, 0, a^-)$, onde

$$m^- = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1} \quad \text{e} \quad a^- = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)}, \quad (4.19)$$

desta forma, obtemos a matriz Jacobiana

$$J(B_1) = J(m^-, 0, a^-) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 + \frac{\gamma}{k}a^- & \nu - c & \frac{\gamma}{k}(m^- - 1) \\ \frac{k}{c}(a^- - 1) & 0 & \frac{km^- + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Logo, o polinômio característico é

$$p_{B_1}(\lambda, c) = -\lambda^3 + (\alpha_3 + \alpha_5)\lambda^2 + (\alpha_1 - \alpha_3\alpha_5)\lambda + (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_5),$$

onde $\alpha_1 = \mu_1 + (\gamma/k)a^-$, $\alpha_2 = (k/c)(a^- - 1)$, $\alpha_3 = \nu - c$, $\alpha_4 = (k/c)(m^- - 1)$ e $\alpha_5 = (km^- + \mu_2 + \gamma)/c$.

A produção de uma onda viajante estacionária estável é uma estratégia matemática comumente usada para parar a progressão de um processo de invasão em problemas de reação-difusão [25].

4.1.3 A existência da onda viajante

Utilizamos um método semi-analítico para estudar a existência da solução do Problema (4.6, 4.7).

Um exemplo numérico, que é representado por um conjunto de valores fixos para os parâmetros, usa os dados da Tabela 4.1 (dimensional) e Tabela 4.2 (adimensional). Estes valores são os mesmos de [31].

\bar{D}	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$	\bar{r}	\bar{k}_1	\bar{k}_2	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$
$1,25 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-2}$	0,2	30	251	100	$4,0 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-2}$

Tabela 4.1: Valores para os parâmetros dimensionais no seguinte sistema de unidades: Espaço (x) = km e Tempo (t) = 1 dia.

ν	γ	k	μ_1	μ_2
$8,164 \times 10^{-2}$	$6,66 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-1}$	$1,33 \times 10^{-3}$	$3,33 \times 10^{-4}$

Tabela 4.2: Valores para os parâmetros adimensionais ν , γ , k , μ_1 , μ_2 correspondentes a Tabela 4.1.

Utilizaremos o resultado que os autores de [31] obtiveram para a velocidade c_m , isto é, $c_m = 0,52$. Eles encontraram este valor, fazendo simulações numéricas.

Descreveremos, agora, o método semi-analítico que foi inspirado em [18] empenhando técnicas de sistemas dinâmicos, como a seção de Poincaré, e integração numérica no Matlab.

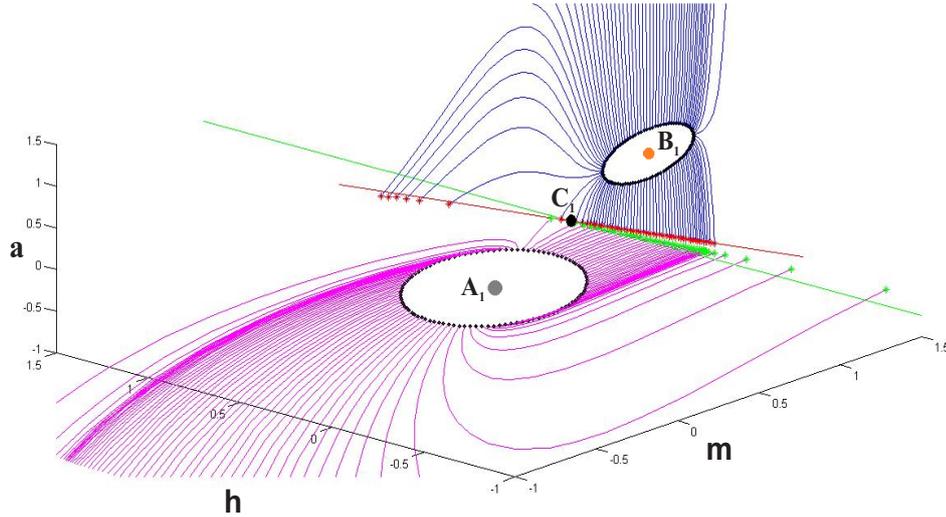


Figura 4.3: Os equilíbrios A_1 (cinza), B_1 (laranja) e o ponto médio C_1 (preto). As variedades estável em A_1 (linhas rosas) e a instável em B_1 (linhas azuis) interceptam o plano de Poincaré (linhas vermelha e verde), estas interseções são indicadas pelos pontos verdes e vermelhos.

