UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS /TRABALHO REALIZADO:

IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Juliano Cezar Ferreira

Juiz de Fora (MG)

Fevereiro, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Juliano Cezar Ferreira

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS /TRABALHO REALIZADO:
IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Fevereiro, 2013

Ferreira, Juliano Cezar.
Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: imagem de conceito e definição de conceito / Juliano Cezar Ferreira. – 2013.
151f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)– Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tecnologia da informação (Educação). I. Título.

CDU 51(07)

Juliano Cezar Ferreira

“Integral de Linha de Campos Vetoriais/Trabalho Realizado: Imagem de Conceito e Definição de Conceito”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
Orientador

Prof. Dr. Antonio Olimpio Junior
(UFJF)

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
(UFOP)

Aprovado em 22/02/2013

Dedicatória

À minha esposa Letícia e meu filho Gabriel pelo apoio e porque souberam compartilhar comigo a complexa gestão do tempo.

Aos meus pais Antônio Altivo e Maria Lenir.

Agradecimentos

A Deus.

Ao Professor Orestes, pelo exemplo, dedicação e estímulo; pelo apoio e amizade fraterna.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, pela possibilidade deste trabalho acontecer.

Aos professores e professoras do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática com o(a)s quais eu tive o privilégio de compartilhar ideias e aprender.

Ao Instituto Federal de Educação do Sudeste de Minas Gerais, Campus Juiz de Fora, na figura do atual diretor Sebastião, e seu diretor de pesquisa Professor Lecino Caldeira, pelo investimento e apoio institucional.

Aos estudantes participantes da pesquisa, parceiros e parceiras desta caminhada, sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

Aos colegas pós-graduando(a)s do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora pelos momentos felizes de convivência.

Aos colegas do Instituto Federal de Educação do Sudeste de Minas Gerais, Campus Juiz de Fora, pela amizade e contribuições.

Aos funcionários e funcionárias do Instituto Federal de Educação do Sudeste de Minas Gerais, Campus Juiz de Fora, pela gentileza e presteza com que me atenderam em todas as oportunidades.

Ao meu pai, minha mãe, minha sogra e minha querida esposa que contribuíram para que eu pudesse, em muitos momentos, estar integralmente concentrado neste trabalho.

Resumo

Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico. O objetivo foi investigar elementos da imagem de conceito e definição de conceito, relativas ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como Trabalho Realizado. A teoria de imagens de conceito é empregada como embasamento teórico para as discussões. Os sujeitos investigados são estudantes do curso de Licenciatura em Física de uma Instituição Federal de Ensino de Minas Gerais. Os dados foram coletados durante os Experimentos de Ensino por meio de questionários e entrevista. Entre as conclusões, destacamos: interpretação da Integral de Linha de Campos Vetoriais como somatório do Trabalho realizado por uma Força; o Cálculo da Integral de Linha de Campos Vetoriais fornece o trabalho realizado; o sentido do Campo Vetorial e a trajetória da partícula visualizada por meio do software Maple revela o sinal do . Os resultados da pesquisa sugerem: estudantes de Física tendem a relacionar os objetos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um Software pode gerar novas compreensões; o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos; a estrutura formal das definições matemáticas são pouco compreensivas mesmo para estudantes matriculados em disciplinas de Cálculo mais avançado.

Palavras Chave: imagem de conceito, definição de conceito, integral de linha de campos vetoriais, trabalho realizado, maple.

Abstract

This is a diagnostic character. The objective was to investigate the elements of concept image and concept definition, relating to the concept of line Integral of vector fields, when interpreted physically as work done. The theory of concept is employed as the theoretical basis for the discussions. The subjects investigated are students of the degree in Physics from a Federal Institution of learning in Minas Gerais. The data were collected during the teaching Experiments through questionnaires and interview. Among the conclusions, include the following: interpretation of the line Integral of vector fields as the sum of the work done by a force; the calculation of the line Integral of vector fields provides the work done; the direction of the vector field and particle trajectory displayed through the Maple software reveals the sign of . The survey results suggest: physics students tend to relate mathematical objects with physical concepts; Visualizing vector fields can enrich or generate theoretical conflicts; the use of a Software can generate new understandings; planning lessons for advanced mathematical content must include the accuracy of the mathematical technique, but also enable the intuitive enrichment of the concepts involved; the formal structure of mathematical definitions are little understanding even for students enrolled in disciplines most advanced calculation.

Keywords: image concept, concept definition, line integral of vector fields, work done, maple.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Esse trabalho é parte de uma experiência docente em sala de aula no ensino de Matemática. Particularmente, no ensino do Cálculo Integral de Curvas sob a ação de campos vetoriais. A atenção concentrou-se na observação no que tange as muitas dificuldades empíricas do estudante na sua aprendizagem. Essa experiência ocorreu no Instituto Federal de Educação Sudeste de Minas Gerais com estudantes do curso de Licenciatura em Física do terceiro período.

As dificuldades emergentes podem a curto ou longo prazo, gerar conflitos conceituais nas ocasiões de manipulação ou validação dos conceitos envolvidos. Além disso, nós professores sentimos, muitas vezes, impotentes diante de certos obstáculos eminentes numa sala de aula. A intenção do presente trabalho é propor reflexões acerca de, certamente, um desses obstáculos emergentes do processo de aprendizagem da Integral de Linha de Campos Vetoriais.

Apesar da experiência na Educação Básica, na qual foi possível constatar a necessidade de abordagens alternativas, a fim de favorecer compreensões conceituais dos conteúdos matemáticos elementares, minha prática na sala de aula ao ensinar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral ainda se constituía, muitas vezes, da abordagem convencional vigente sugerida pela maior parte dos livros didáticos: a definição formal, exemplos e exercícios. Embora essa ação fosse executada por mim, com algumas adaptações, sentia que não contemplava o objetivo de auxiliá-los mais intensamente na compreensão conceitual. Tentava outras alternativas como representações gráficas. Mas era limitado pelo aparato técnico quadro e giz. Principalmente no momento de representar alguns campos vetoriais, o que nos inquietava constantemente meus pensamentos gerando questionamentos diversos sobre o ensino e a aprendizagem desses objetos matemáticos da análise vetorial. Um desses questionamentos, gerado em reflexões nas aulas das disciplinas do mestrado, era o seguinte: “Os estudantes do curso de Física matriculados em Cálculo Diferencial e Integral III[1] (Cálculo III) já passaram por diversos conceitos mais avançados e, portanto, é necessário pensar em diferentes

[1] Nomenclatura para a disciplina que aborda Integral de Linha em sua ementa.

metodologias ou estratégias de ensino no sentido de auxiliar uma melhor compreensão dos conceitos novos dessa disciplina, como a Integral de Linha? Os estudos de diversos textos na Educação Matemática nas diferentes disciplinas do mestrado ajudaram a responder essa pergunta: Sim, é necessário. É interesse da Educação Matemática conhecer as interpretações dos estudantes em sala de aula, em qualquer nível de ensino, no qual envolve o conhecimento matemático. Isso, porque favorece a produção de subsídios para um quadro de conhecimentos acerca dos processos de ensino e aprendizagem envolvidos nesse nível de ensino. Além disso, pode auxiliar o planejamento de aulas presenciais, aulas a distância e ainda na elaboração de materiais didáticos entre outros.

1.1 Um Problema Constatado

Segundo o artigo Integrating Computer Algebra Systems in post-secondary mathematics education: Preliminary results of a literature review, publicado no International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME) em 2010, no qual apresenta resultados de um estudo piloto de revisão da literatura sobre o uso de Computer Algebric System (CAS)[2] em educação matemática superior, há um contraste muito grande do número de pesquisas sobre o uso de tecnologia no ensino secundário em relação ao ensino superior:

> Em contraste com o grande corpo de pesquisa focado no uso de tecnologia que existe em nível secundário, há uma clara falta de investigação paralela no ensino superior, ou pós-secundário. No entanto, Lavicza (2008b) destaca que os matemáticos universitários usam a tecnologia, pelo menos tanto quanto os professores, e que as práticas de ensino inovadoras, envolvendo tecnologia que já estão sendo implementadas pelos matemáticos em seus cursos devem ser mais plenamente pesquisadas e documentadas. (IJTEM 16, p. 1, tradução nossa)[3]

[2] Sistemas de computação algébrica são programas que, em contraste com os programas de computação numérica, permitem cálculos matemáticos com expressões simbólicas ou, como são também chamadas, expressões algébricas (ALLEVATO, 2008).

[3] In contrast to the large body of research focusing on technology usage that exists at the secondary school level, there is a definite lack of parallel research at the tertiary, or post-secondary, level. However, Lavicza (2008b) highlights that university mathematicians use technology at least as much

Na procura por trabalhos similares aqui no Brasil, foi possível confirmar essa conjectura apresentada no artigo acima. Evidentemente essa afirmação decorre de uma busca realizada pelos principais bancos virtuais de dissertações dos últimos 10 anos da pesquisa em Educação Matemática no âmbito nacional. E refinando para as Integrais de Linha, afirmaremos modestamente que não encontramos. Desse modo, no campo da Educação Matemática, essa constatação pode ser vista como uma necessidade de investigação. Além disso, a expansão das vagas nas instituições federais de ensino superior apresenta-se como um campo vasto e fértil para pesquisas dessa natureza. Sobretudo com o advento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) que constituem uma região de investigação com muitas demandas e pouco investigado.

1.2 Uma Questão Pessoal

As reflexões da minha prática em sala de aula e o contato com diversas abordagens sugeridas por matemáticos, professores de matemática e educadores matemáticos me motivou pela escolha do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Desejava conhecer diferentes “formas” de trabalhar o conteúdo matemático em sala de aula, e como explorar de modo significativo estratégias acadêmicas sugeridas pelos teóricos nos modos de auxiliar nessas abordagens. E acreditava que nesse programa seria possível.

Comecei a conduzir as buscas de textos pela temática que envolvia as TIC’s e seus elementos afins além de refletir as minhas práticas em sala de aula por meio das discussões e partilhas com professores de matemática atuantes. Nos encontros semanais com professores do programa de mestrado e os contatos com diferentes textos de educadores matemáticos teóricos, minhas inquietações refinavam-se por meio da passagem nesses canais recheados de teorias epistemológicas e cognitivas.

---

as school teachers, and that the innovative teaching practices involving technology that are already being implemented by mathematicians in their courses should be more fully researched and documented.

A experiência como professor foi sempre ‘mutável’, no que diz respeito às abordagens em sala de aula. Ora aderindo a uma metodologia específica, ora defendendo e atuando de acordo com a turma e o nível escolar. E compartilhando essas práticas com outros professores durante as disciplinas do mestrado foi possível enriquecer essas visões.

O processo de reflexão no compartilhamento de ideias favorece o olhar para as comunicações envolvidas na sala de aula, a prática e demais observações no reconhecimento de processos favoráveis à aprendizagem. Dessa forma, era possível discutir e refletir acerca de pontos que, hoje, acredito serem fundamentais para um ensino que visa à aprendizagem.

No fim dos encontros, saia sempre mais criterioso e identificava mais precisamente alguns fatores condicionantes de uma aprendizagem mais significativa no contexto de sala de aula. E então eram geradas ações mais conscientes nas aulas e na forma de prepará-las incorporando outros recursos ou estratégias potencialmente favoráveis e adequadas à realidade da classe. Isso aconteceu com frequência e percebi o quanto foi importante dentro da pesquisa, já que as compreensões matemáticas dos estudantes é uma região de investigação extremamente fértil.

Há dez anos aproximadamente, tive um contato com softwares educacionais para o ensino de Matemática. Desde então, utilizei bastante em sala de aula, diferentes níveis e diferentes softwares. Entretanto, levantei muitas hipóteses a favor e contra sua utilização como mediador de atividades matemáticas procedimentais ou no favorecimento do aspecto visual de alguns objetos matemáticos. Não tínhamos embasamento teórico para a criação de possibilidades pedagógicas para sua utilização. Logo, desejava me fundamentar, de forma que pudesse sentir mais conforto na preparação de aulas integradas a um software.

1.3 Encontrando a Educação Matemática

Por um determinado tempo na minha graduação, frequentei disciplinas da modalidade de bacharelado, e também de licenciatura. No entanto, num momento do curso foi necessário optar por uma das duas. Escolhi, então, continuar na licenciatura. O objetivo era concluir a graduação e, em seguida, começar a trabalhar. Na verdade, pelas reflexões daquele momento, pensei na possibilidade de ser professor de matemática de pessoas que não tinham condições de frequentar escolas particulares as quais, historicamente, no Brasil, são mais estruturadas. Queria, portanto estudar muito para trabalhar com essas pessoas. Dar melhores oportunidades a elas. Havia no meu pensamento um desejo de ajudá-las educacionalmente.

A partir daí, direcionei todos os meus esforços para ser um excelente professor de matemática de pessoas mais “carentes”, apesar de ainda não ter muita clareza da postura mais adequada em sala de aula. Para tanto, procurei participar de seminários, pequenos grupos de reflexão e busquei mais leituras a respeito do ensino no Brasil. Porém, foi justamente quando entrei numa classe de alunos jovens e adultos como professor que pude confirmar a pertinência daquelas questões que me inquietavam. Esse processo aconteceu nos dois últimos anos de minha graduação, quando foi necessário conciliar meu tempo de estudo com o trabalho para suprir as dificuldades financeiras vividas.

Durante minha experiência em sala de aula com jovens e adultos, compreendi um pouco mais algumas realidades sociais e consegui, inclusive, questionar minhas posturas na abordagem do conhecimento matemático em sala de aula. Eu tinha que fazer um “esforço” muito grande para apresentar a matemática escolar para aqueles alunos. A minha linguagem e as maneiras de introduzir um assunto eram realizados segundo “minhas” convicções. Percebi que, quanto mais eu apostava na minha forma de abordar um assunto, mais difícil ficava o trabalho na sala de aula. Sempre voltava para casa com certa angústia. Durante essas experiências, desejei aprofundar qualitativamente nessa pesquisa e foi o que, essencialmente, despertou o meu interesse por um trabalho realizado na especialização em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. E toda reflexão a respeito da Educação de Jovens e Adultos (EJA) era estendida e adequada para as abordagens nas outras modalidades nas quais trabalhava nessa época, a saber, 5ª série (atual 6º ano) e 6ª série (atual 7º ano) de uma escola estadual.

E posso resumir a minha pesquisa realizada afirmando que o trabalho da educação na sociedade é uma tarefa essencialmente política e emergencial do ponto de vista cultural.

No final de 2005, fui para outra região de Minas Gerais, para trabalhar numa rede de escolas particulares instaladas em oito cidades vizinhas. Apesar dessa mudança, a experiência da reflexão através do aprofundamento na Educação Matemática além da prática reflexiva realizada na EJA gerou em mim o desejo de trabalhar os conteúdos de formas diferentes, a fim de contemplar a aprendizagem do estudante, inclusive no pré-vestibular, no qual infelizmente sentíamos mais engessados pelo conteúdo programático. Certamente não saberei mensurar o quanto acertei ou errei na direção desse objetivo exposto, porém acredito que as análises realizadas após as aulas e durante esse tempo geraram em mim críticas cada vez mais refinadas a respeito de minhas abordagens. E durante todas as primaveras desses anos atuantes como professor, carregava os espinhos das dificuldades dos alunos.

1.4 Encaminhando a Pesquisa

No primeiro semestre de 2011, entrei para o quadro efetivo do IF Sudeste de Minas Gerais no campus de Juiz de Fora. E nesse período, comecei a lecionar Estatística Aplicada para um curso técnico, Geometria Analítica e Cálculo III para o curso de Licenciatura em Física. Um novo desafio, pelo menos no que diz respeito ao nível escolar. Na ementa de Cálculo III havia a proposta de apresentar a Integral de Linha de Campos Vetoriais. E foi por meio desse tópico quase no final do semestre letivo da referida disciplina que me ocorreu o questionamento que nortearia minha pesquisa.

As questões relativas à aprendizagem dos estudantes vividas até esse momento prevaleceram. Nesse caso num outro nível escolar, mas ainda sim a existência da necessidade de investigar qualitativamente dentro da Educação Matemática. Pensava o seguinte: A Integral de Linha de Campos Vetoriais é compreensível pelos estudantes? É possível pensar numa estratégia alternativa de ensino para facilitar essa compreensão? Um software integrado ao ensino pode favorecer o enriquecimento dessas compreensões?

As hipóteses implícitas nas questões prévias dessa pesquisa, juntamente com o aprofundamento no grupo de estudos acerca do Pensamento Matemático Avançado (PMA)[4] levaram-nos a adotar a teoria das Imagens de Conceitos (TALL e VINNER, 1981) e o processo de visualização proposto pelo PMA como fundamentação teórica na nossa pesquisa. E então foi possível elaborar uma pergunta-diretriz da qual tomamos posse para investigar:

"Que imagens e definições de conceito[5] referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretada fisicamente como Trabalho Realizado, podem ser percebidas na resolução de tarefas utilizando TIC's, por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral III?

1.5 Estrutura da Dissertação

A dissertação é composta de 7 (sete) capítulos: o primeiro trata da presente Introdução. Em seguida, apresentamos o capítulo 2 como uma análise de trabalhos afins e o estado da questão de investigação, que trata essa pesquisa, fazendo um diálogo com pesquisas que discutem os temas de interesse.

No capítulo 3, apresentamos o referencial teórico introduzindo ao leitor, com as nomenclaturas e características próprias dos especialistas.

O capítulo 4 apresenta algumas definições matemáticas e suas relações com a Física como parâmetros matemáticos para análise dos dados.

No capítulo 5, descrevemos a metodologia utilizada, retomamos a questão de investigação e detalhamos os procedimentos adotados para a coleta de dados.

A análise dos dados, discussões e síntese dos resultados estão explicitados no capítulo 6 estabelecendo uma diálogo dos dados com o referencial.

E no capítulo 7, fazemos algumas considerações finais apontando algumas perspectivas da pesquisa.

---

[4] Advanced Mathematical Thinking (AMT).

[5] Utilizamos a tradução de *concept image* e *concept definition* sugerida por Giraldo (2004).

2 – CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA

Nesse capítulo serão relatadas algumas pesquisas já realizadas em Educação Matemática objetivando a contextualização desta investigação. Procuramos trabalhos que tratassem as Integrais de Linha como objeto matemático de ensino num ambiente computacional desconsiderando, portanto, nesse universo, pesquisas nas quais o foco era o objeto matemático técnico (GIRALDO, 2002). Procedendo assim, no campo da Educação Matemática, não encontramos pesquisas com tal tema específico. Evidentemente, essa afirmação decorre de uma busca realizada pelos principais bancos virtuais de dissertações dos últimos dez anos da pesquisa em Educação Matemática no âmbito nacional. Mesmo num universo internacional mais abrangente das pesquisas em Educação Matemática Superior, constatamos, pelo menos nos quais tivemos acesso, um número escasso de trabalhos em Educação Matemática Superior, que envolvesse Integral de Linha de Campos Vetoriais ou mesmo Análise Vetorial. Existem trabalhos em ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Mas a maior parte é em conteúdos iniciais.

Iniciamos, então, o trabalho de procura delimitando alguns pontos que estariam relacionados com a pesquisa em questão. A intenção era identificar elementos que pudessem ir ao encontro de algumas questões dessa pesquisa. Entretanto, ocorria algo mais, à medida que trabalhávamos na busca, leitura e reflexão de algumas pesquisas já realizadas, esse processo nos auxiliava de algum modo na prática em sala de aula.

Todo o trabalho inicial só foi possível graças à potencialidade da internet, ferramenta que muito ajudou no processo de busca. Sobretudo, no acesso às pesquisas internacionais. A rapidez de acesso que essa ferramenta proporciona pode ser confirmada na descrição de Masetto (2008, apud MARIN, 2009),

> [...] o surgimento da TIC descortinou novos horizontes de intercomunicação entre pesquisadores das mais diferentes áreas do saber e novos métodos de pesquisa, permitindo que com a velocidade e o imediatismo de seu acesso possamos afirmar que as bibliotecas de todos os países estão

> abertas a um simples toque de botão de um computador, assim como a Wikipédia, os sites, a Internet. Com simples e-mails fazemos contatos imediatos com pesquisadores e especialistas podendo dialogar com eles sobre suas últimas publicações (MASETTO, 2008, p. 4).

Nesse universo, nos deparamos com inúmeros trabalhos. A leitura e reflexão desses trabalhos despertavam um desejo crescente pela pesquisa, à medida que o tema se dispersava. Cada trabalho que evidentemente nos inquietava, nos tornava interessados por aquele problema, e analisávamos outros trabalhos que tratavam de questões similares. E muitos trabalhos foram extremamente enriquecedores para nossa prática docente. As leituras, de fato, iam ao encontro das inquietações vividas em sala de aula e respondiam questões que já havíamos feito ou até mesmo outras que não tínhamos pensado e começava a perceber nas aulas. Foi um processo que começou em março de 2011 e foi sofrendo uma metamorfose, na medida em que entrávamos em contato com os diversos trabalhos.

Após a realização das primeiras disciplinas do mestrado, o envolvimento com uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do curso de licenciatura em Física, tornou-se um desdobramento mais refinado de um tema que poderia gerar uma investigação relevante na Educação Matemática superior e, portanto, contribuiria qualitativamente para o corpo de pesquisas na Educação Matemática. Esse tema passava pela necessidade de investigação das compreensões matemáticas de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral.

2.1 Educação Matemática e TIC's: Reportando Alguns Trabalhos

Um trabalho que traz alguns elementos positivos para nossa investigação envolvendo tecnologias da informação e da comunicação em Educação Matemática foi desenvolvida por Benedetti (2003), o qual analisou como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos dentro de um coletivo pensante[6] formado por estudantes, mídias e pesquisador. O autor propõe um trabalho de

[6] Pesquisa realizada a partir das ideias de Borba e Villarreal (2005) de que o conhecimento é produzido pelo coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

abordagem de funções contemplando as representações múltiplas por meio de softwares gratuitos. Realizou uma sequência de encontros com a presença de duplas de estudantes, o computador com o software Graphmatica e o pesquisador.

Em observações conclusivas do trabalho, Benedetti (2003) relatou como a articulação com o software dinamizou a produção de significados matemáticos relacionados à coordenação entre as representações algébricas, tabulares e gráficas. Os alunos puderam trabalhar com o mesmo objeto matemático e com diferentes representações.

Entende-se, de acordo com os resultados da pesquisa de Benedetti (2003), a importância da manipulação de diferentes representações matemáticas. E nesse caso, o recurso computacional teve um papel complementar na forma de coordenar as representações. De acordo com Benedetti (2003), múltiplas representações fornecem mais subsídios, para que o estudante possa estabelecer suas próprias conjecturas e assim dialogar melhor com o objeto matemático, a fim de produzir uma compreensão própria desse conhecimento apresentado. E então, o estudante coordena melhor suas estratégias nas resoluções de problemas mais complexos.

O resultado desta pesquisa (BENEDETTI, 2003) disponibiliza à comunidade escolar, especialmente aos professores de Matemática, um conjunto de sugestões contendo a seleção de boas práticas para uso do software educacional, como ferramenta de apoio à aprendizagem, oriunda das lições de professores usuários de tecnologia na sua prática docente.

Pudemos constatar no levantamento bibliográfico que a maior parte das pesquisas envolvendo TIC's e Educação Matemática desenvolve-se com conteúdos matemáticos do currículo da Educação Básica brasileira. E, de certa forma, temos um considerável acervo de trabalhos interessantes e de qualidade. Sobretudo de apoio didático para tópicos específicos da Matemática da Educação Básica e de referência para estratégias de ensino abrangendo esse currículo matemático além de potenciais geradores de novas pesquisas. O que falta talvez sejam políticas de incentivo ao acesso dessas pesquisas pelos professores atuantes, a fim de contribuir para reflexões acerca de suas práticas e favorecer assim atitudes de mudança, que sejam lidos, refletidos e dentro das possibilidades aplicados de forma responsável e consciente.

Diferentes das mídias não dotadas de elementos potencialmente interativos, o computador auxilia o estudante na busca de estratégias de resolução de problemas usuais, ou situações mais complexas. O ambiente interativo constituído pelos estudantes e computador gera posturas mais dinâmicas e colaborativas facilitando a comunicação entre aquele que propõe a atividade, o objeto matemático e o aprendiz.

A revolução tecnológica pela qual estamos passando sugere uma mudança em todo o sistema educativo. E o conhecimento matemático pode ser favorecido por essa revolução, sobretudo, quando se fala em integração das TIC's nas Escolas. Como destaca D'Ambrosio (1996, apud AGUIAR, 2008),

> Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 80).

A implementação de laboratórios de informática nas instituições de educação não deve ser, nesse ponto de vista, a única medida para transformação no sistema educacional. Certamente é um fator também decisivo nesse processo. Mas a escola não deve pensar em utilizar a sala de informática simplesmente como uma ferramenta educacional, pois os aparelhos interativos, o computador, as TIC's não são para os jovens instrumentos como são para os adultos de hoje. Para os jovens são os seus universos, pois evidentemente, essas tecnologias não substituem o lápis e o papel, mas possibilitam novas formas de registrar, representar e refazer. As TIC's não são em si a solução para uma educação de qualidade e nem uma única estratégia de ensino capaz de tornar a aprendizagem eficaz. Portanto, o planejamento para a inserção desses ambientes se faz necessário.

> Como em outras épocas, há uma expectativa de que as novas tecnologias nos trarão soluções rápidas para o ensino. Sem dúvida as tecnologias nos permitem ampliar o conceito de aula, de espaço e tempo, de comunicação audiovisual, de estabelecer pontes novas entre o presencial e o virtual, entre o estar juntos e o estarmos conectados a distância. Mas se ensinar dependesse só de tecnologias já teríamos achado as melhores soluções há muito tempo. Elas são importantes mas não resolvem as questões de fundo. Ensinar e aprender são desafios maiores que enfrentamos em todas as épocas e particularmente agora em que estamos pressionados pela

> transição do modelo de gestão industrial para o da informação e do conhecimento. (MORAN, 2000, p.137)

Mas como potencializar diferentes compreensões matemáticas em uma sala de aula na qual possui acesso às TIC's? Embora tenhamos o conhecimento de que há diferenças de infraestrutura nas diversas instituições brasileiras de ensino, a resposta considera a sala num contexto que seja possível trabalhar com as TIC's.

O processo de informatização computacional tem acontecido de forma veloz, e por isso é possível acreditar e participar ativamente da transformação das instituições incluindo o trabalho com as TIC's no planejamento do curso a ser mediado pelo professor. Embora existam diversas pesquisas com resultados favoráveis à utilização dessas TIC's como ferramentas potentes, pretendemos propor reflexões na direção da criação de novas possibilidades.

Marin (2009) fez uma pesquisa de caráter investigativo quanto a utilização das TIC's no ensino superior, e precisamente buscou compreender como os professores de matemática do ensino superior estão usando TIC na disciplina de Cálculo. Ele transcreve várias falas de professores em sua análise realizada após as entrevistas em diversas instituições de ensino superior, relatando problemas como a escassez de equipamentos, de pessoas especializadas para o suporte técnico e pedagógico, a falta de funcionários, além de turmas com uma grande quantidade de alunos (MARIN, 2009). São problemas reais e que podem ocorrer em qualquer ambiente informatizado, mas que configura certo bloqueio, para que a adoção por alguns professores seja concretizada.

Em contrapartida, diversos professores entrevistados relataram a impossibilidade de certas atividades serem trabalhadas em ambientes sem a presença das TIC's (MARIN, 2009). Ele afirma ainda, em sua análise, que a escolha do uso de tecnologias está ligada ao fato de terem que estar em consonância com as mudanças na sociedade, propor abordagens pedagógicas alternativas e muitas vezes para manterem o emprego, no caso das particulares.

Marin (2009) destacou duas tendências envolvendo a natureza das aulas planejadas pelos professores: trabalhos colaborativos e trabalhos individuais. Será possível afirmar que nas instituições ainda há o predomínio das salas de informática com um computador para dois alunos somente? Não foi encontrado nada que afirmasse tal fato, mas é necessário considerar essa situação já que existem atividades potencialmente estruturadas para serem realizadas de forma colaborativa ou coletiva, mas também é preciso propor tarefas individuais para contemplar as diversas naturezas das atividades que compõem um curso. Marin (2009) faz um levantamento de trabalhos, isto é, dissertações e teses que tratam do tema afim e se depara com muitos trabalhos envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral como objeto matemático na pesquisa, destacando que esse fato se deve ao fracasso na aprendizagem da disciplina, isto é, os altos índices de reprovação do CDI nas instituições brasileiras e estrangeiras. Assim, os trabalhos vão sugerir modos diferentes de pensar as abordagens tradicionais vigentes por meio da inserção das TIC's.

Algumas justificativas dos professores entrevistados na pesquisa descrevem o maior potencial de aprendizagem apresentado pelas atividades mediadas por TICs. Além disso, destacaram a seguinte lista de contribuições: o ganho de tempo em contas; a autonomia e senso crítico do aluno; a melhoria da relação professor-aluno; melhor compreensão do conteúdo; mudança na maneira de explorar o conteúdo; busca de novas descobertas; observação macro de propriedades e investigação diferenciada (MARIN, 2009). Mas também, chama a atenção para o fato de que usar TIC envolve medo e provoca incertezas, mas também envolve possibilidades ao caminhar em direção a uma zona de risco (MARIN, 2009). Silva (2009) afirma, corroborando com Penteado (2001), que engajar-se em trabalhos que fazem uso de tecnologia informática é como sair de uma zona caracterizada pelo conforto proporcionado pela previsibilidade e o controle da situação, para atuar numa zona de risco em que se faz necessária uma avaliação constante das ações propostas.

São muitas questões que antecedem a incorporação das TIC's numa aula. Os pressupostos epistemológicos do professor da disciplina serão, por exemplo, fatores determinantes no planejamento das aulas. Quando explicitamos a insegurança em conduzir os alunos numa aula integrada a uma TIC, estamos de certo modo querendo um controle maior do processo. Esse controle garante uma exploração qualitativa do ponto de vista das diferentes compreensões matemáticas? É necessário "orientar" as atividades como num "passo a passo"?

Alguns autores destacam a tendência do professor de evitar determinadas situações que o deixam numa zona de risco, como destaca Penteado (2001). Para Penteado (2001) a incerteza e a imprevisibilidade geradas em num ambiente informatizado possibilitam o desenvolvimento do aluno, do professor e de situações de ensino e aprendizagem. Além disso, uma zona de risco possui a potencialidade de provocar mudanças e impulsionar o desenvolvimento de todos os envolvidos. Os trechos acima transcritos foram retirados de um artigo publicado no I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – 2009, como fruto de uma pesquisa na qual pretendia verificar como um grupo de estudos formado por futuros professores de matemática se apropria de um programa de geometria dinâmica de forma a inseri-lo em sua prática docente e quais as potencialidades.

Silva e Penteado (2009) buscaram uma análise de elementos do trabalho docente que poderiam potencializar o trabalho com geometria dinâmica, através do software Geogebra, numa perspectiva investigativa. Os autores trabalharam com um grupo de futuros professores de Matemática e analisaram como esse grupo de estudos se apropriou do programa de forma a inseri-lo em sua prática docente, e quais as potencialidades que atribuem ao software. Foi uma pesquisa relevante para a pesquisa em andamento justamente por mencionar as potencialidades de se trabalhar com softwares em uma sala de aula. Evidentemente, seria necessário um aprofundamento nas questões da pesquisa, suas análises completas e ainda o relato dos futuros professores frente à possibilidade de planejar atividades com a utilização do Geogebra. Ressalta-se, entretanto, um caráter inovador nas pesquisas em tecnologias da informação e comunicação na educação: o fato de não ser um simples treinamento para a utilização do software, mas uma proposta de desenvolvimento de atividades alternativas em sala de aula. Nessa direção, apontamos a importância de pesquisas que analisam qualitativamente a integração de TIC's nas aulas de Matemática, sobretudo porque existem inúmeros softwares gratuitos que são dotados de diversos recursos matemáticos investigativos e, portanto, região de intensa reflexão das aplicabilidades, viabilidades e acessibilidades.

