UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LEIDE MARIA LEÃO LOPES

FORMAÇÃO E REELABORAÇÃO DE IMAGENS E DEFINIÇÕES DE CONCEITO RELACIONADAS AO ENSINO DE VETORES EM GEOMETRIA ANALÍTICA

JUIZ DE FORA (MG)
JUNHO, 2019

LEIDE MARIA LEÃO LOPES

FORMAÇÃO E REELABORAÇÃO DE IMAGENS E DEFINIÇÕES DE CONCEITO RELACIONADAS AO ENSINO DE VETORES EM GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

JUIZ DE FORA (MG)

JUNHO, 2019

LEIDE MARIA LEÃO LOPES

FORMAÇÃO E REELABORAÇÃO DE IMAGENS E DEFINIÇÕES DE CONCEITO RELACIONADAS AO ENSINO DE VETORES EM GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
Orientador

Prof. Dr. Frederico Da Silva Reis (UFOP)
Avaliador externo

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva (UFJF)
Avaliador interno

Juiz De Fora, 11 de julho de 2019.

À minha família, dedico-lhes essa
conquista pelo amor, carinho e oração.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter acompanhado e guiado meus caminhos, por me proporcionar uma vida cheia de aprendizagens e experiências neste período.

Ao Professor Orestes Piermatei Filho, pelo trabalho de orientação.

Aos professores Frederico da Silva Reis e Amarildo Melchiades da Silva, pelas contribuições incontestes durante a banca de qualificação.

Aos alunos do 3º período do Curso de Licenciatura em Matemática do CESTB/UEA, pelo empenho demonstrado em todas as atividades durante a pesquisa.

Aos amigos do mestrado, pelos momentos divididos juntos, especialmente à Paola França e a Maíra Matos, que se tornaram amigas e tornaram meus dias mais alegres.

Às minhas amigas Vandreza Souza, Taciana Coutinho e Diana Rojas, um agradecimento todo especial.

A todos vocês, muito obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa se propõe a apresentar as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e elaboração da definição de conceitos relacionadas a vetores por estudantes de Licenciatura em Matemática. A pesquisa se fundamentou teoricamente no conhecimento do Pensamento Matemático Avançado embasado na noção de imagem de conceito e definição de conceito. As opções metodológicas subjacentes a este estudo se enquadram na modalidade de experimento de ensino, com abordagem de cunho qualitativo. Como instrumento de coleta, utilizou-se: grupos de atividades, observação e questionário. Como participantes, foram sete discentes do curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados apontam que as atividades de Geometria Analítica contribuíram na formação de imagens de conceito e na reelaboração de definição de conceito dos participantes através de registros escritos e falas dos participantes da pesquisa. Consideramos que a maneira como o conteúdo é explanado pode representar um rico potencial de investigação para a formação de imagens e definições de conceito por parte dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer dessa dissertação podem ser parte de um conjunto de sugestões para apoiar a aprendizagem sobre operações de vetores no ensino superior.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Ensino Superior.

ABSTRACT

This research aims to presents the contributions of Analytic Geometric activities on the construction of concept images and elaboration of concept definitions associated to vectors by Mathematics undergraduate students. The research was theoretically supported on the knowledge of Advanced Mathematics thinking based on the notion of concept image and concept definition. The subjacent methodological options to this study classified it on the modality of teaching experiment with qualitative approach. Data were collected using group activities, observation and quizzes. Seven students of the undergraduate curse of Mathematics participated as research subjects. The results suggest that analytic geometric activities contributes to the construction of concept images and reprocessing of concept definitions of the students, through writing texts and talks of the research participants. We considered the way that contents were explained could represent a high potential research to the formation of images and concept definitions by undergraduate Mathematics students. In this way, the activities elaborated through this dissertation could be part of a suggestions set to support the vector operations learning during college education.

Keywords: Mathematics education; Advanced Mathematics Thinking; College education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se a relevância desta pesquisa com base em algumas pesquisas que salientam as dificuldades que os alunos sentem sobre Geometria Analítica no início do ensino superior. Ainda, apresenta-se a trajetória acadêmico-profissional, delimitação da questão, objetivos e finaliza-se com a apresentação da estrutura da dissertação, a fim de viabilizar o entendimento da pesquisa.

1.1 SOBRE A PESQUISA

A Matemática compreende uma grande área das ciências exatas que, durante o decorrer da história do ensino, apresenta diferentes complexidades no processo de ensino aprendizagem, como apresentado por Nasser (2004, p. 1), “um dos temas que tem preocupado os pesquisadores é a dificuldade dos alunos que chegam ao ensino superior com sérias deficiências em matemática básica”.

O interesse da pesquisa sobre a formação e reelaboração de imagens definição de conceito relacionadas ao ensino de vetores em Geometria Analítica é advindo da experiência da pesquisadora enquanto docente no ensino superior. Esta investigação se confirma por diversos pesquisadores em Educação Matemática, que identificaram dificuldades de alunos na aprendizagem de Geometria Analítica, a exemplo, temos Cavalca (1999) e Munhoz (1997).

A exemplo disso, descreve-se as dificuldades dos estudantes na aprendizagem em vetores nos primeiros anos do curso de Licenciatura em Matemática. E, a importância da compreensão de vetores não é só em disciplinas relacionadas à Matemática, mas também na Física, pois, de acordo com Winterle (2011, p. 8), “uma vez que, além de relacionarem as representações algébricas com entes geométricos, visam desenvolver habilidades como raciocínio lógico e visão espacial.” Pesquisas evidenciam questões variadas e complexas relacionadas às dificuldades supracitadas, segundo Lopes e Piermatei Filho (2017).

Diante desse contexto, pesquisadores listam a presença de dificuldades por alunos no ensino superior do curso de Licenciatura em Matemática, tais como: “representação algébrica e representação gráfica envolvendo os conteúdos de Geometria Analítica” (DALEMOLLE, 2010, p. 145).

Em virtude dessas dificuldades, muitos pesquisadores desenvolvem pesquisas com o intuito de viabilizar a compreensão dos entraves relacionados aos tópicos citados, em busca de superá-los. Sabe-se que a Matemática é uma disciplina interdisciplinar importante e presente na grade curricular de vários cursos de nível médio, técnico e superior, por conta de suas numerosas e valiosas aplicações em pesquisas para entender e explicar a realidade que nos cerca.

E sobre a Matemática enquanto disciplina, D'Ambrósio (2012), ao descrever sobre a diferença da matemática e educação, reporta-se à matemática e à educação como sendo estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes. Em sua obra *Educação Matemática da teoria à prática*, sua interpretação a esta sentença foi definida da seguinte forma:

> Vejo a disciplina de *matemática* como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana, ao longo de sua história, para explicar, entender e manejar o imaginário e a realidade sensível e perceptível [...] Vejo *educação* como uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerada pelos grupos culturais, com a finalidade de se manterem como tais (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 7-8).

Neste ínterim, para mudarmos o cenário supracitado, devemos juntar as estratégias para educar matematicamente alunos em diferentes níveis de escolaridade, alicerçando a teoria à prática.

Destarte que o conhecimento do Pensamento Matemático Avançado, fundamentado na noção de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, proposta por David Tall e Shlomo Vinner (1981) é um aporte importante para auxílio em busca de compreensão de algumas dificuldades no ensino de Matemática no ensino superior. Para os autores, o aluno deve primeiro se apropriar de várias imagens de conceito para, a partir daí, criar sua própria definição de conceito.

Frente a essas constatações, essa pesquisa direcionou-se para a educação matemática no ensino superior e optou por investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionadas à vetores, a partir de atividades de Geometria Analítica com estudantes de Licenciatura em Matemática.

Para fundamentar este estudo, fez-se necessário um levantamento bibliográfico sobre o Pensamento Matemático Avançado, que se deu diante da leitura da tese do professor Victor Giraldo, intitulada *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*, defendida no ano de 2014, junto ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE-UFRJ, sugerida pelo orientador deste trabalho.

Daí, surgiu o interesse em realizar um mapeamento de pesquisas em Educação Matemática que utilizaram como referencial teórico o conceito de “Pensamento Matemático Avançado”.

Este mapeamento viabilizou nosso entendimento acerca das contribuições desta teoria em pesquisas. Pois as pesquisas mostraram alguns pontos relevantes, como a diversidade de temas, tais como: no ensino de Cálculo, nas TCI’s, Função Logarítmica, Equações Lineares, Integrais, Ensino de Análise, Modelagem Matemática e Resoluções de Problemas (LOPES; PIERMATEI FILHO, 2017, p .6).

Além disso, todas as pesquisas investigaram o processo de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino superior, com o objetivo de compreender as dificuldades apresentadas por alunos nos cursos de sua formação inicial, e foi neste contexto que o Pensamento Matemático Avançado subsidiou estas pesquisas. E, a partir desse levantamento, ficou evidente a possibilidade da utilização deste aporte teórico, tendo como foco de estudo o ensino de Geometria Analítica.

1.2 JUSTIFICATIVA

A escolha desta temática vem da nossa prática como docente de Matemática no ensino superior. Constantemente, deparo-me com o desinteresse de estudantes devido às dificuldades relacionadas ao estudo de Vetores associado ao programa de algumas disciplinas no primeiro ano do ensino superior.

As dificuldades que alguns estudantes apresentam estão na associação das manipulações geométricas com significados algébricos. Os objetos geométricos são considerados como um suporte para os estudantes, pois é razoável imaginar e desenhar vetores "setinhas", mas as representações destes elementos são abstrações. O estudante sempre poderá recorrer à Geometria Analítica, para ajudá-lo na interpretação geométrica, para buscar entendimento sobre coisas puramente abstratas da Álgebra. E, ao algebrizar-se, todo o processo se torna abstrato.

Posto que, no estudo de vetores, o estudante deve reconhecer que vetores representam o objeto abstrato (da Álgebra), mas que, além disso, permitem compreensões sobre a Geometria Analítica também.

Nos estudos de Patrício (2011, p. 18-19), o autor diz que a evolução da Álgebra caminha com o desenvolvimento de pesquisas e questionamentos puramente geométricos. Porém, no primeiro ano do curso e graduação, nos deparamos com muitos alunos que interpretam geometricamente de forma correta, mas têm dificuldades na interpretação abstrata, e isso é uma das inquietações que levou-me a reconhecer a necessidade de um estudo sobre vetores, por indicar possibilidades de estes estudantes apresentarem imagens de conceito incompletas sobre esta temática.

Entretanto, neste estudo, consideramos como objeto abstrato a Álgebra e como objeto concreto a Geometria Euclidiana, pois acredita-se que, a partir de manipulações geométricas com vetores, possa ser possível manifestações de entendimentos algébricos por partes dos alunos no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática. Neste ínterim, vamos considerar a Geometria Analítica como uma álgebra associada à geometria euclidiana.

Nessas circunstâncias, em torno das experiências citadas, sobre a aprendizagem e questionamentos, fui conduzida à escolha da temática para a construção do projeto de pesquisa, com o objetivo de analisar qual a contribuição de atividades de Geometria Analítica para a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores com estudantes de Licenciatura em Matemática, sendo este o foco deste estudo.

Pressupomos que, compreendendo algumas dificuldades dos alunos no início de sua formação, podemos aprimorar o ensino e enriquecer a aprendizagem.

1.3 TRAJETÓRIA ACADÊMICA

A descrição de minha caminhada acadêmico-profissional, implicada na constituição da identidade profissional como professora de matemática, teve como propósito justificar a participação no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Depois de inúmeras pesquisas por programas de pós-graduação em Educação Matemática e/ou Ensino de matemática, me identifiquei com o PPGEM/UFJF, pela oportunidade enriquecedora que tenho adquirido.

A seguir, exponho o meu percurso acadêmico profissional.

No ano de 2006, conclui o curso de Licenciatura em Matemática, graças à expansão da Universidade do Estado do Amazonas/UEA para o interior do estado. Ainda no curso superior, após o segundo semestre, tive oportunidade de trabalhar na Secretaria de Ensino e Qualidade do Estado do Amazonas, SEDUC/AM, como professora de Matemática no Ensino Médio, e pôr em prática os poucos conhecimentos recebidos em apenas um ano de minha formação.

Em 2008, obtive o título de especialista em Ensino de Matemática, ofertado pela fundação MURAKI em parceria com a UEA. E, a partir daí, iniciei minha fase de atuação no Ensino Superior, como professora temporária do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga-CSTB/UEA. A experiência como professora no curso de Licenciatura para Professores Ticunas Bilíngues do Alto Solimões, oferecido pela UEA, oportunizou ensinar matemática e suas práticas para professores indígenas. Esse período consolidou-se em desafios superados em buscar aplicações que facilitassem a transmissão de conteúdos e, ao mesmo tempo, que eu pudesse compreendê-los, pois a língua era a grande barreira existente entre professora e alunos indígenas.

No ano de 2012, minha experiência como professora temporária do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas-IFAM, campus Tabatinga, foi em ministrar Matemática Instrumental e Estatística Básica, que também foi desafiadora, pois estas disciplinas eram oferecidas para alunos que pertenciam ao PROEJA INDÍGENA e as dificuldades apresentadas por eles eram constantes em matemática básica, enquanto eu não tinha uma capacitação para tal atuação.

Há cinco anos, pertenço ao quadro de professores efetivos da Universidade Federal do Amazonas, UFAM. Atualmente, trabalho como docente da área de Matemática, no campus do Instituto de Natureza e Cultura no município de Benjamin Constant – INC/BC, estado do Amazonas. Os desafios não são diferentes, pois temos um percentual elevados de alunos indígenas em todos os cursos do INC/UFAM e, através do Programa Institucional de Apoio Pedagógico, buscamos amenizar o índice de reprovações das disciplinas de Matemáticas com atividades de reforço para alunos que têm dificuldades em matemática. Porém, é muito comum o desinteresse dos estudantes em querer aprender.

Toda a trajetória contribuiu para ingressar como professora formadora do curso de Licenciatura em Matemática do Plano Nacional de Formação de Professores de Educação Básica-PARFOR, em Benjamin Constant/AM, coordenado pela UFAM. E, toda experiência somou-se ao desejo de novas possibilidades e desafios que possam contribuir como futura Mestra formada pelo Programa de Educação Matemática e que viabilizará aberturas para futuras pesquisas em busca de melhorias e respostas às dificuldades dos estudantes no início do curso de formação inicial no Instituto de Natureza e Cultura.

1.4 QUESTÃO DA PESQUISA

O presente estudo foi desenvolvido visando responder à seguinte questão: **quais são as contribuições para formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores de atividades de Geometria Analítica realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática?**

1.5 OBJETIVOS

Detalhamos, a seguir, o objetivo geral e os específicos que nortearam o desenvolvimento do estudo.

1.5.1 Objetivo geral

Investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceitos relacionadas a vetores a partir de atividades de Geometria Analítica.

1.5.2 Objetivos específicos

- Identificar se os participantes da pesquisa apresentam um pensamento matemático compatível com a compreensão necessária para operar geométrica e algebricamente com vetores;
- Analisar se os participantes da pesquisa conseguem compreender a equivalência das definições geométricas e algébricas de operações com vetores nas atividades propostas;
- Reconhecer indícios de formação de imagens de conceito e de reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores a partir da transição do método geométrico (Pensamento Matemático Elementar) para o método algébrico/abstrato (Pensamento Matemático Avançado).

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A dissertação está estruturada em 5 capítulos, conforme a descrição seguinte:

Capítulo I, introdução que compreendeu seis subitens: (1) Sobre a pesquisa; (2) Justificativa; (3) Trajetória acadêmica; (4) Questão da pesquisa; (5) Objetivos da pesquisa e (6) Organização do Trabalho.

O capítulo II reportou-se a uma revisão de literatura, sobre: a Educação Matemática no ensino superior; Aludindo a algumas pesquisas e; Concepções de vetores e alguns aspectos sobre o ensino de geometria analítica relacionado a vetores.

O capítulo III compreende o referencial teórico, sendo subdividido em: O pensamento matemático avançado: o que essa expressão quer dizer?; Sobre a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, e: Imagem de conceito e definição de conceito.

No IV capítulo, apresenta-se a metodologia do estudo com sua caracterização: tipo e abordagem, técnicas e instrumentos de coletas de dados, os procedimentos, bem como uma apresentação dos participantes da pesquisa.

Consecutivamente, o capítulo V destinou-se à análise e discussão dos resultados das atividades realizadas e do questionário, onde, minuciosamente, ponderou-se as possíveis formações de imagem de conceito e reelaboração da definição de conceito através da exploração das atividades de Geometria Analítica relacionadas a vetores. Por fim, as Considerações Finais do estudo.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, serão expostos alguns artigos científicos que permitem dialogar com as pesquisas realizadas no contexto estudado, pois, “a revisão de literatura é a pedra angular da pesquisa. É ela que dá sustentação e consistência à investigação” (FIORENTINO; LOREZATO, 2006, p. 90).

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Movidos pela preocupação sobre como ocorrem os processos de ensino e de aprendizagem no ensino superior, vamos descrever a Educação Matemática como campo de pesquisa neste nível de ensino. Independentemente de ser considerada um campo científico e profissional novo, Pinto (2002) nos diz que:

> A pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior vem se desenvolvendo há vários anos no país e no exterior; o número de alunos que estão se matriculando nas universidades e no ensino médio tem crescido, o que coloca questões desafiadoras a professores e pesquisadores. Embora tais questões tenham despertado interesse em grupos restritos até bem pouco tempo, o número de doutores nessa área vem crescendo (PINTO, 2002, p. 224).

Durante a realização do encontro do Grupo Internacional de Psicologia e Educação Matemática, realizado anualmente, teria surgido o Grupo do Pensamento Matemático Avançado, com o objetivo de explicar questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática por pessoas adultas (LOPES; PIERMATEI FILHO, 2017). O Grupo Internacional de Psicologia e Educação Matemática discutia o ensino da Matemática no ensino superior, levando os membros a estudos de aprofundamento nesse nível de ensino. Neste viés, pesquisadores se debruçavam em pesquisas que discutiam a Educação Matemática no ensino superior, despertando o interesse de professores envolvidos no ensino e na aprendizagem. Muitos eventos têm sido realizados, como conferências internacionais, seminários, encontros, com o objetivo de promover o intercâmbio entre grupos que, em diferentes países, dedicam-se às pesquisas na área da Educação Matemática.

Segundo Almeida e Igliori (2013), durante a realização do I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), realizado em 2010, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), constituiu-se um Grupo de Trabalho para discutir pesquisas realizadas no ensino superior, o GT nº

04 – Educação Matemática do Ensino Superior. Atualmente, esse GT é coordenado por Ângela Marta Pereira das Dores Saviole (UEL) e Gabriel Loureiro de Lima (PUC/SP), que assumiram a coordenação do grupo na reunião do VI SIPEM, realizada em novembro de 2018, em Foz do Iguaçu – PR.

Neste ínterim, o GT 04 da SBEM tem se firmado como uma área sólida de pesquisas em Educação Matemática. Porém, pesquisas que versam sobre a Educação Matemática no ensino superior, se comparadas ao nível de educação básica, ainda são poucas. Mesmo diante dessa comparação, vale ressaltar o crescimento da formação de educadores matemáticos em algumas regiões do Brasil.

Sobre pesquisas em Educação Matemática, baseamo-nos em Bicudo e Paulo (2011), no artigo *Um exercício Filosófico sobre a Pesquisa em Educação Matemática no Brasil*, que apresentam subsídios da face e estilo de investigação em Educação Matemática, mediante a elaboração de meta-interpretação da produção de trabalhos de investigação apresentados no III SIPEM, que tem como objetivo compreender e apresentar o que é feito no Brasil, transcendendo-se o conhecimento da produção individual específica mencionada em torno de nomes de pesquisadores nacionais e internacionais destacados na comunidade científica.

Ainda sobre as autoras, as mesmas analisam os textos e interpretam as convergências obtidas nas informações objetivas, depois fazem uma exposição de suas interpretações sobre a pesquisa em Educação Matemática no Brasil.

Diante das análises realizadas pelas autoras, as pesquisas mostra a professoralidade do professor de Matemática, ou seja, mostra o modo de ser do professor de Matemática, em diferentes grupos de trabalhos. Diante disso, é importante olhar para o modo pelo qual a formação do professor de Matemática se presentifica. Sabe-se que esta formação está entrelaçada a uma rede de concepções em diferentes áreas do conhecimento, como Filosofia, História, Antropologia, Matemática, Educação, Psicologia, Ciências (exatas, biológicas e humanas) e nas tecnologias.