- Os pontos singulares (4.12) são: $A_1 = (0, 0, 0)$ e $B_1 = (0, 951; 0; 0, 971)$.
- Da matriz Jacobiana em cada ponto singular (Matrizes (4.17) e (4.20)), determinamos os autovalores e os autovetores correspondentes. Assim encontramos os seguintes valores
 - para $J(A_1)$ temos os seguintes autovalores negativos $\lambda_1 = -0,2516$ e $\lambda_2 = -0,3281$ com os respectivos autovetores $w_1 = (-1, 0; 0, 2516; -1, 8137)$ e $w_2 = (-0, 7105; 0, 2331; -1, 0)$ que definem a variedade estável (W_A^s);
 - para $J(B_1)$ temos os seguintes autovalores positivos $\lambda_3 = 0,0551$ e $\lambda_4 = 0,4708$ com os respectivos autovetores $w_3 = (0, 9979; 0, 0549; 0, 0330)$ e $w_4 = (-0, 0032; -0, 0015; 1, 0009)$ que definem a variedade instável (W_B^u).
- Com os autovetores, criamos vizinhanças dos pontos singulares onde integramos numericamente. Na vizinhança de A_1 , integramos os pontos, em relação ao tempo, para “trás” e na vizinhança de B_1 , integramos para “frente”.
- Criamos o Plano de Poincaré (π) com o ponto $C_1 = (A_1 + B_1)/2$ e com o vetor normal $N = \overrightarrow{C_1 B_1}$, de modo que o plano corte as variedades transversalmente.

- Obtemos a interseção entre as variedades W_A^s e W_B^u com o Plano de Poincaré. A Figura 4.3 representa este método.

Criamos uma projeção em \mathbb{R}^2 para representarmos o plano de Poincaré (π). A Figura 4.4 representa este plano, indicando as interseções das variedades estável em A_1 (pontos verdes) e instável em B_1 (pontos vermelhos). Utilizando o programa Curve Intersections [12], encontramos uma interseção entre as curvas no plano π (o ponto preto P), isto é, existe uma órbita que parte do equilíbrio B_1 (na variedade instável), intercepte π e ligue ao outro equilíbrio A_1 (na variedade estável).

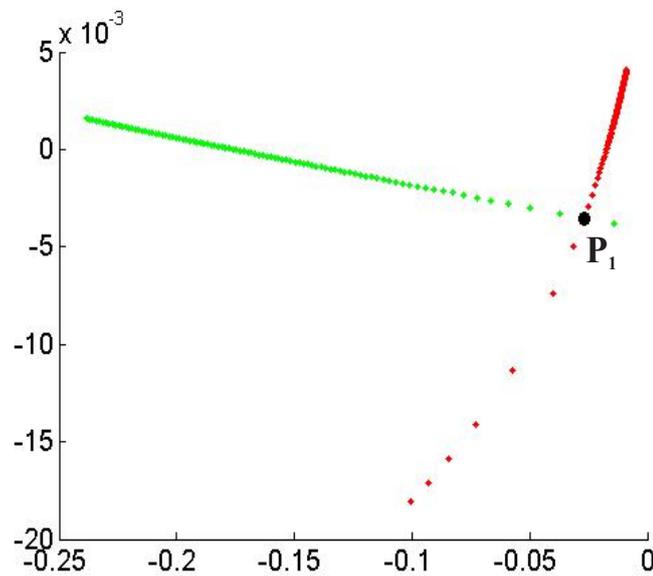


Figura 4.4: Plano de Poincaré da Figura 4.3 no qual estão indicadas as interseções com as variedades estável de A_1 (pontos verdes) e instável de B_1 (pontos vermelhos).

Assim, existe uma órbita heteroclínica que ligue o equilíbrio B_1 até o equilíbrio A_1 , ou seja, garantimos que existe uma solução em forma de onda viajante para o Problema (4.6, 4.7).

4.2 MODELO GENERALIZADO

Estudaremos o Sistema (3.3), considerando o caso particular, onde $p = 0$ e $q > 0$. Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - 2\nu M^q M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases} \quad (4.21)$$

Investigaremos soluções da forma de ondas viajantes no Sistema (4.21), Definição (2.1). As soluções em forma de ondas viajantes podem ser escritas como

$$\begin{aligned} M(x, t) &= m(\xi) \text{ e} \\ A(x, t) &= a(\xi) \text{ com } \xi = x - ct, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde c é uma velocidade constante, $m(\xi)$ e $a(\xi)$ são os perfis de onda. Olhamos para os perfis que levam para a interpretação de uma invasão, tais que

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- \text{ e } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- \text{ e } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

onde m^- e a^- são os limites das populações.

