Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)

Flávia Rocha Rodrigues

Proposta de ensino de poliedros utilizando materiais concretos e embalagens

Juiz de Fora

2019

Flávia Rocha Rodrigues

Proposta de ensino de poliedros utilizando materiais concretos e embalagens

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rodrigues, Flávia R.
Proposta de ensino de poliedros utilizando materiais concretos e embalagens / Flávia Rocha Rodrigues. – 2019.
42 f. : il.

Orientadora: Valéria Mattos da Rosa
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), 2019.

1. Percepção Espacial. 2. Formas Do Cotidiano. 3. Embalagem. I. Rosa, Valéria Mattos da. II. Título.

Flávia Rocha Rodrigues

Proposta de ensino de poliedros utilizando materiais concretos e embalagens

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12 de setembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Professora. Dra. Valéria Mattos da Rosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Jair Koiller
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Luis Alberto D'Afonseca
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por ter me proporcionado força e serenidade nos momentos difíceis dessa caminhada.

À minha família, pela parceria e entendimento de muitos momentos de ausência.

À minha orientadora, Doutora Valéria Mattos da Rosa, pelo apoio durante a construção desse trabalho.

À minha amiga, Sheila, grande incentivadora nesse retorno depois de tantos anos a vida acadêmica.

Ao meu amigo, Eduardo, responsável pela minha aprovação na proficiência e também pelo abstract.

Aos colegas do PROFMAT, pelos momentos agradáveis e de grandes trocas vividos.

Aos meus alunos, causa maior desse projeto.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, gratidão é a palavra que resume todo meu sentimento.

RESUMO

Esse trabalho traz uma proposta de desenvolvimento da percepção espacial através da construção e/ou reconstrução dos conceitos que envolvem formas do cotidiano semelhantes às formas geométricas tridimensionais, identificando seus elementos, planificando essas formas, confeccionando prismas, relacionando áreas de embalagens com a área do material utilizado para confecção das planificações e calculando volumes.

Além disso, também descrevemos o resultado positivo quando aplicamos o que estamos propondo a uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual de Juiz de Fora – MG. Para esse fim, fizemos o uso de figuras de diversas formas para confecção de cartazes, construímos com cartolina prismas e trabalhamos com embalagens em formatos dos sólidos geométricos.

Palavras-chave: Percepção espacial. Formas do Cotidiano. Embalagem.

ABSTRACT

This work brings a proposal for the development of spatial perception through the construction and / or reconstruction of concepts that involve everyday shapes similar to three-dimensional geometric shapes, identifying their elements, planning these shapes, making prisms, relating packaging areas to area of material used for making planifications and calculating volumes.

In addition, we also described the positive result when we apply what we are proposing to a second level high school class in a public school in Juiz de Fora - MG. To this end, we used figures of various shapes to make posters, built prism using paperboard and we worked with packaging in the shapes of geometric solids.

Keywords: Spatial perception, Everyday forms , Package.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pirâmides do Egito 10
Figura 2 – Diedro e ângulo diédrico 13
Figura 3 – Triedro Tri-retângulo 13
Figura 4 – Elementos de um poliedro 14
Figura 5 – Poliedro Não Convexo e Poliedro Convexo 15
Figura 6 – Poliedro não convexo onde não vale a relação de Euller 15
Figura 7 – poliedros regulares 16
Figura 8 – Diagonais de um cubo 17
Figura 9 – Elementos de um Prisma 17
Figura 10 – Diversos tipos de Prisma 18
Figura 11 – Paralelepípedo retângulo e sua diagonal 19
Figura 12 – Cubo ou Hexaedro regular e sua diagonal 20
Figura 13 – Elementos de uma pirâmide regular 21
Figura 14 – Diferentes tipos de pirâmides 22
Figura 15 – Tetraedro regular 23
Figura 16 – Octaedro regular 24
Figura 17 – Elementos de um cilindro circular reto e cilindro oblíquo 25
Figura 18 – Planificação do cilindro circular reto 25
Figura 19 – Elementos do cone circular reto e cone oblíquo 26
Figura 20 – Planificação do cone circular reto 27
Figura 21 – Elementos da esfera 27
Figura 22 – Relação entre o raio da esfera e o raio de sua secção 28
Figura 23 – Resolução feita por um dos alunos 30
Figura 24 – Planificação de uma embalagem 32
Figura 25 – Formas da Natureza 34
Figura 26 – Formas da Arquitetura e Artes 34
Figura 27 – Formas do cotidiano 35
Figura 28 – Embalagens 36
Figura 29 – Embalagens Planificadas 37
Figura 30 – Esculturas 38
Figura 31 – Foto da pirâmide 39
Figura 32 – Foto da sua planificação 40

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

1.1 JUSTIFICATIVA 8

1.2 OBJETIVOS 9

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO 9

2 EMBASAMENTO TEÓRICO 10

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS 10

2.2 CONCEITOS BÁSICOS E ABORDAGENS DA GEOMETRIA ESPACIAL NA ESCOLA 12

2.3 POLIEDROS 14

2.3.1 PRISMAS 17

2.3.2 PIRÂMIDES 20

2.3.3 Tetraedro Regular: 22

2.3.4 Octaedro Regular: 23

2.4 CILINDROS CIRCULARES RETOS 24

2.4.1 **Relações para os cilindros circulares retos:** 25

2.5 CONES CIRCULARES RETOS 25

2.5.1 **Relações nos Cones Circulares Retos:** 26

2.6 ESFERAS 27

2.6.1 **Relações na esfera:** 27

3 A PROPOSTA METODOLÓGICA 29

3.1 O USO DE MATERIAL CONCRETO 29

3.2 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE POLIEDROS 29

3.2.1 Desenvolvimento da Atividades 30

3.2.2 Relatório das Atividades 33

4 CONCLUSÃO 41

REFERÊNCIAS 42

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

Nestes mais de 20 anos de experiência como professora do Ensino Médio, venho percebendo a dificuldade do aluno em abstrair e fazer uma leitura, ou mesmo representar, formas tridimensionais no plano do caderno e/ou visualizá-las no quadro negro.

O processo de ensino-aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio ainda encontra dificuldades muito grandes devido a chegada dos alunos na etapa final do Ensino Básico sem que tenham consolidado sua "visão espacial", apesar de desde o 3^0 ano do Ensino Fundamental serem apresentadas formas geométricas bem como suas construções.

Nos anos iniciais o aluno começa reconhecer as formas tridimensionais, mas há uma "quebra" desse aprendizado nos anos finais do Ensino Fundamental. Pouco, ou nada, é visto de Geometria Espacial, sendo que o aluno basicamente aprende a usar fórmulas de uma forma decorada para cálculos de áreas de figuras planas e não há uma correlação destas as formas geométricas que cercam o mundo do aluno. Quando o aluno chega ao Ensino Médio, novamente é "bombardeado" por fórmulas, muitas vezes para ele sem sentido, para o estudo da Geometria tridimensional.

Tomo como exemplo o estudo da pirâmide, quando é muito comum os alunos não diferenciarem a medida da altura H deste sólido da medida da altura h de um triângulo que compõe a sua face. As fórmulas, sem o entendimento e a visualização do sólido geométrico, lhe parecem uma "sopa de letrinhas".

Uma das habilidades que deveria ser atendida segundo a BNCC já no final do 6^0 ano é a de: "quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial" (MEC, 2017), mas não é isso o que tenho visto acontecer.

Outro problema que identifico é o fato do estudante se ver sozinho e distante de sua realidade fazendo com que o processo ensino-aprendizagem se torne penoso. Portanto é necessário a realização de atividades significativas e feitas de forma coletiva. Segundo D'Ambrosio (1996):

> "... → REALIDADE informa INDIVÍDUO que processa e executa uma AÇÃO que modifica a REALIDADE que informa INDIVÍDUO → ... e bilhões de indivíduos de outras espécies com comportamento próprio, realizando um ciclo vital semelhante, todos incessantemente contribuindo com uma parcela para modificar a realidade".(D'AMBROSIO, 1996, p.)

1.2 OBJETIVOS

Verificando portanto essa defasagem na obtenção de certas habilidades, como a de visualização espacial, a proposta de ensino é trabalhar com as formas geométricas, alvo da Geometria Espacial do Ensino Médio, correlacionando-as com formas da natureza, do cotidiano, da arquitetura e das artes.

Através da manipulação de embalagens diversas, pretendemos levar os alunos a identificar nelas os principais elementos geométricos, como quais os polígonos estão na lateral e quais estão na base. Então planificá-las levando ao entendimento através do concreto que sua superfície nada mais é que um a composição de formas planas e finalmente fazer cálculos de áreas dessas superfícies. Por fim, comparar e estabelecer relações entre a área total do objeto e a área do material utilizado para confecção das planificações.

Acreditamos que uso do modelo físico é motivador e um facilitador para a compreensão da representação tridimensional e resolução de situações problemas que envolvam esse tipo de abstração. Dessa forma será possível atingir os objetivos propostos.