2.2 Educação Matemática no Ensino Superior e TIC's: Reportando Alguns Trabalhos

Um trabalho envolvendo TIC e conteúdos matemáticos avançados foi publicado no International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME) e que, segundo os autores, Buteau et al. (2010), tratou de um estudo piloto acerca da utilização de um Computer Algebric System (CAS) no ensino superior. O foco da pesquisa foi o ensino superior, e o objetivo foi apontar a importância de uma análise da utilização do CAS pelos professores, além de documentar práticas de ensino envolvendo as TIC's ambos no ensino superior. Para esse estudo-piloto foram analisados 204 trabalhos. Uma questão previamente identificada foi a existência de um contraste entre o grande corpo de investigação centrada sobre o uso dessas tecnologias no nível secundário em comparação ao superior.

Segundo a pesquisa, a maior parte dos trabalhos revisados envolvem Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. Além disso, esse artigo relelou algumas tendências no uso de CAS no ensino superior e apontou alguns benefícios decorrentes da sua utilização. Podemos destacar, por exemplo, a promoção de uma maior compreensão da Matemática por meio de uma mudança fácil e rápida entre diferentes representações de objetos matemáticos, que foi facilitada pelo CAS, o apoio para o estudante alcançar e aprender de forma independente, além do aumento da motivação por parte do estudante. Destacam-se ainda, no artigo, outros benefícios como a promoção de ambientes de aprendizagem centradas na investigação, simulação, descoberta, produção de conjecturas e possibilidade de análise precoce de conceitos matemáticos por meio da exploração livre das ferramentas.

Segundo os autores, a integração do CAS no ensino e aprendizagem da matemática representa uma mudança natural considerando o futuro da educação matemática e as demandas e realidades da vida contemporânea. Apesar disso, muitos trabalhos revisados não se constituíram com dados suficientes para uma análise detalhada além de outros que apresentaram uma riqueza de ideias embora poucas possibilidades de difusão e mínimas considerações acerca de possíveis dificuldades. Os autores terminam destacando a necessidade de mais pesquisa em

Educação, com foco na integração de tecnologia da informação e comunicação na educação superior, pois acreditam no papel e a importância da tecnologia, tendo em vista o crescente poder computacional e a inovação tecnológica como ferramentas de aprendizagem.

Uma constatação, a partir dos dados desse artigo, foi a pouquíssima utilização ou integração de um CAS em Cálculo Vetorial. O que consideramos ser importante para a relevância de nossa pesquisa uma vez que desejamos investigar as compreensões matemáticas dos estudantes referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais em um ambiente no qual está presente um CAS.

As questões reveladas pelos autores e descritas acima geraram reflexões que tornarão relevantes na continuação da nossa investigação, sobretudo na possibilidade de conhecer como estão sendo trabalhadas as TIC's em sala de aula no ensino superior tanto no Brasil como no exterior, no caso do artigo analisado. Outro ponto relevante do artigo, refere-se ao apontamento de algumas tendências para a implementação de diferentes estratégias de ensino destacando posturas inovadoras que geraram elementos favoráveis a uma melhor compreensão de conceitos matemáticos pelos estudantes em sala de aula. É o caso de um trabalho analisado no qual a tarefa era uma espécie de modelagem matemática do cálculo da área de um território por meio das séries de Taylor, utilizando o software Maple[7]. Segundo Lavicza et al. (2010), essa seria uma postura inovadora.

Esse artigo, portanto, aponta elementos que favorecem a relevância da nossa questão de pesquisa dentro da Educação Matemática por justamente investigar novas potencialidades de exploração de um conteúdo matemático tradicionalmente trabalhado nos cursos das ciências exatas.

No que diz respeito à área da matemática pretendida por esta pesquisa e assim delimitando um pouco mais minhas leituras de trabalhos afins, destaco a dissertação de Miranda (2010), que buscou identificar alguns condicionantes do ensino e aprendizagem em sala de aula que pudessem conter possíveis respostas de como o uso de um software e de atividades elaboradas num ambiente computacional podem

[7] Maple é uma CAS comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos em duas ou três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário. Disponível em: <pt.wikipedia.org/wiki/MAPLE>

auxiliar a aprendizagem a partir de gráficos de superfícies em R^3. O autor utiliza como referencial a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2000, apud MIRANDA, 2010), elucidando as análises dos processos realizados pelos estudantes por meio de suas atividades e amparando a ideia de interação entre a estrutura de conhecimento específico já existente no aprendiz com uma nova informação obtida por hipóteses formuladas pelos estudantes por meio das visualizações facilitadas pelo software. Como o objeto matemático da pesquisa é próprio do ensino superior, o autor complementa sua fundamentação teórica e análise dos dados a partir dos estudos do Pensamento Matemático Avançado e destaca características comuns do primeiro referencial teórico com a teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981). Dessa forma, consegue aliar elementos que convergem para possíveis análises dos fatores que atuam no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. A ideia da interatividade de conceitos novos e conceitos previamente familiares ao aluno junto com a análise de trabalhos do grupo PMA foram essenciais para a construção das questões de caráter cognitivo relacionadas com a disciplina.

O autor utilizou como metodologia os experimentos de ensino propondo atividades para uma turma de 14 estudantes matriculados numa turma de Cálculo Diferencial e Integral II, na qual o professor era o orientador da pesquisa. A partir de sua coleta pôde observar e identificar momentos e circunstâncias nas quais potencialmente ocorrem as interações entre conhecimentos novos e antigos ou de acordo com o PMA, encontros entre imagem conceitual e definição conceitual. Miranda (2010) destaca a partir de algumas atividades a tendência constante de um estudante priorizar uma única representação nos momentos de construção das hipóteses ou conjecturas. Percebemos, entretanto, que as atividades são ora de natureza algébrica ora de natureza geométrica, porém não há uma proposta entre as atividades realizadas que incorpore uma coordenação mais explícita e investigativa entre esses diferentes aspectos de um mesmo objeto matemático. Portanto, corroboramos com Giraldo (2002) ao defender a exploração de diferentes aspectos matemáticos de um conceito:

> Cada representação põe em evidência certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo oculta outros. Tall [18] afirma que a evidência em

> determinados aspectos e negligência de outros pode levar a atrofia dos aspectos negligenciados (GIRALDO, 2002, p. 2).

Certamente ao priorizar uma única representação, corre-se o risco de limitar os conceitos e talvez até reduzir as possibilidades do estudante de operar em contextos diferentes com o objeto de conhecimento.

Ainda na pesquisa de Miranda (2010), a visualização foi o fator que mais auxiliou os estudantes na elaboração de relações relevantes para responder as questões propostas. Ele destaca, entretanto, que ao propor uma atividade com exigências prévias de conhecimento como o caso de elementos de R^2 para estender para R^3, houve dificuldades. Para ele esses conflitos são justificados por Ausubel (2000) ao afirmar que a aprendizagem significativa depende em maior parte do aprendiz, ao estabelecer os vínculos e estratégias no intuito de compreender e relacionar a nova informação com os conhecimentos prévios ancorados na sua estrutura cognitiva considerando que esse conhecimento já exista. Evidentemente, esse conhecimento pode não existir.

A impressão e reação dos estudantes quanto à utilização do software foi revelada por Miranda (2010) ao afirmar que a utilização de um software matemático pode facilitar a aprendizagem significativa dos estudantes. Ele destaca ainda, por meio de depoimento dos estudantes, a possibilidade que esse ambiente dá aos estudantes de verificar ou comprovar as hipóteses e/ou conjecturas elaboradas por eles. Contribuindo, segundo o autor, para posturas mais explorativas e ativas.

A partir de experiências vivenciadas em sala de aula com a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e outras leituras, Miranda (2010) destaca em suas observações e convivências a contribuição do software para o desenvolvimento de habilidades na criação e manipulação de imagens virtuais que se assemelham com as imagens conceituais. E essas visualizações e manipulações contribuíram para a interação entre conhecimentos antigos e conhecimentos novos, gerando assim novas produções individuais dos estudantes. Foi o caso, por exemplo, das atividades que exploraram o caso de alguns gráficos familiares em R^2 esperados como conhecimentos prévios dos aprendizes com propostas de “imaginar” como seriam graficamente essas expressões representadas num sistema de coordenadas com mais um eixo agora em R^3.

Embora diversos aspectos dessa pesquisa sejam respaldados pela Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel (2000, apud MIRANDA, 2010), uma questão emergiu das leituras e análises desse trabalho: A aprendizagem significativa depende da competência do aprendiz em conseguir estabelecer as interações? No texto de Miranda (2010), é possível observar uma afirmação no sentido de haver uma dependência dessas competências. Entretanto, como mensurar essa competência? E ainda, o que quer dizer quando se afirma que o aprendiz deve conseguir essa conexão para aprender? De todo modo, é uma pesquisa importante para nossa investigação em questão considerando os referenciais teóricos e principalmente os estudos feitos por pesquisadores do Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991-2008).

Este trabalho (MIRANDA, 2010) possibilitou-nos a reflexão de importantes aspectos do tratamento do objeto matemático do ensino superior em sala de aula ao incorporar uma TIC, como descrito acima. Além disso, favoreceu um conhecimento maior das possibilidades de leitura do referencial teórico em questão envolvendo as TIC's. A partir das ideias de Tall & Vinner (1981) e suas caracterizações dentro da pesquisa de Miranda (2010) foi possível consolidar uma fundamentação da qual tomaremos como aporte na nossa investigação.

A utilização de um software em sala de aula, considerando a grande heterogeneidade de estudantes presentes nas nossas classes, pode configurar um grande risco no que tange o número de adeptos e não adeptos àquela estratégia. A partir dessa análise, e considerando a pesquisa de Miranda (2010), percebemos a importância de reconhecer as diversas estratégias de ensino e aprendizagem já pesquisadas há algum tempo confrontando-as com as novas propostas a fim de encontrar elementos favoráveis à construção de modelos adequados a determinadas turmas.

A manipulação das diferentes representações de um mesmo objeto matemático auxilia numa melhor compreensão do conteúdo e consequentemente na aprendizagem do estudante (BARBOSA, 2009). Mas quais as possibilidades de se trabalhar essas diferentes representações num ambiente computacional?

O trabalho de Barbosa (2009) vai ao encontro dessa questão e, portanto, ajuda-nos a analisar uma nova estratégia de ensino envolvendo TIC e ao mesmo tempo revela alguns apontamentos interessantes para nossa investigação.

Barbosa (2009) investigou como o coletivo formado por alunos-com-tecnologias produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica. A tese é baseada na noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídias[8], no qual o ser humano transforma e é transformado pelas mídias em um processo interativo. Os dados foram coletados com alguns alunos ingressantes no curso de Matemática da UNESP - Rio Claro a partir cinco episódios que apresentaram subsídios para responder as questões. Tais episódios indicam que a produção do conhecimento dos alunos envolvidos, acerca de função composta e regra da cadeia, ocorreram por meio de elaborações de conjecturas, formuladas durante o processo de visualização potencializado pelas TIC. E algumas dessas conjecturas foram confirmadas ou refutadas levando-se em conta o entrelaçamento das representações múltiplas, que permearam todas as atividades, e um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

As representações múltiplas são defendidas por diversos autores (ALLEVATO, 2007,BORBA & SCHEFER, 2004, VILLARREAL, 1999, apud BARBOSA, 2009), os quais têm indicado a importância das relações entre os aspectos algébricos, gráficos e numéricos podem na produção e compreensão de conceitos e suas aplicações, sugerindo que o papel das habilidades algorítmicas seja deixado a cargo dessas TIC. A autora corrobora com Ausubel (2000, apud BARBOSA, 2009), afirmando que novas ideias matemáticas são mais compreensíveis se o estudante pode conectá-las ao seu conhecimento prévio.

Segundo Barbosa (2009), é possível afirmar que produção do conhecimento matemático está intrinsecamente conectada à exploração das representações múltiplas e ao trânsito entre elas. As TIC's potencializam essa transição e modificam o modo de se produzir o conhecimento. Para Steinbring (2005, apud BARBOSA, 2009), o ensino e da aprendizagem da Matemática pode ter distintas construções e interpretações matemáticas, considerando que o conhecimento matemático é socialmente construído. Essas diferentes formas e interpretações geradas pelas representações múltiplas são elementos que contemplam a comunicação matemática efetiva no universo da sala de aula.

[8] Para Borba e Villareal (2005), o conhecimento é produzido por um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

Barbosa (2009) descreveu uma série de elementos favoráveis à abordagem por meio de um software das múltiplas representações. Esses elementos foram observados nas escritas dos aprendizes quando, por exemplo, formulavam conjecturas decorrentes das discussões nos momentos de transição entre essas representações. As respostas rápidas geradas pelo software facilitaram a elaboração das escritas que ora eram refutadas ora eram confirmadas. Outras vezes, ideias ou crenças foram desconstruídas por meio de comparação entre os gráficos com as suas expressões algébricas ou, quando envolvia uma generalização da notação matemática que os alunos estavam acostumados a manipular.

Segundo Barbosa (2009), o software Winplot possui ferramentas bem dinâmicas e que foram exploradas em suas atividades, gerando assim experimentações das quais desencadearam diversas interpretações de padrões além de possibilitar ligações de propriedades matemáticas estudadas na ocasião com outras das quais os alunos ainda não tinham conhecimento. Outra observação foi a possibilidade, a partir das atividades e pelo software winplot, do aprendiz relacionar o tópico abordado com um conhecimento prévio, interligando-o com outros tópicos de diferentes disciplinas, gerando uma competência característica da interdisciplinaridade.

Foi possível, segundo Barbosa (2009), destacar momentos nos quais ocorreu a produção do conhecimento matemático como nas discussões com o colega no momento da realização da atividade e no processo de interpretação individual, expresso na forma oral, na forma escrita, ou na ação de trabalhar com o computador. Outro ponto interessante observado foi à predominância da escolha da abordagem algébrica no modo de expressar dos alunos. Segundo a autora, essa observação revela a importância de se trabalhar com as diversas representações possíveis de um mesmo conteúdo matemático desde a educação básica.

A produção do conhecimento matemático se constitui por um coletivo que envolve alunos e professor, representações matemáticas, símbolos, gráficos, números e pelas tecnologias intelectuais, como a oralidade, a escrita e a informática, caracterizando um coletivo pensante (BARBOSA, 2009). Desse modo, entendemos que seja razoável apresentar ao estudante diversas representações a fim de auxiliar a construção do conhecimento. Para a efetivação desse processo, a inserção das TIC’s nas aulas por meio de softwares facilita a geração dessas múltiplas representações tornando mais ágil as transições entre elas.

De acordo com a pesquisa de Barbosa (2009) podemos afirmar que as TIC's, sendo bem empregadas, são ferramentas potencialmente geradoras de novas estratégias de ensino, sobretudo nas diversas possibilidades de exploração dessas múltiplas representações que um software matemático, em geral, possui. Além disso, contribui para evitar o excesso ou exclusividade de uma única representação.

Embora os trabalhos acima apontem pontos positivos na implementação das TIC's na educação, certamente como parte de um processo comunicativo educacional, essas TIC's são constituídas de possíveis limitações.

Giraldo (2004) discutiu a partir de atividades organizadas e aplicadas a estudantes do Cálculo Diferencial I as potencialidades das limitações das descrições computacionais, associadas com descrições de conceitos para a derivada. O autor conceitua uma *descrição* como qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico que guarde limitações intrínsecas em relação à definição formal correspondente, e conflito como uma situação de confusão gerada por uma aparente contradição associada a uma descrição para um conceito matemático (GIRALDO et al., 2002).

Giraldo (2004) em sua tese intitulada "Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada" investigou diversas dificuldades relativas ao conceito de derivada, chegando a uma conclusão prévia de que a definição formal de derivada por meio de limite ainda é a ideia menos acessível à intuição humana. E então desenvolveu a partir daí uma forma de abordar a derivada baseada na ideia de raiz cognitiva.

A raiz cognitiva seria um conceito já familiar do estudante para a introdução do novo conceito. O autor utiliza a retidão local como uma raiz cognitiva para o conceito de derivada. Essa ideia está baseada na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando olhado de perto.

Giraldo (2004) centralizou sua investigação e análise no papel pedagógico das limitações das descrições computacionais para o conceito de derivada e dos conflitos teóricos-computacionais associados. Sua questão central é: "Em que situações limitações de descrições computacionais podem promover um efeito de expansão das imagens de conceito de derivada?". E assim realiza diversas reflexões acerca dessas possibilidades contribuindo com apontamentos relevantes para nossa investigação.

O trabalho de Giraldo (2004) foi baseado nas reações dos estudantes ao trabalhar com descrições computacionais para derivadas e nos conceitos relacionados de limite e continuidade, inseridos num corpo de atividades determinadas. É importante destacar que sua investigação não se restringiu somente na compreensão dos processos cognitivos mas nas especificidades desse contexto pedagógico nos quais estão incorporados as descrições computacionais. Giraldo (2004) destaca que não pretendia sugerir uma melhor proposta didática para o ensino de derivada mas uma concepção alternativa do conceito de derivada analisando pedagogicamente sua adequação no ensino. As questões foram investigadas segundo os objetivos do ensino de matemática e a delimitação do objeto ensinado (GIRALDO, 2004).

Uma constatação da pesquisa de Giraldo (2004) , que devemos destacar é a de que não basta saber da existência das limitações dos computadores, pois muitas vezes essas limitações são atribuídas ao usuário fazendo da máquina um verificador de verdades matemáticas. De outro modo, devemos, segundo o autor, vivenciar os conflitos emergentes e utilizá-los para possíveis expansões de ideias matemáticas. As abordagens com estas orientações podem atuar de forma efetiva nas imagens de conceito dos estudantes e reconstruindo não só as concepções dos objetos matemáticos, mas as concepções da própria atividade de aprender (GIRALDO, 2004).

Ressaltamos aqui a importância da teoria das imagens de conceitos em trabalhos de Educação Matemática, uma vez que, ela distingui o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico. Segundo Giraldo (2004):

> A teoria de imagens de conceito distingue o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico ao estabelecer o enriquecimento da imagem de conceito como objetivo do ensino e ao afirmar que a assimilação da estrutura formal é necessária, mas não suficiente para a aprendizagem. (GIRALDO, 2004, p. 204)

A tese de Giraldo (2004) aponta, de forma coerente com as pesquisas em Educação Matemática Superior, caminhos futuros pelos quais sejam possíveis investigar abordagens alternativas de ensino que privilegiem as diversas limitações do processo de aprendizagem como elementos potencializadores dessa dinâmica.

E a partir das colocações de Giraldo (2004) podemos enriquecer nossas considerações acerca da teoria das imagens de conceito, e elucidarmos outras considerando o computador também como elemento integrado à investigação na possibilidade da reconstrução ou evocação de porções de elementos da imagem de conceito.

Na verdade, está claro a partir dos trabalhos apresentados, que elementos como a simulação, a experimentação e visualização de um objeto matemático podem ativar diferentes partes da imagem de conceito. Além disso, o ambiente computacional pode favorecer essa abordagem por trazer ferramentas que geram esses objetos matemáticos, em vários aspectos, de forma ágil, e precisa na maioria dos casos.

E se pensarmos em conceitos matemáticos mais avançados, como a Integral de Linha da Campos Vetoriais? Quais elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais poderiam ser reconstruídas ou evocadas pela mobilização dos sujeitos em tarefas com diferentes estímulos?

Assim, desejando utilizar um software matemático no ensino e na aprendizagem do Integral de Linha de Campos Vetoriais, buscando incorporar a visualização gráfica na reconstrução do conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais como proposta em um curso de Cálculo e pretendendo observar e descrever os possíveis elementos da imagem de conceito e definição de conceito referentes a esse processo iniciei minha investigação que agora descrevo.

3 - PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO, VISUALIZAÇÃO E CONEXÃO COM O CAS

A participação nas disciplinas do programa de mestrado oportunizou o acesso aos textos do grupo de pesquisadores do PMA. As reflexões desse grupo permeiam os condicionantes que auxiliam na aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados apontando, inclusive, elementos relacionados à estrutura cognitiva do aprendiz no nível universitário. Assim, juntamente com o orientador dessa pesquisa, decidimos refletir sobre as teses e práticas do grupo PMA, pois nos parecia favorável às questões iniciais de nossa investigação, compreender melhor as suas discussões nas quais havia alguma convergência para uma região comum de investigação. As leituras poderiam nos ajudar a elucidar a investigação entorno das questões de interesse.

As discussões e reflexões relacionadas aos textos do grupo PMA foram decisivas para a apropriação do referencial como luz para nossas futuras análises da investigação de campo.

Desejamos nesse capítulo, expor as ideias teóricas que supomos ser suficientes e necessárias na condução de nossa investigação: imagem de conceito, relação entre imagem de conceito e definição de conceito e a relação do ensino de Cálculo Diferencial e Integral com as TIC's.

3.1 Pensamento Matemático Avançado

Pesquisadores (TALL, 1991-2008) há quatro décadas já realizavam trabalhos e, portanto, pesquisavam os fenômenos ocorridos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática do ensino superior, mais especificadamente os objetos do Cálculo Diferencial. Esse grupo denominou-se Advanced Mathematics Thinking (ATM) se propôs a partir de então focar suas investigações no campo da psicologia cognitiva inseridos na Educação Matemática, identificando principalmente elementos específicos do pensamento matemático avançado que constitui o conhecimento matemático universitário no ensino superior. O termo ATM será a partir daqui, referenciado como Pensamento Matemático Avançado (PMA) seguindo assim a tradução sugerida pela comunidade de Educadores Matemáticos.

Pretendemos expor algumas ideias segundo o sentido entendido por Educadores Matemáticos do Pensamento Matemático Avançado, a fim de identificar aspectos relevantes para os condicionantes do ensino e aprendizagem de uma sala de aula de Cálculo Diferencial, em particular num curso de licenciatura em Física.

De acordo com Olímpio (2006), o Pensamento Matemático Avançado aponta na direção do desenvolvimento de diferentes competências, a saber:

> Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991): pensamento este qualificado como um conjunto de competências complexas que se pretende que o(a)s aluno(a)s universitários demonstrem, dentre as quais se incluem desde a capacidade de representar objetos e situações matemáticas, relacionando essas representações e efetuando generalizações, até a de fazer conjecturas e de demonstrar teoremas. (OLIMPIO, 2006, p. 33)

Dreyfus (1991) afirma que o PMA pode ser constituído por meio da visualização, representação, indução, análise, o ato de conjecturar, sistematizar, abstrair e formalizar. Portanto, o pensamento matemático avançado deverá ser alcançado na medida do envolvimento do estudante no processo de reconstrução do conceito de um determinado objeto de conhecimento matemático.

Nesse contexto, destacamos a importância de elementos favoráveis à participação do aluno nas aulas como meio de se favorecer a possibilidade de geração das ideias matemáticas mais avançadas. Podemos então afirmar, que atividades matemáticas interativas, que envolvem o aluno como parte ativa do processo de ensino e aprendizagem, são fundamentais para facilitar a compreensão de um tópico mais avançado de matemática. Evidentemente essas atividades devem conter elementos motivadores que possam potencializar diferentes modos de se expressar do aluno, a fim de gerar diferentes quadros de ideias mentais e incitando assim a criatividade do estudante.

Tall (1991) complementa afirmando que o pensamento matemático avançado é reconhecido, a partir de processos criativos de recriação contrapondo-se à priorização absoluta de prova e dedução. É o caso das demonstrações em matemática, as quais para alguns matemáticos permitem que sejam realizadas por contradição e outros só a permitem pelo processo direto. Essas diferenças são refletidas em todos nós professores e estudantes que trabalham direta ou indiretamente com a matemática. Na verdade, segundo Tall (1991), os processos do pensamento matemático são radicalmente diferentes e, portanto, necessitam de tratamentos distintos. Ao trabalhar priorizando uma única abordagem do ponto de vista matemático, restringimos a aprendizagem assimilada por um grupo. Certamente numa apresentação dessa natureza muitos estudantes ficarão fora do contexto abordado uma vez que a sala de aula real é constituída de grupos heterogêneos do ponto de vista do histórico escolar.

Embora exista uma linguagem matemática dita universal, pelo qual matemáticos profissionais se comunicam, é necessário, numa sala de aula considerar outros contextos de produção de conhecimento.

> A matemática é uma cultura compartilhada e há aspectos que são dependentes do contexto. Por exemplo, um diferencial para o analista pode ser muito diferente do diferencial de um matemático aplicado, e um determinado indivíduo pode gerar atitudes diferentes a este conceito, dependendo se se trata de um quadro analítico ou aplicado. (TALL,1991, p. 6, tradução nossa)[9]

Vemos, portanto, segundo Tall (1991), que a visão de um determinado conceito matemático por parte de um grupo heterogêneo é sutilmente diferente por considerar nesse contexto nossas experiências anteriores (TALL, 1991). Devemos, portanto, considerar a prática de diferentes estratégias de ensino, bem como investigação de metodologias alternativas mais adequadas para contextos diferentes, sobretudo se

[9] Mathematics is a shared culture and there are aspects which are context dependent. For example, an analyst's view of a differential may be very different from that of an applied mathematician, and a given individual may strike up different attitudes to this concept depending on whether it is in an analytic or applied context.

tivermos no universo de uma mesma disciplina ministrada em cursos com propósitos diferentes como Licenciatura em Matemática e Engenharia. O modo como se deve apresentar o conceito de derivada para a turma de Engenharia deve ser norteado pela forma que um Engenheiro, em geral, trabalha com a derivada. E mesmo dentro da mesma turma importa considerar a possibilidade de abordagens distintas do mesmo conceito, a fim de potencializar a eficácia da assimilação do conteúdo.

> Assim, qualquer teoria da psicologia do pensamento matemático deve ser visto no contexto mais amplo da atividade mental e cultural. Não há um modo verdadeiro, absoluto de pensar sobre matemática, mas diversas maneiras culturalmente desenvolvidas de pensamento nas quais vários aspectos são relativos ao contexto. (TALL,1991, p. 6, tradução nossa)[10]

Os professores de matemática que trabalham no nível universitário possuem, em geral, uma maturidade do ponto de vista da Matemática lógica e avançada. E como afirma Tall (1991), ele não está imune aos conflitos internos de natureza compreensiva da matemática. Um ponto determinante para ele seria a estrutura cognitiva construída por meio de grandes porções de conhecimento em sequências argumentativas dedutivas. No entanto, é discutível o modo pelo qual o Matemático professor desloca essa forma lógica dedutiva de superar um conflito interno para o ensino numa sala de aula de Graduação constituída de estudantes que não possuem a experiência matemática do profissional.

Tall (1991) destaca um impasse comum entre matemáticos e educadores matemáticos, no que diz respeito ao domínio de uma Matemática avançada. Os matemáticos profissionais estão priorizando sempre os níveis mais elevados da Matemática, e consideram que os educadores matemáticos oferecem pouco neste nível. Segundo Tall (1991):

---

[10] Thus any theory of the psychology of mathematical thinking must be seen in the wider context of human mental and cultural activity. There is not one true, absolute way of thinking about mathematics, but diverse culturally developed ways of thinking in which various aspects are relative to the context.

> A primeira tarefa, portanto, é sensibilizar o matemático para os diferentes tipos de mente matemática que ocorrem, operando de maneiras bastante diferentes, e usar esse conhecimento para destacar as diferentes formas que a mente em desenvolvimento pode precisar como experiências adequadas no sentido de obter insights em processos matemáticos avançados. (TALL,1991, p. 4, tradução nossa)[11]

A matemática existe independentemente da mente do ser humano? Segundo Tall (1991), para a maioria dos matemáticos esse ideal platônico é verdade e, portanto, teorias como o da psicologia construtivista, na qual discuti como as ideias mentais são produzidas na mente de cada indivíduo pode se tornar um problema dialético para o matemático. E embora isso seja real, para os pesquisadores educadores matemáticos essa teoria dentro da psicologia do PMA pode elucidar significativamente os processos criativos realizados em sala de aula além de favorecer a compreensão de certas dificuldades sentidas pelos estudantes de matemática.

Tall (1991) faz algumas considerações acerca da teoria do psicólogo suíço Piaget destacando, no que diz respeito à teoria dos estágios um ponto discutível no que se refere ao ato de estancar grupos de estudantes de mesma faixa etária em determinados limites cognitivos, afirmando haver poucas operações cognitivas disponíveis em cada grupo capazes de potencializar a transição entre as fases. Na verdade, considera-se, segundo Tall (1991), a existência de inúmeros caminhos para a mudança de estágios e, portanto, para a efetivação da transição do PMA é necessário que outros elementos sejam identificados, a fim de contemplar o complexo processo de mudança desse pensamento.

Apesar da pertinência da discussão acerca da teoria piagetiana numa pesquisa em Educação, sobretudo em Educação Matemática, não é de interesse da investigação realizada nessa pesquisa centrar a atenção nessa teoria. Apenas referenciá-la segundo os autores que constituem nossa fundamentação teórica.

Tall (1991) evidencia a necessidade de se construir um quadro teórico acerca do desenvolvimento cognitivo por meio de um aspecto valioso da teoria de Piaget: a

[11] The first task therefore is to sensitize the mathematician to the different types of mathematical mind that occur, operating in quite different ways, and to use this knowledge to highlight the different ways that the developing mind may need appropriate experiences to gain insight into higher mathematical processes.

transição. No nosso caso ressaltamos a ideia da transição do Pensamento Matemático Elementar para PMA. Na verdade, Tall (1991) destaca a ideia de Skemp (1979) na qual é evidenciada a distinção entre um caso de aprendizagem pela simples expansão da estrutura cognitiva e o caso no qual há um conflito cognitivo fazendo-se necessário uma reconstrução mental. E é neste processo de reconstrução que, em geral, são produzidas possíveis dificuldades próprias de uma fase de transição. Na teoria de Piaget os termos utilizados são assimilação e acomodação respectivamente aos dois processos de aprendizagem citados acima.

Dubinsky (1985, apud TALL, 1991), gerou informações valiosas da teoria piagetiana aplicadas à matemática universitária concentrando-se nas ideias acerca do processo da abstração reflexiva. A região de interesse do autor é, portanto, a forma como o indivíduo reflete sobre novos conhecimentos e reconstrói as estruturas cognitivas já existentes objetivando a aprendizagem do conceito por meio do processo de acomodação. Um dos problemas apontados por Tall (1991) está na possibilidade latente das novas ideias não serem satisfatoriamente acomodadas. Nesse caso alguns pesquisadores (CORNU,1983, BACHELARD, 1985) o chamam de obstáculos.

> Um obstáculo é uma parte do conhecimento; faz parte do conhecimento do estudante. Este conhecimento geralmente foi satisfatório numa época da resolução de certos problemas. É precisamente este aspecto satisfatório que tem ancorado o conceito na mente e fez um obstáculo. O conhecimento mais tarde revela-se inadequado quando confrontado com novos problemas e essa insuficiência pode não ser óbvia. (CORNU, 1983, apud TALL, 1991, tradução nossa)[12]

Portanto, vemos novamente de forma implícita a necessidade de se trabalhar com diferentes abordagens e diversos exemplos de naturezas distintas, a fim de amenizar a situação no momento da acomodação de novos conhecimentos. Se por exemplo, o indivíduo operava a maior parte de sua vida escolar utilizando uma abordagem única para funções, ele estará restrito àquela abordagem em momentos nos quais seja necessária a resolução de problemas diferentes daqueles

[12] An obstacle is a piece of knowledge; it is part of the knowledge of the student. This knowledge was at one time generally satisfactory in solving certain problems. It is precisely this satisfactory aspect which has anchored the concept in the mind and made it an obstacle. The knowledge later proves to be inadequate when faced with new problems and this inadequacy may not be obvious.

apresentados no passado. E ao reconstruir o conceito para resolução do problema ele pode se deparar com a restrição do conceito na sua estrutura cognitiva, e assim gerar um obstáculo no qual deverá superar de outras formas como uma nova assimilação do mesmo objeto matemático.