De (4.22), temos que

$$\begin{aligned} M_t &= -cm'(\xi), \quad M_x = m'(\xi), \quad M_{xx} = m''(\xi) \text{ e} \\ A_t &= -ca'(\xi), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $m' = \frac{dm}{d\xi}$ e $a' = \frac{da}{d\xi}$. Substituindo em (4.21), obtemos

$$\begin{cases} m'' = (2\nu m^q - c)m' + \left(\mu_1 + \frac{\gamma}{k}a\right)m - \frac{\gamma}{k}a \\ a' = \frac{k}{c}(a - 1)m + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a. \end{cases} \quad (4.25)$$

Este sistema pode ser reescrito na forma de um sistema de 1^a ordem

$$\begin{cases} m'(\xi) &= h(\xi) \\ h'(\xi) &= (2\nu m^q(\xi) - c)h(\xi) + \left(\mu_1 + \frac{\gamma}{k}a(\xi)\right)m(\xi) - \frac{\gamma}{k}a(\xi) \\ a'(\xi) &= \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi), \end{cases} \quad (4.26)$$

com as equivalentes condições de contorno de (4.23)

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) = 0 & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

4.2.1 Análise de pontos fixos

Utilizando os conceitos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, estudaremos o Sistema (4.26). Buscaremos os pontos singulares do Sistema (4.26) que são obtidos resolvendo o sistema homogêneo

$$\begin{cases} h = 0 \\ (2\nu m^q - c)h + (\mu_1 + \frac{\gamma}{k}a)m - \frac{\gamma}{k}a = 0 \\ \frac{k}{c}(a - 1)m + (\frac{\mu_2 + \gamma}{c})a = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Tomando o limite quando $z \rightarrow -\infty$ e usando (4.27), obtemos

$$\begin{cases} \gamma(m^- - 1)a^- + k\mu_1 m^- = 0 \\ k(a^- - 1)m^- + (\mu_2 + \gamma)a^- = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Logo, este sistema é o mesmo que o Sistema (4.9) e a solução é

$$\begin{aligned} a^- = 0 & & \text{e} & & m^- = 0 & \text{ou} \\ a^- = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)} & & \text{e} & & m^- = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Desta forma, os pontos singulares são $A_2 = (0, 0, 0)$ e $B_2 = (m^-, 0, a^-)$.

4.2.2 Estudo de análise local

Começamos estudando a estabilidade do fluxo na vizinhança dos equilíbrios. Aqui será muito importante o Teorema (1.4). Consideramos

$$\begin{cases} F(m, h, a) = h \\ G(m, h, a) = (2\nu m^q - c)h + \frac{\gamma}{k}(m - 1)a + \mu_1 m \\ H(m, h, a) = \frac{k}{c}(a - 1)m + (\frac{\mu_2 + \gamma}{c})a. \end{cases} \quad (4.31)$$

Logo a Jacobiana é

$$J(m, h, a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial m} & \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{\partial F}{\partial a} \\ \frac{\partial G}{\partial m} & \frac{\partial G}{\partial h} & \frac{\partial G}{\partial a} \\ \frac{\partial H}{\partial m} & \frac{\partial H}{\partial h} & \frac{\partial H}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\nu q m^{q-1} h + \mu_1 + \frac{\gamma}{k} a & 2\nu m^q - c & \frac{\gamma}{k}(m-1) \\ \frac{k}{c}(a-1) & 0 & \frac{km + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}.$$

Logo, para o ponto singular $A_2 = (0, 0, 0)$, obtemos

$$J(A_2) = J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & -c & -\frac{\gamma}{k} \\ -\frac{k}{c} & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

cujo o polinômio característico é

$$p_{A_2}(\lambda, c) = -\lambda^3 + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c} - c\right)\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \gamma)\lambda + \left(\frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{c}\right), \quad (4.33)$$

e as raízes desta c -família de polinômios em λ são os autovalores correspondentes.

Agora, analisamos o ponto singular $B_2 = (m^-, 0, a^-)$, onde $m^- = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1}$ e $a^- = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)}$, e desta forma obtemos a matriz Jacobiana

$$J(B_2) = J(m^-, 0, a^-) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 + \frac{\gamma}{k}a^- & 2\nu(m^-)^q - c & \frac{\gamma}{k}(m^- - 1) \\ \frac{k}{c}(a^- - 1) & 0 & \frac{km^- + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Logo, o polinômio característico é

$$p_{B_2}(\lambda, c) = -\lambda^3 + (\alpha_3 + \alpha_5)\lambda^2 + (\alpha_1 - \alpha_3\alpha_5)\lambda + (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_5),$$

onde $\alpha_1 = \mu_1 + (\gamma/k)a^-$, $\alpha_2 = (k/c)(a^- - 1)$, $\alpha_3 = 2\nu m^q - c$, $\alpha_4 = (k/c)(m^- - 1)$ e $\alpha_5 = (km^- + \mu_2 + \gamma)/c$.

Para $J(A_2)$ e $J(B_2)$, determinaremos os autovalores (λ_i) e autovetores (w_i) correspondentes, assim, definiremos quem estará na variedade estável ($Real(\lambda_i) < 0$) e na variedade instável ($Real(\lambda_i) > 0$).

4.2.3 A existência da onda viajante

Como na Seção (4.1.3), estudaremos a existência da solução do Sistema (4.26) com as Condições de Contorno (4.27). Utilizamos também os mesmos dados da Tabela (4.2) (adimensional) e consideraremos $q = 1$ e $c_m = 0,52$.