Buscamos propiciar que o aluno atinja pelo menos parte da competência EM13MAT309 descrita na BNCC para o ensino médio:

> "Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados"

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo a seguir, apresentaremos os aspectos históricos, os conceitos básicos e abordagens da Geometria Espacial que servirão como embasamento para os professores leitores. No Capítulo 3, relataremos nossa proposta pedagógica, falando um pouco do uso do material concreto, apresentando o desenvolvimento e o relatório das atividades desenvolvidas com os alunos ao longo da pesquisa. Finalizando, o Capítulo 4 trará a conclusão e resultado do trabalho desenvolvido.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Segundo Boyer (1974), as informações pré-históricas são interpretadas com base nos poucos artefatos e documentos remanescentes, já que a maioria dessas informações se perderam no decorrer dos tempos.

Os homens pré-históricos, que viveram do começo dos tempos até 3500 a.C., precisavam de abrigo e ferramentas para sua sobrevivência. A partir dessas necessidades básicas os povos primitivos elaboravam um conhecimento empírico de Geometria.

As pirâmides construídas no deserto pelos egípcios Figura [1], por volta de 2700 a.C., são os maiores exemplares de sólidos geométricos da antiguidade.

Figura 1 – Pirâmides do Egito

Fonte: <https://curtindotudoo.files.wordpress.com/2013/07/egito-pirc3a2mides-curiosidades1.jpg>acesso dia 16/07/2019

Os povos do Antigo Egito (3100 a.C. a 30 a.C.) viviam à margem do rio Nilo para que fossem capazes de praticar a agricultura. Lá as terras eram férteis devido à produção de um limo por seu transbordamento anual. Mas esses transbordamentos também eram responsáveis pela destruição das demarcações dos lotes de terra que o rei Sesórtris dividia igualmente e dava aos egípcios agricultores. Como solução do problema, o rei criou o "côvado"– uma unidade de medida que era a distância da ponta do seu dedo médio ao seu cotovelo – essa medida era reproduzida em cordas e marcadas com nós. Os estiradores de cordas, nome dado aos agrimensores da época, ficavam encarregados de refazer as demarcações perdidasdurante as cheias do Nilo. Devido essa atribuição de delimitar terras, os egípcios foram descobrindo e desenvolvendo princípios relativos as linhas, ângulos e figuras.

Os babilônios (2100 a.C.) e os egípcios desenvolveram seus conceitos geométricos através do raciocínio indutivo, pois eram povos observadores e experimentadores. Esses povos conheciam os cálculos de algumas áreas e o teorema de Pitágoras e ficavam restritos às necessidades práticas como delimitar terrenos, comparar áreas e projetar suas construções. Tais conhecimentos ainda não eram desenvolvidos como ciência.

A partir de 600 a.C., na Grécia, a Matemática deixa de ser vista como conhecimento empírico e passa ser visualizada como ciência. Tales de Mileto (624-548 a.C.) conseguiu muitas informações sobre Geometria e Astronomia com os egípcios e transformou esses conhecimentos em teoria dedutiva, tornando-a uma ciência. Ou seja, uma afirmação mais complexa sempre pode ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples. Seu interesse era apenas teórico, procurava por demonstrações rigorosas das leis acerca do espaço que governavam aplicações práticas de Geometria. Diógenes e Laércio e depois Plínio e Plutarco relatam que Tales mediu as pirâmides do Egito, utilizando suas sombras, analisando o comprimento da projeção delas no chão, no mesmo momento em que a projeção de uma estaca na vertical era igual a sua altura.

Os Pitagóricos, que foram uma sociedade secreta, com fins religiosos e filosóficos, fundada por Pitágoras de Santos (570- 500 a.C.) enfatizaram os elementos da Aritmética e Geometria utilizada no Egito e Mesopotâmia.

A Matemática Grega sofre grandes modificações, aproximadamente, 400 a.C., quando Platão se interessou em especial pela Geometria, onde evidenciou a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas. Ele fundou sua academia em Atenas, onde guiava e inspirava o desenvolvimento da Matemática, ficando conhecido como "O criador de Matemáticos". Boyer relata também que talvez tenha sido na Sicília 388 a.C. que Platão soube dos cinco sólidos regulares, que eram associados a elementos cósmicos e que a veneração dos Pitagóricos pelo dodecaedro regular tenha sido o queo levou a considerá-lo como um símbolo do universo.

Com a morte de Alexandre, o Grande, em 323 a.C. a Grécia sofreu grandes mudanças políticas e culturais, mas este país não deixou de ser o detentor do saber matemático. No império de Ptolomeu I, Euclides foi chamado para ensinar numa escola recém criada e deu continuidade ao ensino da Geometria como ciência dedutiva. Ele se utilizou de postulados para formular leis rigorosas e absolutas e demonstrar suas leis geométricas. Sua obra – "Os Elementos – é conhecida até nossos dias e traz na sua introdução a Matemática Elementar. Essa obra está dividida em treze livros, dos quais os seis primeiros são sobre Geometria Plana Elementar. O que mostra a importância dada por ele na formalização desse conteúdo.

Já o décimo contém trinta e nove proposições sobre Geometria em Terceira Dimensão, onde Euclides, apud Boyer (1974), define como sólido "aquilo que tem comprimento, largura e espessura", dessas as quatro últimas proposições são sobre quatro sólidos regulares, nas quais o Tetraedro não faz parte, por conta de uma definição de pirâmide feita anteriormente. O último livro é exclusivamente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares. De acordo com Eves (2004), "Euclides produziu sua obra memorável, Os Elementos, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega"(EVES, 2004, p. 12)

Na Geometria Espacial, ninguém se interessou mais pelos Sólidos que Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.). Boyer cita dois trabalhos de Geometria Espacial atribuídos a Arquimedes: "Sobre a esfera e cilindro" e "Sobre os cones e esferoides".

Avançando mais na História da Matemática chegamos ao final do século XX, onde David Hilbert iniciou o tratamento da Geometria com o ponto, aresta e o plano. No lugar dos cinco postulados de Euclides, Hilbert formulou vinte e um postulados que ficaram conhecidos como axiomas de Hilbert. Nesses axiomas, ficavam enfatizados que não se deve assumir propriedades, além das mencionadas, dos termos não definidos na Geometria.

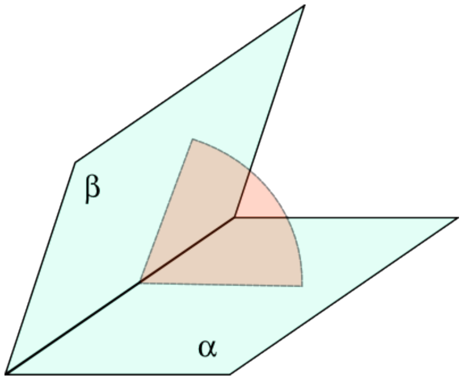
Depois da obra de Hilbert outros axiomas foram apresentados por outros matemáticos, fazendo com que o caráter dedutivo e formal ficasse estabelecido para a Geometria.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS E ABORDAGENS DA GEOMETRIA ESPACIAL NA ESCOLA

A maioria dos objetos que conhecemos possui três dimensões: comprimento, altura e largura. É a partir dessa concordância que passamos estudar Geometria na escola. Inicialmente, na Geometria de Posição, o Ponto, a Reta, o Plano e posições relativas entre eles são conceituados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. As ideias de ponto e reta são mostrados facilmente no quadro negro. Para o ponto o professor faz uma pequena marcação com o giz, já a reta é representada como a reunião de vários pontos que podem ser aumentados infinitamente. O conceito de semiplano é facilmente introduzido aos estudantes mostrando a eles, como exemplo, as paredes da sala de aula. E o encontro de duas paredes pode ser usado como a ideia de um diedro, que é importante na construção das superfícies a serem estudadas.

Definimos ângulo diedro ou diedro ou ângulo diédrico como a reunião de dois semiplanos de mesma origem, não contidos num mesmo plano" (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 80). Como podemos ver na Figura [2], os semi-planos α e β formam um diedro e na parte sombreada temos o ângulo diédrico.

Figura 2 – Diedro e ângulo diédrico



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Diedro>

Na junção de três semiplanos com ponto comum conceituamos o triedro, que para melhor entendimento, utilizamos um caso particular que é o triedro tri retângulo. Uma atividade simples, que pode ser proposta para os alunos ainda no Ensino Fundamental é a construção de um triedro, usando papelão e tintas para colorir conforme mostra a Figura [3]. Dessa forma eles têm uma visualização imediata da ideia dos diedros e triedros e das primeiras noções de posição entre retas e planos.

Figura 3 – Triedro Tri-retângulo

Fonte: <http://seddemas.blogspot.com/2010/12/triedros.html>

Apenas no Ensino Médio os alunos retomam o contato com a Geometria Espacial, onde eles vão estudar as superfícies fechadas e suas propriedades. Destacamos aquelas tradicionalmente estudas.

2.3 POLIEDROS

"Definimos uma superfície poliédrica limitada convexa como a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

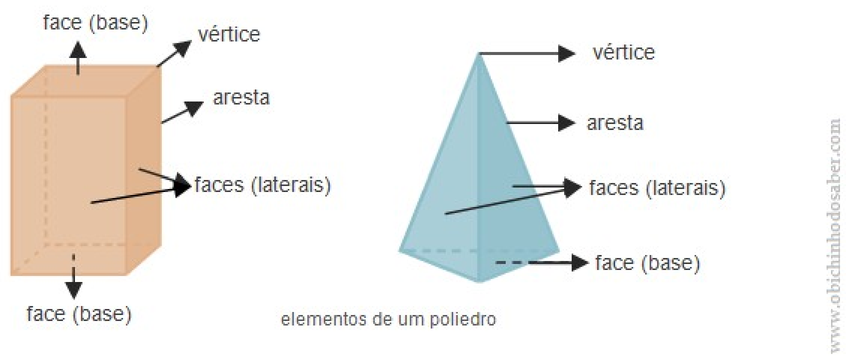
b) cada lado do polígono não está em mais que dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;

d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade)."(DOLCE; POMPEO, 2005, p. 123).