Para nós professores isso é recorrente nas ocasiões pelas quais apresentamos um objeto de conhecimento matemático para o aluno, pois 'naquela' aula está incorporada os pressupostos e concepções do conhecimento matemático existente. Portanto, concordamos com a afirmação de Tall (1991):

> Obstáculos decorrentes das profundas crenças sobre a matemática raramente são fáceis de apagar da mente. Todos nós carregamos mentalmente um saco de tais crenças, muitas das quais suprimem, mas não eliminam, quando confrontado com a lógica da matemática. Muitas vezes, o único traço de tal obstáculo é através de um sentimento de mal-estar quando há uma dedução lógica na qual não "se sente bem" (TALL, 1991, p. 11, tradução nossa)[13]

Se estamos refletindo sobre o PMA e, portanto, objetos matemáticos do ensino superior, é necessário uma discussão acerca de elementos que estão envolvidos direta ou indiretamente com esses conhecimentos, a saber, a intuição e o rigor. Tall (1989) afirma que os Matemáticos frequentemente sugerem que uma explicação intuitiva necessariamente carece de rigor. Pode existir uma pequena parcela de verdade nessa concepção, mas segundo o autor, a oposição extrema considerando a não co-existência pode ser falsa. Se concordarmos que existem modos distintos de processar informações as quais se alocam ou na parte esquerda ou direita do cérebro, segundo Tall (1989), as ações parecem acontecer de modo simultâneo, sugerindo assim uma tese de que a intuição é estruturada segundo um corpo histórico de exposição às diferentes experiências matemáticas. Nesse caso, se a educação do estudante foi expressivamente privilegiando o pensamento lógico então mais provavelmente suas ideias estarão incorporadas de soluções lógicas. E a

[13] Obstacles arising from deeply held convictions about mathematics are rarely easy to erase from the mind. We all carry with us a mental rag-bag of such beliefs, many of which we suppress, but do not eliminate, when faced with the logic of mathematics. Often the only trace of such an obstacle is through a sense of unease when there is a logical deduction that does not "feel right".

medida na qual acontece o crescimento do pensamento dos alunos, suas intuições mais formais também aumentam juntamente com as experiências. Isto é, pode-se afirmar que existem muitos tipos de intuições:

> Temos, então, muitos tipos de intuições, o primeiro, o apelo aos sentidos e da imaginação; os próximos, generalização por indução, copiado, por assim dizer, a partir dos procedimentos das ciências experimentais, finalmente temos a intuição do número puro ... (POINCARÉ, 1913, p. 215, apud TALL, 1989, P. 14, tradução nossa)[14]

Podemos conversar, portanto, a respeito da possibilidade de uma intuição mais sofisticada, resultante de imagens de conceitos refinadas incluindo assim as imagens mentais da lógica e dedução (TALL, 1989). Logo, os aspectos da lógica também podem ser abordados por meio de elementos mais intuitivos. O que faz com que a intuição e o rigor se complementem num ciclo de atividades mentais geradoras de elementos cognitivos responsáveis pelo crescimento do pensamento matemático avançado. Tall (1989) vai inclusive ressaltar a importância desse desenvolvimento intuitivo lógico refinado para os pesquisadores da educação matemática avançada.

É necessário ainda refletir, segundo Sawyer (1987, apud TALL, 1991), sobre a possibilidade de utilizar a intuição para uma prova matemática. Não é salutar privilegiar um aspecto ou natureza de abordagem de um objeto matemático. É necessário, ao contrário, ter clareza dos objetivos pedagógicos e científicos dentro do contexto da turma na qual está sendo apresentados ou reconstruídos os objetos de conhecimentos. Assim, cada estudante e certamente a turma na qual trabalhamos terá um sentimento maior de pertença e, portanto será mais perceptível a noção de fazer parte do processo. O que implica um envolvimento maior facilitando a aprendizagem. Além disso, os conceitos baseados nas intuições e nas experiências poderão passar, depois de certo tempo, para um rigor com definições

[14] We then have many kinds of intuition; first, the appeal to the senses and the imagination; next, generalization by induction, copied, so to speak, from the procedures of the experimental sciences; finally we have the intuition of pure number...

formais e deduções lógicas. Dessa forma, os objetos de conhecimento poderão permanecer na mente do aprendiz por meio de experiências prévias que poderão se tornar conflitos cognitivos e atuar como obstáculos didáticos e epistemológicos para a aprendizagem (TALL, 1992).

Embora seja necessário tomar essas posturas de acordo com os objetivos de um curso ou disciplina acadêmica, considerando seu contexto, não é suficiente privilegiar os objetivos recaindo exclusivamente sobre exigências de uma demanda de mercado profissional. Portanto, deve-se trabalhar de forma harmoniosa com a intuição e a lógica matemática dentro de um contexto acadêmico, seja ele de formação de professores de Matemática ou um curso de serviço.

Alguns pesquisadores (REIS, 2001; FROTA; COUY, 2007, apud MIRANDA, 2010), investigaram essa relação entre intuição e rigor no ensino de Cálculo. Reis (2001) acredita que seja importante avaliarmos o nível de rigor a atingir, sem deixar perder, com isso, o sentido e a real compreensão das ideias Matemáticas.

> [...] a solução dos problemas do ensino de Cálculo não é técnica, pois exige, antes de mais nada, uma reconceptualização das ideias epistemológicas, isto é, que se trabalhe o Cálculo de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações destas ideias. (REIS, 2001, p. 189)

Reis (2001) sugere, a partir de sua investigação, a necessidade de uma prática pedagógica por parte do professor pautada primeiramente na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática dos alunos. Entendemos, dessa forma, que a reconstrução dos conceitos envolvidos no Cálculo Diferencial e Integral junto aos estudantes possa favorecer a criação de novas possibilidades para a compreensão das definições matemáticas.

3.2 Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Ao apresentar um conceito matemático para o estudante, considerando o professor como o mediador dessa apresentação, será construído por ele ideias e imagens mentais das quais poderão ser utilizadas em inúmeras situações acadêmicas em diferentes momentos de trabalho com aquele conceito. E cada indivíduo constrói uma estrutura conceitual iniciada pela apresentação. Nesse contexto, faz-se necessário uma compreensão maior dos elementos que constituem a estrutura (TALL & VINNER, 1981). Para tanto, os termos imagem de conceito e definição de conceito foram construídos e descritos por Tall & Vinner (1981) no sentido de elucidá-los e, portanto, facilitar um entendimento da estrutura cognitiva construída pelo estudante nos momentos de apresentação de novos conceitos matemáticos.

Há um estímulo na memória do estudante no momento em que ele ouve ou vê a expressão 'Campo Vetorial' e então ele evoca alguma imagem mental nesse momento associada às expressões (VINNER, 1991), que de modo geral não é a definição técnica conceitual, isto é, formal. É o que Vinner (1991) vai chamar de imagem de conceito[15]. Cada indivíduo possui naquele momento uma representação visual associada ao conceito ou até mesmo em outros casos, sensações despertadas ou experiências vinculadas. O histórico de experiências escolares matemáticas do estudante, por exemplo, nesse caso é valorizado uma vez que as imagens mentais elaboradas na sua memória, naquele momento, podem fazer parte de um conjunto que contenha muitos objetos associados ao conceito assim como uma única imagem ou até mesmo nenhuma imagem.

> A imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. (VINNER, 1991, p. 68)

[15] Alguns autores utilizam os termos imagem conceitual e definição conceitual.

Portanto, é notável que uma imagem de conceito esteja vinculada a um indivíduo específico e a sua reação a certo termo pode depender ainda do contexto no qual ele está inserido no momento da apresentação. Nesse caso, Tall & Vinner (1981) introduzem a imagem mental evocada para descrever a parcela da memória utilizada num determinado contexto. E não significa que a parcela evocada constitui necessariamente tudo que um estudante conhece do objeto apresentado. A compreensão de um conceito passa pela formação de uma imagem conceitual associada ao objeto de conhecimento. O estudante sabe falar sobre aquele objeto em diferentes contextos quando forma imagens de conceitos associadas aos termos. Ao apresentar um conceito em matemática por meio de uma definição formal[16], esperamos que o aprendiz forme ou construa imagens de conceitos associadas a essa definição para assim afirmarmos que houve uma assimilação do conhecimento e, portanto, ele compreendeu o conceito. A partir de então, ele poderá utilizar essa compreensão em diferentes contextos sem, por exemplo, fazer uso da definição formal.

Uma definição, muitas vezes, não será utilizada por ele para descrever um dado objeto matemático. A definição pode ajudar a formar uma imagem de conceito, mas certamente não será utilizada no momento em que estiver operando com o conceito. Vinner (1991) sugere a metáfora do andaime para facilitar essa concepção da definição em matemática:

> Assim, a “metáfora do andaime” pode ser sugerida para o papel da definição, formação do conceito: no momento em que a construção do edifício está terminada, o andaime pode ser retirado. (VINNER, 1991, p. 7)

Definição de conceito[17] é a definição verbal que explica o conceito (VINNER, 1991), sendo muito raramente semelhante às definições matemáticas formais associadas aos conceitos. Evidentemente, não devemos sustentar uma postura de desprezo às definições formais. O que Vinner (1991) afirma é que, em geral, as imagens de conceitos evocadas são distantes dos termos técnicos da definição no

[16] Entende-se aqui por *definição formal* aquela aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico.

[17] Neste texto utilizaremos a formulação na qual a definição de conceito está incluída na imagem de conceito.

início do processo de aprendizagem. É necessário, entretanto, ter clareza e saber buscar a definição formal quando o indivíduo estiver operando em contextos mais técnicos nos quais se faz necessário um maior rigor na observação e identificação de elementos limitantes do contexto trabalhado.

> Então contextos técnicos impõem ao estudante alguns hábitos de pensamento que são totalmente diferentes daqueles típicos do cotidiano. Pode-se predizer que, pelo menos no começo do processo de aprendizagem, os hábitos de pensamento do cotidiano irão se sobrepor aos hábitos de pensamento impostos pelos contextos técnicos.(VINNER, 1991, p. 7)

Evidentemente vão ocorrer casos nos quais um conceito é apresentado pela primeira vez, sendo este completamente novo para o aprendiz. Espera-se a não existência de nenhuma imagem de conceito formada e então a partir da postura do professor pode-se construir gradativamente essa ou essas imagens por meio de abordagens alternativas além de diferentes representações do conceito definido. Portanto, Vinner (1991) sugere na maior parte dos contextos a seguinte ilustração para construção do conceito:

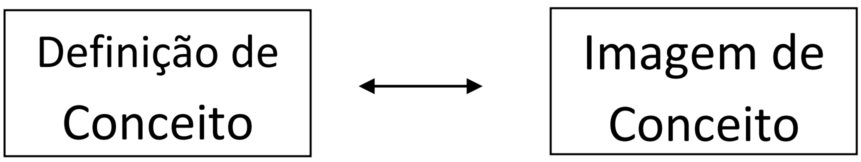


Figura 1: Intercâmbio entre imagem de conceito e definição de conceito (VINNER,1991)

No entanto, muitos professores esperam que aconteça a formação da imagem de conceito por meio da compreensão exclusiva da definição de conceito:

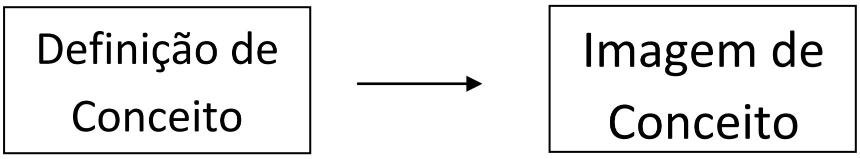


Figura 2: O desenvolvimento cognitivo do conceito formal (VINNER,1991)

Considerando um contexto de operação na qual o aprendiz trabalhe com resolução de problemas, Vinner (1991) destaca três possíveis posturas dos estudantes esperadas pela maior parte dos professores, nas quais prevalece à consulta à definição de conceito como parte obrigatória do processo. Talvez isso seja desejável na formação da imagem de conceito ou ao desempenhar uma atividade como a resolução de um problema. Porém, o que ocorre na prática seria ilustrado pelo seguinte processo:

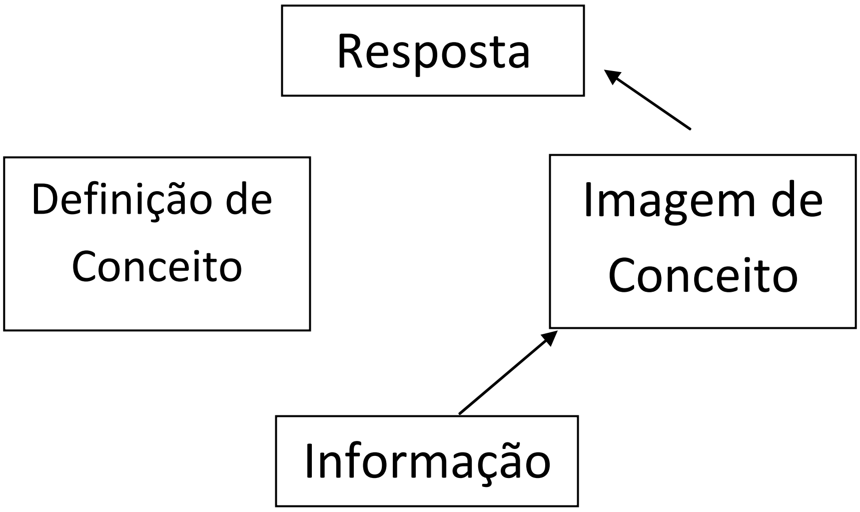


Figura 3: Resposta intuitiva (VINNER,1991)

Portanto, as consultas às definições de conceitos utilizadas num processo de atividade cognitiva ou formação de imagem de conceito se restringem, segundo Vinner (1991), a contextos técnicos de tarefas matemáticas ou quando as imagens de conceitos evocadas parecem não ser completas e, portanto causando certas ambiguidades nos processos trabalhados. Há uma crença entre os pesquisadores do PMA do qual os conceitos matemáticos deveriam ser adquiridos de acordo com o processo cotidiano por meio das imagens de conceitos. Para isso, é necessário que o professor trabalhe na apresentação de novos conceitos com muitos exemplos, abordagens, metodologias alternativas, outros recursos didáticos e diferentes estratégias de ensino. Não significa, entretanto, excluir as visitas às definições de conceitos, principalmente em contextos mais técnicos. Para Vinner (1991), saber operar com as definições é necessário para o indivíduo contemplar algumas das competências do PMA.

É importante destacar nessa ocasião, que o principal sujeito do qual se espera essa postura de aprendizagem ou aquisição do PMA sugerido por Vinner (1991) é aquele de um curso de Matemática. Certamente, quando pensamos no sujeito dessa pesquisa, estudantes de Física, devemos privilegiar uma abordagem na qual possua as imagens de conceitos construídas durante a aula como sendo norteadoras do processo, pois assim será possível pensar numa aprendizagem significativa no contexto de um curso de Física, mas sem deixar de falar também das definições dos conceitos.

Em um trabalho com estudantes de nível avançado em matemática acerca dos conceitos de Função, Tangente e o conceito de Limite de uma sequência, Vinner (1991) destaca algumas considerações: a primeira ideia apresentada é a de que se queremos identificar o domínio do estudante com relação à definição conceitual então devemos perguntar, esperando que descrevam verbalmente esse objeto. Nesse caso, afirma Vinner (1991), o aluno vai recorrer à definição de conceito, já que definição de conceito é precisamente a forma verbal e explícita que descrevem formalmente o conceito. Se, pelo contrário, queremos identificar a imagem de conceito formada pelo estudante daquele objeto, então devemos recorrer a tarefas nas quais sejam possíveis potencializar diferentes maneiras de expressar o conceito para então facilitar a exposição da imagem de conceito da mente do estudante por meio dessas representações.

Certamente, vai acontecer em alguns casos, como destaca Tall (1987, apud VINNER, 1991), o fato de uma imagem de conceito já formada não ser adequada para contextos mais refinados, por exemplo, o caso da Tangente. Muitos estudantes assimilaram a definição de Tangente restrita ao caso do círculo afirmando, assim que a Tangente pode encontrar a curva num único ponto, portanto, é necessário que se construa uma nova imagem de conceito menos restritiva que a antiga. Tall (1987, apud VINNER, 1991), destaca que essas duas imagens de conceitos podem atuar simultaneamente, então devemos, entretanto, recorrer às definições formais no sentido de amenizar essas imagens de conceitos inconsistentes.

As definições de conceitos dadas pelos estudantes por meio da descrição verbal da imagem de conceito do objeto de conhecimento apresentado podem ser esperadas pelos professores dentro de um quadro formado, por exemplo, pelas habilidades de construir essa definição a partir de uma compreensão mais profunda do conceito. E é possível que essa definição de conceito não coincida com a definição formal sendo necessário um ajuste ou intervenção do professor para efetivamente formalizar a definição. De acordo com os autores, essa etapa sendo realizada no final do processo de ensino favorece uma aprendizagem mais eficaz, pois, é notável diante das leituras que essa adequação da definição de conceito com a definição formal pode ser (re)construída em sala pelo professor e alunos e, portanto, não se deve tê-la como exclusivamente suficiente, uma vez que ela pode ser simplesmente memorizada.

A definição Matemática de Campos Vetoriais é precisa, do ponto de vista matemático, mas muitas vezes vazia de significado para o estudante que a lê pela primeira vez.

No livro da Diomara Pinto (1997), encontramos a definição para campos vetoriais da seguinte forma: “ m campo de vetores em A Rn é uma função : A R^n R^n”. Talvez fosse interessante começar a apresentação desse conceito levantando com a turma alguns conceitos como o próprio campo. Ou ainda os vetores. O que entendemos de campo? Compreendemos a entidade vetor de R^n ? Existe uma possibilidade de visualizar? Poderíamos, dessa forma, favorecer a descrição por meio de exemplos gráficos até certo ponto, evidentemente. Quando apresentamos uma imagem gráfica de um Campo elétrico ou Campo gravitacional, podemos também facilitar a associação vetor em cada ponto daquele domínio do campo. Nesse caso a visualização enriqueceria o processo de descrição. E quando pensamos em vetores, estaremos sugerindo esse objeto matemático para representar a força ou velocidade num determinado ponto do espaço, uma vez que ele possui magnitude, direção e sentido. Se representarmos alguns pontos desse espaço por vetores de origens correspondentes aos pontos, estaríamos aproximando matematicamente esse espaço do seu comportamento físico quanto aquela grandeza. E a partir dessas discussões, exemplos gráficos e, eventualmente, representações de campos vetoriais por tutoriais de Softwares, poderíamos apresentar a definição formal para que os estudantes pudessem confrontar suas impressões, experiências e pontos de vistas construídos por meio das etapas anteriores. E, portanto estaríamos contribuindo para que os estudantes construíssem compreensões possivelmente diferentes daquelas nas quais se apresentam diretamente a definição formal. E ao apresentar a definição formal, o processo de aquisição ou atribuição de significados aos elementos da definição poderiam ser reconstruídos de acordo com as etapas anteriores.

No caso da pesquisa em questão, queremos investigar as compreensões matemáticas de estudantes numa abordagem na qual seja favorável a integração de uma tecnologia da informação e comunicação. De modo específico, pretendemos, por meio de tarefas matemáticas mobilizar elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais.

3.3 Visualização

A teoria apresentada na seção anterior sugere, em particular, que a abordagem de um conceito matemático deve incluir diferentes representações, quando possível, no sentido de propiciar a realização de conexões entre as unidades cognitivas[18] (TALL & TONY BERNARD, 1997, apud GIRALDO, 2002). As diferentes possibilidades de se fazer essas ligações potencializam a formação de imagens de conceitos ricas. Isso quer dizer, que o indivíduo diante de diversas representações matemáticas de um mesmo objeto pode compreender melhor um dado conceito uma vez que ele consegue nesse contexto identificar unidades cognitivas mais próximas de suas imagens conceituais evocadas associando-as àquelas apresentadas e reconstruindo outras. Pois como afirma Giraldo (2002), “cada representação põe em evidência certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo oculta outros”. É necessário, portanto, iniciarmos discussões acerca das possibilidades de se

[18] Unidade Cognitiva seria cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, no qual o indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. (GIRALDO, 2002)

trabalhar por meio dessa abordagem a fim de favorecer a formação de um quadro de conhecimento, no qual estejam inseridas algumas respostas para nossa investigação.

Os conceitos matemáticos exigem, muitas vezes, compreensões globais. Se, por exemplo, definirmos curvas planas como uma equação $F(x,y)=0$ e pararmos por aqui estaremos deixando de considerar alguns elementos que serão necessários para a compreensão de conceitos matemáticos mais avançados ou até mesmo de conceitos dentro da Física, com o trabalho realizado ao longo de uma curva sendo, nesse caso, necessário compreender que curva plana é a trajetória de uma partícula no plano. A parametrização de uma curva é procedimento pelo qual estabelece a dinâmica necessária para, de fato, obtermos uma curva como descrito acima. Portanto, a representação paramétrica de uma curva precisa ser apresentada de forma clara, e se, então, passamos a definir dentro dessa perspectiva a curva parametrizada, podemos ainda acreditar que seja razoável a compreensão do estudante tomando sua definição formal.

Cada representação é parte de uma compreensão maior do conceito matemático. Se for priorizado uma única representação pode ocorrer algum prejuízo na formação das imagens de conceitos referentes ao conceito, e assim gerar conflitos cognitivos no momento da descrição da definição conceitual. Certamente, alguns objetos matemáticos não serão dotados na sua parcialidade representativa de elementos explicitamente favoráveis a outras representações. Assim, será necessário identificar os elementos de uma determinada representação potencialmente favoráveis a outras abordagens e então explorar habilidades de manipulação e coordenação dessas diferentes representações. Neste tópico, estaremos refletindo o papel da visualização como uma possibilidade de exploração conceitual.

A natureza do pensamento matemático está interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. E o pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento tal como Dreyfus (1991) destaca: os processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representar-visualizar a mudança de representações e a tradução da formulação de um problema ou frase matemática para uma outra formulação, a modelação), processos envolvidos na abstração (generalização e síntese são pré-requisitos básicos para a abstração), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição.

Dreyfus (1991) revela que em muitos processos, os aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. Quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente gerando uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos visualizando a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre ela. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em Matemática avançada.

Uma característica peculiar do pensamento avançado em relação ao elementar é a complexidade e como ela é tratada. Dessa forma, os processos efetivamente potenciais são aqueles que permitem gerir essa complexidade como a abstração e a representação.

O processo do pensamento matemático que intervém com mais incidência no estudo da geometria é normalmente designado por visualização. A visualização é um processo pelo qual as imagens ou representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti & Pesci (1994, apud COSTA, 2002), chamam de visualização o pensar espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991, apud COSTA, 2002), dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes. São muitas as definições e reflexões sobre visualização. E elas evidenciam diferentes significados considerando a Matemática, a investigação científica, a Educação Matemática e a Psicologia. Porém concordam que a visualização insere-se na percepção e na manipulação de imagens visuais.

Para Costa (2002), a visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, focadas na percepção e na manipulação de imagens visuais que contribuem para a comunicação e disseminação de ideias, a construção de argumentação e a descrição da dinâmica mental.

O uso do computador como auxílio na visualização pode ser um potencializador sob o aspecto do Pensamento Matemático Avançado e o desenvolvimento desse processo cognitivo.

Explorar o aspecto da visualização pode gerar diferentes compreensões matemáticas de um mesmo conceito, por meio de focalizações não possíveis sem o auxílio do computador. Como exemplo, citamos a geração de campos vetoriais. Enquanto no caderno o aluno desenvolveria diversos cálculos na tentativa de relacionar contas, gráficos e comportamento dos vetores em R^3, no ambiente do computador esse processo é otimizado possibilitando um ganho maior tempo para discussões conceituais do objeto. Dessa forma, o computador pode gerar as representações mentais de objetos que até então só podiam ser geradas na mente. Essa possibilidade favorece uma produção matemática que até então não era discutida em sala de aula.

Arcavi (2003), acentua o papel da visualização como parte da produção matemática na resolução de problemas. O autor destaca esse processo como fundamental na elaboração de estratégias para a resolução de alguns problemas matemáticos. E ainda destaca a importância da visualização por mostrar muitas vezes aquilo que o professor “vê”, mas o aluno não numa determinada representação matemática. Arcavi (2003) se apóia na frase de Goethe: “ Nós não sabemos o que vemos, vemos o que sabemos” – destacando que a segunda parte aplica-se a muitas situações em que os alunos não necessariamente veem o que nós, como professores ou pesquisadores fazemos.

A visualização permite que estudantes consigam ver coisas semelhantes aos observados por um especialista (ARCAVI, 2003).

Atualmente, a visualização como processo do aprender e fazer matemática, parece tornar-se amplamente reconhecida. A visualização não é mais relacionada simplesmente aos efeitos ilustrativos, mas também pode ser reconhecida como um componente chave do raciocínio (profundamente envolvimento com o conceitual e não o meramente perceptivo), resolução de problemas, e mesmo em provas matemáticas (ARCAVI, 2003).

3.5 Tecnologia da Informação e Comunicação em Educação Matemática

Que imagem de conceito e definição de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais podem ser inferidas de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral quando interpretada fisicamente como trabalho realizado, mobilizados por eles na resolução de tarefas que envolvam tal conceito?

Essa pergunta juntamente com a base teórica descrita acima sustenta nosso propósito de integrar o software Maple nas atividades possibilitando certa agilidade nos cálculos procedimentais existentes além de explorar o processo de visualização. Dessa forma, possibilitamos uma maior exploração dos conceitos referentes aos elementos, que constitui a definição do Integral de Linha de Campos Vetoriais. Além disso, evitaremos assim o foco no procedimental. Um treinamento necessário e que constitui um processo importante na Matemática avançada, porém não objeto de investigação dessa pesquisa.

As TIC's já são objetos de discussão na educação há alguns anos no Brasil. Essas TIC's são constituídas por todos os novos dispositivos de comunicação. Atualmente, existem diversos aparelhos dessa natureza incluindo os computadores. Nessa pesquisa, queremos focar nossa investigação nos processos de aprendizagem, sobretudo no que tange as compreensões dos estudantes referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais geradas em atividades realizadas com a possibilidade de utilização de um CAS. Assim, a proposta desse tópico é de estabelecer uma base teórica respaldando as TIC's e suas utilizações.

Quando pensamos em técnicas ou na própria informática, temos uma tendência de considerá-la como um campo bem determinado para a investigação da ciência em geral. Entretanto, não desejamos analisar a informática na essencialidade da técnica como é de interesse no campo da computação, programação ou engenharia. Pretende-se olhar para a TIC na sua dimensão funcional de interação com os homens considerando o universo escolar universitário, portanto, para essa pesquisa é relevante uma análise do modo pelo qual se dá a interação desses elementos. Essas TIC's podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem?

Lévy (1993) sugere que pensemos nessas tecnologias como uma possibilidade de interconexão entre indivíduos e técnicas como já acontece com a escrita e a oralidade razão pela qual vai chamar de tecnologias da inteligência sendo nesse caso a comunicação o principal fator de relevância comum. O autor propõe uma reflexão acerca da utilização dos computadores como uma ideia desprovida do essencialismo de uma das partes do processo homens e máquinas. A importância dessas reflexões não reside essencialmente nas técnicas da informática ou da oralidade ou na escrita, mas antes no modo pelo qual se inter-relacionam esse coletivo.

> Nem a sociedade, nem a economia, nem a filosofia, nem a religião, nem a língua, nem mesmo a ciência ou a técnica são forças reais, elas são, repetimos, dimensões de análise, quer dizer, abstrações. Nenhuma destas macroentidades ideais pode determinar o que quer que seja porque são desprovidas de qualquer meio de ação. (LEVY,1993,p.8)

E a sucessão dessas técnicas na evolução da sociedade pode ser, segundo o autor, admitida como complementações, em que a oralidade e a escrita não foram suprimidas quando surgiu a informática. O que aconteceu foram deslocamentos nas formas de se comunicar adequando determinados técnicas para melhor atender a sociedade. As técnicas antigas (LEVY, 1993) como a escrita ainda existem e sempre existirão. Contudo, é necessário que pensemos nas tecnologias recém-criadas como objetos de estudo e análise, visto que também são legítimas e possui suas dimensões de investigação:

> O cúmulo da cegueira é atingido quando as antigas técnicas são declaradas culturais e impregnadas de valores, enquanto que as novas são denunciadas como bárbaras e contrárias à vida. (LEVY,1993, p. 15)

É uma adequação ao tempo e às necessidades, em que a oralidade tinha uma ligação mais forte com a lembrança e à memória auditiva dos indivíduos antes da escrita. Os mitos foram fundamentalmente, os elementos criados como representações de novas informações no sentido de reter e transmiti-las às outras gerações. Segundo Lévy (1993), essa forma de estender a memória biológica teve um salto qualitativamente diferente com o surgimento da escrita e com a invenção da imprensa, podendo alcançar níveis incríveis de extensão. A escrita tornou possível a transmissão de representações sem a mediação necessária do ser humano. Mas não significou uma substituição completa da oralidade, mas um deslocamento de funções mais adequadas privilegiando os diferentes contextos para os quais uma técnica se enquadra melhor.

E a informática também entendida como uma extensão da memória entra nesse processo, destacando-se por ser qualitativamente diferentes das demais tecnologias intelectuais como a escrita e a oralidade. Nesse caso, consideramos como principais elementos diferenciadores a simulação e a experimentação. E num processo de simulação ou experimentação, por exemplo, nota-se uma interação, ainda que pequena, dessas tecnologias intelectuais.

> A simulação por computador permite que uma pessoa explore modelos mais complexos e em maior número do que se estivesse reduzido aos recursos de sua imagística mental e da sua memória de curto prazo, mesmo se reforçadas por este auxiliar por demais estático que é o papel. (LEVY,1993, p.143)

A simulação, portanto, não remete a qualquer pretensa irreal do saber ou da relação com o mundo, mas antes a um aumento dos poderes da imaginação e da intuição. Os programas computacionais desempenha um papel de tecnologia intelectual, na medida em que reorganizam o pensamento do usuário e modificam suas figuras mentais e transformam a cognição. As próprias interfaces dos programas são potencialmente geradoras de novas habilidades, trazendo consigo elementos que seduzem o usuário e o conecta cada vez ao sistema, contribuindo para uma espécie de humanização da máquina na medida em que são criados para estreitar-se com a interação cognitiva do indivíduo. Segundo Lévy (1993), o processo de transformação e tradução das diferentes representações por meio das múltiplas interações entre humanos e não-humanos constitui a cognição.

> Não sou ‘eu’ que sou inteligente, mas ‘eu’ com o grupo humano, do qual sou membro, com minha língua, com toda uma herança de métodos e tecnologias intelectuais...Fora da coletividade, desprovido de tecnologias intelectuais ‘eu’ não pensaria” (LÉVY, 1993,p.135).

Essa coletividade como condição para a inteligência pode ser entendida pelo fato do autor não optar por uma análise individual dos elementos, que constituem esse coletivo. Compreendemos, portanto, que a proposta de avaliação de programas como facilitadores no processo de aprendizagem somente podem ser legitimados num contexto de participação de indivíduos, seres-humanos. A máquina em si não possui, até ser operada por um ser humano, elementos de análise consistentes.

> É preciso deslocar a ênfase do objeto (o computador, o programa, este ou aquele módulo técnico) para o projeto (o ambiente cognitivo, a rede de relações humanas que se quer instituir). (LEVY, 1993, p. 32)

Lévy (1993) destaca como método de comunicação nesse contexto a metáfora do hipertexto, considerando assim que a formação e construção das redes de significados não se restringe a uma cognição linear, mas de forma hipertextual obedecendo o sentido e o contexto produzido por um dado conceito.

> "Quando ouço uma palavra, isto ativa imediatamente em minha mente uma rede de outras palavras, de conceitos, de modelos, mas também de imagens, sons, (…). Mas apenas os nós selecionados pelo contexto serão ativados com força suficiente em nossa consciência." (LEVY, 1992, p.14)

Vemos nesse caso uma convergência de ideias considerando a Imagem de Conceito (TALL & VINNER, 1981) e o Hipertexto de Lévy (1993). Quando Lévy (1993) afirma que somente os nós são ativados no momento em que ouve uma palavra ou conceito, vemos uma interseção com a imagem de conceito evocada sugerida por Tall (1991) no PMA descrito anteriormente. Isso é de certo modo relevante para a pesquisa, uma vez que os dois pesquisadores são referenciados para fundamentar a investigação.

> O sentido de uma palavra não é outro senão a guirlanda cintilante de conceitos e imagens que brilham por um instante ao seu redor. A reminiscência desta claridade semântica orientará a extensão do grafo

> luminoso disparado pela palavra seguinte, e assim por diante, até que uma forma particular, uma imagem global, brilhe por um instante na noite dos sentidos. Ela transformará, talvez imperceptivelmente, o mapa do céu, e depois desaparecerá para abrir espaço para outras constelações.(LEVY, 1993, p. 15)

Borba & Villarreal (2005) corroboram com Lévy (1993) ao sugerirem que a produção de conhecimento ocorre por meio de um coletivo pensante seres-humanos-com-midias fundamentando-se nas ideias de Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), e na proposta de coletivo pensante dada por Lévy (1993).

Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), apresenta três teorias para qualificar a relação do computador com o ser humano: substituição, suplementação e reorganização. Na teoria da substituição, apesar da proposta de uma possível substituição do ser humano numa dimensão intelectual, acredita-se que ele não pode substituir o pensamento humano. Alguns programas podem realizar diversas tarefas como a resolução de alguns problemas matemáticos, mas Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), rejeita a noção de substituição do pensamento humano argumentando, que esse não tem apenas uma habilidade de resolver, mas além de uma habilidade possivelmente semelhante ainda existe uma forma de desenvolver a resolução fundamentalmente diferente do desenvolvido pelo computador. “A ideia de substituição não expressa, portanto, uma relação real entre o pensamento humano e o trabalho do computador” (TIKHOMIROV, 1981, p.259, apud BARBOSA, 2009).

O computador poderia ser visto como um aumento quantitativo da memória? Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), afirma que essa teoria também acaba sendo reducionista, na medida em que propõe a ideia na qual os processos complexos do pensamento consiste de diversos processos elementares de manipulação de símbolos tal como na teoria da informação. O autor sugere que o pensamento é gerado ou construído no processo de atividade mental de resolver problemas sendo que nem sempre o objetivo a se atingir é dado antecipadamente. Nesse caso, ele destaca que a criação de um problema e o desenvolvimento dos resultados são atividades ou manifestações entre as mais importantes do pensamento humano. “Pensar não é uma simples resolução de problemas: também envolve formulá-los” (TIKHOMIROV, 1981, p.261, apud BARBOSA, 2009).

Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), propõe uma teoria da reorganização baseando-se na ideia da transformação da atividade humana contrapondo-se às ideias de adição exclusiva, isto é, as ferramentas não complementam somente as tarefas humanas, mas reorganizam-nas e transformam essas tarefas. E esse processo consequentemente muda os processos mentais do ser humano. “Como resultado do uso do computador, a transformação da atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem” (TIKHOMIROV, 1981, p.271, apud BARBOSA, 2009).

As novas possibilidades oferecidas pelo computador nessa perspectiva de transformação são vistas, por exemplo, naquelas ações intermediárias de uma tarefa como os feedbacks. Essas ações, muitas vezes, produzem novas ideias na realização de tarefas e, portanto, modifica o conhecimento. Ao utilizar o computador, a estrutura da atividade intelectual humana é alterada de alguma forma, reorganizando os processos de criação, de busca e de armazenamento de informações. Assim, Tikhomirov, (1981, apud BARBOSA, 2009), finaliza destacando a necessidade da adaptação dos computadores à atividade humana assim como a adaptação às condições de trabalho com o computador (TIKHOMIROV, 1981, p.277, apud BARBOSA, 2009), propondo a resolução de problemas por meio do coletivo humanos e computadores.

Percebemos como Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), e Lévy (1993) propõem de forma comum que não haja uma dicotomia entre a técnica e o ser humano, defendendo a ideia de um coletivo pensante homem e máquina. Borba & Villarreal (2005, apud BARBOSA, 2009), reafirmam a teoria da reorganização do pensamento definindo-a como aquela que melhor caracteriza a moldagem recíproca, em que o ser humano e computadores são moldados nas diversas atividades nas quais estão presentes. Os computadores não substituem o ser humano, mas interagem na produção e reconstrução do conhecimento.

3.5 CAS e Ensino de Cálculo

Uma tecnologia da informação e comunicação como um CAS pode ser utilizada facilmente no ensino de Cálculo Diferencial. Inclusive como uma ferramenta de auxílio para cálculos algorítmicos. A questão de interesse dessa pesquisa, ao investigar as compreensões dos estudantes acerca das integrais de linha nas atividades de campo, é justamente explorar outras formas de abordagem por meio dessas tecnologias favorecendo, a princípio, posturas mais investigativas por parte do estudante. Corroboramos com D. Tall (1991) ao apontar possíveis tarefas integradas com a tecnologia informática: “Na educação, pode ser usado para os mesmos objetivos, e para um outro propósito importante: ajudar os alunos a conceber e construir por si mesmos a matemática que já foi formulada por outros. (TALL,1991, p. 231, tradução nossa)[19]

Na perspectiva do Cálculo diferencial, podemos afirmar que os computadores inauguram um novo cenário para a investigação dentro da educação superior. Por meio dessa tecnologia é possível obter representações geométricas de objetos matemáticos que até então seriam impossíveis de serem visualizadas num ambiente convencional. Segundo Tall (1991), diversas conjecturas, teoremas e resultados da matemática técnica científica tem utilizado dessa tecnologia para auxiliar nas tentativas mais precisas de provas numéricas e exemplos ou contra-exemplos gerados de forma mais rápida pelos computadores. A conjectura de Euller, por exemplo, realizado com prodigiosos cálculos só foi mostrada que é falsa por meio de um contra-exemplo gerado por Lander e Parkin, num computador:

> Quase dois séculos atrás, depois de um prodigioso número de cálculos, Euler formulou a conjectura de que uma soma de pelo menos n potências positivas enésimas de inteiros são necessários para produzir um enésima potência. Então pelas restrições dos cálculos necessários para investigar obrigou-os a ficar sem prova ou refutação até uma pesquisa de computador em 1969 por Lander e Parkin produziu o contra-exemplo: $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$. (TALL, 1991, p. 232, tradução nossa)[20]

[19] In education it can be used for the same objectives, and for one other major purpose: to help students conceptualize, and construct for themselves, mathematics that has already been formulated by others.

[20]Nearly two centuries ago, after a prodigious number of calculations, Euler formulated the conjecture that a sum of at least n positive *n*th powers of integers are required to produce an *n*th power. So forbidding were the calculations required to investigate this that it stood without proof or refutation until a computer search in 1969 by Lander and Parkin produced the counter-example:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Por outro lado, a conjectura de Goldbach permanece aberta, ainda que os computadores tenham encontrado uma decomposição em dois primos para todos os pares até um tamanho extremamente significativo. Segundo Tall (1991), a prova formal pode ser auxiliada pelo computador uma vez que os processos lógicos de construção e cálculos podem ser reduzidos a um número reduzido de casos para levantar possíveis conjecturas. É o caso, segundo Tall (1991), do problema das quatro cores, reduzido para um número finito (mas grande) de alternativas que poderia ser resolvidas pelo computador. Essas aplicações podem ser encontradas facilmente nos problemas combinatórios em teoria de grupos, geometria algébrica e outras áreas que são constituídas de algoritmos programáveis favorecendo a utilização do computador nas partes de cálculos complexos (TALL,1991). Evidentemente estas práticas não agradam todos os matemáticos, visto que muitas vezes faz-se necessário questionar a programação, o processo lógico, o modo como os conceitos se encaixam podendo conduzir argumentos falaciosos (TALL,1991). Esse seria outro lado para se pesquisar. Entendemos que as atividades matemáticas, em geral, podem ser integradas aos computadores embora seja necessário reconhecer possíveis pontos negativos no processo.

A integração de uma tecnologia da informação e comunicação no ensino de Cálculo deve, sobretudo, auxiliar o estudante a explorar o conceito matemático do objeto de ensino:

> Isso abre uma possibilidade adicional para o uso do computador na educação matemática, através do desenvolvimento de programas de computador projetados para ajudar o aluno a conceituar idéias matemáticas. (TALL,1991, p. 234, tradução nossa)[21]

Dessa forma, acreditamos que seja necessária uma investigação mais refinada das propostas de tarefas nesses ambientes nas quais possuam elementos potencializadores da exploração de ideias matemáticas sob os diversos aspectos ou

[21] This opens up a further possibility for the use of the computer in mathematical education, through the development of computer software designed to help the student conceptualize mathematical ideas.

representações possíveis como simbólicas gráficas e numéricas, podendo assim confirmar ou refutar a hipótese na qual aponta a autonomia como uma competência gerada quando o estudante busca soluções alternativas.

O que pretendemos com este tópico é sugerir ao leitor a reflexão de possíveis pontos de convergência entre as TIC's e o ensino de Cálculo sob uma perspectiva de integração dessa tecnologia, os estudantes e o objeto matemático de ensino.

Tall (1991) destaca os dois softwares CAS mais utilizados, apontando características de exploração de conceitos matemáticos mais fortemente presente em cada programa. Analisa, do ponto de vista técnico e pedagógico, alguns elementos comuns aos dois e outros pontos distintos. Destaca a Matemática como uma inovação nessa área já que, segundo Tall (1991), ele possui uma versão na qual a sintaxe da descrição matemática de um cálculo não é necessariamente aquela composta de um conjunto de símbolos. Mas a própria palavra que descreve o conceito pode ser entendida como uma sintaxe para a realização de um cálculo (TALL,1991).

A partir dessas reflexões destacadas e das questões levantadas anteriormente, vemos como uma necessidade a produção de mais pesquisas com o CAS no sentido de apontar elementos constituídos na sua natureza de questões de reflexão acerca do alcance instrucional destas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Sobretudo, pela crescente expansão desses programas no meio acadêmico. E isso também sugere uma demanda de pesquisas nas quais se investiguem qualitativamente as potencialidades matemáticas educacionais dessas tecnologias informáticas no ensino superior. Essa necessidade vai ao encontro da pretensão dessa pesquisa na qual deseja construir um quadro de conhecimentos relativos às compreensões matemáticas de estudantes de Cálculo ao realizarem tarefas mediadas pelo Maple.

De acordo com a teoria da reorganização de Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), as ideias de coletivo pensante (LEVY, 1993) e a proposta de convergência destas teorias como sugerem Borba & Vilarreal (2005, apud BARBOSA, 2009), fica evidenciado uma proposta de abordagem acerca da tecnologia informática no ensino de Cálculo: a integração. Essa expressão pode significar efetivamente o que pretendemos com essa pesquisa.

O Maple é um software matemático. Acreditamos, corroborando com Lévy (1993) e Tikhomirov (1981, apud BARBOSA, 2009), que esse software em si não ensina. E também não apenas completa o trabalho manual de um estudante ou professor. Mas se pensarmos nas possibilidades de exploração da potencialidade procedimental e de estímulo visual que esse software proporciona em tarefas matemáticas envolvendo a Integral de Linha de Campos Vetoriais? É possível mobilizar diferentes partes da imagem de conceito relativo ao conceito envolvido? Essas perguntas constituem a região de investigação inserida no corpo dessa pesquisa evidenciando o modo como iremos analisar as atividades de campo.

4 – INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS E TRABALHO REALIZADO: PARÂMETROS MATEMÁTICOS PARA CONSULTA DA PESQUISA

Observemos a definição formal de Integral de Linha de um campo Vetorial retirada do livro Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis elaborado por Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado (1997):

Definição: Consideremos uma curva C em parametrizada por onde é de classe , e um campo vetorial contínuo definido em C. Definimos a Integral de Linha de F ao longo de C dada por:

Quando C é uma curva no plano xy parametrizada por , a Integral de Linha de ao longo de C é dada por:

Como um objeto matemático, esta definição caracteriza perfeitamente a Integral de Linha. As propriedades e demais características consequentes dessa definição poderão ser logicamente construídas sob a perspectiva de um sistema de inferência na qual se insere a definição. E, portanto, ao mencionar esse objeto matemático num contexto da matemática técnica, necessariamente estaremos trazendo à tona os elementos escritos e explícitos da definição (GIRALDO, 2004). Assim, podemos afirmar que a definição formal de Integral de Linha de um Campo Vetorial contempla sob uma perspectiva formal o objeto matemático. A Integral de Linha de um Campo Vetorial "é" a sua definição nesse contexto. Devemos, entretanto, tratar de maneira cuidadosa essa afirmação quando estivermos trabalhando esse objeto numa sala de aula. Como afirma Courant & Robbins (1941, apud GIRALDO, 2004):

> Uma séria ameaça à própria vida da ciência está implícita na asserção de que matemática não é nada mais que um sistema de conclusões

> desenhado a partir de definições e postulados que devem ser consistentes e além disso podem ser criados pelo livre arbítrio dos matemáticos. Se esta descrição fosse precisa, matemática não poderia atrair nenhuma pessoa inteligente. Ela poderia ser um jogo de definições, regras e silogismos, sem motivo ou objetivo. A noção de que o intelecto pode criar sistemas postulacionais por seu próprio capricho é uma enganosa meia-verdade. [. . .] Seja qual for o nosso ponto de vista filosófico, para todos os propósitos da observação científica um objeto se *esgota* na totalidade das possíveis relações com o sujeito ou instrumento que o percebem. (COURANT & ROBBINS, 1941, p.xvii, apud GIRALDO, 2004, p. 69)

Portanto, se tivermos que categorizar o conhecimento matemático envolvido nessa pesquisa, sugerimos que seja, corroborando com Giraldo (2004), um objeto matemático de ensino. A busca central da pesquisa em questão são as imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais dos estudantes de Física. Pretendemos, dessa forma, investigar as compreensões matemáticas emergentes em atividades executadas e integradas com o Maple.

Desejamos com essa pesquisa discutir, refletir e elaborar a partir dos dados relativos às análises das atividades e entrevistas dos estudantes um quadro de conhecimentos referentes às concepções dos estudantes referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais.

A partir dessa noção, desejamos adotar para as atividades a abordagem de um objeto matemático de ensino balizado pela direção apontada por Poincaré (1908, apud GIRALDO, 2004):

> Para os filósofos ou cientistas, uma boa definição é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles; e que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação, não é assim; seria uma que pode ser entendida pelos alunos. (POINCARÉ, 1908a, p.117, apud GIRALDO, p. 69)

Entendemos que o referencial teórico acerca das imagens de conceito norteia o trabalho, na medida em que estabelece a prerrogativa de que um conceito matemático na estrutura cognitiva do estudante é a sua imagem de conceito.

Pretendemos, dentro desse contexto pedagógico, analisar as imagens de conceito dos estudantes por meio das definições de conceitos registradas e confrontá-las com os elementos da imagem de conceito evocados nas tarefas. Nesse sentido, pretendemos legitimá-las ou sugerir reconstruções por meio das aproximações mais precisas no processo de formalização.

Aplicaremos, numa primeira etapa, um questionário escrito com questões matemáticas diretas e duas tarefas matemáticas (Atividade 1 e Atividade 2) a fim de detectarmos as compreensões dos estudantes relativas a alguns conceitos prévios da Análise Vetorial. Numa segunda etapa, aplicaremos outras duas tarefas matemáticas nas quais os estudantes serão submetidos. O objetivo dessa etapa será o de mobilizar os elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais. A partir das respostas, pretendemos realizar uma leitura das respostas dos estudantes, suas interpretações e possíveis recortes das porções das imagens de conceito dos sujeitos referentes à Integral de Linha. Além disso, pretendemos analisar as potencialidades dessas atividades no sentido de enriquecimento ou não das imagens de conceitos.

Neste capítulo, desejamos apresentar algumas interpretações de objetos de conhecimento matemático talvez já familiares para os leitores, mas que se faz necessário no sentido de amparar matematicamente aquilo que desejamos nas tarefas de campo.

Realizaremos a textualização de algumas interpretações físicas juntamente com as definições matemáticas formais das quais faremos referência durante nossa escrita a partir de agora. Dessa forma, pretendemos apresentar ao leitor de modo mais fiel possível a trajetória da construção dessa investigação percorrendo os diversos elementos que a constituíram e refletindo a respeito da sua pertinência como uma investigação relevante dentro da Educação Matemática Superior.

4.1 Curvas

Suponha que uma partícula esteja movendo-se em IR^2. Queremos descrever a trajetória descrita pela partícula, ou seja, sua posição no plano, em cada instante de tempo t. Podemos imaginar que, quando t varia em um intervalo de tempo, a trajetória descrita pela partícula é uma curva C percorrida no sentido de crescimento de t. Uma das maneiras de se fazer tal coisa é associar a cada instante de tempo t um vetor no plano e que dependerá de t. Neste caso, estamos diante de uma aplicação que associa a cada instante de tempo t um vetor de R^2. Como cada vetor em R^2 representa a posição da partícula no instante de tempo t, dizemos, que a curva C que representa a trajetória da partícula pode ser parametrizada em função do parâmetro t.

Neste texto a curva C representará o local geométrico formado pelas extremidades de todos os vetores posição. Uma parametrização para a curva C será uma das formas de se representar a mesma, isto é, existem infinitas parametrizações que coincidem com a mesma curva C.

Além do conceito físico de trajetória, associado a ideia de vetor posição, faz sentido relembrar outros conceitos físicos.

4.2 Campos Vetoriais Conservativos: Um Campo Que Conserva a Energia Total do Sistema

O que entendemos ao abordar nas atividades a exploração de campos de forças conservativas?

Os campos vetoriais de forças conservativas são caracterizados por garantir que a energia mecânica total seja constante, isto é, ela é conservada. Portanto, ao calcular o trabalho realizado por esse campo ao longo de diferentes caminhos, o estudante terá a oportunidade de conjecturar (ou não) acerca dos valores das integrais encontradas deixando para o software Maple a tarefa do cálculo matemático e ganhando tempo para explorar os conceitos.

Os campos vetoriais conservativos podem ser definidos matematicamente da seguinte forma:

Definição: Um campo aberto, é dito conservativo se existe tal que . A função f é chamada de energia potencial ou simplesmente potencial para F.

Proposição: Seja . As linhas de fluxo de F são as curvas tais que . Então temos que é decrescente sempre que é uma linha de fluxo de F. Lembramos que denota a derivada primeira de .

Demonstração: Para mostrar que é uma função decrescente devemos calcular a sua derivada e concluirmos que seu sinal é negativo.

Proposição 3.2: Sejam uma constante. Uma trajetória descrita por uma partícula sob a ação do campo F é uma curva tal que . Então, temos que

$$-$$

é constante sempre que for uma trajetória.

Assim, quando o campo de forças F for conservativo, a energia total E se conserva ao longo das trajetórias sob a ação de F.

Demonstração: Para demonstrar que E(t) é constante, basta derivar a sua expressão e mostrar que o resultado é zero.

Observação: A energia mecânica total é definida pela expressão:

$$-$$

Quando o campo vetorial é conservativo, a proposição 3.2 garante que a energia mecânica total é constante, isto é, ela é conservada. Fazendo:

$$-$$

Podemos então chamar de energia cinética e de energia potencial como são nomeados pelos físicos. Assim, a proposição 3.2 afirma que

ou seja, que a energia mecânica total, que é a soma da energia cinética com a energia potencial é constante. Isto é o mesmo que afirmar que a energia total, , se conserva ao longo do movimento descrito por uma partícula. Assim sendo, este é um dos motivos para se achar o campo vetorial F de conservativo, isto é, F é um campo que conserva a energia total de um sistema.

4.3 Trabalho e Integral de Linha: Uma Relação Significativa

As imagens de conceitos evocadas (ou não) pelos estudantes durante as atividades podem contribuir para o aparecimento de novas questões investigativas acerca da Integral de Linha de Campos Vetoriais. Não pretendemos, entretanto, pensar em evolução linear dos conceitos à definição formal. Queremos observar e analisar as possíveis imagens de conceito evocadas por meio da leitura do registro das respostas dos estudantes às tarefas, as definições de conceito elaboradas e escritas, as aproximações dessas com a definição formal, a existência ou não de possíveis limitações das descrições das respostas geradas no software, suas interpretações (das descrições computacionais) dadas pelos estudantes e nossas interpretações segundo a teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981).

Qual a relação entre Trabalho realizado por uma força e Integral de Linha de Campos Vetoriais?

Se F é um campo de forças no plano, então uma partícula teste (por exemplo, uma pequena carga unitária em um campo de força elétrica ou uma massa unitária em um campo gravitacional) sofrerá a ação da força F. Suponha que a partícula se move ao longo de uma curva C sob a ação de F. Suponha também que esta trajetória C possa ser parametrizada por um caminho diferenciável σ a b R^2. Um conceito fundamental é o trabalho realizado pela partícula, sob a ação do campo vetorial F, quando esta percorre a curva C que é parametrizada pelo caminho $\sigma(t)$. Se C representa um deslocamento retilíneo dado por um vetor d e F é uma força constante, então o trabalho realizado por F em mover a partícula ao longo do caminho é F·d:

.

Mais geralmente, se o caminho é curvilíneo podemos imaginar que ele é feito a partir de uma sucessão de deslocamentos retilíneos infinitesimais ou que ele é aproximado por um número finito de deslocamentos. Então somos conduzidos à seguinte fórmula para o trabalho realizado pela força F sobre uma partícula movendo-se ao longo do caminho σ:[a,b] R^2:

Esta discussão nos leva a fazer a seguinte definição:

Definição: Sejam é aberto, um campo vetorial de classe e um caminho de classe . A integral de linha (ou integral de caminho) de F sobre é definida por:

Vamos avançar um pouco mais. O resultado a seguir afirma que, quando o campo vetorial F é conservativo, então o trabalho realizado é igual a variação da energia potencial.

Teorema: Sejam aberto e um campo conservativo (isto é, existe tal que Seja um caminho de classe tal que . Então,

4.4 Campos Vetoriais Dissipativos: Possível Expansão do Conceito de Trabalho x Refinamento do Conceito de Integral de Linha

Pretendemos como já mencionado, favorecer a partir da pesquisa reflexões na direção de objetivos que convergem para a Educação Matemática Superior acerca do ensino e aprendizagem. Desejamos ainda produzir elementos suficientes a contribuir para a construção de um produto educacional no qual revele apontamentos relevantes para a pesquisa em Educação Matemática e, consequentemente, para o planejamento de estratégias de ensino nas quais abordem o objeto matemático de ensino dessa pesquisa, ou seja, a Integral de Linha de Campos Vetoriais.

Tall (1989) ressalta como vimos no capítulo 3 à importância da definição como uma etapa final à conceituação e não como ponto de partida.

Com base nessa afirmação e no referencial das imagens de conceitos pretendemos a partir das respostas dos estudantes às tarefas produzir um conjunto de dados suficientes para analisarmos os elementos da imagem de conceito mobilizados.

Explorando o conceito de campo de força dissipativo nas tarefas, entendemos que possa auxiliar a evocação de diferentes partes da imagem de conceito. E assim supomos que a exploração dessas questões favoreça diferentes compreensões matemáticas pelos estudantes e, portanto, mais dados para nossa pesquisa.

Planejaremos as tarefas de maneira que seja contemplada o aspecto da visualização. Queremos, a partir dessa proposta, facilitar o confrontamento dos diferentes aspectos do mesmo conceito por parte do aprendiz. Como os estudantes estarão inseridos num ambiente no qual se faz presente o Maple, é possível, de acordo com os autores (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997, apud GIRALDO, 2004), que os mesmos possam manipular e investigar diferentes construções não considerando efetivamente aspectos técnicos e, portanto, podendo dessa forma conjecturar novas relações e abstrações.

Pensamos que o confrontamento de respostas numéricas, por exemplo, pode sim favorecer a produção de algumas interpretações dos estudantes acerca do conceito no qual a integral de um campo vetorial pode depender do caminho escolhido. Dito de outra maneira, o trabalho realizado por uma partícula sob a ação de um campo vetorial, em geral, depende da trajetória percorrida pela mesma. Isto acontece porque o campo vetorial não é conservativo. E a partir de respostas numéricas geradas pelo Maple, podemos confirmar ou refutar esse fato. Veja o exemplo:

Considere o campo vetorial dado por Considere duas trajetórias parametrizadas dadas, respectivamente, por

Encontrar o trabalho realizado para cada um dos caminhos.

Solução: Para o caminho temos:

— –

Para o caminho , temos:

— –

O exemplo acima mostra que a integral de um campo vetorial pode depender do caminho escolhido. Dito de outra maneira, o trabalho realizado por uma partícula sob a ação de um campo vetorial, em geral, depende da trajetória percorrida pela mesma. Isto acontece porque o campo vetorial deste exemplo não é conservativo.

Mas o que são matematicamente Campos Vetoriais Dissipativos?

Matematicamente poderíamos definir:

Definição: Quando o campo vetorial R , não é conservativo, o mesmo é dito dissipativo.

Vimos que, quando um campo vetorial é conservativo, a energia mecânica total se conserva. No caso de campos vetoriais dissipativos a energia mecânica não é conservada.

Teorema: Suponha que é contínuo e que é tal que . Então, temos que o trabalho realizado por F é igual a variação da energia cinética, isto é,

– –

Seguindo a ideia e pressupostos do grupo PMA mencionados no capítulo 3 dentro do qual se estabelece a definição matemática como parte inerente nesse processo sugeríamos nesse contexto a apresentação da definição formal como uma etapa final.

A proposta de integrar às tarefas escritas por meio de cálculos e procedimentos convencionais é justamente para favorecer a produção de elementos potencialmente constituídos de análise de competências sugeridas no âmbito do desenvolvimento do PMA como a de operar por meio da escrita de forma precisa com objetos mais concretos (VINNER, 1991). Não queremos, portanto, comparar os efeitos do uso das TIC’s com as ferramentas convencionais. Ao contrário, buscamos nessa pesquisa investigar sob a luz da teoria das imagens de conceito e da visualização as interpretações emergentes dos estudantes durante a execução das atividades e as produções escritas dos sujeitos expressas nas respostas.

5 - METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos o contexto da pesquisa em que o estudo está inserido e o procedimento metodológico para a coleta dos dados. Além disso, apresentamos algumas reflexões acerca da elaboração das atividades.

5.1 Questão de Investigação e Objetivo da Pesquisa: Retomando

As perguntas que originaram essa pesquisa foram as seguintes: como os alunos estão interpretando e/ou entendendo a Integral de Linha de um Campo Vetorial? A definição formal é um caminho eficaz para a compreensão do conceito? Quais as imagens que eles fazem e/ou formulam em suas mentes? Quais compreensões matemáticas referentes à Integral de Linha de campos vetoriais quando interpretada como trabalho realizado podem ser enriquecidas e/ou reconstruídas por meio de tarefas integradas a um software? Essas questões contribuíram para a geração de uma pergunta–diretriz:

Que imagem de conceito e definição de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais podem ser inferidas de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral quando interpretada fisicamente como trabalho realizado, mobilizados por eles na resolução de tarefas que envolvam tal conceito?

Essa pergunta foi, portanto, construída por meio de idas e vindas ao referencial teórico além de outras leituras referentes a trabalhos em Educação Matemática dos quais também utilizaram esses referenciais, além de muitas reflexões no nosso grupo de pesquisa liderado pelo orientador dessa pesquisa. É importante ressaltar ao leitor que a organização e escrita desse trabalho sofreram muitos ajustes até tomar uma forma mais adequada a fim de facilitar a leitura e o entendimento de todo o processo de investigação.

Após algumas reflexões acerca do referencial, pudemos refinar as questões as quais buscamos investigar nesse trabalho: 1) Quais imagens de conceitos (TALL & VINNER,1991) referentes às Integrais de Linha de Campos Vetoriais se constitui no sistema cognitivo do estudante de Cálculo Diferencial e Integral III? 2) É possível (re)construir ou enriquecer essa imagem de conceito em tarefas nas quais se faz presente uma tecnologia informática? 3) Quais possíveis dificuldades de compreensão podem ser apontadas nesse processo? Essas perguntas de caráter investigativo vão balizar toda a dinâmica metodológica da pesquisa. E por meio da teoria das imagens de conceitos acreditamos ser possível analisar qualitativamente as atividades de campo.

O objetivo da pesquisa consiste em investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais evocadas pelos estudantes de um curso de Física. Para isso, pretendemos expor os estudantes a atividades matemáticas constituídas de questões que visam motivar a evocação dessas imagens de conceitos. Além disso, pretende-se captar as definições de conceitos dos estudantes por meio das respostas escritas confrontando-as com a definição formal e estabelecendo possíveis aproximações. A integração do Maple em algumas atividades tem o objetivo de induzir diferentes imagens de conceitos ou até mesmo “novas” produções.

Considerando a questão de investigação e o objetivo da pesquisa, nossos estudos privilegiam as relações de ensino e aprendizagem entre professores e alunos. Além disso, contribui para a geração de um quadro de conhecimentos acerca das compreensões matemáticas emergentes dos estudantes de Cálculo III referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais. Dessa forma, auxilia os professores e os departamentos a refletirem sobre certas ações no preparo de ambientes de aprendizagem, aulas acerca do assunto ou até mesmo materiais didáticos que tratam desse conteúdo.

5.2 Procedimento Metodológico

Adotamos na pesquisa uma metodologia qualitativa que engloba os aspectos metodológicos de experimentos de ensino. Essa opção metodológica surge no momento em que se constitui os caminhos da investigação e conforme apontamento de Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999) que aponta essa metodologia como opção para a pesquisa que usa uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados. A forma descritiva de obter os dados, o contato direto do pesquisador com o objeto de estudo, a valorização do processo e não somente do produto final e a descrição das perspectivas dos sujeitos pesquisados determinaram essa escolha (BOGDAN; BIKLEN, (1994); LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Segundo Lüdke e André (1986), as escolhas metodológicas dependem do problema e da questão que vai ser investigada. De acordo com esses autores, a investigação desenvolve-se numa fase exploratória, sucedendo para uma fase decisiva e de descoberta.

Para a coleta de dados estaremos desenvolvendo três métodos: observações, entrevistas semiestruturadas e aplicações de instrumentos de coleta. Estes instrumentos de coleta serão as atividades de 1 a 4 na forma de teste.

Os métodos de coleta podem parecer com os métodos de entrevista clínica de Piaget, porém está mais focado nos processos executados pelos estudantes e, portanto, como afirma Barbosa (2009), se diferencia da entrevista clínica “[...] pelo fato de ser direcionado para o progresso dos estudantes e não para o conhecimento corrente dos estudantes, como se dá na entrevista clínica. Seu foco principal é a análise do raciocínio desses estudantes” (p.87).

5.3 Experimentos de Ensino

O interesse desse trabalho consistiu em investigar as imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais a partir de atividades desenvolvidas e executadas em um ambiente no qual se faz presente um CAS. Com o experimento de ensino seria possível verificar como os alunos produziriam suas compreensões matemáticas e, portanto, por meio das respostas registradas, analisaríamos as definições de conceitos por meio do referencial.

O Experimento de Ensino é um procedimento metodológico de coleta dos dados, que consiste em uma série de encontros entre os estudantes e o pesquisador por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os estudantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades pré-elaboradas (Barbosa, 2009).

Os experimentos de ensino não delimitam um tempo para ser trabalhado. Isso é evidenciado em algumas variações no procedimento de diversas pesquisas (BENEDETTI, 2003; MENK, 2005; OLIMPIO, 2006; SCUCUGLIA, 2006 VILLARREAL, 1999). Os períodos de tempo utilizados dependiam das atividades e dos objetivos propostos por cada pesquisa.

Esse procedimento se despontou nos Estados Unidos da América por volta de 1970, o que propiciou esse crescimento de adoção do procedimento foi o fato de que as metodologias experimentais utilizadas em Educação e, consequentemente na Educação Matemática, até aquele momento, sofriam forte influência dos modelos de pesquisa usados para as Ciências Naturais (BARBOSA, 2009). Entretanto, esses modelos não eram adequadas para investigar a produção matemática dos alunos e não favoreciam respostas de como esses criavam seus significados e compreensões. Na verdade, esses modelos consideravam somente o produto final e não as maneiras pelas quais essas construções ocorriam.

Nessa metodologia, o contato e a interação entre o pesquisador e o estudante favorecem o desencadeamento de produções matemáticas. Além disso, contribui para a obtenção e análise de dados em estudos de pesquisadores que utilizam a metodologia (STEFFE;THOMPSON, 2000; BENEDETTI, 2003; BARBOSA, 2009).

A Metodologia de Experimento de Ensino é uma ferramenta conceitual para ser utilizada na organização de atividades e, derivada da entrevista clínica de Piaget, é voltada para a exploração da matemática dos estudantes (BARBOSA, 2009). No entanto, o Experimento de Ensino é direcionado para o progresso dos estudantes e não para o conhecimento corrente dos estudantes, como se dá na entrevista clínica. O principal é a análise do raciocínio dos estudantes.

> Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não

> apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (BARBOSA, 2009, p. 87).

Esta metodologia se constitui de atividades pré-elaboradas, com questões abertas com o objetivo de contribuir para a geração de conjecturas desenvolvida pelos estudantes que podem ir além dos propósitos das atividades. O papel do professor pesquisador é de observar o tempo todo às questões e situações emergentes na execução das atividades e, também, de possíveis hipóteses produzidas na condução dos experimentos.