Aplicaremos o mesmo método semi-analítico, que utiliza técnicas de sistemas dinâmicos (a seção de Poincaré) e integração numérica no Matlab.

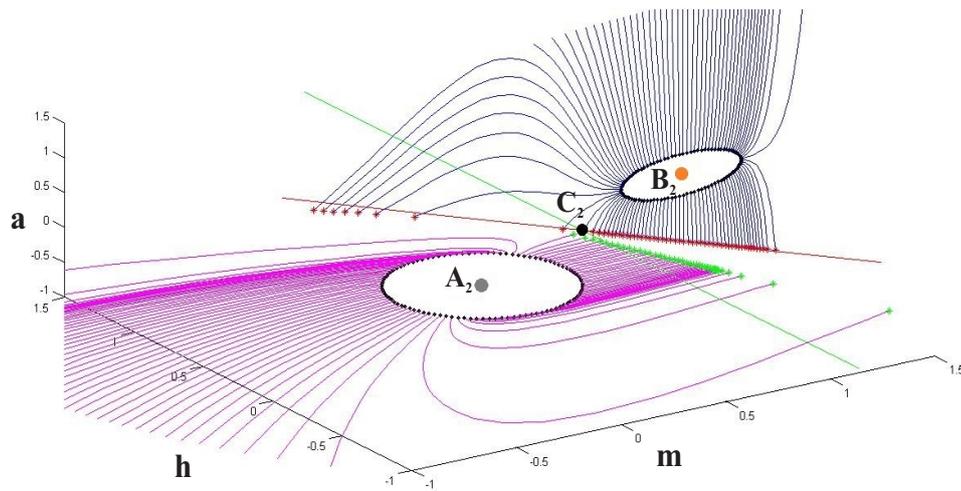


Figura 4.5: Os equilíbrios A_2 (cinza), B_2 (laranja) e o ponto médio C_2 (preto). As variedades estável em A_2 (linhas rosas) e a instável em B_2 (linhas azuis) interceptam o plano de Poincaré (linhas vermelha e verde), indicado pelos pontos verdes e vermelhos.

- Os pontos singulares são: $A_2 = (0, 0, 0)$ e $B_2 = (0, 951; 0; 0, 971)$.
- Da matriz Jacobiana em cada ponto singular (Matrizes (4.32) e (4.34)), determinamos os autovalores e autovetores correspondentes. Assim encontramos os seguintes valores
 - para $J(A_2)$ temos os seguintes autovalores negativos $\lambda_1 = -0,188$ e $\lambda_2 = -0,465$ com os respectivos autovetores $w_1 = (0,623; -0,117; 1,490)$ e $w_2 = (-2,826; 1,315; -2,838)$ que definem a variedade estável (W_A^s);
 - para $J(B_2)$ temos os seguintes autovalores positivos $\lambda_3 = 0,063$ e $\lambda_4 = 0,471$ com os respectivos autovetores $w_3 = (0,997; 0,063; 0,034)$ e $w_4 = (0,004; 0,002; 1,001)$ que definem a variedade instável (W_B^u).

- Com os autovetores, criamos vizinhanças dos pontos singulares onde integramos numericamente. Na vizinhança de A_2 , integramos os pontos, em relação ao tempo, para “trás” e na vizinhança de B_2 , integramos para “frente”.
- Criamos o Plano de Poincaré (π) com o ponto $C_2 = (A_2 + B_2)/2$ e o vetor normal $N_2 = \overrightarrow{C_2 B_2}$, de modo que o fluxo em cada ponto singular corte o plano transversalmente.
- Obtemos a interseção entre as variedades W_A^s e W_B^u com o Plano de Poincaré. A Figura 4.5 representa este método.

Criamos uma projeção em \mathbb{R}^2 para representarmos o plano de Poincaré (π). A Figura 4.6 representa este plano, indicando as interseções das variedades estável em A_2 (pontos verdes) e instável em B_2 (pontos vermelhos). Utilizando o programa Curve Intersections, encontramos uma interseção entre as curvas no plano π (o ponto preto P_2), isto é, existe uma órbita que parte do equilíbrio B_2 (na variedade instável), intercepte π e ligue ao outro equilíbrio A_2 (na variedade estável).

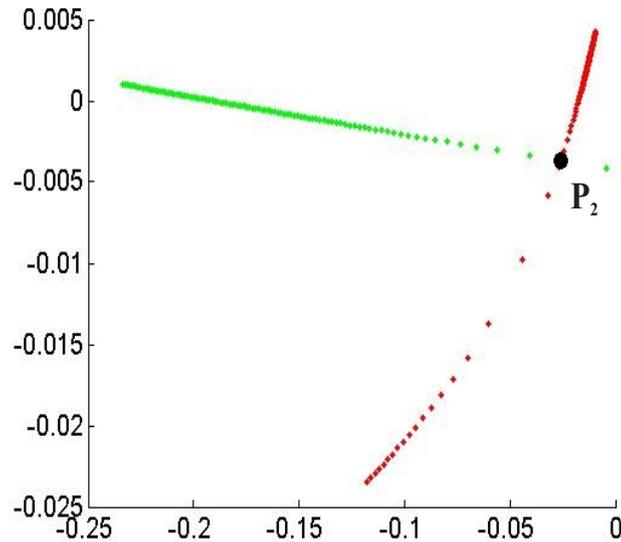


Figura 4.6: Plano de Poincaré da Figura 4.5 no qual estão indicadas as interseções com as variedades estável de A_2 (pontos verdes) e instável de B_2 (pontos vermelhos).

