Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Tese de doutorado

Integração da Anomalia Conforme em $6D$

Fabricio Matos Ferreira

Juiz de Fora

2019

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Tese de doutorado

Integração da Anomalia Conforme em $6D$

Autor: Fabricio Matos Ferreira

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Juiz de Fora
Abril de 2019

À minha mãe Silede e

à minha esposa Elayne.

Agradecimentos

Ao professor Ilya Lvovich Shapiro pela orientação e proposição do tema tão fascinante. A todos os professores e funcionários do departamento de Física da UFJF, em particular aos professores Gil de Oliveira Neto, Guilherme de Berredo Peixoto, Sidiney de Andrade Leonel, Sergio Saul Makler, Fernando Sato e Pablo Zimmermann Coura e ao funcionário Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes. Aos amigos nesta jornada por toda ajuda e colaboração em especial a Simpliciano Castardelli dos Reis, Poliane de Morais Teixeira e Tibério de Paula Netto. Um agradecimento muito especial ao professor Davi Cabral Rodrigues da UFES pela cessão de código computacional de sua autoria que, adaptado para nosso caso, muito nos ajudou nestes cálculos. Ao IF SUDESTE MG - campus Juiz de Fora - pelo apoio financeiro. Às agências de fomento FAPEMIG e CAPES pelo apoio ao projeto desta tese.

"Às vezes as ideias das pessoas estão muito além de sua própria compreensão. Um cientista pode ter uma intuição sem ser capaz de avaliar toda sua profundidade."

Mário Schenberg

Resumo

A obtenção da ação efetiva (AE) de vácuo é um dos principais objetivos da gravitação quântica e, em particular, da abordagem semiclássica. Um dos métodos mais eficientes é a integração da anomalia conforme (anomalia do traço), a qual é suficiente para fornecer a base da teoria quântica de campos para fenômenos como a evaporação de buracos negros (efeito Hawking) e a versão estendida da inflação de Starobinsky. A AE induzida por anomalia fornece informação suficiente sobre os efeitos quânticos de vácuo no limite de alta energia. Assumindo que no ultravioleta (UV) a teoria de campos original possui simetria conforme local, pode-se derivar uma forma fechada e compacta da ação efetiva de vácuo. Até recentemente, o processo de integração da anomalia no espaço curvo era completamente conhecido apenas nos casos bidimensionais e quadridimensionais ($D = 2$ e $D = 4$). Na presente tese relatamos os detalhes da integração da anomalia em $D = 6$. A anomalia em seis dimensões é dada pelos termos locais que possuem seis derivadas da métrica. Encontramos a forma explícita de ação efetiva que é responsável pela anomalia. O resultado é apresentado na forma covariante não local e também na forma covariante local com dois campos escalares auxiliares. Pode-se mostrar que a mesma forma com dois campos auxiliares se mantém em dimensões pares superiores do espaço-tempo.

Palavras chaves : Anomalia Conforme; Ação efetiva; Operador conforme de ordem superior; Densidade de Euler modificada.

Áreas do conhecimento : Teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, Gravitação quântica.

Abstract

The evaluation of vacuum effective action (EA) is one of the main purposes in quantum gravity and in particular in the semiclassical approach. One of the most efficient methods is the integration of conformal anomaly (trace anomaly), which is sufficient to provide the quantum field theory basis for such phenomena as evaporation of black holes (Hawking effect) and extended version of Starobinsky inflation. The anomaly-induced EA provides sufficient information about the vacuum quantum effects in the high energy limit. Assuming that in ultraviolet (UV) the original field theory possesses local conformal symmetry, one can derive a closed and compact form of effective action of vacuum. Until recently the process of integration of anomaly in curved space has been completely known only in the two and four-dimensional ($D = 2$ and $D = 4$) cases. In the present thesis we report on the details of integrating anomaly in $D = 6$. The anomaly in six dimensions is given by the local terms which have six derivatives of the metric. We find the explicit form of effective action which is responsible for the anomaly. The result is presented in nonlocal covariant form and also in the local covariant form with two auxiliary scalar fields. It can be shown that the same form with two auxiliary fields holds in higher even dimensions of the space-time.

Keywords : Conformal anomaly; Effective action; Higher order conformal operator; Modified Euler density.

Knowledge areas : Quantum field theory in curved spacetime, Quantum gravity.

Sumário

Notações e convenções

Salvo menção em contrário, adotaremos sempre a convenção da soma de Einstein na qual $x^\mu x_\mu \equiv \sum x^\mu x_\mu$.

Principais notações utilizadas:

- D: dimensão do espaço;
- $\mathrm{diag}:$ matriz diagonal;
- $A_{\mu\nu\lambda\cdots}:$ tensor com componentes covariantes;
- $A^{\mu\nu\lambda\cdots}:$ tensor com componentes contravariantes;
- $A_{\mu\nu\lambda\cdots}A^{\mu\nu\lambda\cdots} = A^2_{\mu\nu\lambda\cdots}$: contração de todos os índices de um tensor consigo mesmo ou "*quadrado*" do tensor.
- δ^μ_ν: delta de Kronecker;
- $g_{\mu\nu}:$ tensor métrico;
- $g^{\mu\nu}:$ tensor métrico inverso;
- $g = det\,\|g_{\mu\nu}\|:$ determinante da métrica;
- $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1,\cdots)$: métrica de um espaço de Minkowski em D dimensões;
- η: tempo conforme;
- $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}:$ símbolo de Christoffel ou conexão afim;
- $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}:$ tensor de Riemann;
- $R_{\mu\nu}:$ tensor de Ricci;

- R: escalar de Ricci ou de curvatura;
- $C^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$: tensor de Weyl;
- $\int_x \equiv \int d^D x \sqrt{-g(x)}$;
- $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$: derivada parcial;
- ∇_μ: derivada covariante;
- Δ_D: operador escalar conforme na dimensão D (ordem D);
- $\Delta_{D(D')}$: operador escalar conforme de ordem D generalizado para D' dimensões;
- $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \nabla^\mu\nabla_\mu = \Box$: operador d'Alembertiano generalizado;
- $g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\sigma)(\nabla_\nu\sigma) = (\nabla^\mu\sigma)(\nabla_\mu\sigma) = (\nabla\sigma)^2$: contração de duas derivadas covariantes atuando sobre um escalar;
- $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu$: comutador de derivadas covariantes;
- $\varepsilon^{\lambda_1 \ldots \lambda_D}$: tensor de Levi-Civita;
- E_D: densidade de Euler em uma variedade D-dimensional;
- S_c: ação arbitrária conformalmente invariante;
- Γ: Ação Efetiva.

Lista de publicações

(i) F.M. Ferreira, I.L. Shapiro and P.M. Teixeira, *On the conformal properties of topological terms in even dimensions*, Eur. Phys. J. Plus **131** (2016) 164, arXiv:1507.03620.

(ii) F.M. Ferreira, I.L. Shapiro, *Integration of trace anomaly in* $6D$, Phys. Lett. **B772** (2017) 174, arXiv:1702.06892.

(iii) F.M. Ferreira, I.L. Shapiro, *Basis of surface curvature-dependent terms in* $6D$, Phys. Rev. **D99** (2019) 064032, arXiv:1812.01140v3.

Introdução

Em Teoria Quântica de Campos (TQC) em espaços curvos, a *anomalia conforme* (AC), também conhecida como *anomalia de Weyl* ou *anomalia do traço*, pode ser entendida, em linhas gerais, como uma quebra da simetria conforme da teoria clássica. A variação da ação em relação à métrica de fundo é proporcional ao tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ que, por sua vez, para teorias com simetria conforme (teorias conformes) possui traço identicamente nulo. Entretanto, a simetria conforme, em dimensões pares, é violada no nível quântico em correções de um laço (*loop*) na ação renormalizada, ou seja, o traço do valor esperado de vácuo de $T_{\mu\nu}$ é diferente de zero (ver, p. ex., [1–4] para um breve histórico). Em dimensões ímpares, a anomalia conforme não aparece no nível de um laço porque não há divergências logarítmicas e, por esta razão, é muito menos estudada; em particular, nesta tese consideraremos somente dimensões D pares. Os objetos constituintes da AC, numa forma mais geral, e sua classificação serão detalhados ao longo deste trabalho e podem ser encontrados em [5–7]. A AC faz com que apareçam contribuições quânticas que modificam a ação clássica, esta nova ação é denominada *ação efetiva* (AE). Nesta abordagem da AE, compatível com a AC, ela é denominada *ação efetiva induzida por anomalia* (AEIA) [8].

A AE é uma ferramenta de extrema importância de um modo geral e especialmente em espaços-tempos curvos. Sua obtenção é um dos principais objetivos da abordagem semiclássica da gravitação quântica[1] [9, 10]. Sua derivação completa, em geral, é

[1]Nesta abordagem, os campos de matéria são quantizados mas o fundo gravitacional é clássico.

tarefa bastante árdua, sendo assim, o principal intento é desenvolver uma aproximação que seja controlável no sentido em que possamos identificar em quais situações físicas pode-se aplicá-la. O exemplo mais importante de AE é a AEIA que é obtida integrando-se a AC e, portanto, preservando as informações completas sobre efeitos quânticos de vácuo no ultravioleta (UV). Quanto mais a teoria original possuir simetria conforme, mais a noção de UV pode ser generalizada para a maioria dos problemas físicos relevantes. Em algumas situações físicas, pode-se considerar a massa como pequena perturbação, estendendo-se a área de aplicação da AC. Acrescente-se ainda que as ações induzidas por anomalias são extremamente úteis para abordar efeitos quânticos de vácuo em Cosmologia e Física de buracos negros. Em síntese, a AEIA é um objeto muito poderoso devido à sua forma compacta e útil e também devido ao fato de ser utilizada em várias aplicações relevantes (ver, p. ex., [4]).

A integração da anomalia é o método mais simples para se chegar à AEIA de vácuo. Essa integração pode ser entendida como a obtenção do funcional da ação através de sua derivada variacional em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ cujo traço é proporcional à anomalia. A AEIA permanece invariante por substituições do tipo $\Gamma \to \Gamma + S_c$, onde $S_c[g_{\mu\nu}]$ é um invariante conforme [11–13]. Este funcional desempenha um papel análogo a uma constante de integração na determinação da ação efetiva; entretanto, como veremos oportunamente, em $D = 2$ ele é identicamente nulo. A AE é um objeto não local, no caso da AEIA, as não-localidades estão relacionadas com funções de Green de operadores diferenciais conformes Δ_D de ordem par[2]. Em $D = 4$, encontramos o mais notável destes operadores, o operador conforme de quarta ordem Δ_4 (operador de Paneitz) [15] de fundamental importância na integração da anomalia conforme.

Na dimensão $D = 2$, a integração da anomalia gera a ação de Polyakov [16] a qual se mostrou muito importante para o desenvolvimento da teoria de cordas. Uma vez que o resultado em $D = 2$ é exato, ele também desempenha um papel de referência para outras dimensões nas quais tem-se que utilizar certas aproximações. Três anos após os resultados de Polyakov, a AE em $D = 4$, análoga ao caso $2D$, foi obtida por Riegert [17] e simultaneamente por Fradkin e Tseytlin [18]. Este último resultado revelou-se

[2]Para um maior aprofundamento sobre operadores diferenciais conformes ver, p. ex., [14].

extremamente útil para inúmeras aplicações [4, 9]. A AEIA em $D = 4$ é essencialmente mais complicada que a ação de Polyakov principalmente devido ao já referido invariante conforme S_c, o qual não pode ser determinado pela anomalia em $4D$. Os problemas com as identidades de Ward na ação de Riegert-Fradkin-Tseytlin [17, 18], os quais são discutidos em uma série de artigos tais como [19, 20], referem-se ao fato de que o funcional conforme S_c permanece indeterminado. Entretanto, uma vez que S_c não está relacionado com o setor UV da teoria, na maioria das aplicações conhecidas, esta indeterminação torna-se irrelevante [9]. Outro aspecto complicador na AE em $4D$, é o fato de haver um termo superficial na anomalia, $\Box R$; em $2D$ não há termos superficiais. Em $D = 4$ há ainda uma complicação a mais comparada com a anomalia em $2D$: a presença do invariante conforme $C^2_{\mu\nu\alpha\beta}$.

As circunstâncias mudam dramaticamente em $6D$ onde encontramos uma gama muito maior de termos superficiais (derivadas totais) que tornam a integração da anomalia uma tarefa muito mais desafiadora. Como discutimos em nossas publicações [21, 22], o número de possíveis termos superficiais covariantes com a dimensão compatível com as derivadas da métrica deve ser alto [19], mas pode ser reduzido a apenas oito num primeiro momento [22]. Posteriormente, identificamos que entre os oito elementos desta base de partida há uma sutil dependência linear e, mostramos com isso, que o número pode ser reduzido a sete termos linearmente independentes.

Junte-se a isto o fato de que os coeficientes dos termos topológicos e conformes mais relevantes possuem uma misteriosa universalidade de sinais os quais não dependem da paridade de Grassmann mas somente do número de derivadas nos termos da ação dos campos quânticos. Há uma crença muito interessante e frutífera de que esta universalidade de sinais e propriedades relacionadas ao grupo de renormalização se mantém além do nível de um laço. Esta ideia abriu recentemente uma nova área de pesquisa que é conhecida como teoremas-c e -a (ver, p. ex., [23–25]).

Os teoremas-c e -a abrem uma janela para importantes desenvolvimentos matemáticos relativos às propriedades gerais dos fluxos dos grupos de renormalização. No que concerne a aplicações à Cosmologia e à Astrofísica, o principal objetivo é provar que (e entender o por quê) o padrão de sinais na ação induzida por anomalia é preservado além da ordem de um laço, inclusive no nível não perturbativo. Com relação a este fato, seria certamente interessante expandir nossa experiência com a universalidade de sinais a teorias qualitativamente novas; teorias em altas dimensões representam uma grande possibilidade nesse sentido. É sabido também que a estrutura geral da anomalia em um laço não muda quando dimensões pares $D \geqslant 6$ são consideradas [5–7] e nossa experiência prévia mostra que a análise consistente do problema só pode ser alcançada por meio da AEIA [5,26], entretanto, uma expressão explícita para $D > 4$ não era conhecida até então. Deve-se notar que a integração da anomalia em $D = 6$ sempre atraiu muita atenção, mas até o presente havia somente resultados particulares [27–29] (ver também suas referências e [30] para possível utilização em $M5$-branas), embora de muito interesse, os quais não nos capacitavam à obtenção da AEIA em uma forma definitiva.

Nesta tese descrevemos um esquema completo de solução da integração da anomalia conforme em $6D$. Para tanto, o trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 1, apresentamos o esquema de integração da anomalia a qual é revisada em $D = 2$ e $D = 4$ mas é apenas esboçada para o caso mais complexo em $D = 6$. No capítulo 2, descrevemos a forte relação entre as densidades de Euler - que são os termos topológicos na dimensão correspondente - e os operadores conformes de ordem equivalente a dimensão par em questão. Neste capítulo são apresentadas duas conjecturas, uma das quais afirma que há de fato um objeto denominado termo topológico modificado[3] de forma que sua transformação conforme seja tal que somente sobrevivam termos de primeira ordem em σ (parâmetro conforme da métrica). Esta última relação também será abordada *en passant* no cap. 1 a fim de esquematizar a integração da anomalia. Os capítulos 3 e 4 são dedicados aos cálculos das transformações conformes dos candidatos a termos superficiais $6D$ que devem ser adicionados ao termo topológico E_6 gerando a transformação do termo modificado prevista no capítulo 2. Como não havia garantias da existência do termo modificado, a tentativa inicial (cap. 3) foi a de pesquisarmos um possível solução em uma métrica muito particular denominada métrica *conformalmente plana* com o parâmetro σ somente dependente do tempo conforme. O êxito obtido no cap. 3 permitiu a generalização das transformações para uma métrica qualquer no cap. 4. Ainda no cap. 4,

[3]Termo topológico adicionado de uma combinação de termos superficiais.

derivamos uma importante relação entre os elementos da base de termos superficiais proposta, inicialmente com oito termos, reduzindo-a a sete termos linearmente independentes como já mencionado. A eliminação de um elemento da base permitiu a obtenção do operador conforme Δ_6 com duas indeterminações. O resultado obtido para este operador foi idêntico ao obtido anteriormente em [29], entretanto, é importante enfatizar que somente o conhecimento deste operador não é suficiente para integrar anomalia. Para tal, necessitamos da propriedade conforme do termo topológico adicionado de uma combinação de derivadas totais a qual não fora obtido até o nosso trabalho [22]. As lagrangeanas locais, último ingrediente na integração da anomalia $6D$, são apresentadas no capítulo 5 juntamente com uma solução para um caso especial dos parâmetros encontrados no operador Δ_6. Finalmente, na última sessão, apresentamos nossas conclusões e discutimos algumas perspectivas de continuação de nosso trabalho.

Capítulo 1

Esquema geral de integração da anomalia conforme

Neste capítulo faremos uma breve descrição do esquema de integração da anomalia o qual pode ser aplicado a qualquer dimensão par. Como veremos a seguir, os três ingredientes necessários para integração da anomalia são os seguintes: o operador conforme da dimensão par em questão Δ_D, o termo topológico modificado $\tilde{E}_D$ e sua transformação conforme e, finalmente, a integração de termos superficiais. A parte que demanda esforços mais significativos (principalmente para o caso em que $D \geqslant 6$) é a obtenção do invariante topológico acrescido de uma combinação de termos superficiais e cuja transformação conforme seja a mais simples possível[1]. A maior parte deste trabalho é dedicada a apresentar os resultados inéditos obtidos, a saber, a solução do problema em $D = 6$. Para fins de maior compreensão, faremos uma apresentação do esquema geral de integração da anomalia exemplificando inicialmente os já conhecidos resultados em $D = 2$ e $D = 4$; no caso $6D$, faremos preliminarmente uma abordagem mais superficial deixando maiores detalhes para os capítulos seguintes.

[1] Ver eqs. (1.4) e (1.6).

1.1 Apresentação do esquema

Vamos expor em linhas gerais o esquema geral de integração da anomalia D-dimensional em analogia ao que é descrito no artigo de revisão [9] para $D = 4$. As modificações necessárias em dimensões superiores não são relevantes neste esquema exceto pelo fato de que as dificuldades matemáticas são muito maiores.

O setor de vácuo da AC em dimensões pares pode ser escrito, para qualquer teoria que possua simetria conforme no nível clássico, como [5–7]

$$\langle T^\mu_\mu \rangle \,=\, c_r \, W^r_D \,+\, a \, E_D \,+\, \Xi_D \,, \tag{1.1}$$

com soma em r. Aqui os termos W^r_D representam os invariantes conformes construídos tipicamente a partir de tensores de Weyl compatíveis com a dimensão D. Em $D = 2$, a métrica possui um único grau de liberdade σ e não há portanto termos conformes; em $D = 4$, há somente um invariante conforme, o quadrado do tensor de Weyl. Entretanto, em $D = 6$, há três destes termos (seção 1.4) tal como pode ser visto e discutido em detalhes em [31] (ver também [32, 33] e suas referências). O objeto Ξ_D na eq. (1.1) é a combinação linear dos termos superficiais, $\Xi_D = \sum \gamma_k \Xi_k$, na dimensão correspondente[2]. Finalmente, E_D é o integrando do termo topológico [34],

$$E_{(D=2n)} = \frac{1}{2^n} \varepsilon^{\alpha_1\beta_1 \, \dots \, \alpha_n\beta_n} \varepsilon^{\gamma_1\delta_1 \, \dots \, \gamma_n\delta_n} R_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1} \;\; \dots \;\; R_{\alpha_n\beta_n\gamma_n\delta_n} \,. \tag{1.2}$$

A classificação dos termos em (1.1) é uma simples consequência de que a AC vem das divergências de um laço que, por sua vez, satisfazem a identidade de Noether conforme. É possível mostrar que os termos que satisfazem esta identidade devem pertencer a uma das três categorias descritas em (1.1).

Os coeficientes numéricos a, c_r e γ_k na eq (1.1) dependem do número de campos conformes sem massa de diferentes spins. Estas quantidades não requerem maiores preocupações para nós, pois descreveremos uma solução geral válida para quaisquer valores de a, c_r e γ_k. Nosso objetivo é de fato encontrar a AEIA tal que

$$-\,\frac{2}{\sqrt{-g}} \, g_{\mu\nu} \, \frac{\delta \Gamma_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} \,=\, \langle T^\mu_\mu \rangle \,= T \,. \tag{1.3}$$

[2] A relação dos termos relevantes Ξ_k em $D = 6$ pode ser encontrada em (3.1) no capítulo 3.

Como já mencionado, a integração da anomalia requer um invariante topológico modificado,

$$\tilde{E}_D \;\; = \;\; E_D + \sum_k \alpha_k \Xi_k \,, \tag{1.4}$$

em que os valores de α_k sejam escolhidos de modo a fornecer uma transformação conforme especial e o mais simples possível deste novo termo topológico. Ou seja, mediante *transformação local conforme da métrica*[3],

$$g_{\mu\nu} \;\; = \;\; \bar{g}_{\mu\nu}\, e^{2\sigma(x)} \,, \tag{1.5}$$

o objeto que buscamos deve satisfazer[4]

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_D \;\; = \;\; \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_D + \kappa\bar{\Delta}_D\sigma\big) \,. \tag{1.6}$$

Aqui, κ é uma constante e $\Delta_D = \Box^{D/2} + \ldots$ representa o operador conforme atuando em um escalar conformalmente inerte. Vale citar como exemplo que em $D = 4$ a fórmula (1.6) é bem conhecida, com Δ_4 sendo denominado na literatura como operador de Paneitz[5] [15, 17, 35, 36], além disto, $\kappa = 4$ e o único termo superficial em (1.4) é $\alpha_k \Xi_k = -(2/3)\Box R$ (ver detalhes na seção 1.3). Fato curioso é que o coeficiente $-2/3$ é um tanto quanto enigmático pois ele somente pode ser obtido por cálculo direto. Maiores detalhes podem ser encontrados em [37], onde pode-se observar que as transformações conformes de E_4 e $\Box R$ são relativamente complicadas, contudo a transformação da combinação $E_4 - \frac{2}{3}\Box R$ cancela todos os temos de segunda ordem ou mais em σ restando apenas os termos de primeira ordem sobres os quais atua o operador conforme Δ_4. Outrossim, há uma expectativa de que a simetria conforme do operador apresentado em (1.6) seja generalizada para qualquer D par, ou seja,

$$\sqrt{-g}\Delta_D\varphi = \sqrt{-\bar{g}}\bar{\Delta}_D\bar{\varphi} \,. \tag{1.7}$$

Na expressão acima, $\varphi = \bar{\varphi}$ e todas as demais quantidades com barra, tais como $\bar{\Delta}_D$, são construídas com a métrica fiduciária $\bar{g}_{\mu\nu}$. O operador Δ_D apresenta ainda outra

[3] Maiores detalhes a respeito das transformações conformes podem ser encontrados no capítulo 2.

[4] Ver também seção 2.4 no capítulo 2.

[5] A forma explícita de Δ_4 é dada na eq. (1.34).

propriedade de suma importância que é o fato de ser auto-adjunto [12, 17],

$$\int_x \psi \Delta_D \varphi = \int_x \varphi \Delta_D \psi\,. \tag{1.8}$$

É necessário enfatizar que a eq. (1.7) representa uma conjectura baseada nos resultados conhecidos na literatura em $D = 2, 4$. No desenvolvimento desta tese mostraremos que sua validade estende-se também a $D = 6$ [21, 22].

Para completarmos o esquema de integração da anomalia precisamos de um último elemento. A saber, deve haver um conjunto de lagrangeanas *locais* dependente da métrica $\mathcal{L}_i$, as quais fornecerão, com coeficientes c_{ik} adequados, as identidades

$$\Xi_k \;=\; -\,\frac{2}{\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\, \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\, \sum_i c_{ki} \int_x \mathcal{L}_i \tag{1.9}$$

para cada um dos termos superficiais em (1.1). Se o conjunto $\mathcal{L}_i$ puder ser encontrado, o problema de se resolver (1.3) é reduzido a integrar os dois primeiros termos em (1.1) o que pode ser facilmente resolvido caso a identidade (1.6) seja encontrada. A fim de verificar o que foi dito - em analogia ao caso $4D$ [17] - vamos apresentar a função de Green conforme do operador Δ_D, a qual satisfaz

$$\sqrt{-g}\,\Delta_D^x\, G(x,x') \;=\; \delta^D(x,x')\,, \quad G \;=\; \bar{G}\,. \tag{1.10}$$

Esta propriedade é consequência da simetria conforme do operador Δ_D, ver eq. (1.7).

A solução completa para a AE induzida pode ser apresentada na forma mais geral D-dimensional como [22]

$$\begin{aligned}\Gamma_{ind} \;&=\; S_c + \iint\limits_{x\,y} \epsilon_D \Big\{\, c_r\, W_D^r \,+\, \frac{a}{2}\, \tilde{E}_D(x) \Big\}\, G(x,y)\, \tilde{E}_D(y) \;+ \\ &+\; \sum_{i,k} \big(\gamma_k - a\alpha_k\big) c_{ki} \int_x \mathcal{L}_i\,,\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde o coeficiente ϵ_D depende da dimensão D (par)[6],

$$\epsilon_D = -\frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{D}\,. \tag{1.12}$$

Maiores detalhes sobre a derivação destas fórmulas são encontrados na seção 1.3. Em (1.11), $S_c \;=\; S_c[g_{\mu\nu}]$ é um funcional conforme indeterminado, o qual representa uma

[6]Como já mencionado, o interesse desta tese reside somente em dimensões pares.

condição de contorno da equação variacional (1.3). Como frisamos na Introdução, esse termo está presente em todas as dimensões pares, exceto $D = 2$, o que significa que em especial a AEIA tem uma não-unicidade. Outro fato a ser destacado é que a modificação dos coeficientes γ_k da anomalia (1.1) ocorre porque parte dos termos superficiais foram absorvidos em $\tilde{E}_D$.

Façamos uma observação sobre a estrutura não local dos termos relacionados a invariantes conformes de Weyl. É bem conhecido que o quadrado do tensor de Weyl na ação induzida em $4D$ corresponde a inserção do objeto não local $\log(\Box/\mu^2)$ entre dois tensores de Weyl (ver, p. ex., recente discussão sobre o significado físico deste fato em [38]). A forma da estrutura não local em (1.11) indica que as inserções de logaritmos não locais também ocorrem em estruturas conformes em dimensões mais altas[7] com coeficientes proporcionais às correspondentes funções-β. Por outro lado, a distribuição detalhada das inserções logarítmicas não locais somente pode ser estabelecida através de cálculos diretos (ver, p. ex., [39] para um exemplo similar dos fatores de forma em $D = 4$).