Barbosa (2009) aponta que, apesar da literatura indicar que o período de tempo utilizado nos experimentos costuma ser extenso (de um semestre a um ano), há pesquisas (BENEDETTI, 2003; MENK, 2005; OLIMPIO, 2006; SCUCUGLIA, 2006; VILLARREAL, 1999) "[...] que utilizaram uma variação desse procedimento, na qual os alunos puderam ser filmados e observados atentamente em períodos de tempo que dependiam das atividades e dos objetivos propostos por cada pesquisa" (BARBOSA, 2009, p.86). Assim, observou-se que nas pesquisas citadas pela autora o tempo necessário e utilizado para os métodos de experimentos de ensino se tornou bem flexível, dependendo dos objetivos e focos em cada estudo. Benedetti (2003), por exemplo, realizou atividades através de experimentos de ensino, em pouco mais de um mês, sobre os conteúdos de funções. Este exemplo justifica o tempo de três meses, aproximadamente, utilizado para Barbosa (2009) na sua pesquisa.

5.4 Os Sujeitos da Pesquisa

Para o desenvolvimento da pesquisa foram convidados, inicialmente, cinco voluntários e cinco voluntárias. A metade dos participantes (Aurora, Caroline, André, Nina, Luis) já haviam sido aprovados em Cálculo Diferencial e Integral III e os outros (Misa, Livia, Isaac, Vilmara, Kira) estavam cursando a disciplina. O nome de cada participante aqui referido é fictício e foi escolhido pelo próprio estudante. Esses (as) estudantes são alunos (as) no curso de Licenciatura em Física de uma instituição pública do Estado de Minas Gerais, oferecido no período noturno. O critério da escolha foi concordado entre pesquisador e orientador.

A organização das datas de encontro entre os sujeitos e pesquisador foi previamente planejada em junho de 2012, quando nesse período iniciou-se uma greve de docentes e técnicos administrativos na maior parte das instituições públicas federais.

Pelo exposto acima, decidimos esperar o término da mobilização, visto que os encontros dependiam da presença e frequência dos estudantes na Instituição local da pesquisa. Não imaginávamos que essa seria uma das greves mais extensas da história do magistério federal, completando 104 dias. Isso prejudicou um pouco o andamento da pesquisa. Por vezes tentei marcar encontros com os sujeitos nesse período. Todavia não conseguia equacionar os horários dos diferentes sujeitos. A implementação da pesquisa, por essa razão, foi suspensa. E o seu desenvolvimento interrompido, no planejamento e na execução da pesquisa de campo.

Após esse período foi possível dar início à pesquisa de campo. Começamos com Misa, Livia, Aurora, Isaac, Kira, Nina, André, Caroline, Rodrigo e Vilma. Após o primeiro encontro, Vilma, Caroline e Rodrigo desistiram de continuar. Dessa forma, continuamos com sete estudantes.

5.5 A Coleta de Dados

Em setembro foi possível implementar a pesquisa por meio de encontros que ocorreram até dezembro. Esses encontros constituíram duas etapas:

Etapa 1 – Questionário Escrito, Atividade 1 e Atividade 2: levantamento das possíveis concepções sobre alguns conceitos físicos e matemáticos prévios;

Etapa 2 – Atividade 3, Atividade 4 e Entrevista Individual: Investigação de elementos que constituem a imagem de conceito e definição de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado e suas possíveis relações com a produção de respostas dadas à entrevista;

Foi um total de dez encontros realizados de 27 de setembro de 2012 a 4 de dezembro do mesmo ano. Precisamente tivemos encontros em: 27/09/2012, 04/10/2012, 18/10/2012, 08/11/2012, 13/11/2012, 20/11/2012, 22/11/2012, 27/11/2012, 30/11/2012 e 04/12/2012. Dois desses encontros (27/09/2012 e 04/10/2012) foram para realização de um questionário. Nesse questionário cada participante respondeu, individualmente e em linguagem escrita, a nove questões sobre conceitos prévios de Análise Vetorial e sobre as impressões acerca da definição formal do Integral de Linha transcrita de um livro didático. E oito encontros para a aplicação das tarefas totalizando 420 minutos videogravados.

Algumas dessas tarefas, Atividade 1 e Atividade 2, foram respondidas tanto individual quanto em grupo. Não havia condições restritas para essas tarefas já que o objetivo dessas era levantar dados relativos à algumas concepções sobre Campos Vetoriais, Parametrização de curvas, Força e Trabalho, isto é, alguns conhecimentos prévios.

As tarefas realizadas coletivamente, Atividade 3 e Atividade 4, caracterizaram um experimento no qual cada grupo de participantes, em horários exclusivos, interagiam entre si e com o Maple. As interações foram motivadas por questões relativas aos conceitos afins do Integral de Linha. Além disso, registramos 95 minutos de entrevistas realizadas individualmente com os sujeitos.

O material coletado para análise está presente:

_ Nas respostas escritas fornecidas por cada participante às questões propostas nas tarefas;
_ Nas respostas escritas fornecidas pelos grupos às questões propostas nas tarefas;
_ Nas transcrições das gravações em vídeo do diálogo gerado entre os membros dos grupos e;
_ Nas transcrições das gravações em vídeo fornecidas por cada participante às questões propostas na entrevista final;

A elaboração das questões das tarefas foi precedida por uma discussão com professores pesquisadores em Educação Matemática do ensino superior pertencentes à Universidade Federal de Juiz de Fora no período de maio a julho. E a versão final foi elaborada, de acordo com a literatura na área, das sugestões apresentadas pelos professores e, naturalmente, do meu desejo curioso como pesquisador.

O momento da realização dos experimentos para alguns participantes foi enriquecido por uma coincidência acadêmica dos conteúdos da disciplina na qual estavam matriculados. Os estudantes que estavam assistindo as aulas de Cálculo III pela primeira vez tiveram a oportunidade de confrontar os conceitos vistos em sala de aula com aqueles abordados nas nossas atividades. Isso porque diversas vezes os conceitos explorados em nossas atividades, coincidiam com o conteúdo ministrado pelo professor da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III naquela ocasião. Por algum momento, fiquei surpreso e apreensivo. No entanto, essa experiência, não prevista, contribuiu para a geração de diversas compreensões matemáticas enriquecendo assim nossos dados.

6 – ANÁLISE DOS DADOS

Na definição de Integral de Linha de Campos Vetoriais estão explícitos alguns conceitos prévios como Campo Vetorial Contínuo e Curva Lisa dada por uma função vetorial. Decidimos, dessa forma, desenvolver as tarefas 1 e 2, chamadas de Atividade 1 e Atividade 2 que abordassem Curvas e Campos Vetoriais com o propósito de obter concepções referentes a esses conceitos. Essas tarefas visavam explorar conceitos prévios e pertinentes ao conceito da Integral de Linha de Campos Vetoriais. Entendemos que haveria a necessidade de levantar esses dados, uma vez que na análise dos elementos que compõem a imagem de conceito referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho pudéssemos confrontar com os elementos mobilizados para responder. Portanto, as considerações dessa parte serão discutidas de modo sucinto numa primeira etapa e, eventualmente, analisadas ao realizar as inferências dos elementos da imagem de conceito através das respostas dos sujeitos às tarefas 3 e 4, chamadas de Atividade 3 e Atividade 4.

As duas últimas (Atividade 3 e Atividade 4) objetivaram-se em gerar elementos da imagem de conceito e definição de conceito associados às respostas dos sujeitos. O quantitativo de questões por tarefas foi sugerido em razão da necessidade de geração do máximo de dados possíveis. Essa necessidade é decorrente do número reduzido de trabalhos em Educação Matemática superior que investigam esses objetos de ensino pertencentes às ementas de Cálculo Diferencial e Integral. Sobretudo das Integrais de Linha de Campos Vetoriais.

Cada tarefa foi composta por aproximadamente seis questões. Pensávamos, segundo Tall (1991), na necessidade de criação de dados suficientes para a geração de formas de conceber e expressar conceitos matemáticos relativos à Integral de Linha de Campos Vetoriais (VINNER, 1991, TALL e VINNER, 1981). Como não há investigações anteriores em Educação Matemática com subsídios pedagógicos relativos à Integral de Linha de Campos Vetoriais ou objetos matemáticos que a constituem, acreditávamos que, aumentando o quantitativo d questões analisados poderiam facilitar a inferência de elementos da imagem de conceito referentes à

Integral de Linha de Campos Vetoriais. Além disso, poderíamos contribuir para futuras pesquisas através dos subsídios gerados e registrados.

Com base nessas referências, desenvolvemos uma análise destacando as questões de mais interesse para essa pesquisa. E analisamos os dados priorizando os registros escritos. Quando necessário, recorríamos às transcrições dos áudios tendo acesso assim a aspectos da imagem de conceito de alguns indivíduos o que, possivelmente, não teríamos, caso nos restringíssemos a analisar apenas informações obtidas a partir das respostas escritas.

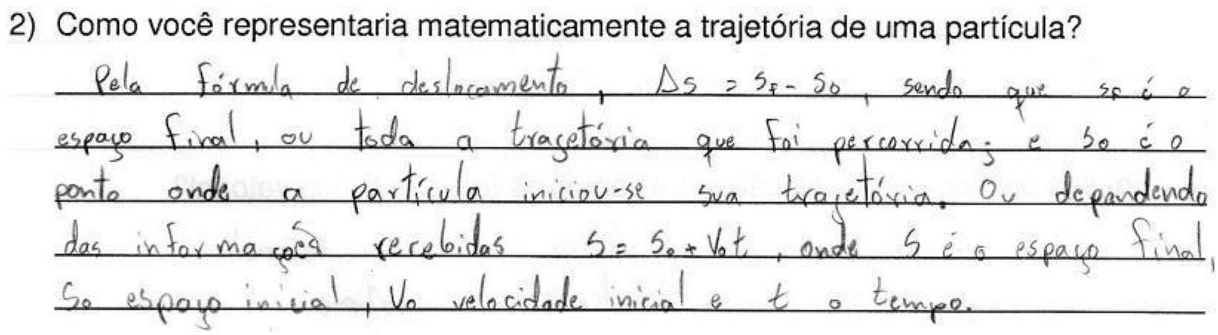
Procuramos obter elementos que compõem a imagem de conceito e definição de conceito dos sujeitos envolvidos, evidenciando as interpretações dadas ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais, bem como as propriedades e procedimentos associados que foram mobilizados na formulação das respostas analisadas.

6.1 Etapa 1: Análise e Discussões

No questionário, as questões de 1 a 3 visava a obtenção de dados sobre a relação entre trajetória e curva parametrizada ou parametrização.

Analisando as respostas, entendemos que todos os estudantes concebem trajetória como caminho percorrido por uma partícula, isto é, possuem elementos cognitivos associados à trajetória que compõem as imagens de conceitos referentes à curva.

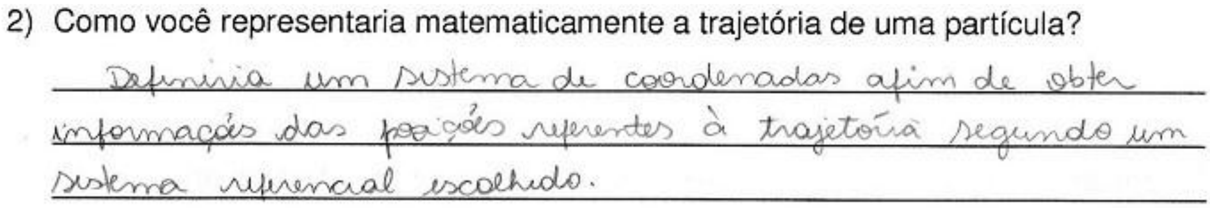
Quanto à representação matemática das curvas, houve respostas escritas diferentes. Não configurando, de acordo com nosso referencial, necessariamente concepções diferentes. Entendemos que no momento de responder a questão, houve a evocação de diferentes porções das imagens de conceito. Alguns (André, Caroline) sugeriram a representação por meio de um sistema de coordenadas definido e informações referentes às posições da partícula. Outros (Aurora, Misa, Livia) escreveram a fórmula do deslocamento $s=s_o + vt$. Isaac e Vilmara responderam por meio de desenho de uma curva. Veja:



2) Como você representaria matematicamente a trajetória de uma partícula?

Pela fórmula de deslocamento, $\Delta S = S_f - S_0$, sendo que S_f é o espaço final, ou toda a trajetória que foi percorrida; e S_0 é o ponto onde a partícula iniciou-se sua trajetória. Ou dependendo das informações recebidas $S = S_0 + V_0 t$, onde S é o espaço final, S_0 espaço inicial, V_0 velocidade inicial e t o tempo.

Figura 4 – Resposta de Caroline à questão 2, Questionário Escrito.



2) Como você representaria matematicamente a trajetória de uma partícula?

Definiria um sistema de coordenadas afim de obter informações das posições referentes à trajetória segundo um sistema referencial escolhido.

Figura 5 – Resposta de André à questão 2, Questionário Escrito.

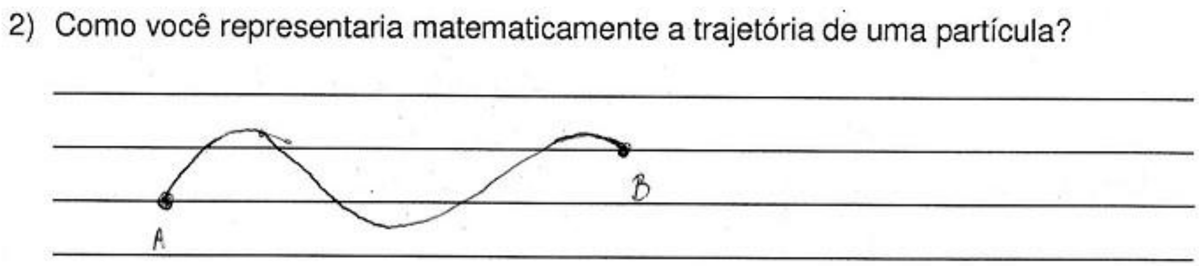
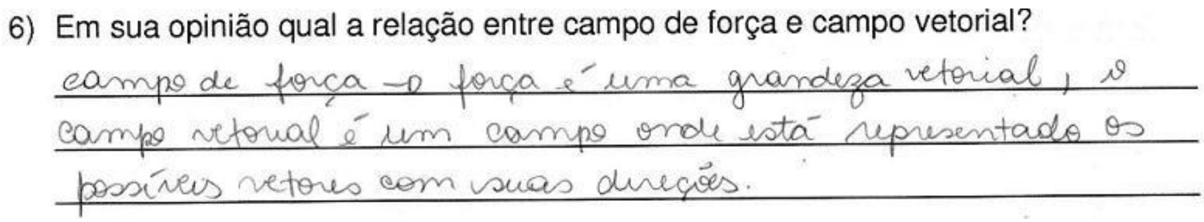


Figura 6 – Resposta de Isaac à questão 2, Questionário Escrito.

De acordo com os conceitos envolvidos e definidos por Stewart, as definições referentes às trajetórias ou curvas dadas pelos sujeitos estão associadas, na maior parte, a objetos da Cinemática, área da Física.

As questões 4, 5 e 6 visava a obtenção de concepções referentes a campos vetoriais.

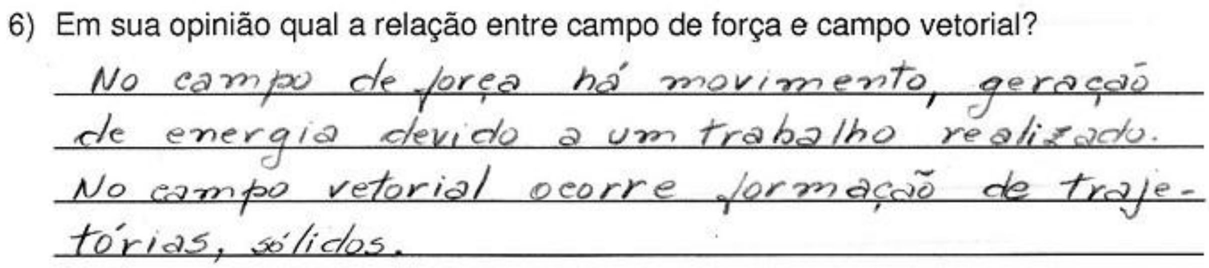
As respostas dadas pelos sujeitos tiveram aproximações e descrições físicas como campo gravitacional ou campo elétrico. Alguns descreveram seus entendimentos de campo de força como área de influência de uma força. Entretanto, as definições de conceito relativas ao campo vetorial divergiram. Enquanto André, Aurora, Misa e Livia relacionaram força como grandeza vetorial e, portanto, campo vetorial podendo representar um campo de força, outros como Isaac, Simone, Nina, Luis e Kira não associaram campo de força e campo vetorial demonstrando não compreender a relação entre esses objetos. Veja algumas:



6) Em sua opinião qual a relação entre campo de força e campo vetorial?

campo de força → força é uma grandeza vetorial, o campo vetorial é um campo onde está representado os possíveis vetores com suas direções.

Figura 7 – Resposta de André à questão 6, Questionário Escrito.



6) Em sua opinião qual a relação entre campo de força e campo vetorial?

No campo de força há movimento, geração de energia devido a um trabalho realizado. No campo vetorial ocorre formação de trajetórias, sólidos.

Figura 8 – Resposta de Nina à questão 6, Questionário Escrito.

Nas questões 7, 8 e 9 propomos um levantamento prévio das relações que os estudantes fazem da Integral de Linha de Campos Vetoriais e Trabalho realizado.

Ao descreverem o conceito trabalho realizado, todas as respostas continham objetos físicos da mecânica ou termodinâmica. Alguns recorreram à fórmula de Trabalho descrevendo as grandezas envolvidas no conceito. Outros utilizaram essa fórmula para definir o conceito como um produto escalar entre Força e Deslocamento restringido à expressão matemática.

Para os entendimentos prévios sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais, podemos destacar aqueles que definiram-na como “modelo matemático para o cálculo do Trabalho” ou “cálculo do fluxo que passa pela superfície”. Alguns não responderam alegando “falta de conhecimento devido” para explicar. Entendemos que esses sujeitos enfrentaram questões que nunca havia feito a eles. Isso é evidenciado pelas audiogravações, nas quais é possível identificar discussões e até mesmo choques quanto à necessidade de responder alguns conceitos.

Simone: *O que é força? É massa vezes aceleração.*

André: *Acho que deve ser outra coisa...essa aí é a fórmula para encontrar a grandeza força.*

Simone: *Não é a mesma coisa?*

André: *Acho que não. Devemos tentar descrever força como um conceito físico... mas sem falar de fórmula... não sei.*

Simone: *Eu nunca parei para pensar nessas coisas... E nunca fui questionado.*

Na Atividade 1, a questão 1-e seria nossa principal investigação sobre concepções sobre parametrização. Nove sujeitos realizaram essa tarefa. As respostas, em geral, sugerem concepções com referências a objetos matemáticos. Ocorreram, também, diversas referências à Física:

e) Explique o que você entende sobre a representação paramétrica de uma curva e sua relação com o conceito de trajetória.

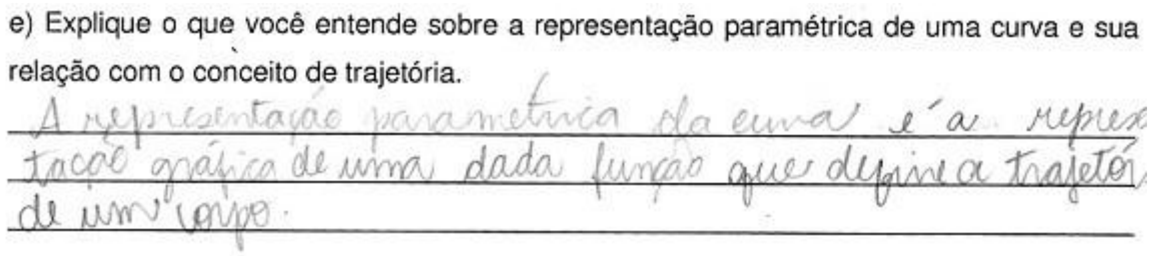
Por exemplo, ao chutarmos uma bola, a trajetória descrita é uma representação paramétrica do movimento bidimensional, ou seja, o movimento horizontal em função do tempo $x(t)$ e o movimento vertical em relação ao tempo $y(t)$. A trajetória representa y em função de x considerando o parâmetro t.

Figura 9 – Resposta de André a questão 1-e, Atividade 1.

e) Explique o que você entende sobre a representação paramétrica de uma curva e sua relação com o conceito de trajetória.

Trajetória é o caminho percorrido por uma partícula, por exemplo. Quanto eu tenho x em função de α, por exemplo e y também em função de α podemos escrever x e y em relação ao parâmetro α.

Figura 10 – Resposta de Aurora a questão 1-e, Atividade 1.

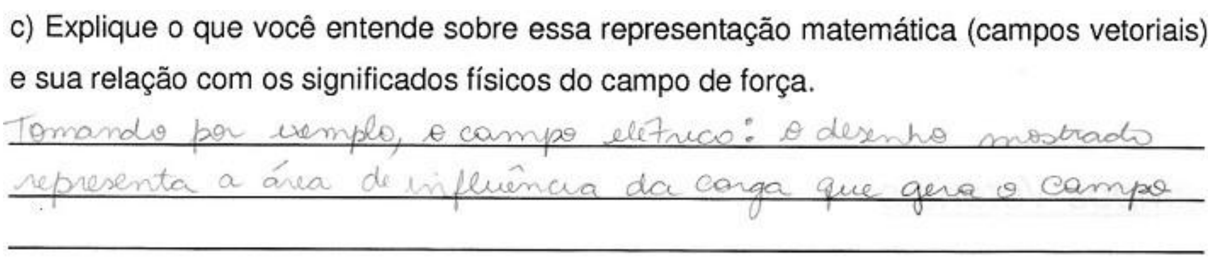


e) Explique o que você entende sobre a representação paramétrica de uma curva e sua relação com o conceito de trajetória.

A representação paramétrica da curva é a representação gráfica de uma dada função que define a trajetória de um corpo.

Figura 11 – Resposta de Livia a questão 1-e, Atividade 1.

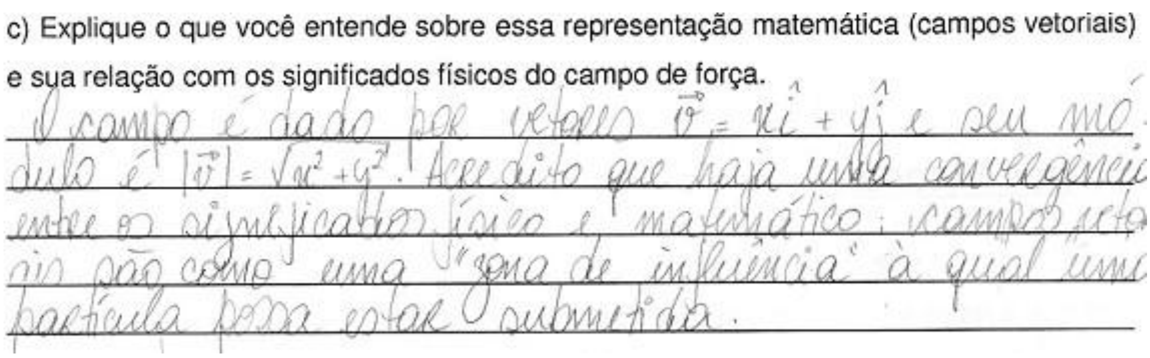
Na Atividade 2, a questão 1-c tinha o objetivo de obter por meio das respostas dos sujeitos as relações entendidas por eles entre campos vetoriais e campo de força. Nove sujeitos participaram. As respostas dos sujeitos sugerem uma compreensão razoável da relação entre campo vetorial e campo de força. A referência, as vezes, apontava a representação de uma área de influência de uma força pelo campo vetorial.



c) Explique o que você entende sobre essa representação matemática (campos vetoriais) e sua relação com os significados físicos do campo de força.

Tomando por exemplo, o campo elétrico: o desenho mostrado representa a área de influência da carga que gera o campo

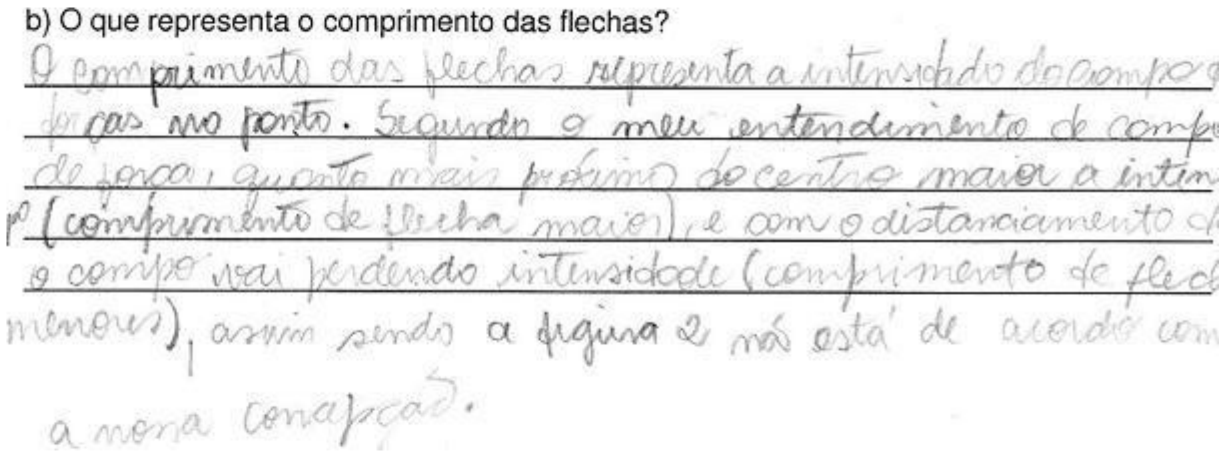
Figura 12 – Resposta de André a questão 1-c, Atividade 2.



c) Explique o que você entende sobre essa representação matemática (campos vetoriais) e sua relação com os significados físicos do campo de força.

O campo é dado por vetores $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$ e seu módulo é $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Acredito que haja uma convergência entre os significados físico e matemático: campos vetoriais são como uma "zona de influência" à qual uma partícula possa estar submetida.

Figura 13 – Resposta de Isaac a questão 1-c, Atividade 2



b) O que representa o comprimento das flechas?

O comprimento das flechas representa a intensidade do campo de forças no ponto. Segundo o meu entendimento de campo de força, quanto mais próximo do centro maior a inten (comprimento de flecha maior), e com o distanciamento d o campo vai perdendo intensidade (comprimento de flec menores), assim sendo a figura 2 não está de acordo com a minha concepção.

Figura 14 – Resposta de Livia a questão 1-c, Atividade 2

Nessa primeira etapa da realização do questionário e as Atividades 1 e 2, conseguimos estabelecer com os sujeitos uma direção quanto os objetivos da pesquisa e propósitos das próximas tarefas. Além disso, foi possível obter dados suficientes para o possível confrontamento com as respostas das próximas tarefas.

6.2 Síntese da Análise dos Dados: Etapa 1

A partir da análise dos dados obtidos nessa etapa foi possível identificar alguns elementos da imagem de conceito referente a Campos Vetoriais além de porções de elementos da imagem de conceito referentes à Curvas Parametrizadas. Sintetizamos da seguinte forma:

1 - Trajetória é um caminho descrito por uma partícula;

2 – As imagens de conceito referentes a Curvas Parametrizadas se restringem a procedimentos matemáticos de parametrização de curvas em R^2 memorizados.

3 – Campos Vetoriais podem ser campos de força;

4 – As respostas sugerem a existência de pouco ou nada de elementos da imagem de conceito referente ao conceito de Campos Vetoriais como uma função.

As informações obtidas nessa etapa possibilitaram levantar outras questões que fogem do interesse dessa pesquisa. O objetivo dessa etapa de obter dados sobre algumas concepções matemáticas ou físicas foi surpreendido pela geração de regiões de investigação para outras pesquisas nessa área. Muitos subsídios sobre Curvas e Campos Vetoriais gerados nessa etapa podem servir para investigações futuras e, portanto, não se mostra como interesse dessa pesquisa o seu aprofundamento.

6.3 Etapa 2: Análise e Discussões

A maior parte das questões propostas na Atividade 3 estão relacionadas à exploração de conceitos ou descrição desses conceitos. Algumas questões estão abordando procedimentos matemáticos técnicos. Para essas questões que abordaram procedimentos matemáticos, adotamos o software Maple para agilizar a resolução e gerar respostas rápidas. As sequências de comandos utilizadas foram apresentadas e estão registrados nas folhas de questões das tarefas para serem digitadas. Essa adoção visa a ampliação de estímulos para a mobilização de diferentes partes da imagem de conceito.

Pretendemos, por meio das respostas dadas, inferir elementos que constituem a imagem de conceito e definição de conceito referente ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado.

As questões da Atividade 3 visam identificar as relações que possam ser estabelecidas entre o Cálculo do Trabalho realizado por uma força e Integrais de Linha de Campos Vetoriais. Há uma proposta de passagem do trabalho como soma dos produtos escalares entre Força e Deslocamento estimulado visualmente por um gráfico com dois segmentos de retas ligando os pontos (1,2) a (9,8) o trabalho como o limite da soma de Riemann dos produtos escalares entre a força (campo vetorial) atuando pontualmente na linha e a componente tangencial unitária do deslocamento.

Na questão 1, a expectativa seria a de que os estudantes estimassem o trabalho realizado por meio do cálculo da soma dos produtos escalares entre a Força e a sua componente tangencial vezes o deslocamento em sete segmentos tal que ds=2.

Lembrando que nesse caso o trabalho poderia ser calculado em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da Força. O estímulo visual proporcionado pela figura visava evocar elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha em relação ao comprimento do arco.

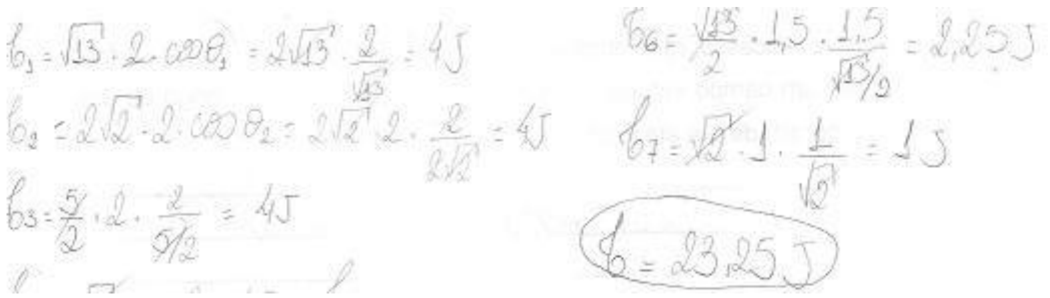


Figura 15 – Resposta da dupla Isaac e Kira à questão 1, Atividade 3

A resposta da dupla Isaac e Kira (figura 15) sugere a mobilização de elementos da imagem de conceito referente ao trabalho realizado por uma força. Ele não se referiu a Integral. Dessa forma, entendemos que o sujeito não evocou elementos da imagem de conceito referente à Integral de Linha quando interpretado fisicamente como trabalho realizado.

A resposta da dupla Misa e Livia sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha em relação ao comprimento do arco quando interpretado fisicamente como trabalho realizado. A representação expressa na resposta sugere essa mobilização. No entanto vemos uma manipulação do símbolo da Integral não válida.

