

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**Métodos perturbativos e não-perturbativos em teoria  
quântica de campos no espaço-tempo curvo**

*Eduardo Antonio dos Reis*

3 DE DEZEMBRO DE 2019  
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Métodos perturbativos e não-perturbativos em teoria  
quântica de campos no espaço-tempo curvo**

Autor: Eduardo Antonio dos Reis

Orientador: Prof. Ilya Lvovich Shapiro

Co-orientador: Prof. Peter M. Lavrov

*Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.*

3 DE DEZEMBRO DE 2019

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL



---

## Dedicatória

---

*À toda a minha família,  
em especial minha mãe Eulália,  
minha irmã Kássia (em memória)  
e meu avô Antonio (em memória).*

---

## Agradecimentos

---

Depois de uma grande jornada de conhecimento, este é o momento de voltar no tempo e lembrar de todas as pessoas que contribuíram de diversas formas pelo que sou hoje. Gostaria então, de expressar meus sinceros agradecimentos:

- Ao meu orientador, o Prof. Ilya L. Shapiro, pela confiança, paciência e oportunidade de trabalhar nos problemas desenvolvidos nessa tese, por todo o ensinamento e conhecimento compartilhado ao longo de todos esses anos, pelo suporte de trabalho oferecido e principalmente agradeço por seu apoio e conselhos durante toda esta etapa.

- Ao meu Co-orientador, o Prof. Peter M. Lavrov, por todos os ensinamentos durante o período que estive em Juiz de Fora e por sua indispensável participação nos trabalhos apresentados nessa tese de doutoramento.

- Ao Prof. Gastão Krein e ao Prof. Ioseph L. Buchbinder pelas colaborações nos trabalhos apresentados nesta tese e também por todas as discussões e ensinamentos imprescindíveis para a minha formação.

- Aos meus colegas e colaboradores dos trabalhos presentes nesta tese, Tibério de Paula Netto, que trabalhou comigo desde a primeira pesquisa, por todas as discussões e orientações que ajudaram muito no meu desenvolvimento, Vítor F. Barra e Andreza R. Rodrigues pelas discussões durante o desenvolvimento e pesquisa dos assuntos aqui tratados.

- À minha mãe Eulália, por não medir esforços em me apoiar em todos os meus objetivos, à minha querida irmã Kássia (em memória) a qual sinto muita falta, principalmente de nossas conversas, conselhos e tudo mais, obrigado por me ensinar a ver sempre o lado bom da vida, saiba que sempre estará em meu coração, à minha sobrinha Fernanda, um pedaço da minha irmã que ficou e que me ensina lições de vida desde pequena, entre eles, o motivo de seguir minha caminhada.

- A minha namorada Nicole pela paciência, carinho, apoio e incentivo em todos os momentos e especialmente por estar sempre ao meu lado.

- A duas cachorrinhas, Nina e Neném, que tornaram a escrita dessa tese mais tranquila e divertida.

- A minha sogra Eliane e meu sogro Jacir pelo apoio e momentos de descontração que me ajudaram muito durante o desenvolvimento desta tese.

- Um agradecimento mais do que especial a minha madrinha Marialva por acreditar sempre em mim e por ser minha segunda mãe.

- À toda a minha família pelo apoio, incentivo e pelas reuniões de família incríveis.

- À minha banda, a qual é formada pelos meus melhores amigos Eduardo Oliveira, César e Clayton, projeto que infelizmente tivemos que parar para que três dos quatro membros finalizassem seus respectivos doutorados. Em breve voltaremos.

- Ao meu instrutor de Jeet kune Do, Régis, e todos os colegas que treinam com a gente, em especial, Raony, Fabrício e Fabiana. Treinos essenciais que me garantiram a energia necessária para trabalhar no dia a dia e seguir a vida.

- A todos os amigos e colegas que formei ao longo dos quatro anos do doutorado, em especial, a Helena, a Lídia, a Fran, o Afonso (em memória), o Danilo (Zé), o Mateus, o Raony, a Laysa, o Thiago, a Thamiris, o Jarne, o Delvany, o Rodrigo Mangal, a Geysy, o Luiz Guilherme, o Simpliciano, o Patric, o Breno, o Johnny, o Alexander, o Hamid, a Leisa, o Fábio que compartilharam tantos momentos de dificuldades e descontração.

- A todos os professores que passaram por minha vida, afinal se cheguei até aqui, foi graças ao empenho de vocês em propagar o conhecimento. Em especial ao Prof. Joseph L. Buchbinder, Prof. Peter M. Lavrov e o Prof. Gil de Oliveira Neto pelos cursos ministrados durante o doutorado, obrigado por todos ensinamentos que me passaram.

- Agradeço à UFJF, em particular ao Programa de Pós-Graduação em Física, por toda estrutura, pela oportunidade e pelo suporte físico e financeiro. Agradeço também a todos os funcionários, citando em especial o secretário de nossa Pós-Graduação, o Sr. Domingos, por realizar o seu trabalho sempre com muita eficiência e nos ajudar sempre com muita generosidade.

- Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro em meus quatro anos de doutorado e ao CNPq e FAPEMIG por financiar direta e/ou indiretamente o meu projeto de doutorado.

*"Life is like riding a bicycle. To keep your balance you must keep moving."*

**Albert Einstein**



## Resumo

Nesta tese, apresentamos nossas aplicações a partir de um estudo detalhado sobre modelos perturbativos e não-perturbativos promissores em teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo. Inicialmente, implementamos a quantização estocástica para um campo escalar massivo não-mínimo e auto-interagente. Aqui, estudamos o método perturbativamente através de expansões simultâneas no tensor de curvatura e nos campos de ruído e também não-perturbativamente, isto é, sem a expansão nos campos de ruído. Usando as coordenadas normais de Riemann, obtemos a função de correlação euclidiana e avaliamos as correções quânticas de *multi-loops*. A função de correlação estocástica reproduz o resultado bem conhecido de Bunch e Parker e é usada para construir o potencial efetivo em uma dimensão arbitrária  $D$ . Além disso, apresentamos uma amostra de simulações numéricas para  $D = 3$ . Em seguida, utilizando o método de campo de fundo na abordagem do método não-perturbativo chamado grupo de renormalização funcional para caso da teoria de Yang-Mills, estudamos a simetria de campo de fundo e a dependência de calibre da ação efetiva média de fundo, quando a ação reguladora depende de campos externos. Por último, via teoria de perturbações através do método usual de integrais de caminho, estudamos o modelo de Yukawa com um campo escalar e um escalar axial, acoplados a  $N$  cópias de férmions de Dirac. A partir da técnica de *heat-kernel*, obtemos as divergências de *1-loop*, descrevemos a renormalização da teoria e calculamos o conjunto completo de funções beta e gama para todas as constantes de acoplamento e campos. Obtemos a contribuição dos campos escalares para o potencial efetivo de *1-loop* e discutimos algumas dificuldades da abordagem do grupo de renormalização para o potencial efetivo no modelo em consideração.

**Palavras chaves:** Métodos não-perturbativos, quantização estocástica, gravitação semiclássica, grupo de renormalização funcional, formalismo de campo de fundo, modelo de Yukawa, espaço-tempo curvo.

## Abstract

In this thesis, we present our applications from a detailed study of promising perturbative and non-perturbative models in quantum field theory in curved spacetime. Initially, we employ stochastic quantization for a self-interacting nonminimal massive scalar field. Here, we study the method perturbatively through simultaneous expansions in the curvature tensor and in the noise fields and also nonperturbatively, i. e., without noise expansion. Using the Riemann normal coordinates we find the Euclidean correlation function and evaluate multi-loop quantum corrections. The stochastic correlation function reproduces the well-known result by Bunch and Parker and is used to construct the effective potential in an arbitrary dimension  $D$ . Furthermore, we present a sample of numerical simulations for  $D = 3$ . Next, using the background field method in the approach of the nonperturbative method called functional renormalization group for the case of Yang-Mills theory, we study the background field symmetry and gauge dependence of the background average effective action, when the regulator action depends on external fields. At the end, via perturbation theory through the usual method of path integrals we study the Yukawa model with one scalar and one axial scalar fields, coupled to  $N$  copies of Dirac fermions, in curved spacetime background. From the the heat-kernel technique, we derive the one-loop divergences, describe the renormalization of the theory and calculate the full set of beta- and gamma-functions for all coupling constants and fields. We obtain the contribution of scalar fields to the *1-loop* effective potential and discuss some difficulties of the renormalization group approach to the effective potential in the model under consideration.

**Keywords :** Nonperturbative methods, stochastic quantization, semiclassical gravity, functional renormalization group, background field formalism, Yukawa model, curved spacetime.

---

## Lista de publicações

---

- E. Antonio dos Reis, G. Krein, T. de Paula Netto and I. L. Shapiro, *Stochastic quantization of a self-interacting nonminimal scalar field in semiclassical gravity*, Physics letters B, **798**, 134925 (2019).
- P. M. Lavrov, E. Antonio dos Reis, T. de Paula Netto and I. L. Shapiro, *Gauge invariance of the background average effective action*, European Physical Journal C **79**, no. 8, 661 (2019).
- Iosif L. Buchbinder, Andreza R. Rodrigues, Eduardo Antonio dos Reis and I. L. Shapiro, *Quantum aspects of Yukawa model with scalar and axial scalar fields in curved space-time*, European Physical Journal C, (2019), a ser publicado, [arXiv:1910.01731 [hep-th]].
- Vítor F. Barra, Peter M. Lavrov, Eduardo Antonio dos Reis, Tibério de Paula Netto and Ilya L. Shapiro, *Functional renormalization group approach and gauge dependence in gravity theories*, (2019), submetido para publicação ao jornal Phys. Rev. D, [arXiv:1910.06068 [hep-th]].

---

## Notações e convenções

---

Nesta seção, apresentaremos algumas notações e convenções utilizadas ao longo deste trabalho.

- A não ser que seja mencionado, considere durante o texto as seguintes unidades naturais de medida

$$c = \hbar = 1.$$

Nesse contexto,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}.$$

- Os índices gregos  $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$  assumem os valores 0, 1, 2, 3, enquanto que os índices latinos  $i, j, k, \dots$  os valores 1, 2, 3.

- Para realizar cálculos quânticos, assumimos a continuação analítica ao espaço-tempo Euclidiano, e usamos a notação  $\eta_{\mu\nu}$  para a métrica espaço-tempo plano de Minkowski. O determinante da métrica é  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

- A assinatura da métrica  $g_{\mu\nu}$  tem a seguinte convenção de sinais (+, -, -, -) no Cap. 3. O tensor de Riemann fica definido por

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau} \Gamma^\tau{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\tau} \Gamma^\tau{}_{\beta\mu},$$

o tensor de Ricci como sendo  $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$  e o escalar de Ricci, ou simplesmente curvatura escalar, dado por  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Entretanto, nos Caps. 4 e 5 usamos (-, +, +, +).

- Para o operador de d'Alembert usaremos a notação

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu.$$

- As figuras utilizadas nessa tese foram originalmente publicadas na referência [1].
- Durante a tese, principalmente no Cap.4, utilizaremos as notações condensadas de DeWitt [2]. Algumas delas, são descritas a seguir:

★ Presume-se que os índices contenham também as variáveis espaço-tempo, se necessário, como por exemplo,  $\varphi^\mu(x)$  é escrito como  $\varphi^i$  em que  $i$  é entendido como um índice cobrindo tanto  $\mu$  quanto  $x$ .

- ★ A soma de índices incluem também a integração dessas variáveis contínuas,

$$A^i B_i = \int_M d^D x A^\mu(x) B_\mu(x)$$

em que  $M$  é a variedade do espaço-tempo.

- ★ A derivada funcional de um funcional  $X$  é escrita como,

$$X, i = \frac{\delta X(\varphi)}{\delta \varphi^\mu(x)}.$$

- ★ O produto de dois campos é denotado como

$$\varphi J = \int d^D x \varphi(x) J(x). \quad (1)$$

- Além disso, a paridade de Grassmann de uma quantidade  $A$  é denotada como  $\varepsilon(A)$ .