Escrevendo a parte não local da expressão (1.11) em uma forma simétrica, podemos sempre representar a AE através de uma expressão covariante e local construída com a ajuda de dois campos auxiliares ψ e φ, como foi sugerido em [11, 40]

$$\begin{aligned} \Gamma_{ind} &= S_c + \sum_{i,k} \big(\gamma_k - a\,\alpha_k\big) c_{ki} \int_x \mathcal{L}_i \\ &+ \frac{\epsilon_D}{2} \int_x \Big\{ \frac{1}{2} \big[\varphi \Delta_D \varphi - \psi \Delta_D \psi\big] + \sqrt{-a}\,\varphi\, \tilde{E}_D \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-a}} (\varphi - \psi)\; c_r\, W_D^r \Big\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Nestas fórmulas assumimos que $a < 0$, como no caso $D = 4$. Em outros casos, a expressão pode ser modificada convenientemente de formar trivial para se adequar ao sinal de a.

A última observação é que pode-se também escrever a ação em termos de campos auxiliares modificados [13, 40] ou numa forma mais simples não covariante em termos de σ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ [17]. Uma vez que a transição para estas formas em dimensões mais altas não é muito diferente em comparação com o caso $D = 4$, não as consideraremos neste trabalho.

---

[7] Na seção 1.4 apresentamos as estruturas invariantes conofmes de Weyl em $6D$, eq. (1.47).

As expressões (1.11) e (1.13) são representações explícitas formais da AE, as quais correspondem à estrutura geral da AC independente da dimensão par[8]. Vale ressaltar que é notável que a AE de vácuo em dimensões pares arbitrárias possa ser escrita numa forma tão simples e geral.

Levando-se em conta tudo que foi apresentado nesta seção, fica claro que a integração da anomalia necessita não somente da imprescindível eq. (1.6) mas também de (1.9) para lidar com a parte local da ação induzida. Nas próximas seções deste capítulo, apresentaremos toda estratégia de obtenção da AEIA em $D = 2$ e $D = 4$, assim como, faremos uma breve introdução ao caso mais complexo $6D$.

1.2 Integração da anomalia em $2D$

O esquema de integração da anomalia em $2D$ nos fornece a famosa ação de Polyakov e, por ser este o caso mais simples de anomalia, mas não menos importante e didático, detalharemos a seguir todo o esquema para obtenção da AEIA no caso bidimensional.

Em $D = 2$, as eqs. (1.2) e (1.4) geram simplesmente

$$\tilde{E}_2 = E_2 = R\,. \tag{1.14}$$

Não há termos superficiais ($\Xi_{(D=2)} \equiv 0$) e, como consequência, a densidade de Euler modificada $\tilde{E}_2$ equivale à própria densidade de Euler E_2. Outra particularidade é a inexistência de invariantes de Weyl,

$$W_{(D=2)} \equiv 0\,, \tag{1.15}$$

e, assim sendo, a anomalia (1.1) torna-se simplesmente

$$\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle = aR\,. \tag{1.16}$$

O operador conforme é dado meramente por

$$\Delta_2 = \Box \tag{1.17}$$

[8]Como concebida por Deser e Schwimmer em [7].

e a relação (1.6) fica

$$\sqrt{-g}R \;=\; \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{R} - 2\bar{\Box}\sigma\big)\,. \tag{1.18}$$

Devido ao princípio de Hamilton, a variação total da ação deve ser nula, assim, se variarmos $\bar{\Gamma}_{ind}$ com dependência funcional de σ e de $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\delta\bar{\Gamma}_{ind}$ total é tal que

$$\begin{aligned} \frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\sigma}\delta\sigma + \frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\bar{g}_{\mu\nu}}\delta\bar{g}_{\mu\nu} &= 0 \\ \frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\sigma} + \frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\bar{g}_{\mu\nu}}\frac{\delta\bar{g}_{\mu\nu}}{\delta\sigma} &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.19}$$

o que nos conduz a

$$-2\bar{g}_{\mu\nu}\frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\bar{g}_{\mu\nu}} \;=\; -\frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}}{\delta\sigma}\,. \tag{1.20}$$

Tomando o limite da expressão (1.20) em que $\sigma \to 0$ e, consequentemente, $\bar{g}_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$, o primeiro membro de (1.3) pode ser reescrito como

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta\Gamma_{ind}[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\delta\bar{\Gamma}_{ind}[e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta\sigma}\bigg|_{\substack{\sigma\to 0\\ \bar{g}_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}}} \tag{1.21}$$

e ainda comparando com (1.16), a anomalia pode ser integrada (lembrando que $S_c \equiv 0$ em $2D$) de forma que

$$\bar{\Gamma}_{ind} = -a\int d^2x\sqrt{-\bar{g}}\sigma\big(\bar{R} - 2\bar{\Box}\sigma\big)\,. \tag{1.22}$$

O resultado (1.22) não é explicitamente covariante pois não está expresso em função da métrica física $g_{\mu\nu}$. De modo a obtermos uma solução covariante, embora não local, procederemos da seguinte forma.

Com base nas eqs.(1.7), (1.8) e (1.10),

$$\begin{aligned} \int d^2y\sqrt{-g(y)}G(x,y)R(y) &= \int d^2y\sqrt{-\bar{g}(y)}\bar{G}(x,y)\big(\bar{R}(y) - 2\bar{\Delta}_2\sigma\big) \\ &= -2\sigma(x) + \text{termos independentes de } \sigma\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

O primeiro termo do integrando de (1.22), substituindo $\sigma(x)$ de acordo com (1.23), torna-se

$$\int d^2x\sqrt{-\bar{g}}\sigma\bar{R} = -\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-\bar{g}(x)}\int d^2y\sqrt{-g(y)}\bar{R}(x)G(x,y)R(y) \tag{1.24}$$

e o segundo termo pode ser desenvolvido, com um pouco mais de esforço, tal que

$$\begin{aligned}
-2\int d^2x\sqrt{-\bar{g}}\sigma\bar{\Box}\sigma &= \int d^2x\sqrt{-\bar{g}(x)}\int d^2y\sqrt{-g(y)}\bar{\Box}_x\sigma G(x,y)R(y) \\
&= \int d^2x\sqrt{-g(x)}\int d^2y\sqrt{-g(y)}\sigma(x)\left[\Box_x G(x,y)\right]R(y) \\
&= \int d^2x\sqrt{-g}\sigma R\,, \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

que é exatamente o primeiro membro de (1.24) exceto pelo fato de que $\bar{g}_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$. Finalmente podemos escrever a ação induzida na forma covariante não local

$$\Gamma_{ind} = \bar{\Gamma}_{ind\,(\bar{g}_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu})} = \frac{a}{4}\iint\limits_{x\,y} R(x)\,G(x,y)\,R(y)\,, \qquad (1.26)$$

ou ainda, tendo em vista a equação (1.10),

$$\Gamma_{ind} = \frac{a}{4}\int_x R\,\frac{1}{\Box}\,R\,, \qquad (1.27)$$

que é a ação não local de Polyakov. Levando em conta tudo o que foi descrito nesta seção, podemos notar que o resultado é exatamente o mesmo da prescrição dada em (1.11).

1.3 Integração da anomalia em $4D$

De forma análoga ao que foi feito na ação de Polyakov, resolveremos em $4D$ uma equação semelhante porém com ingredientes extras.

O invariante de Weyl é dado pelo quadrado do tensor de Weyl

$$W_{(D=4)} = C^2_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv C^2 \qquad (1.28)$$

e o único termo superficial é

$$\Xi_{(D=4)} = \gamma\Box R\,. \qquad (1.29)$$

A unicidade deste termo é consequência da dimensão de massa elevada à quarta potência e da covariância, além das Identidades de Bianchi que fazem com que

$$\nabla_\mu\nabla_\nu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box R\,. \qquad (1.30)$$

O termo topológico E_4, conhecido como termo de Gauss-Bonnet, pode ser escrito como

$$E_4 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2 \tag{1.31}$$

e sua forma modificada, compatível com (1.6) torna-se

$$\tilde{E}_4 = E_4 - \frac{2}{3}\Box R\,, \tag{1.32}$$

de tal forma que (1.6) seja representada em $D = 4$ como

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_4 \;=\; \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_4 + 4\bar{\Delta}_4\sigma\big)\,. \tag{1.33}$$

Δ_4 representa o já referido operador conforme e auto-adjunto em $4D$, conhecido como operador de Paneitz, dado por

$$\Delta_4 \;=\; \Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\Box + \frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\,\nabla_\mu\,. \tag{1.34}$$

Isto posto, a anomalia conforme em $4D$ pode ser resumida na expressão

$$\langle T^\mu_\mu\rangle \;=\; c\,C^2 + aE_4 + \gamma\Box R\,, \tag{1.35}$$

mas que por conveniência será modificada, considerando a definição (1.32), para

$$\langle T^\mu_\mu\rangle \;=\; c\,C^2 + a\tilde{E}_4 + \Big(\gamma + \frac{2a}{3}\Big)\Box R\,. \tag{1.36}$$

Escrevamos, por praticidade, a ação induzida através das seguintes parcelas,

$$\Gamma_{ind} = S_c + \Gamma_{C^2} + \Gamma_{E_4} + \Gamma_{sup}\,, \tag{1.37}$$

onde cada termo do segundo membro de (1.37), exceto S_c, é responsável por um termo da anomalia (1.36).

A parte mais simples deste procedimento é a integração de Γ_{sup}. A lagrangeana com termo local do tipo $\mathcal{L} = R^2$ resolve (1.9) para o caso quadridimensional (ver, p. ex., [21] e suas referências)[9],

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int_x R^2 = 12\Box R\,. \tag{1.38}$$

[9]Uma discussão mais aprofundada sobre o termo $\int_x R^2$ pode ser encontrada em [41].

A ação Γ_{sup} é dada assim por

$$\Gamma_{sup} = \frac{1}{12}\Big(\gamma + \frac{2a}{3}\Big)\int_x R^2\,. \tag{1.39}$$

Por simplicidade definiremos,

$$\Gamma_{C^2+E_4} \equiv \Gamma_{C^2} + \Gamma_{E_4}\,, \tag{1.40}$$

e com o auxílio de (1.21) e (1.36)

$$-\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\delta\bar{\Gamma}_{C^2+E_4}[e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta\sigma}\Bigg|_{\substack{\sigma\to 0\\ \bar{g}_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}}} = c\,C^2 + a\tilde{E}_4\,, \tag{1.41}$$

o que resulta em

$$\bar{\Gamma}_{C^2+E_4} = -\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\sigma\big[c\,\bar{C}^2 + (a\bar{\tilde{E}}_4 + 4\bar{\Delta}_4\sigma)\big]\,. \tag{1.42}$$

De forma análoga ao descrito na seção (1.23),

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}\int d^4y\sqrt{-g(y)}G(x,y)\tilde{E}_4(y) + \text{termos independentes de } \sigma\,, \tag{1.43}$$

o que permite escrever

$$\Gamma_{C^2+E_4} = -\iint\limits_{x\,y}\big(\frac{c}{4}\,C^2 + \frac{a}{8}\tilde{E}_4\big)_x G(x,y)\tilde{E}_{4\,y}\,. \tag{1.44}$$

Γ_{ind} é dada, finalmente, por

$$\Gamma_{ind} = S_c - \iint\limits_{x\,y}\big(\frac{c}{4}\,C^2 + \frac{a}{8}\tilde{E}_4\big)_x G(x,y)\tilde{E}_{4\,y} + \frac{1}{12}\Big(\gamma + \frac{2a}{3}\Big)\int_x R^2\,. \tag{1.45}$$

Novamente vale ressaltar que o resultado enquadra-se perfeitamente no formato de (1.11) desde que

$$\epsilon_D = -\frac{1}{4}\quad;\qquad \alpha_k = -\frac{2}{3}\quad;\qquad c_{ki} = \frac{1}{12}\qquad \text{e}\qquad \mathcal{L}_i = R^2\,. \tag{1.46}$$

Em $4D$ os índices i e k acima somente assumem o valor unitário e naturalmente a soma $\sum\limits_{i,k}$ em (1.11) torna-se sem efeito, entretanto optamos por preservá-los a fim de facilitar sua identificação nos moldes de (1.11).

1.4 Integração da anomalia em $6D$ - Considerações iniciais

O processo de integração da anomalia em $6D$ é de fato muito laborioso e, portanto, apresentaremos inicialmente nesta seção as linhas gerais para seu desenvolvimento. Preliminarmente descreveremos os componentes da eq. (1.1) separadamente uma vez que sua estrutura é mais complexa.

Os invariantes de Weyl são compostos dos seguintes objetos [31–33, 42]

$$
\begin{aligned}
W_6^1 &= C_{\mu\nu\rho\sigma}\, C^{\mu\alpha\beta\nu}\, C_{\alpha\cdot\cdot\beta}^{\ \ \rho\sigma}\,, \\
W_6^2 &= C_{\mu\nu\rho\sigma}\, C^{\rho\sigma\alpha\beta}\, C_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\ \ \ \ \mu\nu}\,, \\
W_6^3 &= C_{\mu\rho\sigma\lambda}\Big(\Box\delta^\mu_\nu + 4R^\mu_\nu - \frac{6}{5}\,R\delta^\mu_\nu\Big)\, C^{\nu\rho\sigma\lambda} \,+\, \nabla_\mu J^\mu\,,
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

onde,

$$
\begin{aligned}
J_\mu &= \big(4R_\mu^{\cdot\lambda\rho\sigma}\nabla^\nu + 3R^{\nu\lambda\rho\sigma}\nabla_\mu\big)R_{\nu\lambda\rho\sigma} + \Big(\frac{1}{2}R\nabla_\mu - R^\nu_\mu\nabla_\nu\Big)R \\
&\quad + R^{\nu\lambda}\big(\nabla_\nu R_{\lambda\mu} - 5\nabla_\mu R_{\nu\lambda}\big).
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Os invariantes W_6^r, por serem conformalmente inertes, não representam maiores dificuldades no processo de integração $6D$ e portanto não serão objetos de estudo no corpo desta tese.

A maior dificuldade - e a que demandará maior interesse neste trabalho - é a busca pelo objeto que definimos em (1.6) como termo topológico (densidade de Euler) modificado. Uma vez que a integração requer a existência de uma combinação linear das derivadas totais $\alpha_k\Xi_k$ adicionadas a este termo, ver (1.4), tal que

$$
\tilde{E}_6 = E_6 + \sum_k \alpha_k \Xi_k \tag{1.49}
$$

e de modo que a relação (1.6), também exista em sua versão $6D$[10]

$$
\sqrt{-g}\tilde{E}_6 = \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_6 + \kappa\bar{\Delta}_6\sigma\big)\,, \tag{1.50}
$$

torna-se mister investigar a existência (ou não) de um conjunto completo de derivadas totais a serem adicionadas a E_6 afim de que (1.50) seja válida. Outro fator que aumenta o

[10] Ver detalhes sobre esta conjectura na seção 2.4.

grau de dificuldade desta empreitada são os cálculos das transformações conformes de E_6 (cap. 2) e das candidatas à base de derivadas totais Ξ_k (caps. 3 e 4). Dito isto, acrescente-se que (1.50) deve confirmar também os resultados obtidos para o operador conforme Δ_6 em [27–29][11].

O epílogo da nossa receita $6D$ é a resolução de (1.9), ou seja, a obtenção de cada um das derivadas totais Ξ_k como combinação do traço das equações de movimento das lagrangeanas locais $\sum\limits_i c_{ki} \int_x \mathcal{L}_i$ de forma análoga, porém mais geral, ao que foi obtido em (1.38). A discussão destas lagrangeanas locais será abordada no capítulo 5.

[11] Ver também publicação anterior [43].

Capítulo 2

Densidades de Euler em $D = 2n$ e sua relação com operadores conformes

Faremos neste capítulo um estudo mais detalhado sobre as propriedades conformes das Densidades de Euler (termos topológicos) em dimensões pares, principalmente, no que diz respeito à sua modificação proposta em (1.4) pela adição de derivadas totais da curvatura (termos superficiais) e que possui interessantes propriedades conformes com intrínseca relação com o operador conforme da mesma dimensão. As relações já conhecidas em $D = 2$ e $D = 4$ serão agora detalhadas e serão abordadas em uma única seção. No caso da densidade de Euler modificada em $6D$, daremos aqui apenas o primeiro passo que é o cáluculo da transformação conforme de E_6 generalizada para D-dimensões. Fato é que a generalização nos permite confirmar, pelo menos até $D = 6$, uma nova modalidade de ação conformalmente invariante em dimensões ímpares uma unidade abaixo da dimensão na qual a densidade de Euler é de fato topológica. Na seção final, apresentamos duas conjecturas relacionadas a generalização de propriedades conformes da densidade de Euler em dimensões pares quaisquer: a primeira, relacionada a este último fato o qual acabamos de descrever, e a segunda, relacionada a eq. (1.6). Por último, ressaltamos que os resultados aqui apresentados restringem-se a variedades sem torção e que atendam à condição de metricidade[1].

[1] Para maiores detalhes sobre variedades com torção, ver, p. ex., [8, 44].

2.1 Transformações conformes

Uma maneira muito útil de modificar o tensor métrico, visando facilitar muitos cálculos, bem como revelar propriedades físicas de grande interesse [37], é a denominada *transformação conforme* (1.5). Muitas das referidas propriedades físicas tornam-se mais aparentes e fáceis de serem provadas se usarmos este tipo de transformação da métrica. Entretanto, não se trata de uma transformação de coordenadas, a transformação conforme pode ser vista como uma forma alternativa de parametrização da métrica através de novas variáveis $\bar{g}_{\mu\nu}$ e $\sigma(x)$, onde σ representa o parâmetro escalar da transformação e depende das coordenadas $x \equiv x^\mu$.

Em decorrência da definição (1.5), é facilmente verificado que para a métrica inversa,

$$g^{\mu\nu} \,=\, \bar{g}^{\mu\nu}\, e^{-2\sigma}\,, \tag{2.1}$$

de modo que

$$g_{\mu\tau}g^{\nu\tau} \,=\, \bar{g}_{\mu\tau}\bar{g}^{\nu\tau} \,=\, \delta^\nu_\mu\,. \tag{2.2}$$

Para o determinante da métrica vale a importante relação

$$g \,=\, det\,\|g_{\mu\nu}\| \,=\, det\,\|e^{2\sigma}\bar{g}_{\mu\nu}\,\| \,= e^{2D\sigma}\bar{g}\,, \tag{2.3}$$

que, como visto acima, depende explicitamente da dimensão do espaço em questão.

O símbolo de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, os tensores de curvatura $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu}$, o escalar de Ricci R e as potências e/ou combinações da curvatura, em consequência de (1.5), sofrem transformações que sempre se enquadram no modelo[2]

$$A^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} = e^{-2k\sigma}\Big(\bar{A}^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \mathcal{O}(\sigma)\Big),\;\, k\in\mathbb{Z}\,, \tag{2.4}$$

onde o termo $\mathcal{O}(\sigma)$ inclui tipicamente as derivadas covariantes do fator conforme local σ. Neste trabalho, quando necessário, denominaremos a quantidade entre parêntesis acima tal como

$$\bar{A}^{\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots} + \mathcal{O}(\sigma) \equiv \bar{A}^{\star\,\mu_1\mu_2\cdots}_{\nu_1\nu_2\cdots}\,. \tag{2.5}$$

[2]Para maiores detalhes sobre as transformações das quantidades relacionadas acima ver, p. ex., [37].

Como exemplo, sabemos que a transformação do tensor de Riemann é [37]

$$\begin{aligned}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + \bar{g}_{\mu\beta}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \bar{g}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{g}_{\mu\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ &\quad -\delta^{\alpha}_{\mu}\bar{g}_{\nu\beta}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \delta^{\alpha}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \delta^{\alpha}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + \bar{g}_{\nu\beta}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - \bar{g}_{\mu\beta}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\,. \quad (2.6)\end{aligned}$$

Com base na eq. (2.4), neste exemplo, temos que $k = 0$ e $\bar{R}^{\star\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ representa todo o segundo membro de (2.6).

2.2 Densidades de Euler em $2D$ e $4D$

Na geometria riemanniana, o teorema de Gauss-Bonnet relaciona propriedades topológicas de uma variedade D-dimensional com quantidades que são construídas numa base formada por tensores de curvatura [45]. Estas quantidades são denominadas *densidades de Euler* e são de grande interesse no nosso estudo, principalmente no que diz respeito às suas transformações conformes, devido a propriedades sobre as quais trataremos adiante neste capítulo. Para $D = 2n$ dimensões ($n = 1, 2 \dots$), este termo é dado pela expressão (1.2). Em variedades simplesmente conexas de dimensão D, E_D é topológico, ou seja, estes termos em integrandos do tipo

$$\int d^D x\,\sqrt{-g}\,E_D \tag{2.7}$$

não contribuem para equações dinâmicas clássicas [8]. Entretanto, o mesmo não é necessariamente verificado se a dimensão do domínio de integração for diferente de D ou se este domínio for multiplamente conexo.

Um dos principais ingredientes na receita da integração da anomalia é encontrar propriedades conformes das densidades de Euler (termos topológicos) em $D = 2n$ dimensões [4] além de tentar generalizar a forma como estes objetos se relacionam com os operadores conformes Δ_D de ordem equivalente à dimensão do espaço considerado; estes operadores serão tratados na seção a seguir. Para fins didáticos, vamos no presente capítulo mostrar progressivamente as relação entre termos topológicos e operadores conformes em dimensões $D = 2$ e $D = 4$ até chegarmos no caso mais complexo $D = 6$. Conjecturamos que esta relação pode ser generalizada na forma das eqs. (1.4) e (1.6).

Um detalhe importante a ser frisado na forma da relação (1.6) é o fato de que, diferentemente de (2.4), os termos em σ sobrevivem somente em primeira ordem, portanto (1.6) não se trata de uma aproximação em primeira ordem em σ mas sim de uma equação exata. Podemos especular sua validade para dimensões pares $D > 4$ como uma receita para se obter tanto a densidade de Euler modificada $\tilde{E}_D$ como o operador Δ_D[3]. O foco principal deste trabalho reside em confirmar a validade de (1.6) para o caso $D = 6$ como primeiro, e mais importante, passo na integração da anomalia em $6D$.

2.2.1 A densidade de Euler em duas dimensões e o operador conforme de segunda ordem

O cálculo da densidade de Euler, neste caso particular, obtido a partir de (1.2) gera

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\alpha\beta}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\mu} \\ \delta^{\alpha}_{\nu} & \delta^{\beta}_{\nu} \end{vmatrix} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = R\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Utilizando-se de transformações conformes para um campo escalar φ do tipo

$$\varphi = e^{\frac{2-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}\,, \tag{2.9}$$

o operador conforme de segunda ordem em uma dimensão arbitrária pode ser definido[4] tal que seja válida a identidade

$$\int d^Dx\sqrt{-g}\,\varphi\Delta_2\varphi = \int d^Dx\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{\varphi}\bar{\Delta}_2\bar{\varphi}\,, \tag{2.10}$$

sua expressão é dada por (ver, p. ex., [12, 14, 15])

$$\Delta_{2\,(D)} = \Box - \frac{D-2}{4(D-1)}R. \tag{2.11}$$

De posse das transformações conformes do escalar de curvatura ($R = E_2$) e da relação (2.8)

$$\sqrt{-g}E_2 = \sqrt{-\bar{g}}\,e^{(D-2)\sigma}\left[\bar{E}_2 + (D-1)\chi_{(2)}\right]\,, \tag{2.12}$$

[3]As duas principais conjecturas relacionadas às Densidades de Euler e operadores conformes são apresentadas na seção 2.4.

[4]Alternativamente Δ_2 pode ser definido como em [15] tal que $e^{\frac{D+2}{2}\sigma}\Delta_2\varphi = \bar{\Delta}_2\bar{\varphi}$, com $\varphi = e^{\frac{D-2}{2}\sigma}\bar{\varphi}$.

onde,

$$\chi_{(2)} = -\left[2\bar{\Box}\sigma + (D-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2\right] \tag{2.13}$$

e do operador $\Box$ atuando em um escalar [37]

$$\sqrt{-g}\,\Box = \sqrt{-\bar{g}}\,e^{(D-2)\sigma}\left[\bar{\Box} + (D-2)(\bar{\nabla}^{\mu}\sigma)\bar{\nabla}_{\mu}\right], \tag{2.14}$$

temos para o caso particular $D = 2$ que a eq. (2.11) gera a simples a relação $\Delta_2 = \Box$, que aliada a (2.14), fornece a invariância conforme no operador Δ_2,

$$\sqrt{-g}\Delta_2 \;=\; \sqrt{-\bar{g}}\,\bar{\Delta}_2. \tag{2.15}$$

Recorrendo a eq. (2.8) e o fato de que $E_2 = \tilde{E}_2$, podemos verificar que

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_2 = \;\sqrt{-\bar{g}}(\bar{\tilde{E}}_2 - 2\bar{\Delta}_2\sigma), \tag{2.16}$$

o que se enquadra perfeitamente na forma da eq. (1.6) como já discutido anteriormente.

2.2.2 A densidade de Euler em quatro dimensões e o operador conforme de quarta ordem

Novamente utilizando a definição (1.2), desta vez em $D = 4$, veremos que

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta}\,\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\tau}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\xi\eta}{}_{\lambda\tau} \\ &= R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2, \end{aligned} \tag{2.17}$$

que é a famosa combinação dos escalares de segunda ordem na curvatura conhecida como termo de Gauss-Bonnet, já mencionado na equação (1.31).