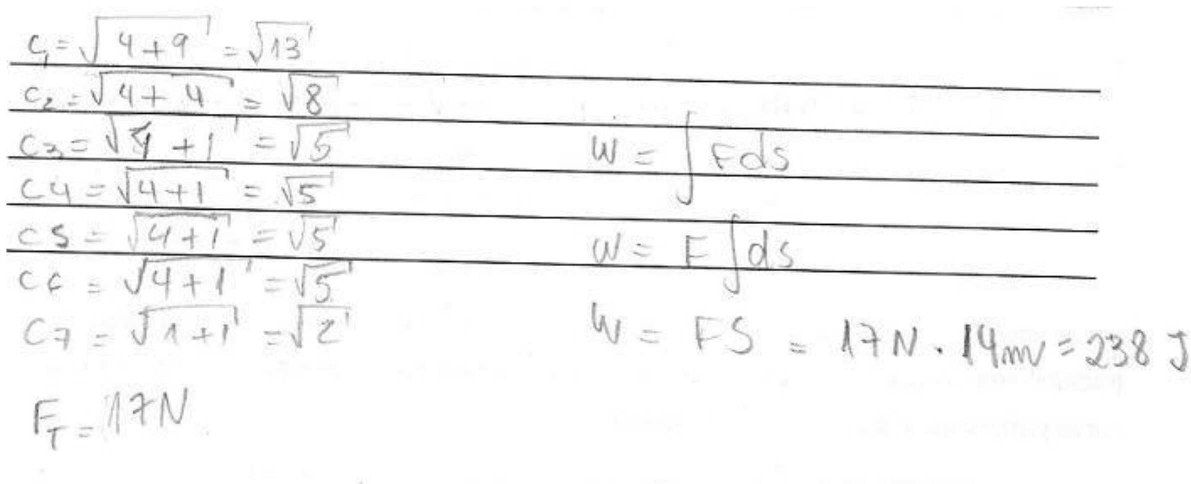


Figura 16 – Resposta de Livia e Misa à questão 1, Atividade 3

A resposta da dupla Aurora e André sugere a mobilização de elementos da imagem de conceito referente ao trabalho realizado por uma força. Na resposta não há referência a Integral. Dessa forma, entendemos que o sujeito não evocou elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha quando interpretado fisicamente como trabalho realizado. E ainda vemos, que o cálculo realizado foi inválido, uma vez que tomaram o deslocamento total vezes o somatório das forças.

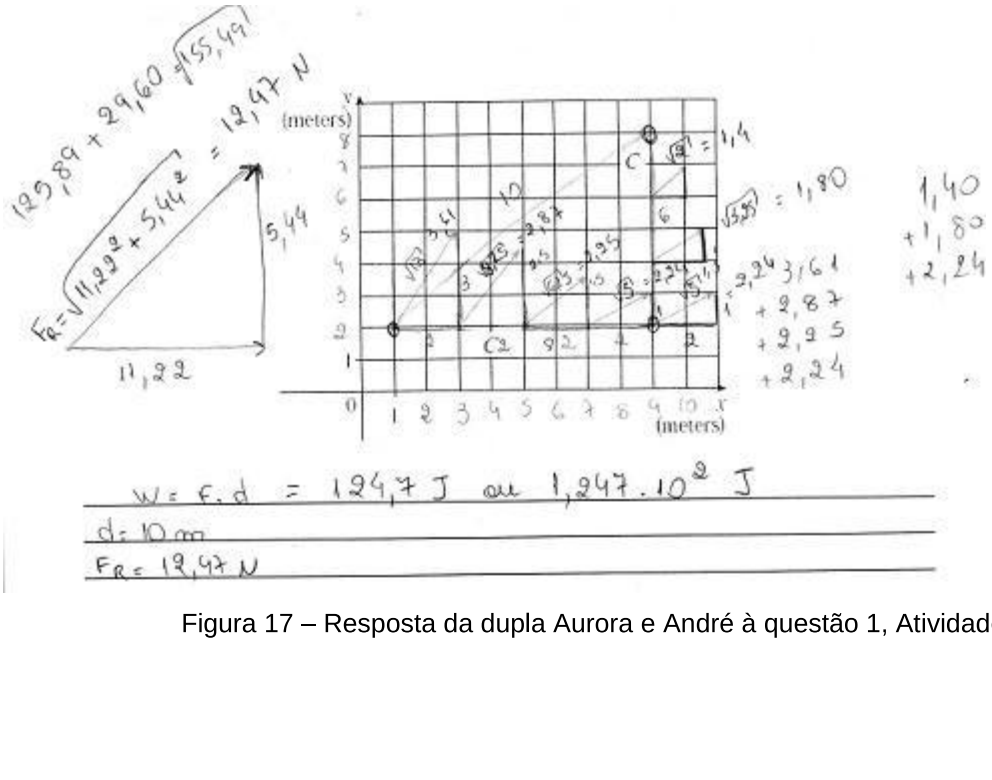


Figura 17 – Resposta da dupla Aurora e André à questão 1, Atividade 3

Porém no diálogo transcrito abaixo vemos que a fala de André sugere a mobilização de elementos referente ao conceito de Integral. Veja o diálogo da dupla André e Aurora:

André: *Módulo é. Mas olha aqui. Se calcular a força pra ir daqui até aqui vai ser a integral de Fdr ou ds no caso. Só que aí...um método mais prático seria calcular...porque a integral faz isso... é calcular essa força somado com essa...essa...essa. Mas se aqui é o tamanho total, o deslocamento, então faz o total da força vezes...*
Aurora: *É isso que não to entendendo...*
André: *Ou você vai querer ir daqui até aqui? O deslocamento é 2, a força raiz de treze...aí faz esse...*
Aurora: *Porque o deslocamento total a gente sabe que é 10, aí no caso eu teria 10 e o somatório dessas forças?*
André: *Não sei... Ah! Pode ser sim. Só não sei se é certo.*

Percebemos no diálogo que há a evocação de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado. E quando André diz "...a Integral faz isso... é calcular essa força somado com essa...essa...essa..." isso sugere uma mobilização de elementos que constituem a imagem de conceito referente a Integral de Linha como limite da soma de Riemann.

Na questão 2, apresentamos uma curva suave parametrizada sob a ação de um campo vetorial que denominamos de força. E propomos a reconstrução do cálculo do trabalho realizado por uma campo vetorial F para mover uma partícula ao longo de uma curva parametrizada por r(t) de t=a até t=b pela Integral de Linha de Campos Vetoriais. As respostas variaram bastante, mas em todos os casos analisados houve uma mobilização de elementos da imagem de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado.

A única resposta que parece divergir um pouco é da dupla Misa e Livia. A resposta dessa dupla foi o produto escalar. Veja:

d) De acordo com esse processo, qual objeto matemático mais adequado para calcular o trabalho realizado por um campo vetorial F para mover uma partícula ao longo de uma curva parametrizada por r(t) de t=a até t=b?

O produto escalar.

Figura 18 – Resposta da dupla Misa e Livia à questão 1, Atividade 3

Essa resposta deixou-nos uma pouco surpreso. Sobretudo porque, de fato, o cálculo do trabalho realizado por uma força constante é feito pelo produto escalar. Como avaliar ou interpretar essa resposta de acordo com nosso referencial teórico? Apesar de esperar que respondessem a Integral ou o limite da soma de Riemann dos produtos escalares, pela construção realizada nas questões anteriores, lemos algo diferente.

O trabalho de uma força constante pontual é calculado pelo produto escalar entre os vetores força e deslocamento. Então, as respostas sugerem uma evocação da porção das imagens de conceitos referentes ao conceito de trabalho realizado numa partícula por uma força constante.

A questão 3 da Atividade 3 era direta. Perguntamos: “O que você entende do símbolo ?” Desejávamos identificar as relações que os estudantes fazem do Trabalho realizado e Integral de Linha por meio das respostas dadas às questões 2 e 3. E nesse caso inferir possíveis elementos da imagem de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais. Além disso, na questão 3, especificamente, queríamos saber que definições de conceitos referentes ao símbolo os estudantes expressam.

A resposta de Isaac sugere a mobilização de elementos da imagem de conceito referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais.

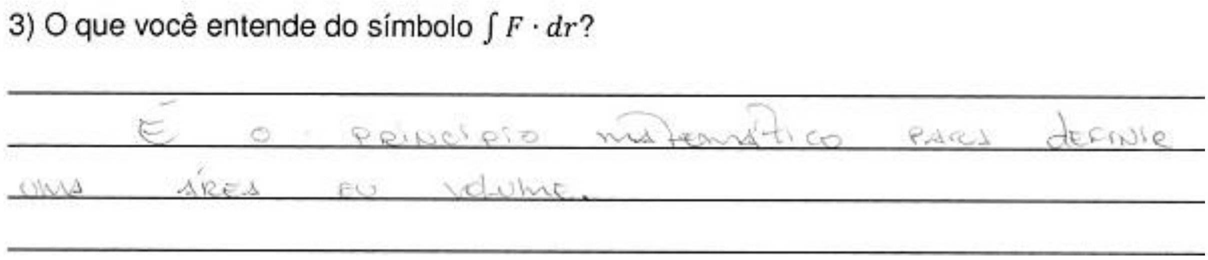
3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

Tomando pequenos deslocamentos dr, o campo seria Fdr, então $\int Fdr$ é uma "soma" dos pequenos Fdr.

Figura 19 – Resposta de Isaac à questão 3, Atividade 3

Nesse caso vemos uma falta de precisão matemática em F ou dr apesar de uma correta noção matemática do conceito do símbolo. De acordo com Tall & Vinner (1981), é possível afirmar que essa definição expressa na resposta da questão 3 evoca alguns elementos da porção das imagens de conceitos do estudante relativos ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais, apesar da imprecisão matemática. Vemos que o estudante expressa elementos como “pequenos”, “campo”, “deslocamentos” e “soma” evidenciando uma mobilização feita na direção dos objetos que constituem a definição formal.

Kira e Isaac estavam realizando a tarefa juntos. No entanto Kira respondeu diferente. Apesar de Kira, por meio de suas respostas, reconstruir o conceito de Integral de Linha adequadamente favorável à aceitação na comunidade matemática, não estabelece a relação esperada entre as questões 2 e 3.


3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

É o princípio matemático para definir uma área ou volume.

Figura 20 – Resposta de Kira à questão 3, Atividade 3

Vemos que o sujeito refere-se à Integral definida de uma função real de variável real. De acordo com o referencial, vemos que o sujeito evocou elementos de sua imagem de conceito referente a Integral de uma função real, quando interpretada geometricamente com f(x)>0. Um caso específico de Integral definida.

A dupla Lívia e Misa ao responderem a questão 3 expressaram uma definição de conceito referente a símbolo mobilizada por elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado. Veja:

3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$? $\int_C F \cdot ds$

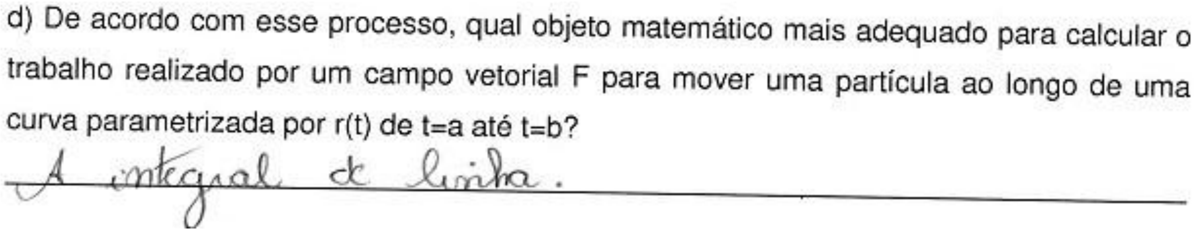
A integral $\int F ds$ é igual ao somatório do trabalho realizado em sistema.

Figura 21 – Resposta da dupla Misa e Livia à questão 3, Atividade 3

Mas é possível perceber uma falta de exposição das condições do Campo Vetorial e da função vetorial. Na entrevista, Livia deixa claro a sua dificuldade em ler definições matemáticas formais e compreendê-las:

Pesquisador: *A definição formal do Integral de Linha de Campos Vetoriais foi apresentada antes e depois das atividades. Em que momento você compreendeu melhor essa definição? Explique.*
Livia: *Eu tenho um problema muito grande com a matemática. O que é a representação! Se eu pegar a Matemática e a Física, a Física tem um monte de conta mas tem uma teoria que explica. Muitas vezes a teoria na Física ajuda. Na matemática você vai estudar o Cálculo, ele tem uma definição, tem uma função, escreve alguma coisa... mas eu não consigo abstrair. Por causa dessa dificuldade que eu tenho. Definição assim é problemático para mim. Em dupla era possível escrever alguma coisa mas eu sozinha ler e entender, era difícil. Esse tipo de definição se não tiver nada antes eu não consigo entender.*

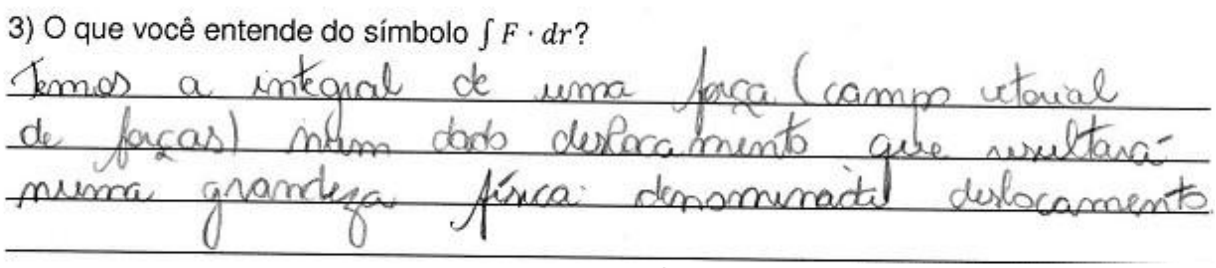
A definição de conceito expressa pela Aurora na questão 3 demonstra uma certa contradição com as imagens de conceitos evocadas nos itens das questões anteriores. No item d, questão 2, a resposta foi de que a Integral de Linha seria o objeto matemático mais adequado para calcular o trabalho realizado por um campo vetorial F para mover uma partícula ao longo de uma curva parametrizada.


d) De acordo com esse processo, qual objeto matemático mais adequado para calcular o trabalho realizado por um campo vetorial F para mover uma partícula ao longo de uma curva parametrizada por r(t) de t=a até t=b?

A integral de linha.

Figura 22 – Resposta de Aurora à questão 2-d, Atividade 3

Já na questão 3, a definição de conceito referente ao símbolo expressa na resposta da estudante revelou-se um pouco vaga:


3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

Temos a integral de uma força (campo vetorial de forças) num dado deslocamento que resultará numa grandeza física denominada deslocamento

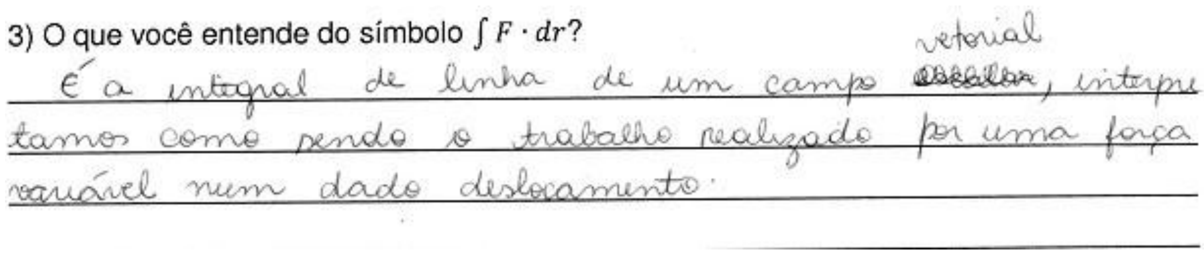
Figura 23 – Resposta de Aurora à questão 3, Atividade 3

Por essa razão e de acordo com nosso referencial, supomos que o sujeito tenha evocado uma porção de elementos de sua imagem de conceito relativos ao Trabalho realizado quando interpretado numericamente pela área do gráfico da Força x Deslocamento. Na questão 3, a resposta dada pelo sujeito faz referência a Integral de Linha como sendo "uma grandeza física denominada deslocamento". Nesse caso, não conseguimos inferir elementos da imagem de conceito referentes ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente. Na entrevista ela ainda diz ter consultado a Lei de Gauss, evidenciando assim a mobilização de outra porção da imagem de conceito referente a Integral de Linha para responder ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais:

Pesquisador: *Quando, pela primeira vez nessas atividades, foi perguntado a você a respeito do conceito do Integral de Linha de Campos Vetoriais, como elaborou sua* *resposta?*

Aurora: *Primeira coisa que pensei foi a lei de Gauss. Porque tava fresco na minha cabeça. A lei de Gauss vai calcular o fluxo que passa por uma superfície fechada. Integral de Linha também.*

Na questão 3, André expressa sua definição de conceito referente ao símbolo como a Integral de linha de um campo vetorial.



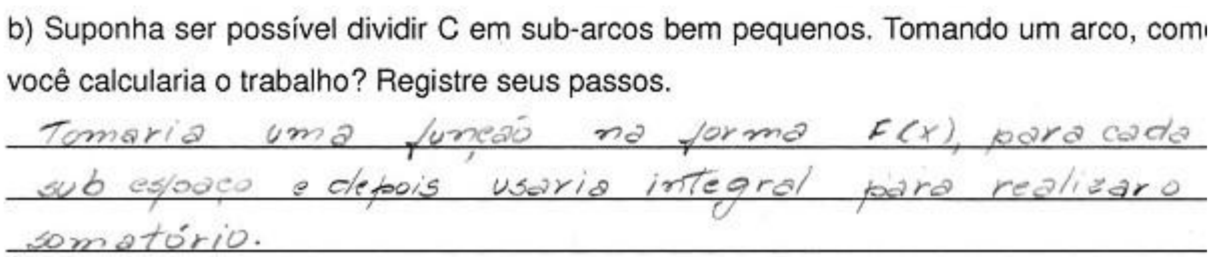
3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

É a integral de linha de um campo vetorial, interpretamos como sendo o trabalho realizado por uma força variável num dado deslocamento.

Figura 24 – Resposta de André à questão 3, Atividade 3

Em seguida, refere-se a essa Integral sendo interpretada como o trabalho, realizado por uma força variável num dado deslocamento. De acordo com nosso referencial, essa resposta sugere a evocação de um recorte das imagens de conceitos do estudante relativos a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado.

Nina estabeleceu uma relação entre trabalho e integral de linha de forma curiosa. No item b da questão 2, a estudante descreve a Integral como ferramenta para calcular um somatório:



b) Suponha ser possível dividir C em sub-arcos bem pequenos. Tomando um arco, com
você calcularia o trabalho? Registre seus passos.

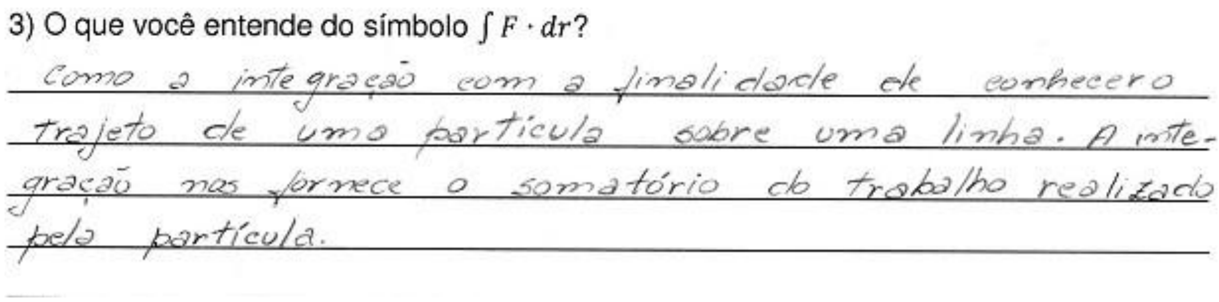
Tomaria uma funçaõ na forma F(x), para cada sub espaço e depois usaria integral para realizar o somatório.

Figura 25 – Resposta de Nina à questão 2-d, Atividade 3

Nesse caso, entendemos que Amorim evoca imagens de Conceitos referentes a integral definida. Já para a primeira parte, na qual refere-se a (x) e expressa “sub espaço”, não conseguimos inferir elementos de imagem de conceito. Amorim na entrevista constata essa evidência:

Pesquisador: *Quando, pela primeira vez nessas atividades, foi perguntado a você a respeito do conceito do Integral de Linha de Campos Vetoriais, como elaborou sua resposta?*
Nina: *Integral de Linha?... Saí do campo elétrico e fui para a Geometria. Pensei na Integral como soma. Fluxo. Questão geométrica sabe! Área. Somar te dá uma área. Geometria. Somando os vetores.*

Na questão 3, Nina expressa seu entendimento do símbolo como “a integração com a finalidade de conhecer o trajeto de uma partícula sobre uma linha”, expressando assim uma definição de conceito.


3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

Como a integração com a finalidade de conhecer o trajeto de uma partícula sobre uma linha. A integração nos fornece o somatório do trabalho realizado pela partícula.

Figura 26 – Resposta de Nina à questão 3, Atividade 3

Quando ela escreve “conhecer” a trajetória, entendemos que houve um conflito entre porções diferentes da imagem de conceito. Nesse caso, não conseguimos inferir elementos da imagem de conceito associados a sua definição. Já na segunda parte, Amorim descreve o ato de integrar como um somatório do “trabalho realizado pela partícula” expressando assim outra definição de conceito. Entende-se que a estudante evoca elementos de uma imagem de conceito relativos ao trabalho realizado por uma força que atua numa partícula para deslocá-la. Vemos alguma imprecisão matemática ou até mesmo física ao escrever a expressão “trabalho realizado pela partícula”. Todavia, entendemos que sua definição de conceito

relativo ao símbolo distancia-se do conceito de Integral de Linha. Sobretudo ao expressar objetos como “somatório” e “trabalho realizado pela partícula”.

A questão 4 propõe ao aluno que registre seus entendimentos referentes à definição formal da Integral de Linha transcrita do livro Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, de Diomara Pinto (1997). Nesse caso, desejávamos obter registros escritos sobre referências gerais relativas à definição formal da Integral de Linha de Campos Vetoriais dadas pelos sujeitos. E finalizamos perguntando ao sujeito sobre possíveis dúvidas sobre o conceito do Integral de Linha de Linha de Campos Vetoriais. Pedimos que descrevesse as dúvidas, caso existisse.

Na questão 4 fica foi possível inferir alguns elementos da imagem de conceito da Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente.

Ao pedir para registrar os entendimentos da definição formal dada, Aurora começa a se expressar por meio do verbo “querer” sugerindo assim a definição matemática como uma ferramenta para o cálculo.

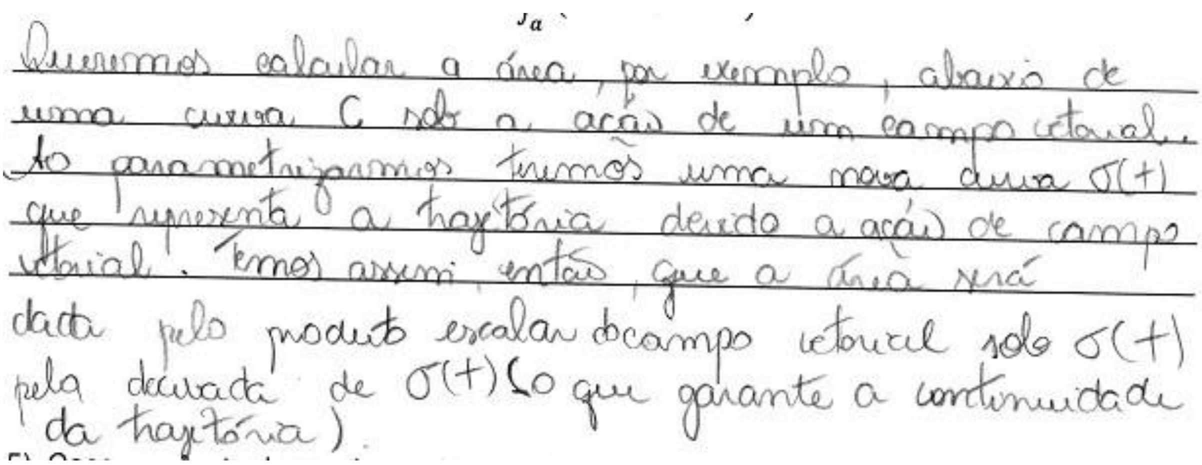
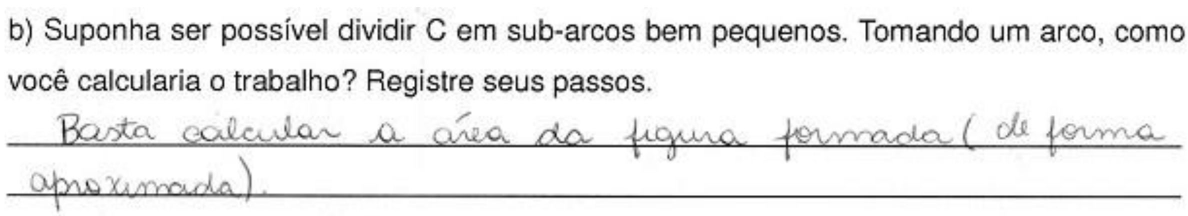

Queremos calcular a área, por exemplo, abaixo de
uma curva C sob a ação de um campo vetorial.
Ao parametrizarmos teremos uma nova curva σ(t)
que representa a trajetória devido a ação do campo
vetorial. Temos assim então, que a área será
dada pelo produto escalar do campo vetorial sob σ(t)
pela derivada de σ(t) (o que garante a continuidade
da trajetória).

Figura 27 – Resposta de Aurora à questão 4, Atividade 3

Nesse caso, a resposta sugere que uma evocação das imagens de conceitos referentes ao Trabalho como à área sob o gráfico. No entanto ela não se refere ao Trabalho realizado. Mas refere-se ao cálculo da área pelo produto escalar do campo Vetorial pela derivada de s(t). Entendemos que a estudante evoca elementos de uma porção de imagens de conceito referentes à Integral definida e relaciona com a Integral de Linha de campos vetoriais. Sua resposta à relação existente entre trabalho e Integral de Linha na entrevista revela essa concepção de integral como ferramenta:

Pesquisador: *Qual a relação que existe entre o Trabalho realizado por uma força e Integral de Linha de um Campo Vetorial?*
Aurora: *Trabalho é força conservativa. O fluxo é igual a zero. Você usa a Integral de Linha para calcular o trabalho assim como você pode utilizar para calcular o fluxo elétrico.*

A resposta de André sugere a evocação de alguns elementos da imagem de conceito semelhantes aos de Aurora. A resposta sugere uma evocação de elementos da imagem de conceito relativos ao cálculo do trabalho realizado como a área. No entanto, identificamos somente um registro dessa referência no item b da questão 2:


b) Suponha ser possível dividir C em sub-arcos bem pequenos. Tomando um arco, como você calcularia o trabalho? Registre seus passos.

Basta calcular a área da figura formada (de forma aproximada).

Figura 28 – Resposta de André à questão 2-b, Atividade 3

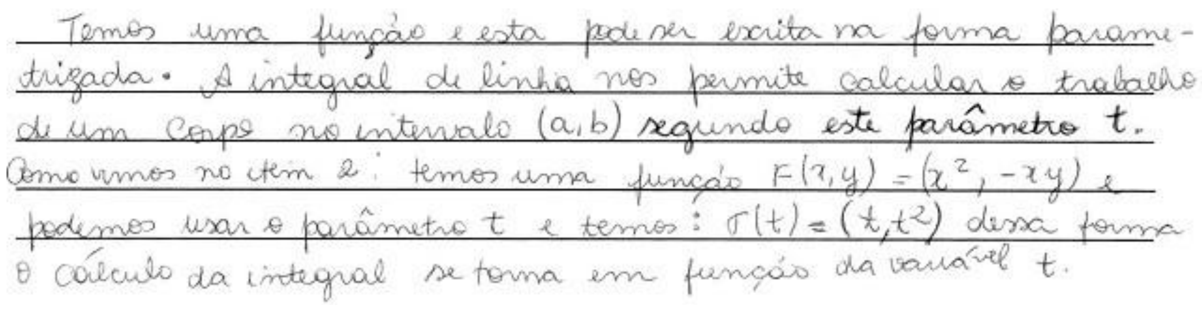

Temos uma função e esta pode ser escrita na forma parame-
trizada. A integral de linha nos permite calcular o trabalho
de um Corpo no intervalo (a,b) segundo este parâmetro t.
Como vimos no item 2: temos uma função $F(x,y) = (x^2, -xy)$ e
podemos usar o parâmetro t e temos: $\sigma(t) = (t, t^2)$ dessa forma
o cálculo da integral se torna em função da variável t.

Figura 29 – Resposta de André à questão 4, Atividade 3

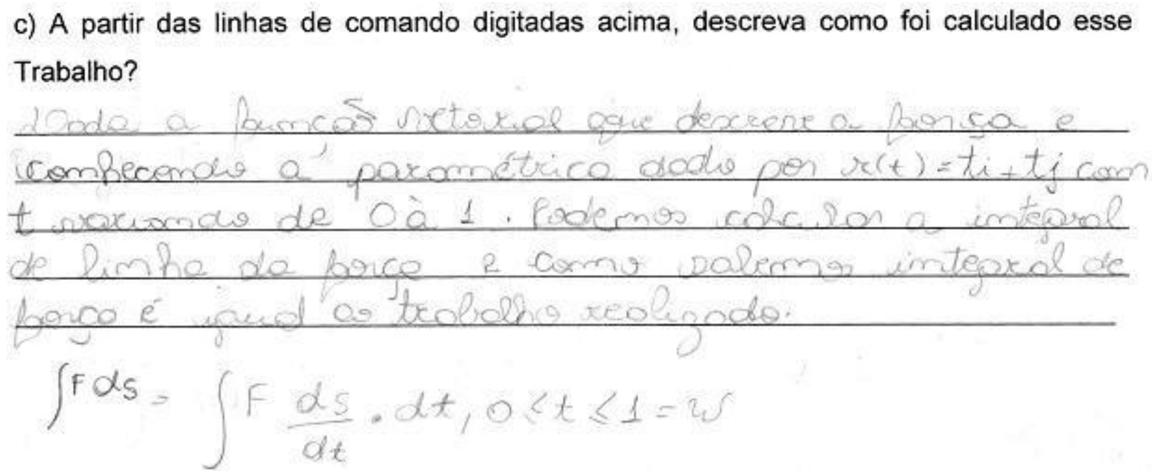
A Atividade 4 objetiva investigar as relações entre os sinais do Integral calculada, o comportamento dos campos vetoriais e a direção da trajetória nesse campo. Para evidenciar tais aspectos da imagem de conceitos utilizamos o software Maple para a geração gráfica dos campos vetoriais envolvidos e animação da partícula em movimento nesse campo traçando seu caminho. Buscamos, dessa forma, ampliar os conhecimentos sobre elementos que constituem a imagem de conceito relativa ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais quando contextualizado sob o ponto de vista da mecânica clássica Físico fisicamente.

Utilizamos na questão 3, uma figura como meio de mobilização nos sujeitos de uma representação visual do campo vetorial. O Maple também foi utilizado em algumas questões para o cálculo de integrais de linha no auxílio aos procedimentos de resolução.

A integração do Maple nas questões se deu por meio da descrição dos comandos para execução, isso porque a maioria dos sujeitos não conhecia o software. E entendemos que o objetivo dessa pesquisa orienta nosso propósito de não explorar formas diferentes de abordar resoluções por meio da utilização livre de softwares, mas de integrá-lo às questões como forma de estímulo visual ou agilidade procedimental segundo Barbosa (2009). Por essa razão, decidimos explicitar os comandos. Após a execução dos comandos realizados no item b da questão 1, pedimos no item c que os estudantes descrevessem os comandos executados para o Cálculo do Trabalho. Isso porque desejávamos investigar quais as imagens de conceitos poderiam ser mobilizados no ato de fazer a leitura dos comandos.

Na questão 5, pedimos que o sujeito calculasse Nessa questão deixamos livre para escolha na utilização ou não do Maple no cálculo uma vez que eles haviam conhecido os comandos para esse procedimento. Todos realizaram o cálculo pelo Maple.

No item c da questão 1, a dupla Misa e Lívia utiliza a expressão "função vetorial que descreve a força". Nesse caso, vemos a evocação de elementos inválidos do ponto de vista matemático. Veja:



c) A partir das linhas de comando digitadas acima, descreva como foi calculado esse Trabalho?