Assim, existe uma órbita heteroclínica que ligue B_2 até A_2 , ou seja, garantimos que existe uma solução em forma de onda viajante para o Problema (4.26) e (4.27).

5 SOLUÇÃO PARTICULAR

Neste capítulo utilizaremos os conceitos de Leis de Conservação para estudarmos casos particulares dos modelos apresentados nos Capítulos 3 e 4, em que consideraremos nulos os termos fontes e a difusão. Neste caso, mostraremos outras soluções em forma de ondas para os modelos.

5.1 MODELO SIMPLES

Vamos estudar o Sistema (4.1)

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - \nu M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases}$$

Começaremos nossa análise do modelo, considerando nulos o termo de difusão (M_{xx}) e os termos fonte ($\phi(M, A) = \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M$, $\psi(M, A) = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A$). Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} M_t + \nu M_x = 0 \\ A_t = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Da 1ª Equação de (5.1), temos o seguinte problema de Riemann

$$\begin{cases} M_t + \nu M_x = 0 \\ M(x, 0) = \begin{cases} m_l, & x < 0, \\ m_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.2)$$

onde m_l e m_r são estados a esquerda e a direita, respectivamente.

Da 2ª Equação de (5.1), temos que

$$A_t(x, t) = 0 \Rightarrow A(x, t) = g_1(x) + c_1, \quad (5.3)$$

onde g_1 é uma função e c_1 é uma constante.

Como visto na Seção (2.4), a Equação (5.2) é uma Equação de Transporte cuja solução é dada por (2.51). Logo, a solução de (5.1) é

$$\begin{cases} M(x, t) = M_0(x - \nu t) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x < \nu t, \\ m_r, & \text{se } x > \nu t, \end{cases} \\ A(x, t) = g_1(x) + c_1. \end{cases} \quad (5.4)$$

A Figura 5.1 representa a solução para o Problema (5.2), em que utilizamos os valores da Tabela 4.2.

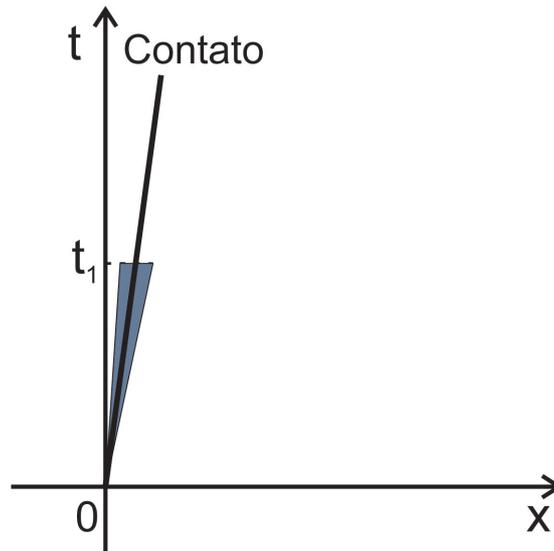


Figura 5.1: A solução do Problema (5.2) é uma onda de contato.

5.2 MODELO GENERALIZADO

Estudaremos o Sistema (4.21)

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - 2\nu M^q M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases}$$

Em nossa análise, consideraremos o caso particular em que a difusão (M_{xx}) e os termos fontes ($\phi(M, A) = \frac{\gamma}{k}A(1 - M) - \mu_1 M$, $\psi(M, A) = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A$) são nulos.

Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} M_t + 2\nu M^q M_x = 0 \\ A_t = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Da 1ª Equação de (5.5), temos o seguinte problema de Riemann

$$\begin{cases} M_t + 2\nu M^q M_x = 0 \\ M(x, 0) = \begin{cases} m_l & x < 0, \\ m_r & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.6)$$

onde m_l e m_r são estados a esquerda e a direita, respectivamente.

Da 2ª Equação de (5.5), temos que

$$A_t(x, t) = 0 \Rightarrow A(x, t) = g_2(x) + c_2, \quad (5.7)$$

onde g_2 é uma função e c_2 é uma constante.

Agora, comparando (5.6) com a Equação (2.1), que é $M_t + [f(M)]_x = 0$, temos que $f'(M) = 2\nu M^q$, o que implica $f(M) = \frac{2\nu}{q+1} M^{q+1}$.