Os cálculos da transformação mais geral (D-dimensional) de E_4 fornecem

$$\sqrt{-g}E_4 \;=\; \sqrt{-\bar{g}}\,e^{(D-4)\sigma}\left[\bar{E}_4 + (D-3)\chi_{(4)}\right], \tag{2.18}$$

onde,

$$\begin{aligned} \chi_{(4)} \;=\;& 8\bar{R}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - 8\bar{R}_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu} - 4\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 2(D-4)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 \,+\, (D-2)\big[8\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu} \\ & -4\sigma^2_{\mu\nu} + (D-4)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4 + 4(\bar{\Box}\sigma)^2 + 4(D-3)\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2\big]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aqui usamos as notações condensadas $\sigma_\alpha = \bar{\nabla}_\alpha\sigma,\ \sigma_{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma,$ além do fato de todos estes índices serem levantados e abaixados pela métrica $\bar{g}^{\alpha\beta}$ e sua inversa. Por outro lado, em quatro dimensões, (2.18) assume uma forma um pouco mais simples[5]

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}E_4 &= \sqrt{-\bar{g}}\big[\bar{E}_4 + 8\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma - 8\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma - 4\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 8(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 \\ &\quad + 8(\bar{\Box}\sigma)^2 + 16\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma + 8\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2\big]\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

O único termo superficial em $4D$, como já discutido no capítulo 1, é $\Box R$, sua transformação na dimensão D equivale a

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\Box R &= \sqrt{-\bar{g}}\,e^{(D-4)\sigma}\left[\bar{\Box}\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 2(D-4)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + (D-6)\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu\bar{R}\right. \\ &\quad - 2(D-1)\bar{\Box}^2\sigma + 4(D-1)(\bar{\Box}\sigma)^2 - 2(D-6)(D-1)\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu(\bar{\Box}\sigma) + \\ &\quad + 2(3D-10)(D-1)\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - (D-2)(D-1)\bar{\Box}(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ &\quad -(D-6)(D-2)(D-1)\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ &\quad \left.+2(D-4)(D-2)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^4\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

e que, com a ajuda de alguma álgebra, no caso de nosso interesse $D = 4$, se reduz a

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\Box R &= \sqrt{-\bar{g}}\big[\bar{\Box}\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 2\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}_\mu\bar{R} - 6\bar{\Box}^2\sigma + 12(\bar{\Box}\sigma)^2 - 12\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma \\ &\quad +12\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 12(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 + 24\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\big]\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

O operador conforme de quarta ordem [14, 15] em uma dimensão arbitrária D atuando em um campo escalar cuja transformação seja dada por

$$\varphi = e^{\frac{4-D}{2}\sigma}\bar{\varphi}\,, \tag{2.23}$$

de modo que seja válida a invariância

$$\int d^Dx\sqrt{-g}\,\varphi\Delta_4\varphi = \int d^Dx\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{\varphi}\bar{\Delta}_4\bar{\varphi}\,, \tag{2.24}$$

é dado por [12]

$$\begin{aligned}\Delta_{4\,(D)} &= \Box^2 + \frac{4}{D-2}\left[R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{1}{2}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\right] - \frac{D^2-4D+8}{2(D-2)(D-1)}\left[R\Box + (\nabla^\mu R)\nabla_\mu\right] \\ &\quad - (D-4)\left[\frac{1}{4(D-1)}\Box R - \frac{5D-8}{16(D-2)(D-1)^2}R^2 + \frac{1}{(D-2)^2}R^2_{\mu\nu}\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

[5] A partir deste ponto, a fim de evitar o uso excessivo de parêntesis, adotaremos a convenção de que as derivadas que atuam em σ não atuam em mais nada à sua direita.

No caso particular $D = 4$, (2.25) se reduz ao já referido operador de Paneitz Δ_4 (1.34).

Vamos agora apresentar a importante combinação envolvendo os resultados (2.20), (2.22) e (1.34). Se definirmos

$$\tilde{E}_4 \;=\; E_4 - \frac{2}{3}\Box R\,, \tag{2.26}$$

podemos verificar, usando (2.20) e (2.22), que

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_4 \;=\; \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_4 + 4\bar{\Delta}_4\sigma\big)\,, \tag{2.27}$$

como já visto em (1.33). Nesta relação utilizamos o fato de que

$$\sqrt{-g}\Delta_4\sigma = \sqrt{-\bar{g}}\bar{\Delta}_4\sigma\,. \tag{2.28}$$

Há que se reiterar que não há nenhuma maneira regular de derivar o coeficiente na eq. (2.26) de modo que a origem deste fator não é conhecida na literatura (ver capítulo 1) e somente por verificação direta chega-se à sua determinação.

Para campos escalares conformalmente inertes $\varphi = \bar{\varphi}$, outra importante relação entre $\tilde{E}_4$ e Δ_4 é [21]

$$\frac{1}{2\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}\varphi\tilde{E}_4 = \Delta_4\varphi\,. \tag{2.29}$$

Os resultados desta seção nos permitem ir mais longe rumo a dimensões pares mais altas ($D \geqslant 6$), assim, iniciaremos esta jornada com a busca do possível invariante conforme modificado $\tilde{E}_6$. Para tanto, dedicaremos a próxima seção aos resultados de nosso esforço na obtenção da transformação conforme de E_6 e seus desdobramentos.

2.3 A densidade de Euler em seis dimensões e sua transformação conforme

A forte relação existente entre densidades de Euler em dimensões pares, sua transformação conforme e os operadores diferenciais conformes, identificada pela relação (1.6), nos motiva a ir além, ou seja, tentar obter o termo topológico modificado $\tilde{E}_6$ e sua relação operador Δ_6. Como ponto de partida para tal intento, buscaremos a transformação conforme D-dimensional do termo topológico (densidade de Euler) E_6. O objeto E_6 é construído a partir de uma base formada por escalares de terceira ordem na curvatura - veremos adiante que tal base é constituída por oito elementos linearmente independentes. Nas linhas que se seguem, apresentaremos o termo E_6 e via transformações conformes D-dimensionais de cada um de seus termos finalmente estabeleceremos a relação entre E_6 e $\bar{E}_6$ generalizada em D dimensões. Os cálculos deste capítulo são razoavelmente complexos e, embora sejam conferidos manualmente, utilizamos em grande parte o software *Cadabra* [46, 47] que roda em ambiente *Linux*.

As propriedades conformes dos termos topológicos, em seis dimensões têm atraído considerável interesse na literatura recente (ver, p. ex., [27, 48–50] e suas referências). Segundo a classificação padrão [7] (ver também trabalho anterior [5]), os termos anômalos que correspondem à parte não local da ação ou são invariantes conformes ou são topológicos. Consequentemente é muito importante conhecermos bem as propriedades conformes dos termos topológicos, em particular para o caso de $D = 6$, objeto deste trabalho. É justificável analisarmos as transformações das densidades de Euler não apenas nas dimensões em que essas quantidades sejam topológicas, mas também em outras dimensões como fizemos previamente com E_4 e E_2 nas eqs. (2.12) e (2.18).

Em $D = 6$ o cálculo de (1.2) é mais trabalhoso, o resultado é (ver, p. ex., [51])

$$\begin{aligned} E_6 &= \frac{1}{8}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\lambda\xi}\,\varepsilon^{\rho\sigma\kappa\omega\eta\chi}\,R_{\mu\nu\rho\sigma}\,R_{\alpha\beta\kappa\omega}\,R_{\lambda\xi\eta\chi} \\ &= 4R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu} - 8R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}R^{\lambda\mu\tau\nu} - 24R^{\nu}_{\mu}R_{\alpha\beta\lambda\nu}R^{\alpha\beta\lambda\mu} \\ &\quad + 24R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} + 16R^{\nu}_{\mu}R^{\mu}_{\alpha}R^{\alpha}_{\nu} + 3RR^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 12RR^2_{\mu\nu} + R^3\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Consideremos agora a transformação conforme D-dimensional de cada uma das oito quantidades acima. As transformações do tensor de Riemann, Ricci e do escalar de curvatura podem ser encontradas, p. ex., em [37]. Assim, omitiremos aqui as fórmulas intermediárias e apresentaremos somente o resultado final (mais uma vez cálculos foram realizados com a ajuda do *Cadabra* [46, 47]):

$$\sqrt{-g}E_6 = \sqrt{-\bar{g}}\,e^{(D-6)\sigma}\left\{\bar{E}_6 + (D-5)\,\chi_{(6)}\right\}, \tag{2.31}$$

onde,

$$
\begin{aligned}
\chi_{(6)} \;=\;& -\big[6\bar{\Box}\sigma \,+\, 3(D-6)(\bar{\nabla}\sigma)^2\big]\bar{E}_4 \\
&+\; 24\big(2\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta} - \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\nu}\bar{R}^{\alpha\beta\gamma\mu} - \bar{R}\bar{R}^{\mu\nu} + 2\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}^{\nu}_{\alpha}\big)\big(\sigma_\mu\sigma_\nu - \sigma_{\mu\nu}\big) \\
&+\; 24(D-4)\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\sigma_{\mu\nu}\big(\sigma_{\alpha\beta} - 2\sigma_\alpha\sigma_\beta\big) + 48(D-4)\bar{R}^{\mu}_{\nu}\big(\sigma_{\mu\alpha}\sigma^{\nu\alpha} - \sigma^{\nu}_{\mu}\bar{\Box}\sigma\big) \\
&+\; 48(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}\big(\sigma_\mu\sigma_\nu\bar{\Box}\sigma - 2\sigma_{\mu\alpha}\sigma^{\alpha}_{\nu}\big) + 12(D-4)\bar{R}\big[(\bar{\Box}\sigma)^2 - \sigma^2_{\mu\nu} + 2\sigma_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu\big] \\
&-\; 24(D-4)\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2\big[(D-5)\sigma_{\mu\nu} - (D-3)\sigma_\mu\sigma_\nu\big] \\
&+\; 12(D-5)(D-4)\bar{R}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 3(D-6)(D-4)(D-3)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^4 \\
&+\; 8(D-4)(D-3)\big[3\sigma^2_{\mu\nu}\,\bar{\Box}\sigma - 2\sigma^{\nu}_{\mu}\,\sigma^{\alpha}_{\nu}\,\sigma^{\mu}_{\alpha} + 6\sigma^{\nu}_{\mu}\,\sigma^{\alpha}_{\nu}\,\sigma_\alpha\sigma^\mu - (\bar{\Box}\sigma)^3\big] \\
&+\; 12(D-4)^2(D-3)\,(\bar{\nabla}\sigma)^2\,\big[\sigma^2_{\mu\nu} - (\bar{\Box}\sigma)^2\big] \qquad (2.32) \\
&-\; 24(D-4)(D-3)\,\sigma_{\mu\nu}\,\sigma^\mu\sigma^\nu\big[(D-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 2\bar{\Box}\sigma\big] \\
&-\; (D-4)(D-3)(D-2)\big[6(D-5)\bar{\Box}\sigma \,+\, (D-6)(D-1)(\bar{\nabla}\sigma)^2\big](\bar{\nabla}\sigma)^4\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos fazer a substituição $D=6$ e obter

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}E_6 \;=\;& \sqrt{-\bar{g}}\big[\bar{E}_6 + 24\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\sigma^{\beta}_{\lambda} - 24\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu\alpha\lambda}\sigma_\lambda\sigma^\beta - 6\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Box}\sigma \\
& -48\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\,\sigma^{\alpha\beta} + 48\bar{R}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}\,\sigma^\alpha\sigma^\beta - 48\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\sigma^{\nu}_{\mu} + 48\bar{R}^{\mu\alpha}\bar{R}_{\nu\alpha}\,\sigma_\mu\sigma^\nu \\
& +24\bar{R}^2_{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma + 24\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - 24\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\,\sigma_\mu\sigma_\nu - 6\bar{R}^2\bar{\Box}\sigma + 48\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\sigma^{\alpha}_{\mu}\sigma^{\beta}_{\nu} \\
& -96\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\sigma^{\alpha}_{\mu}\sigma_\nu\sigma^\beta + 96\bar{R}^{\mu}_{\nu}\sigma_{\mu\alpha}\sigma^{\nu\alpha} - 96\bar{R}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma - 192\bar{R}^{\mu}_{\nu}\sigma_{\mu\alpha}\sigma^\nu\sigma^\alpha \\
& +96\bar{R}^{\mu\nu}\sigma_\mu\sigma_\nu\bar{\Box}\sigma - 48\bar{R}^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 144\bar{R}^{\mu\nu}\sigma_\mu\sigma_\nu(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 24\bar{R}\sigma^2_{\mu\nu} \\
& +24\bar{R}(\bar{\Box}\sigma)^2 + 48\bar{R}\sigma_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu + 24\bar{R}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 96\sigma^{\nu}_{\mu}\sigma^{\alpha}_{\nu}\sigma^{\mu}_{\alpha} + 144\sigma^2_{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma \\
& -48(\bar{\Box}\sigma)^3 + 288\sigma^{\nu}_{\mu}\sigma^{\alpha}_{\nu}\sigma_\alpha\sigma^\mu + 144\sigma^2_{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 288\sigma_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu\bar{\Box}\sigma \\
& -144(\bar{\Box}\sigma)^2(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 576\,\sigma_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 144\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^4\big]\,. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Os resultados (2.31) a (2.33) representam importante progresso no estudo de teorias conformes de alta ordem e podem ser encontrados em [21].

É interessante notar que as partes não covariantes do segundo membro das eqs. (2.12), (2.18) e (2.31) são proporcionais respectivamente a $D-1$, $D-3$ e $D-5$, ou seja, o setor não covariante da transformação D-dimensional dos termos topológicos E_{2n} $(n=1,2,3)$ desaparece completamente nas dimensões ímpares $D=2n-1$. Como consequência, podemos construir invariantes conformes nestas dimensões com o auxílio de campos escalares Φ cuja transformação seja

$$\Phi \;=\; e^{\sigma}\bar{\Phi}\,, \tag{2.34}$$

juntamente com (1.5), para que obtenhamos a invariância

$$\int d^{2n-1}x\sqrt{-g}\,\Phi\, E_{2n} \;=\; \int d^{2n-1}x\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{\Phi}\,\bar{E}_{2n}\,. \tag{2.35}$$

As expressões (2.35) fornecem um conjunto de ações conformalmente invariantes. Obviamente para $n = 1$ tal declaração é trivial, entretanto nos casos $n = 2$ e $n = 3$ podemos afirmar que os invariantes topológicos nessas dimensões pares $2n$ geram novos invariantes conformes (2.35) em espaços 3-dimensionais e 5-dimensionais, respectivamente.

2.4 Conjecturas

Considerando os resultados das seções anteriores, formulamos duas conjecturas a respeito dos termos topológicos (densidades de Euler) [21]:

Conjectura 1. Para toda dimensão par $D = 2n$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$, as expressões (2.35) são conformalmente invariantes se o campo escalar Φ transforma-se de acordo com (2.34). Isto significa que podemos obter um conjunto de ações conformes

$$S^{c}_{2n-1} \;=\; \int d^{2n-1}x\sqrt{-g}\,\Phi\, E_{2n} \tag{2.36}$$

em dimensões ímpares. Esta afirmativa é certa para para $D = 2, 4$ e também para $D = 6$ como mostramos em [21].

Conjectura 2. Para toda dimensão par ($D = 2n$) há uma base de vetores χ^{μ}_{2n} dependente da métrica tal que o invariante topológico “modificado"

$$\tilde{E}_{2n} = E_{2n} + \nabla_{\mu}\chi^{\mu}_{2n}\,, \tag{2.37}$$

possui transformação conforme linear,

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_{2n} = \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_{2n} + \kappa\bar{\Delta}_{2n}\sigma\big)\,. \tag{2.38}$$

Aqui κ é uma constante a ser determinada[6] e o operador $\Delta_{2n} = \Box^n + \ldots$ é conforme, no sentido em que seja válida

$$\int d^{2n}\sqrt{-g}\varphi\Delta_{2n}\varphi = \int d^{2n}\sqrt{-\bar{g}}\bar{\varphi}\bar{\Delta}_{2n}\bar{\varphi}\,, \tag{2.39}$$

com $\varphi = \bar{\varphi}$. Vale lembrar que as quantidades com barras são construídas com base na métrica fiduciária $\bar{g}_{\mu\nu}$ definida em (1.5). As duas conjecturas aqui apresentadas são válidas para $D = 2$, 4 e, como mostrado nesta tese, foram verificadas também para $D = 6$.

No caso $D = 2$ sabemos que $\chi_2^\mu = 0$ e em $D = 4$, $\chi_4^\mu = -(2/3)\nabla^\mu R$, este último representa um importante exemplo da segunda conjectura que ajuda na sua melhor compreensão. A verificação desta conjectura em seis dimensões requer um trabalho bastante árduo e significativo mas, como veremos nos capítulos 3 e 4, obtivemos êxito nesta empreitada [22][7].

---

[6]Como veremos oportunamente, nos casos conhecidos $D = 2, 4$ e 6, $\kappa = (-1)^{\frac{D}{2}} D$.

[7]O limite plano da relação (2.38) em $6D$ e uma forma incompleta da AEIA foram obtidos em [52].

Capítulo 3

Transformações de E_6 e dos termos superficiais Ξ_k na métrica conformalmente plana com $\sigma = \sigma(\eta)$

De posse da transformação de E_6, daremos o passo seguinte que é a busca por uma combinação linear $\alpha_k \Xi_k$ da base de derivadas totais $6D$ que seja compatível com a conjectura de que exista o termo topológico modificado $\tilde{E}_6$ como visto no capítulo 2. Para tentarmos encontrar uma possível combinação que satisfaça (1.6) ou (2.38), é necessário, além de obtermos a transformação conforme de E_6, transformarmos conformalmente as candidatas a derivadas totais $\Xi' s$. Como tal cálculo é demasiado trabalhoso, e não há qualquer garantia matemática de que $\exists \tilde{E}_6$ dado por (1.4) ou (2.37) que satisfaça (1.6) ou (2.38), tentaremos preliminarmente verificar sua existência em um caso muito particular: o da métrica conformalmente plana com σ dependendo somente do tempo conforme η. Inicialmente nossa pesquisa nos conduziu a uma base de derivadas totais contendo oito elementos linearmente independentes, fato curioso é que todas os elementos da base são segundas derivadas totais como veremos adiante. Posteriormente constatamos que havia ainda uma dependência linear escondida nesta base, o que faz com ela seja reduzida a sete componentes (ver capítulo 4).

3.1 A base de oito derivadas totais $6D$

Após pesquisa de possíveis candidatas a derivadas totais da curvatura compatíveis com a dimensão $6D$, chegamos à seguinte base contendo oito termos superficiais [22],

$$\Xi_1 = \Box^2 R\,, \quad \Xi_{2;3;4} \ = \ \Box\big(R^2_{\mu\nu\alpha\beta};\, R^2_{\mu\nu};\, R^2\big)\,,$$
$$\Xi_{5;6;7;8} \ = \ \nabla_\mu\nabla_\nu\big(R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta};\, R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta};\, R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha};\, RR^{\mu\nu}\big)\,. \tag{3.1}$$

É possível mostrar que qualquer outra derivada total da curvatura em $6D$ é linearmente dependente da base definida na eq. (3.1) (ver Apêndice A). Entretanto, no Apêndice D, mostraremos que ainda há uma sutil dependência linear escondida nestes oito objetos de tal forma que conseguimos reduzi-la a sete elementos. Este assunto será tratado no capítulo 4.

Para encontrarmos a possível combinação ,

$$\tilde{E}_6 = E_6 + \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \Xi_i\,, \tag{3.2}$$

que satisfaça (1.6), tentaremos inicialmente verificar por cálculos diretos a existência dos coeficientes α_i em um caso muito particular, a já referida *métrica conformalmente plana* com σ dependendo somente do tempo conforme η, sobre a qual falaremos a seguir.

O caso particular e bastante simplificador da métrica conformalmente plana pode ser descrito pelas relações abaixo,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-\bar{g}} = 1 \\ \bar{\nabla}_\mu = \partial_\mu\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Se acrescentarmos ainda o fato de que o parâmetro σ dependente somente do tempo conforme η, $\sigma = \sigma(\eta)$, qualquer derivada de σ reduz-se somente à derivada ordinária,

$$\sigma' \equiv \frac{d\sigma}{d\eta}\,. \tag{3.4}$$

Com estas simplificações, os cálculos das transformações conformes dos elementos da base (3.1) tornam-se relativamente mais fáceis e podem servir de *impetus* para a solução do caso mais geral tratado no capítulo 4. Apresentamos nas próximas seções os resultados das transformações para este tipo especial de métrica; os cálculos intermediários foram omitidos pois são muito extensos e os resultados foram conferidos com a ajuda do *software* *Mathematica* [53][1].

3.2 Transformação de E_6

A transformação de cada um dos termos de (2.30) é listada a seguir:

$$\sqrt{-g}R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} = -60(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 60(\sigma')^6\,, \tag{3.5}$$

$$\sqrt{-g}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu} = -40(\sigma'')^3 - 80(\sigma')^6\,, \tag{3.6}$$

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu}R^{\mu\alpha\beta\lambda}R^{\nu}{}_{\alpha\beta\lambda} = -60(\sigma'')^3 - 40(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 40\sigma''(\sigma')^4 - 160(\sigma')^6\,, \tag{3.7}$$

$$\sqrt{-g}R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta} = -50(\sigma'')^3 - 220(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 160\sigma''(\sigma')^4 - 320(\sigma')^6\,, \tag{3.8}$$

$$\sqrt{-g}R^{\nu}_{\mu}R^{\mu}_{\alpha}R^{\alpha}_{\nu} = -130(\sigma'')^3 - 60(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 240\sigma''(\sigma')^4 - 320(\sigma')^6\,, \tag{3.9}$$

$$\sqrt{-g}RR^2_{\mu\nu\alpha\beta} = -200(\sigma'')^3 - 400(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 400\sigma''(\sigma')^4 - 800(\sigma')^6\,, \tag{3.10}$$

$$\sqrt{-g}RR^2_{\mu\nu} = -300(\sigma'')^3 - 1000(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 1600\sigma''(\sigma')^4 - 1600(\sigma')^6\,, \tag{3.11}$$

$$\sqrt{-g}R^3 = -1000(\sigma'')^3 - 6000(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 12000\sigma''(\sigma')^4 - 8000(\sigma')^6\,. \tag{3.12}$$

Substituindo os resultados de (3.5) a (3.12) em (2.30) e multiplicando convenientemente por $\sqrt{-g}$ obtemos simplesmente,

$$\sqrt{-g}\,E_6 = -720\sigma''(\sigma')^4\,. \tag{3.13}$$

3.3 Transformação dos termos superficiais Ξ_i

Passemos, nesta seção, para os resultados das transformações conformalmente planas dos objetos listados em (3.1).

[1] Reiteramos o nosso agradecimento ao professor Dr. Davi C. Rodrigues da UFES pela cessão de seu código computacional de suma importância para derivação destes resultados.

3.3.1 Transformação de $\Box^2 R$

A transformação em $6D$ do operador $\Box$ torna-se simplesmente,

$$\Box = e^{-2\sigma}\Big(\frac{d^2}{d\eta^2} + 4\sigma'\frac{d}{d\eta}\Big)\,, \tag{3.14}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\Box R &= e^{-2\sigma}\Big(\frac{d^2}{d\eta^2} + 4\sigma'\frac{d}{d\eta}\Big)\Big\{e^{-2\sigma}\big[-10\sigma'' - 20(\sigma')^2\big]\Big\} \\ &= e^{-4\sigma}\big[-10\sigma'''' - 20(\sigma'')^2 - 40\sigma'\sigma''' + 80\sigma''(\sigma')^2 + 80(\sigma')^4\big]\,. \end{aligned}\tag{3.15}$$

Fazendo atuar o operador $\Box$, eq. (3.14), em (3.15),

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\Box^2 R &= -10\sigma^{(vi)} - 80\sigma''''\sigma'' + 240\sigma''''(\sigma')^2 + 960\sigma'''\sigma''\sigma' \\ &\quad + 240(\sigma'')^3 - 80(\sigma''')^2 - 1600\sigma''(\sigma')^4\,. \end{aligned}\tag{3.16}$$

3.3.2 Transformação de $\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta}$

As transformações mais gerais para os tensores de curvatura são encontradas, p. ex., em [37]. No nosso caso particular,

$$R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = e^{-4\sigma}[20(\sigma'')^2 + 40(\sigma')^4]\,. \tag{3.17}$$

Atuando com (3.14) em (3.17),

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= 40\sigma''''\sigma'' - 160\sigma'''\sigma''\sigma' - 80(\sigma'')^3 + 160\sigma'''(\sigma')^3 \\ &\quad +40(\sigma''')^2 + 480(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 800\sigma''(\sigma')^4\,. \end{aligned}\tag{3.18}$$

3.3.3 Transformação de $\Box R^2_{\mu\nu}$

$$R^2_{\mu\nu} = e^{-4\sigma}[30(\sigma'')^2 + 40\sigma''(\sigma')^2 + 80(\sigma')^4]\,. \tag{3.19}$$

Aplicando o operador (3.14) em (3.19) encontramos,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\Box R^2_{\mu\nu} &= 60\sigma''''\sigma'' + 40\sigma''''(\sigma')^2 - 40(\sigma'')^3 + 160\sigma'''(\sigma')^3 \\ &\quad + 60(\sigma''')^2 + 480(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 1600\sigma''(\sigma')^4\,. \end{aligned}\tag{3.20}$$

3.3.4 Transformação de $\Box R^2$

O quadrado do tensor de Ricci transforma-se tal que,

$$R^2 = e^{-4\sigma}[100(\sigma'')^2 + 400\sigma''(\sigma')^2 + 400(\sigma')^4]\,. \tag{3.21}$$

Atuando com (3.14) em (3.21) e desenvolvendo encontramos,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\Box R^2 &= 200\sigma''''\sigma'' + 400\sigma''''(\sigma')^2 + 1600\sigma'''\sigma''\sigma' + 400(\sigma'')^3 \\ &\quad +200(\sigma''')^2 - 8000\sigma''(\sigma')^4\,.\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3.5 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta})$

As transformações conformes de $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ e $R^{\nu\lambda\alpha\beta}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &= \delta^\mu_\beta\partial_\alpha\partial_\lambda\sigma - \delta^\mu_\alpha\partial_\beta\partial_\lambda\sigma + \eta_{\alpha\lambda}\partial_\beta\partial^\mu\sigma - \eta_{\beta\lambda}\partial_\alpha\partial^\mu\sigma + \delta^\mu_\beta\eta_{\alpha\lambda}(\sigma')^2 - \delta^\mu_\alpha\eta_{\beta\lambda}(\sigma')^2 \\ &\quad + \delta^\mu_\alpha\partial_\beta\sigma\partial_\lambda\sigma - \delta^\mu_\beta\partial_\alpha\sigma\partial_\lambda\sigma + \eta_{\beta\lambda}\partial_\alpha\sigma\partial^\mu\sigma - \eta_{\alpha\lambda}\partial_\beta\sigma\partial^\mu\sigma\end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= e^{-6\sigma}\Big[\eta^{\nu\beta}\partial^\alpha\partial^\lambda\sigma - \eta^{\nu\alpha}\partial^\beta\partial^\lambda\sigma + \eta^{\alpha\lambda}\partial^\beta\partial^\nu\sigma - \eta^{\beta\lambda}\partial^\alpha\partial^\nu\sigma + \eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\lambda}(\sigma')^2 \\ &\quad -\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\lambda}(\sigma')^2 + \eta^{\nu\alpha}\partial^\beta\sigma\partial^\lambda\sigma - \eta^{\nu\beta}\partial^\alpha\sigma\partial^\lambda\sigma + \eta^{\beta\lambda}\partial^\alpha\sigma\partial^\nu\sigma \\ &\quad -\eta^{\alpha\lambda}\partial^\beta\sigma\partial^\nu\sigma\Big]\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Como já frisado anteriormente, na notação acima, a fim de evitarmos o uso excessivo de parênteses, assumimos que as derivadas covariantes que atuam em σ não atuam em mais nada à sua direita.