---

## Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de publicações</b>	<b>viii</b>
<b>Notação e convenções</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Tópicos de Teoria Quântica de Campos</b>	<b>9</b>
2.1 A escolha da ação na abordagem da gravitação semiclássica . . . . .	10
2.2 A ação efetiva e expansão em <i>loops</i> . . . . .	12
2.3 Uma breve revisão sobre o potencial efetivo no espaço-tempo curvo . . . . .	14
2.4 Formalismo de campo de fundo para teorias de calibre . . . . .	17
2.5 A abordagem do grupo de renormalização funcional . . . . .	22
2.6 O método de Schwinger-DeWitt . . . . .	24
<b>3 Quantização estocástica do campo escalar não-mínimo e auto-interagente no espaço-tempo curvo</b>	<b>27</b>

3.1	Função de correlação e potencial efetivo via quantização estocástica . . . . .	28
3.2	Função de correlação . . . . .	31
3.3	O Potencial Efetivo para o campo escalar . . . . .	39
3.3.1	O potencial efetivo no espaço-tempo plano . . . . .	39
3.3.2	O potencial efetivo no espaço-tempo curvo . . . . .	41
3.4	Simulações numéricas . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Invariância de calibre da ação efetiva média de fundo</b>	<b>47</b>
4.1	Ação efetiva média de fundo . . . . .	48
4.2	Funções reguladoras invariantes no método de campo de fundo . . . . .	52
4.3	Dependência de calibre da ação efetiva média de fundo . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Aspectos quânticos do modelo de Yukawa com campo escalar e escalar axial no espaço-tempo curvo</b>	<b>58</b>
5.1	Modelo de Yukawa e sua renormalização . . . . .	59
5.2	Contribuição escalar para o potencial efetivo . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusões gerais e considerações finais</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Resultados úteis</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Resultado analítico do valor esperado no vácuo do campo escalar até <i>2-loops</i></b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

A teoria quântica de campos (TQC) interagindo com campos externos tem uma importância especial na física teórica moderna. As razões para isso são basicamente duas. A primeira é que há situações em que o campo externo é parte inerente do sistema de interesse. Este é o caso, por exemplo, da gravitação semiclássica, onde a dinâmica dos campos de matéria quântica ocorre em um fundo métrico clássico, uma situação relevante, inclusive, para a cosmologia primordial. A abordagem perturbativa padrão neste cenário vai desde a criação de partículas no universo primordial [3–6] (veja Ref. [7] para uma revisão e outras referências), ao estudo da matéria quântica sob a influência de um campo externo (de fundo) [8], levando ao historicamente primeiro e fenomenologicamente bem sucedido modelo de inflação de Starobinsky [9, 10] (veja também, por exemplo, trabalhos recentes sobre teoria quântica de campos baseada nesse modelo [11, 12]). A segunda é que campos externos podem ser usados como uma ferramenta para calcular observáveis, funções de correlação ou a ação efetiva. A este respeito, relembremos o método de campo de fundo na teoria quântica de campos perturbativa, que fornece vantagens técnicas para o cálculo de correções quânticas de *1-loop* ou superiores.

Um caso importante em que ordens superiores em correções de *loops* são relevantes no



contexto da cosmologia está no modelo de inflação de Higgs [13–18], onde correções de *2-loops* para o potencial efetivo mostraram modificar os limites para a massa do bóson de Higgs. Outra aplicação potencialmente relevante dos efeitos não-perturbativos em altas energias está relacionada ao problema da estabilidade de Higgs em altas energias (UV), como discutido recentemente em [19].

Um exemplo da aplicação em baixas energias, onde os efeitos não-perturbativos são potencialmente importantes, está relacionado aos efeitos quânticos do vácuo de campos massivos no infravermelho (IV). Sabe-se que tais efeitos plausivelmente podem produzir um *running* de baixa energia (IV) da constante cosmológica observável [20]. No entanto, não se pode provar ou refutar isso devido a limitações técnicas dos métodos teóricos disponíveis. As análises baseadas na hipótese de desacoplamento quadrático [21, 22], covariância [23, 24] e argumentos dimensionais [25] fornecem uma forma universal do *running* do IV para constantes cosmológicas e de Newton, tal que resta um único parâmetro a ser definido a partir de dados cosmológicos [26, 27] ou astrofísicos [28, 29]. Esta é claramente uma situação insatisfatória, uma vez que a possibilidade do *running* IV da constante cosmológica não é suportada por um cálculo sólido da teoria quântica de campos. Seria muito importante ter um suporte baseado na teoria quântica de campos (ou exclusão) desta hipótese. Infelizmente, os métodos analíticos existentes de cálculos no espaço-tempo curvo não permitem que se obtenha tal verificação.

Uma situação de alguma forma semelhante à descrita acima ocorre na cromodinâmica quântica (QCD). A abordagem perturbativa tradicional, baseada em uma expansão na constante de acoplamento, torna-se inaplicável no setor IV da teoria. O desenvolvimento de estudos de QCD na rede teve um sucesso notável, por exemplo, reproduzindo as massas dos hádrons leves do estado fundamental [30]. A partir disso, tornou-se a principal fonte de resultados do setor de IV da QCD. Nesse contexto, a teoria é reformulada em uma rede discreta do espaço-tempo euclidiana e solucionada como um problema clássico de mecânica estatística, empregando métodos de Monte Carlo [31]. Além disso, quando os métodos de Monte-Carlo se tornam ineficientes, o método mais utilizado é a quantização estocástica, que também oferece uma alternativa promissora para lidar com problemas de ação complexa [32].

No método de quantização estocástica, as flutuações quânticas são obtidas com o uso da equação de Langevin. Uma primeira tentativa de derivar a equação de Schrödinger em tal abordagem deve-se a Nelson [33], que formulou um método de quantização que obtinha a mecânica quântica a partir de considerações baseadas no estudo do movimento browniano tendo a constante de Planck como constante de difusão (para uma revisão sobre movimento browniano, veja por exemplo, o livro escrito por Nelson [34]). Apesar disso, sua formulação, em termos do tempo real e interpretações físicas inteiramente clássicas, em que as partículas possuem trajetórias contínuas e a função de onda não é uma descrição completa do estado, é incapaz de descrever situações com muitas partículas ou campos. A encarnação moderna da quantização estocástica remonta à década de 1980 com o trabalho de Parisi e Wu [35], que introduziu uma variável de tempo fictícia  $\tau$  para a evolução da equação de Langevin. Dentro dessa abordagem, uma teoria quântica de campos euclidiana em  $D$  dimensões é obtida como o limite de equilíbrio ( $\tau \rightarrow \infty$ ) de um sistema clássico em  $D + 1$  dimensões acoplado a uma fonte de ruído aleatório com intensidade proporcional a  $\hbar$ . Quando aplicada a teorias de calibre, a quantização estocástica é útil para resolver certos problemas relacionados a ambiguidades de fixação de calibre (veja Refs. [36,37] para desenvolvimentos iniciais e aplicações).

Não-perturbativamente, com sua natural invariância de Lorentz, a quantização estocástica é uma alternativa à integral funcional. E parece natural formular essa abordagem em um espaço-tempo curvo arbitrário, lidando com a abordagem da gravitação semiclássica. Notamos que existe uma vasta literatura considerando processos estocásticos na gravitação semiclássica, um dos mais conhecidos é a teoria da gravitação estocástica, uma revisão completa com uma extensa lista de referências sobre o assunto pode ser encontrada na Ref. [38]. Pode-se mencionar também o importante trabalho na Ref. [39], onde as funções de correlação para um campo escalar massivo não-minimo foram consideradas no fundo de Sitter por meio das equações de Fokker-Planck.

A quantização estocástica fornece um terceiro método de quantização [37], diferente da quantização canônica e do método de integrais de caminho, e em termos práticos, mais adaptado para cálculos não-perturbativos através de simulações numéricas. Em nosso trabalho, partindo da forma covariante da equação de Langevin para um campo escalar no

espaço-tempo curvo, desenvolvemos um esquema computacional baseado na representação de momento local com o propósito de obter correções quânticas de *multi-loops* para a solução clássica e também soluções não-perturbativas. As correções *multi-loops* são obtidas através de uma expansão simultânea no tensor de curvatura  $R$  e em  $\hbar$  enquanto que para as soluções não-perturbativas a dependência completa em  $\hbar$  é mantida. Nossa abordagem é diferente das aplicações anteriores [36] e mais recentes [40,41] de quantização estocástica à gravitação quântica, uma vez que o uso da representação de momento local nos permite usar a quantização estocástica em sua forma usual como no espaço-tempo plano. Além disso, em todos os casos anteriores, faz-se necessário a fixação da métrica de fundo do espaço-tempo logo no início, como por exemplo, o fundo de de Sitter. De forma distinta, em nosso caso, mostramos que isso não é necessário, e mantemos uma métrica de fundo arbitrária com o objetivo de estudar os aspectos quânticos dos campos de matéria que se propagam em um determinado espaço-tempo curvo com fundo clássico arbitrário. A esse respeito, nosso trabalho pode ser considerado como pioneiro na literatura.

Outra abordagem não perturbativa, considerada como importante e prospectiva em TQC é o grupo de renormalização funcional (usaremos a abreviação GRF ao longo da tese). A versão padrão desta abordagem é baseada na equação de Wetterich para a ação efetiva média [42–44] (veja as revisões sobre o assunto em [45–48] e também no livro didático [49] para uma introdução ao assunto). A aplicação do GRF a teorias de calibre foi amplamente discutida, incluindo o trabalho recente [50]. As considerações no último e em muitos outros artigos são baseadas no método de campo de fundo, que permite manter a invariância de calibre para o campo de Yang-Mills (ou gravitacional) explicitamente na ação efetiva. O método de campo de fundo é, em geral, um formalismo útil em teorias de campos de calibre, e é por isso que atraiu uma atenção muito especial recentemente, veja por exemplo [51–54]. A aplicação desse método à ação efetiva média foi realizada há muito tempo [55] (veja também o trabalho recente [56]), porém, existem alguns aspectos importantes do problema que foram explorados recentemente em nosso artigo [57].

O principal problema do GRF aplicado às teorias de calibre é que a dependência da escolha da condição de fixação do calibre não desaparece *on-shell* [58], como é o caso da TQC perturbativa usual. Como resultado da dependência de fixação do calibre na

superfície, a matriz  $S$  da teoria não é bem definida, exceto no ponto fixo, onde a ação efetiva média coincide com a ação efetiva usual. Pode-se esperar que o fluxo do grupo de renormalização na teoria de Yang-Mills também manifeste uma dependência fundamental de calibre, e isso certamente obscurece a interpretação dos resultados obtidos dentro da abordagem do GRF em teorias de calibre.

A fim de entender melhor a situação com a simetria de calibre no nível quântico e com a dependência de calibre, é importante analisar os problemas mencionados no método de campo de fundo. Como mencionamos anteriormente, tal método é de grande relevância em teorias de calibre, pois permite construir uma ação efetiva de fundo invariante de calibre. Isso pode trazer considerações importantes no estudo sobre a invariância de calibre e a dependência da fixação da condição de calibre para a ação efetiva média.

A interação entre campos escalares com espinores de Dirac através de uma interação Yukawa está atraindo uma atenção especial na TQC no espaço-tempo curvo. A esse respeito, pode-se mencionar análises recentes que incluem acoplamentos escalares e pseudoescalares [59] e, mais recentemente, com a inclusão de um campo de calibre [60, 61].

Utilizando o método perturbativo usual de TQC, no qual empregamos uma expansão em *loops* da ação efetiva para calcular quantidades locais como, por exemplo, o potencial efetivo, iremos continuar os estudos sobre o modelo Yukawa com escalar estéril, explorado recentemente em [62]. Aqui, estendemos ao caso de dois escalares, um ordinário e outro axial, acoplados por meio do acoplamento Yukawa a férmions com forma geral renormalizável de auto-interação.

Nesta parte, nosso objetivo imediato será o cálculo das divergências da maneira mais econômica, como foi feito na publicação original sobre a renormalização do modelo abeliano com acoplamento Yukawa no espaço-tempo curvo com torção há muito tempo atrás [63] (veja também o livro [64]).

Considerações semelhantes sobre o modelo mais simples com um único campo escalar foram úteis para estabelecer as restrições da teoria quântica resultantes da condição de renormalizabilidade da teoria abeliana com campo Dirac massivo. A forma do potencial de auto-interação de um campo escalar que garante a renormalizabilidade de tal teoria é um aspecto interessante, que não foi completamente explorado no trabalho original [63]. Foi

mostrado e discutido em detalhes no trabalho recente [62] que o escalar renormalizável com a interação Yukawa inclui termos de auto-interações com potências ímpares dos campos escalares. Essas interações qualitativamente novas incluem o termo linear, o termo com acoplamento cúbico e também um termo linear que descreve a interação entre campo escalar e curvatura escalar.