Na Figura [4] temos exemplos e os elementos de um poliedro como são expostos em livros didáticos.

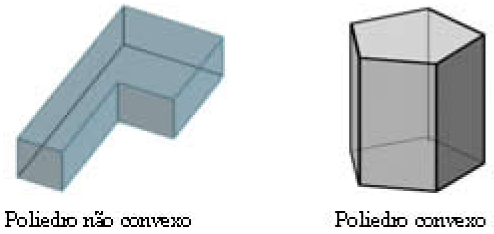
Figura 4 – Elementos de um poliedro



Fonte: <https://www.obichinhodosaber.com/matematica-5%C2%BA-i-solidos-geometricos-2-poliedros-e-nao-poliedros/>

Contribuindo na classificação dos poliedros em convexos e não convexos temos Lima (2009) que diz "Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior deste poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos."Como podemos ver em dois exemplos na Figura [5].

Figura 5 – Poliedro Não Convexo e Poliedro Convexo



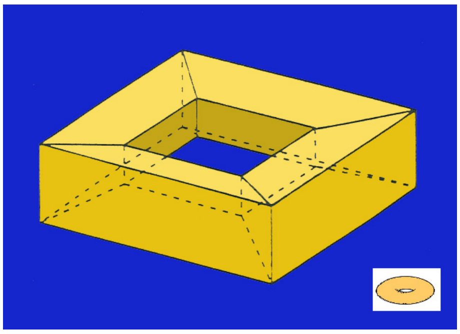
Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poliedros.htm>

No estudo dos poliedros convexos temos a Fórmula de Euler, que nos diz que podemos relacionar o número de seus vértices V, faces F e arestas A pela equação

$$V + F = A + 2.$$

As demonstrações da relação são apresentadas por Filho (1983) e corrigida ou adaptada por Lima (2009). É válido ressaltar que a relação de Euler é válida para poliedros convexos, mas, para os poliedros não convexos, ela pode ou não ser válida. Veja, por exemplo, o poliedro da Figura [6].

Figura 6 – Poliedro não convexo onde não vale a relação de Euller



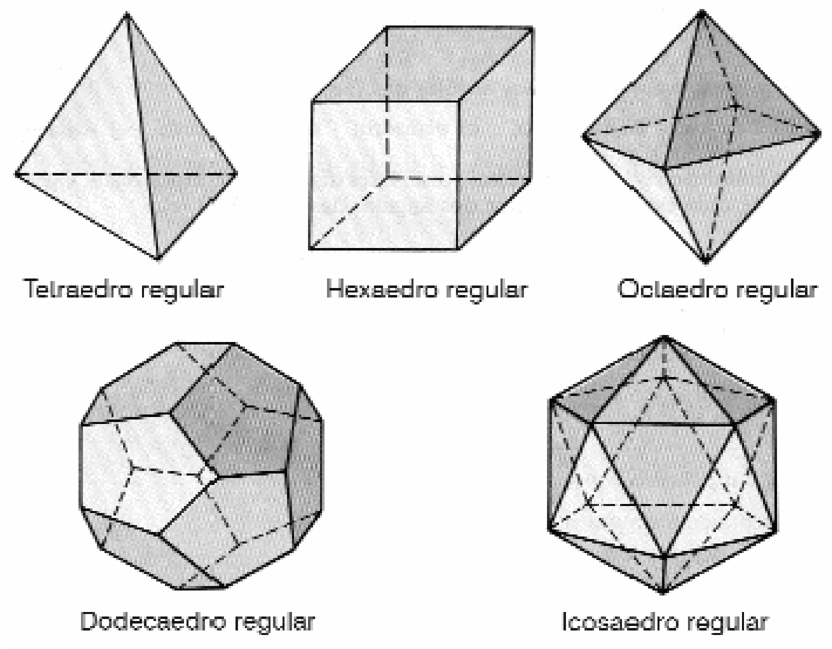
Fonte: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html>

A conclusão apresentada na Relação/Fórmula de Euler foi uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). É válido ressaltar que um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, contém resultados a partir dos quais se poderia obter a Fórmula de Euler (LIMA, 1991, p. 69).

Podemos também classificar os poliedro em regulares ou não regulares. Dizemos que um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Tais poliedros são conhecidos como poliedros de Platão (LIMA, 1991).

Sabemos também, que só existem cinco poliedros regulares. São eles: Tetraedro Regular, Hexaedro Regular, Dodecaedro Regular e Icosaedro Regular. (Figura [7])

Figura 7 – poliedros regulares

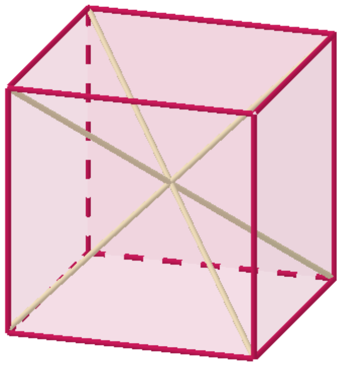


Fonte: <http://claudiomir1.xpg.uol.com.br/pp/pregulares.html>

Além das arestas, outros segmentos de reta relacionados aos poliedros são muito importante. Definimos então a diagonal de um poliedor como sendo todo segmento de reta que une dois vértices não situados numa mesma face (Figura [**??**]).

Podemos calcular o número de diagonais de um poliedor convexo D usando a combinação do número de vértices V tomados dois a dois C_V^2 (para encontrar todas as possíveis ligações entre dois vértices do poliedro) e em seguida excluímos os segmentos que representam ligações entre vértices da mesma face (arestas e as diagonais das faces). Esse número é mostrado na equação $D = C_V^2 - A - F \cdot D_f$, onde A é o número de arestas, F é o número de faces e D_f é o número das diagonais de cada face.

Figura 8 – Diagonais de um cubo

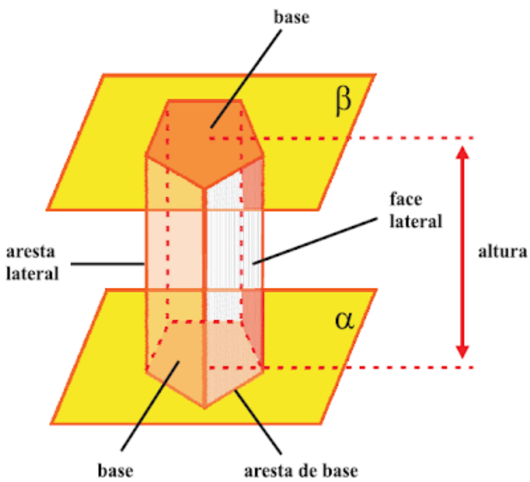


Fonte: Elaborado pela própria autora

2.3.1 PRISMAS

Sejam dados dois polígonos, situados em planos paralelos α e β e tais que as retas entre um vértice do polígono contido no plano α e um vértice do polígono contido no plano β sejam também paralelas. Então, como podemos ver na Figura [9], os quadriláteros formados entre esses planos são paralelogramos e os polígonos contidos nos planos paralelos são congruentes. A partir dessa vizualização podemos definir "o prisma de bases nos planos α e β como a porção do espaço, delimitada pelos polígonos contidos nesses planos e pelos paralelogramos especificados anteriomente." (NETO, 2013, p. 297). Também na Figura [9] podemos ver os elementos de um prisma que são as faces, os vértices e as arestas.

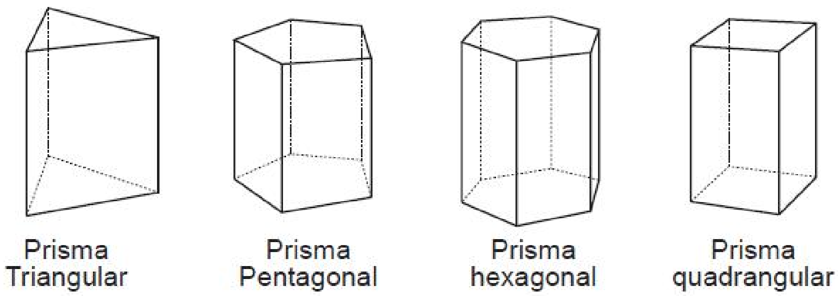
Figura 9 – Elementos de um Prisma



Fonte: <http://defrentecomamatematica.blogspot.com/2012/10/geometria-espacial.html>

Os prismas são classificados de acordo com os polígonos das bases, ou seja, com o número de arestas da base, como podemos ver nos exemplos da Figura [10].