Multiplicando (3.23) por (3.24) e reduzindo termos semelhantes,

$$\begin{aligned}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= e^{-6\sigma}\Big[2\eta^{\mu\nu}(\sigma'')^2 + 4(\partial^\mu\sigma')(\partial^\nu\sigma') + 4(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 12(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 \\ &\quad - 8(\partial^{(\mu}\sigma')(\partial^{\nu)}\sigma)\sigma' - 4(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)\sigma'' - 8(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 \\ &\quad +8\eta^{\mu\nu}(\sigma')^4\Big].\end{aligned} \tag{3.25}$$

Para atuarmos com as duas derivadas $\nabla_\mu\nabla_\nu$ nesta expressão (e também para as seções seguintes 3.3.6 a 3.3.8, necessitamos da transformação conforme de duas derivadas covariantes contraídas com um tensor $A^{\mu\nu}$ cuja transformação seja $A^{\mu\nu} = e^{-2k\sigma}\bar{A}^{\star\mu\nu}$, onde

$\bar{A}^{\star\mu\nu} = \bar{A}^{\mu\nu} + \bar{\Sigma}^{\mu\nu}(\sigma)$. Para o nosso caso particular $D = 2k = 6$ (ver maiores detalhes no Apêndice B), tal transformação é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu A^{\mu\nu} &= e^{-6\sigma}\Big[\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \bar{A}^{\star\mu\nu} + 2(\bar{\nabla}_\mu \bar{A}^{\star(\mu\nu)})\bar{\nabla}_\nu \sigma + 2\bar{A}^{\star\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma \\ &\qquad - (\bar{\nabla}_\mu \bar{A}^{\star\nu}{}_{\nu})\bar{\nabla}^\mu \sigma - \bar{A}^{\star\nu}{}_{\nu}\Box\sigma \Big] . \end{aligned} \tag{3.26}$$

No cálculo em questão, $\bar{A}^{\star\mu\nu} = \left(\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta}\right)^\star$, equivale aos termos entre colchetes de (3.25). Podemos determinar os termos do segundo membro de (3.26):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \big(\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta}\big)^\star &= 10\big[(\sigma'')^2\big]'' \\ &= 20(\sigma''')^2 + 20\sigma''''\sigma'' , \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$2\Big[\bar{\nabla}_\mu \big(\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\nu \sigma = 20\big[(\sigma'')^2\big]'\sigma' = 40\sigma'''\sigma''\sigma' , \tag{3.28}$$

$$2\Big[\big(\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma = 20(\sigma'')^3 , \tag{3.29}$$

$$-(\bar{\nabla}_\mu \bar{R}^{\star 2}_{\alpha\beta\lambda\tau})\bar{\nabla}^\mu \sigma = -40\sigma'''\sigma''\sigma' - 160\sigma''(\sigma')^4 , \tag{3.30}$$

$$-\bar{R}^{\star 2}_{\alpha\beta\lambda\tau}\Box\sigma = -20(\sigma'')^3 - 40\sigma''(\sigma')^4 . \tag{3.31}$$

Utilizando os resultados de (3.27) a (3.31) podemos escrever

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu \nabla_\nu (R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}) = 20\sigma''''\sigma'' + 20(\sigma''')^2 - 200\sigma''(\sigma')^4 . \tag{3.32}$$

3.3.6 Transformação de $\nabla_\mu \nabla_\nu (R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta})$

A transformação de $R_{\alpha\beta}$ é

$$R_{\alpha\beta} = -\eta_{\alpha\beta}\sigma'' - 4\partial_\alpha\partial_\beta\sigma + 4\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma - 4\eta_{\alpha\beta}(\sigma')^2 \tag{3.33}$$

e a de $R^{\mu\alpha\nu\beta}$ é análoga a (3.24). Multiplicando (3.33) e (3.24) com os índices renomeados obtemos,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} &= e^{-6\sigma}\Big[5\eta^{\mu\nu}(\sigma'')^2 - 8(\partial^\mu\sigma')(\partial^\nu\sigma') + 8(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 8(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 \\ &\qquad +16(\partial^{(\mu}\sigma')(\partial^{\nu)}\sigma)\sigma' - 8(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 4\eta^{\mu\nu}\sigma''(\sigma')^2 \\ &\qquad -16(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 + 16\eta^{\mu\nu}(\sigma')^4\Big] . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Podemos novamente determinar os termos do segundo membro de (3.26):

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \big(\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\big)^\star = 5\big[(\sigma'')^2\big]'' + 20[\sigma''(\sigma')^2]'' = 10(\sigma''')^2 + 10\sigma''''\sigma'' + 20\sigma''''(\sigma')^2 + 120\sigma'''\sigma''\sigma' + 40(\sigma'')^3, \quad (3.35)$$

$$2\Big[\bar{\nabla}_\mu \big(\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\nu\sigma = 10[(\sigma'')^2]'\sigma' + 40[\sigma''(\sigma')^2]'\sigma' = 20\sigma'''\sigma''\sigma' + 40\sigma'''(\sigma')^3 + 80(\sigma'')^2(\sigma')^2\,, \quad (3.36)$$

$$2\Big[\big(\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma = 10(\sigma'')^3 + 40(\sigma'')^2(\sigma')^2\,, \quad (3.37)$$

$$-(\bar{\nabla}_\mu \bar{R}^{\star 2}_{\alpha\beta})\bar{\nabla}^\mu\sigma = -30[(\sigma'')^2]'\sigma' - 40[\sigma''(\sigma')^2]'\sigma' - 80[(\sigma')^4]'\sigma' = -60\sigma'''\sigma''\sigma' - 40\sigma'''(\sigma')^3 - 80(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 320\sigma''(\sigma')^4, \quad (3.38)$$

$$-\bar{R}^{\star 2}_{\alpha\beta}\bar{\Box}\sigma = -30(\sigma'')^3 - 40(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 80(\sigma')^4\sigma''\,. \quad (3.39)$$

Utilizando os resultados de (3.35) a (3.39),

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) = 10\sigma''''\sigma'' + 20\sigma''''(\sigma')^2 + 80\sigma'''\sigma''\sigma' + 20(\sigma'')^3 + 10(\sigma''')^2 - 400\sigma''(\sigma')^4. \quad (3.40)$$

3.3.7 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha})$

Com base em (3.33), a transformação de $R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}$ é

$$\begin{aligned} R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha} &= e^{-6\sigma}[-\delta^\mu_\alpha\sigma'' - 4\partial^\mu\partial_\alpha\sigma + 4\partial^\mu\sigma\partial_\alpha\sigma - 4\delta^\mu_\alpha(\sigma')^2]\times \\ &\quad\times[-\eta^{\nu\alpha}\sigma'' - 4\partial^\nu\partial^\alpha\sigma + 4\partial^\nu\sigma\partial^\alpha\sigma - 4\eta^{\nu\alpha}(\sigma')^2] \\ &= e^{-6\sigma}\Big[\eta^{\mu\nu}(\sigma'')^2 + 16(\partial^\mu\sigma')(\partial^\nu\sigma') + 8(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 32(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 \\ &\quad -32(\partial^{(\mu}\sigma')(\partial^{\nu)}\sigma)\sigma' - 8(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 8\eta^{\mu\nu}\sigma''(\sigma')^2 \\ &\quad -16(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 + 16\eta^{\mu\nu}(\sigma')^4\Big]\,. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Podemos novamente determinar os termos do segundo membro de (3.26) para este novo caso:

$$\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\big(\bar{R}^\mu_\alpha\bar{R}^{\nu\alpha}\big)^\star = 25\big[(\sigma'')^2\big]'' = 50(\sigma''')^2 + 50\sigma''''\sigma''\,, \quad (3.42)$$

$$2\Big[\bar{\nabla}_\mu\big(\bar{R}^\mu_\alpha \bar{R}^{\nu\alpha}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\nu\sigma = 50[(\sigma'')^2]'\sigma' = 100\sigma'''\sigma''\sigma' \,, \tag{3.43}$$

$$2\Big[\big(\bar{R}^\mu_\alpha \bar{R}^{\nu\alpha}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma = 50(\sigma'')^3 \,. \tag{3.44}$$

As próximas relações são idênticas às eqs.(3.38) e (3.39). Utilizando os resultados anteriores, inclusive (3.42) a (3.44),

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}) = 50\sigma''''\sigma'' + 40\sigma'''\sigma''\sigma' + 20(\sigma'')^3 - 40\sigma'''(\sigma')^3 + 50(\sigma''')^2 - 120(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 400\sigma''(\sigma')^4 \,. \tag{3.45}$$

3.3.8 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu})$

A transformação conformalmente plana do escalar de curvatura é

$$R = e^{-2\sigma}[-10\sigma'' - 20(\sigma')^2] \,. \tag{3.46}$$

Multiplicando (3.46) e (3.33) com os índices elevados e renomeados obtemos que a transformação de $RR^{\mu\nu}$ fica

$$RR^{\mu\nu} = e^{-6\sigma}\Big[10\eta^{\mu\nu}(\sigma'')^2 + 40(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 80(\partial^\mu\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 - 40(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)\sigma'' + 60\eta^{\mu\nu}\sigma''(\sigma')^2 - 80(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)(\sigma')^2 + 80\eta^{\mu\nu}(\sigma')^4\Big] \,. \tag{3.47}$$

Mais uma vez determinaremos os termos do segundo membro de (3.26) para este caso:

$$\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\big(\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\big)^\star = 50\big[(\sigma'')^2\big]'' + 100[\sigma''(\sigma')^2]'' = 100(\sigma''')^2 + 100\sigma''''\sigma'' + 100\sigma''''(\sigma')^2 + 600\sigma'''\sigma''\sigma' + 200(\sigma'')^3, \tag{3.48}$$

$$2\Big[\bar{\nabla}_\mu\big(\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\nu\sigma = 100[(\sigma'')^2]'\sigma' + 200[\sigma''(\sigma')^2]'\sigma' = 200\sigma'''\sigma''\sigma' + 200\sigma'''(\sigma')^3 + 400(\sigma'')^2(\sigma')^2 \,, \tag{3.49}$$

$$2\Big[\big(\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}\big)^\star\Big]\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma = 100(\sigma'')^3 + 200(\sigma'')^2(\sigma')^2 \,. \tag{3.50}$$

$$-(\bar{\nabla}_\mu\bar{R}^{\star 2})\bar{\nabla}^\mu\sigma = -100[(\sigma'')^2]'\sigma' - 400[\sigma''(\sigma')^2]'\sigma' - 400[(\sigma')^4]'\sigma' \,, = -200\sigma'''\sigma''\sigma' - 400\sigma'''(\sigma')^3 - 800(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 1600\sigma''(\sigma')^4, \tag{3.51}$$

$$-\bar{R}^{\star 2}\bar{\Box}\sigma = -100(\sigma'')^3 - 400(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 400(\sigma')^4\sigma''\,. \tag{3.52}$$

Através dos resultados de (3.48) a (3.52) podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu}) &= 100\sigma''''\sigma'' + 100\sigma''''(\sigma')^2 + 600\sigma'''\sigma''\sigma' + 200(\sigma'')^3 \\ &\quad - 200\sigma'''(\sigma')^3 + 100(\sigma''')^2 - 600(\sigma'')^2(\sigma')^2 - 2000\sigma''(\sigma')^4.\end{aligned} \tag{3.53}$$

3.4 O termo topológico modificado $\tilde{E}_6$ na métrica conformalmente plana

A partir das nove transformações conformalmente planas listadas nas seções anteriores, podemos obter os coeficientes da relação (3.2) a fim de que (1.6) seja válida. Verificamos que a combinação dos $\alpha's$,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_6 &= E_6 + \frac{3}{5}\Box^2 R + a\Box R^2 + b\Box R^2_{\mu\nu} + c\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + d\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}) - \\ &\quad -\Big(\frac{21}{5} + 20a + 8b + 6c + \frac{d}{2}\Big)\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) \\ &\quad +\Big(3 - 2b - 2c - \frac{d}{2}\Big)\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\lambda R^{\nu\lambda}) \\ &\quad +\frac{1}{5}\Big(-3 + 6b + 6c + \frac{d}{2}\Big)\nabla\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu})\,,\end{aligned} \tag{3.54}$$

válida $\forall a, b, c, d$, elimina todos os termos de ordem maior ou igual a dois em σ, para o caso de uma transformação conformalmente plana, gerando

$$\sqrt{-g}\tilde{E}_6 = \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\tilde{E}}_6 - 6\bar{\Delta}_6\sigma\big) = -6\sigma^{(vi)}\,. \tag{3.55}$$

Aqui vemos que a constante em (1.6) assume o valor $\kappa = -6$. Ademais, para o caso conformalmente plano, $\bar{\Delta}_6\sigma = \frac{\partial^6\sigma}{\partial\eta^6} = \sigma^{(vi)}$ além de $\bar{\tilde{E}}_6 = 0$.

Podemos escolher os parâmetros indeterminados a, b, c e d de tal modo que os termos que contenham o tensor de Riemann se anulem em (3.54),

$$c = d = 0, \quad a = \frac{123}{100} - \frac{1}{2}\zeta, \quad b = \frac{5}{4}\zeta - \frac{18}{15}\,, \tag{3.56}$$

e assim, obtemos o mesmo resultado publicado em [54]. Entretanto, o caso mais simples seria adotarmos $a = b = c = d = 0$ o que gera a relação

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\Big\{E_6 + \frac{3}{5}\big[\Box^2 R + \nabla_\mu\nabla_\nu(-7R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} + 5R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha} - RR^{\mu\nu})\big]\Big\} &= -6\bar{\Delta}_6\sigma \\ &= -6\sigma^{(vi)}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Motivados pela obtenção da relação (3.54) nosso próximo passo, e sem dúvida muito mais trabalhoso, é a obtenção de relação semelhante para o caso mais geral de uma transformação conforme da métrica. Esperamos, neste caso mais geral, conseguir remover a indeterminação nos coeficientes a, b, c e d na equação (3.54) confirmando a forma do operador Δ_6 encontrado, por exemplo, em [27–29].

Capítulo 4

Transformações de E_6 e dos termos superficiais Ξ_k na métrica mais geral $6D$ - O termo topológico modificado

A partir dos resultados obtidos no capítulo 3, podemos generalizar as transformações dos termos da base (3.1) para qualquer métrica; embora o trabalho seja árduo, ele se revelou gratificante no fim da jornada. As transformações conformes das oito derivadas totais demandam um rol de objetos de primeira a quinta ordem em σ, à medida em que eles se fizerem necessários no desenvolvimento do capítulo, iremos defini-los. Deve haver uma combinação linear dos termos superficiais adicionados à densidade de Euler $6D$ que possua transformação conforme que se encaixe no forma da equação (1.6) eliminando todos os termos de ordem igual ou superior a dois em σ de acordo com o que conjecturamos no capítulo 2.

4.1 Notação mais condensada para a transformação de E_6

Preliminarmente vamos considerar os seguintes objetos (com seis derivadas) em primeira ordem em σ semelhante à base descrita em [29],

$$\begin{array}{lll}
\chi_1 = R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Box\sigma & \chi_2 = R\Box^2\sigma & \chi_3 = (\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma \\
\chi_4 = (\nabla^\mu R)\nabla_\mu\Box\sigma & \chi_5 = (\nabla^\mu\nabla^\nu R)\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma & \chi_6 = (\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma \\
\chi_7 = (\Box R)\Box\sigma & \chi_8 = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma & \chi_9 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\Box\sigma \\
\chi_{10} = R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma & \chi_{11} = R^{\mu\alpha}R^\nu_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma & \chi_{12} = R^2_{\mu\nu}\Box\sigma \\
\chi_{13} = RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma & \chi_{14} = R^2\Box\sigma & \chi_{15} = (\nabla^\mu\Box R)\nabla_\mu\sigma \\
\chi_{16} = R_{\alpha\beta\gamma\mu}(\nabla^\mu R^{\alpha\beta\gamma\nu})\nabla_\nu\sigma & \chi_{17} = R^{\mu\nu\alpha\beta}(\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla_\beta\sigma & \chi_{18} = R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\alpha\sigma \\
\chi_{19} = R_{\mu\nu}(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\sigma & \chi_{20} = R^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)\nabla_\nu\sigma & \chi_{21} = R(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\sigma\,.
\end{array} \tag{4.1}$$

Para completar a lista acima, podemos definir também o objeto em primeira ordem em σ

$$\chi_0 = \Box^3\sigma\,, \tag{4.2}$$

o qual aparecerá oportunamente.

A transformação conforme da densidade de Euler E_6 em $D = 6$ já foi apresentada no do capítulo 2, porém definiremos uma simbologia para os objetos constituintes desta transformação a fim de facilitar os esforços despendidos neste capítulo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}E_6 &= \sqrt{-\bar{g}}\Big(\bar{E}_6 + 24\bar{\chi}_8 - 6\bar{\chi}_9 - 48\bar{\chi}_{10} - 48\bar{\chi}_{11} + 24\bar{\chi}_{12} \\
&\quad +24\bar{\chi}_{13} - 6\bar{\chi}_{14} + \sum_{j=1}^{25} a_j\bar{\Upsilon}_j\Big),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde, as quantidades Υ_j são dadas por

$$
\begin{array}{lll}
\Upsilon_1 = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\lambda}\nabla_\lambda\sigma\nabla^\beta\sigma & \Upsilon_2 = R^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\sigma\nabla^\beta\sigma & \Upsilon_3 = R^{\mu\alpha}R_{\nu\alpha}\nabla_\mu\sigma\nabla^\nu\sigma \\
\Upsilon_4 = RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma & \Upsilon_5 = R_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^\mu\nabla^\alpha\sigma\nabla^\nu\nabla^\beta\sigma & \Upsilon_6 = R_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^\mu\nabla^\alpha\sigma\nabla^\nu\sigma\nabla^\beta\sigma \\
\Upsilon_7 = R^\mu_\nu\nabla_\mu\nabla_\alpha\sigma\nabla^\nu\nabla^\alpha\sigma & \Upsilon_8 = R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\Box\sigma & \Upsilon_9 = R^\mu_\nu\nabla_\mu\nabla_\alpha\sigma\nabla^\nu\sigma\nabla^\alpha\sigma \\
\Upsilon_{10} = R^{\mu\nu}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma\Box\sigma & \Upsilon_{11} = R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma(\nabla\sigma)^2 & \Upsilon_{12} = R^{\mu\nu}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma(\nabla\sigma)^2 \\
\Upsilon_{13} = R(\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma)^2 & \Upsilon_{14} = R(\Box\sigma)^2 & \Upsilon_{15} = R\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma \\
\Upsilon_{16} = R\Box\sigma(\nabla\sigma)^2 & \Upsilon_{17} = \nabla_\mu\nabla^\nu\sigma\nabla_\nu\nabla^\alpha\sigma\nabla_\alpha\nabla^\mu\sigma & \Upsilon_{18} = (\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma)^2\Box\sigma \\
\Upsilon_{19} = (\Box\sigma)^3 & \Upsilon_{20} = \nabla_\mu\nabla^\nu\sigma\nabla_\nu\nabla^\alpha\sigma\nabla_\alpha\sigma\nabla^\mu\sigma & \Upsilon_{21} = (\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma)^2\,(\nabla\sigma)^2 \\
\Upsilon_{22} = \nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma\Box\sigma & \Upsilon_{23} = (\Box\sigma)^2(\nabla\sigma)^2 & \Upsilon_{24} = \nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma(\nabla\sigma)^2 \\
\Upsilon_{25} = \Box\sigma(\nabla\sigma)^4\,, & &
\end{array}
\tag{4.4}
$$

e os coeficientes a_j são tais que,

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = -24 & a_2 = 48 & a_3 = 48 \\
a_4 = -24 & a_5 = 48 & a_6 = -96 \\
a_7 = 96 & a_8 = -96 & a_9 = -192 \\
a_{10} = 96 & a_{11} = -48 & a_{12} = 144 \\
a_{13} = -24 & a_{14} = 24 & a_{15} = 48 \\
a_{16} = 24 & a_{17} = -96 & a_{18} = 144 \\
a_{19} = -48 & a_{20} = 288 & a_{21} = 144 \\
a_{22} = -288 & a_{23} = -144 & a_{24} = -576 \\
a_{25} = -144\,. & &
\end{array}
\tag{4.5}
$$

Faz-se necessário acrescentarmos outros escalares os quais aparecerão nos cálculos futuros, note que alguns deles contêm também derivadas dos tensores de curvatura. A lista a seguir completa todos os objetos contendo σ utilizados nas transformações deste capítulo.

(a) Escalares de segunda ordem em σ:

$$\Upsilon_{26} = (\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma \qquad \Upsilon_{27} = (\nabla^\mu\nabla^\nu R)\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma \qquad \Upsilon_{28} = (\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla_\alpha\sigma$$
$$\Upsilon_{29} = (\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\nu\nabla_\alpha\sigma\nabla_\mu\sigma \quad \Upsilon_{30} = (\nabla^\mu R)\nabla_\mu\sigma\Box\sigma \qquad \Upsilon_{31} = (\nabla^\mu R)\nabla^\nu\sigma\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma$$
$$\Upsilon_{32} = R^{\mu\nu}\nabla_\nu\sigma\nabla_\mu\Box\sigma \qquad \Upsilon_{33} = R^{\mu\nu}\nabla^\alpha\sigma\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\alpha\sigma \quad \Upsilon_{34} = (\Box R)(\nabla\sigma)^2$$
$$\Upsilon_{35} = \nabla_\mu\nabla_\nu\sigma\nabla^\mu\nabla^\nu\Box\sigma \qquad \Upsilon_{36} = (\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\alpha\sigma)^2 \qquad \Upsilon_{37} = (\nabla_\mu\Box\sigma)^2$$
$$\Upsilon_{38} = \Box^2\sigma\,\Box\sigma \qquad \Upsilon_{39} = R\nabla^\mu\Box\sigma\nabla_\mu\sigma\,; \tag{4.6}$$

(b) Escalares de terceira ordem em σ:

$$\Upsilon_{40} = \Box^2\sigma(\nabla\sigma)^2 \qquad \Upsilon_{41} = \nabla_\mu\Box\sigma\nabla^\mu\nabla^\nu\sigma\nabla_\nu\sigma \quad \Upsilon_{42} = (\nabla^\mu R)\nabla_\mu\sigma(\nabla\sigma)^2$$
$$\Upsilon_{43} = \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\alpha\sigma\nabla^\mu\nabla^\nu\sigma\nabla^\alpha\sigma \quad \Upsilon_{44} = \nabla_\mu\nabla_\nu\Box\sigma\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma \quad \Upsilon_{45} = \nabla_\mu\Box\sigma\Box\sigma\nabla^\mu\sigma$$
$$\Upsilon_{46} = (\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma\nabla^\alpha\sigma\,; \tag{4.7}$$

(c) Escalares de quarta ordem em σ:

$$\Upsilon_{47} = \nabla_\mu\Box\sigma\nabla^\mu\sigma(\nabla\sigma)^2 \qquad \Upsilon_{48} = \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\alpha\sigma\nabla^\mu\sigma\nabla^\nu\sigma\nabla^\alpha\sigma\,. \tag{4.8}$$

Detalharemos nas próximas seções as transformações conformes das derivadas totais listadas em (3.1). Grande parte das transformações dos tensores de curvatura, inclusive dos objetos quadráticos na curvatura, pode ser encontrada, p. ex., em [37].