Considerou-se informações relevantes e suficientes para mostrar e discutir as pesquisas em Educação Matemática no Brasil e falar um pouco das ofertas dos programas de pós-graduação nas regiões geográficas.

2.2 ALUDINDO A ALGUMAS PESQUISAS

Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados (D'AMBRÓSIO, 2012)

Inicialmente, realizou-se um estudo bibliográfico acerca dos conhecimentos sobre o Pensamento Matemático Avançado fundamentado na noção de imagem e definição de conceito, que foi adotado para realizar a pesquisa e, diante disso, refletiu-se sobre algumas formas de ensino para que a prioridade seja estabelecer espaços de aprendizagens, onde os estudantes não tenham que recorrer à memorização por não conseguirem dar significado à definição formal que lhes é apresentada em sua escolarização.

Nesse sentido, acredita-se que a proposta de um minicurso de Geometria Analítica que contemple definições e atividades possa servir de material de apoio aos estudantes das disciplinas de Geometria Analítica no curso de Licenciatura em Matemática.

Muitos pesquisadores iniciaram investigações sobre o Pensamento Matemático Avançado e direcionaram suas pesquisas para o ensino de Cálculo e, aos poucos, os estudos foram esclarecendo a diferença entre o Pensamento Matemático Elementar, segundo Almeida e Igliori (2013). Neste contexto, pode-se perceber relações desta teoria com as Tecnologias da Informação e Comunicação, com a Modelagem Matemática, com a Resolução de Problemas, dentre outras tendências no mapeamento abaixo.

A pesquisa bibliográfica direcionada ao Pensamento Matemático Avançado levou-me a um aprofundamento no trabalho de David Tall, e de outros pesquisadores que fazem uso desta teoria. Por consequência disto, sob aspectos do trabalho de Carmo, Soares e Souza (2016) intitulado *O Pensamento Matemático Avançado em Pesquisas*, surgiu o interesse de atualizarmos o quadro 1, que trata de um mapeamento feito pelos autores. Para tal, recorremos ao banco de dissertações e teses da CAPES, conforme descrição a seguir, com nomes dos autores, ano de defesa, instituição, título, teórico e objetivo da pesquisa.

Quadro 1 - Pesquisas que versam sobre o PMA

Autores/Ano	Instituição	Título da Dissertação / Teoria / Objetivo
BÁRBARA NIVALDA PALHARINI ALVIM SOUSA (2010)	UEL	Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática.
		O estudo está fundamentado na teoria do pensamento matemático e seu desenvolvimento nos Três Mundos da Matemática da teoria de David Tall (2002); Gray (1999).
		Descreve uma investigação que busca apontar elementos sobre o modo como ocorre o pensamento matemático de alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática.
ERIKA ANDERSEN, (2011)	PUC/SP	As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em Matemática.
		A pesquisa fundamentou-se no estudo de Tommy Dreyfus (1991), intitulado Processos do Pensamento Matemático Avançado Dreyfus (1991).
		Investigou os processos mentais que podem intervir e ser combinados por alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão F(x)=Integral f(t)dt, e verificou se esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo.
VILMAR GOMES DA FONSECA (2011)	UFRJ	O uso de tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no ensino da função afim.
		Este estudo está fundamentado na noção cognitiva de Conceito Imagem e Conceito Definição, desenvolvidos por David Tall e Shlomo Vinner (1991).
		Discutiu e avaliou a utilização integrada do Mathlet como ferramenta nas aulas de matemática, no estudo da Função Afim, em turmas do 1º ano do Ensino Médio.
ADRIANA TIAGO CASTRO DOS SANTOS (2011)	PUC/SP	O ensino da função logarítmica, por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.
		Adotaram os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991).
		Elaborou, aplicou e analisou uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o software GeoGebra como uma estratégia pedagógica.

OSVALDO HONÓRIO DE ABREU (2011)	UFOP	Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidades em Cálculo I.
		Concentraram nos trabalhos de Tall e Vinner (1981).
		Investigou os processos de ensino e aprendizagem de “Limite e Continuidade” em Cálculo I, na perspectiva da Educação Matemática no ensino superior.
KATIA SOCORRO BERTALOZI (2012)	UEL	Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em Matemática sobre sistemas de equações lineares.
		Aporte teórico, Dreyfus (1991), Resnick (1987).
		Investigou os processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares.
JULIANO CESAR FERREIRA (2013)	UFJF	Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: Imagem de conceito e definição de conceito.
		Tall (1991, 1998), Barbosa (2009), Giraldo (2004), Dreyfus (1991).
		Investigar elementos da imagem de conceito e definição de conceito, relativas ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como Trabalho Realizado
ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS (2013)	UFPA	Um estudo exploratório sobre a *imagem conceitual* de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função.
		Tall e Vinner (1981).
		Investigou os elementos que compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários sobre o conceito de limite de uma função de uma variável real.
VALTER COSTA FERNANDES JUNIOR (2014)	UFJF	Repensando o ensino de análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais.

		Como referencial teórico adotado: Gray & Tall (1991), Tall e Vinner (1981); Giraldo (2004).
		Verificar e analisar as modificações nas imagens de conceito de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática durante a aplicação de atividades de ensino sobre sequências de números reais, na perspectiva da disciplina Análise.
LAÍS CRISTINA VIEL GERETI (2014)	UEL	Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE.
		Segundo a teoria de Dreyfus (2002).
		Descreve e discute indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE.

Fonte: Adaptado de CARMO; SOARES; SOUZA (2016)

O recorte temporal das pesquisas acima relacionadas foi apresentado e defendido no período de 2010 a 2014, e tiveram duração de 24 a 30 meses cada uma, por se tratar de pesquisas a nível de mestrado. Diante do levantamento realizado e em virtude das leituras destes trabalhos, o foco das pesquisas buscou a compreensão do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática no ensino superior.

Analisando o estudo realizado, comungamos da ideia de que os processos do Pensamento Matemático Avançado se fazem importantes, pois permitem que os estudantes compreendam uma gama de conceitos matemáticos e que, no ensino superior, estes estudantes devem ser conduzidos para desenvolverem os processos mentais desse tipo de pensamento, uma vez que alguns professores ainda ensinam aspectos matemáticos mais práticos, seguindo a sequência de teoremas, provas e de aplicações (CARMO; SOARES; SOUZA, 2016).

Percebeu-se que a maioria das pesquisas reportadas no quadro acima ocorreu no Sudeste do Brasil, e, dentre estas instituições, está a Universidade Federal de Juiz de Fora, com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, do qual esta pesquisa faz parte. Esta análise nos mostra que a região Norte oferece poucos programas de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática e/ou Educação Matemática. O interesse por esta região decorre de a pesquisadora deste estudo ser do estado do Amazonas.

Sobre o interesse pela Educação Matemática em pesquisas, Bicudo (1993, p.19) reforça essa questão, ao dizer que “os núcleos da preocupação da Educação Matemática são preocupações com o compreender a Matemática, com o fazer a Matemática e com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática”. Isso justifica a escolha desse estudo, que buscou analisar as contribuições de atividades de Geometria Analítica para formação de imagens de conceito e elaboração da definição de conceito relacionadas a vetores com estudantes de Licenciatura em Matemática.

A relevância do levantamento das pesquisas (Quadro 1) está em embasar ou justificar o uso do PMA relacionado ao ensino de Geometria Analítica no ensino superior, esclarecendo a possibilidade do aporte teórico no estudo realizado e para expor onde está concentrada a maior parte dos cursos de pós-graduação em Educação Matemática no país.

2.3 CONCEPÇÕES DE VETORES E ALGUNS ASPECTOS SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA RELACIONADO A VETORES

Neste tópico, apresentamos algumas concepções sobre vetores, sob a perspectiva de alguns pesquisadores:

Steinbruch e Winterle (1987) apresentam vetores da seguinte forma: “vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p. 4). Vale ressaltar que, por muitos anos, os referidos autores tiveram excelente aceitação como referências recomendadas no ensino superior nos cursos de Introdução à Álgebra Linear e de Geometria Analítica.

Uma apresentação de concepção sobre vetor semelhante encontra-se no livro de Álgebra Linear e Geometria Analítica de Valladares (1982, p. 19): “dado um segmento orientado AB chamamos de vetor representado por AB ao conjunto AB de todos os segmentos que são equipolentes a AB”.

Sob a perspectiva de Spiegel, “vetor é uma grandeza que tem módulo ou valor absoluto, direção e sentido, tais como deslocamento, velocidade, força e aceleração” (SPIEGEL, 1966, p. 1).

Eisberg (1982, p. 79), na obra *Física: Fundamentos e aplicações*, apresenta vetor da seguinte maneira: “uma quantidade que se soma a uma quantidade idêntica do modo diferente pelo qual as posições relativas se adicionam requer mais do que um único número para especificá-la completamente, tal grandeza é chamada de vetor".

Segundo Battist e Nenring (2016, p. 2), "geometricamente no contexto da Geometria Analítica, vetor é entendido como uma classe de equivalência de segmentos orientados equipolentes entre si, ficando definido a partir das noções de módulo, direção e sentido".

Por conseguinte, Menon (2009, p. 10) nos apresenta vetor da seguinte maneira: "vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, o que é intuitivo".

Boldrini et al. (1980, p. 97) exemplificam a representação de vetor "de modo que, soluções de sistemas de equações lineares e equações diferenciais também possam ser representadas por vetores".

Winterle (2011), destaca:

> Vetores e geometria analítica são assuntos de vital importância na compreensão de disciplinas tais como cálculo, álgebra linear, equações diferenciais, e outras, uma vez que, além de relacionarem as representações algébricas com entes geométricos, visam desenvolver habilidades como raciocínio geométrico e visão espacial (WINTERLE, 2011, p. 6).

Entretanto, a efetivação da aprendizagem será mais consistente e concreta se durante o primeiro ano do ensino superior forem sanadas as dificuldades na compreensão de Geometria Analítica relacionadas a vetores.

Passamos a descrever alguns aspectos relacionados a vetores em alguns estudos no contexto da Geometria Analítica.

Compreendido na literatura em História da Educação Matemática: escrita e reescrita de histórias, Comin et al. (2012) colocam que a Geometria Analítica é considerada imprescindível na Matemática, devido a importância de sua utilização em várias áreas do conhecimento, tanto na formação básica como nos cursos de formação superior.

Destacamos o estudo de Battist e Nenring (2016) que investigou aspectos relevantes na significação do conceito de vetor no contexto da Geometria Analítica por acadêmicos, no processo de ensino e de aprendizagem em ações de uma aula da disciplina de Geometria Analítica e Vetores de cursos de Engenharia. Como subsídio, as autoras usaram software de Geometria Dinâmica, onde puderam considerar relevantes contribuições, e que as interações mediadas pelo conceito de vetor, como também as diferentes representações geométricas, numéricas e algébricas contribuíram de forma positiva na aprendizagem de vetores pelos acadêmicos participantes (BATTIST; NENRING, 2016)

Nos trabalhos de Patrício (2011) e de Pinheiro, Dallemole e Matos (2016), o que nos interessa é a contribuição da pesquisa para o ensino e para a aprendizagem da Geometria Analítica sobre as dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor no ensino superior. O primeiro autor identificou e analisou as dificuldades encontradas na produção e no tratamento de vetores de uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará – UEPA, através de registros de representação semiótica e acredita que o estudo realizado possa servir como uma proposta no ensino de vetores e eliminar as dificuldades detectadas pelos participantes do estudo.

Pinheiro, Dallemole e Matos (2016), no trabalho que trata de geometria analítica e vetores, exploram conceitos e propriedades com auxílio das TCI’s no ensino de Matemática. Buscaram promover uma reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Plana e Espacial com um grupo de professores e estudantes do curso de Matemática. Neste trabalho, a consideração feita pelos pesquisadores é que “o desenvolvimento cognitivo matemático do educando está diretamente vinculado às ações metodológicas” (PINHEIRO; DALLEMOLE; MATOS, 2016, p. 7).

A relevância dos estudos supracitados está relacionada a pesquisas que versam sobre Geometria Analítica relacionadas, especificamente, sobre vetores no ensino superior e as dificuldades apresentadas por estudantes no início de sua formação.

Por fim, relata-se publicações prévias relacionados à pesquisa de campo que nos subsidiaram durante o estudo nos seguintes eventos: V Colóquio de Educação Matemática (2017); XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, (2017); 32ª Reunião Latinoamericana de Matemática Educativa – RELME, (2018) e XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, (2018).

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, pretendeu-se verificar o estado do problema estudado, sob o aspecto teórico, e com intuito de nortear o estudo, apresenta-se a fundamentação que foi consistente para o delineamento do objeto de estudo.

3.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: O QUE ESSA EXPRESSÃO QUER DIZER?

Os fundamentos desta pesquisa estão atrelados ao termo Pensamento Matemático Avançado, para o qual existe uma variação de definições. Há, no entanto, algumas diferentes perspectivas sobre o termo Pensamento Matemático Avançado (PMA), destacando características que o distingue do Pensamento Matemático Elementar (PME) (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 4).

Optamos por utilizar como fundamentação teórica principal os estudos de David Tall e Shlomo Vinner (1981) e Winner (1991), dentre outros pesquisadores.

Nessa perspectiva, dissertamos sobre o PMA e o que esse termo quer dizer.

Indiscutivelmente, agimos e pensamos diferente, e apresentamos uma variedade de dificuldades quando um conceito nos é repassado em sala de aula. Nesse sentido, Vinner e Tall (1981) consideram que existe uma estrutura cognitiva complexa que produz uma variedade de imagens mentais quando um conceito é evocado, antes de serem formalmente definidos na mente de cada indivíduo.

De acordo com os estudiosos supracitados, na formação desse pensamento, ocorre a associação simbólica ao conceito, que é uma maneira de compreensão e comunicação do que se aprendeu. E, quando isso ocorre, acontece a manipulação mental do aprendiz.

Segundo Tall (1998, p. 5), “o pensar em matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas”. Para este pesquisador, somos criativos, mas é bem depois do pensamento elementar que nos ocorre a abstração das coisas que aprendemos, ou seja, é nesse estágio que é exigido a abstração das propriedades de conceitos matemáticos. Baseados na definição de Tall (1998), significa que, quando isso ocorre, o participante (aluno) é capaz de manipular as suas próprias definições conceituais produzidas, de forma abstrata, para desenvolver as relações lógicas dos conceitos que foram estudados anteriormente.

Tall (1981) afirma que, durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, consciente e inconscientemente, afetando seu significado e uso.

O termo PMA, segundo Dreyfus (2002), consiste na interação entre vários processos, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros. Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos no PMA e no PME. Pois, ele nos afirma, que há tópicos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados, e que depende da complexidade de como são tratados e gerenciados tais processos presentes em cada um dos pensamentos.

Segundo Gray (1999), atividades cognitivas envolvidas no pensamento matemático avançado podem diferir grandemente de um indivíduo para outro.

Estas ideias sobre PMA parecem fazer transparecer diferentes significados, enquanto umas dão importância aos processos envolvidos e suas interações para a compreensão da matemática avançada, outras defendem os tipos de atividades cognitivas, pois as atividades podem ser responsáveis por sustentar tal pensamento na mente do aluno, e isto pode variar.

Olímpio (2006) nos remete a um conhecimento que nos auxilia nessa compreensão sobre o PMA. Segundo o autor, este pensamento caminha no direcionamento de diferentes competências, a saber:

> Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991): pensamento este qualificado como um conjunto de competências complexas que se pretende que o(a)s aluno(a)s universitários demonstrem, dentre as quais se incluem desde a capacidade de representar objetos e situações matemáticas, relacionando essas representações e efetuando generalizações, até a de fazer conjecturas e de demonstrar teoremas (OLIMPIO, 2006, p. 33).

As ideias dos pesquisadores apontam aspectos importantes para a aprendizagem de um curso de Geometria analítica. Pois acreditamos que as definições do Pensamento Matemático Avançado na Geometria Analítica podem auxiliar na transição da representação geométrica (concreto, palpável) para a representação algébrica (abstrata, puramente mental), superando dificuldades de estudantes em relação a Vetores.

3.2 SOBRE A TRANSIÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR PARA O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Apresentamos algumas diferentes perspectivas sobre o pensamento matemático, que, segundo alguns pesquisadores, diferem da educação básica para a superior.

Concordando com Tall (1991), muitas das atividades que ocorrem no ciclo completo de atividade em PMA também ocorrem na resolução de problemas da matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que distingue o PME do PMA.

Podemos encontrar outros fatores que distinguem os dois pensamentos, por exemplo, “a passagem do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada em definições” (TALL, 1995, p. 17). O autor acrescenta que a linha separadora entre o PMA e o PME é aquela que localiza a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático, onde os objetos têm um estado cognitivo novo, como conceitos definidos construídos de definições verbais.

Tall (2002), ao discorrer sobre coerência e consequência, em sua obra, nos diz que, “é a transição da coerência da matemática elementar (vista na educação básica) para a consequência da matemática avançada (vista no ensino superior) que é baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir a partir de deduções de definições formais (TALL, 2002, p. 20).

Elias, Barbosa e Savioli (2012), em suas pesquisas, defendem a questão da percepção de algum objeto de estudo, em relação à ação sobre este. Os autores se embasam na hipótese de Tall (1995), sobre transição de um pensamento para o outro, ao considerar que:

> A transição cognitiva do pensamento matemático elementar para o avançado no indivíduo se dá, inicialmente, com a percepção de e a ação sobre objetos do mundo exterior e é construído por meio dos dois desenvolvimentos paralelos citados anteriormente, inspirando o pensamento criativo baseado nos objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática, (TALL, 1995, p. 163).

Diante da hipótese defendida por Tall (1995), existe a possibilidade de que algumas atividades desenvolvidas sobre o olhar do PMA podem estar presentes no PME. Portanto, diante do meio criativo que existe no PME para resolver um problema matemático, destacou-se a possibilidade da dedução e da definição formal, o que distingue os dois pensamentos.

Gray (1999), referindo-se aos conceitos matemáticos elementares, diz que estes têm propriedades que podem ser determinadas atuando sobre eles, ou seja, o autor quer dizer que as propriedades são manipuladas dos objetos, enquanto que os objetos em PMA são criados de propriedades (axiomas).

Algumas características que diferem o PME do PMA são apresentadas por Dreyfus (2012). Na obra *Advanced Mathematical Thinking*, o autor defende que a forma como é conduzida a transição de um pensamento para o outro é o que os difere (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 5).

Retomando o que diz Dreyfus (2002), ao relacionarmos o PMA ao nível de ensino superior, o autor diz que isso independe da idade do aluno e que esse pensamento pode ocorrer sem que isto interfira. Neste contexto, sob a perspectiva de Tall (2002), "a linha separadora entre o PME e o PMA, não está na impossibilidade de um estudante da educação básica conseguir desenvolver um PMA por não ser um adulto, e sim na maneira como a matemática é apresentada neste nível de ensino" (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 8). Da mesma maneira, o PMA não é propício somente a alunos do ensino superior.

3.3 IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Os fundamentos deste estudo estão atrelados às noções de imagem de conceito e definição de conceito [1]propostos por Tall e Vinner (1981).

Dentre os inúmeros desafios em educar matematicamente, fazer uso das definições de conceitos matemáticos que os livros didáticos receitam é, sem dúvida, um dos maiores desafios ao professor de matemática, pois estas definições, na maioria das vezes, são apresentadas em linguagem abstrata (FONSECA et al., 2013).

Enquanto professores pesquisadores, podemos questionar qual seria a definição adequada, ou qual a definição de melhor compreensão, e, sem dúvida, as respostas iriam apresentar justificativas variadas, e, certamente, a resposta para esse e outros questionamentos tem sido estudado por muitos pesquisadores, principalmente os envolvidos com a educação matemática.

[1] Alguns pesquisadores também utilizam as expressões imagem conceitual e definição conceitual ou ainda, conceito imagem e conceito definição.

Segundo Leão e Bisoggnin (2009, p. 2), “essa teoria foi desenvolvida no ano de 1981, por David Tall e Shlomo Vinner. Estes defendem que um conceito matemático não deve ser apenas ensinado através da definição formal”.

Há décadas, estas questões vêm sendo estudadas por pesquisadores matemáticos, e, neste trabalho, vamos dar destaque aos estudos de David Tall e Shlomo Vinner (1981), pois são fundamentais para o encaminhamento do objeto de estudo desta pesquisa.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a teoria de imagem de conceito sugere que o processo cognitivo de certas imagens esteja aliado a um leque de ideias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição de conceito só é possível quando uma gama de ideias associadas é rica o suficiente.