Iremos analisar dois casos, onde buscaremos as curvas características (Seção 2.3).

Caso 1: Seja $-\infty < m_r < m_l < \infty$ e $q > 0$.

Pelo método das características, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(M) = 2\nu M^q \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

O valor de M no ponto inicial $(x_0, 0)$ é o mesmo ao longo das características, $M(x, t) = M(x_0, 0) = M_0(x_0)$. Logo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\nu [M_0(x_0)]^q \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Desta forma, as curvas características são

$$x_s(t) = \begin{cases} f'(m_l)t + x_0 = 2\nu m_l^q t + x_0, & \text{se } x_0 < 0 \\ f'(m_r)t + x_0 = 2\nu m_r^q t + x_0, & \text{se } x_0 > 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Pela condição R-H (Condição 2.35), temos que

$$s = \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{m_l^{q+1} - m_r^{q+1}}{m_l - m_r} \right) = \frac{2\nu}{q+1} \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right). \quad (5.10)$$

Essa é a velocidade do choque. Observamos que a 1ª Equação de (5.5) cumpre a Condição de Entropia II (2.43), pois como $m_r < m_l$, $\nu > 0$ e $q > 0$, temos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} M^i \right) \geq \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right) \geq \left(\sum_{i=0}^q M^{q-i} m_r^i \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{M^{q+1} - m_l^{q+1}}{M - m_l} \right) \geq \frac{2\nu}{q+1} \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right) \geq \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{M^{q+1} - m_r^{q+1}}{M - m_r} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{f(M) - f(m_l)}{M - m_l} \geq s \geq \frac{f(M) - f(m_r)}{M - m_r}, \end{aligned}$$

para todo M entre m_l e m_r . Logo a solução do Problema (5.6) será em forma de choque (Seção 2.6), ver Figura 5.2. Portanto, a solução do Sistema (5.5) é

$$\begin{cases} M(x, t) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x < st, \\ m_r, & \text{se } x > st, \end{cases} \\ A(x, t) = g_2(x) + c_2. \end{cases} \quad (5.11)$$

Utilizamos os valores da Tabela 4.2 e $m_l = m^-$, dado em (4.12).

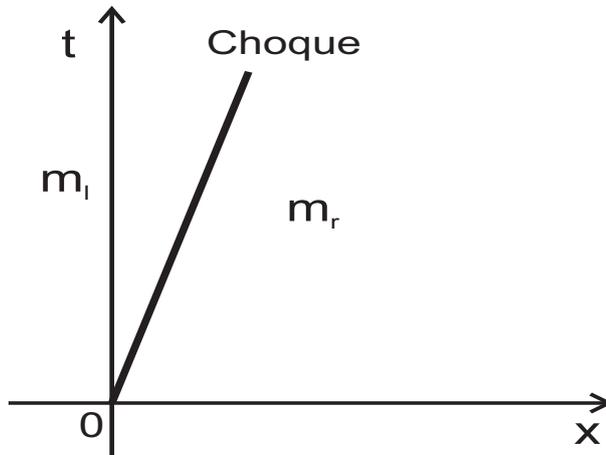


Figura 5.2: A solução do Problema (5.6), em que $q = 1$, $m_l = m^-$ e $m_r = 0$, é uma onda de choque.

Caso 2: Seja $-\infty < m_l < m_r < \infty$ e $q > 0$.

De acordo com o que foi apresentado na seção sobre rarefações (Seção 2.7), faremos algumas notações para simplificar os cálculos. Sejam

$$\begin{aligned} m(x, t) &= r(\eta) && \text{onde } \eta = \frac{x}{t}, \\ \eta_l &= f'(m_l), && \eta_r = f'(m_r) \text{ onde } f'(M) = 2\nu M^q. \end{aligned} \quad (5.12)$$

No sistema (5.6), as curvas características são as mesmas do Sistema (5.9)

$$x_s(t) = \begin{cases} \eta_l t + x_0, & \text{se } x_0 < 0, \\ \eta_r t + x_0, & \text{se } x_0 > 0. \end{cases}$$

A solução será na forma de onda de rarefação (Proposição 2.6), ou seja, a solução é da forma

$$r(\eta) = \begin{cases} m_l, & \text{se } \eta \leq \eta_l, \\ (f')^{-1}(\eta), & \text{se } \eta_l < \eta < \eta_r, \\ m_r, & \text{se } \eta \geq \eta_r. \end{cases}$$

Como vimos na Seção (2.7), Equação (2.54), seja $M(x, t) = r(\eta)$, onde $\eta = \frac{x}{t}$. Logo

$$\begin{aligned} M_t(x, t) &= \frac{-1}{t} \eta r'(\eta) \quad \text{e} \\ M_x(x, t) &= \frac{1}{t} r'(\eta). \end{aligned}$$