4.2 Transformação dos termos superficiais Ξ_i

4.2.1 Transformação de $\Box^2 R$

Esta transformação pode ser obtida aplicando a transformação do operador $\Box$ atuando em um escalar φ cuja transformação seja do tipo

$$\varphi = e^{-2k\sigma}\bar{\varphi}^\star\,, \tag{4.9}$$

(ver Apêndice C). Para $D = 6$ e $k = 2$ temos

$$\Box\varphi = e^{-6\sigma}\big[\bar{\Box}\bar{\varphi}^\star - 4(\bar{\nabla}_\mu\bar{\varphi}^\star)\bar{\nabla}^\mu\sigma - 4\bar{\varphi}^\star\bar{\Box}\sigma\big]\,. \tag{4.10}$$

A transformação de $\Box R$ para o caso $D = 6$ é

$$\begin{aligned} \Box R &= e^{-4\sigma}\big[\bar{\Box}\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 10\bar{\Box}^2\sigma + 20(\bar{\Box}\sigma)^2 \\ &\quad -40\bar{\Box}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 40(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 + 80\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 80(\bar{\nabla}\sigma)^4\big]\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para este caso, faremos as seguintes substituições em (4.10):

$$\varphi \to \Box R \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^\star &\to \bar{\Box}\bar{R} - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 10\bar{\Box}^2\sigma + 20(\bar{\Box}\sigma)^2 - 40\bar{\Box}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma \\ &\quad -40(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 + 80\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 80(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo (4.12) e (4.13) na equação (4.10) e multiplicando-a membro a membro por $\sqrt{-g} = e^{6\sigma}\sqrt{-\bar{g}}$, após certa álgebra, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\Box^2 R &= \sqrt{-\bar{g}}\Big(\bar{\Box}^2\bar{R} - 10\bar{\chi}_0 - 2\bar{\chi}_2 - 4\bar{\chi}_4 - 6\bar{\chi}_7 - 4\bar{\chi}_{15} - 80\bar{\Upsilon}_3 - 8\bar{\Upsilon}_4 + 160\bar{\Upsilon}_5 \\ &\quad -320\bar{\Upsilon}_6 - 240\bar{\Upsilon}_7 + 320\bar{\Upsilon}_9 + 320\bar{\Upsilon}_{10} + 320\bar{\Upsilon}_{12} - 8\bar{\Upsilon}_{13} + 8\bar{\Upsilon}_{14} + 32\bar{\Upsilon}_{15} \\ &\quad +16\bar{\Upsilon}_{16} + 320\bar{\Upsilon}_{18} - 80\bar{\Upsilon}_{19} + 640\bar{\Upsilon}_{20} + 320\bar{\Upsilon}_{21} - 640\bar{\Upsilon}_{22} - 320\bar{\Upsilon}_{23} \\ &\quad -1280\bar{\Upsilon}_{24} - 320\bar{\Upsilon}_{25} - 40\bar{\Upsilon}_{26} - 320\bar{\Upsilon}_{28} + 80\bar{\Upsilon}_{29} + 8\bar{\Upsilon}_{30} - 16\bar{\Upsilon}_{31} \\ &\quad -160\bar{\Upsilon}_{32} - 4\bar{\Upsilon}_{34} - 160\bar{\Upsilon}_{35} - 80\bar{\Upsilon}_{36} + 80\bar{\Upsilon}_{38} + 80\bar{\Upsilon}_{40} + 480\bar{\Upsilon}_{41} + 16\bar{\Upsilon}_{42} \\ &\quad +320\bar{\Upsilon}_{43} + 160\bar{\Upsilon}_{44} + 160\bar{\Upsilon}_{45} + 160\bar{\Upsilon}_{46}\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2.2 Transformação de $\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta}$

A transformação do objeto quadrático na curvatura, também conhecido como escalar de Kretschmann [55], $R^2_{\mu\nu\alpha\beta}$ para $D = 6$ é

$$\begin{aligned} R^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= e^{-4\sigma}\big[\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 8\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^\beta\sigma + 8\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 \\ &\quad +4(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 32\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 40(\bar{\nabla}\sigma)^4\big]\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para este caso, as substituições em (4.10) são

$$\varphi \to R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^{\star} \;\rightarrow\;& \bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 8\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 8\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)^2 \\ & +4(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 32\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 40(\bar{\nabla}\sigma)^4 \,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Substituindo (4.16) e (4.17) na equação (4.10) e multiplicando-a membro a membro por $\sqrt{-g} = e^{6\sigma}\sqrt{-\bar{g}}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \;=\;& \sqrt{-\bar{g}}\Big(\bar{\Box}\bar{R}^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 8\bar{\chi}_1 - 16\bar{\chi}_3 - 8\bar{\chi}_6 - 4\bar{\chi}_9 + 16\bar{\chi}_{10} - 16\bar{\chi}_{11} - 16\bar{\chi}_{16} \\ & -16\bar{\chi}_{18} + 8\bar{\chi}_{19} - 32\bar{\Upsilon}_2 + 16\bar{\Upsilon}_3 - 8\bar{\Upsilon}_4 - 64\bar{\Upsilon}_5 + 192\bar{\Upsilon}_6 + 80\bar{\Upsilon}_7 + 32\bar{\Upsilon}_8 \\ & -192\bar{\Upsilon}_9 + 32\bar{\Upsilon}_{10} + 160\bar{\Upsilon}_{12} - 8\bar{\Upsilon}_{13} + 32\bar{\Upsilon}_{15} + 16\bar{\Upsilon}_{16} - 64\bar{\Upsilon}_{17} \\ & -16\bar{\Upsilon}_{19} + 576\bar{\Upsilon}_{20} + 160\bar{\Upsilon}_{21} - 128\bar{\Upsilon}_{22} - 128\bar{\Upsilon}_{23} - 640\bar{\Upsilon}_{24} - 160\bar{\Upsilon}_{25} \\ & +8\bar{\Upsilon}_{26} + 96\bar{\Upsilon}_{28} - 16\bar{\Upsilon}_{31} + 16\bar{\Upsilon}_{32} + 32\bar{\Upsilon}_{33} - 4\bar{\Upsilon}_{34} + 32\bar{\Upsilon}_{35} + 32\bar{\Upsilon}_{36} \\ & +8\bar{\Upsilon}_{37} + 8\bar{\Upsilon}_{38} - 8\bar{\Upsilon}_{39} + 32\bar{\Upsilon}_{40} + 64\bar{\Upsilon}_{41} + 16\bar{\Upsilon}_{42} - 256\bar{\Upsilon}_{43} - 32\bar{\Upsilon}_{44} \\ & +32\bar{\Upsilon}_{45} - 64\bar{\Upsilon}_{46} + 32\bar{\Upsilon}_{47} + 128\bar{\Upsilon}_{48}\Big) \,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2.3 Transformação de $\Box R^2_{\mu\nu}$

Para este caso, as substituições em (4.10) são

$$\varphi \rightarrow R^2_{\mu\nu} \tag{4.19}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^{\star} \;\rightarrow\;& \bar{R}^2_{\mu\nu} - 8\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 8\bar{R}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 8\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 \\ & +14(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma + 72\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 80(\bar{\nabla}\sigma)^4 \,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

O que nos fornece, analogamente aos objetos anteriores,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}\Box R^2_{\mu\nu} &= \sqrt{-\bar{g}}\Big(\bar{\Box}\bar{R}^2_{\mu\nu} - 8\bar{\chi}_1 - 2\bar{\chi}_2 - 16\bar{\chi}_3 - 4\bar{\chi}_4 - 8\bar{\chi}_6 - 2\bar{\chi}_7 + 16\bar{\chi}_{10} - 16\bar{\chi}_{11} \\
&\quad -4\bar{\chi}_{12} - 16\bar{\chi}_{18} - 32\bar{\Upsilon}_2 + 16\bar{\Upsilon}_3 - 16\bar{\Upsilon}_4 - 64\bar{\Upsilon}_5 + 192\bar{\Upsilon}_6 + 80\bar{\Upsilon}_7 + 32\bar{\Upsilon}_8 \\
&\quad -192\bar{\Upsilon}_9 + 112\bar{\Upsilon}_{10} + 320\bar{\Upsilon}_{12} - 16\bar{\Upsilon}_{13} + 8\bar{\Upsilon}_{14} + 64\bar{\Upsilon}_{15} + 32\bar{\Upsilon}_{16} - 64\bar{\Upsilon}_{17} \\
&\quad +80\bar{\Upsilon}_{18} - 56\bar{\Upsilon}_{19} + 896\bar{\Upsilon}_{20} + 320\bar{\Upsilon}_{21} - 448\bar{\Upsilon}_{22} - 288\bar{\Upsilon}_{23} - 1280\bar{\Upsilon}_{24} \\
&\quad -320\bar{\Upsilon}_{25} + 8\bar{\Upsilon}_{26} + 96\bar{\Upsilon}_{28} + 8\bar{\Upsilon}_{30} - 32\bar{\Upsilon}_{31} + 16\bar{\Upsilon}_{32} + 32\bar{\Upsilon}_{33} - 8\bar{\Upsilon}_{34} \\
&\quad +32\bar{\Upsilon}_{35} + 32\bar{\Upsilon}_{36} + 28\bar{\Upsilon}_{37} + 28\bar{\Upsilon}_{38} - 8\bar{\Upsilon}_{39} + 72\bar{\Upsilon}_{40} + 224\bar{\Upsilon}_{41} + 32\bar{\Upsilon}_{42} \\
&\quad -256\bar{\Upsilon}_{43} - 32\bar{\Upsilon}_{44} + 32\bar{\Upsilon}_{45} - 64\bar{\Upsilon}_{46} + 32\bar{\Upsilon}_{47} + 128\bar{\Upsilon}_{48}\Big)\,. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

4.2.4 Transformação de $\Box R^2$

A transformação de R^2 para $D = 6$ é tal que

$$\varphi \to R^2 \qquad (4.22)$$

e

$$\bar{\varphi}^\star \;\to\; \bar{R}^2 - 20\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 40\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 100(\bar{\Box}\sigma)^2 + 400\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 400(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \quad (4.23)$$

As substituições destes resultados acima em (4.10) geram

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}\Box R^2 &= \sqrt{-\bar{g}}\Big(\bar{\Box}\bar{R}^2 - 20\bar{\chi}_2 - 40\bar{\chi}_4 - 20\bar{\chi}_7 - 4\bar{\chi}_{14} - 8\bar{\chi}_{21} - 80\bar{\Upsilon}_4 + 800\bar{\Upsilon}_{10} \\
&\quad +1600\bar{\Upsilon}_{12} - 80\bar{\Upsilon}_{13} + 80\bar{\Upsilon}_{14} + 320\bar{\Upsilon}_{15} + 160\bar{\Upsilon}_{16} + 800\bar{\Upsilon}_{18} - 400\bar{\Upsilon}_{19} \\
&\quad +3200\bar{\Upsilon}_{20} + 1600\bar{\Upsilon}_{21} - 3200\bar{\Upsilon}_{22} - 1600\bar{\Upsilon}_{23} - 6400\bar{\Upsilon}_{24} - 1600\bar{\Upsilon}_{25} \\
&\quad +80\bar{\Upsilon}_{30} - 160\bar{\Upsilon}_{31} - 40\bar{\Upsilon}_{34} + 200\bar{\Upsilon}_{37} + 200\bar{\Upsilon}_{38} + 400\bar{\Upsilon}_{40} \\
&\quad +1600\bar{\Upsilon}_{41} + 160\bar{\Upsilon}_{42}\Big)\,. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

4.2.5 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta})$

A fim de avaliarmos as transformações conformes mais gerais dos quatro últimos objetos listados em (3.1) devemos novamente utilizar a relação (3.26) da seção 3.3.5. A transformação conforme do objeto $R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}$ é dada por

$$\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= e^{-6\sigma}\Big[\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta} - 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - 4\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma \\ &+ 4\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - 4\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 4\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 2\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)^2 \\ &+ 4\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\Box}\sigma + 12\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\Box}\sigma - 8\bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}^{(\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma \\ &- 4\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 4\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 8\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\,\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\,(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\ &+8\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Para este caso, faremos as seguintes substituições em (3.26),

$$A^{\mu\nu} \to R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}\,, \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\star\mu\nu} \;\to\; & \bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta} - 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - 4\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma \\ &+ 4\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma - 4\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 4\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma + 2\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)^2 \\ &+ 4\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma\bar{\Box}\sigma + 12\bar{\nabla}^{\mu}\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4\bar{\Box}\sigma\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma - 8\bar{\nabla}^{\alpha}\bar{\nabla}^{(\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma \\ &- 4\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 4\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 8\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 8\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Contraindo todos os termos de (4.27) com $\bar{g}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\star\nu}_{\ \nu} \;\to\; & \bar{R}^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma + 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - 4\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)^2 \\ &+4(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma\bar{\nabla}^{\beta}\sigma + 32\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 40(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Substituindo estes resultados em (3.26),

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}) &= \sqrt{-\bar{g}}\Big[\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}(\bar{R}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\bar{R}^{\nu\lambda\alpha\beta}) - 4\bar{\chi}_1 - 4\bar{\chi}_3 - 2\bar{\chi}_4 - 4\bar{\chi}_6 + 4\bar{\chi}_8 \\ &-\bar{\chi}_9 - 4\bar{\chi}_{11} - 8\bar{\chi}_{17} - 4\bar{\chi}_{18} - 2\bar{\chi}_{20} + 4\bar{\Upsilon}_1 - 8\bar{\Upsilon}_2 - 24\bar{\Upsilon}_5 \\ &+48\bar{\Upsilon}_6 + 8\bar{\Upsilon}_7 + 16\bar{\Upsilon}_8 + 8\bar{\Upsilon}_{11} + 40\bar{\Upsilon}_{12} + 8\bar{\Upsilon}_{15} + 4\bar{\Upsilon}_{16} \\ &+16\bar{\Upsilon}_{17} - 8\bar{\Upsilon}_{18} - 8\bar{\Upsilon}_{19} + 80\bar{\Upsilon}_{20} + 40\bar{\Upsilon}_{21} - 80\bar{\Upsilon}_{22} - 40\bar{\Upsilon}_{23} \\ &-160\bar{\Upsilon}_{24} - 40\bar{\Upsilon}_{25} + 4\bar{\Upsilon}_{26} + 32\bar{\Upsilon}_{28} - 8\bar{\Upsilon}_{29} + 4\bar{\Upsilon}_{30} - 8\bar{\Upsilon}_{31} \\ &+16\bar{\Upsilon}_{32} - 2\bar{\Upsilon}_{34} + 16\bar{\Upsilon}_{35} + 8\bar{\Upsilon}_{36} + 12\bar{\Upsilon}_{37} + 4\bar{\Upsilon}_{38} + 16\bar{\Upsilon}_{40} \\ &+48\bar{\Upsilon}_{41} + 8\bar{\Upsilon}_{42} - 32\bar{\Upsilon}_{43} - 16\bar{\Upsilon}_{44} - 16\bar{\Upsilon}_{45} - 16\bar{\Upsilon}_{46}\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.2.6 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta})$

O objeto de segunda ordem na curvatura de $R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}$ transforma-se tal como

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} &= e^{-6\sigma}\big[\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta} - 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma + 2\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\bar{\nabla}^\alpha\sigma \\
&\quad -2\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma - \bar{R}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma \\
&\quad -3\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \bar{R}\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + \bar{R}\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma \\
&\quad +\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\Box}\sigma)^2 + 4\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 + 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma + 16\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^{(\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma \\
&\quad -8\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 12\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
&\quad -8\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma - 16\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4\big]\,.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

As substituições em (3.26) são

$$A^{\mu\nu} \to R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} \tag{4.31}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\star\mu\nu} &\to \bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta} - 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + 4\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma + 2\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\bar{\nabla}^\alpha\sigma \\
&\quad -2\bar{R}^{(\mu}_{\alpha}\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma - \bar{R}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma \\
&\quad -3\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \bar{R}\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + \bar{R}\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma \\
&\quad +\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\Box}\sigma)^2 + 4\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 + 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma + 16\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^{(\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma \\
&\quad -8\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 12\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
&\quad -8\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma - 16\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4\,.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Contraindo todos os termos de (4.32) com $\bar{g}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\star\nu}_{\ \ \nu} &\to \bar{R}^2_{\alpha\beta} - 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 8\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 \\
&\quad +14(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 72\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 80(\bar{\nabla}\sigma)^4\,.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

O resultado desta transformação equivale a

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) \;=\; & \sqrt{-\bar{g}}\Big[\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu(\bar{R}_{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\alpha\nu\beta}) - \bar{\chi}_2 - 2\bar{\chi}_4 + 2\bar{\chi}_5 - 5\bar{\chi}_6 - \frac{1}{2}\bar{\chi}_7 \\
& +2\bar{\chi}_8 - 2\bar{\chi}_{10} + 6\bar{\chi}_{11} - \bar{\chi}_{12} - \bar{\chi}_{13} + 2\bar{\chi}_{16} - 12\bar{\chi}_{17} - 2\bar{\chi}_{18} \\
& +\bar{\chi}_{19} - \bar{\chi}_{20} - \frac{1}{2}\bar{\chi}_{21} + 10\bar{\Upsilon}_1 - 10\bar{\Upsilon}_3 - 3\bar{\Upsilon}_4 - 20\bar{\Upsilon}_5 - 10\bar{\Upsilon}_7 \\
& +10\bar{\Upsilon}_8 + 40\bar{\Upsilon}_{10} + 80\bar{\Upsilon}_{12} - 3\bar{\Upsilon}_{13} + 3\bar{\Upsilon}_{14} + 16\bar{\Upsilon}_{15} + 8\bar{\Upsilon}_{16} \\
& +40\bar{\Upsilon}_{18} - 20\bar{\Upsilon}_{19} + 160\bar{\Upsilon}_{20} + 80\bar{\Upsilon}_{21} - 160\bar{\Upsilon}_{22} - 80\bar{\Upsilon}_{23} \\
& -320\bar{\Upsilon}_{24} - 80\bar{\Upsilon}_{25} + 5\bar{\Upsilon}_{26} - 2\bar{\Upsilon}_{27} + 20\bar{\Upsilon}_{28} - 20\bar{\Upsilon}_{29} + 6\bar{\Upsilon}_{30} \\
& -10\bar{\Upsilon}_{31} - \frac{5}{2}\bar{\Upsilon}_{34} + 10\bar{\Upsilon}_{37} + 10\bar{\Upsilon}_{38} + 20\bar{\Upsilon}_{40} + 80\bar{\Upsilon}_{41} \\
& +8\bar{\Upsilon}_{42}\Big]\,. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

4.2.7 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha})$

Para o invariante $R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}$, as substituições em (3.26) são

$$
A^{\mu\nu} \to R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}, \qquad (4.35)
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{\star\mu\nu} \;\to\; & \bar{R}^\mu_\alpha\bar{R}^{\nu\alpha} - 8\bar{R}^{(\mu}_\alpha\bar{\nabla}^{\nu)}\bar{\nabla}^\alpha\sigma + 8\bar{R}^{(\mu}_\alpha\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma - 2\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma - 8\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
& +16\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}^\nu\bar{\nabla}^\alpha\sigma + \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\Box}\sigma)^2 + 8\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma - 8\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma \\
& -32\bar{\nabla}^\alpha\bar{\nabla}^{(\mu}\sigma\bar{\nabla}^{\nu)}\sigma\bar{\nabla}_\alpha\sigma + 32\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 8\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 16\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
& +16\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4\,, \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

além de

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{\star\nu}_{\ \nu} \;\to\; & \bar{R}^2_{\alpha\beta} - 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma + 8\bar{R}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma - 2\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 8\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 16(\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma)^2 \\
& +14(\bar{\Box}\sigma)^2 - 32\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\sigma\bar{\nabla}^\alpha\sigma\bar{\nabla}^\beta\sigma + 72\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 80(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

A transformação finalmente é dada por

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}) \;=\; & \sqrt{-\bar{g}}\Big[\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu(\bar{R}^\mu_\alpha\bar{R}^{\nu\alpha}) - 10\bar{\chi}_1 - 8\bar{\chi}_3 - 6\bar{\chi}_4 - 4\bar{\chi}_5 - \bar{\chi}_7 + 8\bar{\chi}_{10} \\
& -14\bar{\chi}_{11} - \bar{\chi}_{12} + 8\bar{\chi}_{17} - 6\bar{\chi}_{18} - 2\bar{\chi}_{19} - 3\bar{\chi}_{20} - 8\bar{\Upsilon}_1 - 16\bar{\Upsilon}_2 \\
& +16\bar{\Upsilon}_3 - 16\bar{\Upsilon}_5 + 96\bar{\Upsilon}_6 + 24\bar{\Upsilon}_7 + 20\bar{\Upsilon}_8 + 48\bar{\Upsilon}_9 - 8\bar{\Upsilon}_{10} + 24\bar{\Upsilon}_{11} \\
& +80\bar{\Upsilon}_{12} + 2\bar{\Upsilon}_{14} + 16\bar{\Upsilon}_{15} + 8\bar{\Upsilon}_{16} + 64\bar{\Upsilon}_{17} - 24\bar{\Upsilon}_{18} - 20\bar{\Upsilon}_{19} \\
& +96\bar{\Upsilon}_{20} + 80\bar{\Upsilon}_{21} - 208\bar{\Upsilon}_{22} - 88\bar{\Upsilon}_{23} - 320\bar{\Upsilon}_{24} - 80\bar{\Upsilon}_{25} + 4\bar{\Upsilon}_{27} \\
& +32\bar{\Upsilon}_{28} + 16\bar{\Upsilon}_{29} + 8\bar{\Upsilon}_{30} - 16\bar{\Upsilon}_{31} + 44\bar{\Upsilon}_{32} - 8\bar{\Upsilon}_{33} - 4\bar{\Upsilon}_{34} \\
& +40\bar{\Upsilon}_{35} + 16\bar{\Upsilon}_{36} + 34\bar{\Upsilon}_{37} + 10\bar{\Upsilon}_{38} + 2\bar{\Upsilon}_{39} + 40\bar{\Upsilon}_{40} + 128\bar{\Upsilon}_{41} \\
& +20\bar{\Upsilon}_{42} - 32\bar{\Upsilon}_{43} - 40\bar{\Upsilon}_{44} - 56\bar{\Upsilon}_{45} - 32\bar{\Upsilon}_{46} - 8\bar{\Upsilon}_{47} \\
& -32\bar{\Upsilon}_{48}\Big]. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

4.2.8 Transformação de $\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu})$

Para o caso de $RR^{\mu\nu}$, devemos fazer as substituições em (3.26) de acordo com

$$A^{\mu\nu} \;\to\; RR^{\mu\nu}\,, \qquad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\star\mu\nu} \;\to\; & \bar{R}\bar{R}^{\mu\nu} - 10\bar{R}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma - 20\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4\bar{R}\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma + 4\bar{R}\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma \\
& -\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 4\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 10\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\Box}\sigma)^2 + 40\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma \\
& -40\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma\bar{\Box}\sigma + 80\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 60\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 80\bar{\nabla}^\mu\sigma\bar{\nabla}^\nu\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 \\
& +80\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}\sigma)^4 \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

e também

$$\bar{A}^{\star\nu}_{\ \nu} \to \bar{R}^2 - 20\bar{R}\bar{\Box}\sigma - 40\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 100(\bar{\Box}\sigma)^2 + 400\bar{\Box}\sigma(\bar{\nabla}\sigma)^2 + 400(\bar{\nabla}\sigma)^4\,. \qquad (4.41)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu}) \;=\;& \sqrt{-\bar{g}}\Big[\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu(\bar{R}\bar{R}^{\mu\nu}) - 10\bar{\chi}_1 - 5\bar{\chi}_2 - 20\bar{\chi}_4 - 4\bar{\chi}_5 - 6\bar{\chi}_7 - 2\bar{\chi}_{13}\\ & -\bar{\chi}_{14} - 6\bar{\chi}_{20} - 3\bar{\chi}_{21} - 12\bar{\Upsilon}_4 - 40\bar{\Upsilon}_7 + 20\bar{\Upsilon}_8 + 240\bar{\Upsilon}_9 + 160\bar{\Upsilon}_{10}\\ & +40\bar{\Upsilon}_{11} + 400\bar{\Upsilon}_{12} - 12\bar{\Upsilon}_{13} + 22\bar{\Upsilon}_{14} + 80\bar{\Upsilon}_{15} + 40\bar{\Upsilon}_{16} + 160\bar{\Upsilon}_{17}\\ & +160\bar{\Upsilon}_{18} - 120\bar{\Upsilon}_{19} + 480\bar{\Upsilon}_{20} + 400\bar{\Upsilon}_{21} - 1040\bar{\Upsilon}_{22} - 440\bar{\Upsilon}_{23}\\ & -1600\bar{\Upsilon}_{24} - 400\bar{\Upsilon}_{25} + 4\bar{\Upsilon}_{27} + 36\bar{\Upsilon}_{30} - 56\bar{\Upsilon}_{31} + 60\bar{\Upsilon}_{32} - 40\bar{\Upsilon}_{33}\\ & -14\bar{\Upsilon}_{34} + 40\bar{\Upsilon}_{35} + 100\bar{\Upsilon}_{37} + 60\bar{\Upsilon}_{38} + 10\bar{\Upsilon}_{39} + 140\bar{\Upsilon}_{40} + 560\bar{\Upsilon}_{41}\\ & +60\bar{\Upsilon}_{42} + 160\bar{\Upsilon}_{43} - 40\bar{\Upsilon}_{44} - 120\bar{\Upsilon}_{45} - 40\bar{\Upsilon}_{47} - 160\bar{\Upsilon}_{48}\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

4.2.9 A dependência linear entre os $\Xi's$

As transformações listadas nos permitiram realizar uma série de combinações lineares cujo objetivo era, entre outros, revelar propriedades ocultas da base descrita em (3.1). Utilizando o software *Mathematica* [53] e tomando como apoio as transformações (4.14), (4.18), (4.21), (4.24), (4.29), (4.34), (4.38) e (4.42) foi possível mostrar que

$$\begin{aligned}&\sqrt{-g}\big(\Xi_2 - 4\Xi_3 + \Xi_4 - 4\Xi_5 + 8\Xi_6 + 8\Xi_7 - 4\Xi_8\big) =\\ &= \sqrt{-\bar{g}}\big(\bar{\Xi}_2 - 4\bar{\Xi}_3 + \bar{\Xi}_4 - 4\bar{\Xi}_5 + 8\bar{\Xi}_6 + 8\bar{\Xi}_7 - 4\bar{\Xi}_8\big)\,,\end{aligned} \tag{4.43}$$

ou seja, a combinação acima entre os $\Xi's$ apresentava invariância conforme.

Poderia ser a quantidade acima identicamente nula denotando assim uma dependência linear entre estes temos? Após investigação, concluímos que a resposta a esta questão foi positiva e portanto,

$$\Xi_2 - 4\Xi_3 + \Xi_4 - 4\Xi_5 + 8\Xi_6 + 8\Xi_7 - 4\Xi_8 = 0\,. \tag{4.44}$$

No Apêndice D, provamos analiticamente que a relação acima é de fato identicamente nula revelando assim uma dependência linear oculta entre os $\Xi's$ [56]. Após pesquisa em outras referências [57, 58] também encontramos esta mesma relação oriunda do divergente da equação de movimento da lagrangeana E_4, tal fato nos motivou a ir além e apresentar uma derivação ainda mais sutil e generalizada para D-dimensões da nulidade do termo entre parênteses em (4.43) (ver Apêndices E e F). Isto posto, concluímos que a dependência linear entre os elementos da eq. (4.44) envolve todos os sete termos e não pode ser subdividida em outras dependências parciais.