Ainda sob a ótica dos percussores desta teoria, o estudante tem que ser estimulado a pensar, pois

> [...] trará em sua mente inúmeras representações mentais, como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais podem ser elaboradas, pelos sujeitos, por intermédio de processos de pensamentos sobre essas representações mentais, denominadas pelos autores como Imagem de Conceito (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Sendo assim, essa carga de representações decorre de todo o processo de aprendizagem do estudante, desde a educação básica ao ensino superior, pois, à medida que ele é estimulado, suas ideias vão amadurecendo.

Na teoria desenvolvida por Tall e Vinner (1981), “Imagem de Conceito” é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Além disso, os autores afirmam que um indivíduo pode ou não utilizar sentença de palavras para especificar um dado conceito, denominada definição de conceito (TALL; VINNER, 1981). Esta afirmação pode ser uma simples memorização por um indivíduo, bem como a expressão da compreensão do significado matemático do conceito ou, ainda, uma reconstrução pessoal da definição formal. E pode ser construída pelo próprio indivíduo ou simplesmente memorizada por ele, pois uma definição de conceito pode mudar ao longo do tempo, da mesma forma que a imagem de conceito. Desta forma, a imagem de conceito pode (ou não) incluir uma definição de conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal.

Tall (1992, p. 496) ressalta que “a própria ideia de definir um conceito no sentido matemático em oposição a de *descrevê-lo,* é particularmente difícil de compreender”. Segundo o autor, o termo “imagem de conceito” pode ser a descrição de uma estrutura cognitiva, e que esta esteja associada ao conceito ensinado. Essa estrutura cognitiva é representada pelo conjunto formado por todas as imagens, propriedades e/ou processos que alguma vez na mente do indivíduo foram associadas ao conceito. E, à medida que o indivíduo tem novas experiências ao longo do tempo, referentes a um conceito, essas imagens vão sendo enriquecidas, ocorrendo, dessa forma, certa ampliação do conceito imagem.

Mas quando é formada a Definição de Conceito? Segundo Tall e Vinner (1981), a definição de conceito é formada a partir da imagem de conceito, isto quer dizer que toda forma de representação da imagem, através de palavras, leva à definição de conceito.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição de conceito pode ser expressa como:

> O tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem (evocado). Se os conceitos definição lhes são dados ou construídos por si mesmo, pode variar de tempo em tempo. Desta maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981, p.2).

Os autores complementam, ainda, que, caso a definição de conceito não tenha sido compreendida ou tenha sido esquecida pelo discente, pode não ter existido, ou pode ser inativa, a exemplo da memorização que ele faz ao realizar uma avaliação.

Outros autores chamam atenção para a importância da distinção entre definição de imagem de conceito e definição de conceito, do ponto de vista pedagógico. Baseado no texto de Vinner (1991), temos que:

> [...] muitas palavras em linguagem diária não têm definições (apesar de serem “definidas” de alguma forma em dicionários). Pense em “carro”, “casa”, “verde”, “bonito”, etc., e você imediatamente percebe que para entender, por exemplo, a sentença: “meu bonito carro verde está estacionado em frente à minha casa” você não consulta definições. [...] Entretanto, é necessário consultar definições ao tentar entender a sentença: “dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado ´é o que têm área máxima” (VINNER, 1991, p. 86).

Corroborando o pensamento de Giraldo (2004), certamente um aluno de uma disciplina de Matemática no ensino superior deve ter clareza de que a definição de um conceito é o critério decisivo em um desenvolvimento teórico que o envolva, entretanto, para que este objetivo seja atingido, é necessário que, no estágio inicial, este aluno trave contato com mais do que simplesmente a definição formal.

Para justificar o uso da teoria de imagem de conceito e definição de conceito no processo de ensino nesta pesquisa, reiteramos o que afirma Fonseca (2011):

> A maior dificuldade dos alunos com a matemática está na formalização de conceitos abstratos, que para eles, não tem muito significado. Atrelado a isso, um dos maiores desafios do professor, no ensino aprendizagem de matemática é trabalhar com as definições matemáticas que, em geral são apresentadas em linguagem bastante abstrata (FONSECA, 2011, p. 36).

Nesse sentido, as dificuldades apresentadas pelos alunos nos diferentes níveis da educação matemática são baseadas na distinção entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e apresentados nas aulas e pelos processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

É muito comum o professor fazer uso exclusivo de definições formais recomendadas pelos livros didáticos para a construção de conceitos matemáticos, e isso gera certas limitações ou conflitos para o estudante ao expor suas próprias definições devido a essa exclusividade de definições prontas adotadas pelo docente. Senão, vejamos: um vetor representado por $\vec{v} = (x, y)$ ou um par ordenado $P(x, y)$ não representam um ponto geométrico, mas sim a expressão analítica do vetor ou a representação abstrata do ponto. Podemos citar um modelo abstrato comum obtido pela Álgebra que são as equações do círculo e da reta, pois não são retas, mas equações algébricas, e se essa sentença não tiver muito significado para o estudante, algebricamente, o professor recorre à representação geométrica para demonstrar e provar tal afirmação.

Para Vinner (1893), as noções de imagem de conceito e definição de conceito podem trazer subsídios importantes na construção de um conceito matemático. Nesse sentido, Tall e Vinner “consideram que a imagem conceitual descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao Conceito” (FONSECA et al., 2013, p. 4). Sendo assim, acreditamos que, a partir das atividades de geometria analítica propostas e das discussões realizadas durante a pesquisa de campo, temos a possibilidade de analisar as definições de conceitos e reelaboração da imagem de conceito dos participantes da pesquisa sobre vetores e confrontá-las com definições formais.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresenta-se o contexto metodológico em que este estudo está inserido, os instrumentos de investigação utilizados e como foram trilhados os caminhos para realizar a pesquisa de campo, enfatizando o papel dos participantes da pesquisa.

4.1 OPÇÃO METODOLÓGICA

Neste trabalho, optamos por uma abordagem qualitativa, que contempla aspectos metodológicos de experimentos de ensino. De acordo com a proposta para obtenção de dados da pesquisa e a interação da pesquisadora com o objeto de estudo, fomos direcionados para esta escolha. Baseamo-nos em Barbosa (2009); Ferreira (2013); Borba; Araújo (2004); Domingos (2003), que se apoiaram em Ludke; André (1986); Bogdan; Biklen (2013) e Mascarenhas (2012), além de Barros (2015), Fiorentini; Lorenzato (2006), para nos dar suporte quanto às técnicas e instrumentos para a coleta de dados.

4.1.1 Abordagem qualitativa

Diante do tipo de pesquisa que intentamos realizar, este trabalho pode ser classificado, quanto à abordagem, como de cunho qualitativo, pois, segundo Borba, “[...] é inegável que o experimento de ensino expressa de forma eloquente ao menos um dos princípios da pesquisa qualitativa: fazer com que o humano apareça e não se esconda atrás de estatísticas” (BORBA, 2004, p. 10).

Na perspectiva de investigação qualitativa em educação proposta por Bogdan e Biklen (2013), as autoras reiteram algumas características, no que tange à pesquisa qualitativa:

> Existe uma preocupação maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, e essa característica é, particularmente, útil para a investigação educacional; que a postura do investigador é indutiva, ou seja, não recolhe dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 50).

Ludke e André (1986, p. 13) acrescentam ainda mais sobre as características de uma pesquisa de análise qualitativa, ao dizer que esta “[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”.

4.1.2 Experimento de ensino

Esta pesquisa consistiu em investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceitos relacionadas a vetores a partir de atividades de Geometria Analítica. Com o experimento de ensino será possível analisar se ocorreu a transição de forma natural do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Durante a aplicação de atividades, o professor/pesquisador pode “ouvir” os participantes da pesquisa e acompanhar o processo e a Matemática desenvolvida por eles durante a pesquisa da campo, para interpretar o que os participantes dizem e fazem por meio de um diálogo desencadeado com o objetivo de verificar/analisar a contribuição de atividades de Geometria Analítica para formação de imagens de conceito e elaboração da definição de conceito relacionadas a vetores.

O presente estudo apresenta aspectos metodológicos de experimento de Ensino. Esse procedimento se alavancou por volta da década de 70, nos Estados Unidos da América (FERREIRA, 2013, p. 78). Porém, o que propiciou esse crescimento na adoção do procedimento foi o fato de que as metodologias experimentais utilizadas em Educação e, consequentemente, na Educação Matemática, até aquele momento, sofriam forte influência dos modelos de pesquisa usados para as Ciências Naturais (BARBOSA, 2009, p. 86).

Barbosa (2009) adotou o procedimento metodológico de experimento de ensino em sua pesquisa, e descreve que o foco principal é a análise do raciocínio desses estudantes:

> Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (BARBOSA, 2009, p. 87).

Este procedimento metodológico é constituído de atividades que objetivam contribuir para a criação de hipóteses elaboradas pelos participantes da pesquisa em seus registros. E o pesquisador tem que anotar e registrar todas as situações emergentes, pois, ao longo da aplicação, podem surgir questões não esperadas inicialmente e que podem ser úteis no trabalho.

O experimento de ensino consiste em uma série de encontros entre os participantes da pesquisa e o pesquisador, por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os participantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades propostas (BARBOSA, 2009, p. 86).

Segundo Barbosa (2009), a metodologia de experimento de ensino é uma ferramenta conceitual para ser utilizada na organização de atividades pré-elaboradas, abertas, que objetiva gerar conjecturas desenvolvidas pelos participantes, que podem ir além dos propósitos das atividades. O professor pesquisador deve observar o tempo todo as situações emergentes na execução das atividades e, também, de possíveis hipóteses produzidas na condução dos experimentos propostos.

4.2 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Antes da seleção da amostra dos participantes da pesquisa, tivemos acesso ao Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura de Matemática para fins de conhecimentos das ementas das disciplinas de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Geometria I, com a finalidade de verificar se o conteúdo “vetor” é trabalho no primeiro ano do curso.

No primeiro ano do curso são ofertadas as disciplinas de Álgebra Linear I e Geometria Analítica e. No primeiro período, é ofertada Álgebra Linear I, cujos conteúdos que fazem parte da ementa são: Matrizes; Cálculo de determinantes; Sistemas de equações lineares; Vetores; Equações da reta e do plano; Ângulos, distâncias e interseções. No segundo período é ofertada a disciplina de Geometria Analítica, que tem como ementa: Vetores; Operações com vetores; Vetores no R^2 e no R^3; Diferentes equações da reta; O Plano; Distâncias; Cônicas.

De acordo com as ementas das disciplinas supracitadas, os participantes da pesquisa a quem chamaremos simplesmente participantes estudaram vetores no 1º e no 2º período do primeiro ano do curso.

Quanto à seleção dos participantes, foram estabelecidos alguns critérios básicos: o participante necessitava ter feito algum estudo formal com vetores no primeiro ano do curso, isto é, ter cursado a disciplina de Álgebra Linear e/ou Geometria Analítica, este foi estabelecido pela pesquisadora. Outro critério definido pela professora da disciplina de Geometria I, era de que os participantes indicados apresentassem dificuldades em operações básicas com vetores, como na soma, diferença, produto, etc.

Foi feita a seleção da amostra numa turma de 12 alunos que atendessem aos critérios acima, obtivemos uma amostra de dez participantes. Estes participantes estão cursando o terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga /CESTB-UEA.

Buscou-se informações no que diz respeito ao consentimento dos participantes em participarem das atividades. Informações foram dadas sobre as finalidades da pesquisa, sobre os procedimentos e como seriam utilizados e divulgados os dados dela resultantes. “Dessa forma, os participantes puderam aderir voluntariamente ao projeto de investigação, cientes da natureza do estudo, dos perigos e das obrigações nele envolvidos” (BODGAN; BIKLEN, 2013, p. 75).

Os participantes, de forma voluntária, assinaram um termo de consentimento e se fizeram presentes em todas as atividades.

Em fevereiro de 2019, no retorno às atividades, compareceram apenas sete participantes da pesquisa, três desistiram, sendo um por indisponibilidade de tempo, pois as atividades eram realizadas em contra turno e dois desistiram do curso.

4.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para adotar as técnicas e os instrumentos que foram usados na coleta de dados, refletimos no problema e na questão norteadora da pesquisa, pois, segundo Lüdke e André (1986), as escolhas metodológicas dependem do problema e da questão que está sendo investigada.

Sob a perspectiva das autoras Bogdan e Biklen (2013):

> O investigador é o seu principal instrumento para a coleta; que os dados são descritivos, em forma de palavras ou imagens, e não de números ou quantificáveis; que existe uma preocupação maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, e essa característica é, particularmente, útil para a investigação educacional; que a postura do investigador é indutiva, ou seja, não recolhe "dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando" (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 50).

Para a coleta de dados foram adotados dois instrumentos: atividades, que foram desenvolvidas em três grupos, e um questionário.

Apresentam-se os instrumentos de investigação utilizados no desenvolvimento da pesquisa que foram caracterizados pela aplicação das atividades e do questionário, ambos acompanhados de observações, cujos resultados são discutidos e analisados no próximo capítulo.

A opção por esses instrumentos se deu pela facilidade da aplicação e também como uma maneira mais eficaz para obtenção das respostas para o estudo. Sendo assim, esses instrumentos ofereceram materiais suficientes e necessários para a análise dos resultados.

4.3.1 As atividades

Em todas as atividades elaboradas, apresentou-se as definições sobre: operações geométricas com vetores e operações de vetores com coordenadas no plano, baseadas no livro *Vetores e Geometria Analítica*, de P. Winterle, e no livro *Geometria Analítica*, de A. Steinbruch e P. Winterle.

As atividades propostas apresentaram-se em grupos.

Grupo 1, as atividades são apresentadas com vetores apenas no ponto de vista geométrico. Segundo Winterle (2011, p. 1), "a grande vantagem da abordagem geométrica é possibilitar, predominantemente, a visualização dos conceitos que são apresentados para estudo, o que favorece seu entendimento".

Espera-se que os participantes da pesquisa notem que vetores podem ser operados geometricamente sem suas coordenadas e sem ajuda dos eixos coordenados.

Grupo 2, as atividades são apresentadas com vetores no sistema de eixos cartesianos do plano, as operações são abordadas sob o ponto de vista algébrico, ou seja, apresenta-se o processo de algebrização do conceito de vetores através de suas coordenadas.

Espera-se que os participantes da pesquisa percebam que as definições algébricas para realizar as operações com vetores dadas coincidem com a definição geométrica vista nas atividades do grupo 1.

Nos Grupos supracitados, procurou-se usar os mesmos vetores com intuito de conduzir os participantes da pesquisa à conclusão de que a solução algébrica no segundo grupo, após ser desenhada, coincide com a solução geométrica do primeiro grupo.

Nesse contexto, sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981), o Pensamento Matemático Avançado busca entender a evolução do entendimento abstrato a partir de situações consideradas “concretas”, que, no nosso caso, é a apresentação geométrica nas atividades propostas.

Por fim, o Grupo 3 é composto por atividades consideradas mais complexas, para observarmos se os participantes da pesquisa conseguem exibir resquícios da transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA) através do processo construtivo (geométrico) e do processo operatório com vetores (algébrico).

GRUPO 1: OPERAÇÕES GEOMÉTRICAS COM VETORES

A representação gráfica apresentada permite-nos executar uma série de operações com vetores (soma, subtração, etc.).

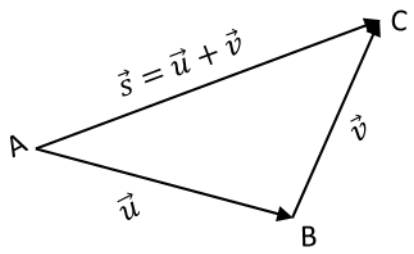
A seguir, apresenta-se as definições dessas operações.

SOMA DE VETORES

Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se a soma geométrica de vetores da seguinte maneira:

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que, por definição, é a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Figura 1 - Soma de vetores

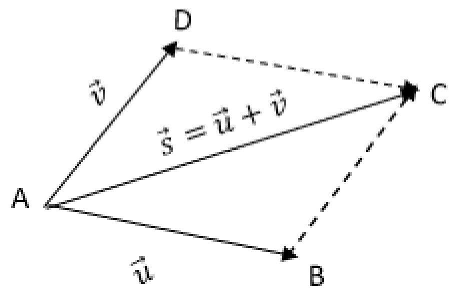


Fonte: Adaptado de Steinbruch; Winterle (1987)

De acordo com Winterle (2011), há outra maneira de encontrar o vetor soma de $\vec{u}$ + $\vec{v}$. Representam-se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por segmentos orientados de mesma origem A: $\vec{u}$ =$\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Completa-se o paralelogramo ABCD (Figura 2) e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor:

$\vec{s}$ = $\vec{u}$ + $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Figura 2 - Soma de vetores

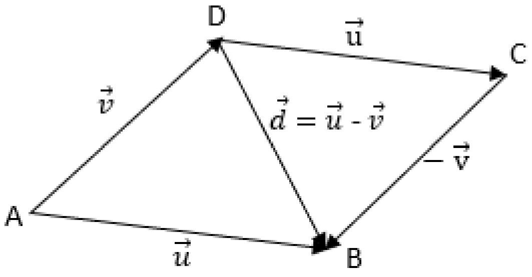


Fonte: Adaptado de Winterle (2011)

DIFERENÇA DE VETORES

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, segundo Winterle (2011). A subtração de vetores $\vec{d} = \vec{u}$ - $\vec{v}$ resulta em um terceiro vetor (chamado diferença), representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{DB}$, cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores $\vec{u}$ e (-$\vec{v}$). O vetor -$\vec{v}$ tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}$, mas tem o sentido oposto, conforme ilustração abaixo.

Figura 3 - Diferença de vetores



Fonte: Adaptado de Winterle (2011)

MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO

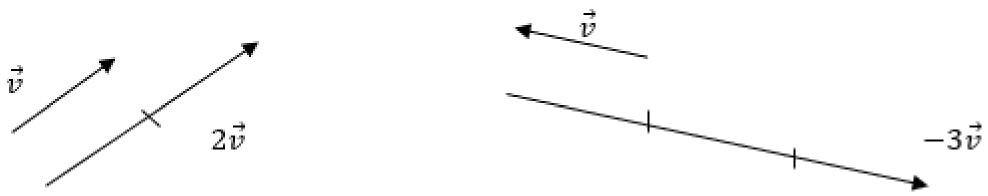
Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se a multiplicação de um vetor por um número da seguinte forma:

Seja um vetor $\vec{v} \neq 0$ e um número real $k \neq 0$. Chama-se produto do número real *k* pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

- ✓ O módulo: $\overrightarrow{|p|} = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;
- ✓ Direção: a mesma de $\vec{v}$;
- ✓ Sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se k > 0, e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se k < 0.

A figura 4 apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns vetores da forma $k\vec{v}$.

Figura 4 - Produto de vetores por escala



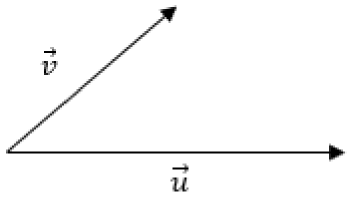
Fonte: Adaptado de Steinbruch; Winterle (1987)

A seguir, as atividades com operações geométricas de vetores:

Atividades 1: Soma, diferença e multiplicação de vetor por um número

a) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura 5, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Figura 5 - Vetores e suas posições no plano



Fonte: Elaboração da autora

b) Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura a cima, desenhe o vetor representante da diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}\,)$.
c) Considere o vetor $\vec{u}$ e as definições de operações geométricas, desenhe, no plano representado na figura 5, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$.

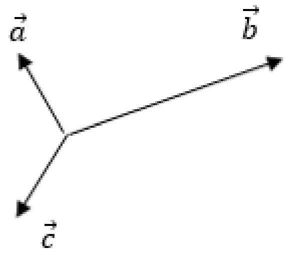
Na Atividade 1, conceituou-se como operar com vetores na forma geométrica e objetivava para que os participantes da pesquisa se familiarizassem com a ideia de que os vetores não precisam ter uma expressão algébrica para serem representados, ou seja, que podem ser operados geometricamente.

A resolução tinha que ser feita no plano e/ou no espaço, sem ajuda de eixos coordenados para obter os desenhos dos vetores soma, diferença e produto.