Em todos os exemplos de teorias de campos quânticos renormalizáveis com campos escalares, que temos conhecimento até agora, foi possível construir soluções para a equação do grupo de renormalização para a ação efetiva que permitem obter o potencial efetivo da maneira mais econômica [65], incluindo no espaço-tempo curvo [66] (veja também a generalização para outros setores da ação efetiva em [64, 67]). No modelo com um único escalar estéril, é necessário estender esse esquema que funciona muito bem para incluir potências ímpares do campo escalar, com essa generalização mostrou-se que o mesmo funciona muito bem [62].

A generalização dessas considerações para o modelo que preserva a paridade de um campo escalar axial adicional é um problema interessante e desafiador. Podemos dizer que esse problema, além de ter interesse formal, faz sentido do ponto de vista de aplicações físicas. Primeiro de tudo, há um exemplo importante de um escalar axial, que é o axion. Independentemente do axion poder ter uma forma diferente de acoplamento ao calibre e campos fermiônicos em comparação com um campo escalar axial comum, é interessante explorar a renormalização de um modelo de preservação de paridade como um exemplo simples. Por outro lado, nos últimos anos, houve indicações de possíveis violações da paridade na ação gravitacional como uma explicação de algumas observações astrofísicas [68]. Portanto, pode ser interessante ter uma descrição consistente dos modelos capazes de explicar essa violação e o estudo da renormalização do modelo com o campo escalar axial pode ser um passo útil para entender melhor uma possível origem quântica de tais termos.

Outro aspecto interessante do modelo em consideração é que tal teoria tem duas massas escalares diferentes, essa é uma situação usual na teoria de campos efetiva (veja por exemplo o livro [69]). No trabalho recente [70], contribuições finitas não locais dos diagramas com linhas internas mistas no espaço-tempo curvo foram analisadas, por exemplo, no

caso de um campo escalar leve e um campo escalar pesado. Aqui, complementamos esse resultado calculando o potencial efetivo no modelo com dois escalares. O potencial efetivo envolve duas contribuições independentes, uma dos *loops* de campos escalares e outra do *loop* spinorial. Mostraremos que os resultados dessas contribuições parecem de alguma forma incomuns, pois encontramos uma complicada mistura não polinomial de massas escalares e acoplamentos no setor escalar, algo que se pode esperar para um modelo com dois escalares.

**A tese é organizada através da seguinte estrutura:**

- O capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre diversos tópicos em Teoria quântica de campos, importantes para facilitar o entendimento dos assuntos tratados na tese.

- No capítulo 3, a obtenção de mais baixa ordem da função de correlação da teoria de campo escalar acoplada não-minimamente à gravidade é apresentada. O cálculo é realizado analiticamente resolvendo-se perturbativamente a equação de Langevin usando as coordenadas normais de Riemann. Além disso, este resultado é usado para obter o potencial efetivo em primeira ordem em curvatura no esquema de regularização por *cut-off*. Para testar o método e também para generalizar um resultado anterior obtido por meio da representação do momento local [71], aqui o cálculo é realizado em uma dimensão euclidiana arbitrária  $D$ . Por fim, apresentamos resultados das simulações numéricas em  $D = 3$  até ordens lineares em curvatura.

- No capítulo 4, a simetria de campo de fundo é analisada dentro da abordagem do grupo de renormalização funcional. As funções reguladoras dependem dos campos externos (campos de fundo), mas são escolhidas para não serem invariantes sob transformações de calibre do campo vetorial externo. Logo após, apresentamos uma solução para a simetria do campo de fundo da ação efetiva média de fundo com funções reguladoras que são invariantes sob transformações de calibre do campo externo. Por fim, o problema de dependência de calibre na ação efetiva média de fundo é discutido.

- No Capítulo 5, descrevemos o modelo incluindo um campo escalar real e um campo axial acoplado a  $N$  componentes do campo fermiônico e calculamos as divergências de um

*1-loop* correspondentes. Logo em seguida, obtemos as relações de renormalização de *1-loop* da teoria em consideração e as funções do grupo de renormalização. O potencial efetivo de *1-loop* renormalizado é obtido usando a representação de momento local.

- Finalmente, nossas conclusões e perspectivas de extensão e continuação das linhas de pesquisa apresentadas são discutidas no capítulo 6. Também incluímos os apêndices A e B com conteúdos auxiliares e detalhes técnicos importantes.

## CAPÍTULO 2

---

### Tópicos de Teoria Quântica de Campos

---

Este capítulo tem como finalidade, introduzir uma breve revisão de alguns tópicos de TQC no espaço-tempo curvo importantes para facilitar o entendimento do assunto da tese e com o propósito de apresentar as notações e convenções utilizadas. Uma introdução geral da TQC no espaço curvo pode ser encontrada nos livros [64, 72–74].



## 2.1 A escolha da ação na abordagem da gravitação semiclássica

Nesta seção mostraremos algumas regras que devemos exigir para a construção das teorias que descrevem os campos de matéria (campo escalar, campo vetorial e campo espinorial) no espaço-tempo curvo. Em geral, isso pode ser realizado de diversas maneiras, aqui utilizamos as abordagens intuitivas e simples, conhecidas como generalização mínima e não-mínima. Para o desenvolvimento desta seção, utilizamos como base as notas de aula do professor Ilya Shapiro referentes ao artigo de revisão [75].

O método da generalização mínima consiste em construir ações que mantenham a forma do espaço-tempo plano e que possuam covariância geral. Isso requer as seguintes correspondências entre espaço-tempo plano e curvo:

$$\int d^4x \implies \int d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.1)$$

$$\partial_\mu \implies \nabla_\mu, \quad (2.2)$$

$$\eta_{\mu\nu} \implies g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

em que  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante. Já o método de generalização não-mínima é baseado nos seguintes princípios:

- Localidade, isto é, deve depender apenas de um único ponto do espaço-tempo  $x^\mu$ ;
- Covariância geral;
- Preservação de todas as simetrias da ação clássica no espaço-tempo plano de Minkowski. Podemos citar, por exemplo, a simetria de calibre para o campo vetorial, a qual possui importante lei de conservação;
- Simplicidade, não introdução de novos parâmetros que possuam dimensão de  $(massa)^{-1}$ , pois é bem conhecido que a introdução desses parâmetros é responsável por teorias dos campos de matéria não-renormalizáveis [76];
- A ação deve admitir a correspondência com o espaço-tempo plano, no limite quando a métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .

A partir dessas condições, a ação do campo escalar livre para o espaço-tempo curvo é dada por

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + (m^2 + \xi R) \varphi^2], \quad (2.4)$$

em que  $R$  é a curvatura escalar,  $\xi R \varphi^2$  é o termo não-mínimo e  $\xi$  o parâmetro não-mínimo. A adição do termo não-mínimo é necessária para a renormalizabilidade da teoria quântica em  $D = 4$  (veja por exemplo Ref. [64] para uma introdução ao assunto). A versão mínima é obtida fazendo  $\xi = 0$ .

Para o campo fermiônico (espinores)  $\bar{\psi}$  a ação no espaço-curvo tem a forma,

$$S_{1/2} = \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m_f \psi), \quad (2.5)$$

onde  $\gamma^\mu$  é a forma generalizada das matrizes  $\gamma^a$  de Dirac. Essa generalização é feita introduzindo os coeficientes de transição entre coordenadas  $x^a$  e  $x^\mu$  chamados de tetradas, representadas pela notação  $e_\mu^a$ . A partir das tetradas, as seguintes definições são feitas:

- Tensor métrico

$$\begin{aligned} e_\mu^a e_{\nu a} &= g_{\mu\nu}, & e_a^\mu e^{\nu a} &= g^{\mu\nu}, \\ e_{a\mu} e_b^\mu &= \eta_{ab}, & e_\mu^a e^{b\mu} &= \eta^{ab}. \end{aligned}$$

- Derivada covariante de um espinor

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi,$$

em que  $\sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a)$  e  $\omega_\mu^{ab}$  são os coeficientes de conexão espinorial dados por

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} (e_\nu^b e^{\lambda a} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - e^{\lambda a} \partial_\mu e_\lambda^b). \quad (2.6)$$

Isso nos permite escrever a ação da forma apresentada em (2.5).

Finalmente para o campo vetorial, a ação apresenta a forma

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

em que  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ .

É importante ressaltar que não é possível algebricamente construir termos não-mínimos para essas duas últimas teorias sem a violação de algum dos princípios citados anteriormente. Para o último caso, por exemplo, esses termos violam a simetria de calibre.

A ação do vácuo, que satisfaz as condições mencionadas acima e também possui a forma mais simples, garantindo a teoria renormalizável, adquire a seguinte forma geral

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{HD}, \quad (2.8)$$

onde  $S_{EH}$  é a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (2.9)$$

e  $S_{HD}$  é a ação com termos de derivadas superiores (*High Derivatives*)

$$S_{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\}, \quad (2.10)$$

em que  $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + (1/3)R^2$  é o quadrado do tensor de Weyl (em 4 dimensões) e  $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$  é a densidade Lagrangeana do termo de Gauss-Bonnet ou densidade de Euler (em 4 dimensões). Esses termos são de grande importância e precisam ser introduzidos já na teoria clássica com a finalidade de obter a teoria renormalizável a nível quântico.

## 2.2 A ação efetiva e expansão em *loops*

Uma quantidade de grande interesse e importância é a ação efetiva  $\Gamma[\varphi]$ , pois é a partir dela que obtemos toda a informação física relevante que nos permite construir uma TQC. Vamos então fazer uma breve revisão de tal abordagem, tendo como base principal o livro de Buchbinder, Odintsov e Shapiro [64].

Considerando uma ação inicial  $S(\varphi)$  para uma dada teoria, a grandeza denominada funcional gerador das funções de Green no espaço-tempo curvo,  $Z(J)$ , é representado pela integral funcional

$$Z(J) = \int d\varphi e^{i(S(\varphi) + \varphi J)} \quad (2.11)$$

onde  $J(x)$  é a fonte externa do campo escalar  $\varphi(x)$ .

É possível obter as funções de Green de  $n$  pontos a partir da  $n$ -ésima variação funcional de  $Z(J)$  em relação a  $J(x)$  [77]

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n Z(J)} \frac{\delta^n Z(J)}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (2.12)$$

ou então, utilizar a relação

$$e^{iW(J)} = Z(J), \quad (2.13)$$

onde  $W(J)$  é funcional gerador das funções de Green conectadas, de modo que, as funções de Green conectadas,  $G^c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , podem ser descritas como

$$G^c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n W(J)}{\delta iJ(x_1) \delta iJ(x_2) \dots \delta iJ(x_n)}. \quad (2.14)$$

Introduzimos a definição de campo médio através da relação

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta Z(J)}{\delta iJ(x)} = \frac{\int D\varphi \varphi(x) e^{i(S(\varphi) + \varphi J)}}{\int D\varphi e^{i(S(\varphi) + \varphi J)}} \equiv \Phi(x|J) \equiv \Phi(x), \quad (2.15)$$

onde vamos assumir que a equação

$$\Phi(x) = \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)}, \quad (2.16)$$

nos permite expressar a fonte  $J(x)$  através do campo médio,  $J = J(x|\Phi)$ .

Finalmente, através da transformada de Legendre do funcional  $W(J)$ , podemos definir a ação efetiva,  $\Gamma(\Phi)$  [64],

$$\Gamma(\Phi) = W(J) - \Phi J. \quad (2.17)$$

## Expansão em *loops* da ação efetiva

Através das relações (2.11) e (2.13) para o funcional gerador das funções de Green e a ação efetiva através da equação (2.17) podemos escrever a seguinte relação

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\Gamma(\Phi) + \Phi J) \right\} = \int D\varphi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S(\varphi) + \varphi J) \right\}, \quad (2.18)$$

onde restauramos  $\hbar$  a fim de ser utilizado como um parâmetro de expansão em *loops*.