Dada a função vetorial que descreve a força e conhecendo a paramétrica dado por $r(t) = ti + tj$ com t variando de 0 à 1. Podemos calcular a integral de linha da força e como sabemos integral de força é igual ao trabalho realizado.

$$\int F\,ds = \int F \frac{ds}{dt} \cdot dt, \; 0 \leq t \leq 1 = W$$

Figura 30 – Resposta de Livia e Misa à questão 1-c, Atividade 4

Matematicamente está inadequado a referência que elas fazem da função vetorial descrevendo a força. A função vetorial representa a trajetória e, portanto, descreve a curva. Segundo Stewart (2010):

> Função vetorial, ou função a valores vetoriais, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. [...] estas funções são necessárias para descrever o movimento de objetos no espaço. (Stewart, 2010)

Entendemos que houve a evocação de elementos que constituem a imagem de conceito referente ao conceito de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como campo de força. Entretanto, entendemos que houve um conflito na resposta ao relacionar funções vetoriais com campos vetoriais. No texto da mesma resposta dada pelo sujeito encontramos uma definição de conceito que sugere a mobilização de elementos que constituem uma porção da imagem de conceito referente a

Integral de Linha de Campos Vetoriais relativo ao contexto físico: “...como sabemos que a Integral de Linha é igual ao Trabalho realizado...”. Veja que ela utiliza a expressão Integral de Linha sem especificar o Domínio da curva, como é representada no contexto do trabalho e não descrevendo qual a função que será matematicamente integrada, nos termos de Riemann. Nesse caso, vemos uma imprecisão matemática quanto à definição de conceito da Integral de Linha. Na entrevista Livia evidencia esse fato ao falar de campo vetorial:

Pesquisador: *Quando, pela primeira vez nessas atividades, foi perguntado a você a respeito do conceito de Campos Vetoriais, como (com base em que) elaborou sua resposta?*
Livia: *A gente vem estudando campo desde o primeiro período. Campo Gravitacional. Então... o que pedia na atividade a gente tentou relacionar com os conceitos que a gente já tinha. Apesar da gente não concordar com a representação que estava mostrando.*

A dupla Isaac e Aurora escrevem textos diferentes para essa questão 1, item c. A resposta de Isaac sugere uma vacância de dados gerais para inferência de elementos da imagem de conceito referente a integral de linha de campos vetoriais..

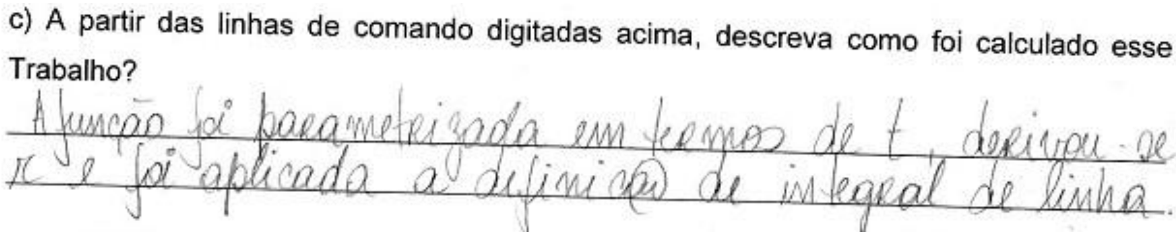
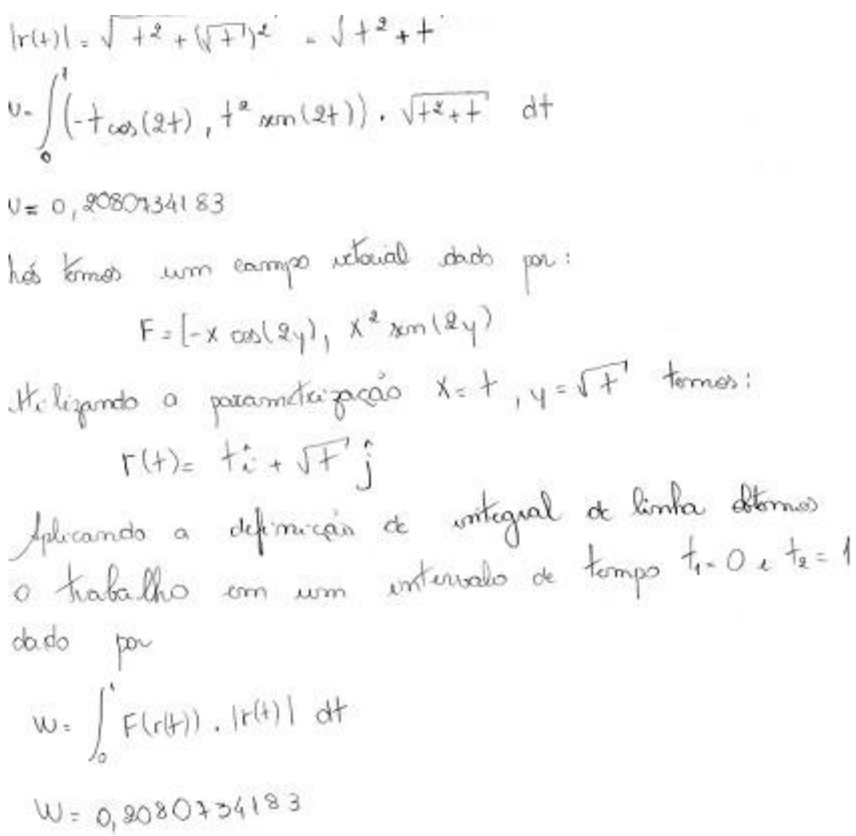

c) A partir das linhas de comando digitadas acima, descreva como foi calculado esse Trabalho?
A função foi parametrizada em termos de t, derivou-se r e foi aplicada a definição de integral de linha.

Figura 31 – Resposta de Isaac à questão 1-c, Atividade 4

Além disso, achamos que faltaram parâmetros matemáticos na expressão “foi aplicada a definição de Integral de Linha” para descrever o cálculo realizado pelo Maple. Novamente entendemos que houve registros na resposta que sugerem a mobilização de elementos que constituem uma porção da imagem de conceito referente a Integral de Linha da campos vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado por uma força. Entretanto, vimos como sua definição de conceito está incompleta do ponto de vista matemático.

Já Aurora utiliza-se de símbolos matemáticos para descrever o que foi feito. Veja:



$|r(t)| = \sqrt{t^2 + (\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2 + t}$

$W = \int_0^1 (-t\cos(2t), t^2 \operatorname{sen}(2t)) \cdot \sqrt{t^2+t}\, dt$

$W = 0,2080734183$

Nós temos um campo vetorial dado por:

$F = [-x\cos(2y), x^2 \operatorname{sen}(2y))$

Utilizando a parametrização $x = t$, $y = \sqrt{t}$ temos:

$r(t) = t\hat{i} + \sqrt{t}\,\hat{j}$

Aplicando a definição de integral de linha obtemos o trabalho em um intervalo de tempo $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ dado por

$W = \int_0^1 F(r(t)) \cdot |r(t)|\, dt$

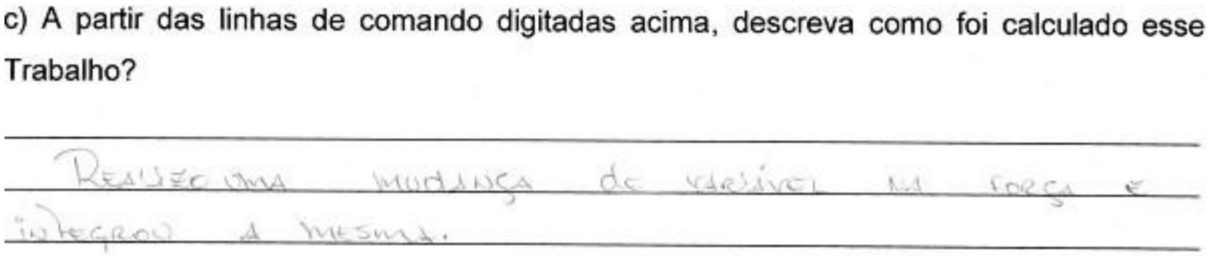
$W = 0,2080734183$

Figura 32 – Resposta de Aurora à questão 1-c, Atividade 4

A resposta de Aurora sugere a mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de campos vetoriais no contexto de seus procedimentos técnicos matemáticos. Vemos, entretanto, que a estudante utiliza-se do símbolo de modo vago, pois estabelece equivocadamente uma equivalência entre a integral de linha de uma função f de três variáveis em relação ao comprimento de arco com a Integral de linha de um campo vetorial. E escreve a letra W evocando imagens de conceito referentes ao trabalho realizado por uma força. Em seguida, iguala essa expressão ao valor encontrado no cálculo realizado pelo Maple.

A resposta escrita de Aurora revela por meio das expressões “aplicando a definição” e “obtemos o trabalho” uma concepção na qual a definição de Integral de Linha de Campos Vetoriais pode ser utilizada para o cálculo do trabalho realizado. Nesse caso percebe-se uma mobilização das imagens de conceitos referente a Integral de Linha quando interpretada fisicamente como trabalho.

A resposta de Kira expressa no item c da questão 1 não possui elementos suficientes para a inferência de elementos de sua imagem de conceito evocada.

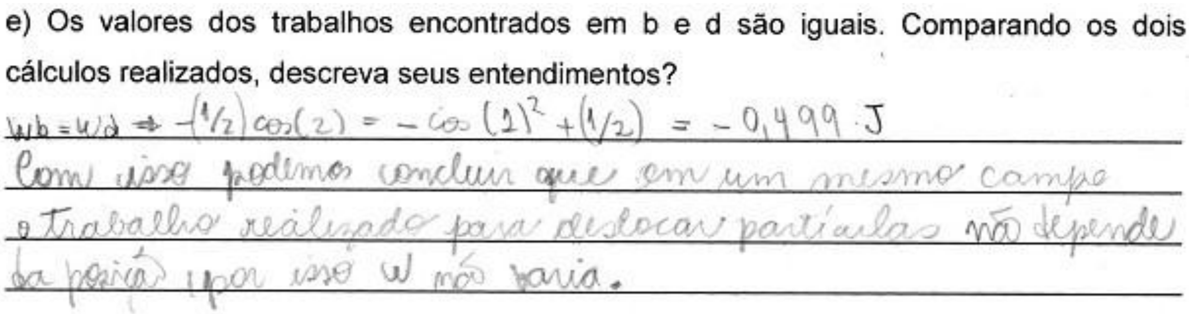


c) A partir das linhas de comando digitadas acima, descreva como foi calculado esse Trabalho?

REALIZOU UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL NA FORÇA E INTEGROU A MESMA.

Figura 33 – Resposta de Kira à questão 1-c, Atividade 4

No item e da questão 1 verifica-se que as respostas de Misa e Livia sugerem uma mobilização das imagens de conceitos referentes ao trabalho realizado num campo conservativo, apesar delas não expressarem nitidamente.



e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

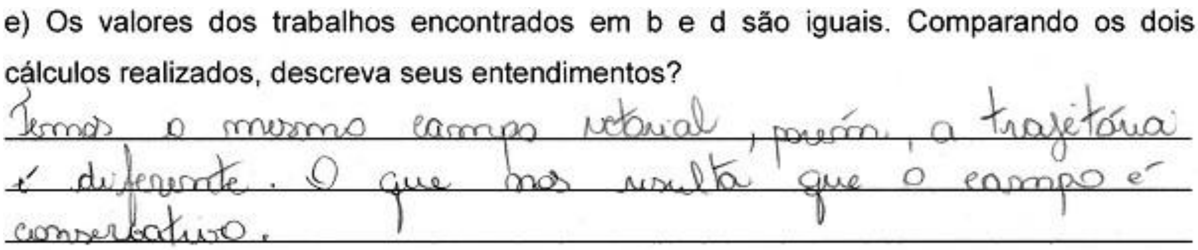
$W_b = W_d \Rightarrow -(1/2)\cos(2) = -\cos(1)^2 + (1/2) = -0{,}499\ J$

Com isso podemos concluir que em um mesmo campo o trabalho realizado para deslocar partículas não depende da posição, por isso W não varia.

Figura 34 – Resposta de Misa e Livia à questão 1-e, Atividade 4

Expressões como “trabalho realizado não depende da posição” evidencia esse nosso entendimento.

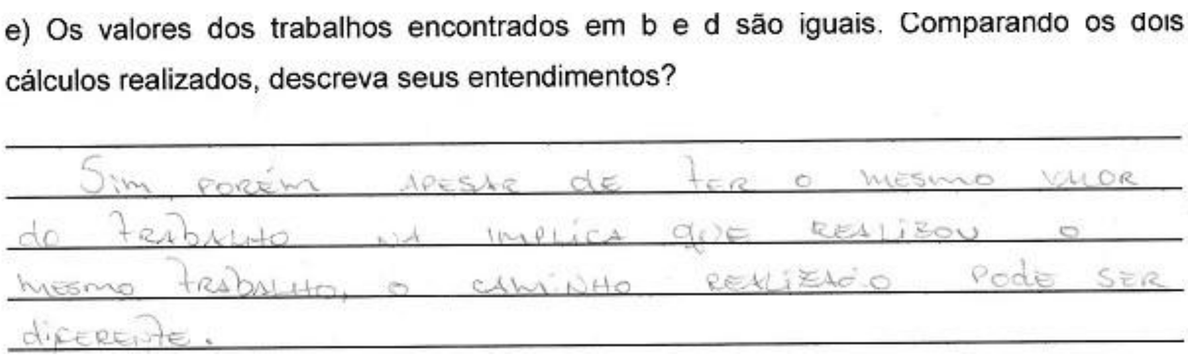
As respostas de Aurora e Isaac sugere uma mobilização das imagens de conceitos referentes a campos conservativos. E nesse caso aparece a expressão campo conservativo. Por meio das expressões “mesmo campo vetorial, porém, trajetória é diferente” revelam uma definição de conceito referente a campo conservativo quando interpretado fisicamente.


e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

Temos o mesmo campo vetorial, porém, a trajetória é diferente. O que nos resulta que o campo é conservativo.

Figura 35 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 1-e, Atividade 4

A resposta de Kira contém elementos conflitantes relativos ao trabalho realizado. Segundo Kira e de acordo com nossa interpretação de sua resposta, o valor numérico encontrado ao resolver a Integral de Linha não equivale ao trabalho realizado.

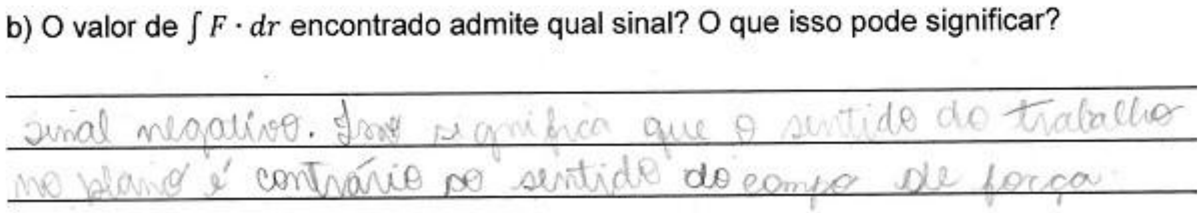

e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

Sim, porém apesar de ter o mesmo valor do trabalho não implica que realizou o mesmo trabalho, o caminho realizado pode ser diferente.

Figura 36 – Resposta de Kira à questão 1-e, Atividade 4

Entendemos que quando Kira expressa “trabalho realizado”, a resposta sugere uma mobilização da porção de imagens de conceitos referentes ao processo físico da realização de trabalho. E quando expressa “mesmo valor do trabalho” entendemos que a resposta sugere a evocação de imagens de conceito referentes ao Cálculo do Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente. Dessa forma, a resposta sugere um processo de comparação entre calcular o Integral de Linha e o processo de medir o trabalho realizado.

Na questão 2, item b, Misa e Livia respondem como sinal negativo e justificam apontando o "sentido do trabalho" como sendo contrário ao "sentido do campo". Nesse caso e de acordo com teoria física da mecânica, trabalho é uma grandeza escalar e, portanto, não possui sentido.



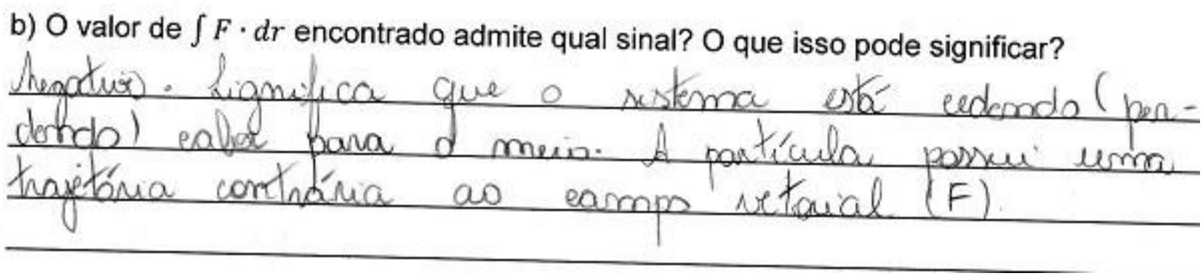
b) O valor de $\int F \cdot dr$ encontrado admite qual sinal? O que isso pode significar?

Sinal negativo. Isso significa que o sentido do trabalho no plano é contrário ao sentido do campo de força.

Figura 37 – Resposta de Misa e Livia à questão 2-b, Atividade 4

A resposta sugere, portanto, uma incompatibilidade com a teoria. No entanto, há uma mobilização de elementos das imagens de conceitos referentes à relação entre sentido do campo vetorial e sentido do deslocamento.

Observe a resposta de Aurora dada à mesma questão:



b) O valor de $\int F \cdot dr$ encontrado admite qual sinal? O que isso pode significar?

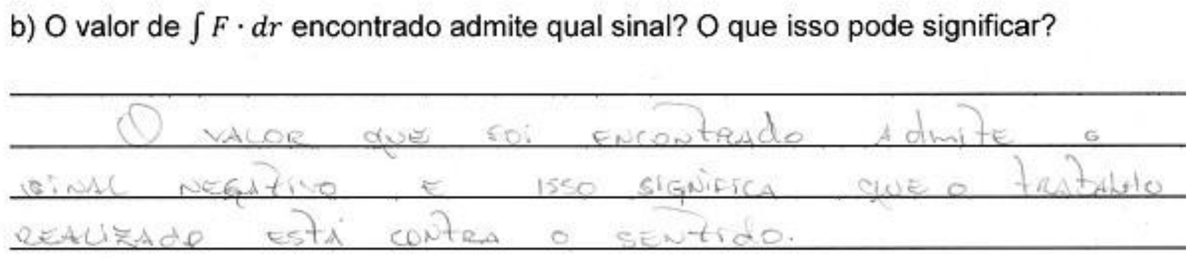
Negativo. Significa que o sistema está cedendo (perdendo) calor para o meio. A partícula possui uma trajetória contrária ao campo vetorial (F).

Figura 38 – Resposta de Aurora à questão 2-b, Atividade 4

Nesse caso a resposta sugere a mobilização de imagens de conceitos referentes a conceito físico de sistema termodinâmico. Além disso, há a evocação de elementos da imagem de conceito referentes a relação entre o sinal do Integral de linha de campos vetoriais e os sentidos do campo e trajetória.

A resposta de Isaac sugere a evocação das imagens de conceitos referentes ao conceito físico de sistema termodinâmico. E não registra outras respostas.

A resposta de Kira parece mobilizar a porção de imagens de conceitos referentes a relação existente entre sentido do deslocamento e o sentido do campo vetorial.


b) O valor de $\int F \cdot dr$ encontrado admite qual sinal? O que isso pode significar?

O valor que foi encontrado admite o sinal negativo e isso significa que o trabalho realizado está contra o sentido.

Figura 39 – Resposta de Misa e Livia à questão 2-b, Atividade 4

Isto é, quando escreve “trabalho realizado está contra o sentido”, consideramos trabalho realizado para deslocar uma partícula no sentido contrário ao campo vetorial.

No item c da questão 2, sugerimos uma visualização gráfica do comportamento do campo vetorial da questão e a animação do deslocamento da partícula num único quadro do Maple. Dessa forma a questão visava o estímulo visual como auxílio na mobilização das imagens de conceito. Além disso, queríamos estimular a produção de definições de conceitos referentes ao sinal da Integral e sua relação com os sentidos do campo vetorial e o sentido do deslocamento.

As respostas de Misa e Livia nesse item (2-c) sugerem uma mobilização das imagens de conceitos referentes ao sinal da Integral e sua relação com os sentidos do campo vetorial e o sentido do deslocamento. Há, entretanto, alguns elementos conflitantes como “naturalmente desloca”. De todo modo percebeu-se que os sujeitos escreveram mais ou expressaram mais livremente diante do estímulo visual gerado pelo quadro e animação no Maple. Não conseguimos inferir elementos da imagem de conceito nesse caso.

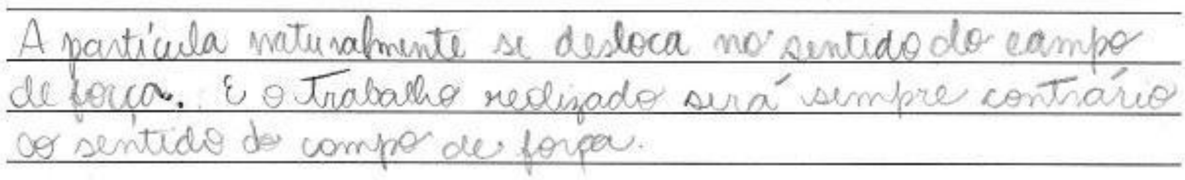

A partícula naturalmente se desloca no sentido do campo de força. E o Trabalho realizado será sempre contrário ao sentido do campo de força.

Figura 40 – Resposta de Misa e Livia à questão 2-c, Atividade 4

No caso de Aurora e Isaac, suas respostas sugerem uma mobilização das imagens de conceitos referentes ao sinal da Integral e sua relação com os sentidos do campo vetorial e o sentido do deslocamento. E nesse caso percebe-se uma aproximação com as definições de conceitos registradas no item anterior pelos mesmos sujeitos.

A resposta de Kira sugere a mobilização das imagens de conceitos referentes ao sinal da Integral e sua relação com os sentidos do campo vetorial e o sentido do deslocamento. No entanto, Kira expressa mais detalhadamente em relação aos objetos matemáticos envolvidos.

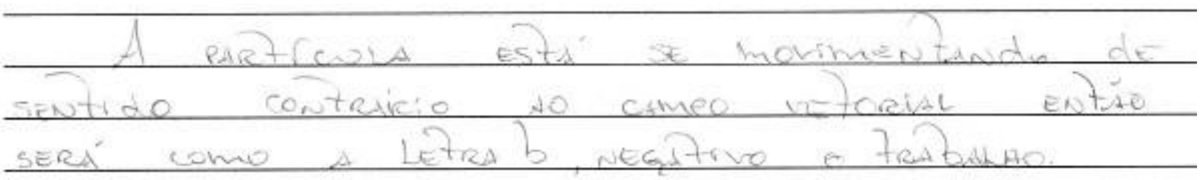

A PARTÍCULA ESTÁ SE MOVIMENTANDO DE SENTIDO CONTRÁRIO AO CAMPO VETORIAL ENTÃO SERÁ COMO A LETRA b, NEGATIVO O TRABALHO.

Figura 41 – Resposta de Kira à questão 2-c, Atividade 4

A questão 3 objetiva a ampliação de conhecimentos sobre elementos que constituem a imagem de conceito referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando estimulado visualmente por uma figura. Segundo Tall e Vinner (1981), diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem de conceito.

A resposta de Misa e Livia na questão 3-a sugere uma mobilização das imagens de conceito referente ao conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho.

a) Se C é o segmento de reta que liga (-3,-3) a (-3,3), determine se $\int F \cdot dr$ é positiva ou negativa? Justifique.

Admitindo que o campo vetorial F tem sentido positivo, o trabalho exercido de A até B tem sentido negativo (contrário ao sentido do campo).

Figura 42 – Resposta de Misa e Livia à questão 3-a, Atividade 4

Vemos, nesse caso, que a resposta está compatível com a interpretação física de Integral de Linha de Campos Vetoriais.

No item b, a resposta da dupla sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referentes ao conceito do Integral de linha de campos vetoriais quando interpretado fisicamente. No entanto, esses elementos sugerem que não houve uma interpretação do deslocamento da partícula num caminho fechado sob a ação de um campo conservativo.

b) Descreva com suas palavras em qual situação $\int F \cdot dr$ será zero.

O trabalho será zero quando a partícula não mais se deslocar devido a força aplicada.

Figura 43 – Resposta de Misa e Livia à questão 3-b, Atividade 4

A resposta de Aurora e Isaac ao item a da questão 3 sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho.

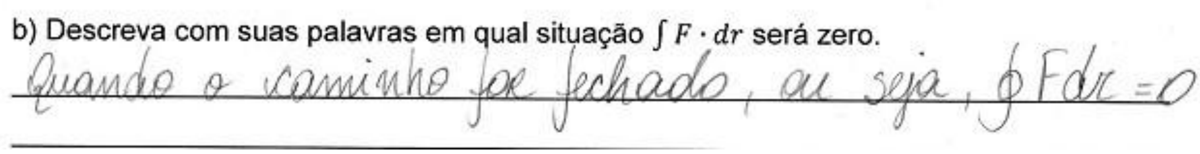
a) Se C é o segmento de reta que liga (-3,-3) a (-3,3), determine se $\int F \cdot dr$ é positiva ou negativa? Justifique.

$\int Fdr$ é negativa, pois o sentido do caminho neste segmento de reta é contrário ao das linhas de força.

Figura 44 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 3-b, Atividade 4

Pela resposta entendemos que em momento algum foi evocado elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho. Isso é evidenciado nas expressões "o sentido do caminho" e "linhas de força".

No item b dessa mesma questão, entendemos que a resposta também sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho. No entanto, a descrição exposta na resposta de Aurora e Isaac está incompatível com as condições matemáticas pelas quais a integral é zero.


b) Descreva com suas palavras em qual situação $\int F \cdot dr$ será zero.

Quando o caminho for fechado, ou seja, $\oint F dr = 0$

Figura 45 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 3-b, Atividade 4

Não conseguimos inferir elementos da imagem de conceito referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado para a resposta de Kira.

A questão 4 visava ampliar os conhecimentos sobre os elementos da imagem de conceito referentes a relação entre o sinal do Integral de linha de campos vetoriais e os sentidos do campo e trajetória por meio da visualização mediada pelo Maple. E confrontá-las quando necessário com as respostas anteriores.

As respostas de Misa e Livia foram contraditórias às respostas anteriores.

4) Seja $F(x,y) = (x-y)i + xyj$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrendo no sentido anti-horario de (2,0) a (0,-2). Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de F ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Explique.

*>F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):*
*>r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0..Pi],frames=100):*
>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);

Nula, pois a trajetória descrita pela partícula tem o mesmo sentido que o campo de força, e para que haja trabalho o sentido deste deverá ser contrário do campo de força.

Figura 46 – Resposta de Misa e Livia à questão 4, Atividade 4

Vemos que elas evocam elementos da imagem de conceito referentes ao trabalho realizado por uma força. E a resposta está incompatível com as condições matemáticas nas quais a Integral é nula.

A questão 5 é livre para o cálculo do Integral. A dupla opta pelo cálculo no Maple e coloca a resposta. Vemos que a resposta sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho. Pelo valor numérico expresso com uma grandeza:

5) Calcule $\int F \cdot dr$ onde $F(x,y) = xy^6 i + 3x(xy^5 + 2)j$ e $r(t) = 2\cos(t)\, i + sen(t)j, 0 < t < 2pi.$

$\int F \cdot dr = 5{,}10\ J$

Figura 47 – Resposta de Misa e Livia à questão 5, Atividade 4

E na questão 6 a resposta evidencia essa hipótese.

6) O que representa o valor encontrado em 5?

O trabalho realizado.

Figura 48 – Resposta de Misa e Livia à questão 6, Atividade 4

A questão 7 visava investigar a definição de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais dada pelos estudantes. A resposta de Misa e Livia revela como o a Integral de Linha de Campos Vetoriais evoca uma porção de elementos da imagem de conceito referentes ao trabalho realizado por uma força.

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

É o trabalho exercido por uma força para desloca uma partícula que está sob influência do campo de força.

Figura 49 – Resposta de Misa e Livia à questão 7, Atividade 4

A resposta de Aurora e Isaac a questão 4 sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho.

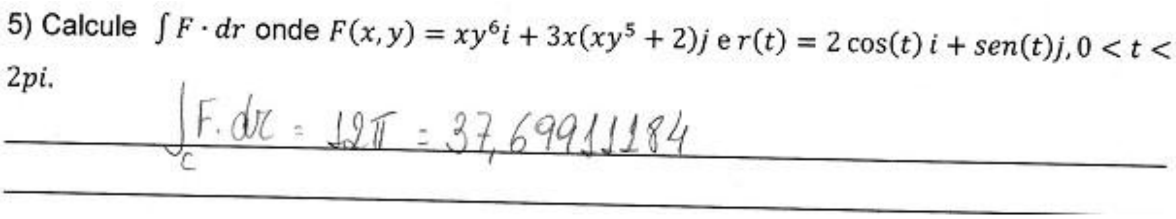
4) Seja $F(x, y) = (x - y)i + xyj$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrendo no sentido anti-horario de (2,0) a (0,-2). Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de F ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Explique.

```
>F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):
>r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0..Pi],frames=100):
>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);
```

A integral de linha ao longo de C é positiva, pois F acompanha o sentido das linhas de força.

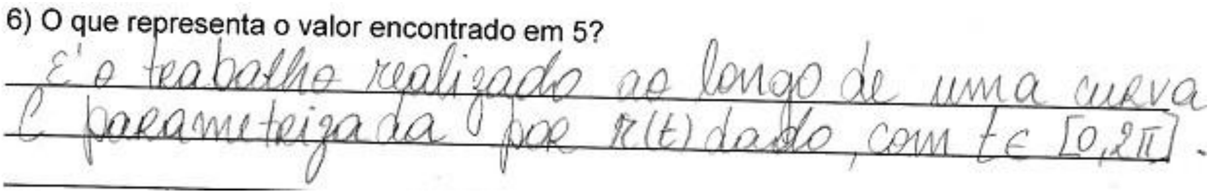
Figura 50 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 4, Atividade 4

Na questão 5, a dupla expressa a resposta sem a unidade de trabalho. Essa resposta também foi determinada pelo cálculo realizado no Maple. Já na questão 6, a resposta sugere novamente uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho.


5) Calcule $\int F \cdot dr$ onde $F(x,y) = xy^6 i + 3x(xy^5 + 2)j$ e $r(t) = 2\cos(t)\, i + sen(t)j, 0 < t < 2pi.$

$\int_C F.dr = 12\pi = 37,69911184$

Figura 51 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 5, Atividade 4


6) O que representa o valor encontrado em 5?

É o trabalho realizado ao longo de uma curva C parametrizada por r(t) dado, com $t \in [0,2\pi]$.

Figura 52 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 6, Atividade 4

A resposta da questão 7 expressa certo conflito entre elementos da definição formal de Integral de Linha de campos vetoriais e elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho.