Atividade 2: operações geométricas com vetores

a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ estão representados na figura 6 da seguinte maneira:

Figura 6 - Vetores e suas posições no plano



Fonte: Elaboração da autora

Construa geometricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.

b) Desenhe o representante do vetor soma, de acordo com a figura 6, acima.

c) Com base na figura 6, desenhe o seguinte vetor: $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

A Atividade 2 objetivava resolver geometricamente uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores.

Esperava-se que os participantes da pesquisa percebessem que a ideia era somar um vetor com ele mesmo *n* vezes, ou dividir o vetor, etc.

No caso dado, a resolução necessitava ser feita da seguinte maneira: o vetor $\vec{a}$ deveria ter seu tamanho duplicado para, depois, ter seu sentido invertido, o vetor $\vec{b}$ deveria ter seu tamanho reduzido à metade e o vetor $\vec{c}$ deveria ter seu tamanho dobrado.

Feito isso, os participantes da pesquisa deveriam aplicar o conceito da soma geométrica de vetores que foi apresentado no enunciado da questão, resultando numa figura.

GRUPO 2: VETORES COM COORDENADAS NO PLANO

Apresenta-se algumas definições de vetores com coordenadas no plano, baseadas no livro *Vetores e Geometria Analítica*, de P. Winterle, e no livro *Geometria Analítica*, de A. Steinbruch e P. Winterle.

IGUALDADE DE VETORES

Steinbruch e Winterle (1987) apresentam a definição de igualdade de vetores no plano da maneira seguinte:

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

SOMA DE VETORES

A soma de vetores com coordenadas no plano é definida por Steinbruch e Winterle (1987), assim:

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores, define-se a soma de $\vec{u} + \vec{v}$ da seguinte forma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2\ , y_1 + y_2)$.

MULTIPLICAÇÃO DE VETOR POR UM NÚMERO

Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se multiplicação de vetor por um número:

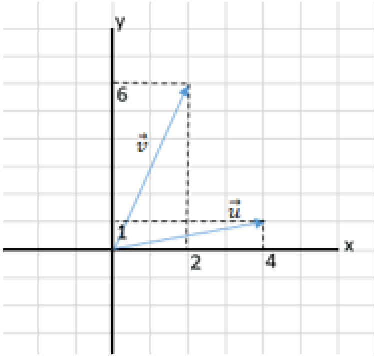
Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor no plano e *k* um número real. Define-se a multiplicação de um vetor por um número como sendo o vetor $\vec{p} = k.\vec{u} = (kx_1, ky_1)$.

A seguir, apresenta-se as atividades de vetores com coordenadas no plano que compõe o Grupo 2, sobre igualdade de vetores, soma de vetores e multiplicação de um vetor por um número.

Atividades 1: operações com vetores no plano cartesiano

a) Dados os vetores $\vec{u} = (4\,,1)$ e $\vec{v} = (2\,,6)$ representados na figura 7, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Figura 7 - Vetores e suas posições no plano cartesiano



Fonte: Elaboração da autora

b) Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura acima, desenhe o vetor diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v})$ no plano cartesiano.

c) Dado o vetor $\vec{u} = (4\,,1)$ e as definições de operações algébricas, desenhe no plano representado na figura 7, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$.

Nesta Atividade, os vetores são dados através de suas coordenadas e as operações já não são mais geométricas, e sim algébricas.

Os vetores utilizados no Grupo 2 são os mesmos utilizados no Grupo 1, sendo no primeiro em forma de figuras e no segundo com coordenadas, e a partir disso, esperava-se que os participantes da pesquisa concluíssem que os resultados obtidos nos dois Grupos de atividades eram os mesmos, ou seja, a solução algébrica, após ser desenhada, coincidia com a solução geométrica do primeiro grupo.

A resolução deveria ser feita somando-se coordenada a coordenada, multiplicando-se cada coordenada pelo mesmo escalar, etc.

Atividade 2: operações de vetores com suas coordenadas

a) Considere os vetores $\vec{a} = (-1\,,2)$, $\vec{b} = (4\,,2)$ e $\vec{c} = (-1,-2)$ assim representados. Determine algebricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.

b) Desenhe os representantes dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{s}$ no plano cartesiano.

c) O que você pode verificar ao comparar o resultado desta atividade com o resultado obtido na Atividade 2 do Grupo 1?

A Atividade 2 objetiva operar algebricamente vetores, significa resolver uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores.

Nesta Atividade, há os três vetores apresentados na Atividade 2 do Grupo 1 e a mesma equação, porém agora têm-se suas representações algébricas. Neste Grupo de atividades, temos o processo de algebrização do conceito de vetor.

A resolução deverá ser feita algebricamente da maneira seguinte: o vetor $\vec{a}$ deverá ter seu tamanho duplicado para depois ter seu sentido invertido, o vetor $\vec{b}$ deverá ter seu tamanho reduzido à metade e o vetor $\vec{c}$ deverá ter seu tamanho dobrado.

Feito isso, os participantes da pesquisa devem desenhar os representantes dos vetores que foram apresentados no enunciado da questão e depois comparar o resultado desta atividade com o resultado da Atividade 2 do Grupo 1 e concluir que os resultados são os mesmos.

Espera-se que os participantes da pesquisa concluam esse processo, pois, assim, ganharão confiança no processo algébrico e saberão que eles conduzem ao mesmo entendimento geométrico.

Se isso ocorrer, significa que os participantes da pesquisa passaram do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

GRUPO 3: IGUALDADE, OPERAÇÕES E VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Steinbruch e Winterle (1987) definem igualdade, operações e vetor definidos por dois pontos da seguinte maneira:

IGUALDADE DE VETORES

Dois vetores, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo: se o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$, de acordo com a definição de igualdade dos vetores, $x + 1 = 5$ e , $2y - 6 = 4$ ou *x* = 4 e *y* = 5. Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então *x* = 4 e *y* = 5.

OPERAÇÕES DE VETORES

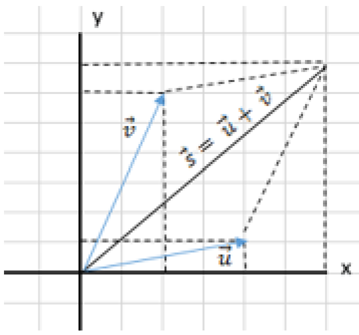
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e a ϵ IR. Define-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \text{ e } a.\vec{u} = (ax_1, ay_1\ ).$$

Exemplo: dados os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$, para realizar algebricamente as operações, basta somarmos as componentes correspondentes: $\vec{u} + \vec{v} = (4 + 2, 1 + 6) = (6, 7)$ e para multiplicarmos $2\vec{u}$, tem-se: $2\vec{u} = 2(4, 1) = (8, 2)$.

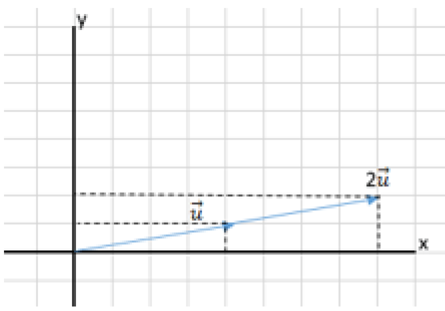
A figura 8 mostra geometricamente a soma de vetores e a figura 9 mostra o produto de vetor por um escalar.

Figura 8 - Soma de vetores



Fonte: Elaboração da autora

Figura 9 - Produto de vetor por um número



Fonte: Elaboração da autora

VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Se A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) são dois pontos quaisquer, então: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, a razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Atividades: Igualdade, Operações e Vetor Definido por Dois Pontos

a) Dados os vetores $\vec{u} = (2\,,4)$, $\vec{v} = (-1\,,2)$, $\vec{w} = (-3{,}1)$ e $\vec{z} = (-5,-1)$:

-Determine algebricamente a soma de: $\vec{u}$ + $\vec{v}$; ($\vec{u}$ + $\vec{v}$)+ $\vec{w}$; e ($\vec{u}$ + $\vec{v}$+ $\vec{w}$) + $\vec{z}$.

-Desenhe, no plano cartesiano, o representante do vetor obtido em cada operação.

-Qual sua interpretação em relação à soma de mais de dois vetores geometricamente?

b) Os pontos $A(4,1),\ B(5,3)\ e\ C(3,5)$, assim representados, são vértice de um triângulo:

-Determine algebricamente as componentes dos vetores: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$.

-Desenhe o triângulo formado pelos pontos ABC no plano cartesiano.

-Realize a soma de ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) + $\vec{w}$ e escreva o que se pode concluir.

c) Considere os vetores $\vec{u} = (3\,,-1)$ e $\vec{v} = (-1\,,2)$ e a expressão dada $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$. Determine o vetor $\vec{w}$. Faça a representação geométrica no plano dos vetores: $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Nesta atividade, há igualdade de vetores, operações e definição de vetores por dois pontos apresentados de uma forma mais complexa para observar se, de fato, os participantes da pesquisa se sentem confiantes o bastante para realizar a transição do processo construtivo e o operatório feito abstratamente.

4.3.2 A observação

As observações foram realizadas durante a aplicação das atividades durante os meses de fevereiro e março de 2019. Durante esse período, a pesquisadora, junto com os participantes da pesquisa, uma vez por semana, se reunia no Laboratório de Matemática do CESTB, com autorização do coordenador do Curso de Matemática. Os encontros eram realizados em contra turno, com duração de duas horas cada.

Na observação, foram levados em consideração diversos fatores que contribuíam para a análise desse estudo, como a troca de ideias entre os participantes da pesquisa, que, às vezes discutiam, na tentativa de um ajudar o outro a relembrar algo que já tinham estudado nas aulas de Geometria Analítica ou nas aulas de Álgebra Linear I.

4.3.3 O questionário

Espera-se com este questionário responder à pergunta norteadora desta pesquisa, que é analisar as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e na reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores de estudantes de Licenciatura em Matemática.

Considera-se que este instrumento de coleta é essencial para saber o que os participantes da pesquisa aprenderam em relação aos processos de operar com vetores (geométrica e algebricamente), e se eles notaram que as definições algébricas para realizar as operações com vetores têm equivalência com as definições geométricas.

As questões que compõem o questionário, são:

1) É possível realizar operações com vetores, apenas na forma geométrica, sem ajuda dos eixos coordenados?
2) É possível resolver uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores sem ter uma expressão algébrica?
3) É possível realizar operações de vetores representados na forma algébrica apenas?
4) Qual a figura formada pela soma de mais de dois vetores geometricamente?
5) O que se conclui com os resultados obtidos nas operações de vetores com coordenadas do grupo 2, após ser desenhada?
6) Existe coerência entre os resultados obtidos nas atividades dos grupos 1 e 2?
7) Qual processo você considera melhor para resolver operações com vetores: geométrico ou algébrico?

4.4 O PRODUTO EDUCACIONAL

A proposta do produto educacional é um minicurso que pode ser parte de um conjunto de sugestões composto pelas atividades que foram elaboradas no decorrer deste estudo, como material de apoio complementar aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

O minicurso irá contemplar conceitos de operações com vetores do ponto de vista geométrico, depois relacionados com sistemas de eixos cartesianos do plano para dar direcionamento a algumas atividades propostas e seus objetivos.

4.5 A COLETA DE DADOS

A pesquisa teve início no segundo semestre do ano de 2018. Os encontros eram realizados no turno vespertino, distribuídos em horas, porém, devido as mudanças que este estudo sofreu, atualizou-se o cronograma das atividades.

As atividades foram implementadas por meio de encontros a partir de fevereiro de 2019, período que iniciou o semestre letivo.

Os encontros foram realizados no Laboratório de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga/CESTB, com o tempo previsto de duas horas.

No primeiro encontro, foram aplicadas as atividades do Grupo 1, sobre operações geométricas de vetores, que tinham como objetivo investigar se os participantes desenvolviam um pensamento matemático para compreensão de operar vetores, de forma geométrica, sem ajuda dos eixos coordenados.

No segundo encontro, aplicou-se as atividades do Grupo 2, sobre operações algébricas de vetores, para investigar se os participantes da pesquisa concluiriam que os resultados obtidos nos dois grupos de atividades eram os mesmos, e que a solução algébrica, após ser desenhada, coincidia com a solução geométrica do primeiro grupo.

No terceiro encontro, aplicamos as atividades do Grupo 3, para investigar se os participantes da pesquisa conseguiam concluir a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, através de modelo geométrico para o procedimento algébrico.

No quarto encontro, um questionário contendo sete questões foi aplicado, para investigar quais as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e na reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores para os participantes da pesquisa.

Quanto à observação, realizou-se durante toda a pesquisa de campo. Alguns alunos precisavam de uma atenção individual, pois apresentavam dúvidas para realizar algumas atividades propostas. A pesquisadora prontamente explicava novamente o que era necessário ser feito. Todos os alunos realizaram as atividades propostas, eventualmente alguns não conseguiam terminar algumas atividades no tempo adequado e sempre um colega ajudava o outro.

Em relação ao material a ser analisado, temos: as respostas escritas em relação às atividades e as respostas ao questionário, além das anotações das observações e transcrições de alguns áudios feitas pela pesquisadora.

Este material será minuciosamente analisado para ser discutido, com a finalidade de atendermos ao objetivo deste estudo.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O presente capítulo objetiva apresentar os resultados da pesquisa, através dos instrumentos de investigação caracterizados pelos Grupos de atividades e por um questionário.

Retomando a pergunta investigativa e o objetivo da pesquisa, após muitos ajustes, a pergunta que norteou este estudo foi: quais são as contribuições para formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas a vetores de atividades de Geometria Analítica realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática?

O objetivo da pesquisa consistiu em investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceitos relacionadas a vetores a partir de atividades de Geometria Analítica. Para isso, os participantes da pesquisa foram submetidos a resolver atividades no contexto geométrico e algébrico que visaram a evocação de imagens de conceito, e, através das repostas, observou-se definições de conceito reelaboradas pelos participantes.

Considerou-se que a pergunta investigativa e o objetivo da pesquisa foram contemplados acerca das compreensões dos participantes referentes ao ensino de vetores.

Retomando as atividades, ao elaborá-las com questões de Geometria Analítica, procurou-se conceituar as maneiras de operar com vetores geométrica e algebricamente. Dessa forma, construiu-se três Grupos de Atividades, sendo o grupo 1 e 2 compostos por duas questões, cada uma com três itens e o Grupo 3 composto por três questões.

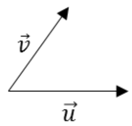
Sobre o quantitativo de atividades nos dois primeiros grupos, esse número foi sugerido em razão de conduzir os participantes da pesquisa a notarem a equivalência das definições geométricas do Grupo 1, com as operações algébricas do Grupo 2, e, em virtude disso, procurou-se manter coerência em algumas questões, utilizando-se os mesmos vetores e as mesmas atividades.

Atividades do Grupo 1: o que se esperava e o que nos revelaram?

Como as atividades do Grupo 1 tratam-se de questões relacionadas a operações geométricas de vetores, esperava-se que os participantes se familiarizassem com a ideia de que vetores não precisam de uma expressão algébrica para serem representados. Além do fato de que vetores podem ser operados geometricamente, sem o auxílio dos eixos coordenados e que, além disso, pudessem desenvolver um pensamento matemático que os levasse à compreensão em operar dessa forma, utilizando vetores.

No Quadro 2, abaixo, apresenta-se os itens da Atividade 1, que aborda a soma, a diferença e a multiplicação de vetor por um número de forma geométrica:

Quadro 2 - Atividade 1 do grupo 1

Grupo / Atividade	*Grupo 1*
1-a	Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura 5, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. 
1-b	Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura a cima, desenhe o vetor representante da diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
1-c	Considere o vetor $\vec{u}$ e as definições de operações geométricas, desenhe no plano representado na figura 5, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$.

Fonte: elaboração da autora

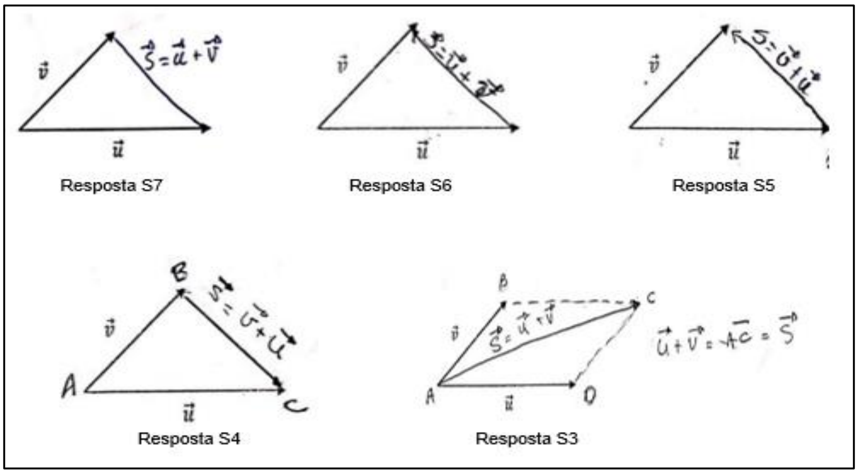
Buscando compreender e analisar o pensamento dos participantes, utiliza-se a fala de Bogdan e Biklen (2013), os quais afirmam que,

> Na busca de conhecimentos, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar dos dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados e transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 47-51).

Desta forma, e sob a perspectiva dos autores acima, os dados foram analisados priorizando os registros escritos, as falas e os comentários que ocorreram entre os participantes da pesquisa, durante a aplicação das atividades e do questionário. Vamos usar a nomenclatura de *P* para participantes acompanhado do subscrito *n* para identificá-los.

Em relação aos registros, destacam-se algumas respostas (Figura 10) que representam o vetor resultante da soma solicitado no item 1-a.

Figura 10 - Respostas de P7, P6, P5, P4 e P3 à questão 1-a, grupo 1



Fonte: Elaboração da autora

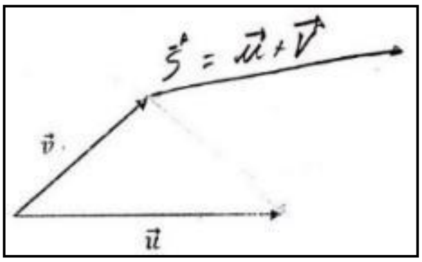
Dos sete participantes da pesquisa, constata-se que cinco (P3, P4, P5, P6 e P7) descreveram seus entendimentos referente à soma geométrica de vetores de forma, ligando as extremidades dos segmentos orientados, conforme demonstrado na figura 10.

Ainda explorando a figura 10, notou-se que um participante (P3) recorreu às definições apresentadas nas atividades definidas por Steinbruch e Winterle (1989) com objetivo de reforçar seu entendimento ao somar vetores através da lei de paralelogramo.

Quanto às definições de conceito, foram observados resquícios de informações relacionadas à soma geométrica de vetores, através de um comentário feito pelo participante (P3), quando descreveu seu entendimento para o participante P2: "*traça as retas paralelas que vai dar um paralelogramo, aí a maior diagonal será a soma dos dois vetores*".

Destaca-se, também, a fala do participante P2, ao descrever seu entendimento sobre como resolver a soma de vetores geometricamente para o participante P1: "*para somar vetores no espaço, basta unir as extremidades*". Em seguida, o próprio participante P2 representou, no plano, sua compreensão, conforme exposto na figua 11, a seguir:

Figura 11 - Resposta do P2 à questão 1-a, grupo 1

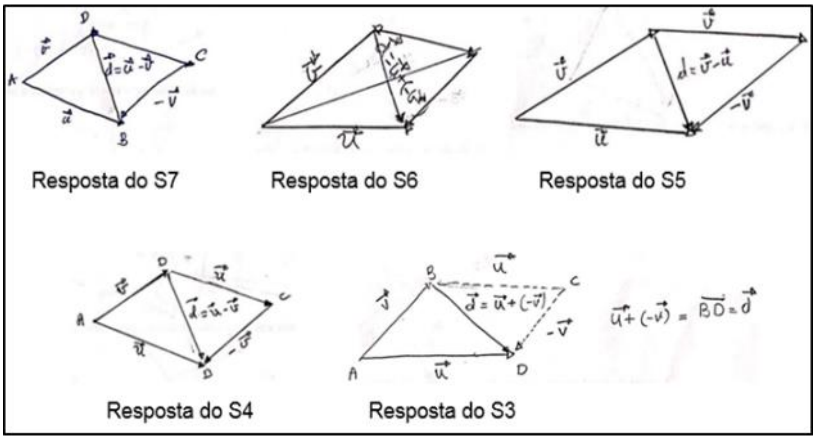


Fonte: Elaboração da autora

Segundo Tall e Vinner (1981), as definições de conceito remetem a imagens de conceito restritas ou até mesmo equivocadas. A exemplo, têm-se o que diz o participante P2: "*para somar vetores no espaço, basta unir as extremidades*", porém, ao desenhar seu entendimento, o fez de forma diferente do que falou.