A partir do método de campo de fundo, onde o campo  $\varphi$  é dividido em um campo clássico de fundo,  $\Phi$ , e um campo quântico  $\varphi$ :  $\varphi \rightarrow \Phi + \varphi$  é possível mostrar que a expansão em loops da ação efetiva é dada por

$$\Gamma(\Phi) = S(\Phi) + \bar{\Gamma}(\Phi), \quad (2.19)$$

onde  $S(\Phi)$  é a ação clássica e uma contribuição quântica e  $\bar{\Gamma}(\Phi)$  as correções quânticas correspondentes. Este último pode ser expandido em uma série de potências em  $\hbar$  resultando na definição a seguir

$$\bar{\Gamma}(\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}(\Phi), \quad (2.20)$$

onde o parâmetro  $n$  representa o número de *loops*. A parte usualmente mais simples e importante, é a contribuição de *1-loop*, dada pela fórmula final

$$\bar{\Gamma}^{(1)}(\Phi) = \frac{i}{2} \ln \text{Det } \hat{H}(\Phi) = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}(\Phi), \quad (2.21)$$

onde  $\hat{H}$  é a forma bilinear da ação

$$\hat{H}(x, y) = S_2(\Phi) = \frac{\delta^2 S(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)}. \quad (2.22)$$

Em geral, para a teoria que inclui férmions, é útil substituir  $\text{Tr}$  pelo supertraço  $s\text{Tr}$  [64], que leva em consideração a paridade de Grassmann dos campos. Isto significa que, o traço funcional de um operador  $\hat{A}$

$$\text{Tr } \hat{A} = \int d^4x \text{tr} \hat{A}(x, y)|_{x=y} \quad (2.23)$$

é tomado com coeficiente +1 para campos bosônicos e -2 para campos fermiônicos.

## 2.3 Uma breve revisão sobre o potencial efetivo no espaço-tempo curvo

O potencial efetivo  $V_{eff}(\phi)$  é definido como o termo de ordem zero na expansão em derivadas da ação efetiva do campo escalar de fundo  $\phi(x)$ ,

$$\Gamma(\phi, g_{\mu\nu}) = \int d^Dx \sqrt{g} \left[ -V_{eff}(\phi) + \frac{1}{2} Z(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \dots \right], \quad (2.24)$$

em que  $D$  é a dimensão do espaço-tempo.

A partir da expansão em *loops* da ação efetiva o potencial efetivo é dado por

$$\int d^Dx \sqrt{g} \bar{V}^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} \Big|_{\phi=const} \quad (2.25)$$

onde  $\bar{V}^{(1)}(\phi)$  é a correção de *1-loop* para o potencial efetivo.

A expansão em curvatura de  $\bar{V}^{(1)}(\phi)$  tem a seguinte forma

$$\bar{V}^{(1)} = \bar{V}_0^{(1)} + \bar{V}_1^{(1)} + \dots, \quad (2.26)$$

em que  $\bar{V}_0^{(1)}$  é o resultado bem conhecido do potencial efetivo no espaço-tempo plano e  $\bar{V}_1^{(1)}$  é a primeira ordem na curvatura escalar  $R$ .

A parte do espaço plano do potencial efetivo foi obtida muitas vezes e de maneiras diferentes a partir do trabalho de Coleman e Weinberg [78]. No espaço-tempo curvo, o potencial também pode ser calculado de maneiras diferentes — veja por exemplo em Ref. [64] para discussões detalhadas e outras referências). Em todas as aplicações desta tese nos fundamentamos no método de representação de momento local baseado nas coordenadas normais de Riemann [76] (veja também uma introdução simplificada e mais referências em [79]), que é um formalismo útil para cálculos dependentes de massa de quantidades locais, tais como o potencial efetivo [71]. A vantagem dessas coordenadas especiais é que é possível usar métodos de cálculos do espaço plano, como representação de momento, e aplicar uma expansão em potências do tensor de curvatura e suas derivadas covariantes no ponto  $P$  para todas as quantidades relevantes. O método é muito eficiente, especialmente para calcular quantidades locais.

Como já mencionamos, uma das aplicações mais simples dessa técnica é a obtenção do potencial efetivo [71]. A idéia principal é avaliar a dependência da curvatura do determinante funcional na Eq. (2.25) por meio da função do Green  $\bar{G}$ , definida como

$$\hat{H} \bar{G} = -\delta^D(x - x'), \quad (2.27)$$

em que  $\delta^D(x - x')$  é a função delta de Dirac no espaço-tempo plano de Minkowski. A função de Green  $\bar{G}$  pode ser expressa na representação de momento local através do uso de coordenadas normais de Riemann [76]. O ponto crucial por trás da Eq. (2.27) é que o lado direito não dependa do tensor métrico, assim, podemos usar a relação

$$\text{Tr} \ln \hat{H} = - \text{Tr} \ln \bar{G}, \quad (2.28)$$

para obter a dependência do tensor de curvatura na Eq. (2.25).

Vamos enfatizar que em todos os exemplos conhecidos o potencial efetivo pode ser obtido resolvendo a equação do grupo de renormalização para a ação efetiva, em ambos espaço-tempo plano [65] e curvo [66] (veja por exemplo na Ref. [64] para introdução detalhada e referências adicionais. A generalização para o modelo com um único escalar estéril é feita em estreita analogia com a abordagem padrão, mas com algumas modificações devido à presença de termos de interação ímpares [62].

A equação do grupo de renormalização para a ação efetiva tem a forma [64, 80]

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_P \frac{\partial}{\partial P} + \int d^D x \gamma_\Phi \Phi \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \right\} \Gamma(g_{\alpha\beta}, \Phi, P, D, \mu) = 0, \quad (2.29)$$

onde assumimos a soma sobre todos os parâmetros (acoplamentos e massas)  $P$  e os campos  $\Phi = (\varphi, \chi, \Psi_k)$ . O potencial efetivo satisfaz a mesma equação, devido à separação de termos diferentes em (2.24). Em seguida, o resultado para, por exemplo, um único campo escalar pode ser apresentado como uma expressão geral simbólica

$$\begin{aligned} V_{eff} = & -\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \xi R \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{g}{3!} \varphi^3 + \tau \varphi + f R \varphi \\ & - \frac{1}{4} \varphi^2 (\beta_{m^2} + 2m^2 \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{1*}^2}{\mu^2} \right) + C_1 \right] - \frac{1}{4} R \varphi^2 (\beta_\xi + 2\xi \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{2*}^2}{\mu^2} \right) + C_2 \right] \\ & + \frac{1}{12} \varphi^3 (\beta_g + 3g \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{3*}^2}{\mu^2} \right) + C_3 \right] + \frac{1}{48} \varphi^4 (\beta_\lambda + 4\lambda \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{4*}^2}{\mu^2} \right) + C_4 \right] \\ & + \frac{1}{2} \varphi (\beta_\tau + \tau \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{5*}^2}{\mu^2} \right) + C_5 \right] + \frac{1}{2} R \varphi (\beta_f + f \gamma_\varphi) \left[ \ln \left( \frac{\varphi_{6*}^2}{\mu^2} \right) + C_6 \right], \quad (2.30) \end{aligned}$$

onde todas as funções betas e gamas podem ser obtidas como mostrado em [62]. O conjunto das constantes  $C_1 \dots C_6$  na última expressão (2.30) pode ser encontrado a partir das condições iniciais de renormalização. Por exemplo, os dois valores conhecidos, correspondentes às escolhas padrão no caso escalar não massivo, são  $C_4 = -\frac{25}{6}$  obtida em [65] e  $C_2 = -3$  em [64, 66].

As expressões simbólicas  $\ln \left( \frac{\varphi_{k*}^2}{\mu^2} \right)$  com  $k = 1, 2, \dots, 6$ , na fórmula (2.30) dependem da teoria em consideração. No modelo com um único escalar estéril [62], por exemplo, essas quantidades aparecem como combinações lineares dos logaritmos

$$t^{(0)} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{m^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 + g \varphi}{\mu^2} \right] \quad (2.31)$$

para as contribuições escalares e

$$t^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(M + h\varphi)^2}{\mu^2} \right]. \quad (2.32)$$

para as contribuições fermiônicas para o potencial efetivo. Dessa forma, os logaritmos (2.31) e (2.32) são usados como um *Ansatz*<sup>1</sup> eficiente para resolver a equação do grupo de renormalização para o potencial efetivo.

No caso sem massa ou no limite de grandes escalares, deve-se esperar que o comportamento assintótico de todos os termos seja

$$\ln\left(\frac{\varphi_{k*}^2}{\mu^2}\right) \propto \ln\left(\frac{\varphi^2}{\mu^2}\right). \quad (2.33)$$

No capítulo 5, iremos testar em detalhes essas propriedades em um modelo de Yukawa com dois escalares, um usual e outro axial.

## 2.4 Formalismo de campo de fundo para teorias de calibre

Esta seção apresenta uma breve revisão do formalismo de campo de fundo para uma teoria de calibre descrita por uma ação inicial  $S_0(A)$  com campos  $A = \{A^i\}$ ,  $\varepsilon(A^i) = \varepsilon_i$  invariantes sob transformações de calibre

$$S_{0,i}(A)R_\alpha^i(A) = 0, \quad \delta A^i = R_\alpha^i(A)\xi^\alpha, \quad (2.34)$$

onde  $R_\alpha^i(A)$ ,  $\varepsilon(R_\alpha^i(A)) = \varepsilon_i + \varepsilon_\alpha$  são os geradores das transformações de calibre,  $\xi^\alpha$ ,  $\varepsilon(\xi^\alpha) = \varepsilon_\alpha$  são funções arbitrárias. Em geral, um conjunto de campos  $A^i = (A^{\alpha k}, A^m)$  inclui campos  $A^{\alpha k}$  do setor de calibre e também campos and  $A^m$  do setor de matéria de uma dada teoria. Assumimos que os geradores  $R_\alpha^i = R_\alpha^i(A)$  satisfazem uma álgebra fechada com coeficientes de estrutura  $F_{\alpha\beta}^\gamma$  que não depende dos campos,

$$R_{\alpha,j}^i R_\beta^j - (-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} R_{\beta,j}^i R_\alpha^j = -R_\gamma^i F_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (2.35)$$

onde denotamos a derivada funcional pela direita como  $\delta_r X / \delta A^i = X_{,i}$ . Os coeficientes de estrutura satisfazem as propriedades de simetria  $F_{\alpha\beta}^\gamma = -(-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} F_{\beta\alpha}^\gamma$ . Também assumimos que os geradores são operadores lineares em  $A^i$ ,  $R_\alpha^i(A) = t_{\alpha j}^i A^j + r_\alpha^i$ .

---

<sup>1</sup>Ansatz é um palpite fundamentado que é verificado posteriormente por seus resultados.



Aplicamos o método de campo de fundo (MCF) [81–83] substituindo os campos  $A^i$  por  $A^i + \mathcal{B}^i$  na ação clássica  $S_0(A)$ ,

$$S_0(A) \longrightarrow S_0(A + \mathcal{B}). \quad (2.36)$$

Aqui  $\mathcal{B}^i$  são campos vetoriais externos (de fundo) sendo diferente de zero apenas no setor de calibre. A ação  $S_0(A + \mathcal{B})$  obedece a invariância de calibre na seguinte forma

$$\delta S_0(A + \mathcal{B}) = 0, \quad \delta A^i = R_\alpha^i(A + \mathcal{B})\xi^\alpha. \quad (2.37)$$

Através da quantização de Faddeev-Popov [84] o espaço de configuração do campo é estendido para

$$\phi^A = (A^i, B^\alpha, C^\alpha, \bar{C}^\alpha), \quad \varepsilon(\phi^A) = \varepsilon_A, \quad (2.38)$$

onde  $C^\alpha$ ,  $\bar{C}^\alpha$  são os campos fantasma e anti-fantasma de Faddeev-Popov, respectivamente, e  $B^\alpha$  é o campo (Nakanishi-Lautrup) auxiliar. A distribuição das paridades de Grassmann é a seguinte

$$\varepsilon(C^\alpha) = \varepsilon(\bar{C}^\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1, \quad \varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon_\alpha. \quad (2.39)$$

A ação correspondente de Faddeev-Popov  $S_{FP}(\phi, \mathcal{B})$  na fixação de calibre singular tem a forma [84]

$$S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) = S_0(A + \mathcal{B}) + S_{gh}(\phi, \mathcal{B}) + S_{gf}(\phi, \mathcal{B}) \quad (2.40)$$

em que

$$S_{gh}(\phi, \mathcal{B}) = \bar{C}^\alpha \chi_{\alpha,i}(A, \mathcal{B}) R_\beta^i(A + \mathcal{B}) C^\beta, \quad (2.41)$$

$$S_{gf}(\phi, \mathcal{B}) = B^\alpha \chi_\alpha(A, \mathcal{B}). \quad (2.42)$$