Figura 10 – Diversos tipos de Prisma



Fonte: http://matematicajw.blogspot.com/p/blog-page_7.html

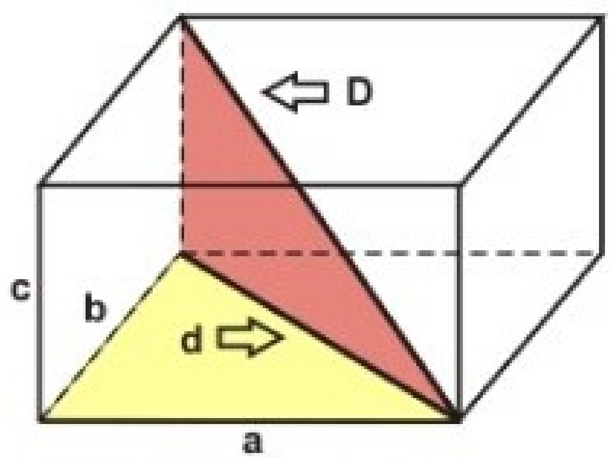
Além dessa classificação quanto à base, podemos classificar os prismas em retos ou oblíquos e também em regulares ou não regulares. Como no Ensino Médio trabalhamos apenas com os prismas retos e com a maioria de prismas regulares, destacamos suas definições:

- *Prisma reto* é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.
- *Prisma regular*: É o prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Com o conhecimento da área da base do prisma A_B e da sua altura H podemos calcular seu volume V e chegar a $V = A_B\, H$. A área total A_T é conseguida conhecendo a área de cada face lateral, cuja soma nos dá a área lateral do prisma A_L, e a área da base A_B de forma a termos $A_T = A_L + 2A_B$.

Um prisma especial é o *Paralelepípedo Retângulo* onde todas as faces são retângulos (como na Figura [11]).

Figura 11 – Paralelepípedo retângulo e sua diagonal



Fonte: <http://polmatesp.blogspot.com/2013/04/diagonais-de-um-paralelepipedo-reto.html>

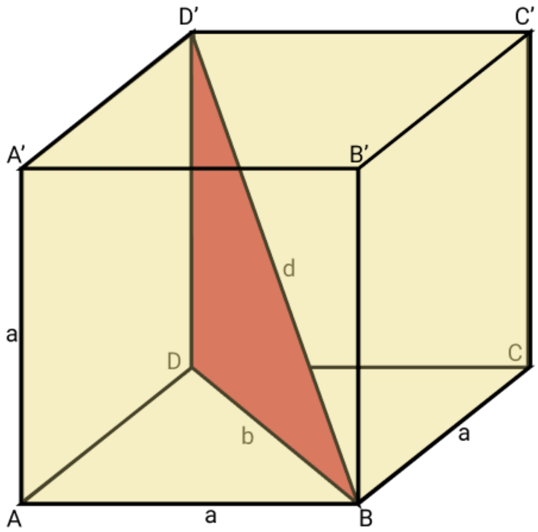
Sua área total A_T, seu volume V e o comprimento das suas diagonais D (que são iguais) são dados de forma simples. Usando as medidas descritas na Figura [11] teremos:

- $A_T = 2ab + 2bc + 2ac$;
- $V = a\,b\,c$;
- $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

cujo cálculo provém do teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo destacado na Figura [11].

E como um caso particular do paralelepípedo retângular temos o *Cubo* que é um prisma cujas faces são quadradas e idênticas (Figura [12]).

Figura 12 – Cubo ou Hexaedro regular e sua diagonal



Fonte: <https://matematicabasica.net/area-do-cubo/>

E neste caso as medidas anteriores se tornam:

- $A_T = 6\,a^2$;
- $V = a^3$;
- $D = a\sqrt{3}$,

onde a é a aresta do cubo como visto no Figura [12].

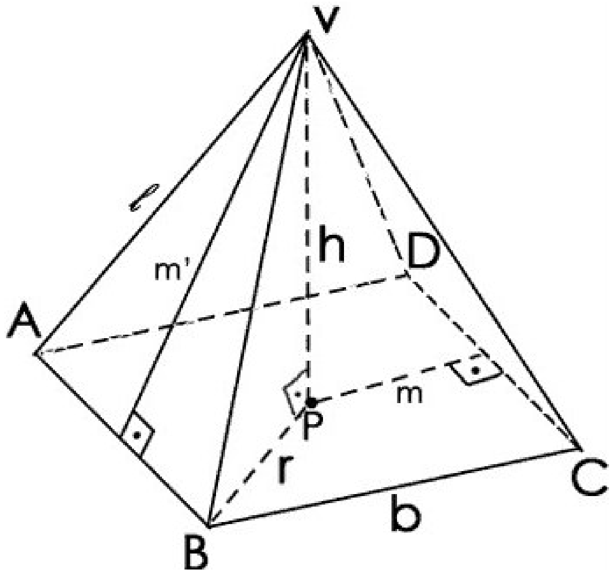
2.3.2 PIRÂMIDES

Outros exemplos de poliedros estudados no Ensino Médio são as piramides. Sejam "um polígono convexo B e um ponto V não pertencente ao plano desse polígono, definimos a pirâmide de vértice V e base B, como a porção do espaço, delimitada por B e os triângulos formados pelo vértice e os lados de B ", (Figura [13]) (NETO, 2013, p. 297).

Em especial temos a pirâmide regular que é aquela cuja base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre a base é um ponto localizado no centro do polígono da base, fazendo com que as arestas laterais tenham o mesmo comprimento e as faces laterais sejam triângulos isósceles congruêntes.

Na Figura [13] podemos ver os elementos de uma pirâmide regular:

Figura 13 – Elementos de uma pirâmide regular



Fonte: <https://comocalcular.com.br/matematica/piramides/> acesso dia 16/07/2019

Além das arestas da base (b) e laterais (l), do vértice (V) e da altura (h) da pirâmide, os outros elementos assinalados na figura que causam confusão aos estudantes são:

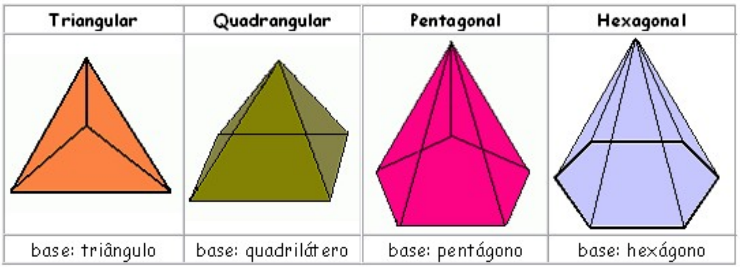
- o apótema da pirâmide regular (m') que é a altura do triângulo da face lateral em relação ao lado que corresponde a aresta da base,
- o apótema da base (m), que é a distância do centro do polígono da base até o ponto médio do lado desse polígono (aresta da base),
- e r, que é a distancia do centro do polígono da base ao vértice desse polígono que também pode ser descrito como o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.

Como já dito, no Ensino Médio, estudamos apenas as pirâmides regulares, o que facilita os cálculos dos elementos dessas pirâmides. Então as relações entre esses elementos são dadas como se segue:

- $h^2 + r^2 = l^2$;
- $m^2 + h^2 = (m')^2$;
- $(m')^2 + (\frac{b}{2})^2 = l^2$

As pirâmides são nomeadas de acordo com o polígono da base, onde as bases podem ser quaisquer polígonos regulares como podemos ver na Figura [14].

Figura 14 – Diferentes tipos de pirâmides



Fonte: <http://matematicanapontadolapis.blogspot.com/2009/11/piramides.html> acesso em 16/07/2019

No caso de uma pirâmide, calculamos se volume V e sua área total A_T como se segue:

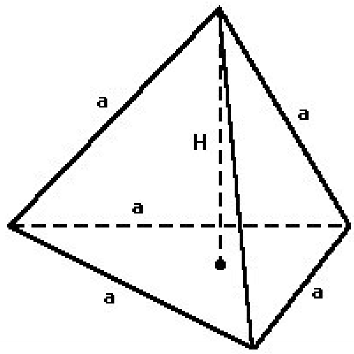
- $V = \dfrac{A_B \times h}{3}$;
- $A_T = A_B + A_L$.

Assim como o cubo (hexaedro regular) é um prisma de grande importância, outros dois poliedros regulares são bastante utilizados no decorrer do ensino de geometria espacial, são eles: o tetraedro regular, que pode ser classificado como uma pirâmide triangular regular e o octaedro regular que pode ser seccionado em duas pirâmides quadrangulares regulares unidas pelas bases. Vamos estudá-los mais detalhadamente:

2.3.3 Tetraedro Regular:

Este é um poliedro regular que possui quatro faces triangulares (equiláteras) e iguais como podemos ver na Figura [15].

Figura 15 – Tetraedro regular



Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/746421> acesso dia 16/07/2019

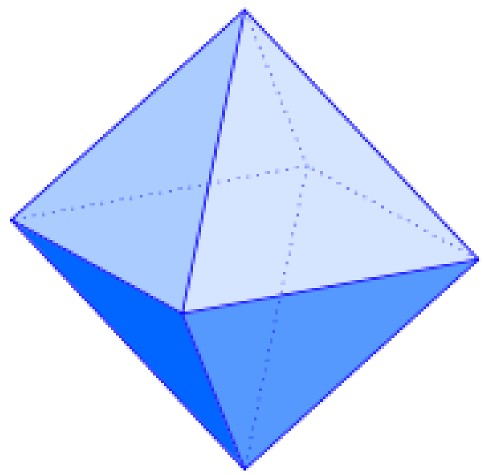
Seja a o comprimento da aresta do tetraedro, calculamos sua área total A_T e seu volume V como se segue:

- $A_T = a^2\sqrt{3}$, obtido pela soma das áreas de todos os triângulos equiláteros das faces que compõe suas faces e que possuem área $A_F = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
- e considerando a altura $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, o valor de V é dado por $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$, obtido pela terça parte do produto da área da base (triângulo equilátero de lado a) pela altura H, obtida pela aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos apótemas e a altura na Figura [13].