Quanto ao item 1-b, sobre a diferença de vetores na forma geométrica, buscou-se observar se os participantes apresentavam um pensamento matemático sobre a compreensão do módulo, direção e sentido do vetor. Os desenhos construídos pelos participantes são demonstrados na Figura 12, na qual destacam-se os desenhos do vetor diferença, de cinco participantes:

Figura 12 - Respostas de P7, P6, P5, P4 e P3 à questão 1-b, grupo 1



Fonte: Elaboração da autora

A análise dos desenhos permite inferir que os participantes desenvolveram um pensamento matemático a partir do que se esperava, que o vetor diferença tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}$ dado na questão, mas tem sentido oposto.

E, durante uma conversa entre dois participantes (P6 e P3), sobre as definições formais, estes chamaram de vetor diferença a menor diagonal do paralelogramo, descrevendo dessa forma suas definições de conceito:

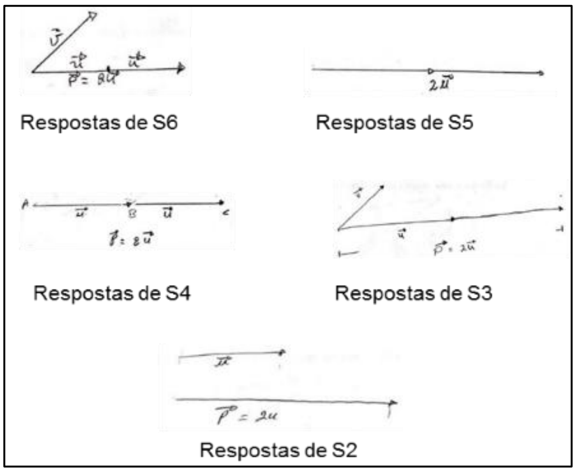
P6: “*Muito parecido com a soma, só que agora será a menor diagonal para subtrair”.*

P3: “*na verdade, a subtração de vetores tem que mudar o sentido do vetor”*.

A forma como os participantes organizam as definições em suas estruturas cognitivas e como expressam tal pensamento em suas palavras está em concordância com a definição proposta por Winterle (2011, p. 8), “o vetor -$\vec{v}$ tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}$, mas tem o sentido oposto”.

Prosseguindo com as análises, objetivava-se, com a questão 1-c, que os participantes multiplicassem duas vezes o vetor geometricamente para encontrar o vetor. Assim, para a análise deste item, demonstra-se a figura 13, abaixo, contendo os desenhos de cinco participantes.

Figura 13 - Respostas de P6, P 5, P 4, P3 e P 2 à questão 1-c, grupo 1



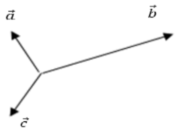
Fonte: Elaboração da autora

Através das respostas representadas na Figura 13, pode-se inferir que os participantes descreveram seus entendimentos em relação à multiplicação de vetores por um número, conforme era esperado, duplicando o tamanho do vetor para encontrar o vetor resultante da multiplicação.

Além de desenharem seus entendimentos, observaram-se informações quanto ao tipo da atividade, se foi considerada como inovadora, se causou estranheza o ato de somar, subtrair e multiplicar um vetor por um número sem auxílio dos eixos coordenados. Porém, nesta fase inicial, os participantes da pesquisam resolveram esta questão quase sem diálogo entre eles, pelo fato de se tratar de tarefas que já tinham visto, portanto, esse comportamento já era esperado.

Seguindo as análises e discussões, elaborou-se o Quadro 3, no qual consta a Atividade 2 do grupo 1, que tinha como objetivo operar, geometricamente, vetores a partir de uma equação dada.

Quadro 3 - Atividade 2 do grupo 1

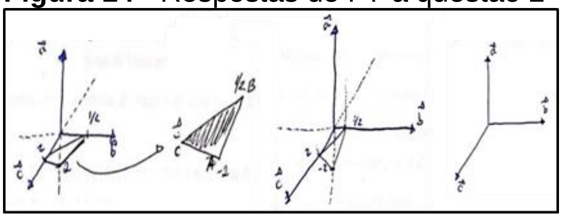
Grupo/ Atividade	*Grupo 1*
2-a	Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ estão representados na figura 6 da seguinte maneira:  Construa geometricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.
2-b	Desenhe o representante dos vetor soma, de acordo com a figura 6 acima.
2-c	Com base na figura 6, desenhe o seguinte vetor: $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Fonte: Elaboração da autora

Buscando fazer com que os participantes da pesquisa resolvessem a equação, foram apresentados três vetores, geometricamente, que envolvia soma, diferença e multiplicação por escala de vetores da seguinte forma: 1) que o vetor fosse duplicado e depois ter seu sentido invertido, 2) que o vetor tivesse seu tamanho reduzido à metade e, 3) que o vetor tivesse seu tamanho dobrado. Com isso, seria possível observar e compreender como eles resolvem, geometricamente, questões mais complexas.

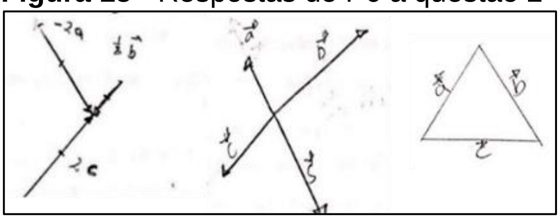
As figuras (14 a 20) a seguir, expõem o resultado da operação geométrica e das representações dos vetores solicitados.

Figura 14 - Respostas de P7 à questão 2



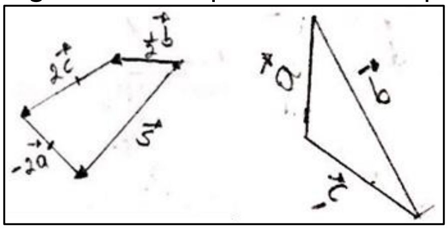
Fonte: dados da pesquisa

Figura 15 - Respostas de P6 à questão 2



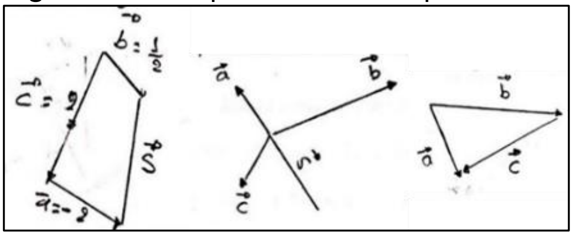
Fonte: dados da pesquisa

Figura 16 - Respostas de P5 à questão 2



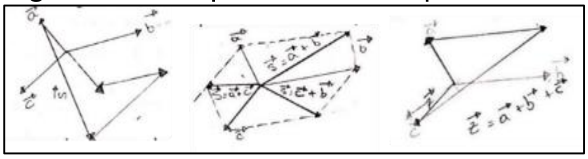
Fonte: dados da pesquisa

Figura 17 - Respostas de P4 à questão 2



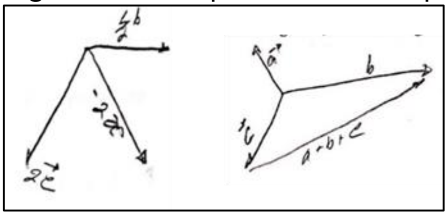
Fonte: dados da pesquisa

Figura 18 - Respostas de P3 à questão 2



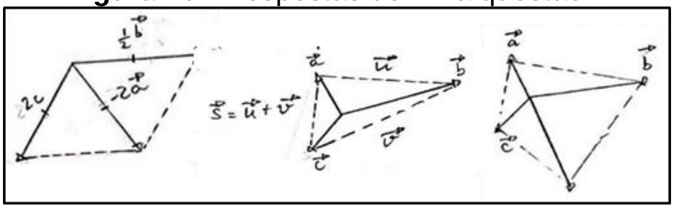
Fonte: dados da pesquisa

Figura 19 - Respostas de P2 à questão 2



Fonte: dados da pesquisa

Figura 20 - Respostas de P1 à questão 2



Fonte: dados da pesquisa

De acordo com as soluções geométricas apresentadas acima, observou-se que poucos participantes desenvolveram um pensamento matemático para resolver esta atividade. Os desenhos que nos permitiram observar a solução da equação geométrica esperada foram dos participantes P4 e P5.

Conjecturou-se a possibilidade de que os participantes responderam esta atividade intuitivamente, sem recorrerem às definições formais apresentadas nas atividades.

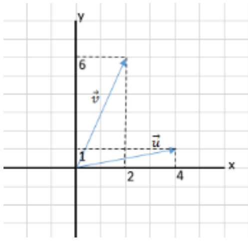
Atividades do Grupo 2: o que se esperava e o que nos revelaram?

As Atividades do Grupo 2 são apresentadas com vetores no sistema de eixos cartesianos do plano, e as operações são abordadas sob o ponto de vista algébrico, ou seja, apresentam o processo de algebrização do conceito de vetores através de suas coordenadas.

Esperava-se que os participantes da pesquisa não só notassem que as definições algébricas para realizar as operações com vetores são equivalentes com as definições geométricas, vistas nas atividades do Grupo 1, mas que a resolução algébrica, após ser desenhada, coincidia com o desenho das atividades iniciais do Grupo 1 por serem os mesmos vetores, e, além disso, concluíssem que os dois métodos conduzem ao mesmo resultado.

Em virtude disso, procuramos manter coerência entre algumas atividades do Grupo 2 com as Atividades (iniciais) do Grupo 1, utilizando os mesmos vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ e as mesmas operações (soma, diferença e multiplicação de vetor por um número), mas agora vetores com coordenadas, conforme mostra o Quadro 4, a seguir:

Quadro 4 - Atividade 1 do grupo 2

Grupo / Atividade	*Grupo 2*
1-a	Dados os vetores $\vec{u} = (4\,,1)$ e $\vec{v} = (2\,,6)$ representados na figura 7, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. 
1-b	Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura a cima, desenhe o vetor diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}\,)$ no plano cartesiano.
1-c	Dado o vetor $\vec{u} = (4\,,1)$ e as definições de operações algébricas, desenhe no plano representado na figura 7, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$.

Fonte: Elaboração da autora

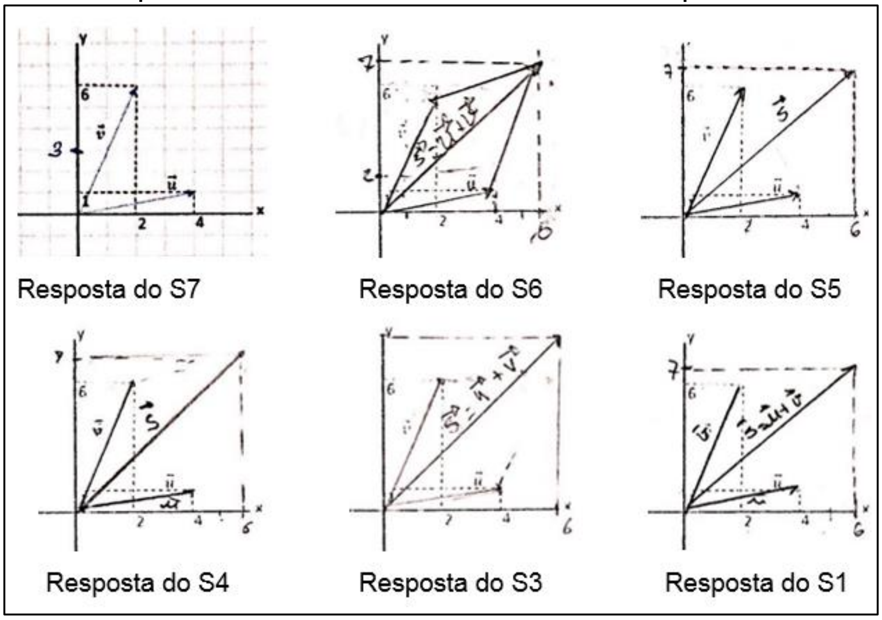
Analisou-se que cinco dos participantes da pesquisa descreveram seus entendimentos sem nenhum questionamento, resolveram algebricamente, em seguida, desenharam (Fig. 21) no plano o vetor resultante da soma. Um participante (P4) percebeu a coincidência da figura formada nesta atividade com a figura formada no grupo 1, vejamos o comentário que ele fez:

P4: "*Vocês já perceberam que se fechar a figura no plano cartesiano dá pra formar o mesmo triângulo da Atividade 1*"*?*

O participante P4 se refere à Atividade 1 do Grupo 1, sobre a soma geométrica de vetores, ou seja, ele notou, no primeiro item, o que esperávamos, que a solução algébrica, após ser desenhada no segundo grupo, coincidiria com a solução geométrica do primeiro grupo.

As respostas ao item 1-a do Grupo 2 apresentam-se (Fig. 21) a seguir:

Figura 21 - Respostas de P7, P6, P5, P 4, P3 e P1 à questão 1-a, Grupo 2

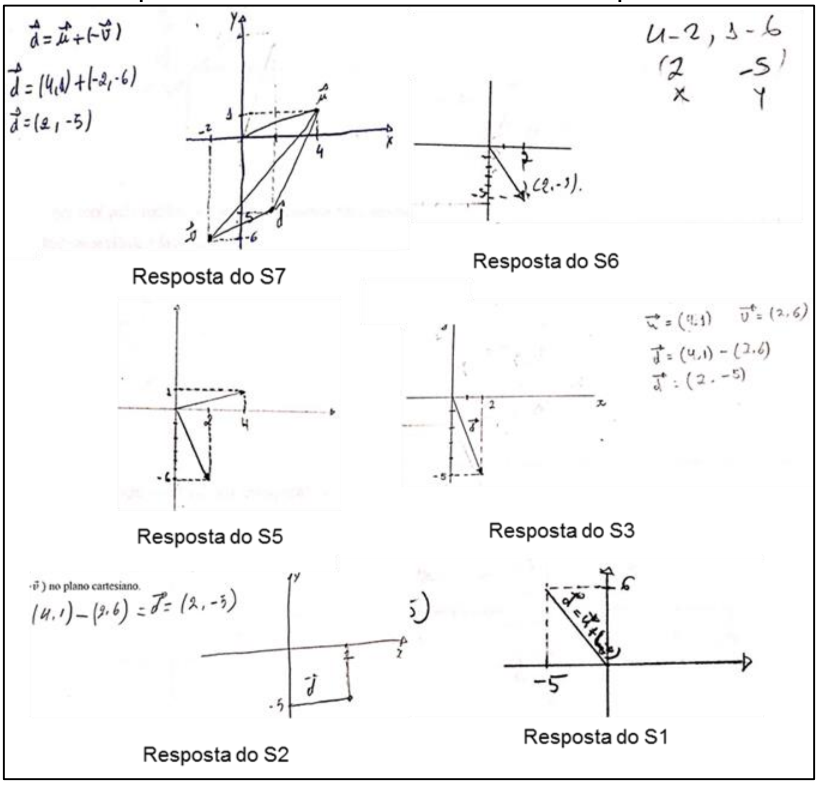


Fonte: dados da pesquisa

A definição de conceito observada nesse item é manifestada pelos participantes que, além de representarem os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano, desenharam seus entendimentos através da lei do paralelogramo e identificaram a maior diagonal do paralelogramo formado no plano como vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$, embora não tenham declarado através de palavras.

De acordo com Tall e Vinner (1981), há uma complexidade na estrutura cognitiva do aluno (participante) capaz de produzir uma diversidade de imagens mentais quando um conceito é recordado, porém não foi possível identificar nenhuma imagem de conceito nas repostas de alguns participantes no que tange ao item 1-b do Grupo 2, conforme mostra a figura 22, abaixo.

Figura 22 - Respostas de P7, P6, P5, P3 e P1 à questão 1-b, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

Recorremos às audiogravações para obter elementos através dos diálogos que pudessem auxiliar em relação às dificuldades apresentadas no item 1-b do Grupo 2:

P6: "*Nossa, nem lembro mais como resolve isso, mas prefiro questões com número!*"

P4: "*Eu também prefiro quando tem cálculo*.''

P6: "*Será que dá pra resolver da mesma maneira as outras? Pelo menos as equações são iguais, olhem aí a do produto!*"

P7: "*Eu nem tinha percebido isso*."

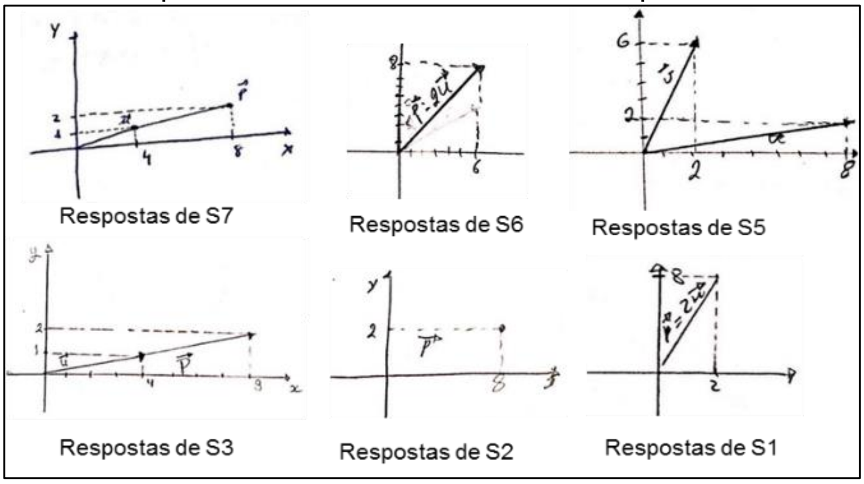
Pesquisadora: *"Resolva as operações algébricas da maneira mais conveniente para você, depois desenhe o resultado no plano cartesiano e diga sua conclusão."*

P6: *"ok!"*

A partir do comentário do participante P6, e sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981), considera-se a possibilidade de não ter ocorrido uma formalização da definição de conceito sobre o modo de operar geometricamente com vetores, porque estes participantes já tiveram um contato formal com vetores no primeiro ano do curso de Matemática, nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

A seguir (Fig. 23), temos as repostas de seis participantes ao item 1-c, sobre multiplicação de vetor por escalar no plano cartesiano. Esperava-se que os participantes duplicassem o vetor $\vec{u}$ e o desenhassem no plano.

Figura 23 - Respostas de P7, P6, P5, P3 e P1 à questão 1-b, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

Percebeu-se que, embora alguns participantes tenham demonstrado preferência por questões “com números”, ainda assim, apresentaram insucesso em algumas atividades que envolviam vetores com coordenadas, como é o caso do participante P6 que, em parte de sua fala, diz: “..., *prefiro questões com número!”,* mas, mesmo assim, apresentou dificuldade em representar o vetor $\vec{p} = 2\vec{u}$ no plano cartesiano, conforme a figura 23.

A seguir, no quadro 5, apresenta-se a Atividade 2, onde os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são os mesmos utilizados na Atividade 2 do Grupo 1. Esperava-se, com esta atividade, que os participantes determinassem o vetor soma da equação dada, depois o desenhassem no plano e, em seguida, fizessem a comparação entre os resultados obtidos entre os dois Grupos (1 e 2) de Atividades.

Quadro 5 - Atividade 2 do Grupo 2

Grupo/ Atividade	*Grupo 2*

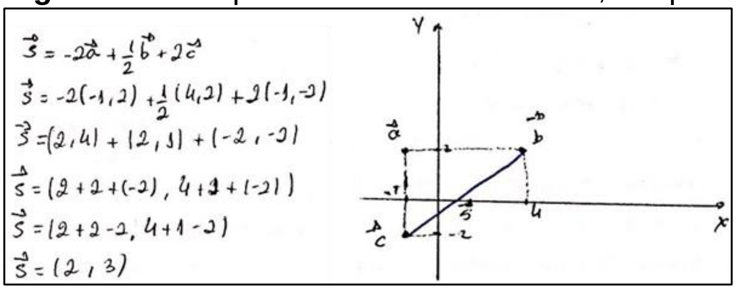
2-a	Considere os vetores $\vec{a} = (-1\,, 2)$, $\vec{b} = (4\,, 2)$ e $\vec{c} = (-1, -2)$ assim representados. Determine algebricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.
2-b	Desenhe os representantes dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{s}$ no plano cartesiano.
2-c	O que você pode verificar ao comparar o resultado desta atividade com o resultado obtido na atividade 2 do Grupo 1?