Na última expressão  $\chi_\alpha(A, \mathcal{B})$  são funções que controlam a degenerescência da ação  $S_0(A + \mathcal{B})$ . A condição de calibre padrão no método de campo de fundo é linear nos campos quânticos

$$\chi_\alpha(A, \mathcal{B}) = F_{\alpha i}(\mathcal{B}) A^i. \quad (2.43)$$

A ação (2.40) é invariante sob as transformações de BRST [85,86]

$$\delta_B \phi^A = s^A(\phi, \mathcal{B})\mu, \quad \varepsilon(s^A(\phi, \mathcal{B})) = \varepsilon_A + 1, \quad (2.44)$$

onde

$$s^A(\phi, \mathcal{B}) = \left( R_\alpha^i(A + \mathcal{B})C^\alpha, 0, -\frac{1}{2}F_{\beta\gamma}^\alpha C^\gamma C^\beta (-1)^{\varepsilon_\beta}, (-1)^{\varepsilon_\alpha} B^\alpha \right) \quad (2.45)$$

e  $\mu$  é um parâmetro constante de Grassmann com  $\varepsilon(\mu) = 1$ . Podemos escrever (2.45) como os geradores das transformações de BRST,

$$\hat{s}(\phi, \mathcal{B}) = \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^A} s^A(\phi, \mathcal{B}). \quad (2.46)$$

Então, a ação (2.40) pode ser escrita na forma

$$S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) = S_0(A + \mathcal{B}) + \Psi(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B}), \quad (2.47)$$

em que

$$\Psi(\phi, \mathcal{B}) = \bar{C}^\alpha \chi_\alpha(A, \mathcal{B}), \quad (2.48)$$

é a fixação de calibre funcional. A transformação (2.44) é nilpotente, isso significa que  $\hat{s}^2 = 0$ . Levando em conta que  $S_0(A + \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B}) = 0$ , a simetria BRST de  $S_{FP}(\phi, \mathcal{B})$  é escrita da seguinte forma

$$S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (2.49)$$

Devido à presença de campo vetorial externo  $\mathcal{B}^i$ , a ação de Faddeev-Popov obedece a uma simetria local adicional conhecida como simetria de campo de fundo,

$$\delta_\omega S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) = 0, \quad (2.50)$$

que está relacionado às transformações do campo de fundo

$$\begin{aligned} \delta_\omega^{(c)} \mathcal{B}^i &= R_\alpha^i(\mathcal{B})\omega^\alpha, \\ \delta_\omega^{(g)} A^i &= [R_\alpha^i(A + \mathcal{B}) - R_\alpha^i(\mathcal{B})]\omega^\alpha, \\ \delta_\omega^{(g)} B^\alpha &= -F_{\gamma\beta}^\alpha B^\beta \omega^\gamma, \\ \delta_\omega^{(g)} C^\alpha &= -F_{\gamma\beta}^\alpha C^\beta \omega^\gamma (-1)^{\varepsilon_\gamma}, \\ \delta_\omega^{(g)} \bar{C}^\alpha &= -F_{\gamma\beta}^\alpha \bar{C}^\beta \omega^\gamma (-1)^{\varepsilon_\gamma}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Aqui o subscrito ( $c$ ) é usado para indicar as transformações do campo de fundo no setor de campos externos (clássicos) enquanto o ( $q$ ) no setor de campos quânticos (variáveis de integração na integral funcional para o funcional gerador das funções de Green). O símbolo  $\delta_\omega$  significa as transformações combinadas do campo de fundo  $\delta_\omega = \delta_\omega^{(c)} + \delta_\omega^{(q)}$ . Note que, para obter (2.50), assumimos a seguinte regra de transformação para as funções de fixação de calibre (2.43)

$$\delta_\omega \chi_\alpha(\phi, \mathcal{B}) = -\chi_\beta(\phi, \mathcal{B}) F_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma, \quad (2.52)$$

sob as transformações de campo de fundo (2.51). É útil introduzir o gerador das transformações de campo de fundo  $\hat{\mathcal{R}}_\omega(\phi, \mathcal{B})$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_\omega(\phi, \mathcal{B}) &= \int dx \left( \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \mathcal{B}_\mu^a} \delta_\omega^{(c)} \mathcal{B}_\mu^a + \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi^i} \delta_\omega^{(q)} \phi^i \right) \\ &= \hat{\mathcal{R}}_\omega^{(c)}(\mathcal{B}) + \hat{\mathcal{R}}_\omega^{(q)}(\phi), \end{aligned} \quad (2.53)$$

em que  $\phi^j \hat{\mathcal{R}}_\omega^{(q)}(\phi) = \hat{\mathcal{R}}_\omega^j(\phi)$  e

$$\hat{\mathcal{R}}_\omega^j(\phi) = (\mathcal{R}_\omega^{(q)}(A), \mathcal{R}_\omega^{(q)}(B), \mathcal{R}_\omega^{(q)}(C), \mathcal{R}_\omega^{(q)}(\bar{C})). \quad (2.54)$$

Usando as novas notações (2.53), a invariância de campo de fundo da ação de Faddeev-Popov (2.50) é reescrita na forma

$$S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) \hat{\mathcal{R}}_\omega(\phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (2.55)$$

As simetrias (2.49) e (2.55) da ação de Faddeev-Popov levam a duas propriedades muito importantes no nível quântico. Para revelar essas consequências, temos que introduzir o funcional gerador das funções Green estendido no MCF na forma da integral funcional

$$Z(J, \phi^*, \mathcal{B}) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + \phi^*(\phi\hat{s}) + J\phi] \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W(J, \phi^*, \mathcal{B}) \right\}, \quad (2.56)$$

onde  $W = W(J, \phi^*, \mathcal{B})$  é o funcional gerador estendido das funções de Green conectadas e

$$J_A = (J_i, J_\alpha^B, \bar{J}_\alpha, J_\alpha) \quad (2.57)$$

são as fontes externas para os campos  $\phi^A$  ( $\varepsilon(J_A) = \varepsilon_A$ ). Além disso, as novas quantidades (anti-campos)  $\phi_A^*$ , com  $\varepsilon(\phi_A^*) = \varepsilon_A + 1$ , são as fontes das transformações de BRST.

A introdução dos anti-campos nos permite simplificar o uso da simetria de BRST no nível quântico. O próximo passo é introduzir a ação efetiva estendida  $\Gamma = \Gamma(\Phi, \phi^*, \mathcal{B})$  através das transformações de Legendre de  $W(J, \phi^*, \mathcal{B})$

$$\Gamma(\Phi, \phi^*, \mathcal{B}) = W(J, \phi^*, \mathcal{B}) - J\Phi, \quad (2.58)$$

em que

$$\Phi^A = \frac{\delta_l W}{\delta J_A} \quad \text{e} \quad \frac{\delta_r \Gamma}{\delta \Phi^A} = -J_A. \quad (2.59)$$

De um lado, pode-se provar que a simetria BRST (2.49) de  $S_{FP}$  resulta na identidade Slavnov-Taylor [87, 88]

$$\frac{\delta_r \Gamma}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_l \Gamma}{\delta \phi_A^*} = 0. \quad (2.60)$$

Por outro lado, a simetria de campo de fundo (2.55) de  $S_{FP}$  leva à simetria da ação efetiva sob as transformações de campo de fundo,

$$\tilde{\Gamma}(\Phi, \mathcal{B}) \hat{\mathcal{R}}_\omega(\Phi, \mathcal{B}) = 0, \quad \tilde{\Gamma}(\Phi, \mathcal{B}) = \Gamma(\Phi, \phi^* = 0, \mathcal{B}). \quad (2.61)$$

O objeto fundamental do método do campo de fundo é a ação efetiva de fundo  $\Gamma(\mathcal{B}) \equiv \tilde{\Gamma}(\Phi = 0, \mathcal{B})$ . Graças à linearidade de  $\hat{\mathcal{R}}_\omega(\Phi, \mathcal{B})$  com respeito aos campos médios  $\Phi^i$ , a partir de (2.61) segue que

$$\delta_\omega^{(c)} \Gamma(\mathcal{B}) = 0, \quad \delta_\omega^{(c)} \mathcal{B}^i = R_\alpha^i(\mathcal{B}) \omega^\alpha, \quad (2.62)$$

isto é, a ação efetiva de fundo é um funcional invariante de calibre do campo externo  $\mathcal{B}^i$ .

A última característica importante da quantização de Faddeev-Popov é relacionada a universalidade da matriz  $S$ , que é independente da escolha de calibre. De acordo com o resultado bem conhecido [89], a universalidade da matriz  $S$  é equivalente a independência de calibre no funcional de vácuo. No formalismo de campo de fundo esse funcional é definido a partir de (2.56) como

$$Z_\Psi(\mathcal{B}) = Z(\mathcal{B}, J = \phi^* = 0) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) \right\}. \quad (2.63)$$

Independentemente deste objeto depender do campo de fundo, o mesmo é construído para uma certa escolha de calibre  $\Psi(\phi, \mathcal{B})$ . No entanto, pode-se mostrar que este é independente

dessa escolha. Sem a presença do campo de fundo, a discussão deste problema na teoria quântica de campos usual e na abordagem do GRF pode ser encontrada na Ref. [58]. Aqui nós generalizamos para o caso do método de campo de fundo.

Tomando uma mudança infinitesimal do funcional de fixação de calibre,  $\Psi(\phi, \mathcal{B}) \rightarrow \Psi(\phi, \mathcal{B}) + \delta\Psi(\phi, \mathcal{B})$ , obtemos

$$Z_{\Psi+\delta\Psi}(\mathcal{B}) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + \delta\Psi(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B}) \right] \right\}. \quad (2.64)$$

Em seguida, após uma mudança de variáveis na forma da transformação BRST (2.44) mas com substituição do parâmetro constante  $\mu$  pelo funcional

$$\mu(\phi, \mathcal{B}) = \frac{i}{\hbar} \delta\Psi(\phi, \mathcal{B}), \quad (2.65)$$

pode-se mostrar que

$$Z_{\Psi+\delta\Psi}(\mathcal{B}) = Z_{\Psi}(\mathcal{B}), \quad (2.66)$$

que é o ponto de partida para a prova da independência de calibre da matriz  $S$  [89,90]. No capítulo 4, veremos como essas e outras características para o caso da teoria de Yang-Mills se manifestam através da abordagem do grupo de renormalização funcional.

## 2.5 A abordagem do grupo de renormalização funcional

Nesta seção vamos fazer uma breve introdução aos fundamentos do GRF. Para isso vamos nos basear principalmente nas notas de revisão [47] e no cap. 12 do livro didático de Andreas Wipf [49] (veja também outras bibliografias [42–48, 91]).

Um conceito base da teoria quântica de campos é o grupo de renormalização, que descreve como a física muda de acordo com a escala de energia na qual investigamos o sistema. O grupo de renormalização lida com a física das escalas tendo como tema principal, o entendimento da física macroscópica a longas distâncias (ou baixos momentos) em termos de interações microscópicas fundamentais.

O GRF é uma implementação particular que contém o grupo de renormalização exato, formulado por Polchinski [91] para TQC. Essa implementação é feita a partir do conceito

de grupo de renormalização que combina métodos funcionais de TQC com a idéia do grupo de renormalização de Wilson [92]. A partir desses métodos funcionais podemos obter os funcionais geradores do qual extraímos a ação efetiva média. O método é não-perturbativo e possui como ferramenta principal a equação de fluxo ou equação de Wetterich para a ação efetiva média. Esta equação de fluxo descreve a evolução das funções de correlação ou seus funcionais geradores sob a influência de flutuações. Ela conecta uma quantidade inicial bem definida, por exemplo, as funções de correlação microscópica em um domínio perturbativo, de maneira exata com as funções de correlação completa desejadas após a integração das flutuações. Assim, resolver a equação de fluxo corresponde a resolver a teoria completa.

A idéia principal do GRF é usar em vez de  $\Gamma$  uma ação média efetiva,  $\Gamma_k$ , com um parâmetro de momento  $k$ , de modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma. \quad (2.67)$$

O primeiro passo é introduzir funcionais dependentes da escala, um termo "regulador", como a ação dependente de escala  $S_k$  que é o *cut-off* IV para a ação clássica no funcional gerador das funções de correlações de  $n$ -pontos Euclidianas (2.11). Fazendo isso, encontramos

$$Z_k(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{i[-S(\phi) + \phi J - S_k(\phi)]} = \exp\{iW_k(J)\}, \quad (2.68)$$

onde  $W_k(J)$  é o funcional gerador das funções de Green conectadas dependente de escala.