2.3.4 Octaedro Regular:

Este é um poliedro regular que possui oito faces triangulares (equiláteras) e iguais (Figura [16]).

Figura 16 – Octaedro regular



Fonte: <https://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mide_cuadrada#mediaviewer/File:Euclid_Oc> acesso em 16/07/2019

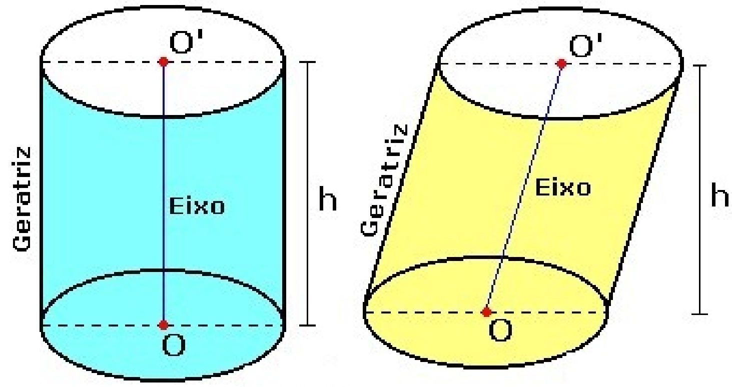
O cálculo da área total A_T e do volume V do octoedro são dados por:

- $A_T = 2\,a^2\sqrt{3}$, que é obtida pela soma das áreas dos oito triângulos equiláteros das faces de lado a;
- $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$, que é obtido pela soma dos volumes das pirâmides quadrangulares oriundas da secção do octaedro, onde a altura das pirâmides, é metade da diagonal do octaedro $(\dfrac{a\sqrt{2}}{2})$.

2.4 CILINDROS CIRCULARES RETOS

Continuando o estudo das superfícies, chegamos aos cilindros. Dadas uma curva C contida no plano α e a reta r que intercepta α em único ponto, definimos a superfície cilíndrica S de diretriz C e geratriz d (a reta d sendo paralela à reta r) como a superfície gerada pelo deslocamento da reta d ao londo de C se mantendo paralela à reta r. Os cilindros a serem estudados são superfícies fechadas limitadas por dois planos paralelos e uma superfície cilíndrica. Um cilindro circular reto é aquele onde sua curva diretriz C é uma circunferência e a reta geratriz r é perpendicular ao plano que contém C. Podemos ver exemplos de cilindro circulares e seus elementos na Figura [17].

Figura 17 – Elementos de um cilindro circular reto e cilindro oblíquo

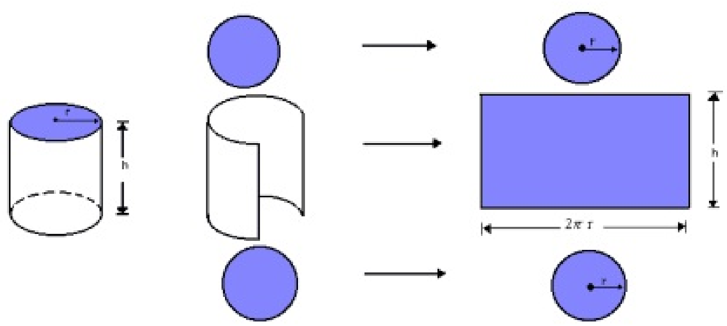


Fonte: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/cilindro/cilindro.htm> acesso em 16/07/2019

2.4.1 Relações para os cilindros circulares retos:

O volume de um cilindro é dado por $V = A_B\, h = r^2\, h$, onde r é raio da base do cilindro e h a sua altura. Sua área total pode ser calculada da seguinte forma: $A_T = 2A_B + A_L = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$, onde a área lateral é obtida através da planificação da superfície cilíndrica, transformando-a num retângulo de base igual ao comprimento (perímetro) da circunferência da base do cilindro e altura igual a altura do cilindro, conforme mostra a Figura [18] a seguir:

Figura 18 – Planificação do cilindro circular reto

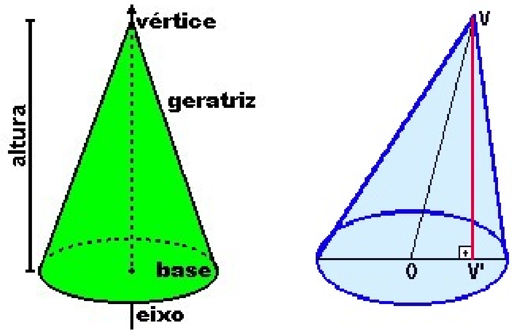


Fonte: <http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial16.php> acesso em 16/07/2019

2.5 CONES CIRCULARES RETOS

Dados uma curva C contida no plano α e um ponto V que não pertence à α, definimos a superfície cônica S de diretriz C e geratriz g (a reta g passa por V e umponto de C) como a superfície gerada pelo deslocamento da reta g ao longo de C se mantendo fixa no ponto V. Os cones a serem estudados são superfícies fechadas limitadas por um plano e uma superfície cônica. Um cone circular reto é aquele onde sua curva diretriz C é uma circunferência e a reta passando por V e o centro de C é perpendicular ao plano α. Podemos ver exemplos de cones circulares e seus elementos na Figura [19].

Figura 19 – Elementos do cone circular reto e cone oblíquo



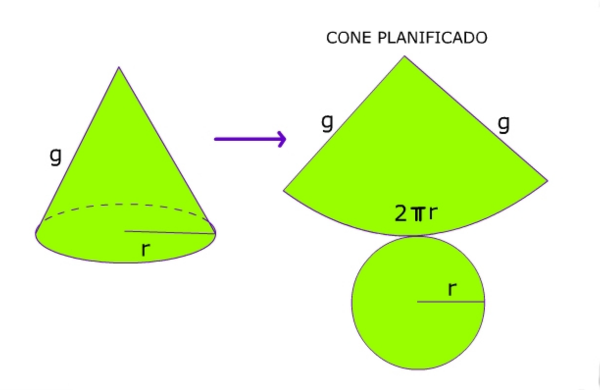
Fonte: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/cone/cone.htm> acesso em 16/07/2019

2.5.1 Relações nos Cones Circulares Retos:

O volume de um cone é dado por $V = \dfrac{1}{3}A_B\,h = \dfrac{1}{3}r^2\,h$, onde r é raio da base do cone e h a sua altura. Esta altura pode ser calculada através de uma relação fundamental, pois relaciona os principais elementos do cone: altura, raio da base e geratriz. Temos então $r^2 + h^2 = g^2$, decorrente aplicação do teorema de Pitágoras visualizado na Figura [19].

Sua área total pode ser calculada da seguinte forma: $A_T = 2A_B + A_L = 2\pi\,r^2 + \pi\,r\,g$. Diferente das pirâmides, onde temos a variação dos polígonos das bases, o cone circular reto possui sua base sendo um círculo e a sua lateral também fixa, sendo planificada em um setor circular de raio igual a geratriz desse cone, conforme mostra a Figura [20]:

Figura 20 – Planificação do cone circular reto



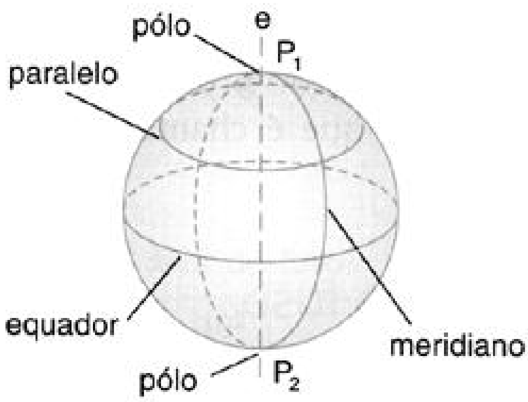
Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/calculo-area-cone.htm> acesso em 16/07/2019

A demonstração do cálculo da área lateral do cone, dada por $\pi \cdot r \cdot g$, pode ser vista em (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 238).

2.6 ESFERAS

Por fim temos as esferas, que podem ser deffinidas como o lugar geométrico dos pontos no espaço, equidistantes de um ponto fixo O chamado centro. Na Figura [21] vemos alguns dos elementos tradicionais de uma esfera.