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

Ao comparar a integral de linha de campos vetoria com o trabalho realizado por uma partícula em movimento, podemos dizer: (em (*))

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (F(x), F(y), F(z))$$

$$\alpha = \alpha(t) \Rightarrow \alpha'(t)$$

$$(*) \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \underbrace{\vec{F}(x,y,z)}_{\text{força}} \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{\text{velocidade}} \cdot \underbrace{dt}_{\text{tempo}}$$

Figura 53 – Resposta de Isaac à questão 7, Atividade 4

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

Dada a integral de um campo vetorial em um dado deslocamento, teremos a integral de linha como o produto escalar desse campo vetorial pela derivada da parametrização, ou seja, velocidade (pois a derivada do deslocamento é igual à velocidade

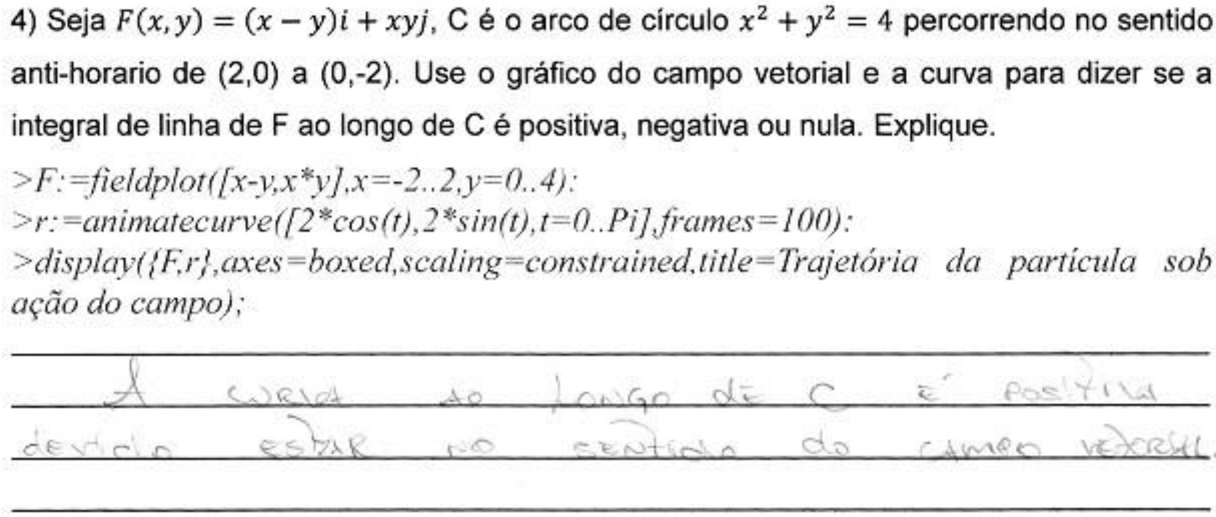
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = F_x + F_y + F_z$$

$$\alpha = \alpha(t) \Rightarrow \alpha'(t)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(x,y,z) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

Figura 54 – Resposta de Aurora à questão 7, Atividade 4

A resposta de Kira à questão 4 sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referentes a relação entre o sinal do Integral de linha de campos vetoriais e os sentidos do campo e trajetória por meio da visualização mediada pelo Maple. Embora suas expressões estejam um pouco vagas, entendemos que houve a mobilização referida:

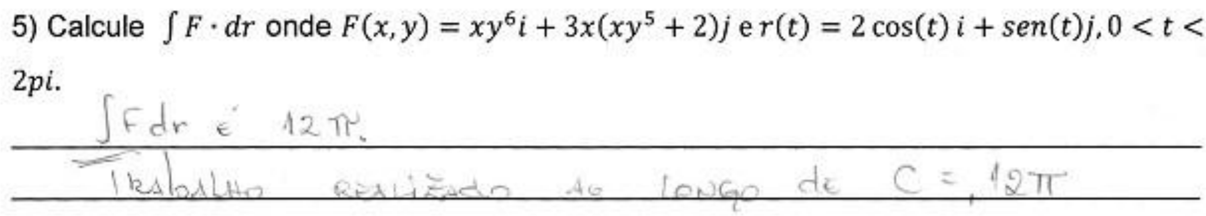

4) Seja $F(x,y) = (x-y)i + xyj$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrendo no sentido anti-horario de (2,0) a (0,-2). Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de F ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Explique.

*>F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):*
*>r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0..Pi],frames=100):*
>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);

A curva ao longo de C é positiva devido estar no sentido do campo vetorial.

Figura 55 – Resposta de Kira à questão 4, Atividade 4

Na questão 5, Kira expressa a resposta sem a unidade de trabalho. Em seguida refere-se ao valor como o trabalho realizado:


5) Calcule $\int F \cdot dr$ onde $F(x,y) = xy^6 i + 3x(xy^5 + 2)j$ e $r(t) = 2\cos(t)\, i + sen(t)j, 0 < t < 2pi$.

$\int F dr$ é 12π.
Trabalho realizado ao longo de $C = 12\pi$

Figura 56 – Resposta de Kira à questão 5, Atividade 4

Essa resposta também foi determinada pelo cálculo realizado no Maple. Na questão 6, a resposta sugere novamente uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho.

6) O que representa o valor encontrado em 5?

REPRESENTA O TRABALHO REALIZADO.

Figura 57 – Resposta de Kira à questão 6, Atividade 4

A resposta da questão 7 sugere uma mobilização de elementos da imagem de conceito referente ao cálculo matemático da integral.

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

É UMA FUNÇÃO A SER INTEGRADA É CALCULADA AO LONGO DE UMA CURVA.

Figura 58 – Resposta de Kira à questão 7, Atividade 4

6.4 Síntese da Análise dos Dados: Etapa 2

A partir da análise dos dados obtidos nessa etapa da pesquisa foi possível inferir elementos, que compõem a imagem de conceito e definição de conceito relativas a Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretada fisicamente como trabalho realizado pelos sujeitos da pesquisa.

Entretanto, sintetizar em algumas linhas de parágrafos as conclusões de uma investigação como a que foi relatada nessa dissertação é uma tarefa muito difícil. Além disso, qualquer síntese aqui descrita sobre a investigação ficará sujeita à interpretação de quem a lê. Sabendo dessas dificuldades, procuramos aqui destacar, ao meu olhar e ancorado no nosso referencial, alguns pontos principais que se apresentaram.

Esta pesquisa teve o objetivo de "ouvir" as concepções e formas de conceber dos estudantes sobre conceitos específicos do Cálculo Integral. Estruturamos a síntese em categorias sugeridas por Meyer (2003)[22] e adaptadas para nosso objeto matemático.

- Elementos da imagem de conceito associados a respostas inválidas, do ponto de vista matemático;

1) A Integral de Linha de Campos Vetoriais é concebida como somatório do Trabalho realizado por uma Força;

2) As representações e são equivalentes;

3) A função vetorial descreve a Força;

4) A Integral de Linha é nula quando o sentido da trajetória é o mesmo do campo de força.

5) A Integral de Linha é a Área ou Volume.

- Elementos da imagem de conceito que poderiam ser enriquecidos;

1) O Cálculo da Integral de Linha de Campos Vetoriais fornece o Trabalho realizado.

2) A Integral é uma soma dos pequenos Fdr.

3) Um Campo de Força pode ser representado pelo Campo Vetorial.

A análise relativa às respostas fornecidas à questão 7 da Atividade 4, levantou possíveis relações existentes entre a definição de conceito, referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretada fisicamente como trabalho

[22] O objetivo de Meyer (2003) foi investigar elementos da imagem conceitual (termo utilizado pela autora) relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente por estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II.

realizado, e elementos da imagem de conceito, relativas ao referido conceito, inferidos a partir das respostas fornecidas. Neste sentido, encontramos:

1) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito diferente da definição de Integral de Linha de Campos Vetoriais, mas coerente com os elementos que compõem a imagem de conceito evocada para responder algumas questões propostas.

2) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito que se aproxima da definição formal mas não é consultada para a formulação das respostas fornecidas às demais questões.

Tendo em vista os dados obtidos nessa etapa, podemos considerar que as questões propostas nas Atividades 3 e 4 permitiram-nos a inferência de uma diversidade de elementos da imagem de conceito, referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como Trabalho Realizado. Além disso, pudemos levantar algumas considerações relativas à mobilização de diferentes porções da imagem de conceito evocadas para responder algumas questões:

1) O campo Vetorial visualizado no Maple não é um campo de Força;

2) O sentido do Campo Vetorial e a trajetória da partícula visualizada no Maple revela o sinal do

3) A Integral de Linha pode ser uma ferramenta para calcular o Trabalho realizado ou o Fluxo do Campo Elétrico;

4) A Integral de Linha de um Campo Vetorial conservativo independe do caminho;

Os resultados decorrentes das análises sugerem algumas considerações quanto às concepções e formas de conceber de estudantes de Física sobre a Integral de

Linha de Campos Vetoriais. A partir dessas concepções, é possível sugerir alguns encaminhamentos dentro da Educação Matemática Superior.

6.5 Algumas Conclusões

Por meio da análise dos resultados, podemos afirmar que todos os sujeitos participantes mobilizaram diferentes porções que constituem a imagem de conceito referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado.

Analisando esses elementos e confrontando-os com as definições de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, observou-se, em alguns casos certa incoerência. Corroborando com o sustentado por Vinner (1991), identificamos sujeitos que expressaram uma definição de conceito, referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como trabalho realizado, que não foi consultada por esses sujeitos, ao responder às questões propostas. Isso evidencia aquilo que foi descrito por Vinner (1991), a saber: os estudantes, mesmo inseridos em um contexto técnico no qual não consultar definições pode levá-los a cometer erros, não consultam sua definição de conceito relativo a um conceito. Mas, em contrapartida, mobilizam elementos da imagem de conceito, referente a esse conceito, para responder as questões.

Os sujeitos pesquisados são estudantes de Física. Entendemos que, por esse motivo, algumas respostas apresentaram uma imagem de conceito referente à Integral de Linha que inclui uma associação com conceitos da Física, como fluxo do campo elétrico. Como essa pesquisa não pretende investigar as relações estabelecidas entre esses elementos, adotamos procedimentos metodológicos que não nos permitem identificar que tipo de associação foi estabelecida.

A visualização proporcionada pela utilização do Maple em algumas questões como estímulo visual parece ter contribuído para ativar outras partes da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado. Principalmente na questão que propusera a geração do campo vetorial e trajetória da partícula por meio de uma animação. Na entrevista final, ao perguntar o que significou a visualização executada em algumas questões, essa constatação é evidenciada por um sujeito:

Pesquisador: *Explique com suas palavras o que significou a visualização ocorrida em algumas atividades.*
Aurora: *Significou muita coisa. Na sala de aula não dá para visualizar algumas coisas. Por exemplo, o trabalho negativo. O que significa o trabalho negativo. Aí a gente visualizou a trajetória da partícula, viu para onde os vetores estavam seguindo. Falar do trabalho ou apresentar é fácil. Mas visualizar o que está acontecendo ali... a trajetória está aqui... o vetor tá indo para outro lado... Eu entendi melhor vários conceitos anteriores. Além de contribuir para conhecer um novo programa. Essa questão de visualização é facilitada.*

Em contrapartida observamos respostas que demonstraram a visualização como gerador de conflitos entre o comportamento de um campo de força e a representação gráfica de um campo vetorial:

Pesquisador: *Explique com suas palavras o que significou a visualização ocorrida em algumas atividades.*
Livia: *Acho que para resolução das atividades até para entender melhor o que estava sendo colocado foi bastante importante. Tendo parte da figura a gente já gerou uma série de discussões... O que pedia na atividade a gente tentava relacionar com os conceitos que a gente já tinha. Apesar da gente não concordar com a representação que tava mostrando.*

Assim, a proposta de integrar ferramentas que possam facilitar a visualização no processo de ensino e aprendizagem é, no mínimo, enriquecedora, pois favorece a ligação entre as imagens mentais e as imagens matemáticas (DREYFUS, 1991). A diversidade de compreensões matemáticas de um conceito pode ser explorada por esse processo, tendo em vista as possibilidades de geração de conflitos e, portanto, ambiente fértil para o conhecimento.

No caso da pesquisa em questão, identificamos a importância da visualização principalmente na resolução de problemas. Percebemos como as discussões surgem mais espontaneamente a partir do processo de visualização. E muitas dessas discussões geravam diferentes estratégias de resolução. Entendemos que todas as ações referidas sugerem uma produção matemática por parte dos estudantes. E nesse caso, concordamos com Arcavi (2003) ao ressaltar a importância da visualização não somente para efeitos ilustrativos, mas também pelo reconhecimento desse processo como um componente chave do raciocínio.

Pela grande possibilidade de produção matemática desse processo cognitivo sugerido pelos resultados da pesquisa e sustentado por Arcavi (2003), ressaltamos a importância da disposição do professor em estabelecer e conduzir certas abordagens alternativas em sala de aula. Considerando, evidentemente, os conflitos teóricos como gênese das discussões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma dissertação em Educação Matemática é uma síntese linear de vários momentos que ficaram desordenados durante o caminho. O caminho é a investigação. E a investigação são as observações que foram registradas e as percepções que ficaram de fora, são as anotações, os rascunhos das tarefas, as diversas reelaborações de questões, a leitura de textos de teóricos na área, dentre tantas outras coisas. Ela nasce com as primeiras angústias como professor atuante, cresce com a elaboração do projeto de pesquisa e se estrutura com as contribuições do orientador, colegas, dos sujeitos participantes e de muita leitura.

As contribuições de uma dissertação não se restringem ao resultado final ou produto educacional gerado pela investigação, mas a um conjunto de assuntos abordados na pesquisa. Tópicos matemáticos abordados, procedimentos metodológicos e atividades propostas. Tudo como produto de um compartilhamento para que outros professores possam adaptá-las à sua sala de aula.

Nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer dessa dissertação podem ser parte de um conjunto de sugestões para apoiar mudanças das práticas pedagógicas no Ensino Superior. A leitura favorece o enriquecimento de reflexões sobre o ensino e a aprendizagem no Ensino Superior, que a partir dos resultados é possível estabelecer um quadro de conhecimentos sobre as imagens de conceitos referentes a inúmeros elementos do Cálculo Vetorial. E a análise desse quadro possibilitará a gênese de diversas discussões sobre a Educação Matemática no Ensino Superior.

No nosso estudo, tivemos um objetivo específico: investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado de estudantes Cálculo III. Tanto o planejamento das tarefas quanto o nosso papel de investigador foi orientado por esse objetivo. Nesse sentido, os resultados não são genéricos, mas aplicáveis a contextos com características semelhantes.

A síntese da análise da primeira etapa sugere reflexões sobre as diferentes concepções matemáticas dos estudantes em objetos como curvas e campos vetoriais. Em particular, no conceito da parametrização e na representação gráfica de Campos Vetoriais. As imagens de conceito referentes a Curvas Parametrizadas se restringiram a procedimentos matemáticos de parametrização de curvas em R^2 memorizados. Mas quais as estratégias de ensino podem facilitar o enriquecimento das imagens de conceito referentes às curvas parametrizadas? As restrições nas imagens de conceito referentes à parametrização têm alguma relação com as restrições dos elementos que compõem as imagens de conceito referentes à função matemática? Essas foram algumas questões que emergiram naturalmente de nossa investigação e que deixamos para futuras pesquisas.

Ainda sobre a primeira etapa, muitas respostas sugeriram a existência de pouco ou nada de elementos da imagem de conceito referente ao conceito de Campos Vetoriais. Nesse caso, percebemos que os estudantes operam com os campos vetoriais no cálculo da integral, porém não possuem imagens de conceitos suficientes para outros contextos. De acordo com nossas análises e em nosso contexto de pesquisa, as relações estabelecidas entre dois espaços distintos como nos campos vetoriais possuem pouco ou quase nada de elementos da imagem de conceito associados na estrutura cognitiva do estudante. Os estudantes parecem não possuir elementos da imagem de conceito referentes à transição entre o algébrico e o gráfico suficientes para operarem em outros contextos. E então perguntamos: esses aspectos são importantes? O quanto devemos enfatizar esse processo de transição considerando o quantitativo de conteúdos da ementa da disciplina para serem contempladas? E como explorar graficamente os campos vetoriais numa sala de aula?

Tomando como referência as análises em nossa pesquisa, acreditamos que a exploração dos conceitos matemáticos avançados podem enriquecer as imagens de conceito dos estudantes, permitindo que estes operem em diferentes contextos. A pesquisa ainda sugere que estudantes de Física tendem a relacionar os objetos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um Software pode gerar novas compreensões. Nessa perspectiva, percebemos que o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.

Os resultados da investigação ainda apontam determinadas posturas quanto às abordagens desses conteúdos em sala de aula, sobretudo quando se trata da estrutura formal das definições matemáticas, que são pouco compreensivas mesmo para estudantes matriculados em disciplinas de Cálculo mais avançado, como foi o caso da pesquisa. Abordagens alternativas podem atuar de forma efetiva nas imagens de conceitos dos estudantes, levando a desdobramentos nas concepções da própria atividade de aprender matemática.

Por fim, entendemos que a estrutura formal da matemática precisa ser assimilada. Mas ao distinguir o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico, a Teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981) sugere que essa assimilação não seja suficiente. Produzir matemática não é reproduzir sua organização formal, pois, essa organização formal é um estado presente da Matemática. E no processo de aprendizagem, esse estado deve ser desequilibrado para possibilitar a reconstrução do objeto de conhecimento.

Considerando o exposto acima, entendemos que esta dissertação é um ponto de partida. Desejamos estimular as discussões sobre o ensino e aprendizagem do conhecimento matemático no ensino superior, especificadamente, no Cálculo Vetorial. Em particular, pretendemos evidenciar a importância da organização formal da Matemática no ensino superior não como suficiente para a aprendizagem dos conceitos. Por outro lado, não objetivamos estabelecer uma forma ótima de aprender, mas sugerir novas possibilidades para a produção ou construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS:

AGUIAR, E. V. B. **As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem**. Vértices (Campos dos Goitacazes), v. 10, p. 63-71, 2008.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas**. I Seminário em Resolução de Problemas. Rio Claro: Unesp, 2008. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos.html. Acesso em 20 dez. 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **O método nas ciências sociais**. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais:* pesquisa quantitativa e qualitativa. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999. Parte II, p. 147-188.

ARCAVI, Abraham. **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics**. Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia** – 2009, 199 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

BENEDETTI, F.C. **Funções, Software Gráfico e Coletivo Pensantes** - 2003, Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003.

BOGDAN, Roberto C. e BIKLEN, Sari Knopp. Investigação **Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Traduzido por: Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal, Porto Editora Ltda, 1994.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática** . Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 98p. (Coleção Tendências da Educação Matemática).BORBA, M.C. Informática e Educação Matemática, 3. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica,2001.

BUTEAU, C., MARSHALL, N., JARVIS, D. H, & LAVICZA, Z. (2010). **Integrating Computer Algebra Systems in post-secondary mathematics education: Preliminary results of a literature review.** *International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*(2), 57-68. [Full-text available with permission granted by IJTME]International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 16, No 2

COSTA, Conceição **“Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização”.** Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002.

D'AMBROSIO, . **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DeMAROIS, P. & Tall, D. O. (1996), **Facets and Layers of the Function Concept**, *Proceedings of PME 20*, Valencia, 2, 297–304.

DREYFUS, T. (1991). **Advanced mathematical thinking processes**. In David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

DUBINSKY, E. 1991. **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking**. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 95-123.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D.O.,(2002) **Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada**. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol.1, p. 153 - 164, Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf> Acesso em: 25 de outubro de 2011.

GIRALDO, V.Descrições e **Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada**. Tese de Doutorado do Curso de Engenharia de Sistemas e Computação. COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro, 2004.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática**. Tradução Carlos Irineu Costa. – Rio de Janeiro. Ed.34, 1993 (Coleção Trans) 208p. 1956.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986

MARIN, D. **Professores de Matemática Que Utilizam Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino Superior** – 2009, Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

MIRANDA, Anderon Melhor. **As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa**. 2010. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

MORAN, J. M. **Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias**. INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO: teoria & prática, v. 3, n.1 (2000). Disponível em: HTTP://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6474. Acesso em: 13 de dezembro de 2011.

OLIMPIO, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**. 2006. 263 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2006. Disponível em: http://www.biblioteca.unesp.br/bibliotecadigital/document/get.php/4724/olimpiojunior_a_dr_rcla.pdf Acesso em: 20 ago. 2011.

PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Cálculo Diferencial e integral de Funções de Várias Variáveis**, 3 Ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Campinas: Unicamp, Tese de doutorado, 2001. 302 p.

SILVA, Guilherme Henrique Gomes ; PENTEADO, Miriam Godoy . **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa**. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - SINECT, 2009, PONTA GROSSA - PR. SINECT - I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009. v. 1.. PONTA GROSSA - PR : UNIVERSIDADE TECNOLOGICA FEDERAL DO PARANÁ, 2009. v. 1. p. 1-14.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. **Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements**. In: LESH, R.; KELLY, A. E. *Research Design in Mathematics and Science Education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p.267-307.

STEWART, J. **Cálculo. Vol 1**. 6 Ed., São Paulo: Thomson Learning, 2010.

TALL, D. O. (Ed.) (1991). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher.

___________. (1989) **Concept images, generic organizers, computers and curriculum change**. For the Learning of Mathematics, 9 (3), pp. 37-42.

___________. (1991). **The psychology of advanced mathematical thinking**. In: David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

___________. **A Transição para o Pensamento Matemático Avançado Funções, Limites, Infinito e Prova**, traduzido por Márcia Fusaro Pinto, Departamento de Matemática – Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows D. A. (ed)

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, p. 495 – 511. 1992. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-toamt. pdf>. Acesso em: 13 out. 2011.

TALL, D. & VINNER, S. 1981. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

VINNER, Shlomo. **O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.** Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65 – 81. 1991.

______________. **Concept definition, concept image and the notion of function**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: < pt.wikipedia.org/wiki/MAPLE>. Acesso em: 12 de janeiro de 2013.

ANEXO A - Questionário Escrito

1) O que você entende sobre o conceito físico de trajetória?

2) Como você representaria matematicamente a trajetória de uma partícula?

3) Essa representação poderia descrever outras trajetórias? Explique.

4) Explique, com suas palavras, o que você entende sobre o conceito de campo de força.

5) Como você representaria matematicamente uma região do espaço sob a ação de um campo de força?

6) Em sua opinião qual a relação entre campo de força e campo vetorial?

7) O que você entende sobre o trabalho realizado por uma força?

8) Explique, com suas palavras, o que você entende sobre o conceito do Integral de Linha de Campos Vetoriais?

9) Tome a definição de Integral de linha de um campo vetorial a seguir:

Leia. Em seguida, registre seus entendimentos a respeito dessa definição.

***Definição:* Consideremos uma curva C em parametrizada por onde é de classe , e um campo vetorial contínuo definido em C.**

Definimos a Integral de Linha de F ao longo de C dada por:

ANEXO B – Atividades

B.1 - Atividade 1

Descrição de novas curvas: Trajetória

1) Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva C como na figura:

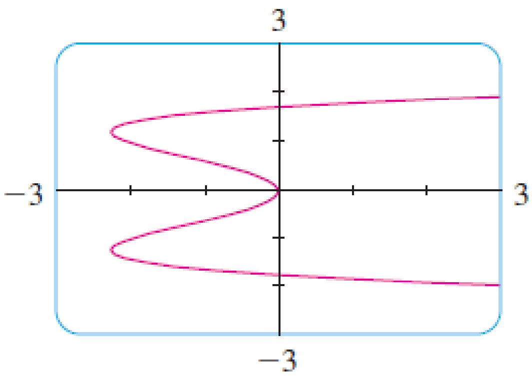


Figura 1 - Stewart, p. 624.

a) É possível descrever C como uma equação y = f(x)? Justifique.

____
____
____
____
____
____

b) Como as coordenadas x e y podem ser funções do tempo, representaremos essa curva como x = f(t) e y = g(t), sugerindo assim uma maneira conveniente de descrever C. Construa uma curva representada por $x=t$ e $y=t^2$, $0<t<1$

c) Como identificar uma posição da partícula nessa representação?

____

d) É possível identificar a direção do movimento nesse tipo de representação chamada paramétrica? Por quê?

e) Explique o que você entende sobre a representação paramétrica de uma curva e sua relação com o conceito de trajetória.

2) Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento do domínio um elemento de seu contradomínio. Uma função vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Isso significa que, para todo t no

domínio de r, existe um único vetor, denotado por r(t), chamado de vetor-posição e definido pelas funções componentes de r. Escrevemos assim:

$$r(t)=f(t)i + g(t)j$$

a) O que você entende sobre vetor-posição e como você descreveria seu comportamento?

____
____
____
____
____

b) O que você entende sobre dr/dt?

____
____
____
____
____

c) Descreva o comportamento do vetor-velocidade?

____
____
____
____
____

d) Represente $q(t)=(t,t^2)$ e $s(t)=(t^2,t^4)$ graficamente no CAS. O que você observa comparando essas duas representações?

```
>with(VectorCalculus):
```

>with(plots):

>plot([t,t^2,t=0..1]);

>plot([t^2,t^4,t=0..1]);

e) O que você entende sobre d^2r/dt^2?

B.2 - Atividade 2

Campos Vetoriais

1) Observe a representação do seguinte campo de forças:

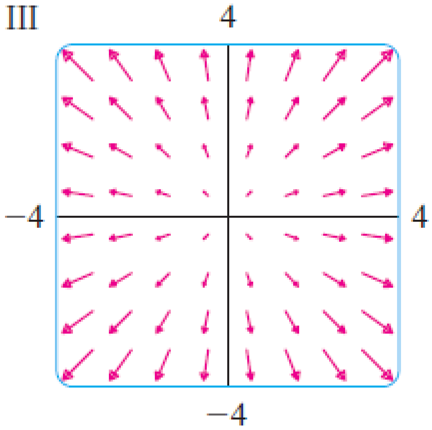


Figura 2 – Stewart, p. 1033.

a) O que representam as flechas?

____

____

____

____

____

b) O que representa o comprimento das flechas?

c) Explique o que você entende sobre essa representação matemática (campos vetoriais) e sua relação com os significados físicos do campo de força.

2) Esboce no CAS os seguintes campos vetoriais:

a) .

>fieldplot([y,x],x=-2..2,y=-2..2);

b)

>fieldplot([1,sen(y)],x=-2..2,y=-2..2);

c) . _

>fieldplot([y,1/x],x=-2..2,y=-2..2);

3) Com o auxílio de um CAS é possível visualizar a maioria dos campos vetoriais de modo mais preciso e rápido. Fale sobre o processo de visualização desse objeto e

como ele poderia contribuir para a compreensão do comportamento de um campo vetorial.

4) Explique o que você entende sobre o processo matemático de geração gráfica do campo vetorial a partir da expressão analítica.

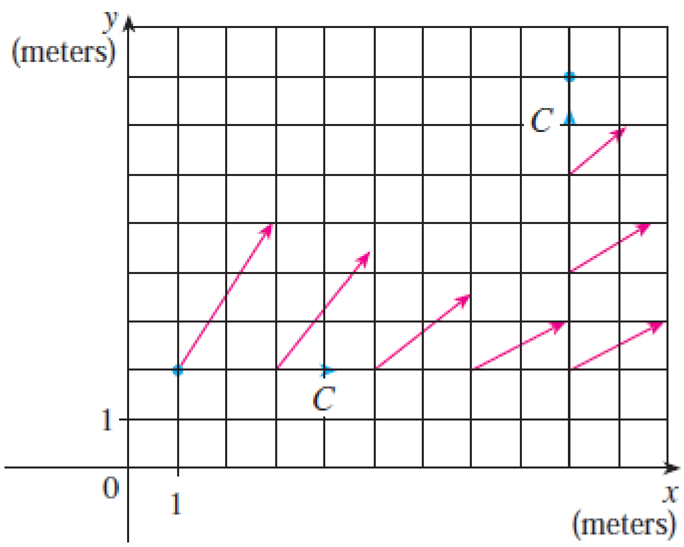
5) Use o Maple para traçar o campo vetorial :

Explique sua aparência.

B.3 - Atividade 3

Cálculo do Trabalho realizado por uma força e Integrais de Linha de Campos Vetoriais.

1) (Stewart, p.1045) Um objeto se move sobre C, mostrada na figura, de (1,2) a (9,8). Os comprimentos dos vetores do campo de força F são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por F sobre o objeto.



____

____

____

____

____

2) Suponha agora que uma partícula se mova ao longo de uma curva C parametrizada por , sob ação do campo de força .

a) Represente a trajetória e o campo de força num mesmo plano no *Maple*.

>F:=fieldplot([x^2,-xy],x=0..1,y=0..1):

>r:=plot([t,t^2],t=0..1):

>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo)

Registre suas observações prévias dessa imagem.

____

____

____

____

____

b) Suponha ser possível dividir C em sub-arcos bem pequenos. Tomando um arco, como você calcularia o trabalho? Registre seus passos.

____

____

____

____

____

c) O que acontece se somarmos os trabalhos de todos os pequenos arcos?

____

____

____

____

____

d) De acordo com esse processo, qual objeto matemático mais adequado para calcular o trabalho realizado por um campo vetorial F para mover uma partícula ao longo de uma curva parametrizada por r(t) de t=a até t=b?

3) O que você entende do símbolo · ?

4) Tome a definição de Integral de linha de um campo vetorial a seguir:

Leia. Registre seus entendimentos a respeito dessa definição.

Definição: Consideremos uma curva C em parametrizada por onde é de classe , e um campo vetorial contínuo definido em C. Definimos a Integral de Linha de F ao longo de C dada por:

5) Caso vocês tenham alguma(s) dúvida(s) sobre o conceito do Integral de Linha de Campos Vetoriais, utilize esse espaço para descrever essa(s) dúvida(s).

____
____
____
____
____
____

B.4 - Atividade 4

Integrais de Linha de Campos Vetoriais: Uma exploração do conceito

1) Considere o campo vetorial:

a) Visualize esse campo no CAS.

```
>fielplot([-x*cos(2y),x^2*sin(2y)],x=-1..1,y=-1..1);
```

Faça algumas observações prévias da imagem gráfica.

b) Determine o trabalho realizado por esse campo para deslocar uma partícula no caminho . Utilize o CAS.

```
> força:=[-x*cos(2*y), x^2*sin(2*y)];
> x:=t:
>y:=sqrt(t):
>r:=[x,y]:
>v:=diff(r,t):
>print(`velocidade = `, v);
```

>print(`função força ao longo do caminho = `,força);

>W:=int(linalg[dotprod](força,v), t=0..1,inert);

>print(`Trabalho realizado ao longo de C = `, value(W));

c) A partir das linhas de comando digitadas acima, descreva como foi calculado esse Trabalho?

____

____

____

____

____

d) Determine o trabalho realizado pelo mesmo campo da letra a para deslocar uma partícula no caminho de t=0 até t=1. Utilize o CAS.

*>força:=[-x*cos(2*y), x^2*sin(2*y)];*

>x:=t:

>y:=t^3:

>r:=[x,y]:

>v:=diff(r,t):

>print(`velocidade = `, v);

>print(`função força ao longo do caminho = `,força);

>W:=int(linalg[dotprod](força,v), t=0..1,inert):

>print(`Trabalho realizado ao longo de C = `, value(W));

e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

____

____

____

2) Considere campo vetorial:

a) Suponha que seja um campo de força. Determine o trabalho feito por esse campo ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo .
Utilize o CAS.

```
>força:=[x^2,-x*y];
>x:=cos(t):
>y:=sin(t):
>r:=[x,y]:
>v:=diff(r,t):
>print(`velocidade = `, v);
>print(`função força ao longo do caminho = `,força);
>W:=int(linalg[dotprod](força,v), t=0..Pi/4,inert):
>print(`Trabalho realizado ao longo de C = `, value(W));
```

b) O valor de · encontrado admite qual sinal? O que isso pode significar?

c) Vamos visualizar o campo vetorial e o caminho da partícula apresentados na letra a num mesmo plano através do CAS. Faça uma animação e explique a relação do movimento da partícula e o campo confrontando sua resposta com a letra b.

*>F:=fieldplot([x^2,-x*y],x=0..1,y=0..1):*

>r:=animatecurve([cos(t),sin(t),t=0..Pi/2],frames=100):

>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);

____

____

____

____

____

____

3) Considere o campo vetorial F mostrado na figura.

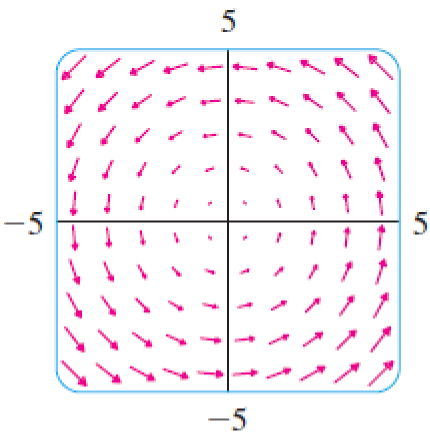


Figura 3 – Stewart, p. 1029

a) Se C é o segmento de reta que liga (-3,-3) a (-3,3), determine se · é positiva ou negativa? Justifique.

____

____

b) Descreva com suas palavras em qual situação · será zero.

4) Seja , C é o arco de círculo percorrendo no sentido anti-horario de (2,0) a (0,-2). Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de F ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Explique.

*>F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):*

*>r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0..Pi],frames=100):*

>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);

5) Calcule · onde

6) O que representa o valor encontrado em 5?

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

ANEXO C - Questões da Entrevista

1) Quando, pela primeira vez nessas atividades, foi perguntado a você a respeito do conceito de Campos Vetoriais, como (com base em que) elaborou sua resposta?

2) Quando, pela primeira vez nessas atividades, foi perguntado a você a respeito do conceito do Integral de Linha de Campos Vetoriais, como elaborou sua resposta?

3) A definição formal do Integral de Linha de Campos Vetoriais foi apresentada antes e depois das atividades. Em que momento, você compreendeu melhor essa definição? Explique.

4) Qual a relação que existe entre o Trabalho realizado por uma força e Integral de Linha de um Campo Vetorial?

5) Explique com suas palavras o que significou a visualização ocorrida em algumas atividades.

6) O Maple influenciou nas atividades? Explique.

7) Como você descreveria a experiência de ter realizado essas atividades?