Para as teorias de Yang-Mills, é sugerido modificar a ação de Faddeev-Popov com a ajuda da ação reguladora especialmente projetada  $S_k$ ,

$$S_k(A, C, \bar{C}) = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^a(x) R_k^{ab}{}_{\mu\nu}(x) A_\nu^b(x) + \bar{C}^a(x) R_k^{ab}(x) C^b(x) \right\}, \quad (2.69)$$

onde  $R_k^{ab}{}_{\mu\nu}(x)$  e  $R_k^{ab}(x)$  são as funções reguladoras.

Em geral, as funções reguladoras  $R_k(p)$  para um momento associado  $p$  possui certas condições, sendo elas:

- Recuperar a ação efetiva para  $k \rightarrow 0$ :  $R_k(p) \rightarrow 0$  para  $p$  fixo  $\Rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ ,
- Recuperar a ação clássica na escala UV,  $k \rightarrow \Lambda$ :  $R_k(p) \rightarrow \infty \Rightarrow \Gamma_\Lambda \rightarrow S$ ,

- Regularização da teoria no IV:  $R_k(p) > 0$  para  $p \rightarrow 0$ .

Alguns possíveis *cut-offs* são

→ o regulador exponencial:  $R_k(p) = \frac{p^2}{e^{p^2/k^2} - 1}$ ,

→ o regulador otimizado:  $R_k(p) = (k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2)$ ,

→ o regulador quártico:  $R_k(p) = k^4/p^2$ ,

→ o regulador *sharp*:  $R_k(p) = \frac{p^2}{\Theta(k^2 - p^2)} - p^2$ ,

→ o regulador Callan-Symanzik:  $R_k(p) = k^2$ ,

onde  $\Theta$  é a função de Heaviside.

A ação efetiva média,  $\Gamma_k$  é definida através da transformada de Legendre do funcional  $W_k$ ,

$$\Gamma_k(\Phi) = W_k(J) - J\Phi, \quad (2.70)$$

onde  $\Phi(x)$  é o campo médio da teoria regularizada com fonte externa  $J(x)$ , dado por

$$\Phi(x) = \frac{\delta W_k(J)}{\delta J(x)}. \quad (2.71)$$

A partir da ação efetiva média, é possível obter a seguinte equação de fluxo [49]

$$\partial_t \Gamma_k(\Phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k''(\Phi) + R_k} \right). \quad (2.72)$$

Esta é a equação de Wetterich, uma equação diferencial funcional exata não linear que contém o propagador completo e é capaz de fornecer todas as informações físicas do sistema.

No Cap. 4, usaremos a abordagem do GRF aplicado a teorias de calibre usando o MCF com o objetivo de estudar a simetria de campo de fundo e a dependência de calibre na ação efetiva média de fundo, objeto principal nesse formalismo.

## 2.6 O método de Schwinger-DeWitt

Um formalismo bem conhecido e importante, formulado independentemente por Schwinger [93] e DeWitt [2] é conhecido como método (ou técnica) de Schwinger-DeWitt. Esse formalismo é uma ferramenta bastante útil e elegante de calcular de maneira covariante as correções quânticas a *1-loop* para a ação efetiva. A seguir, vamos introduzir

esse método, fazendo uma breve revisão sobre as principais equações e argumentos que utilizaremos mais tarde.

A ação efetiva de 1-loop (2.21),  $\Gamma^{(1)}$ , pode ser escrita na representação da integral de tempo próprio (s) como

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}, \quad (2.73)$$

onde a quantidade  $K(s) = e^{-is\hat{H}}$  é conhecida como *heat kernel*.

A representação de coordenadas deste operador deve satisfazer a equação de Schrödinger,

$$i \frac{\partial \hat{K}(x, x'; s)}{\partial s} = -\hat{H} \hat{K}(x, x'; s) \quad (2.74)$$

com a condição inicial  $\hat{K}(x, x'; 0) = \delta(x, x')$ . Considere que operador  $\hat{H}$  possa ser escrito na forma mínima a seguir [94]

$$\hat{H} = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \quad (2.75)$$

onde

$$\hat{\Pi} = \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}R + \nabla_\mu \hat{h}^\mu + \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu. \quad (2.76)$$

Nesta tese, apenas lidaremos com o operador bilinear na forma mínima. Entretanto, existem teorias onde é necessário lidar com operadores  $\hat{H}$  não-mínimos. Nesses casos, pode-se usar a versão generalizada da técnica de Schwinger-DeWitt proposta por A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky [95].

Com a forma do operador mínimo (2.75), a equação (2.74) pode ser resolvida por uma expansão em séries através da seguinte expressão

$$\hat{K}(x, x'; s) = -\frac{i}{(4\pi s)^\omega} [D(x, x')]^{1/2} e^{\frac{i\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s} \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \quad (2.77)$$

onde  $[D(x, x')]$  é o determinante de Van Vleck-Morette [96],  $\sigma(x, x')$  é a distância geodésica entre os pontos  $x$  e  $x'$  e  $\hat{a}_k(x, x')$  são os coeficientes de Schwinger-DeWitt.



Pode-se calcular os coeficientes de Schwinger-DeWitt no limite de coincidência,  $\lim_{x' \rightarrow x} \hat{a}_k(x, x')$ . O resultado é

$$\hat{a}_0(x, x) = \hat{1}, \quad (2.78)$$

$$\hat{a}_1(x, x) = \hat{P}, \quad (2.79)$$

$$\hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180}(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\square\hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{S}_{\mu\nu}^2. \quad (2.80)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \\ \hat{S}_{\mu\nu} &= \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Finalmente, a análise de DeWitt [2] mostra que em  $D = 4$  a parte divergente da ação efetiva pode ser expressa como

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \hat{a}_2(x, x), \quad (2.82)$$

onde  $\epsilon = (4\pi)^2(n-4)$  é o parâmetro da regularização dimensional [97]. Tais divergências proporcionais ao coeficiente  $\hat{a}_2$  são logarítmicas e são usadas para definir noções importantes como, por exemplo, as funções  $\beta$  no grupo de renormalização.

A equação (2.82) é uma ferramenta importante e uma das maneiras menos complicadas de calcular as divergências de *1-loop* em diversos modelos de teorias de campo no espaço-tempo curvo. No cap. 5 dessa tese, vamos descrever sua aplicação afim de calcular as divergências de *1-loop* para o modelo de Yukawa com dois escalares no espaço-tempo curvo.

## CAPÍTULO 3

---

### Quantização estocástica do campo escalar não-mínimo e auto-interagente no espaço-tempo curvo

---

*"Perseverance, not expediency,  
is the only way to attain new  
knowledge".*

PLB referee's report

---

A investigação de aspectos quânticos da interação gravitacional tem um papel importante em física teórica de altas energias. Uma forma bem sucedida atualmente de construir modelos quânticos gravitacionais é aplicar métodos de Teoria Quântica de Campos (TQC) no espaço-tempo curvo em teorias do campo gravitacional interagindo com a matéria que corresponde a uma abordagem semiclássica da gravitação, em que apenas os campos de matéria são quantizados, enquanto a métrica é tratada apenas como um campo clássico externo.

Neste capítulo, apresentaremos uma consideração sistemática da quantização estocástica na abordagem da gravitação semiclássica em um espaço-tempo curvo arbitrário. Partindo

da forma covariante da equação de Langevin para um campo escalar massivo não-mínimo auto-interagente no espaço-tempo curvo, desenvolvemos um esquema computacional baseado na representação de momento local para obter correções quânticas de *multi-loops* para a solução clássica. As correções *multi-loops* são obtidas através de uma expansão simultânea no tensor de curvatura e nos campos de ruído. Para testar analiticamente o formalismo, calculamos a função de correlação do campo escalar e o potencial efetivo para em primeira ordem em  $\hbar$  e no tensor de curvatura. Os resultados são exatamente os mesmos obtidos por outros métodos, confirmando a exatidão da formulação covariante da equação de Langevin. Além disso, mostramos que a expansão *multi-loops* converge para a solução completa não-perturbativa comparando as soluções numéricas expandidas para o campo do ruído e não-perturbativas da equação de Langevin na primeira ordem em curvatura no caso particular em que  $D = 3$ .

### 3.1 Função de correlação e potencial efetivo via quantização estocástica

Estamos interessados na teoria do campo escalar massivo auto-interagente  $\varphi$  não-minimamente acoplado com gravidade, descrito pela seguinte ação

$$S = \int d^D x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) \varphi^2 + V(\varphi) \right], \quad (3.1)$$

em que  $R$  é a curvatura escalar e  $V(\varphi)$  é um potencial, e  $m^2 > 0$  ou  $m^2 < 0$ , sendo este último o caso de quebra espontânea de simetria.  $\xi R \varphi^2$  é o termo não-mínimo e  $\xi$  o parâmetro não-mínimo, enquanto que  $m^2 \varphi^2 + V(\varphi)$  é a parte mínima do potencial clássico. Para a parte analítica do nosso trabalho apresentado nesta seção, iremos usar a notação compacta e mais geral  $V(\varphi)$  para a forma do potencial, para os cálculos numéricos usaremos a função  $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \varphi^4$ , com  $\lambda > 0$ . É importante ressaltar que utilizamos desde o início a notação do espaço euclidiano. Isso não é uma exigência e sim conveniência, com o propósito de facilitar a aplicação das simulações numéricas. Nestas simulações, iremos considerar o caso de quebra espontânea de simetria.

Vamos começar escrevendo a equação de Langevin no espaço-tempo curvo na forma

covariante,

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta \varphi(x, \tau)} + \eta_c(x, \tau), \quad (3.2)$$

em que  $S$  é a ação definida anteriormente em Eq. (3.1) e  $\eta_c(x, \tau)$  é o campo de ruído branco "covariante". Por covariante queremos dizer que o ruído branco gaussiano obedece às seguintes correlações (relações generalizadas de Einstein)

$$\langle \eta(x, \tau) \rangle_\eta = 0, \quad (3.3)$$

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = 2\hbar \delta_c(x, x') \delta(\tau - \tau'), \quad (3.4)$$

onde  $\langle \dots \rangle_\eta$  significa média estocástica e  $\delta_c(x, x')$  é a função delta covariante, que é simétrica nos argumentos  $x$  e  $x'$  e também satisfaz

$$\int d^D y \sqrt{g(y)} f(y) \delta_c(x, y) = f(x). \quad (3.5)$$

Não é difícil verificar que a solução para esta função delta é

$$\delta_c(x, x') = g^{-1/4} \delta^D(x - x') g'^{-1/4}, \quad (3.6)$$

em que  $g = g(x)$ ,  $g' = g(x')$  e  $\delta^D(x - x')$  é a função delta de Dirac comum no espaço plano. Embora tenhamos usado e continuemos a usar  $\hbar = 1$  a seguir, escrevemos explicitamente na Eq. (3.4) para lembrar a natureza quântica dos campos de ruído.

O uso de ruído branco é uma questão de simplicidade, embora o ruído colorido naturalmente forneça um corte ultravioleta que regulariza o comportamento ultravioleta da teoria de campo [98], uma ferramenta bem-vinda para o programa de renormalização em simulações numéricas de rede [99]. Vamos salientar que o uso do ruído branco em um espaço curvo geral é uma questão complicada, e aqui resolvemos isso usando coordenadas normais, ou seja, definimos o ruído branco efetivamente no espaço plano.