Figura 21 – Elementos da esfera

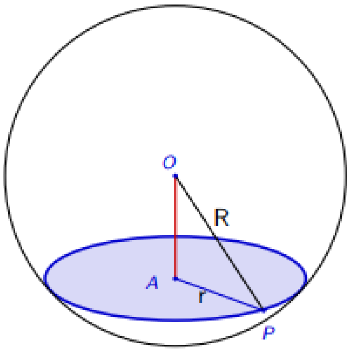


Fonte: <https://www.colegioweb.com.br/esfera/conceito-de-esfera.html> acesso em 16/07/2019

2.6.1 **Relações na esfera:**

Ao seccionarmos uma esfera por um plano que está a uma distância d do seu centro O, obtemos uma circunferência de raio r e centro A, conforme indica a Figura [22]:

Figura 22 – Relação entre o raio da esfera e o raio de sua secção



Fonte: <http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA13/2014/unidade18-2.pdf> acesso em 16/07/2019

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação entre r, d e R:

$$d^2 + r^2 = R^2,$$

onde$R$ é o raio da esfera, o volume V é dado por $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$, e sua área A pode ser calculada por $A = 4\pi R^2$. Essas expressões podem ser calculadoas através de uma simples integração dupla.

3 A PROPOSTA METODOLÓGICA

3.1 O USO DE MATERIAL CONCRETO

A dificuldade em visualizar formas do espaço trazidas apenas em representações no plano, como no livro didático e na lousa tornam a Geometria Espacial desinteressante e de difícil entendimento da aplicabilidade de suas fórmulas para cálculos de áreas e volumes.

Ventura e Vicente (2010) afirmam que “a busca por uma alternativa de tornar o ensino da Geometria mais atrativo e significativo para o aluno, se caracteriza como de fundamental importância, pois a aplicabilidade dos conteúdos dessa área em sala de aula e principalmente, na solução de problemas em situações reais do cotidiano dos estudantes, como por exemplo, utilizando-se embalagens, ... , pode ser um modelo alternativo e concreto para sua abordagem, apresentando além dos conceitos de Geometria, o desenvolvimento de outros conceitos como: sistemas de medidas, entre outros.”

O trabalho com material concreto, confeccionado pelo aluno ou a utilização de objetos prontos, será importante ferramenta para que se desenvolva a “visão espacial”, além de possibilitar a contextualização da Geometria. O aluno poderá relacionar o seu cotidiano com conceitos apresentados na escola. Essa proposta de ensino vem como mais uma alternativa para trabalhar esses conceitos, como por exemplo, o uso de embalagens existentes no mercado como meio concreto e significativo para estruturação das formas geométricas do espaço.

A proposta vislumbra a busca por formas cotidianas naturais ou modificadas pelo homem de acordo com suas necessidades. Formas essas que se assemelham com os sólidos geométricos dados no conteúdo escolar.

É necessário que o processo ensino aprendizagem de Geometria seja significativo. Segundo Fonseca, Lopes e Barbosa (2002): “É possível e desejável, todavia, que o argumento de utilização da Geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar permita e desencadei o reconhecimento de que sua importância ultrapasse esse seu uso imediato para ligar-se a aspectos mais formativos” (FONSECA; LOPES; BARBOSA, 2002, p. 93).

A utilização do material concreto e familiar ao aluno vem também no sentido de enriquecer o ensino do conteúdo programático, Geometria Espacial, do segundo ano do Ensino Médio.

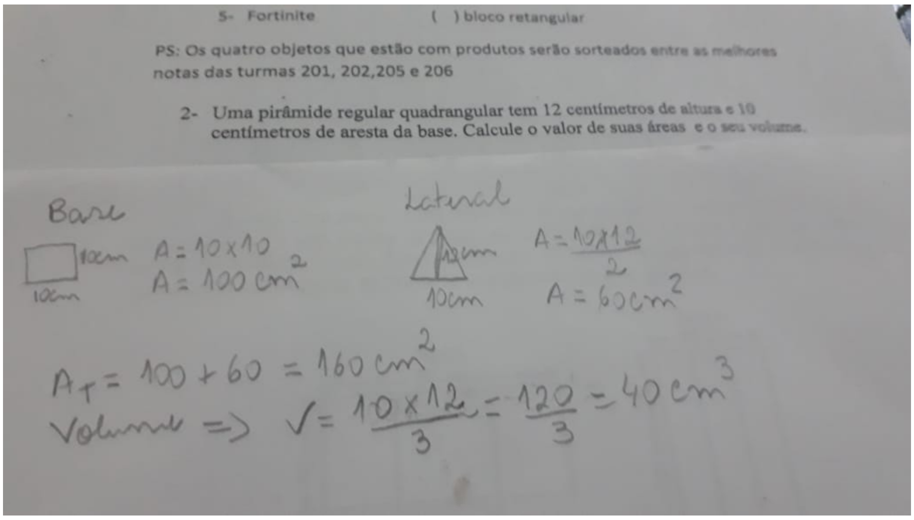
3.2 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE POLIEDROS

A seguir apresento as atividades que elaborei e apliquei em minha aula, numa turma do segundo ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual de Juiz de Fora.

Motivada pelo problema de visualização dos poliedros, recorrente entre os alunos do

Ensino Médio, propus avaliação diagnóstica através de um problema clássico de pirâmide, no qual solicitei a área total da superfície sendo dadas a aresta da base e a altura da pirâmide. Pude constatar que alguns alunos nem tentaram fazer, outros poucos acertaram e a maioria fez a confusão entre a altura da face lateral e a altura da pirâmide.

Figura 23 – Resolução feita por um dos alunos



Fonte: Elaborado pela própria autora

A partir deste diagnóstico foram realizadas algumas atividades com a turma.

3.2.1 Desenvolvimento da Atividades

Foram aplicadas quatro atividades.

Primeira Atividade – Formas no mundo

Essa atividade deve ser dada ao iniciar o conteúdo de Poliedros.

- HABILIDADE A SER DESENVOLVIDA: Identificação dos sólidos geométricos no dia a dia.
- PRÉ-REQUISITOS: Nenhum.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos (2 aulas).
- RECURSOS: Figuras e fotos retiradas de revistas, jornais e panfletos.
- ORGANIZAÇÃO: Grupos de até 10 alunos. A quantidade de grupos deve ser um número múltiplo de três, visto que serão pesquisadas formas inspiradas na natureza, no cotidiano e na arquitetura e artes.

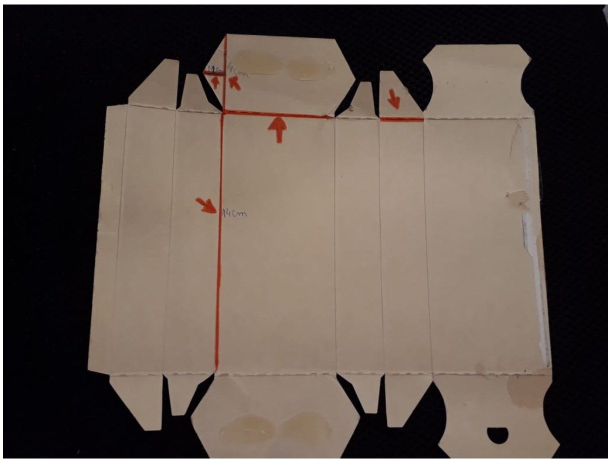
- OBJETIVOS:
  - Reconhecer os sólidos geométricos.
  - Estabelecer comparações dos sólidos geométricos com objetos do dia a dia.
- METODOLOGIA: Buscar nos periódicos formas da natureza, cotidiano e arquitetura que assemelham-se aos sólidos geométricos.

Segunda Atividade – Desconstruindo embalagens

Depois de trabalhada a teoria de prismas deve-se propor essa atividade.

- HABILIDADE A SER DESENVOLVIDA: Identificação dos elementos e cálculo de área e volume de um prisma.
- PRÉ-REQUISITOS: Cálculo de área de figuras planas.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos (4 aulas).
- RECURSOS: Embalagens.
- ORGANIZAÇÃO: Individual.
- OBJETIVOS:
  - Identificar os elementos de um prisma.
  - Calcular a área da superfície poliédrica.
  - Calcular o volume do prisma.
  - Planificar a figura tridimensional.
- METODOLOGIA: Uso das embalagens para identificação de vértices, arestas, faces e altura. Tomadas de medidas pertinentes nessas embalagens para cálculo de volume. Planificação das embalagens para cálculo de áreas.

Figura 24 – Planificação de uma embalagem



Fonte: Elaborado pela própria autora

Terceira Atividade – Escultura com prismas

É uma atividade feita parcialmente como tarefa de casa e vem reforçar o conteúdo de prismas. Portanto deve ser proposta em seguida a segunda atividade.

- HABILIDADE A SER DESENVOLVIDA: Associação de gastos de material com cálculos de áreas e criação artística a partir de sólidos geométricos.
- PRÉ-REQUISITOS: Cálculo de áreas de polígonos.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos (1 aula) em sala de aula depois de montado e decorados os prismas como dever de casa.
- RECURSOS: Cartolina, tinta e qualquer outro produto de decoração.
- ORGANIZAÇÃO: Grupos.
- OBJETIVOS:
  - Calcular a área da superfície poliédrica.
  - Montar prismas.
  - Criar uma obra de arte com prismas.
- METODOLOGIA: Uso de moldes de prismas planificados para sua construção espacial e união desses prismas na formação de uma escultura.

Quarta Atividade – Conhecendo a pirâmide

Essa atividade pode ser dada como introdução ao conteúdo de pirâmide.