Substituindo na 1ª equação de (5.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{-1}{t} \eta r'(\eta) + 2\nu [r(\eta)]^q \frac{1}{t} r'(\eta) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{t} r'(\eta) \left[-\eta + 2\nu [r(\eta)]^q \right] &= 0 \\ \Rightarrow r'(\eta) = 0 \quad \text{ou} \quad r(\eta) &= \sqrt[q]{\frac{\eta}{2\nu}}. \end{aligned}$$

Assim, $r(\eta) = \sqrt[q]{\frac{\eta}{2\nu}}$, se $\eta_l < \eta < \eta_r$, e obtemos a solução do problema de Riemann

$$r(\eta) = \begin{cases} m_l, & \text{se } \eta \leq \eta_l, \\ \sqrt[q]{\frac{\eta}{2\nu}}, & \text{se } \eta_l < \eta < \eta_r, \\ m_r, & \text{se } \eta \geq \eta_r. \end{cases} \quad (5.13)$$

Esta solução é representada na Figura 5.3.

Portanto, retornando a notação de (5.12), a solução do Problema (5.5) para $-\infty < m_l < m_r < \infty$ é

$$\begin{cases} M(x, t) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x \leq f'(m_l)t, \\ \sqrt[2\nu]{\frac{\eta}{2}}, & \text{se } f'(m_l)t < x < f'(m_r)t, \\ m_r, & \text{se } x \geq f'(m_r)t, \end{cases} \\ A(x, t) = g_2(x) + c_2. \end{cases} \quad (5.14)$$

Utilizamos os valores da Tabela 4.2 e $m_r = m^-$, dado em (4.12).

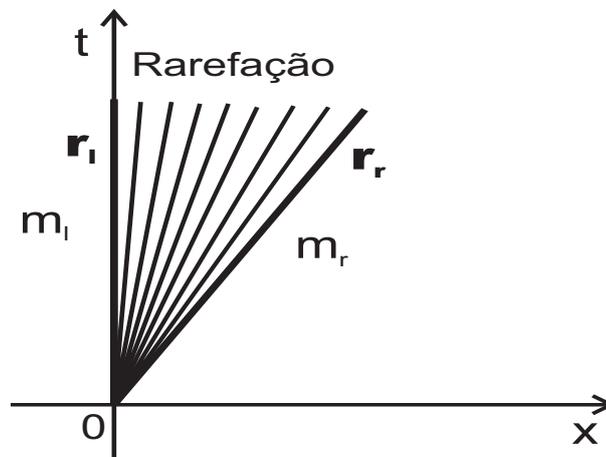


Figura 5.3: A solução do Problema (5.6), em que $q = 1$, $m_l = 0$ e $m_r = m^-$, é uma onda de rarefação com velocidades r_l à esquerda e r_r à direita.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas noções da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, o qual foi de fundamental importância para garantir a existência de solução dos Sistemas (4.1) e (4.21).

Estudamos também vários conceitos sobre Leis de Conservação com o intuito de entender o que ocorre com as soluções das EDPs na forma de leis de conservação.

No Capítulo 3 descrevemos os modelos para a dinâmica espacial da população do *Aedes aegypti*. Começamos descrevendo o modelo simples de [30], dado por (3.2). Depois, visando uma generalização do Modelo (3.2), fazemos modificações na difusão e na velocidade da EDP e obtemos o Modelo generalizado (3.3), [10].

No Capítulo 4 estudamos e mostramos a existência de soluções na forma de ondas viajantes para os modelos propostos (Modelos (4.1) e (4.21)).

No Capítulo 5 encontramos outras formas de soluções para os modelos. Utilizando os conceitos de leis de conservação, encontramos e construímos soluções particulares para os Modelos (4.1) e (4.21).

Dadas as conclusões acima apresentadas, é interessante para o aprimoramento deste trabalho estudar a existência de soluções para as EDPs (4.1) e (4.21) por meio de métodos numéricos, como Diferenças Finitas ou Elementos Finitos. Outra continuação seria tentar melhorar os modelos, modificando ainda mais as equações.

Outro ponto interessante seria nos mesmos modelos, provar a existência de soluções para qualquer velocidade c e encontrar a velocidade c_m correta, analiticamente, de forma que ela coincida com o resultado numérico obtido a partir de técnicas de diferenças finitas.