Estamos interessados em calcular a função de correlação  $G_c(x, x')$ . Esta função de correlação é obtida como

$$G_c(x, x') = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta(x, x' | \tau), \quad (3.7)$$

onde

$$\Delta(x, x' | \tau) = \langle \varphi(x, \tau) \varphi(x', \tau) \rangle_\eta - \langle \varphi(x, \tau) \rangle_\eta \langle \varphi(x', \tau) \rangle_\eta. \quad (3.8)$$

Para a ação na Eq. (3.1), a equação de Langevin Eq. (3.2) é

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = - [-\square + m^2 + \xi R] \varphi(x, \tau) - V'(\varphi(x, \tau)) + \eta_c(x, \tau). \quad (3.9)$$

Para compararmos com os resultados disponíveis na literatura, obtidos no contexto da expansão em *loops*, vamos resolver esta equação com uma expansão em potências de  $\hbar$ . A partir da Eq. (3.4), podemos ver que  $\eta = \mathcal{O}(\hbar^{1/2})$ . Vamos escrever para o campo  $\varphi(x, \tau)$  a seguinte expansão

$$\varphi(x, \tau) = \phi(x) + \varphi^{(1)}(x, \tau) + \varphi^{(2)}(x, \tau) + \dots, \quad (3.10)$$

onde  $\phi(x)$  é o campo de fundo clássico  $\mathcal{O}(\hbar^0)$  e  $\varphi^{(n)}(x, \tau)$  são correções quânticas de ordem  $\mathcal{O}(\hbar^{n/2})$ . Usando a expansão no potencial, obtém-se

$$\begin{aligned} V'(\varphi(x, \tau)) &= V'(\phi) + V''(\phi) \varphi^{(1)}(x, \tau) + V'''(\phi) \varphi^{(2)}(x, \tau) \\ &+ \frac{1}{2} V''''(\phi) [\varphi^{(1)}(x, \tau)]^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\dots$  representam as próximas contribuições de ordem com  $n > 2$ . Substituindo Eqs. (3.10) e (3.11) na equação de Langevin Eq. (3.9) e igualando termos da mesma ordem em  $\hbar$ , encontramos o seguinte conjunto de equações para o campo  $\varphi^{(n)}$ :

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial \tau} = - [-\square + m^2 + \xi R] \phi(x) - V'(\phi), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} = - [-\square + m^2 + \xi R + V''(\phi)] \varphi^{(1)}(x, \tau) + \eta_c(x, \tau), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(2)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= - [-\square + m^2 + \xi R + V''(\phi)] \varphi^{(2)}(x, \tau) \\ &- \frac{1}{2} V''''(\phi) [\varphi^{(1)}(x, \tau)]^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e da mesma forma para  $n > 2$ . Este conjunto é formado por equações lineares que podem, em princípio, ser resolvidas por iterações. Observamos que um procedimento de expansão de ruído foi usado anteriormente em Cosmologia [100–103] em um contexto diferente, não relacionado à quantização estocástica. A referência [104] é a primeira publicação relacionada à perturbação de ruído no contexto da quantização estocástica.

Embora as Eqs. (3.12)-(3.14) são equações lineares, elas não podem ser resolvidas analiticamente em geral quando a solução clássica não é uma constante. Portanto, para o

cálculo analítico do propagador e do potencial efetivo, consideramos  $\phi(x) \equiv \phi_{\text{cl}} = \text{const.}$  As seguintes condições iniciais são assumidas:

$$\varphi(x, 0) = \phi(x) + \varphi^{(1)}(x, 0) + \varphi^{(2)}(x, 0) + \dots = \phi_{\text{cl}}, \quad (3.15)$$

que implicam em

$$\varphi^{(1)}(x, 0) = \varphi^{(2)}(x, 0) = \dots = 0. \quad (3.16)$$

A seguir, descreveremos em detalhes o cálculo da função de correlação, nosso primeiro objetivo, com o intuito de testar a nossa formulação do método de quantização estocástica no espaço-curvo sem a necessidade de fixar a métrica do espaço-tempo.

## 3.2 Função de correlação

Usando a expansão do ruído no campo como na Eq. (3.10) na função de correlação definida na Eq. (3.8), encontramos que

$$\Delta(x, x'|\tau) = \langle \varphi^{(1)}(x, \tau) \varphi^{(1)}(x', \tau) \rangle_{\eta} + \dots, \quad (3.17)$$

assim, no nível de *1-loop*, podemos simplesmente escrever

$$\Delta^{(1\text{-loop})}(x, x'|\tau) = \langle \varphi^{(1)}(x, \tau) \varphi^{(1)}(x', \tau) \rangle_{\eta}. \quad (3.18)$$

Portanto, para obter a função de correlação até a primeira ordem em  $\hbar$ , apenas precisamos resolver a equação de primeira ordem dada na Eq. (3.13).

No formalismo de coordenadas normais, a métrica do espaço-tempo  $g_{\alpha\beta}(x)$  e todas as quantidades relacionadas são expandidas próximo a um ponto  $P(x')$ , onde a métrica é suposta ser plana — isto não é estritamente necessário, embora seja uma restrição útil. A idéia principal geométrica é que geodésias que passam pelo ponto  $P(x')$  têm a mesma forma que equações de retas que passam pela origem de um sistema coordenadas cartesiano na geometria euclidiana. Assim é possível usar a geodésica através desse ponto para definir coordenadas dos pontos próximos.

Através de uma transformação de coordenadas, pode-se demonstrar que o símbolo de Christoffel ( $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ) e as simetrizações de suas derivadas parciais se anulam no ponto P,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x') = 0, \quad \text{e} \quad \partial_{(\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\Gamma_{\alpha\beta)}^\lambda(x') = 0.$$

Isso pode ser provado por uma escolha especial de coordenadas. Veja prova completa e mais detalhes em [79]. Com essa condição é possível mostrar que os termos iniciais da métrica podem ser expressos como a soma de uma parte constante (métrica plana) mais ordens em curvatura. Em primeira ordem na curvatura, temos independente da dimensão o resultado [76]

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{\alpha\mu\beta\nu}(x') y^\mu y^\nu + \dots, \quad (3.19)$$

em que  $x'$  são as coordenadas do ponto  $P$  e  $y^\mu = x^\mu - x'^\mu$  são desvios deste ponto. Os objetos de nosso interesse nesta parte são a função de correlação e o potencial efetivo, que certamente são locais, e, portanto, o método de representação de momento local deve funcionar em qualquer abordagem, incluindo a quantização estocástica.

Antes de iniciar a expansão das coordenadas normais, seguimos Bunch e Parker [105] e introduzimos uma função de correlação não-covariante  $\bar{\Delta}(x, x'|\tau)$  através da relação

$$\Delta(x, x'|\tau) = g^{-1/4} \bar{\Delta}(x, x'|\tau) g'^{-1/4}. \quad (3.20)$$

Em analogia com a Eq. (3.18), podemos também introduzir um novo campo  $\bar{\varphi}$  tal que

$$\bar{\Delta}^{(1-loop)}(x, x'|\tau) = \langle \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}^{(1)}(x', \tau) \rangle, \quad (3.21)$$

onde a relação entre a variável do campo antiga  $\varphi$  e a nova  $\bar{\varphi}$  é dada por  $\varphi = g^{-1/4} \bar{\varphi}$ . Além disso, definindo um novo campo de ruído  $\bar{\eta}$  através da relação  $\eta = g^{-1/4} \bar{\eta}$ , a função de correlação do ruído se reduz a

$$\langle \bar{\eta}(x, \tau) \bar{\eta}(x', \tau') \rangle_\eta = 2 \delta^D(x - x') \delta(\tau - \tau'), \quad (3.22)$$

em que  $\delta^D(x - x')$  é a função delta do espaço-tempo plano. O ponto crucial por trás dessa equação é que seu lado direito não depende do tensor métrico. Assim, após a introdução das coordenadas normais, pode-se usar o procedimento padrão de quantização estocástica

no espaço-tempo plano. Em termos das novas variáveis, depois de multiplicar ambos os lados da Eq. (3.13) pela esquerda por  $g^{1/4}$ , obtém-se

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} = - \left[ -g^{1/4} \square g^{-1/4} + m^2 + \xi R + V''(\phi) \right] \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau) + \bar{\eta}(x, \tau). \quad (3.23)$$

Em seguida, introduzimos a expansão em coordenadas normais e resolvemos a Eq. (3.23) ordem por ordem em uma expansão de curvatura ao redor do espaço-tempo plano. Independentemente do fato de que a derivada covariante comuta com  $g$  em geral, isso não é verdade ordem por ordem na expansão em coordenadas normais, veja por exemplo equações (3.25) e (3.26), onde claramente os termos na primeira ordem nos tensores de curvatura são diferentes. Portanto, a presença dos fatores extras  $g^{\pm 1/4}$  na Eq. (3.23) é um aspecto importante da abordagem. A equação (3.23) tem uma forma adequada para a introdução das coordenadas normais de Riemann. Em particular, estamos interessados nos termos que são de primeira ordem na curvatura. Usando a Eq. (3.19), as expansões de  $R$  e  $\square$  até primeira ordem na curvatura são dadas por

$$R(x) = R(x') + \dots, \quad (3.24)$$

$$\square = \partial^2 + \frac{1}{3} R_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x') y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu - \frac{2}{3} R_\beta^\alpha(x') y^\beta \partial_\alpha + \dots, \quad (3.25)$$

de modo que

$$g^{1/4} \square g^{-1/4} = \partial^2 + \frac{1}{6} R + \frac{1}{3} \left[ R_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x') y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu - R_\beta^\alpha(x') y^\beta \partial_\alpha \right] + \dots, \quad (3.26)$$

em que as derivadas são  $\partial_\alpha = \partial / \partial y^\alpha$ ,  $\partial^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  e  $\dots$  representa os termos de ordens superiores na curvatura e suas derivadas covariantes. No cálculo do potencial efetivo, podemos considerar com segurança  $V''(\phi) = \text{const}$  e simplesmente substituir  $m^2$  por  $\tilde{m}^2 = m^2 + V''(\phi)$  na Eq. (3.23) e no que segue. No final, podemos sempre recuperar a dependência do potencial  $V(\phi)$ . Usando as equações (3.19) e (3.26) na Eq. (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \left( -\partial^2 + \tilde{m}^2 \right) \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau) - \left( \xi - \frac{1}{6} R \right) \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau) \\ &+ \frac{1}{3} \left[ R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu - R_\beta^\alpha y^\beta \partial_\alpha \right] \bar{\varphi}^{(1)}(x, \tau) + \dots + \bar{\eta}(x, \tau). \end{aligned} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) é a equação generalizada de Langevin que nós pretendemos resolver. Ele contém uma expansão infinita na curvatura  $R$  mas pode ser resolvida de forma consistente em todas as ordens com uma expansão na curvatura  $R$  e suas derivadas covariantes no ponto  $P$ .



Procedendo da mesma maneira para todos os  $\varphi^{(n)}$ , isto é, definindo  $\varphi^{(n)} = g^{-1/4} \bar{\varphi}^{(n)}$ , a expansão em  $R$  é obtida expandindo cada um dos  $\bar{\varphi}^{(n)}$  na forma

$$\bar{\varphi}^{(n)}(x, \tau) = \bar{\varphi}_0^{(n)}(x, \tau) + \bar{\varphi}_1^{(n)}(x, \tau) + \cdots, \quad (3.28)$$

onde o sobrescrito  $n$  indica as potências de  $\hbar$  e os subscritos 0 e 1 indicam potências de  $R$  de modo que  $\bar{\varphi}_0^{(n)}$  é  $\mathcal{O}(R^0)$  e  $\bar{\varphi}_1^{(n)}$  é de  $\mathcal{O}(R)$ . Restringimos a expansão à primeira ordem em  $R$ . Através do uso direto dessa expansão nas Eqs. (3.12)-(3.14) obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} = -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) + \bar{\eta}(x, \tau), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau)}{\partial \tau} = -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) - \frac{1}{2} V^{(III)} \left( \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \right)^2, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau) - V^{(III)} \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \\ &\quad - \frac{1}{6} V^{(IV)} \left( \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \right)^3, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(4)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_0^{(4)}(x, \tau) - V^{(III)} \left[ \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau) + \frac{1}{2} \left( \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} V^{(IV)} \left( \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \right)^2 \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau), \end{aligned} \quad (3.32)$$

para o espaço-tempo plano, e

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} = -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau), \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(2)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_1^{(2)}(x, \tau) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \\ &\quad - V^{(III)} \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) - \frac{1}{24} V^{(III)} R_{\mu\nu} y^\mu y^\nu \left(\bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau)\right)^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(3)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_1^{(3)}(x, \tau) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau) \\ &\quad - V^{(III)} \left[ \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(2)}(x, \tau) + \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} V^{(IV)} \left[ \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \right]^2 \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) \\ &\quad - \frac{1}{12} R_{\mu\nu} y^\mu y^\nu \left[ V^{(III)} \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) + \frac{1}{3} V^{(IV)} \left(\bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau)\right)^3 \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(4)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_1^{(4)}(x, \tau) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \bar{\varphi}_0^{(4)}(x, \tau) \\ &\quad - V^{(III)} \left[ \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) + \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(3)}(x, \tau) + \bar{\varphi}_0^{(2)} \bar{\varphi}_1^{(2)}(x, \tau) \right] \\ &\quad - V^{(IV)} \left[ \frac{1}{2} \left(\bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau)\right)^2 \bar{\varphi}_1^{(2)}(x, \tau) + \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x, \tau) \right] \\ &\quad - \frac{1}{12} R_{\mu\nu} y^\mu y^\nu \left\{ V^{(III)} \left[ \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(3)}(x, \tau) + \frac{1}{2} \left(\bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau)\right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + V^{(IV)} \left(\bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau)\right)^2 \bar{\varphi}_0^{(2)}(x, \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

para o espaço-tempo curvo até a primeira ordem em  $R$ . Notamos que o último termo na expansão da Eq. (3.26) não contribui para essas equações porque ele desaparece devido à invariância de Lorentz [105], complementamos essa afirmação apresentando a prova para o nosso caso no Apêndice A.