- HABILIDADES A SER DESENVOLVIDA:
  - Comparação entre a quantidade de material em uma forma plana (folha de papel) com a quantidade em uma forma tridimensional (pirâmide).
  - Observação e diferenciação de alturas em um triângulo (face da pirâmide) e numa pirâmide.
- PRÉ-REQUISITOS: Cálculo de área de figuras planas.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos (2 aulas).
- RECURSOS: Embalagem em forma de pirâmide.
- ORGANIZAÇÃO: Coletivo (classe toda).
- OBJETIVOS:
  - Diferenciar medidas tomadas em figuras planas e figuras espaciais.
  - Calcular a área da superfície poliédrica.
  - Comparar áreas em polígonos distintos (um polígono único com a planificação de uma pirâmide).
- METODOLOGIA: Uso de embalagem em forma piramidal para percepção da diferença da altura desse sólido com a altura de uma de suas faces e o uso de uma folha de papel para comparação com a quantidade de material utilizado na confecção daquela pirâmide.

3.2.2 Relatório das Atividades

Atividade 1

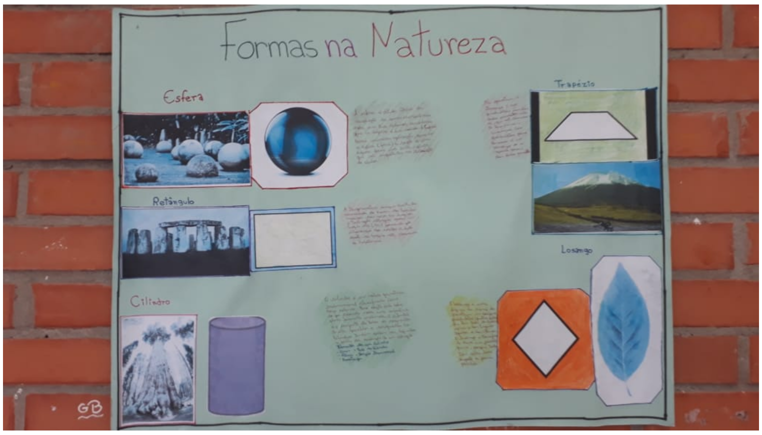
A classe foi separada em três grupos para confecção de cartazes onde cada grupo montou seus cartazes com figuras que relacionavam os sólidos geométricos com respectivas formas da natureza, do cotidiano e da arquitetura e artes.

Essa atividade teve como intuito a aproximação dos alunos com os sólidos geométricos. Eles puderam vivenciar que esses sólidos são parte integrante de suas vidas.

Os alunos trouxeram fotos, figuras, objetos e dentro da sala montaram cartazes relacionando pessoas, objetos e construções, artísticas e arquitetônicas aos poliedros e corpos redondos.

O grupo que ficou com as formas da natureza, fez comparações entre partes do corpo humano, frutas, troncos de árvores e alvéolos de abelhas com o cilindro, a esfera, prismas hexagonais entre outros.

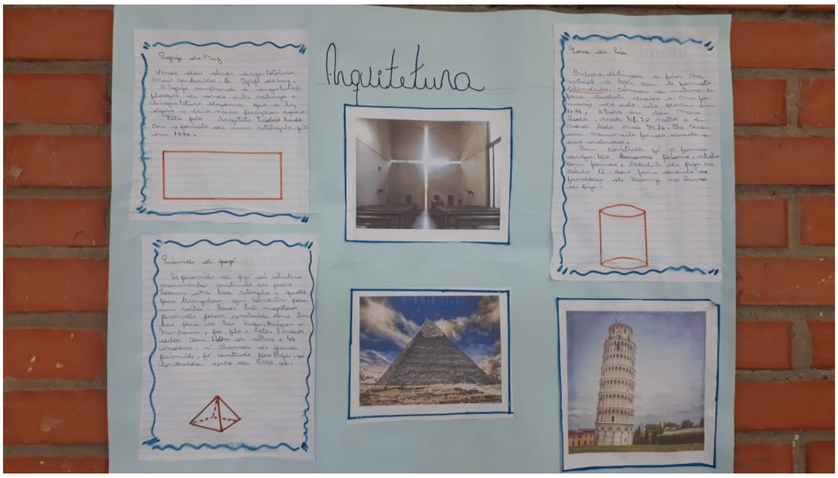
Figura 25 – Formas da Natureza



Fonte: Elaborado pela própria autora

O grupo das formas da arquitetura e artes trouxe edificações, telhados onde os compararam aos prismas de bases retangulares e triangulares. Trouxeram também pinturas do Cubismo e as compararam com os poliedros.

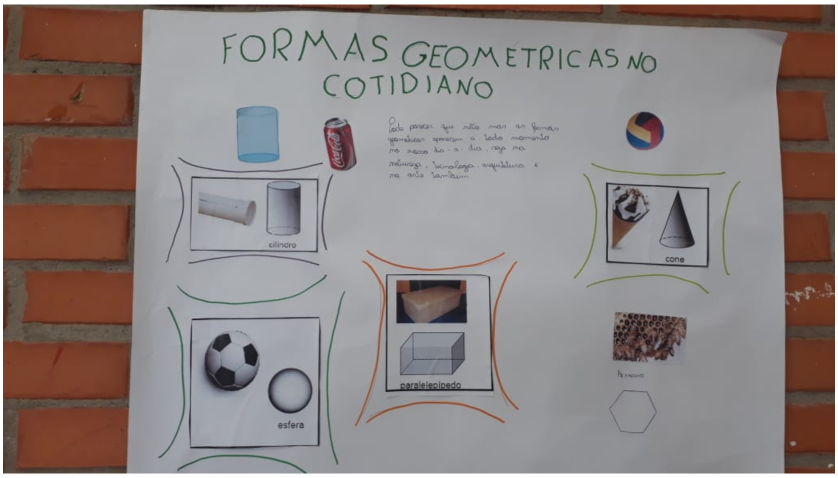
Figura 26 – Formas da Arquitetura e Artes



Fonte: Elaborado pela própria autora

O terceiro grupo relacionou utensílios domésticos, embalagens dos mais variados produtos, materiais escolares com vários poliedros e corpos redondos.

Figura 27 – Formas do cotidiano



Fonte: Elaborado pela própria autora

Essa atividade propiciou o trabalho em equipe, a negociação na escolha das figuras pelos membros das equipes na confecção dos cartazes e a percepção que quase tudo que nos cerca se aproxima de formas geométricas.

Atividade 2

Foi proposto aos alunos que trouxessem embalagens das mais variadas formas para que pudéssemos relacioná-las com as formas geométricas, identificando elementos como vértice, aresta e face e finalmente desmontá-las fazendo assim sua planificação.

Assim apareceram embalagens de prismas de base hexagonal, triangular, pirâmides, além é claro, pela existência em maior quantidade e diversidade maior de paralelepípedos.

Primeiramente, solicitei aos alunos que identificassem os vértices, as arestas e as faces, além de suas quantidades.

Nesse momento eles colocaram o quanto era fácil identificar esses elementos com o sólido em mãos, que a mesma identificação somente por desenhos era muito mais difícil. Concordei com a afirmação deles, mas coloquei a importância da abstração depois de vivenciarem aquele momento com o objeto concreto.

Em seguida, solicitei que separassem as embalagens de prismas da única embalagem de pirâmide que tinham levado. Nessas embalagens de prismas eles mediram as alturas, e rapidamente verificaram que a altura tinha a mesma medida da aresta lateral. Aproveitei para explicar que isso acontecia sempre nos prismas retos.

Entre os prismas escolhemos uma embalagem de cada base distinta. Assim separamos três embalagens para os cálculos. Uma embalagem de biscoito (base hexagonal), uma embalagem de chocolate (base triangular) e uma embalagem de suplemento vitamínico (base retangular).

Figura 28 – Embalagens

Fonte: Elaborado pela própria autora

Começamos pela embalagem de biscoito (base hexagonal) fazendo o cálculo do volume. Vimos que primeiro tínhamos que calcular a área da base.

Ao medirem as arestas das bases constataram que duas tinham uma medida e as outras quatro tinham outra medida, isso era facilmente notado mesmo antes da medição. Os alunos decidiram que para o cálculo da área dividiriam o hexágono em um retângulo e dois triângulos. Além disso, notaram que precisariam tomar outras medidas para fazer o cálculo das áreas. E assim o fizeram, obtendo mais duas medidas, a outra dimensão do retângulo que não era aresta da base e a altura do triângulo relativa a esse lado do retângulo, por fim fizeram os cálculos.

Expliquei aos alunos que poderiam calcular essa altura através do Teorema de Pitágoras, caso não pudéssemos tirar essa medida. Esclareci também que poderíamos ter dividido esse hexágono em dois trapézios.

Finalmente para o cálculo do volume bastava multiplicar a área da base pela medida da aresta lateral, nesse caso, a altura do prisma.

Foi muito enriquecedor ver os alunos entendendo os cálculos e constatando mais de uma forma de efetuá-los.

O próximo passo foi fazer as medições e os cálculos dos volumes das outras duas embalagens. Nesses dois últimos o procedimento foi mais rápido pois as medições das bases dos prismas eram mais simples.

Em seguida, os alunos abriram as embalagens planificando-as.

Figura 29 – Embalagens Planificadas

Fonte: Elaborado pela própria autora

Disse aos alunos para desconsiderarem as dobras dos encaixes e assim juntos fizemos os cálculos das áreas dos polígonos que estavam visualizando em cada uma das planificações.