Fonte: Elaboração da autora

Todas as atividades apresentavam definições e exemplos de operações com vetores para auxiliar os participantes em relação às definições formais, porém, durante as observações, constatou-se que poucos recorriam a estas informações quando necessitavam de ajuda.

A seguir, as respostas de alguns participantes que descreveram seus entendimentos em relação à representação do vetor soma da equação, que envolvia operações da adição, subtração e produto na forma algébrica, suas representações e a comparação dos resultados obtidos nesta atividade.

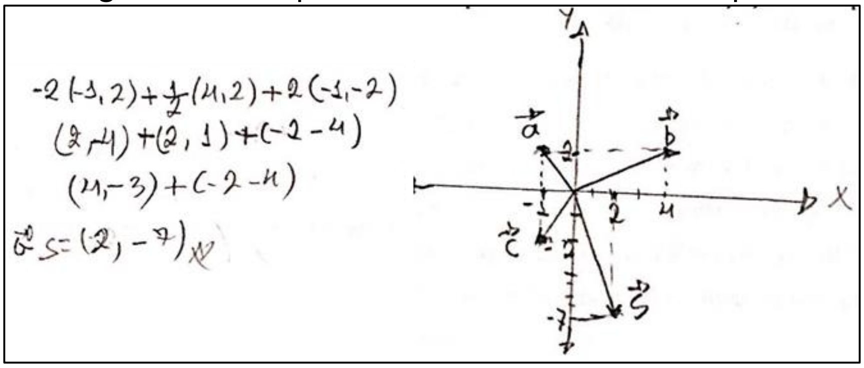
Figura 24 - Resposta do P7 à Atividade 2, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

P7: *"Ao verificar os resultados destas atividades com os resultados na atividade 2 do grupo 1, pode-se notar uma grande diferença por parte da álgebra com os exemplos numéricos".*

Figura 25 - Resposta do P6 à Atividade 2, Grupo 2

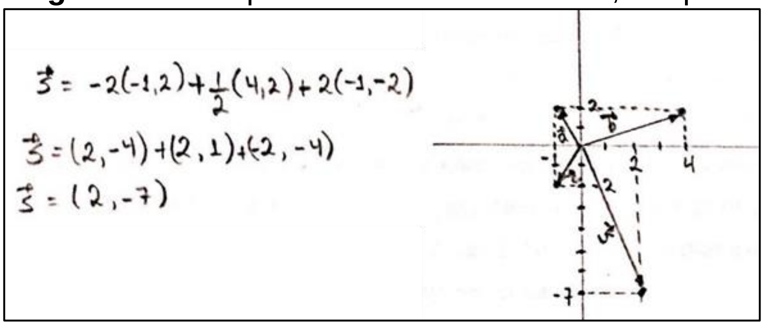


Fonte: dados da pesquisa

P6: *“Ambas as figuras são iguais”.*

Destaca-se a resposta do participante P6, que, ao ser questionado sobre o que foi possível concluir a partir dos resultados obtidos, respondeu: *“Ambas as figuras são iguais”.*

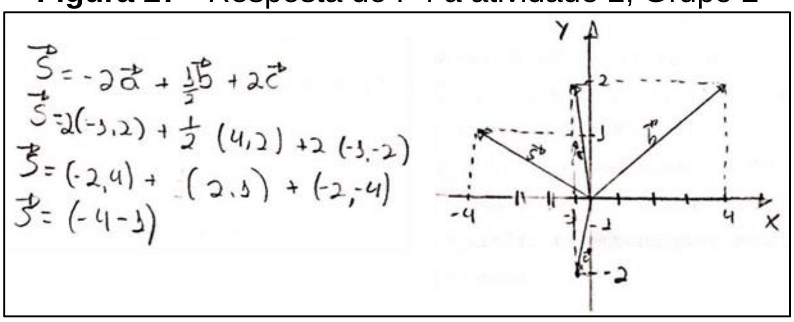
Figura 26 - Resposta do P5 à Atividade 2, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

Vale ressaltar que o participante P5 resolveu a equação, representou no plano, porém, não esboçou nenhuma conclusão sobre o resultado obtido, conforme pedia a questão.

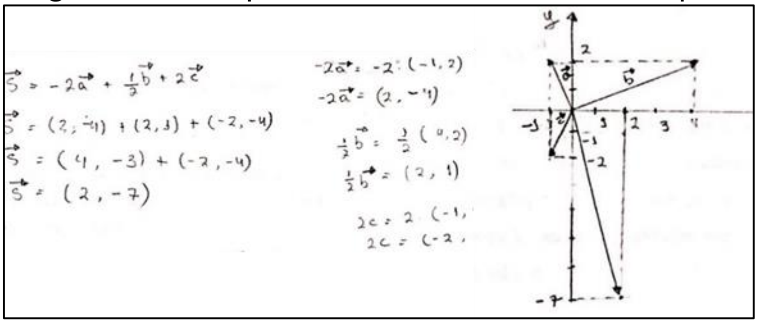
Figura 27 - Resposta do P4 à atividade 2, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

P4: *“Sendo que os são semelhantes a um a outro”.*

Figura 28 - Resposta do P3 à atividade 2, Grupo 2

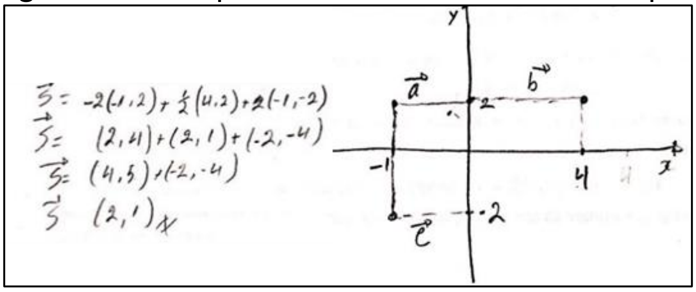


Fonte: dados da pesquisa

P3: *“Os vetores soma obtidos apenas geometricamente assemelham-se aos encontrados de forma algébrica e após representados no plano cartesiano”.*

Analisando as repostas à Atividade 2, pode-se considerar que o participante P3 concluiu que a solução algébrica, após ser representada no plano, coincidiu com a solução geométrica, apresentando, dessa forma, elementos que constituem imagens de conceito.

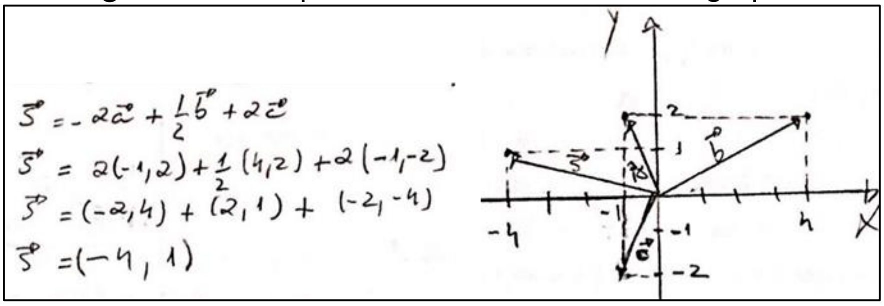
Figura 29 - Resposta do P2 à atividade 2, Grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

P2: *“As atividades algébricas são mais fáceis ou de mais fácil compreensão do que as geométricas”.*

Figura 30 - Resposta do P1 à atividade 2-c, grupo 2



Fonte: dados da pesquisa

P1: *“Podemos verificar que ambos, apesar de serem resolvidos de maneiras diferentes, obtiveram gráficos parecidos”.*

A resposta do participante P1 sobre os resultados obtidos nas atividades dos Grupos 1 e 2, tende à mesma conclusão, porém com outras palavras: “*apesar de serem resolvidas de maneiras diferentes, os gráficos são parecidos*”. Isto se aproximou do que era esperado no que tange às maneiras de operar vetores, significa que um problema, mesmo que seja operado em abordagens diferentes, terá o mesmo resultado.

Atividades do Grupo 3: o que se esperava e o que nos revelaram?

O Grupo 3 é composto por atividades consideradas mais complexas, que abordam tanto o método algébrico quanto o geométrico. Esperava-se, com estas atividades, estimular a evocação de imagens de conceito e a reelaboração da definição de conceito relacionados ao ensino de vetores em geometria analítica, além de observar se os participantes da pesquisa conseguiam exibir resquícios da transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA) através do processo geométrico e do processo algébrico.

A seguir, apresenta-se a Atividade 3-1, em que esperava-se que os participantes realizassem a soma entre os vetores dados na questão e os desenhassem no plano, e, a partir disso, apresentassem sua interpretação relacionada à soma geométrica de mais de dois vetores.

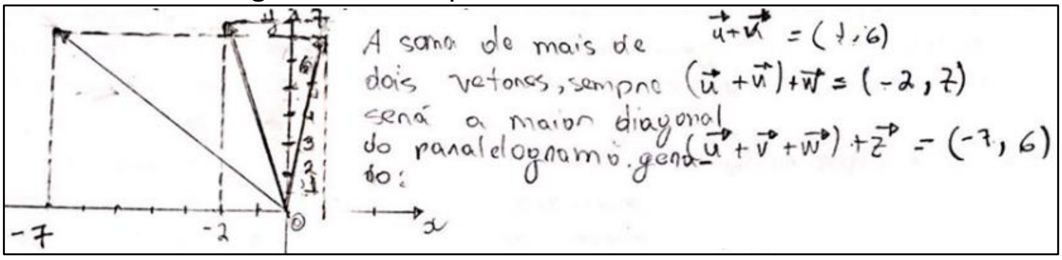
Atividade 3-1:

Dados os vetores $\vec{u} = (2\,,4)$, $\vec{v} = (-1\,,2)$, $\vec{w} = (-3{,}1)$ e $\vec{z} = (-5,-1)$:

- Determine algebricamente a soma de: $\vec{u} + \vec{v}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; e $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + \vec{z}$
- Desenhe no plano cartesiano o representante do vetor obtido em cada operação.
- Qual sua interpretação em relação à soma de mais de dois vetores geometricamente?

Com o objetivo de observar resquícios de informações prestadas pelos participantes da pesquisa, considerou-se, na resposta do participantes P3 (Fig. 31), definição de conceito no que concerne à soma de mais de dois vetores a partir da solução algébrica que foi representada pelos vetores resultantes das somas no plano. Este participante define que a soma de mais de dois vetores sempre será a maior diagonal do paralelogramo formado.

Figura 31 - Resposta do P3 à Atividade 3-1

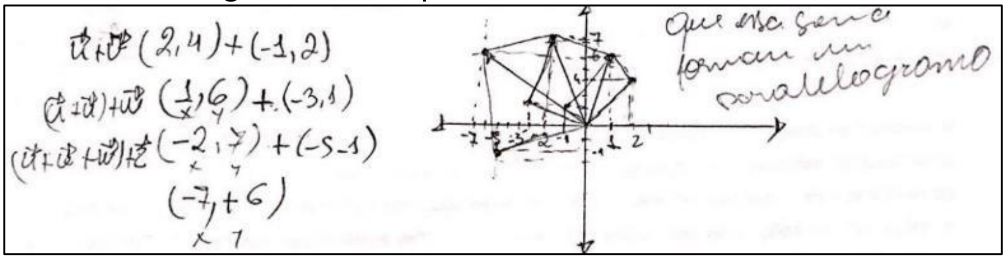


Fonte: dados da pesquisa

Baseados na definição de Tall (1998), tal achado significa que o participante (aluno) é capaz de manipular as suas próprias definições conceituais, produzidas de forma abstrata, para desenvolver as relações lógicas dos conceitos que foram estudados anteriormente.

A seguir, o participante P6, confiante, desenhou três paralelogramos a partir do vetor resultante das somas solicitadas na questão. Diante desses registros, notou-se resquício de imagem de conceito evocada (Fig. 32) por este participante da seguinte forma: na medida em que ele somou o vetor resultante da soma de $\vec{u} + \vec{v}$ com o vetor $\vec{w}$, formou-se um novo vetor, formando um segundo paralelogramo; e quando somou o vetor resultante de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ com o vetor $\vec{z}$, formou-se um o terceiro paralelogramo. Dessa forma, foi possível observar que a interpretação dada pelo participante P6, de que a soma forma um paralelogramo, demonstrou uma compreensão que vai ao encontro das definições formais.

Figura 32 - Resposta do P6 à Atividade 3-1



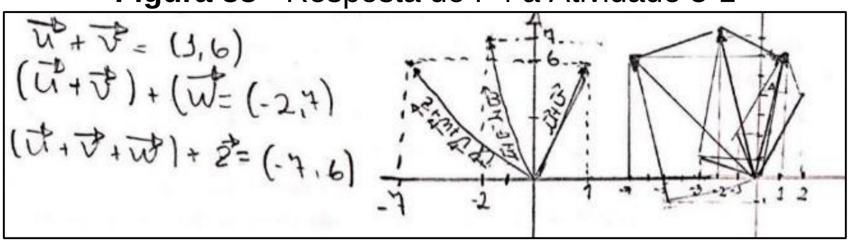
Fonte: dados da pesquisa

Baseado em Tall e Vinner (1981, p. 152), “a imagem de conceito é construída ao longo dos anos, através de experiências que mudam enquanto o indivíduo encontra estímulo e amadurece”. E, essas atividades, além de exigirem interpretação, os participantes da pesquisa foram estimulados a reelaborarem definições e a formarem imagens de conceito sobre a soma de vetores geometricamente.

Analogamente, observou-se (Fig. 33) nas respostas do participante P4 compreensão do processo algébrico. O participante desenhou o vetor resultante das somas num plano e, em outro plano, desenhou uma nova interpretação geométrica, mesmo não descrevendo com palavras sua compreensão, marcou os vetores no plano e desenhou três paralelogramos.

Dessa forma, considerou-se que este participante (P4) justificou, no plano, o processo operatório realizado.

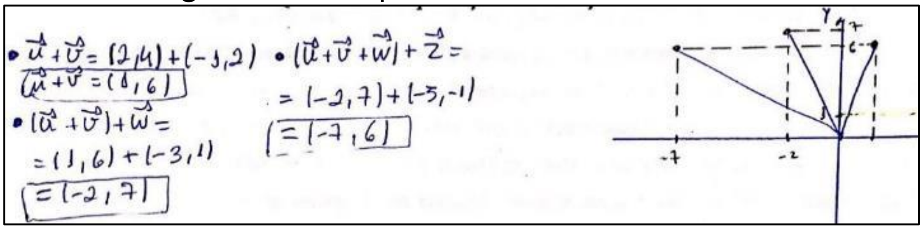
Figura 33 - Resposta do P4 à Atividade 3-1



Fonte: dados da pesquisa

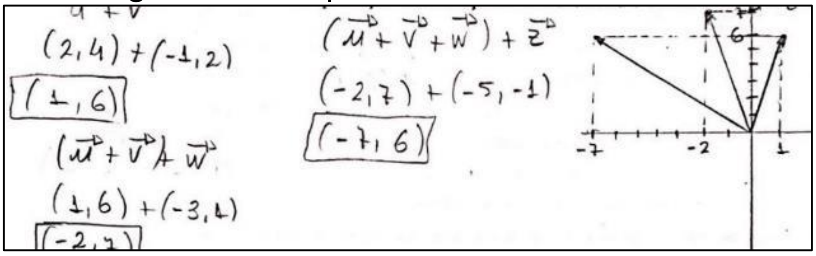
Em relação aos outros participantes (P7, P5 e P1), observou-se que estes apresentaram segurança através do processo algébrico desenvolvido nesta questão e no processo geométrico representado por eles no plano cartesiano, conforme mostram as figuras abaixo.

Figura 34 - Resposta do P7 à Atividade 3-1



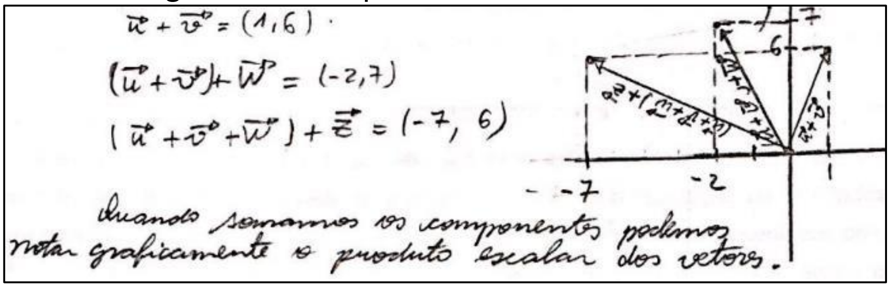
Fonte: dados da pesquisa

Figura 35 - Resposta do P5 à Atividade 3-1



Fonte: dados da pesquisa

Figura 36 - Resposta do P1 à Atividade 3-1



Fonte: dados da pesquisa

De modo geral, os resultados revelam a existência de resquícios de abstração na transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, uma vez que, durante a resolução da atividade, os participantes realizavam as operações demonstrando segurança no que estavam propondo, pois, com a presença de vetores com coordenadas, suas manifestações demonstram preferência pelo processo geométrico.

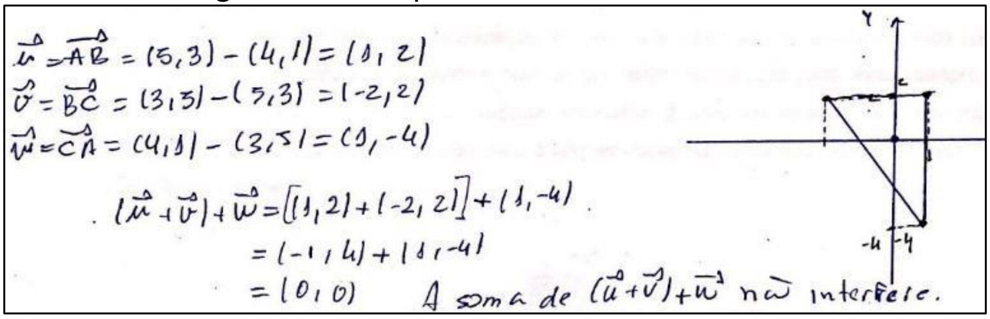
Na Atividade 3-2, os vetores apresentam-se a partir dos pontos *A, B e C,* determinados por segmentos orientados que representam os vértices de um triângulo. O objetivo era que os participantes da pesquisa determinassem, de forma algébrica, as componentes dos vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$), operassem a soma e escrevessem o que podia ser concluído.

Atividade 3-2:

Os pontos $A(4,1)$, $B(5,3)$ e $C(3,5)$ assim representados, são vértices de um triângulo:
- Determine algebricamente as componentes dos vetores: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$.
- Desenhe o triângulo formado pelos pontos ABC no plano cartesiano.
- Realize a soma de $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e escreva o que se pode concluir.

A partir dos registros do participante P7, notou-se um pensamento matemático abstrato no que tange à solução algébrica de vetores definidos por dois pontos. Este participante concluiu que o vetor resultante da soma (sendo vetor nulo) não interfere na representação gráfica.

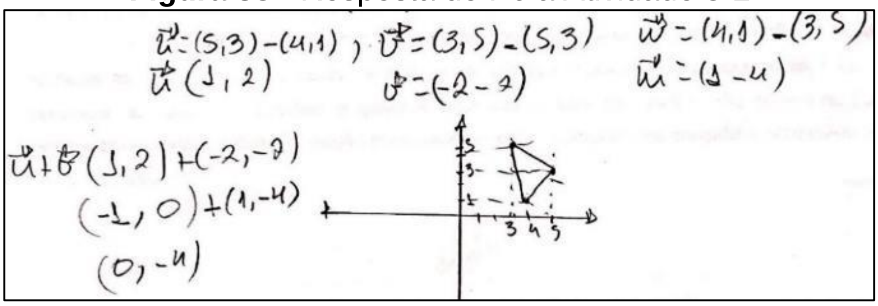
Figura 37 - Resposta do P7 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Na resposta do participante P6 (Fig. 38), notou-se que este participante não demonstrou indícios de imagens de conceito a partir da resolução algébrica, pois, a forma como o participante realizou a operação, não reflete uma representação adequada da soma dos vetores $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

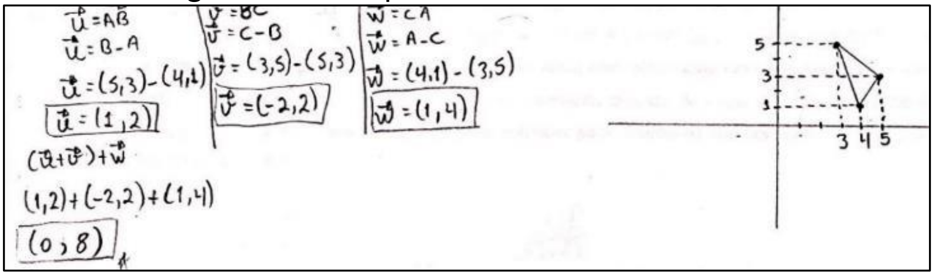
Figura 38 - Resposta do P6 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Da mesma forma, o participante P5 (Fig. 39) desenhou, no plano cartesiano, o triângulo solicitado, mas não fez nenhuma análise em relação à soma realizada, tampouco quanto ao vetor resultante, que seria nulo.