4.3 O termo topológico modificado $\tilde{E}_6$ e operador conforme Δ_6 na métrica mais geral

De posse dos resultados da seção anterior, o próximo passo é determinar os coeficientes α_i para as derivadas totais (termos superficiais) de forma a obter $\tilde{E}_6$ tal como

$$\begin{aligned}\tilde{E}_6 \;=\;& E_6 + \alpha_1 \Box^2 R + \alpha_2 \Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + \alpha_3 \Box R^2_{\mu\nu} + \alpha_4 \Box R^2 + \alpha_5 \nabla_\mu \nabla_\nu (R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} R^{\nu\alpha\beta\gamma}) \\ &+ \alpha_6 \nabla_\mu \nabla_\nu (R_{\alpha\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta}) + \alpha_7 \nabla_\mu \nabla_\nu (R^{\mu}_{\alpha} R^{\nu\alpha}) + \alpha_8 \nabla_\mu \nabla_\nu (R R^{\mu\nu})\,, \end{aligned} \tag{4.45}$$

de modo que (1.50) seja satisfeita. Uma vez que é válida a relação (4.44), podemos eliminar qualquer um dos termos superficiais exceto Ξ_1 na eq (4.45). Como exemplo inicial, optamos por eliminar Ξ_4 o que equivale a fazer $\alpha_4 = 0$ [22]. Neste caso, encontramos na eq. (1.50) $\kappa = -6$ com os coeficientes em (4.45) iguais a

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{3}{5} && \alpha_2 = -\frac{9}{10} - \frac{5}{4}\xi_1 + \frac{3}{8}\xi_2 && \alpha_3 = \xi_1 \\ &\alpha_4 = 0 && \alpha_5 = \frac{84}{5} + 3\xi_1 + \frac{11}{2}\xi_2 && \alpha_6 = -\frac{36}{5} - 2\xi_1 - 5\xi_2 \\ &\alpha_7 = -\frac{18}{5} - \xi_1 - \frac{7}{2}\xi_2 && \alpha_8 = \xi_2\,. && \end{aligned} \tag{4.46}$$

Aqui ξ_1 e ξ_2 são parâmetros livres que permanecem indeterminados pela condição (1.50). Adotando os coeficientes em (4.46), todos os termos não lineares em σ se cancelam em (1.50) e os termos lineares remanescentes fornecem o operador conforme de sexta ordem[1]

[1] Vale ressaltar que podemos encontrar na literatura uma teoria geral para a construção de operadores conformes $6D$ (ver, p. ex., [27–29, 43]), mas nenhuma delas obtida através da estreita relação entre $\tilde{E}_6$ e Δ_6.

$$
\begin{aligned}
\Delta_6 \;=\;& \Box^3 + 4R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Box - R\,\Box^2 + 4(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu + 4(\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{3}{5}(\Box R)\Box \\
&+\Big(-\frac{64}{5}-\frac{4}{3}\xi_1-2\xi_2\Big)R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla_\nu+\Big(\frac{16}{5}-\frac{1}{3}\xi_1+\frac{7}{6}\xi_2\Big)R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\Box \\
&+\Big(\frac{64}{5}+\frac{4}{3}\xi_1+2\xi_2\Big)R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu+\Big(\frac{78}{5}+\xi_1+\frac{3}{2}\xi_2\Big)R^{\mu\alpha}R^{\nu}_{\alpha}\nabla_\mu\nabla_\nu \\
&+\Big(-\frac{29}{5}+\frac{1}{6}\xi_1-\frac{17}{12}\xi_2\Big)R^2_{\mu\nu}\Box+\Big(-\frac{26}{5}-\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2\Big)RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \\
&+\Big(1+\frac{1}{6}\xi_2\Big)R^2\Box+\frac{2}{5}(\nabla^\mu\Box R)\nabla_\mu+\frac{8}{3}\big(-\xi_1+\xi_2\big)R_{\alpha\beta\gamma\mu}(\nabla^\mu R^{\alpha\beta\gamma\nu})\nabla_\nu \\
&+\Big(\frac{64}{5}+\frac{4}{3}\xi_1+2\xi_2\Big)R^{\mu\nu\alpha\beta}(\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla_\beta+\Big(\frac{14}{5}-\frac{1}{3}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2\Big)R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\alpha \\
&+\Big(\frac{6}{5}+\frac{5}{3}\xi_1-\frac{5}{6}\xi_2\Big)R_{\mu\nu}(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha+\Big(\frac{13}{5}+\frac{1}{6}\xi_1+\frac{1}{4}\xi_2\Big)R^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)\nabla_\nu \\
&+\Big(-\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\xi_1+\frac{1}{12}\xi_2\Big)R(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\,. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Se fizermos uma mudança nos parâmetros de acordo com

$$
\xi_1=-\frac{3}{200}(256+35\zeta_1+60\zeta_2) \quad \text{e} \quad \xi_2=-\frac{3}{100}(128+5\zeta_1-20\zeta_2)\,, \qquad (4.48)
$$

a expressão de Δ_6 assume a forma

$$
\begin{aligned}
\Delta_6 \;=\;& \Box^3 + 4R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Box - R\,\Box^2 + 4(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu + 4(\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{3}{5}(\Box R)\Box \\
&+\zeta_1 R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla_\nu+\zeta_2 R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\Box-\zeta_1 R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu+\Big(6-\frac{3}{4}\zeta_1\Big)R^{\mu\alpha}R^{\nu}_{\alpha}\nabla_\mu\nabla_\nu \\
&+\Big(-1+\frac{1}{8}\zeta_1-\zeta_2\Big)R^2_{\mu\nu}\Box+\Big(-2+\frac{1}{4}\zeta_1\Big)RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu+\Big(\frac{9}{25}-\frac{1}{40}\zeta_1+\frac{1}{10}\zeta_2\Big)R^2\Box \\
&+\frac{2}{5}(\nabla^\mu\Box R)\nabla_\mu+\big(\zeta_1+4\zeta_2\big)R_{\alpha\beta\gamma\mu}(\nabla^\mu R^{\alpha\beta\gamma\nu})\nabla_\nu-\zeta_1 R^{\mu\nu\alpha\beta}(\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla_\beta \\
&+\Big(6+\frac{1}{4}\zeta_1\Big)R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\alpha+\Big(-2-\frac{3}{4}\zeta_1-2\zeta_2\Big)R_{\mu\nu}(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha \\
&+\Big(1-\frac{1}{8}\zeta_1\Big)R^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)\nabla_\nu+\Big(-\frac{7}{25}+\frac{3}{40}\zeta_1+\frac{1}{5}\zeta_2\Big)R(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\,, \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

o que coincide exatamente com a publicada em [29].

Um aspecto interessante é que o único coeficiente rigorosamente determinado em (4.45) é $\alpha_1=\frac{3}{5}$. Assim sendo, pode-se obter relações análogas fazendo nulo qualquer outro coeficiente dos termos superficiais, embora sempre sobrevivam duas indeterminações. Em todos os casos a forma de Δ_6 permanece inalterada. Portanto, o que mostramos aqui é o fato de haver sete maneiras distintas de se obter identicamente Δ_6.

Vamos investigar a forma de $\tilde{E}_6$ e Δ_6 no caso em que o coeficiente α_5 de $\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta})$ é eliminado. Os demais coeficientes de $\tilde{E}_6$ na eq. (4.45) tornam-se, neste caso,

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \dfrac{3}{5} & \alpha_2 = -\dfrac{45}{22} - 5\beta_1 - \beta_2 & \alpha_3 = \beta_2 \\ \alpha_4 = \dfrac{11}{10}\beta_1 - \dfrac{1}{10}\beta_2 & \alpha_5 = 0 & \alpha_6 = \dfrac{444}{55} + 8\beta_1 \\ \alpha_7 = \dfrac{78}{11} + 10\beta_1 & \alpha_8 = -\dfrac{168}{55} - 6\beta_1 & \end{array} \tag{4.50}$$

e o operador conforme Δ_6 é expresso por

$$\begin{aligned} \Delta_6 \;=\; & \Box^3 + 4R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Box - R\,\Box^2 + 4(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu + 4(\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{3}{5}(\Box\, R)\,\Box \\ & + \Big(-\frac{368}{55} - \frac{8}{3}\beta_1\Big) R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla_\nu + \Big(-\frac{4}{11} - \frac{10}{3}\beta_1 - \frac{2}{3}\beta_2\Big) R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\,\Box \\ & + \Big(\frac{368}{55} + \frac{8}{3}\beta_1\Big) R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu + \Big(\frac{606}{55} + 2\beta_1\Big) R^{\mu\alpha}R^\nu_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu \\ & + \Big(-\frac{81}{55} + 3\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2\Big) R^2_{\mu\nu}\,\Box + \Big(-\frac{202}{55} - \frac{2}{3}\beta_1\Big) RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \\ & + \Big(\frac{27}{55} - \frac{4}{15}\beta_1 - \frac{1}{15}\beta_2\Big) R^2\,\Box + \frac{2}{5}(\nabla^\mu\,\Box\, R)\nabla_\mu \\ & + \Big(-\frac{448}{55} - 16\beta_1 - \frac{8}{3}\beta_2\Big) R_{\alpha\beta\gamma\mu}(\nabla^\mu R^{\alpha\beta\gamma\nu})\nabla_\nu \\ & + \Big(\frac{368}{55} + \frac{8}{3}\beta_1\Big) R^{\mu\nu\alpha\beta}(\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla_\beta + \Big(\frac{238}{55} - \frac{2}{3}\beta_1\Big) R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\alpha \\ & + \Big(\frac{206}{55} + \frac{26}{3}\beta_1 + \frac{4}{3}\beta_2\Big) R_{\mu\nu}(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha \\ & + \Big(\frac{101}{55} + \frac{1}{3}\beta_1\Big) R^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)\nabla_\nu + \Big(-\frac{47}{55} - \frac{13}{15}\beta_1 - \frac{2}{15}\beta_2\Big) R(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

A expressão acima é idêntica a (4.47) se fizermos

$$\beta_1 = \frac{126}{55} + \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{3}{4}\xi_2 \quad \text{e} \quad \beta_2 = -\frac{84}{5} - 2\xi_1 - \frac{11}{2}\xi_2\,. \tag{4.52}$$

Outra escolha, de muita utilidade na resolução do sistema envolvendo os traços das equações de movimento das lagrangeanas locais (ver capítulo 5), é o caso em que tornamos nulo o coeficiente de $\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu})$, ou seja, $\alpha_8 = 0$. Os resultados são

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \dfrac{3}{5} & \alpha_2 = -\gamma_1 + \dfrac{1}{4}\gamma_2 & \alpha_3 = \gamma_1 \\ \alpha_4 = -\dfrac{9}{25} - \dfrac{1}{10}\gamma_1 - \dfrac{1}{10}\gamma_2 & \alpha_5 = 6 - 3\gamma_2 & \alpha_6 = 2\gamma_2 \\ \alpha_7 = \gamma_2 & \alpha_8 = 0\,. & \end{array} \tag{4.53}$$

Neste último caso, a forma de Δ_6 também é idêntica mediante substituições adequadas nos parâmetros γ_1 e γ_2.

Em suma, todas as escolhas de um dos coeficientes α_k $(k = 2, \cdots, 8)$ igual a zero conduzem ao mesmo operador conforme Δ_6, todavia, optamos por não relacionarmos os exemplos faltantes devido à redundância dos resultados. Esta série de derivações idênticas para Δ_6 reforça a argumentação da dependência linear existente ente os objetos Ξ_k $(k = 2, \cdots, 8)$ expressa em (4.44).

Chamamos a atenção para o fato de que a relação (4.45), principal êxito do trabalho aqui apresentado, nunca ter sido obtida antes, provavelmente devido à complexidade dos cálculos necessários para obtenção dos coeficientes α_k. Atingimos nosso objetivo através do esforço combinado entre trabalhos feitos à mão e o uso das ferramenta computacionais *Cadabra* [46, 47] e *Mathematica* [53].

Finalizando este tópico, cabe destacar que, embora relativamente mais fácil do que os cálculos principais - mas ainda sim consumindo certo esforço, foi possível verificar que o operador Δ_6 satisfaz a invariância conforme (1.7) e é auto-adjunto $\int_x \varphi\Delta_6\psi = \int_x \psi\Delta_6\varphi$, propriedades estas já conhecidas (ver [27–29,43]). Contudo é interessante afirmar que ambas as condições não impuseram nenhuma restrição aos parâmetros arbitrários ξ_1 e ξ_2. Discutiremos algumas consequências físicas destas ambiguidades no próximo capítulo onde também desenvolveremos um caso particular de solução para lagrangeanas locais produzindo termos superficiais (1.9).

Capítulo 5

Lagrangeanas locais dependentes da métrica e sua relação com os termos superficiais $6D$

O último passo na integração da anomalia é a solução da eq. (1.9). Diferentemente do caso quadridimensional em que temos um único termo superficial, no caso $6D$ há um conjunto de termos superficiais que combinados formam a parcela $\Xi_6 = \gamma_k \Xi_k$ presente na anomalia. Para solucionarmos este problema é necessário encontramos um conjunto de lagrangeanas locais $\mathcal{L}_i$ dependentes da métrica, com seus respectivos coeficientes c_{ki}, cujos traços das equações de movimento geram cada um dos termos superficiais Ξ_k que aprecem na anomalia. A solução explícita de (1.9) não pode ser encontrada [59] pois há redundâncias nas relações geradas pelos traços das equações dos $\mathcal{L}_i$. Uma possível explicação para estas redundâncias pode ser encontrada mesmo em $4D$, nesta última situação temos três lagrangeanas locais que geram o termo $\Box R$ na anomalia quadridimensional. Na seção 5.1 apresentamos as dez lagrangeanas locais dependentes da métrica para $D = 6$. As primeiras oito são os termos cúbicos na curvatura que constituem E_6 e as duas últimas são os objetos $R_{\mu\nu}\Box R^{\mu\nu}$ e $R\Box R$. É possível mostrar, em grande parte devido à técnica de integração por partes, que qualquer outro integrando local $6D$ pode ser expresso como combinação destes dez objetos. Na seção 5.2 mostramos uma solução para um caso particular $\gamma_k \Xi_k$ a qual será detalhada como exemplo didático. Por último, podemos especular que os valores específicos de γ_k na anomalia podem indicar uma possível determinação dos parâmetros ξ_1 e ξ_2 presentes em $\tilde{E}_6$ e Δ_6.

5.1 Traços das equações de movimento dos termos locais em $6D$

Nesta seção listaremos as ações cujos integrandos não sejam derivadas totais, e sim termos locais dependentes da curvatura. Definiremos tais ações na forma $I_n = \int_x \mathcal{L}_n$, onde,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 = R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} R^{\lambda}{}_{\rho}{}^{\tau}{}_{\sigma} R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}, \quad \mathcal{L}_2 = R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau} R^{\lambda\tau}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{L}_3 = R_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\tau} R^{\beta\gamma\lambda\tau}, \\
&\mathcal{L}_4 = R^{\alpha\beta} R^{\lambda\tau} R_{\alpha\lambda\beta\tau}, \quad \mathcal{L}_5 = R^{\alpha}_{\lambda} R^{\beta}_{\alpha} R^{\lambda}_{\beta}, \quad \mathcal{L}_6 = R R^2_{\alpha\beta\lambda\tau}, \quad \mathcal{L}_7 = R R^2_{\alpha\beta}, \\
&\mathcal{L}_8 = R^3, \quad \mathcal{L}_9 = R^{\alpha\beta} \Box R_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{L}_{10} = R \Box R\,.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Além disso, forneceremos a lista de suas respectivas equações de movimento [34],

$$\Phi_n^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_n}{\delta g_{\mu\nu}}\,, \quad \text{bem como seus traços} \quad \Phi_n \;=\; g_{\mu\nu}\, \Phi_n^{\mu\nu}, \tag{5.2}$$

os quais têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} R^{\lambda}{}_{\rho}{}^{\tau}{}_{\sigma} R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} - 3 R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{(\mu}{}_{\tau} R_{\rho\alpha\sigma}{}^{\nu)} R^{\lambda\rho\tau\sigma} \\
&\quad + 3 \nabla_{\lambda} \nabla_{\beta} (R^{\lambda}{}_{\rho}{}^{(\mu}{}_{\sigma} R^{\nu)\rho\beta\sigma}) - 3 \nabla^{\lambda} \nabla^{\tau} (R^{(\mu}{}_{\rho}{}^{\nu)}{}_{\sigma} R^{\rho}{}_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\tau}), \\
\Phi_1 &= \frac{D-6}{2} R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau} R^{\lambda}{}_{\rho}{}^{\tau}{}_{\sigma} R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} + \frac{3}{2} \Xi_5 - 3 \Xi_6,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau} R^{\lambda\tau}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} - 3 R^{\alpha(\mu}{}_{\lambda\tau} R_{\rho\sigma\alpha}{}^{\nu)} R^{\lambda\tau\rho\sigma} - 6 \nabla^{\beta} \nabla_{\tau} (R^{\tau(\mu}{}_{\rho\sigma} R_{\beta}{}^{\nu)\rho\sigma}), \\
\Phi_2 &= \frac{D-6}{2} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau} R^{\lambda\tau}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} - 6 \Xi_5,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\tau} R^{\beta\gamma\lambda\tau} - R^{(\mu}_{\alpha} R^{\nu)\gamma\lambda\tau} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\tau} - 2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{(\mu}{}_{\tau} R^{\nu)\tau\beta\gamma} \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (R^{\alpha\gamma\lambda\tau} R^{\beta}{}_{\gamma\lambda\tau}) + \nabla_{\alpha} \nabla^{(\mu} (R^{\nu)\gamma\lambda\tau} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\tau}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \Box (R^{\mu}{}_{\gamma\lambda\tau} R^{\nu\gamma\lambda\tau}) - 2 \nabla_{\gamma} \nabla_{\lambda} (R^{(\mu}_{\alpha} R^{\nu)\lambda\alpha\gamma}) - 2 \nabla_{\alpha} \nabla^{\tau} (R^{\alpha}_{\beta} R^{\beta(\mu}{}_{\tau}{}^{\nu)}), \\
\Phi_3 &= \frac{D-6}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\tau} R^{\beta\gamma\lambda\tau} - \frac{1}{2} \Xi_2 - \frac{D-2}{2} \Xi_5 - 2 \Xi_6 - 2 \Xi_7\,,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R^{\lambda\tau}R_{\alpha\lambda\beta\tau} - 3(R_{\lambda\alpha}{}^{(\mu}{}_{\beta}R^{\nu)\lambda}R^{\alpha\beta}) - \Box(R^{\alpha\mu\beta\nu}R_{\alpha\beta}) - \nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}) \\
&\quad -g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta(R^{\lambda\tau}R_{\lambda\alpha\tau\beta}) + 2\nabla_\lambda\nabla^{(\mu}(R^{\nu)\alpha\lambda\beta}R_{\alpha\beta}) + \nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\alpha(\mu}R^{\nu)\beta}), \\
\Phi_4 &= \frac{D-6}{2}R^{\alpha\beta}R^{\lambda\tau}R_{\alpha\lambda\beta\tau} - \Xi_3 - (D-2)\Xi_6 + \Xi_7 - \Xi_8\,,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_5^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^\alpha_\lambda R^\beta_\alpha R^\lambda_\beta - 3R^\mu_\beta R^{\nu\lambda}R^\beta_\lambda + 3\nabla^\alpha\nabla^{(\mu}(R^{\nu)}_\lambda R^\lambda_\alpha) \\
&\quad -\frac{3}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\lambda\alpha}R^\beta_\lambda) - \frac{3}{2}\Box(R^\mu_\lambda R^{\nu\lambda}), \\
\Phi_5 &= \frac{D-6}{2}R^\alpha_\lambda R^\beta_\alpha R^\lambda_\beta - \frac{3}{2}\Xi_3 - 3\frac{D-2}{2}\Xi_7\,,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_6^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}RR^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - R^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - 2RR_{\lambda\tau}{}^{\alpha(\mu}R_\alpha{}^{\nu)\lambda\tau} \\
&\quad +\nabla^\mu\nabla^\nu R^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - g^{\mu\nu}\Box R^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - 4\nabla^\beta\nabla^\lambda(RR_\beta{}^{(\mu}{}_\lambda{}^{\nu)}), \\
\Phi_6 &= \frac{D-6}{2}RR^2_{\alpha\beta\lambda\tau} - (D-1)\Xi_2 - 4\Xi_8\,,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_7^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}RR^2_{\alpha\beta} - R^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta} - 2RR^\mu_\lambda R^{\nu\lambda} + \nabla^\mu\nabla^\nu(R^2_{\alpha\beta}) - g^{\mu\nu}\Box R^2_{\alpha\beta} \\
&\quad +2\nabla_\alpha\nabla^{(\mu}(R^{\nu)\alpha}R) - g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(RR^{\alpha\beta}) - \Box(RR^{\mu\nu}), \\
\Phi_7 &= \frac{D-6}{2}RR^2_{\alpha\beta} - (D-1)\Xi_3 - \Xi_4 - (D-2)\Xi_8\,,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_8^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^3 - 3R^{\mu\nu}R^2 + 3\nabla^\mu\nabla^\nu R^2 - 3g^{\mu\nu}\Box R^2, \\
\Phi_8 &= \frac{D-6}{2}R^3 - 3(D-1)\Xi_4\,,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_9^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}\Box R_{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}\nabla^{(\mu}\nabla^{\nu)}R_{\alpha\beta} - 2R^{(\mu}_\alpha\Box R^{\nu)\alpha} + 2\nabla^\alpha\nabla^{(\mu}\Box R^{\nu)}_\alpha \\
&\quad -g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Box R^{\alpha\beta} - \Box^2R^{\mu\nu} + 2\nabla^\alpha(R_{\alpha\beta}\nabla^{(\mu}R^{\nu)\beta}) - 2\nabla^\alpha(R^{\beta(\mu}\nabla^{\nu)}R_{\alpha\beta}) \\
&\quad +\nabla^{(\mu}(R_{\alpha\beta}\nabla^{\nu)}R^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla^\lambda(R_{\alpha\beta}\nabla_\lambda R^{\alpha\beta}), \\
\Phi_9 &= \frac{D-6}{2}R^{\alpha\beta}\Box R_{\alpha\beta} - \frac{D}{2}\Xi_1 - \frac{D}{2}\Xi_3 + \frac{D-4}{4}\Xi_4 \\
&\quad +2(D-2)\Xi_6 - 2\Xi_7 - (D-4)\Xi_8\,,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{10}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\nabla_\alpha R)^2 + (\nabla^\mu R)(\nabla^\nu R) + 2\nabla^\mu\nabla^\nu\Box R - 2g^{\mu\nu}\Box^2R - 2R^{\mu\nu}\Box R, \\
\Phi_{10} &= -\frac{D-6}{2}R\Box R - 2(D-1)\Xi_1 - \frac{D-2}{4}\Xi_4\,.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Na derivação dos traços, usamos expressões dadas no Apêndice A.

A resolução do sistema de equações geradas pelos traços das dez equações de movimento com oito incógnitas Ξ_k aqui apresentadas é impossível pois há certamente redundâncias nelas escondidas. Na próxima seção apresentamos um estudo de caso com uma combinação particular de coeficientes γ_k na anomalia.

5.2 Solução dos termos superficiais Ξ_k nos traços das equações de movimento das lagrangeanas locais $6D$

Como já dito, o conjunto de eqs. (5.3) a (5.12) contém redundâncias, o que faz com que tenhamos que fazer certas escolhas para a sua solução. Ilustraremos inicialmente este tipo de redundância em $4D$ que, como sabemos, possui apenas um termo superficial. Neste caso, temos uma liberdade de escolha com relação a lagrangeana local cujo traço da equação de movimento fornece este único termo. A derivada total $\Box R$ pode vir de três lagrangeanas distintas,

$$\Box R = \begin{cases} -\frac{1}{6}\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int_x R^2 \\ -\frac{1}{2}\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int_x R^2_{\alpha\beta} \\ -\frac{1}{2}\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int_x R^2_{\alpha\beta\lambda\tau}\,. \end{cases} \tag{5.13}$$

É de se esperar que tenhamos uma liberdade de escolha ainda maior em $6D$ [59]. Assim, optamos em demonstrar uma solução particular que depende do ajuste dos coeficientes da anomalia. Se escolhermos os coeficientes da eq. (4.53) fixando as indeterminações γ_1 e γ_2 como

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 4\,, \tag{5.14}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_6 \;&=\; E_6 + \frac{3}{5}\Box^2 R + \Box R^2_{\mu\nu} - \frac{43}{50}\Box R^2 - 6\nabla_\mu\nabla_\nu(R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}) \\ &\quad + 8\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) + 4\nabla_\mu\nabla_\nu(R^{\mu}_{\alpha}R^{\nu\alpha})\,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

assim como, o operador conforme Δ_6 torna-se,

$$\begin{aligned}\Delta_6 &= \Box^3 + 4R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Box - R\,\Box^2 + 4(\nabla^\alpha R^{\mu\nu})\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu + 4(\Box R^{\mu\nu})\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &-\frac{3}{5}(\Box R)\Box - \frac{8}{3}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}R^{\nu\alpha\beta\gamma}\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{8}{3}R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}\nabla_\mu\nabla_\nu + 8R^{\mu\alpha}R^{\nu}_{\alpha}\nabla_\mu\nabla_\nu \\ &-\frac{4}{3}R^2_{\mu\nu}\Box - \frac{8}{3}RR^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{32}{75}R^2\Box + \frac{2}{5}(\nabla^\mu\Box R)\nabla_\mu \\ &-\frac{8}{3}R_{\alpha\beta\gamma\mu}(\nabla^\mu R^{\alpha\beta\gamma\nu})\nabla_\nu + \frac{8}{3}R^{\mu\nu\alpha\beta}(\nabla_\mu R_{\nu\alpha})\nabla_\beta + \frac{16}{3}R_{\mu\nu}(\nabla^\mu R^{\nu\alpha})\nabla_\alpha \\ &+\frac{4}{3}R^{\mu\nu}(\nabla_\mu R)\nabla_\nu - \frac{12}{25}R(\nabla^\mu R)\nabla_\mu\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Podemos, nesta situação, definir por comodidade o termo superficial

$$\Xi_{3,7} \equiv \Xi_3 + 4\Xi_7 = \nabla_\mu\nabla_\nu(g^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta} + R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha})\,, \tag{5.17}$$

e assim, obtermos uma solução particular para o sistema formado pelos cinco termos superficiais presentes em $\tilde{E}_6$,

$$\Xi_1 = \frac{1}{150}\Phi_8 - \frac{1}{10}\Phi_{10}\,, \tag{5.18}$$

$$\Xi_{3,7} = -\frac{2}{3}\Phi_5\,, \tag{5.19}$$

$$\Xi_4 = -\frac{1}{15}\Phi_8\,, \tag{5.20}$$

$$\Xi_5 = -\frac{1}{6}\Phi_2\,, \tag{5.21}$$

$$\Xi_6 = -\frac{1}{3}\Phi_1 - \frac{1}{12}\Phi_2\,. \tag{5.22}$$

Ainda, por comodidade de notação, vamos renomear os Ξ's nas eqs. (5.18) a (5.22) como,

$$\Xi_1 \to \Xi'_1, \quad \Xi_{3,7} \to \Xi'_2, \quad \Xi_4 \to \Xi'_3, \quad \Xi_5 \to \Xi'_4 \quad \text{e} \quad \Xi_6 \to \Xi'_5\,, \tag{5.23}$$

e reescrever (5.15) de tal forma que

$$\tilde{E}_6 = E_6 + \sum_{k=1}^{5}\alpha'_k\Xi'_k\,. \tag{5.24}$$

Aqui, os coeficientes α'_k são dados por

$$\alpha'_1 = \tfrac{3}{5}, \quad \alpha'_2 = 1, \quad \alpha'_3 = -\tfrac{43}{50}, \quad \alpha'_4 = -6 \quad \text{e} \quad \alpha'_5 = 8\,. \tag{5.25}$$

Supondo um caso particular da anomalia em que apenas apareçam os termos superficiais listados em (5.23) tal como,

$$\begin{aligned} \langle T^\mu_\mu \rangle &= c_r\, W^r_D \,+\, aE_6 \,+ \sum_{k=1}^{5} \gamma_k \Xi'_k \\ &= c_r\, W^r_D \,+\, a\tilde{E}_6 \,+ \sum_{k=1}^{5} (\gamma_k - a\alpha'_k)\Xi'_k \end{aligned} \tag{5.26}$$

e também renomeando,

$$\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}'_1, \quad \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}'_2, \quad \mathcal{L}_5 \to \mathcal{L}'_3, \quad \mathcal{L}_8 \to \mathcal{L}'_4 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{10} \to \mathcal{L}'_5\,, \tag{5.27}$$

chegamos ao setor da ação efetiva responsável pelo termos Ξ's, em analogia ao que foi feito na eq. (1.37), que pode ser escrito

$$\Gamma_{sup} = \sum_{i,k=1}^{5} (\gamma_k - a\alpha'_k) c_{ki} \int_x \mathcal{L}'_i\,, \tag{5.28}$$

com

$$\left[c_{ki}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{300} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Embora seja um estudo em aberto, acreditamos que outras combinações dos coeficientes γ_k certamente gerarão novas soluções para os Ξ_k, bem como fixarão os valores das duas indeterminações presentes em $\tilde{E}_6$ e Δ_6. Entretanto, optamos aqui por apresentar somente este caso particular como exemplo ilustrativo.