Refletimos acerca de as faces laterais serem sempre retângulos em todas as embalagens escolhidas e que tínhamos sempre dois polígonos iguais aos quais chamamos de bases. Essa constatação no concreto, com o objeto em mãos, foi muito positivo.

Um aluno me disse: "agora estou entendendo que não preciso ficar decorando um tanto de fórmulas, estou entendendo o porquê de no cálculo da área total multiplicar a área da base por dois".

E no que segue, fomos fazendo os cálculos e fui detectando que estavam cada vez mais familiarizados com aquilo que estavam fazendo.

Essa atividade reforçou a constatação de que somos cercados no nosso dia a dia de formas geométricas, o relembrar de todos os elementos existentes nas formas e o reforço que quando aberta as embalagens se compõem de polígonos, que são figuras planas. Foi uma atividade bastante longa. Foram necessárias 7 aulas, quase duas semanas. A participação e as conclusões tiradas foram bastante satisfatórias.

Atividade 3

Foi proposto construir uma escultura com todas as formas citadas abaixo a partir de modelos existentes no livro didático.

"Copie os modelos na cartolina e construa: 6 cubos, 2 prismas de base hexagonal, 6 prismas de base triangular, 2 blocos retangulares"(VASCONCELLOS; SCORDAMAGLIO; CÂNDIDO, 2004, p. 240).

Foi um reforço ao que já haviam feito, só que dessa vez a proposta era fazer primeiro o cálculo da área com o prisma planificado e depois fazer a montagem dos poliedros.

Dessa forma pedi aos alunos que antes de montarem fizessem o cálculo da quantidade que seria gasta de cartolina com cada sólido.

Dei aos grupos modelos planificados desses prismas e eles montaram em casa os sólidos.

A proposta da atividade foi para casa devido a necessidade de um tempo maior para a montagem dos prismas. Como já tínhamos feito em sala com material concreto cálculo de áreas e volumes na atividade anterior os alunos não tiveram dificuldades nestes cálculos.

Dessa forma trabalharam, na prática, com modelos concretos, com área de polígonos e notaram que a área total de cada prisma era a junção das áreas desses polígonos que o compõem.

Os alunos levaram todo esse material para sala de aula, comparamos as quantidades de cartolina gastas e volumes encontrados nos cálculos pelos grupos. Finalmente os alunos juntaram essas formas fazendo uma escultura.

Foi bastante enriquecedor contribuindo para melhorar a visão espacial, além de entenderem de forma concreta para que serve cálculo de áreas e de volume.

A atividade além de motivadora levou a algumas percepções: que a proposta foi feita utilizando apenas prismas, que a junção dos seis prismas de base triangular formam um de base hexagonal e que portanto o cálculo da área de um hexágono regular é a soma das áreas de seis triângulos equiláteros, além, é claro, de despertar a criatividade nas confecções das esculturas.

Figura 30 – Esculturas

Fonte: Elaborado pela própria autora

Atividade 4

Calcular a área de uma das embalagens trazidas (PIRÂMIDE) e verificar se com uma folha de caderno era possível fazer um objeto similar.

Acredito ter sido essa a atividade principal da proposta pelo fato dos maiores erros dos alunos ser no cálculo de área e volume das pirâmides.

Como uma das embalagens trazidas era uma pirâmide quadrangular, uma lembrancinha de aniversário com o tema ”fortnite”(jogo eletrônico conhecido pelos alunos) e a maior dificuldade encontrada no cálculo de área foi nesse sólido, portanto que ele foi o escolhido para uma explicação mais detalhada.

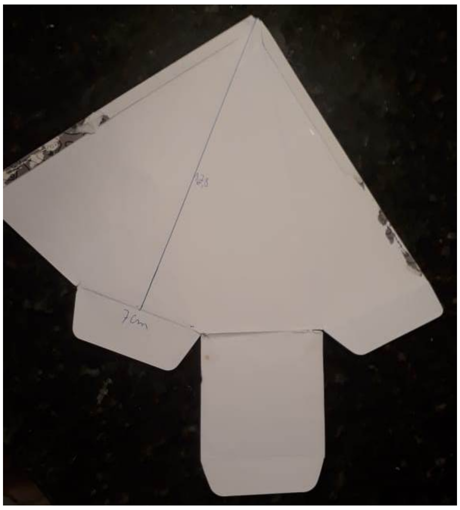
Figura 31 – Foto da pirâmide

Fonte: Elaborado pela própria autora

Foi evidenciado quando tomavam as medidas a diferença da altura da face lateral e da altura da própria pirâmide de tal forma que os alunos vivenciaram isso no modelo concreto, real. Com isso fizeram o cálculo do volume.

Puderam medir e ver a diferença entre as alturas, planificando a pirâmide fizeram todos os cálculos de áreas bem como tentar montar outra pirâmide igual a que tinham levado com a folha do caderno.

Figura 32 – Foto da sua planificação



Fonte: Elaborado pela própria autora

Finalmente perceberam que não era necessário montar outra pirâmide para responder a pergunta se uma folha do caderno tinha material suficiente para montarem uma pirâmide igual a trazida por eles, mas que bastava calcular a área do papel e comparar com a área da superfície daquela pirâmide que eles tinham em mãos e que já tinham calculado.

Claro que alertados que a montagem de fato de uma nova pirâmide talvez só fosse possível com emendas do papel, ou seja, reaproveitando pedaços que sobravam em um canto e colando em outro. Também expliquei que nem sempre isso é possível, pois as emendas não são bem vindas e que existem estratégias para minimizar o desperdício.

4 CONCLUSÃO

O ensino aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio ainda causa uma dificuldade muito grande devido à chegada dos alunos na etapa final do Ensino Básico sem pré-requisitos necessários para sua aprendizagem. Essa proposta de ensino veio de forma assertiva como desenvolvimento do trabalho em equipe e significância do objeto estudado. Resgatando a comparação dos sólidos geométricos apresentados na teoria com os existentes no mundo real. Ao trazer as embalagens presentes no seu dia a dia, os alunos identificaram elementos, calcularam áreas e volumes e entenderam a relação desses cálculos com gastos de materiais para confecção das embalagens e quantidade de coisas que cabem dentro desses poliedros.

As atividades realizadas proporcionaram aulas diferentes onde além do conhecimento geométrico foi melhorado o convívio entre alunos e entre alunos e professora. A negociação e a troca de conhecimento pré existente foram essenciais para a construção do trabalho. Eles puderam mostrar com a elaboração de cartazes e esculturas o que é possível produzir com a pesquisa e associação de coisas da sua realidade com o conhecimento escolar.

Houve por parte de alguns alunos uma rejeição na realização das atividades propostas por serem necessário, em alguns momentos, habilidades manuais. Mas como tudo foi proposto em grupos de trabalho, os alunos que detinham maior habilidade em trabalhos manuais fizeram essa parte. Vale ressaltar que todos tiveram oportunidade de vivenciar todo o processo, da construção dos poliedros aos cálculos e análises dos resultados.

A importância da contextualização foi notada quando o aluno pedia e necessitava da significação do conteúdo proposto no currículo escolar.

Com essas atividades o aluno buscou no seu dia a dia e também confeccionou material concreto para validar a teoria da sala de aula, além de propiciar um desenvolvimento de habilidades específicas. Fez com que o processo do ensino aprendizagem da Geometria Espacial ficasse mais leve e agradável.

Finalmente, acredito que essa proposta veio como mais uma ferramenta para somar ao trabalho de formalização do conteúdo, feito pelo professor em sala de aula. A utilização de material concreto, principalmente o já conhecido pelos alunos, fez com que o aproveitamento deles fosse mais satisfatório fazendo com que esses alunos fossem sujeitos ativos, e não meros espectadores, do processo ensino aprendizagem. Quando feita uma nova avaliação contendo uma questão para o cálculo de área de pirâmide, a maioria da turma obteve êxito, reforçando assim o sucesso do que foi pretendido com essa proposta metodológica.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. História da matemática, trad. *Elza. F. Gomide, Ed. Edgard Blucher*, 1974.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posiçao e métrica*. 6. ed. [S.l.]: Atual, 2005.

EVES, H. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino h. *Domingues, Campinas-SP: Editora da UNICAMP*, 2004.

FILHO, Z. A. Demonstraçao do teorema de euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 3, p. 15–17, 1983.

FONSECA, M. d. C. F. R.; LOPES, M. d. P.; BARBOSA, M. d. G. G. *O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2002.

LIMA, E. L. Medida e forma em geometria. impa. *VITAE, Rio de Janeiro*, 1991.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2009.

MEC. Ministério da educação. In: ______. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: [s.n.], 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 20 out. 2018.

NETO, A. C. M. Geometria. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013.

VASCONCELLOS, M. d.; SCORDAMAGLIO, M.; CÂNDIDO, S. Matemática: projeto escola e cidadania para todos. *São Paulo: Editora do Brasil*, v. 2, 2004.

VENTURA, A.; VICENTE, A. d. O ensino da geometria com o uso das embalagens. *Ciências–Matemática, Especialização: Didática e Metodologia de Ensino. Atuando na Educação Básica do Estado do Paraná. Professor PDE*, 2010.