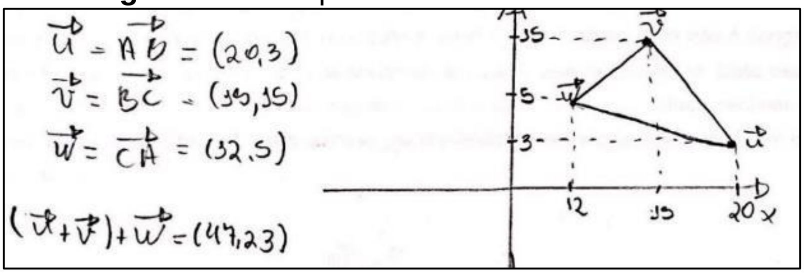
Figura 39 - Resposta do P5 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisar as duas figuras anteriores (38 e 39), percebe-se que as respostas dos participantes P6 e P5 não apresentam evocação de imagens de conceito. Além disso, o participante P4 (Fig. 40) não conseguiu expressar relação entre as informações dadas na atividade e sua resolução, uma vez que as coordenadas não condizem com os segmentos orientados ABC.

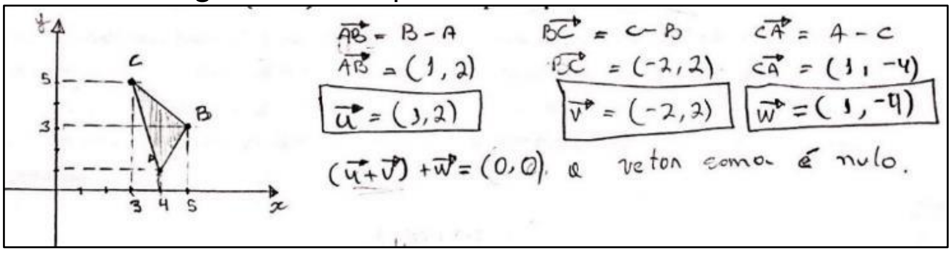
Figura 40 - Resposta do P4 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Entre os participantes, notou-se que, o participante (P3) obteve sucesso na solução algébrica da atividade, demonstrando os pontos no plano cartesiano, o que permite a representação do triângulo. Após realizar a adição dos vetores, concluiu que o vetor soma é nulo. Dessa maneira, podemos inferir elementos de imagens de conceito evocados.

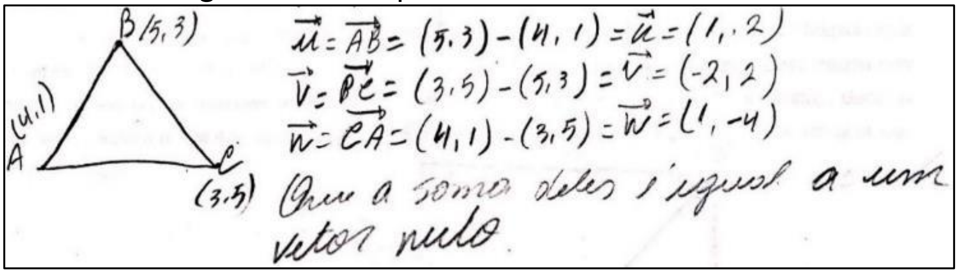
Figura 41 - Resposta do P3 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Outra análise trata-se da resposta do participante P2 (Fig. 42), na qual este participante apresentou a solução algébrica de forma abstrata, desenhou o triângulo e concluiu que a soma dos vetores $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, definidos por dois pontos, é um vetor nulo.

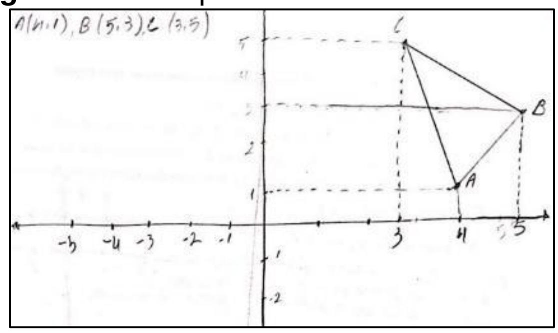
Figura 42 - Resposta do P2 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

Porém, a resposta do participante P1 (Fig. 43) demonstra apenas uma tentativa de solucionar a atividade de forma geométrica, mas não apresenta resolução algébrica, o que não permitiu que o participante chegasse a alguma conclusão sobre a atividade.

Figura 43 - Resposta do P1 à Atividade 3-2



Fonte: dados da pesquisa

A partir desses resultados, notou-se que alguns participantes da pesquisa, acima citados, não apresentaram compreensões sobre operar analiticamente as atividades do Grupo 3, que se dava em termos de suas coordenadas, somando componente a componente. Roncaglio e Nehring (2017) reforçam sobre a compreensão que o aluno deve ter, ao realizar operações com vetores:

> Para entender o significado das operações e o motivo pelo qual se opera é de fundamental importância que o estudante o compreenda, [...] pelo fato de ser explorado em outras disciplinas no decorrer do curso de formação e, principalmente, em situações da profissão (RONCAGLIO; NEHRING, 2017, p. 2).

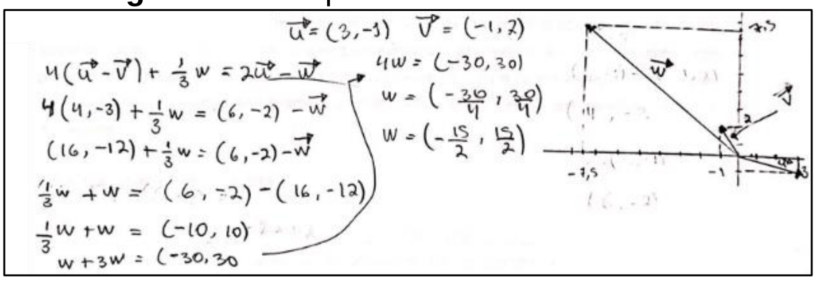
No item 3-3, a seguir, a atividade envolve vetores definidos por dois pontos e igualdade de vetores a partir de uma expressão algébrica, o objetivo é encontrar as coordenadas do vetor $\vec{w}$ para representá-lo no plano.

Atividades 3-3:

Considere os vetores $\vec{u} = (3\,, -1)$ e $\vec{v} = (-1\,, 2)$ e a expressão dada $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$. Determine o vetor $\vec{w}$. Faça a representação geométrica no plano dos vetores: $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

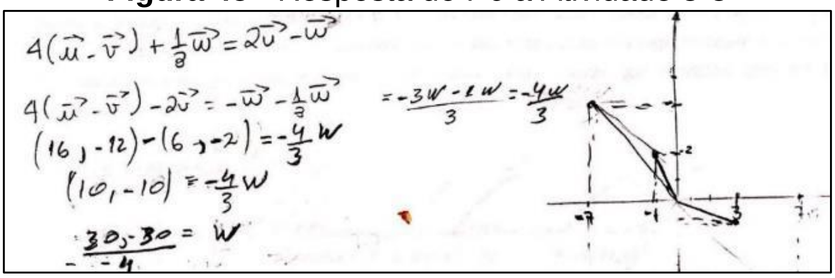
A partir da expressão dada, que envolve operações algébrica e igualdade de vetores, destacamos as respostas de dois participantes que conseguiram atender o que pedia a questão:

Figura 44 - Resposta do P3 à Atividade 3-3



Fonte: dados da pesquisa

Figura 45 - Resposta do P6 à Atividade 3-3



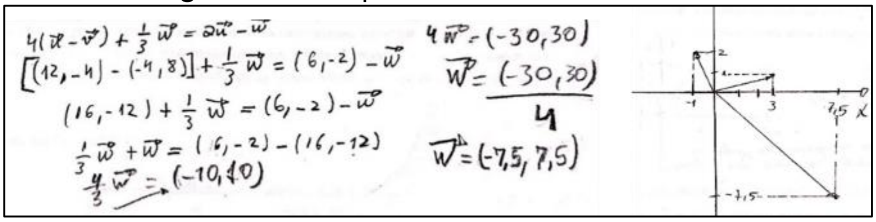
Fonte: dados da pesquisa

Esta questão 3-3, exigiu uma reconstrução cognitiva da parte dos participantes em relação à solução algébrica da equação para obter o vetor $\vec{w}$ e, depois, localizá-lo geometricamente.

Baseados em Tall (1998), somos criativos, mas é bem depois do pensamento elementar que nos ocorre a abstração das coisas que aprendemos, ou seja, é nesse estágio que é exigida a abstração das propriedades de conceitos matemáticos. E, nessas atividades, exigiu-se que os participantes da pesquisa apresentassem um pensamento abstrato para interpretar a solução algébrica, geometricamente.

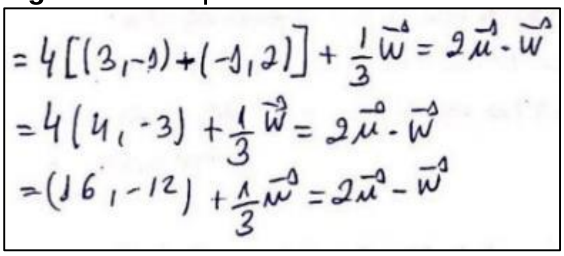
Em relação aos participantes que resolveram, notou-se que apresentaram a resolução algébrica de forma confiante, mas demonstraram dificuldade na interpretação geométrica do resultado obtido.

Figura 46 - Resposta do P1 à Atividade 3-3



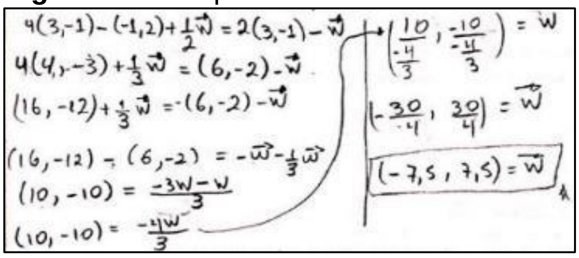
Fonte: dados da pesquisa

Figura 47- Resposta do P7 à Atividade 3-3



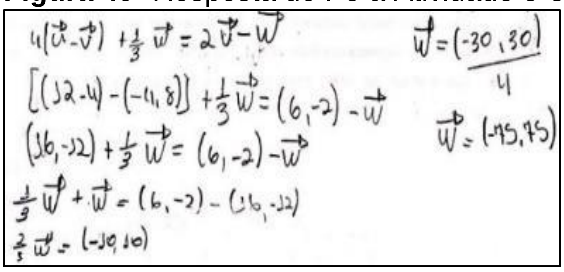
Fonte: dados da pesquisa

Figura 48 - Resposta do P5 à Atividade 3-3



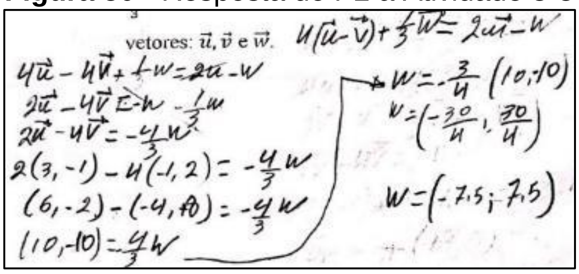
Fonte: dados da pesquisa

Figura 49 -Resposta do P5 à Atividade 3-3



Fonte: dados da pesquisa

Figura 50 - Resposta do P2 à Atividade 3-3



Fonte: dados da pesquisa

Entendemos que esses participantes se depararam com questões que exigiam interpretação, comparação dos resultados, questões que são diferentes das habitualmente utilizadas nesse Grupo de Atividades e nos anteriores, de operações geométricas com vetores.

A partir dessa informação, observou-se elementos considerados relevantes para esta análise durante a pesquisa de campo, como o comentário do participante P1, sobre as Atividades do Grupo 3:

P1: *"Parece fácil, mas não estou conseguindo interpretar o que a questão pede".*

Pesquisadora: *"Inicialmente, falamos das definições e alguns exemplos de como resolver equação que envolva operações com vetores e igualdade com vetores, lembras?".*

P1: *"Sim, mas é que a gente tá acostumado com questões do tipo, "resolva".*

Pesquisadora: *"Essas questões que pedem para vocês interpretarem o que está sendo feito é para melhorar seu entendimento sobre vetores e como operar com vetores na forma geométrica e algébrica".*

Segundo Garbin (2015), os assuntos que requerem uma reconstrução cognitiva devido às dificuldades que eles acarretam, como a Geometria Euclidiana, o Cálculo e Álgebra, seriam típicos do estágio de transição do Pensamento Matemático Elementar para o PMA.

O que nos revelou o questionário?

Durante a pesquisa de campo, além dos diálogos informais mantidos com os participantes da pesquisa, foi aplicado um questionário na busca de responder à pergunta investigativa deste estudo.

Esperava-se investigar as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e na reelaboração da definição de conceito relacionadas a vetores dos estudantes de Licenciatura em Matemática. Para isso, apresenta-se um resumo dos registros das respostas dos participantes às sete questões.

Em relação a operar com vetores geometricamente, sem ajuda dos eixos coordenados (questão 1), resolver uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores, sem ter uma expressão algébrica (questão 2) e, operar vetores representados na forma algébrica (questão 3), obteve-se os seguintes dados:

Sobre operar vetores geometricamente, seis participantes demonstram que é possível realizar operações com vetores apenas na forma geométrica, sem ajuda dos eixos coordenados.

Destacamos as respostas de dois participantes:

P3: *"Sim, porque podemos usar uma soma ou uma multiplicação usando figuras geométricas".*

P7: *"Sim, é possível somente com desenho".*

Em relação a resolver uma expressão envolvendo as operações com vetores, todos os participantes da pesquisa responderam que é possível resolver uma expressão envolvendo as operações da soma, diferença e multiplicação por escalar na forma geométrica. Os sete participantes tentaram e, apesar de alguns não concluírem a resolução da equação proposta na questão 2 do Grupo 1, por unanimidade, afirmam que é possível resolver sem ter valores numéricos.

E, quando questionados sobre operar vetores representados na forma algébrica, todos os participantes da pesquisa responderam que é possível operar vetores representados na forma algébrica e alguns consideraram ser o método mais fácil, mesmo não sendo esse o foco do nosso estudo.

Quanto às análises sobre qual a figura formada pela soma de mais de dois vetores geometricamente (questão 4), e o que se concluiu com os resultados obtidos nas operações de vetores com coordenadas do Grupo 2, após serem desenhados (questão 5), obteve-se as seguintes respostas:

Quadro 6 - Respostas às questões 4 e 5 do questionário

Questão 4	-Seis participantes responderam que forma um paralelogramo e um triângulo. -Um participante respondeu que forma um segmento de reta.

Questão 5	**P1**: *“Dá para se encontrar as posições dos vetores no plano cartesiano”.* **P2**: *“Concluiu-se um resultado satisfatório, pois envolve a perfeição tanto dos cálculos como a representatividade no plano cartesiano”.* **P3**: *“Concluiu-se que o vetor soma tem a maior coordenada de um paralelogramo”.* **P4**: *“Que é mais fácil desenhar os vetores com os cálculos já desenvolvidos, mostrando o resultado das coordenadas”.* **P5**: *“Dá para concluir que a figura é parecida”.* **P6**: *“Igual o desenho do primeiro grupo de geométrico”.* **P7:** *“Que os resultados obtidos geometricamente se confirmam algebricamente e vice-versa”.*

Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes P5 e P6 perceberam que os desenhos são parecidos. A partir da resposta do participante P7, inferimos que é possível resolver a mesma atividade tanto de forma geométrica como algebricamente, desse modo, podemos considerar abstratamente a mudança do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado.

Quando perguntados sobre a coerência existente entre os resultados obtidos nas atividades dos Grupos 1 e 2 (questão 6) e qual o processo que eles consideram melhor para resolver operações com vetores, se geométrico ou algébrico (questão 7), obtivemos os seguintes dados:

Quadro 7 - Respostas às questões 6 e 7 do questionário

Questão 6	**P1**: *"Sim, porque ambas procuram a posição dos vetores no plano cartesiano".* ***P2****: "As atividades tanto no grupo 1 como no grupo 2 são bem similares".* ***P3****: "Existe sim, porque todas elas formam um paralelogramo".* ***P4****: "Sim, porque tanto na forma geométrica ou na forma algébrica, conseguimos resolver as operações vetoriais".* ***P5****: "Acho que sim. Era a mesma operação soma, subtração e produto e a mesma equação".* **P6**: "Sim". **P7**: *"Sim, uma comprova a outra. São os mesmos vetores e algumas questões eram iguais".*
Questão 7	**P1***: "Algébrico, pois só é necessário fazer uma soma com os valores correspondentes".* **P2**: *"Na minha opinião, o algébrico".* **P3**: *"Pelo processo algébrico, porque você encontra as coordenadas no plano".* **P4**: *"Algébrico com certeza".* **P5**: *"Algébrico é melhor para calcular".* **P6**: *"Algébrico".* **P7**: *"Algébrico é melhor".*

Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes perceberam que eram iguais as atividades do Grupo 1 e Grupo 2, pois, quando o participante P7 descreve seu entendimento, *"uma comprova a outra",* identificamos resquícios da transição do pensamento matemático elementar para o PMA.

Em relação ao último questionamento, embora este não fosse o foco da pesquisa, se fez necessário, mesmo já tendo observado que os participantes sempre comentavam que as questões com "números" eram melhores de resolver. Todos os participantes da pesquisa consideram o processo algébrico melhor para resolver operações com vetores.

Quanto às observações realizadas

Nesta seção, apresentam-se os registros feitos durante as aplicações das atividades e do questionário. Durante os encontros, registrou-se algumas informações que fogem do objetivo deste estudo, mas, diante da espontaneidade de alguns acontecimentos, tornam-se importantes para análise, como o comentário feito por um participante:

P2: *"Mas Geometria pra mim é mais difícil que cálculo 1".*

Normalmente, entre os participantes, havia uma discussão sobre as definições formais e/ou o que poderia ser considerado um vetor, o que podemos verificar nas audiogravações, a seguir, entre três participantes, registradas durante a aplicação do terceiro grupo de atividades:

P1: *"Eu não lembrava mais como resolvia essas questões de vetores, agora deu pra ver e percebi que é bem melhor esses vetores de geometria do que da álgebra que a gente tá vendo".*

P4: *"Nas questões do grupo 2 que foram clareando, porque eu gosto quando tem os valores pra desenhar no gráfico".*

P7: *"Queria que os exercícios de Geometria I fossem assim, que desse pra gente entender o que realmente é um vetor".*

Podemos considerar que o participante P7, em sua fala, se refere ao tipo de atividades, que eles não são acostumados a resolver questões que os levem a interpretar e a dar significados para os problemas que resolvem. De forma abstrata, este participante demonstra uma mudança de pensamento devido à necessidade de justificar os problemas ou exercícios resolvidos em outras disciplinas.

O participante P4 se refere às questões de vetores com coordenadas, considera-se que seu entendimento algébrico se confirma através de manipulações geométricas.

No comentário feito pelo participante P1, há divergência, pois, em resposta à questão 7 (Quadro 7), quanto ao método mais conveniente para resolver questões de vetores, o participante, assim como os demais, disse ser o método geométrico.

Acredita-se que este participante apresenta dificuldades sobre operações com vetores, dificultando a evocação de imagens de conceito.

Conquanto, nos encontros, um ou dois participantes apresentavam demora na compreensão sobre como resolver as atividades. Num dado momento, um participante (P5) disse: "*professora, estas atividades são bem parecidas com as de Desenho Geométrico, eu adorava fazer os desenhos".* Consideramos as divergências entre as repostas dadas ao questionário com as observações feitas, pelo fato de os participantes da pesquisa tentarem expressar respostas prontas, sem, de fato, expressar o que eles realmente preferem.