Conclusão

Ao longo do desenvolvimento do trabalho que culminou nesta tese foram obtidos os seguintes resultados originais:

1. Calculamos as expressões gerais (1.11) e (1.13) para ação induzida por anomalia, até o caso $D = 6$, tanto na forma não local quanto na forma local com campos escalares auxiliares. Assim, mostramos, pela primeira vez, que em dimensões pares maiores que 2 faz-se necessário o uso de dois escalares auxiliares para parametrizar as não-localidades, enquanto que em $D = 2$ é necessário apenas um campo auxiliar. As aplicações destes resultados para casos em que $D > 6$ estão condicionadas às conjecturas apresentadas em [21]. Nos casos $D = 2$, 4 e 6 a conjectura foi verificada respectivamente em [16], [17, 18] e na nossa publicação [22].

2. Obtivemos a transformação conforme do termo E_6, inclusive generalizada para D dimensões, o que nos permitiu formular as conjecturas apresentadas em [21]. A transformação conforme de E_6 gera termos de até sexta ordem em σ constituídos tipicamente por derivadas do parâmetro conforme σ e da curvatura. Este resultado foi o ponto de partida para se tentar obter uma base de derivadas totais $6D$ que convenientemente adicionas ao objeto E_6 gerassem um novo objeto, o qual denominamos $\tilde{E}_6$, com uma transformação conforme em que somente termos de primeira ordem em σ sobrevivessem.

3. O passo seguinte foi a obtenção de uma base linearmente independente de termos

superficiais (derivadas totais) em $6D$. Utilizando propriedades dos tensores de curvatura tais como identidades de Bianchi, encontramos *a priori* oito termos superficiais linearmente independentes [22]. A partir da definição desta base, fazia-se necessário obter também as suas propriedades conformes. Os cálculos destas transformações são extremamente extensos e, antes de o nosso resultado final ser obtido, não havia garantias matemáticas de que existisse uma combinação linear a ser adicionada a E_6 a fim de obtermos $\tilde{E}_6$ com suas propriedades conformes especiais.

4. Utilizando a ajuda de um software computacional, obtivemos as transformações conformes dos oito candidatos à base linearmente independente em uma métrica conformalmente plana com o parâmetro σ dependente somente do tempo conforme. Neste caso, os coeficientes dos termos superficiais apresentaram-se com quatro indeterminações (3.54) [21]. Este resultado, embora particular, permitiu a continuidade do trabalho pois mostrou ser possível encontramos o termo topológico modificado mesmo que ainda em um caso especial de transformação conforme.

5. O resultado subsequente foi a derivação das transformações conforme dos oito termos superficiais para o caso da métrica geral em $6D$. Estes cálculos foram bastante complexos mas os resultados obtidos estavam de acordo com nossas expectativas. Os coeficientes dos termos superficiais revelaram-se com duas indeterminações além do fato de sete dos termos superficiais, cada um por sua vez, poderem ter coeficiente nulos sem que o operador conforme Δ_6, se modificasse (Cap. 4) na sua relação conforme com $\tilde{E}_6$. Tal operador, embora já conhecido na literatura, não fora obtido, até nossos resultados [22], através de sua relação com o termo topológico modificado. Vale destacar que aqui reside o maior êxito deste trabalho pois, como já apresentado no corpo da tese, o principal ingrediente da integração da anomalia $6D$ é obtido pela relação entre o operador conforme e o termo topológico modificado.

6. Apresentamos ainda um caso especial de combinações de lagrangeanas locais que devem ser adicionadas a ação para gerar os termos superficiais presentes na anomalia. Uma solução geral para este setor da anomalia $6D$ ainda está em aberto e é motivo de continuidade de nossa pesquisa [59].

De um modo geral, muitos resultados significativos foram agregados ao longo deste trabalho. Entre aqueles que certamente vieram no arrasto de todo o processo estão as propriedades conformes de vários objetos relacionados à curvatura em dimensões mais altas, o que permitiu fazermos analogias e/ou generalizações dos casos mais conhecidos em dimensões menores. Uma vez que a anomalia conforme é uma das principais fontes de nosso conhecimento sobres correções semiclássicas da ação gravitacional (ver, p. ex., [4, 9, 10, 26, 60]), torna-se muito útil termos uma melhor compreensão das propriedades conformes dos termos que a constituem. Neste contexto, um problema desafiador é estabelecer tais propriedades conformes dos invariantes topológicos e suas relações com operadores que atuam em escalares conformalmente inertes.

Até a nossa publicação [22], estas relações somente eram conhecidas para espaços bi e quadridimensionais. No entanto, não existia um entendimento real sobre as razões fundamentais pelas quais essas relações ocorriam em $D = 4$ e se havia, de fato, relações semelhantes para dimensões pares mais altas. Sobre este fato, seria muito interessante verificar a segunda conjectura formulada no capítulo 2 (ver também trabalho anterior [54] sobre o mesmo tema). Uma efetivação prática destas relações foi uma etapa necessária na integração da anomalia em $6D$, ou dimensões pares ainda maiores, e também ajudou a chegar à solução de uma das principais peças do quebra-cabeça matemático relacionado a anomalia. É importante ressaltar que a integração da anomalia requer não apenas operador conforme [27, 43] (ver também [61–65] para outras publicações sobre o assunto), mas também a relação entre operadores e estruturas topológicas, p. ex., expressa na forma (1.6). Este tipo de fórmula é extremamente importante para a integração da anomalia em $D = 2$ e $D = 4$ e assim a crença na conjectura 2 (cap. 2) representou um passo decisivo no sentido de se realizar o mesmo esquema em dimensões pares mais altas ($D = 6, 8, \cdots$).

Ainda a respeito desta convicção, sintetizada pelas relações (1.6) ou (2.38), podemos afirmar que a obtenção dos coeficientes (4.46), (4.50) ou (4.53), além do operador Δ_6 em (4.47), forneceu-nos os tijolos para a construção da parte não local de AEIA (1.13) em $D = 6$. Estas relações, juntamente com os já conhecidos exemplos em $D = 2, 4$, nos permitiram delinear certas conclusões gerais e discutir semelhanças e diferenças entre os novos resultados e os previamente conhecidos. Um dos pontos comuns é que a expressão da AEIA é exata para a métrica homogênea e isotrópica, onde o funcional S_c é irrelevante. Assumindo que o espaço-tempo tenha seis dimensões e que haja campos conformes sem massa no infravermelho distante, chegamos a exata solução para AEIA nesta categoria de métricas.

Qualitativamente, a estrutura de (1.11) e (1.13) é a mesma em todas as dimensões pares, mas a complexidade da solução aumenta com a dimensão. Na passagem de duas para quatro dimensões as principais complicações são a “constante"de integração e a presença de dois termos, conforme e topológico, em (1.1) que geram termos não locais na AEIA [5] - lembrando que em $D = 2$ somente o termo topológico $E_2 = R$ gera o termo não local da ação. Uma das consequências é que a ação induzida pode ser consistentemente escrita em uma forma covariante local apenas por meio de dois campos auxiliares [9,11,40], enquanto que em $D = 2$ apenas um campo é suficiente. Como visto no capítulo 1, o número de campos auxiliares permanece o mesmo em dimensões mais altas. Por sua vez, soluções tais como (4.46) ou (4.47) incluem uma novidade que são os parâmetros arbitrários ξ_1 e ξ_2. Uma possibilidade interessante é que a ambiguidade pode ser fixada pela imposição de condições de consistência [19, 48, 66] mas não há ainda garantias. Outra questão que pode ser levantada diz respeito a possíveis efeitos dos valores dos parâmetros arbitrários $\xi_{1,2}$ e seu significado em soluções de interesse.

Uma vez que a anomalia conforme é a mesma para qualquer $\xi_{1,2}$, a princípio, podemos simplesmente ignorar esta ambiguidade fixando algum valor particular para estes parâmetros. A diferença entre distintos valores pode ser sempre absorvida no funcional conforme S_c. A situação é tecnicamente semelhante àquela com a parte dependente de ψ em (1.13), a qual pode ser absorvida dentro da parte conforme. Entretanto, no caso dos termos ψ, isto seria uma ideia equivocada. Por exemplo, sem o segundo campo auxiliar não se pode classificar estados de vácuo na vizinhança dos buracos negros esfericamente simétricos [67–69]. Tal problema não ocorre para ondas gravitacionais, muito provavelmente porque todos os cálculos conhecidos foram feitos para fundos cosmológicos isotrópicos [70–75]. No que diz respeito aos parâmetros $\xi_{1,2}$ a questão é se sua escolha afeta ou não as soluções relevantes; esta questão permanece em aberto até que tais soluções sejam exploradas devidamente na ação obtida em (1.13).

Como já mencionamos no capítulo 4 e demonstramos nos Apêndices D a F, a equação (4.44) reduz o número de termos superficiais necessários para construirmos uma base completa destes termos em $6D$. Vamos discutir a importância desta fórmula num contexto geral.

A integração consistente e completa da anomalia em $6D$ requer vários resultados matemáticos os quais não são muito fáceis de se realizar, principalmente devido ao fato de os cálculos práticos em $6D$ serem essencialmente mais enredados do que aqueles em $4D$. Em primeiro lugar, precisamos da fórmula principal (1.4) que imediatamente produz a parte não local da ação induzida pela anomalia [5, 22]. A expressão formal geral para esta ação (1.11) para uma dimensão par arbitrária foi construída por nós [22], além de derivarmos uma relação explícita da fórmula chave (1.4) no caso $D = 6$. Assim, observando o expressão geral (1.11), podemos ver que a parte remanescente da ação efetiva está relacionada à integração dos termos com derivadas totais, caso em que expusemos uma situação particular exemplificada no capítulo 5.

Normalmente, a importância dos termos superficiais na anomalia é subestimada, já que se supõe que possam ser modificados ou eliminados pela adição de contratermos locais finitos. Tal adição é um procedimento matematicamente legal, porque a ação gravitacional de vácuo não é quantizada no contexto da teoria semiclássica. Portanto, mesmo que os termos não conformes locais não sejam necessários para a renormalização, pode-se adicioná-los sem alterar a estrutura geral da teoria quântica no espaço curvo.

Em alguns casos, tal adição pode ser bem justificada. O principal exemplo é a inflação de Starobinsky [70–72, 76] onde o termo R^2 com um coeficiente muito grande é necessário para proporcionar controle sobre as perturbações e, em geral, correspondência com os dados observacionais existentes. As tentativas de explicar a magnitude deste coeficiente a partir de argumentos da teoria quântica de campos estão atualmente em um nível rudimentar (ver, p. ex., [77]) e, assim, a introdução de um grande coeficiente para R^2 é um procedimento fenomenológico. Em geral, e especialmente em $6D$, não há dados observacionais que possam ser usados para fixar os coeficientes das derivadas totais. Portanto, a importância destes termos é, sem sombra de dúvidas, fundamental[1].

[1]Maiores argumentos relativos às ambiguidades relacionadas aos termos locais na ação induzida podem

Neste contexto, a fórmula que define a parte da ação efetiva oriunda dos termos de derivadas totais na anomalia é (1.9). Desta forma, a redução de oito para sete no número de derivadas totais Ξ_k aumenta consideravelmente as chances de encontrarmos uma solução desta equação, como foi exemplificado no capítulo 5 para um caso particular dos parâmetros indeterminados em $\tilde{E}_6$ e Δ_6. De uma perspectiva geral, seria interessante ter uma confirmação independente, nova e não trivial da possibilidade de integrarmos derivadas totais com os termos gravitacionais locais, de acordo com a eq.(1.4).

A última consideração diz respeito a possíveis aplicações da ação efetiva (1.11) e (1.13). Podemos acreditar que a forma explícita de ação efetiva de vácuo para campos conformes pode ser útil para a verificação dos cálculos relacionados à holografia e à correspondência AdS/CFT. Outra aplicação está relacionada à redução dimensional para $D = 4$; esperamos produzir uma ação quadridimensional diferente da que vem diretamente da integração da anomalia em $4D$ em analogia ao que foi obtido na passagem de $D = 4$ para $D = 2$ [67, 68]. Devido à universalidade do resultado, o cálculo de tal ação reduzida e o estudo de suas soluções fisicamente relevantes podem ser úteis na modelagem de testes experimentais e/ou observacionais a fim de comprovar a existência de dimensões extras.

ser encontrados em [41], onde podemos ver também a relação com as estruturas não locais no caso de massas quase nulas de campos quânticos.

Apêndices

A Algumas derivadas totais linearmente dependentes da base formada pelos oito Ξ's

Exemplos de derivadas totais dependentes da base definida em (3.1):

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \big(R^{\mu}{}_{\alpha\beta\lambda} R^{\nu\lambda\beta\alpha} \big) = \frac{1}{2}\Xi_5 \, , \tag{A.1}$$

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} \nabla_\nu R) = -\frac{1}{4} \Box R^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu (R R^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\Xi_4 + \Xi_8 \, , \tag{A.2}$$

$$\nabla_\alpha (R_{\mu\nu} \nabla^\alpha R^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Xi_3 \, , \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (R^\nu_\lambda \nabla_\nu R^{\mu\lambda}) &= \nabla_\mu \nabla_\nu (R^\mu_\lambda R^{\nu\lambda}) - \frac{1}{2} \nabla_\mu (R^{\mu\nu} \nabla_\nu R) \\ &= \frac{1}{8}\Xi_4 + \Xi_7 - \frac{1}{2}\Xi_8 \, , \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (R^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_\nu R_{\alpha\beta}) &= \nabla_\mu \nabla_\nu (R^{\mu\alpha\nu\beta} R_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \Box R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{8} \Box R^2 \\ &\quad + \nabla_\mu \nabla_\nu (R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu (R R^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\Xi_3 + \frac{1}{8}\Xi_4 + \Xi_6 + \Xi_7 - \frac{1}{2}\Xi_8 \, , \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla_\nu\Box R^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Box^2 R + \frac{1}{2}\Box R^2_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu\nabla_\nu(R^{\mu\alpha\nu\beta}R_{\alpha\beta}) - \frac{1}{4}\Box R^2 + \nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\Xi_1 + \frac{1}{2}\Xi_3 - \frac{1}{4}\Xi_4 - 2\Xi_6 + \Xi_8\,. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

B Transformação conforme de duas derivadas covariantes contraídas com tensor $(2,0)$ cuja transformação conforme seja $A^{\alpha\beta} = e^{-2k\sigma}\bar{A}^{\star\alpha\beta}$, $k \in \mathbb{Z}$

A receita para a transformação conforme de um objeto do tipo $\nabla_\alpha\nabla_\beta A^{\alpha\beta}$ em uma dimensão arbitrária D é aqui demonstrada. Deixamos para o leitor a simples tarefa de mostrar que as derivadas comutam mesmo que $A^{\alpha\beta}$ não seja simétrico. Inicialmente desenvolveremos a quantidade $\nabla_\beta A^{\alpha\beta}$, assim,

$$
\nabla_\beta A^{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_\beta(e^{-2k\sigma}\bar{A}^{\star\alpha\beta}) + e^{-2k\sigma}(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\bar{A}^{\star\lambda\beta} + \delta\Gamma^\beta_{\beta\lambda}\bar{A}^{\star\alpha\lambda}) \qquad \text{(B.1)}
$$

(para maiores detalhes sobre a notação $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}$ ver, p. ex., [37]). Na relação acima podemos substituir estas estruturas por

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} &= 2\delta^\alpha_{(\beta}\bar{\nabla}_{\lambda)}\sigma - \bar{g}_{\beta\lambda}\bar{\nabla}^\alpha\sigma \quad \text{e} \\
\delta\Gamma^\beta_{\beta\lambda} &= D\bar{\nabla}_\lambda\sigma\,,
\end{aligned} \qquad \text{(B.2)}
$$

deste modo, chegamos a

$$
\nabla_\beta A^{\alpha\beta} = e^{-2k\sigma}\big[\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{\star\alpha\beta} + (D-2k)\bar{A}^{\star\alpha\beta}\bar{\nabla}_\beta\sigma + 2\bar{A}^{\star(\alpha\beta)}\bar{\nabla}_\beta\sigma - \bar{A}^{\star\beta}_{\ \ \beta}\bar{\nabla}^\alpha\sigma\big]\,. \qquad \text{(B.3)}
$$

Atuando com a derivada ∇_α na expressão acima,

$$
\begin{aligned}
\nabla_\alpha\nabla_\beta A^{\alpha\beta} &= e^{-2k\sigma}\big[\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{\alpha\beta} + 2(D-2k+1)(\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{(\alpha\beta)})\bar{\nabla}_\alpha\sigma - (\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^\alpha_{\ \alpha})\bar{\nabla}^\beta\sigma + \\
&+ (D-2k+2)\bar{A}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\beta\bar{\nabla}_\alpha\sigma - \bar{A}^\alpha_{\ \alpha}\bar{\bar{\Box}}\sigma - (D-2k)\bar{A}^\alpha_{\ \alpha}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&+ (D-2k)(D-2k+2)\bar{A}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\sigma\bar{\nabla}_\beta\sigma\big]. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Para o caso particular $D = 2k$,

$$
\begin{aligned}
\nabla_\alpha\nabla_\beta A^{\alpha\beta} &= e^{-2k\sigma}\big[\bar{\nabla}_\alpha\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{\star\alpha\beta} + 2(\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{\star(\alpha\beta)})\bar{\nabla}_\alpha\sigma + 2\bar{A}^{\star\alpha\beta}\bar{\nabla}_\beta\bar{\nabla}_\alpha\sigma \\
&\quad -(\bar{\nabla}_\beta\bar{A}^{\star\alpha}_{\ \ \alpha})\bar{\nabla}^\beta\sigma - \bar{A}^{\star\alpha}_{\ \ \alpha}\bar{\Box}\sigma\big]. \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

C Transformação conforme do operador $\Box$ atuando em um escalar cuja transformação conforme seja $\varphi = e^{-2k\sigma}\bar{\varphi}^{\star}$, $k \in \mathbb{Z}$

Sabemos que $\Box$ atuando em um escalar se transforma tal que [37]

$$\Box = e^{-2\sigma}\left[\bar{\Box} + (D-2)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\right]. \tag{C.1}$$

A transformação de $\Box\varphi$ é, deste modo,

$$\Box\varphi = e^{-2\sigma}\left[\bar{\Box} + (D-2)\bar{\nabla}^{\mu}\sigma\bar{\nabla}_{\mu}\right]\left(e^{-2k\sigma}\bar{\varphi}^{\star}\right) \tag{C.2}$$

e, após algum trabalho algébrico, chegamos a

$$\begin{aligned}\Box\varphi &= e^{-2(k+1)\sigma}\big[\bar{\Box}\bar{\varphi}^{\star} - 2k\bar{\varphi}^{\star}\bar{\Box}\sigma + (D-4k-2)(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\varphi}^{\star})\bar{\nabla}^{\mu}\sigma \\ &\qquad -2k(D-2k-2)\bar{\varphi}^{\star}(\bar{\nabla}\sigma)^2\big].\end{aligned} \tag{C.3}$$

O caso de maior interesse neste trabalho é, obviamente, $D = 6$ e $k = 2$. Neste cenário,

$$\Box\varphi = e^{-6\sigma}\left[\bar{\Box}\bar{\varphi}^{\star} - 4(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\varphi}^{\star})\bar{\nabla}^{\mu}\sigma - 4\bar{\varphi}^{\star}\bar{\Box}\sigma\right]. \tag{C.4}$$

D Dependência linear entre a base formadas pelos $\Xi's$

No capítulo 3, apresentamos na eq. (3.1) as oito derivadas totais $6D$ acreditando serem elas linearmente independentes. Entretanto, demonstraremos a seguir que podemos obter uma relação de dependência linear entre sete das oito derivadas totais.

Para facilitar a demonstração, vamos renomear alguns objetos como se segue,

$$\begin{array}{lll}\Sigma_1 = \Box^2 R & \Sigma_2 = (\nabla_{\lambda}R_{\mu\nu\alpha\beta})^2 & \Sigma_3 = R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R^{\alpha\beta} \\ \Sigma_4 = R_{\mu\nu}R^{\mu\lambda\alpha\beta}R^{\nu}{}_{\lambda\alpha\beta} & \Sigma_5 = R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu} & \Sigma_6 = R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}R^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\tau}R^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} \\ \Sigma_7 = (\nabla_{\lambda}R_{\mu\nu})^2 & \Sigma_8 = R_{\mu\nu}\Box R^{\mu\nu} & \Sigma_9 = (\nabla_{\mu}R)^2 \\ \Sigma_{10} = R\Box R & \Sigma_{11} = (\nabla_{\alpha}R_{\mu\nu})\nabla^{\mu}R^{\nu\alpha} & \Sigma_{12} = R^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R \\ \Sigma_{13} = R_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} & \Sigma_{14} = R_{\mu\nu}R^{\mu\alpha}R^{\nu}_{\alpha}. & \end{array} \tag{D.1}$$

Desenvolvendo cada um dos $\Xi's$ em função dos objetos listados em (D.1):

(i)

$$\Box^2 R = \Sigma_1 \,. \tag{D.2}$$

(ii)

$$\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = 2(\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta})^2 + 2R_{\mu\nu\alpha\beta}\Box R^{\mu\nu\alpha\beta} \,. \tag{D.3}$$

O segundo termo do segundo membro da relação acima pode ser expandido como [34]

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta}\Box R^{\mu\nu\alpha\beta} &= 4R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\mu\nabla^\nu R^{\alpha\beta} + 2R_{\mu\nu}R^{\mu\lambda\alpha\beta}R^\nu{}_{\lambda\alpha\beta} \\ &\quad - R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}{}_{\mu\nu} - 4R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta R^\alpha{}_\lambda{}^\beta{}_\tau R^\lambda{}_\mu{}^\tau{}_\nu \,. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Assim,

$$\Box R^2_{\mu\nu\alpha\beta} = 2\Sigma_2 + 8\Sigma_3 + 4\Sigma_4 - 2\Sigma_5 - 8\Sigma_6 \,. \tag{D.5}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \Box R^2_{\mu\nu} &= 2(\nabla_\lambda R_{\mu\nu})^2 + 2R_{\mu\nu}\Box R^{\mu\nu} \\ &= 2\Sigma_7 + 2\Sigma_8 \,. \end{aligned} \tag{D.6}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \Box R^2 &= 2(\nabla_\lambda R)^2 + 2R\Box R \\ &= 2\Sigma_9 + 2\Sigma_{10} \,. \end{aligned} \tag{D.7}$$

(v)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}) &= \nabla_\mu\big[(\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})R^{\nu\lambda\alpha\beta} + R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\nabla_\nu R^{\nu\lambda\alpha\beta}\big] \\ &= \nabla_\mu\big[(\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})R^{\nu\lambda\alpha\beta} + R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} - R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\nabla^\beta R^{\lambda\alpha}\big] \\ &= \big(\nabla_\mu\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})R^{\nu\lambda\alpha\beta} + \big(\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})\nabla_\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\ &\quad + \big(\nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} + R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\nabla_\mu\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} \\ &\quad - \big(\nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\beta R^{\lambda\alpha} - R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\nabla_\mu\nabla^\beta R^{\lambda\alpha} \\ &= \big(\nabla_\mu\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})R^{\nu\lambda\alpha\beta} + \big(\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta})\nabla_\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\ &\quad + 2\big(\nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} + 2\Sigma_3 \,. \end{aligned} \tag{D.8}$$

O primeiro termo do segundo membro de (D.8) pode ser desenvolvido tal que

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_\mu\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= \big(\nabla_\nu\nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} + \big(\big[\nabla_\mu,\nabla_\nu\big]R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\
&= \big(\nabla_\nu\nabla_\alpha R_{\lambda\beta}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} - \big(\nabla_\nu\nabla_\beta R_{\lambda\alpha}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\
&\quad + R_{\kappa\nu}R^\kappa{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} - R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}R^\mu{}_{\kappa\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\
&\quad - R^\kappa{}_{\alpha\mu\nu}R^\mu{}_{\lambda\kappa\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} - R^\kappa{}_{\beta\mu\nu}R^\mu{}_{\lambda\alpha\kappa}R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\
&= 2\Sigma_3 + \Sigma_4 - R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}R^\mu{}_{\kappa\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} - 2R^\kappa{}_{\alpha\mu\nu}R^\mu{}_{\lambda\kappa\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}\,.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}R^\mu{}_{\kappa\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= R_{\kappa\lambda\mu\nu}R^{\mu\kappa}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\nu\lambda} \\
&= -R_{\kappa\nu\lambda\mu}R^{\mu\kappa}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\nu\lambda} - R_{\kappa\mu\nu\lambda}R^{\mu\kappa}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{D.10}$$

e fazendo $\nu \leftrightarrow \lambda$ no primeiro termo do segundo membro acima, chegamos a

$$\begin{aligned}
R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}R^\mu{}_{\kappa\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu}R^{\mu\kappa}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\lambda\nu} + \Sigma_5 \\
&= \frac{1}{2}\Sigma_5\,.
\end{aligned} \tag{D.11}$$