REFERÊNCIAS

- [1] D. Aldila, T. Götz, and E. Soewono. An optimal control problem arising from a dengue disease transmission model. *Mathematical biosciences*, 2012.
- [2] N. Arunachalam, S. Tana, Fe Espino, P. Kittayapong, W. Abeyewickrem, K. T. Wai, B. K. Tyagi, A. Kroeger, J. Sommerfeld, and M. Petzold. Eco-bio-social determinants of dengue vector breeding: a multicountry study in urban and periurban asia. *Bulletin of the World Health Organization*, 88(3):173–184, 2010.
- [3] R. J. Biezuner. Equações diferenciais parciais i/ii. Notas de Aula, UFMG, 2010.
- [4] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 3^a edition, 2005.
- [5] G. Chapiro. *Gas-solid combustion in insulated porous media*. PhD thesis, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [6] G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A. J. de Souza, D. Marchesin, and J. Bruining. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational geosciences*, 16(3):799–808, 2012.
- [7] D. A. T. Cummings, R. A. Irizarry, N. E. Huang, T. P. Endy, A. Nisalak, K. Ungchusak, and D. S. Burke. Travelling waves in the occurrence of dengue haemorrhagic fever in thailand. *Nature*, 427(6972):344–347, 2004.
- [8] C. Dufourd and Y. Dumont. Impact of environmental factors on mosquito dispersal in the prospect of sterile insect technique control. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(9):1695 – 1715, 2013.
- [9] L. C. Evans. Partial differential equations. graduate studies in mathematics. *American Mathematical Society*, 2, 1998.
- [10] I. L. Freire and M. Torrisi. Symmetry methods in mathematical modeling of aedes aegypti dispersal dynamics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(3):1300 – 1307, 2013.
- [11] A. E. R. Gutierrez. Aplicação do método de complementaridade não linear para o estudo de combustão de oxigênio in situ. Master’s thesis, UFJF, 2013.
- [12] D. C. Hanselman and B. Littlefield. *Mastering matlab 7*. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [13] S. Hay. Football fever could be a dose of dengue. *Nature*, 503(7477):439–439, 2013.

- [14] A. F. da S. Junior. Método dos volumes finitos para equação de convecção e difusão em uma dimensão espacial. Master's thesis, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia/UFF, 2012.
- [15] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [16] L. Lucantoni, M. Magaraggia, G. Lupidi, R. K. Ouedraogo, O. Coppellotti, F. Esposito, C. Fabris, G. Jori, and A. Habluetzel. Novel, meso-substituted cationic porphyrin molecule for photo-mediated larval control of the dengue vector aedes aegypti. *PLoS neglected tropical diseases*, 5(12):e1434, 2011.
- [17] N. A. Maidana and H. Mo Yang. Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves. *Mathematical biosciences*, 215(1):64–77, 2008.
- [18] A. A. Mailybaev, D. Marchesin, and M. H. D. S. Vera. Sensitivity analysis of stable and unstable manifolds: Theory and application. *Preprint, IMPA*, 2001.
- [19] V. Martínez and A. Marquina. Computation of travelling wave solutions of scalar conservation laws with a stiff source term. *Computers & fluids*, 32(8):1161–1178, 2003.
- [20] J. D. Murray. *Mathematical biology*. Springer Berlin, 3rd edition, 1993.
- [21] H. Nishiura. Mathematical and statistical analyses of the spread of dengue. *Dengue Bulletin*, 30:51, 2006.
- [22] M. Otani and A. J. Jones. Guiding chaotic orbits. *Research Report, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London*, 1997.
- [23] A. Panfilov. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University, Utrecht, 2010.
- [24] B. C. Pasa. Equação de burgers: propriedades e comportamento assintótico. Master's thesis, PPGMAp/UFRGS, 2005.
- [25] J. P. Pauwelussen. Nerve impulse propagation in a branching nerve system: a simple model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(1):67–88, 1981.
- [26] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 2006.
- [27] S. S. Seirin Lee, R. E. Baker, E. A. Gaffney, and S. M. White. Modelling aedes aegypti mosquito control via transgenic and sterile insect techniques: Endemics and emerging outbreaks. *Journal of Theoretical Biology*, 331(0):78 – 90, 2013.
- [28] N. Shigesada and K. Kawasaki. *Biological invasions: theory and practice*. Oxford University Press, 1997.
- [29] J. Smoller. Shock waves and reaction-diffusion equations. In *New York and Heidelberg, Springer-Verlag (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.)*, volume 258, 1983.

- [30] L. T. Takahashi. *Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue*. PhD thesis, IMECC/UNICAMP, 2004.
- [31] L. T. Takahashi, N. A. Maidana, W. C. Ferreira Jr, P. Pulino, and H. Mo Yang. Mathematical models for the aedes aegypti dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind. *Bulletin of mathematical biology*, 67(3):509–528, 2005.
- [32] J. M. S. Tello. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projecto Euclides. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [33] C. J. van Duijn. An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow. *Lecture notes, Delft University of Technology*, 2003.
- [34] P. F. C. Vasconcelos, A. P. A. T. da Rosa, F. P. Pinheiro, S. G. Rodrigues, E. S. T. da Rosa, F. F. S. Cruz, and J. F. S. T. da Rosa. Aedes aegypti, dengue and re-urbanization of yellow fever in brazil and other south american countries—past and present situation and future perspectives. *Dengue Bulletin*, 23:55–56, 1999.
- [35] H. F. Weinberger. Long-time behavior of a class of biological models. *SIAM journal on Mathematical Analysis*, 13(3):353–396, 1982.