A partir dessa análise, concordamos com o que diz Richit (2005) sobre o ensino de Geometria Analítica, que os professores devem desenvolver atividades que estimulem e desenvolvam nos participantes/estudantes a capacidade de interpretar uma construção geométrica e algébrica, pois essa capacidade poderia diminuir certas dificuldades em Geometria Analítica e na Álgebra.

Procurou-se nessas discussões observar resquícios de entendimentos sobre operações com vetores geometricamente a partir de tudo aquilo que apareceu nos registros escritos e falas no decorrer da aplicação das atividades para associarmos à categoria (I) seguinte:

5.1 CATEGORIA I - OS PARTICIPANTES DA PESQUISA APRESENTAM UM PENSAMENTO MATEMÁTICO COMPATÍVEL COM A COMPREENSÃO NECESSÁRIA PARA OPERAR GEOMETRICAMENTE COM VETORES

Sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981), o Pensamento Matemático Avançado busca compreender a evolução do entendimento abstrato a partir de situações consideradas "concretas", que, no caso deste estudo, é a apresentação geométrica. Com base nisso, esperava-se que os participantes da pesquisa se familiarizassem com a ideia de que os vetores não precisam ter uma expressão algébrica para serem representados, que podem ser operados geometricamente, e a partir disso, que eles apresentassem um pensamento matemático para tal compreensão.

No que concerne à Atividade 1 do Grupo 1, os participantes da pesquisa apresentaram compreensão necessária para operar de forma geométrica um problema no plano/espaço sem ajuda de eixos coordenados. E, as definições de conceito evocadas que descreveram seus entendimentos se aproximaram dos conceitos propostos por Steinbruch e Winterle (1989).

Em relação à Atividade 2 do Grupo 1, sobre operar vetores de forma geométrica a partir de um equação que envolvia soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores, observou-se que alguns participantes não souberam lidar geometricamente com questões desse tipo, por serem consideradas mais complexas, e não se sentiram confiantes para concluí-las com êxito. Isso se deve, talvez, à falta de estímulos e/ou as definições de conceito dos participantes da pesquisa sobre essa abordagem ainda precisem ser enriquecidas.

Com base em Tall e Vinner (1981), notou-se que, quando os participantes da pesquisa se depararam com questões de operações geométricas de vetores, ideias (em diálogos) e figuras mentais (nos registros) foram elaboradas por eles para resolverem as atividades propostas. Dessa forma, considerou-se que os participantes apresentaram, através das atividades do Grupo 3, um pensamento matemático compatível com a compreensão necessária para operar geometricamente vetores através das Atividades propostas nas quais exigiram que desenhassem a solução algébrica no plano cartesiano.

Por conseguinte, através das respostas das atividades do Grupo 2, observou-se alguns elementos que foram considerados importantes para as categorias (II e III) seguintes.

5.2 CATEGORIA II - OS PARTICIPANTES DA PESQUISA DESENVOLVEM UM PENSAMENTO MATEMÁTICO ABSTRATO SOBRE AS INTERPRETAÇÕES ALGÉBRICAS APÓS SEREM DESENHADAS

Ao resolverem as atividades do Grupo 2, os participantes apresentam indícios de um pensamento matemático abstrato ao descreverem as interpretações das soluções algébricas após serem desenhadas no plano cartesiano. Resultados como este podem ser confirmados a partir da conclusão feita pelo participante P3.

Nesse contexto, sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981), o Pensamento Matemático Avançado busca entender a evolução do entendimento abstrato a partir de situações consideradas “concretas”, que, no nosso caso, é a apresentação geométrica nas atividades do Grupo 2. Com base nessa definição e através das respostas dos participantes P1, P3 e P4 foi possível obter elementos sobre as interpretações algébricas dos participantes da pesquisa.

Ao analisarmos os registros escritos quanto ao pensamento matemático abstrato sobre a interpretação de operações algébricas após serem desenhadas, os participantes descrevem que: *“Podemos verificar que ambos, apesar de serem resolvidos de maneiras diferentes, obtiveram gráficos parecidos”, “sendo que os são semelhantes a um a outro”* e, *“ambas as figuras são iguais”.* Observou-se que as análises expressas nas respostas dos participantes, que descreveram suas definições de conceito, têm uma proximidade às definições formais que foram expostas nas atividades sobre operações de vetores com coordenadas, baseadas no livro *Vetores e Geometria Analítica*, de P. Winterle, e no livro *Geometria Analítica*, de A. Steinbruch e P. Winterle.

Além desses registros destacamos as respostas dos participantes (P3, P4 e P5) ao questionário, quando perguntados sobre o que foi possível concluir com os resultados das Atividades dos Grupos 1 e 2, responderam: *“Concluiu-se que o vetor soma tem a maior coordenada de um paralelogramo”; “Que é mais fácil desenhar os vetores com os cálculos já desenvolvidos, mostrando o resultado das coordenadas”; “Dá para concluir que a figura é parecida”.* Dessa maneira estes participantes apresentam abstrações sobre a interpretação de operações algébricas após serem desenhadas.

5.3 CATEGORIA III - OS PARTICIPANTES DA PESQUISA CONSEGUEM NOTAR A EQUIVALÊNCIA DAS DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS DE OPERAÇÕES COM VETORES

Partindo do pensamento matemático abstrato dos participantes, expostos na categoria anterior, faz-se necessário inferir elementos que constituem a equivalência das definições geométricas e algébricas de operações com vetores.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição de conceito pode ser expressa como o tipo de palavras que o participante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem evocado. A partir disso, observou-se, além dos desenhos e escritas, as falas dos participantes, e podemos observar que dois participantes (P4 e P7) notaram a equivalência das definições geométricas e algébricas:

P4: "*Tanto na forma geométrica ou na forma algébrica conseguimos resolver as operações com vetores*".

P7: "*Sim, uma comprova a outra, os resultados obtidos geometricamente se confirmam algebricamente e vice-versa*".

Esses registros demonstram o que era esperado de todos os participantes, esta percepção de mudança do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

Nota-se que esses dois participantes ganharam confiança no processo algébrico, e concluíram que este processo conduz ao mesmo entendimento geométrico nas atividades propostas. Dessa forma, consideramos que os participantes P4 e P7 passaram do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

Sendo assim, a partir das respostas descritas acima, nas atividades do Grupo 3, vamos inferir elementos e associá-los à categoria (IV), seguinte, que trata sobre:

5.4 CATEGORIA IV - A EXISTÊNCIA DE INDÍCIOS DE IMAGENS DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO RELACIONADAS A VETORES A PARTIR DA TRANSIÇÃO DO MÉTODO GEOMÉTRICO ("PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR") PARA O MÉTODO ALGÉBRICO/ABSTRATO ("PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO")

Na interpretação que os participantes deram, em relação à soma geométrica de mais de dois vetores, as respostas nos mostram a existência de elementos de mudança do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA), através do processo construtivo dos três paralelogramos desenhados no plano e do processo operatório com vetores.

De acordo com Tall (1981, p. 152), "os diferentes modos de apresentar e de observar o conceito são constituídos por meio de um repertório de imagens, ideias e procedimentos denominados de imagens de conceito". Com base nessas referências, foi possível observar os elementos considerados relevantes para esta análise durante a pesquisa de campo, nas análises sobre o item 3-1.

E, de forma semelhante, observou-se, na última atividade, em algumas respostas, essa transição de pensamentos através dos processos desenvolvidos pelos participantes justificando-os geometricamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com essa pesquisa, nos propusemos a investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração de definição de conceito relacionado ao ensino de vetores em Geometria Analítica. Para que isso fosse possível, a pesquisa foi constituída por meio de atividades divididas em grupos e de um questionário.

As imagens de conceito relacionadas às operações geométricas de vetores nos revelaram que os participantes da pesquisa apresentaram um pensamento matemático (relativamente) compatível para compreensão de operar geometricamente vetores quando a soma, a diferença e a multiplicação são abordadas separadamente. Quando as operações foram apresentadas por meio de uma equação, alguns participantes apresentaram dificuldades na compreensão. Segundo Tall e Vinner (1981), as imagens de conceito são evocadas pelos participantes, que descrevem o entendimento que cada indivíduo forma do conceito ou do objeto matemático estudado, o que inclui todas as figuras mentais.

Consecutivamente, no segundo grupo de atividades, os resquícios das imagens de conceitos observadas a partir das escritas e comentários nos revelaram que alguns participantes notaram a equivalência das definições geométricas, apresentadas no Grupo 1, com as algébricas, apresentadas no Grupo 2. Além disso, notou-se que apenas dois participantes concluíram que os dois métodos conduzem ao mesmo resultado.

Embasados em nosso referencial, notamos que as atividades do Grupo 3 nos revelaram que, quando os participantes da pesquisa se depararam com operações de vetores, ideias a partir de diálogos e figuras mentais a partir dos registros foram elaboradas por eles, e isso consideramos importante para nossa análise, pois Tall e Vinner (1981) declaram que o ensino da Matemática não deve visar apenas à construção formal, mas ao enriquecimento da imagem conceitual de cada aluno.

A partir do resultado do questionário, concluiu-se que as atividades de Geometria Analítica contribuíram para a formação de imagens de conceitos dos participantes. Embora alguns possuam imagens “enfraquecidas”, eles elaboraram definições de conceito em relação à operação da soma de mais de dois vetores no plano; notaram a equivalência das definições geométricas e algébricas a partir das figuras formadas nas atividades dos Grupos 1 e 2, mas apenas dois participantes perceberam que o método geométrico pode ser conduzido através do método algébrico.

Além dessas contribuições, em resposta ao questionário, todos os participantes da pesquisa responderam que o processo algébrico é mais fácil de resolver ou de melhor compreensão pelo fato de os “números” facilitarem a construção no plano.

O desempenho manifestado pelos participantes na compreensão de atividades de Geometria Analítica relacionadas a vetores nos remete a um conjunto de questões que devemos pensar sobre a aprendizagem, a nível da matemática avançada no ensino superior, mesmo que este não seja o foco da nossa pesquisa.

Da realização do presente estudo, decorrem algumas considerações para a aprendizagem de operações com vetores no ensino superior.

Uma das questões que se coloca está relacionada à possibilidade de que as disciplinas de Geometria Analítica não estão abordando o método geométrico e/ou os conceitos mais elementares de geometria analítica não estão sendo utilizados pelos alunos como objetos matemáticos, dificultando, dessa forma, a formação de imagens de conceito no ensino superior.

Consideramos que a maneira como o conteúdo é explanado pode representar um rico potencial de investigação para formação de imagens e definições de conceito por parte dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

Nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer dessa dissertação, que constituem o produto educacional, podem ser parte de um conjunto de sugestões para apoiar a aprendizagem sobre operações de vetores no ensino superior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia** – 2009, 199 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

BATTIST, I. K., & NENRING, C. M. A Significação do conceito de vetor, no contexto da Geometria Analítica, por acadêmicos. **Anais do XXI Jornada de Pesquisa**: Salão do Conhecimento, ciência alimentando o Brasil, 2016, p. 8.

BARROS, J. A. **O projeto de Pesquisa em História:** da escolha do tema ao quadro teórico. 10. Ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

BOGDA, R.; BIKLEN, S. Características da Investigação qualitativa. In:______. **Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 2013. p. 47-51.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. **A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. **Coleção Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

CARMO, P. S; SOARES, M. R; SOUZA. H. T. O pensamento matemático avançado em pesquisas. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 7, 2016, São Paulo. Anais eletrônicos. São Paulo, UCSUL, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR02.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2017.

CAVALCA, A. V. S. **Espaço e representação Gráfica** (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

COMIN, A; *et al*. **História da Educação Matemática**: escrita e reescrita de histórias. Org. Ocsana Sônia Danyluk. Porto Alegre: Sulina, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. Ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DOMINGOS, A. M.D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a matemática no início do superior. Tese (Doutorado em Ciências da Matemática) – PPGCM da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

EISBERG, R. N; Lerner L. S. **Física – Fundamentos e Aplicações** (Vol 2). Trad. Ivam J. Albuquerque. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. D. Indícios de dificuldade na compreensão da matemática avançada: o conceito de grupo. In: **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Petrópolis/RJ, 2012.

FERREIRA, Juliano Cezar. **Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado**: imagem de conceito e definição de conceito. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PPGEM. Juiz de Fora: UFJF, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, V. G; SILVA, A. L. S; SANTOS, A. R; SANTIAGO, E. F.; MARÇAL, I. L. **Conceito imagem e conceito definição no estudo das funções exponenciais e logarítmicas com o geogebra.** VI Congresso Internacional de Educação Matemática, Canoas – RS, 2013.

FONSECA, V. G. **O uso de Tecnologias no Ensino Médio:** a integração de Mathlets no Ensino da Função Afim. Dissertação de Mestrado. UFRJ, 2011.

GARBIN, S. D. **Investigaciones en educación matemática.** Investigar en pensamiento matemático avanzado, 2015, p. 138-153.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais**: O Caso da Derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, 1999. p. 111-133.

LEÃO, A. S. G; BISOGGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**. Rio Grande do Sul/RS, Ano 10, n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009.

LOPES, L. M. L; PIERMATEI FILHO, O. **A constituição do campo da Educação Matemática no Ensino Superior e as contribuições da Teoria do Pensamento Matemático Avançado em pesquisas.** V Colóquio de Educação Matemática, Juiz de Fora – MG, 2017.

LUDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MASCARENHAS, S. A. (Org.). **Metodologia científica**. São Paulo: Pearson, 2012.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 31, n. 2. 2009. Disponível em: <http:// http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/312305.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2013.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica** (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife - PE, 2004.

OLIMPIO, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática**: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2006.

PATRICIO, R. S. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação Matemática e Científica. Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

PINHEIRO, G. D.; DALLEMOLE, J. J.; MATOS, J. D. Geometria Analítica e vetores: Explorando conceitos e propriedades com o desenvolvimento de appelts no geogebra. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016, p. 8.

PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. In: **Dossiê:** a pesquisa em Educação Matemática. Educação em Revista, Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

RICHT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica**: Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RONCAGLIO, V; NEHRING, C. M. Processo de aprendizagem do conceito de vetor por estudantes de engenharia. **Anais do XXI Jornada de Pesquisa**: Salão do Conhecimento, ciência alimentando o Brasil, UNIJUÍ, 2017.

SANTOS, I. N. **Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação [manuscrito**]: uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2011.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SPIEGEL, MURRAY R. **Análise Vetorial**: com Introdução a Análise Tensorial. Coleção Schaum. 1. Ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1966.

STEINBRUCH, Alfredo & WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

______. **Geometria Analítica**. 2. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, **Dordrecht**. v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: ______ (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3-21.

______. **Advanced mathematical thinking**. Kluwer Academic Publishers, 2002.

______. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, v. 1. Recife, Brasil, 1995, p. 61-75.

______. The nature of mathematical proof. **Mathematics Teaching**. n. 127, p. 28-32, 1989.

VALLADARES, R. J. C. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: E. Campus, 1982.

APÊNDICES

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO

1) É possível realizar operações com vetores apenas na forma geométrica sem ajuda dos eixos coordenados?
2) É possível resolver uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores sem ter uma expressão algébrica?
3) É possível realizar operações de vetores representados na forma algébrica apenas?
4) Qual a figura formada pela soma de mais de dois vetores geometricamente?
5) O que se conclui com os resultados obtidos nas operações de vetores com coordenadas do grupo 2, após ser desenhada?
6) Existe coerência entre os resultados obtidos nas atividades dos grupos 1 e 2?
7) Qual o processo você considera melhor para resolver operações com vetores: geométrico ou algébrico?

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO

Prezado (a) aluno (a):

Esta pesquisa é sobre "estudo de vetores: imagem de conceito e definição de conceito" e está sendo desenvolvida pela mestranda Leide Mª Leão Lopes, do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, sob a orientação do Professor Orestes Piermatei Filho.

O objetivo do estudo é fazer uma análise do ensino de vetores a partir da noção de imagem de conceito e definição de conceito no ensino superior. A finalidade deste trabalho é contribuir com o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos avançados que direcionam às abstrações de definições e deduções.

Solicitamos a sua colaboração para responder os questionários inicial/final (escrito), e participar na realização das atividades, no período compreendido entre os meses de abril a junho do corrente ano, em contra turno às suas aulas, como também sua autorização para apresentar os resultados deste estudo em eventos da área de Educação Matemática e possíveis publicações nacional e/ou internacional. Por ocasião da publicação dos resultados, seu nome será mantido em sigilo absoluto.

Esclarecemos que sua participação no estudo é voluntária e, portanto, você não é obrigado(a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas. Caso decida não participar do estudo, ou resolver a qualquer momento desistir do mesmo, não sofrerá nenhum dano. O pesquisador estará a sua disposição para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

____

Assinatura do(a) pesquisador(a) responsável

ANEXOS

ANEXO A - COMPONENTE CURRICULAR DAS DISCIPLINAS: GEOMETRIA ANALÍTICA, ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA

Componente Curricular: GEOMETRIA ANALÍTICA					
Sigla:	**Carga Horária**		**Créditos**		**Pré-requisito**
CSTB0247	**Teórica: 60**	**Prática: -**	**Teórico: 4**	**Prático:**	**-**
	Total: 60		**Total: 4.4.0**		

OBJETIVOS
-Representar vetores no plano -Representar graficamente as equações das retas. -Conhecer diferentes teoremas geométricos no plano.

EMENTA
Vetores. Operações com vetores. Vetores no R^2 e no R^3, Distâncias. Diferentes equações da reta. O Plano. Distâncias. Cônicas.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA
STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron, 1997. LEITHOUL, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. Editorial Habra. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Espacial**. São Paulo: Atual. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Plana**. São Paulo: Atual.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR
BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. EUCLIDES, N. **Elementos de Geometria.** São Paulo: Cultura. LIMA, E. L. **Áreas e Volumes.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. LIMA, E. L. **Isometria.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Componente Curricular: ÁLGEBRA LINEAR I					
Sigla:	**Carga Horária**		**Créditos**		**Pré-requisito**
CSTB0282	**Teórica: 60**	**Prática: -**	**Teórico: 4.4.0**	**Prático: -**	
	Total: 60		**Total: 4.4.0**		

EMENTA
Matrizes, operações com matrizes. Cálculo de determinantes. Sistemas de equações lineares. Vetores, operações com vetores, dependência e independência linear, bases. Vetores e valores próprios. Matriz inversa.

OBJETIVOS
-Prover ao aluno conhecimentos básicos de cálculo com matrizes, determinantes, sistemas lineares e espaços vetoriais. -Realizar operações com vetores e matrizes. -Conhecer e aplicar a exercícios o conceito de base. -Calcular a matriz inversa de uma matriz ou determinar que não existe.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I.R.; RIBEIRO, V.L.; WETZLER, H.G. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harper e Row do Brasil.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**: teoria e problemas/ tradução Alfredo Alves de Farias com a colaboração de Eliana Farias e Soares; revisão técnica Antônio Pertence Júnior. 3. ed. – São Paulo: Makron Books, 1994. (coleção Schaum)

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron, 1997.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Introdução a Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial.** São Paulo: Mac Graw-Hill do Brasil.

CARAKUSHANSKI, M. S. **Introdução à Álgebra Linear.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.

RIGHETTO, A. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: IBEC.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA.

Componente Curricular: GEOMETRIA I					
Sigla:	**Carga Horária**		**Créditos**		**Pré-requisito**
CSTB0250	**Teórica: 60**	**Prática: -**	**Teórico: 4.4.0**	**Prático: -**	

EMENTA
O Método Dedutivo. Triângulos. Paralelismo: Teorema de Tales. Polígonos. Quadriláteros. Circunferência e Círculo. Medida de segmentos. Semelhança. Relações métricas no triângulo retângulo. Triângulos quaisquer. Relações métricas no círculo. Áreas de figuras planas.

OBJETIVOS
-Conhecer os objetos geométricos e físicos. -Aplicar adequadamente o vocabulário preciso em geometria. -Resolver problemas colocados dia a dia ou em outras disciplinas. -Mostrar rigor lógico e pensamentos dedutivo e indutivo.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA
BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Espacial**. São Paulo: Atual. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Plana**. São Paulo: Atual. EUCLIDES, N. **Elementos de Geometria.** São Paulo: Cultura. LIMA, E. L. **Áreas e Volumes.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. LIMA, E.L. **Isometria. Coleção Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR
BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Espacial**. São Paulo: Atual. DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Plana**. São Paulo: Atual. EUCLIDES, N. **Elementos de Geometria.** São Paulo: Cultura. LIMA, E. L. **Áreas e Volumes.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. LIMA, E.L. **Isometria. Coleção Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.