O último termo de (D.9) pode ser representado mais sutilmente por

$$\begin{aligned}
R^\kappa{}_{\alpha\mu\nu}R^\mu{}_{\lambda\kappa\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= R^\kappa{}_\alpha{}^\mu{}_\nu R_\mu{}^\lambda{}_\kappa{}^\beta R^\nu{}_\lambda{}^\alpha{}_\beta \\
&= R^\mu{}_\nu{}^\kappa{}_\alpha R^\nu{}_\lambda{}^\alpha{}_\beta R^\lambda{}_\mu{}^\beta{}_\kappa = \Sigma_6\,.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Por fim, (D.9) pode ser reescrita como

$$\big(\nabla_\mu\nabla_\nu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)R^{\nu\lambda\alpha\beta} = 2\Sigma_3 + \Sigma_4 - \frac{1}{2}\Sigma_5 - 2\Sigma_6\,. \tag{D.13}$$

O segundo termo do segundo membro de (D.8) pode ser desenvolvido de modo que

$$\big(\nabla_\nu R_{\mu\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} = -\big(\nabla_\lambda R_{\nu\mu\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} - \big(\nabla_\mu R_{\lambda\nu\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta}\,. \tag{D.14}$$

Fazendo a troca $\nu \leftrightarrow \lambda$ no primeiro termo do segundo membro acima

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_\nu R_{\mu\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} &= -\big(\nabla_\nu R_{\lambda\mu\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\lambda\nu\alpha\beta} - \big(\nabla_\mu R_{\lambda\nu\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} \\
&= -\big(\nabla_\nu R_{\mu\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} + \Sigma_2\,,
\end{aligned} \tag{D.15}$$

ou seja,

$$\big(\nabla_\nu R_{\mu\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\mu R^{\nu\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Sigma_2\,. \tag{D.16}$$

Utilizando a primeira das identidades reduzidas de Bianchi, podemos desenvolver o terceiro termo de (D.8) tal que

$$\begin{aligned}\big(\nabla_\mu R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}\big)\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} &= \big(\nabla_\alpha R_{\lambda\beta}\big)\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} - \big(\nabla_\beta R_{\lambda\alpha}\big)\nabla^\alpha R^{\lambda\beta} \\ &= \Sigma_7 - \Sigma_{11}\,. \end{aligned}\tag{D.17}$$

Substituindo (D.13), (D.16) e (D.17) em (D.8),

$$\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}R^{\nu\lambda\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\Sigma_2 + 4\Sigma_3 + \Sigma_4 - \frac{1}{2}\Sigma_5 - 2\Sigma_6 + 2\Sigma_7 - 2\Sigma_{11}\,. \tag{D.18}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) &= \nabla_\mu\big[(\nabla_\nu R_{\alpha\beta})R^{\mu\alpha\nu\beta} + R_{\alpha\beta}\nabla_\nu R^{\nu\beta\mu\alpha}\big] \\ &= \nabla_\mu\big[(\nabla_\nu R_{\alpha\beta})R^{\mu\alpha\nu\beta} + R_{\alpha\beta}\nabla^\mu R^{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha R^{\beta\mu}\big] \\ &= (\nabla_\mu\nabla_\nu R_{\alpha\beta})R^{\mu\alpha\nu\beta} + (\nabla_\nu R_{\alpha\beta})\nabla_\mu R^{\mu\alpha\nu\beta} + (\nabla_\mu R_{\alpha\beta})^2 \\ &\quad + R_{\alpha\beta}\Box R^{\alpha\beta} - (\nabla_\mu R_{\alpha\beta})\nabla^\alpha R^{\beta\mu} - R^\alpha_\beta\nabla_\mu\nabla_\alpha R^{\beta\mu} \\ &= \Sigma_3 + (\nabla_\nu R_{\alpha\beta})^2 - (\nabla_\nu R_{\alpha\beta})\nabla^\beta R^{\alpha\nu} + \Sigma_7 + \Sigma_8 - \Sigma_{11} \\ &\quad -\frac{1}{2}R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta R - R^\alpha_\beta\big[\nabla_\mu,\nabla_\alpha\big]R^{\beta\mu} \\ &= \Sigma_3 + 2\Sigma_7 + \Sigma_8 - 2\Sigma_{11} - \frac{1}{2}\Sigma_{12} - R^\alpha_\beta R^\beta{}_{\kappa\mu\alpha}R^{\kappa\mu} - R^\alpha_\beta R_{\kappa\alpha}R^{\beta\kappa}\end{aligned}$$

$$\nabla_\mu\nabla_\nu(R_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}) = \Sigma_3 + 2\Sigma_7 + \Sigma_8 - 2\Sigma_{11} - \frac{1}{2}\Sigma_{12} + \Sigma_{13} - \Sigma_{14}\,. \tag{D.19}$$

(vii)

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}) &= \nabla_\mu\big[(\nabla_\nu R^\mu_\alpha)R^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}R^\mu_\alpha\nabla^\alpha R\big] \\ &= (\nabla_\mu\nabla_\nu R^\mu_\alpha)R^{\nu\alpha} + (\nabla_\nu R^\mu_\alpha)\nabla_\mu R^{\nu\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{4}(\nabla_\alpha R)^2 + \frac{1}{2}R^\mu_\alpha\nabla_\mu\nabla^\alpha R \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_\nu\nabla_\alpha R)R^{\nu\alpha} + \Big(\big[\nabla_\mu,\nabla_\nu\big]R^\mu_\alpha\Big)R^{\nu\alpha} + \Sigma_{11} \\ &\quad + \frac{1}{4}\Sigma_9 + \frac{1}{2}\Sigma_{12} \\ &= \frac{1}{4}\Sigma_9 + \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + R_{\kappa\nu}R^{\kappa\alpha}R^\nu_\alpha + R^\alpha{}_{\kappa\mu\nu}R^{\mu\kappa}R^\nu_\alpha\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_\mu\nabla_\nu(R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha}) = \frac{1}{4}\Sigma_9 + \Sigma_{11} + \Sigma_{12} - \Sigma_{13} + \Sigma_{14}\,. \tag{D.20}$$

(viii)

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\nabla_\nu(RR^{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}R\Box R + (\nabla_\mu R)^2 + R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu R \\ &= \Sigma_9 + \frac{1}{2}\Sigma_{10} + \Sigma_{12}\,. \end{aligned}\tag{D.21}$$

Resolvendo as equações geradas pela relação

$$a\Xi_1 + b\Xi_2 + c\Xi_3 + d\Xi_4 + e\Xi_5 + f\Xi_6 + g\Xi_7 + h\Xi_8 \equiv 0\,, \tag{D.22}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &a = 0 \qquad && b = \beta \qquad && c = -4\beta \qquad && d = \beta \\ &e = -4\beta && f = 8\beta && g = 8\beta && h = -4\beta\,. \end{aligned}\tag{D.23}$$

Portanto, é válida a relação

$$\Xi_2 - 4\Xi_3 + \Xi_4 - 4\Xi_5 + 8\Xi_6 + 8\Xi_7 - 4\Xi_8 = 0\,. \tag{D.24}$$

E Abordagem alternativa para a dependência linear entre os elementos da base de termos superficiais Ξ_i em $6D$

Nossa pesquisa pela base de derivadas totais em $6D$ conduziu-nos, entre outras referências, ao trabalho [58], onde a identidade (4.44) foi usada para derivar outras relações entre as equações de movimento de ações com seis derivadas em $6D$. A forma como essa identidade foi obtida no trabalho mencionado, veio de uma consideração semelhante a abordada em [57] para o invariante de Gauss-Bonnet em $4D$. A relação pode ser obtida como uma identidade de Noether para a invariância por difeomorfismo da ação topológica correspondente (em algumas fórmulas evitaremos usar a notação condensada para a integral D-dimensional para enfatizar sua dimensão),

$$S_{GB}^{(D)} \;=\; \int d^D x\sqrt{-g}E_D, \tag{E.1}$$

ou seja,

$$\nabla_\mu\Big(\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\,S_{GB}^{(D)}\Big) \;=\; 0. \tag{E.2}$$

O termo de Gauss-Bonnet em $6D$ (2.30) pode ser apresentado na forma

$$E_6 = -8\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{L}_2 - 24\mathcal{L}_3 + 24\mathcal{L}_4 + 16\mathcal{L}_5 + 3\mathcal{L}_6 - 12\mathcal{L}_7 + \mathcal{L}_8, \tag{E.3}$$

onde os $\mathcal{L}_i$ são os definidos em (5.1). É interessante notar que E_6 como apresentado em (E.1) e (E.2) não admite uma generalização para uma dimensão arbitrária D, enquanto que em (E.3) a generalização não representa nenhum obstáculo. No que exporemos a seguir, assumiremos que E_6 equivale à expressão no *l.d.* de (E.3) quando o considerarmos em $D \neq 6$.

Levando em conta esta última observação e a nova notação e também combinando as equações (5.3) - (5.10) chegamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,g_{\mu\nu}\,\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^D x\sqrt{-g}E_6 \;&=\; \frac{D-6}{2}E_6 \\ -\;\; 3(D-5)\big(\Xi_2 - 4\Xi_3 + \Xi_4 - 4\Xi_5 + 8\Xi_6 + 8\Xi_7 - 4\Xi_8\big)&. \end{aligned}\tag{E.4}$$

O primeiro termo no *l.d.* da eq. (E.4) obviamente é nulo em $D = 6$. Por outro lado, o *l.e.* também desaparece em $D = 6$, pois, nesta dimensão específica, ele representa o traço da derivada variacional do termo topológico[2]. Nesse sentido, a relação (E.4) prova que o termo remanescente no *l.d.* também deve ser nulo em $D = 6$. No entanto, este termo é exatamente a identidade (4.44) a qual foi provada diretamente no Apêndice D. Vale ressaltar que a prova que lá apresentamos não depende da dimensão.

Através da identidade (4.44), obtemos a regra simples do traço da equação de movimento do termo em consideração,

$$\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int_x E_6 \;=\; \frac{D-6}{2}E_6, \tag{E.5}$$

[2]Podemos provar mesmo sem tomar o traço (ver, p. ex., [78]), mas tal prova requer a escolha de um sistema de coordenadas especial. Em coordenas gerais, esta equação não parece trivial, como foi discutido em [79–81].

que é perfeitamente consistente com a principal relação de integração da anomalia (1.4).

Fechando o tema, mencionamos ainda que há outra forma equivalente da identidade (4.44),

$$\Xi_2 - 4\Xi_3 + \Xi_4 - 4\Xi_5 + 8\Xi_6 + 8\Xi_7 - 4\Xi_8 \;=\; \frac{1}{4}\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}\nabla_\mu\nabla^\nu\big(R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\big), \quad \text{(E.6)}$$

onde (na assinatura euclideana)

$$\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi} \;=\; \epsilon^{\rho\mu\alpha\beta\lambda\tau}\epsilon_{\rho\nu\xi\eta\kappa\chi} \;=\; 5!\,\delta^{[\mu}_{\nu}\,\delta^{\alpha}_{\nu}\,\delta^{\beta}_{\eta}\,\delta^{\lambda}_{\kappa}\,\delta^{\tau]}_{\chi}\,. \quad \text{(E.7)}$$

A prova da relação

$$\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}\nabla_\mu\nabla^\nu(R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}) \equiv 0 \quad \text{(E.8)}$$

é encontrada no Apêndice F.

F Prova da relação (E.8)

Vamos denotar o objeto de nosso interesse Ω e desenvolver uma das derivadas,

$$\begin{aligned}\Omega &= \delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}\,\nabla_\mu\nabla^\nu\big(R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\big)\\ &= \delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}\;\nabla_\mu\big[R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\nabla^\nu R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta} + R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}\nabla^\nu R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\big].\end{aligned} \quad \text{(F.1)}$$

Usando a antissimetria do objeto (E.7) e a identidade de Bianchi, a última expressão torna-se

$$\begin{aligned}\Omega &= 2\nabla_\mu\big(\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\nabla^\nu R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}\big)\\ &= -2\nabla_\mu\Big[\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}\big(R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\nabla^\xi R^{\eta\nu}{}_{\alpha\beta} + R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\nabla^\eta R^{\nu\xi}{}_{\alpha\beta}\big)\Big].\end{aligned} \quad \text{(F.2)}$$

Uma vez mais, usando a antissimetria do objeto (E.7), chegamos a

$$\Omega \;=\; -\,4\nabla_\mu\big(\delta^{\mu\alpha\beta\lambda\tau}_{\nu\xi\eta\kappa\chi}R^{\kappa\chi}{}_{\lambda\tau}\nabla^\nu R^{\xi\eta}{}_{\alpha\beta}\big). \quad \text{(F.3)}$$

Comparando (F.2) e (F.3) podemos verificar que

$$\Omega \,=\, -\,2\Omega\,, \quad \text{(F.4)}$$

a qual é equivalente a eq. (E.8).

Vamos enfatizar que o análogo deste resultado pode ser encontrado em [57] para $4D$ e também pode ser encontrado em [58] para $6D$. A derivação dessa identidade em ambos os casos foi baseada na relação (E.2) que reflete a invariância por difeomorfismo da ação (E.1) com $D = 6$ e E_6 definidos como no *l.d.* da eq. (E.3). Por esta razão, a identidade é válida em qualquer dimensão D. Ao mesmo tempo, a mesma identidade pode ser também obtida em $D = 6$ como uma identidade de Noether da simetria conforme (E.5).

Referências Bibliográficas

[1] S. Coleman and R. Jackiw, *Why dilatation generators do not generate dilatations?*, Ann. Phys **67** (1971) 552. DOI: 10.1016/0003-4916(71)90153-9.

[2] D.M. Capper and M.J. Duff, *Trace Anomalies in Dimensional Regularization*, Nuovo Cimento **A23** (1974) 173. DOI: 10.1007/BF02748300.

[3] S. Ferrara and B. Zumino, *Transformation Properties of the Supercurrent*, Nuclear Physics **B87** (1975) 207. DOI: 10.1016/0550-3213(75)90063-2.

[4] M.J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387. DOI: 10.1088/0264-9381/11/6/004.

[5] S. Deser, M.J. Duff and C.J. Isham, *Nonlocal Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45. DOI: 10.1016/0550-3213(76)90480-6.

[6] M.J. Duff, *Observations On Conformal Anomalies*, Nucl. Phys. **B125** (1977) 334. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90410-2.

[7] S. Deser and A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions,* Phys. Lett. **B309** (1993) 279. DOI: 10.1016/0370-2693(93)90934-A.

[8] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing, Bristol, 1992).

[9] I.L. Shapiro, *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach* Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001. DOI: 10.1088/0264-9381/25/10/103001.

[10] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[11] I.L. Shapiro and A.G. Jacksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. **B324** (1994) 286. DOI: 10.1016/0370-2693(94)90195-3.

[12] J.A. de Barros and I.L. Shapiro, *Renormalization group study of the higher derivative conformal scalar model*, Phys. Lett. **B412** (1997) 242. DOI: 10.1016/S0370-2693(97)01020-4.

[13] S. Mauro and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action and Chern-Simons modification of general relativity*, Phys. Lett. **B746** (2015) 372. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.05.045.

[14] J. Erdmenger, *Conformally Covariant Differential Operators: Properties and Applications*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 2061-2084 . DOI: 10.1088/0264-9381/14/8/008.

[15] S. Paneitz, *A Quartic Conformally Covariant Differential Operator for Arbitrary Pseudo-Riemannian Manifolds*, MIT preprint, 1983; SIGMA **4** (2008) 036, DOI: 10.3842/SIGMA.2008.036

[16] A.M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, Phys. Lett. **B103** (1981) 207. DOI: 10.1016/0370-2693(81)90743-7.

[17] R.J. Riegert, *A Nonlocal Action for the Trace Anomaly*, Phys. Lett. **B134** (1984) 56. DOI: 10.1016/0370-2693(84)90983-3.

[18] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal Anomaly in Weyl Theory and Anomaly Free Superconformal Theories*, Phys. Lett. **B134** (1984) 187. DOI: 10.1016/0370-2693(84)90668-3.

[19] L. Bonora, P. Pasti and M. Bregola, *Weyl cocycles*, Class. Quant. Grav. **3** (1986) 635. DOI: 10.1088/0264-9381/3/4/018

[20] H. Osborn and A.C. Petkou, *Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions*, Annals Phys. **231** (1994) 311. DOI: 10.1006/aphy.1994.1045.

[21] F.M. Ferreira, I.L. Shapiro and P.M. Teixeira, *On the conformal properties of topological terms in even dimensions* Eur. Phys. J. Plus **131** (2016) 164. DOI: 10.1140/epjp/i2016-16164-9

[22] F.M. Ferreira and I.L. Shapiro, *Integration of trace anomaly in 6D*, Phys. Lett. **B772** (2017) 174. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.06.014

[23] Z. Komargodski, and A. Schwimmer, *On Renormalization Group Flows in Four Dimensions*, JHEP **1112** (2011) 099. DOI: 10.1007/JHEP12(2011)099.

[24] M.A. Luty, J. Polchinski and R. Rattazzi, *The a-theorem and the Asymptotics of 4D Quantum Field Theory*, JHEP **1301** (2013) 152. DOI: 10.1007/JHEP01(2013)152.

[25] Z. Komargodski, *The Constraints of Conformal Symmetry on RG Flows*, JHEP **1207** (2012) 069. DOI: 10.1007/JHEP07(2012)069.

[26] S. Deser, *Closed form effective conformal anomaly actions in $D \geqslant 4$*, Phys. Lett. **B479** (2000) 315. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00315-4.

[27] H. Osborn and A. Stergiou, *Structures on the Conformal Manifold in Six Dimensional Theories*, JHEP **1504** (2015) 157. DOI: 10.1007/JHEP04(2015)157.

[28] T. Arakelyan, D.R. Karakhanyan, R.P. Manvelyan, and R.L. Mkrtchyan, *Trace anomalies and cocycles of the Weyl group*, Phys. Lett. **B353** (1995) 52. DOI: 10.1142/S021773239600045X.

[29] K. Hamada, *Integrability and Scheme Independence of Even-Dimensional Quantum Geometry Effective Action*, Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 673. DOI: 10.1143/PTP.105.673.

[30] T. Maxfield and S. Sethi, *The Conformal Anomaly of M5-Branes*, JHEP **1206** (2012) 075. DOI: 10.1007/JHEP06(2012)075.

[31] F. Bastianelli, S. Frolov, and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly of (2,0) tensor multiplet in six-dimensions and AdS / CFT correspondence*, JHEP 0002 (2000) 013. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/02/013.

[32] R.R. Metsaev, *6d conformal gravity*, Journ. Phys. **A44** (2011) 175402.DOI: 10.1088/1751-8113/44/17/175402.

[33] H. Lü, Yi Pang and C.N. Pope, *Conformal gravity and extensions of critical gravity*, Phys. Rev. **D84** (2011) 064001. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.064001.

[34] Y. Décanini and A. Folacci, *Irreducible forms for the metric variations of the action terms of sixth-order gravity and approximated stress-energy tensor*, Class. Quant. Grav. **24**, (2007) 4777. DOI: 10.1088/0264-9381/24/18/014.

[35] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Asymptotic Freedom In Extended Conformal Supergravities*, Phys. Lett. **B110** (1982) 117. DOI: 10.1016/0370-2693(82)91018-8.

[36] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *One Loop Beta Function in Conformal Supergravities*, Nucl. Phys. **B203** (1982) 157. DOI: 10.1016/0550-3213(82)90481-3.

[37] D.F. Carneiro, E.A. Freiras, B. Gonçalves, A.G. de Lima and I.L. Shapiro, *On Useful Conformal Transformations In General Relativity*, Grav. and Cosm. **40** (2004) 305; gr-qc/0412113.

[38] G. Cusin, F.O. Salles and I.L. Shapiro, *Tensor instabilities at the end of the ΛCDM universe*, Phys. Rev. **D93** (2016) 044039. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.044039.

[39] A.O. Barvinsky, Yu.V. Gusev, G.A. Vilkovisky and V.V. Zhytnikov, *The One loop effective action and trace anomaly in four-dimensions*, Nucl. Phys. **B439** (1995) 561. DOI: 10.1016/0550-3213(94)00585-3.

[40] P. O. Mazur and E. Mottola, *Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies*, Phys. Rev. **D64** (2001) 104022. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.104022.

[41] M. Asorey, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class.Quant.Grav. **21** (2004) 163. DOI: 10.1088/0264-9381/21/1/011

[42] H. Lü, Yi Pang and C.N. Pope, *Black Holes in Six-dimensional Conformal Gravity*, Phys.Rev. **D87** (2013) no.10, 104013. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.104013

[43] T. Branson, *Differential Operators Canonically Associated to a Conformal Structure*, Math.Scand. **57** (1985) 293. DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12120.

[44] I.L. Shapiro, *Physical Aspects of the Space-time Torsion*, Phys. Rept. **357** (2002) 113. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00030-8.

[45] I. Chavel, *Riemannian Geometry - A Modern Introduction - 2nd ed.*, (Cambridge University Press, New York, 2006).

[46] K. Peeters, *A Field-theory motivated approach to symbolic computer algebra*, Comput. Phys. Comm. **176** (2007) 550. arXiv:cs/0608005.

[47] K. Peeters, *Introducing Cadabra: a symbolic computer algebra system for field theory problems*, (2018) arXiv:hep-th/0701238v3.

[48] B. Grinstein, A. Stergiou, D. Stone, *Consequences of Weyl Consistency Conditions*, JHEP **1311** (2013) 195. DOI: 10.1007/JHEP11(2013)195.

[49] A.F. Astaneh and S.N. Solodukhin, *The Wald entropy and 6d conformal anomaly*, Phys.Lett. **B749** (2015) 272.DOI: 10.1016/j.physletb.2015.07.077.

[50] C. Cordova, T.T. Dumitrescu and K. Intriligator, *Anomalies, renormalization group flows, and the a-theorem in six-dimensional (1,0) theories*, JHEP **1610** (2016) 080. DOI: 10.1007/JHEP10(2016)080.

[51] R.C. Myers and B. Robinson, *Black Holes in Quasi-topological Gravity*, JHEP **1008** (2010) 067. DOI: 10.1007/JHEP08(2010)067.

[52] H. Elvang, D.Z. Freedman, L.-Y. Hung, M. Kiermaier, R.C. Myers and S. Theisen, *On renormalization group flows and the a-theorem in 6d*, JHEP **1210** (2012) 011. DOI: 10.1007/JHEP10(2012)011

[53] Wolfram Research, *Mathematica, Version 9.0*, Champaign, IL (2012).

[54] D. Anselmi, *Quantum irreversibility in arbitrary dimension*, Nucl.Phys. **B567** (2000) 331. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00479-4.

[55] R. C. Henry, *Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole*, Astrophys.J. **535** (2000) 350. DOI: 10.1086/308819.

[56] F.M. Ferreira and I.L. Shapiro, *Basis of surface curvature-dependent terms in* $6D$, Phys. Rev. **D99**, (2019) 064032. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.064032.

[57] D.G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985)2656, DOI: 10.1103/PhysRevLett.55.2656.

[58] J. Oliva and S. Ray, *Classification of Six Derivative Lagrangians of Gravity and Static Spherically Symmetric Solutions*, Phys. Rev. **D82** (2010) 124030, DOI:10.1103/PhysRevD.82.124030.

[59] F.M. Ferreira e I.L.Shapiro, *Trabalho em progresso.*

[60] S. Deser, *Conformal anomalies: Recent progress*, Helv. Phys. Acta **69** (1996) no.4, 570. hep-th/9609138.

[61] T. P. Branson, *Conformally covariant equations on differential forms*, Comm. Part. Diff. Equations **7** (1982) 393. DOI:10.1080/03605308208820228.

[62] T. P. Branson, *Conformal transformation, conformal change, and conformal covariants*, Supp. Rend. Cir. Mat. Palermo, **II 21** (1989) 115.

[63] V. Wünsh, *On conformally invariant differential operators*, Math. Nahr. **129** (1986) 269. https://doi.org/10.1002/mana.19861290123.

[64] A.R. Gover and L.J. Peterson, *Conformally invariant powers of the Laplacian, Q-curvature and tractor calculus*, Comm. Math. Phys. **235** (2003) 339. DOI: 10.1007/s00220-002-0790-4.

[65] M. Grigoriev and A. Waldron, *Massive Higher Spins from BRST and Tractors*, Nucl. Phys. B **853** (2011) 291. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2011.08.004.

[66] F. Bastianelli, G. Cuoghi and L. Nocetti, *Consistency conditions and trace anomalies in six-dimensions*, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 793, DOI: 10.1088/0264-9381/18/5/303.

[67] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1494, DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1494.

[68] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Vacuum polarization in Schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions*, Nucl. Phys. **B559** (1999) 301, DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00424-1.

[69] P.R. Anderson, E. Mottola and R. Vaulin, *Stress Tensor from the Trace Anomaly in Reissner-Nordstrom Spacetimes*, Phys. Rev. **D76** (2007) 124028. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.124028.

[70] A.A. Starobinsky, *Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe*, JETP Lett. **30** (1979) 682; Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** (1979) 719.

[71] A.A. Starobinsky, *Evolution Of Small Excitation Of Isotropic Cosmological Models With One Loop Quantum Gravitation Corrections*, JETP Lett. **34** (1981) 438; Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 460.

[72] A.A. Starobinsky, *The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy*, Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.

[73] J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. **B597** (2001) 539; [Erratum-ibid. **602** (2001) 644]. DOI: 10.1016/S0550-3213(01)00138-9, 10.1016/S0550-3213(00)00739-2.

[74] S.W. Hawking, T. Hertog and H.S. Reall, *Trace anomaly driven inflation*, Phys. Rev. **D63** (2001) 083504. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.083504.

[75] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, F. de O. Salles and I.L. Shapiro, *Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections*, JCAP **02** (2012) 019. DOI: 10.1088/1475-7516/2012/02/019.

[76] A.A. Starobinsky, *A New type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. **B91** (1980) 99; Adv.Ser.Astrophys.Cosmol. **3** (1987) 130. DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.

[77] T. de Paula Netto, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation,* Eur. Phys. J. **C76** (2016) 544, DOI:10.1140/epjc/s10052-016-4390-4.

[78] I.L. Shapiro, *Primer in Tensor Analysis and Relativity,* (Springer, NY, to be published).

[79] D.M. Capper and D. Kimber, *An Ambiguity in One Loop Quantum Gravity*, J. Phys. **A13** (1980) 3671. DOI: 10.1088/0305-4470/13/12/016.

[80] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Conformal Quantum Gravity with the Gauss-Bonnet term*, Phys. Rev. **D70** (2004) 044024. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.044024.

[81] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term*, Phys. Rev. **D71** (2005) 064005. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.064005.