A expansão da curvatura correspondente a função de correlação de  $1$ -loop Eq. (3.21) é dada por

$$\bar{\Delta}^{(1-loop)}(x, x' | \tau) = \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(x', \tau) \rangle_\eta + 2 \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(x', \tau) \rangle_\eta + \dots, \quad (3.37)$$

onde usamos o fato de que

$$\langle \bar{\varphi}_0(x, \tau) \bar{\varphi}_1(x', \tau) \rangle_\eta = \langle \bar{\varphi}_0(x', \tau) \bar{\varphi}_1(x, \tau) \rangle_\eta, \quad (3.38)$$

uma vez que em primeira ordem na curvatura pode-se simplesmente fazer a troca  $x \leftrightarrow x'$  para as expansões de curvatura nas coordenadas normais, veja, por exemplo, Eq. (3.24). O primeiro termo na Eq. (3.37) corresponde à função de correlação no espaço-tempo plano que já é conhecida, enquanto o segundo é a primeira ordem na correção de curvatura que é a nova quantidade que vamos calcular.

Resolvemos as equações (3.29) e (3.33) usando as transformadas de Fourier dos campos escalares e de ruído,

$$\bar{\varphi}_n^{(1)}(x, \tau) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ikx} \bar{\varphi}_n^{(1)}(k, \tau), \quad (3.39)$$

$$\bar{\eta}(x, \tau) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ikx} \bar{\eta}(k, \tau), \quad (3.40)$$

com  $\langle \bar{\eta}(k, \tau) \bar{\eta}(k', \tau') \rangle_\eta = 2\hbar (2\pi)^D \delta^D(k + k') \delta(\tau - \tau')$ , que segue da Eq. (3.4). As equações (3.29) e (3.33) transformadas são

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau)}{\partial \tau} = - (k^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau) + \bar{\eta}(k, \tau), \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(1)}(k, \tau)}{\partial \tau} = - (k^2 + \tilde{m}^2) \bar{\varphi}_1^{(1)}(k, \tau) - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau). \quad (3.42)$$

O procedimento para encontrar as soluções é resumido de forma geral a seguir. Para isso, introduzimos a função de Green retardada  $G_s(k, \tau)$  para a equação diferencial estocástica, isto é,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (k^2 - \tilde{m}^2) \right] G_s = \delta(\tau), \quad (3.43)$$

com a condição de contorno

$$G_s(k, \tau) = 0, \quad \text{for } \tau < 0. \quad (3.44)$$

A solução da Eq. (3.43) é escrita na forma

$$G_s(k, \tau) = \theta(\tau) e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}, \quad (3.45)$$

em que  $\theta(\tau)$  é a função de Heaviside.

Em nosso caso, notamos que todas as equações de Langevin expandidas no ruído possuem a mesma estrutura, mas dirigidas por diferentes termos "semelhantes ao ruído". Isso

fica claro se escrevemos as equações (3.29)–(3.36), como uma única equação com índice, da seguinte forma

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + (k^2 + \tilde{m}^2) \right] \bar{\varphi}_n^{(a)}(k, \tau) = \bar{\eta}_n^{(a)}(k, \tau), \quad a = 1, 2, 3, 4; \quad n = 0, 1, \quad (3.46)$$

onde  $\bar{\eta}_0^{(1)}(k, \tau) = \bar{\eta}(k, \tau)$  é o ruído padrão que satisfaz a relação (3.22). (Veja também, por exemplo, a forma dos campos de ruído para o caso quando  $a = 4$  e  $n = 0, 1$  no Apêndice B.)

Usando as condições iniciais, equações (3.15) e (3.16), a solução para  $\bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau)$  (que independe de  $R$ ) é dada por

$$\bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau) = \int_0^\tau d\tau' e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau'), \quad (3.47)$$

e a solução para equação de  $\bar{\varphi}_1^{(1)}(k, \tau)$  ( $O(R)$ ) é

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(k, \tau) = - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \int_0^\tau d\tau' e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau'). \quad (3.48)$$

Com as soluções explícitas, pode-se calcular a função de correlação de um *1-loop* enquanto a parte do espaço plano é dada por [36]

$$\langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(x', \tau) \rangle_\eta = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{iky}}{k^2 + \tilde{m}^2} \left[ 1 - e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau} \right], \quad (3.49)$$

a ordem  $R$  é

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(k, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(k', \tau) \rangle_\eta &= - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{iky} \left[ \frac{1 - e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}}{2(k^2 + \tilde{m}^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}}{k^2 + \tilde{m}^2} \right], \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde usamos a expressão dada logo abaixo da Eq. (3.40) para a média estocástica dos campos de ruído no espaço dos momentos. Portanto, a função de correlação de um *1-loop*  $\bar{\Delta}^{(1-loop)}(x, x' | \tau)$  em primeira ordem no tensor de curvatura é

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^{(1-loop)}(x, x' | \tau) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{iky} \left\{ \frac{1 - e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}}{k^2 + \tilde{m}^2} \right. \\ &\quad \left. - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \left[ \frac{1 - e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}}{(k^2 + \tilde{m}^2)^2} - \frac{2\tau e^{-2(k^2 + \tilde{m}^2)\tau}}{k^2 + \tilde{m}^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

No limite do equilíbrio, tem-se

$$\begin{aligned}\bar{G}(x, x') &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\Delta}^{(1-loop)}(x, x' | \tau) \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{iky} \left[ \frac{1}{k^2 + \tilde{m}^2} - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) \frac{R}{(k^2 + \tilde{m}^2)^2} \right],\end{aligned}\quad (3.52)$$

que reproduz o resultado de Bunch e Parker [105] para a representação de espaço-momento do propagador de Feynman. Isso completa nossa primeira tarefa, que é obter um resultado bem conhecido usando quantização estocástica em espaço curvo e coordenadas normais. Embora isto não deva ser considerado por si só como um resultado inédito do trabalho, é, no entanto, animador que se possa obtê-lo usando um método completamente diferente, a partir da quantização estocástica.

Para concluir esta seção, ressaltamos que a ordem em que as expansões em  $\hbar$  em  $R$  são feitas não é relevante. Além disso, para o cálculo não-perturbativo com a dependência em  $\hbar$  mantida, executa-se apenas a expansão em  $R$ . Começando pela Eq. (3.9), redefinindo os campos escalares por  $\varphi = g^{-1/4} \bar{\varphi}$  e de ruído  $\eta = g^{-1/4} \bar{\eta}$  como anteriormente, expandindo  $g = \det(g_{\mu\nu})$  até primeira ordem em  $R$  e escrevendo  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1$ , em que  $\bar{\varphi}_0$  é  $\mathcal{O}(R^0)$  e  $\bar{\varphi}_1$  é  $\mathcal{O}(R^1)$ , obtém-se as seguintes equações para  $\bar{\varphi}_0$  e  $\bar{\varphi}_1$ :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0(x, \tau)}{\partial \tau} = -(-\partial^2 + m^2) \bar{\varphi}_0(x, \tau) - \lambda \bar{\varphi}_0^3(x, \tau) + \bar{\eta}(x, \tau), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\varphi}_1(x, \tau)}{\partial \tau} &= -(-\partial^2 + m^2) \bar{\varphi}_1(x, \tau) - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \bar{\varphi}_0(x, \tau) \\ &\quad - 3\lambda \bar{\varphi}_0^2(x, \tau) \bar{\varphi}_1(x, \tau) - \frac{1}{6} R_{\mu\nu} y^\mu y^\nu \lambda \bar{\varphi}_0^3(x, \tau).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Claramente, essas equações são totalmente não-perturbativas, já que nenhuma expansão em  $\hbar$  é feita. Agora, quando  $\bar{\varphi}_0$  and  $\bar{\varphi}_1$  são expandidos como na Eq. (3.10), recupera-se a expansão de um *1-loop* discutida acima. Na seção 3.4 resolvemos as equações de Langevin usando métodos numéricos na rede e comparamos as soluções das equações perturbativas e não-perturbativas.

### 3.3 O Potencial Efetivo para o campo escalar

Após obtermos a Eq. (3.52), podemos usar o resultado para calcular o potencial efetivo do campo escalar de *1-loop*,

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 + V(\phi) + \bar{V}^{(1)}(\phi) + \dots \quad (3.55)$$

Uma vez que estamos interessados em apenas ordens lineares em curvatura, podemos expandir  $\hat{H}$  e  $\hat{G}(x, x')$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H} + O(R^2 \dots), \\ \hat{G} &= \hat{G}_0 + \hat{G}_1 + O(R^2 \dots), \end{aligned} \quad (3.56)$$

consequentemente a relação (2.28) se torna

$$\begin{aligned} -\text{Tr} \ln \hat{G} &= \text{Tr} \ln (\hat{H}_0 + \hat{H}_1 + O(R^2 \dots)) \\ &= \text{Tr} \ln \hat{H}_0 + \text{Tr} \ln (\hat{1} + \hat{H}_0^{-1} \hat{H}_1 + O(R^2 \dots)) \\ &= \text{Tr} \ln \hat{H}_0 + \text{Tr} \hat{H}_0^{-1} \hat{H}_1 + O(R^2 \dots). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nas subseções subsequentes apresentamos os cálculos das contribuições do espaço-tempo plano e curvo para o potencial efetivo.

#### 3.3.1 O potencial efetivo no espaço-tempo plano

O primeiro termo na última linha da Eq. (3.57) é o potencial efetivo no espaço-tempo plano em D dimensões, que é dado por

$$\int d^D x \bar{V}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S_2(\phi) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S_2(\phi = 0), \quad (3.58)$$

onde  $S_2(\phi)$  é a forma bilinear da ação clássica no formalismo de campo de fundo. O último termo da Eq. (3.58) pode ser visto como normalização de uma integral funcional. Este termo surge naturalmente através da representação diagramática de potencial efetivo. A partir da Eq. (3.58) e lembrando que  $\tilde{m}^2 = m^2 + V''(\phi)$ , no espaço euclidiano temos

$$\bar{V}_0^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left( \frac{k^2 + m^2 + V''}{k^2 + m^2} \right). \quad (3.59)$$

Usando coordenadas esféricas em D dimensões  $d^D k = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} k^{D-1}$  encontramos que

$$\bar{V}_0^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^\Omega dk k^{D-1} \ln \left( \frac{k^2 + m^2 + V''}{k^2 + m^2} \right). \quad (3.60)$$

A solução pode ser escrita da seguinte forma simétrica

$$\begin{aligned} \bar{V}_0^{(1)}(\phi) = & \frac{1}{2^{D+1} \pi^{D/2} \Gamma(D/2)} \left\{ \frac{\Omega^D}{D} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{\Omega^2 + m^2} \right) \right. \\ & - \frac{\Omega^{D+2}}{D(D+2)} \frac{1}{(m^2 + V'')} {}_2F_1 \left( 1, \frac{D+2}{2}, \frac{D+4}{2}, -\frac{\Omega^2}{m^2 + V''} \right) \\ & \left. + \frac{\Omega^{D+2}}{D(D+2)} \frac{1}{m^2} {}_2F_1 \left( 1, \frac{D+2}{2}, \frac{D+4}{2}, -\frac{\Omega^2}{m^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

em que  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  são funções hipergeométricas.

Para a dimensão  $D = 4$ , obtemos que

$$2^{D+1} \pi^{D/2} \Gamma(D/2) \Big|_{D=4} = 32\pi^2, \quad (3.62)$$

$$\frac{\Omega^D}{D} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{\Omega^2 + m^2} \right) \Big|_{D=4} = \frac{\Omega^4}{2} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{\Omega^2 + m^2} \right), \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\Omega^{D+2}}{D(D+2)} \frac{1}{(m^2 + V'')} {}_2F_1 \left( 1, \frac{D+2}{2}, \frac{D+4}{2}, -\frac{\Omega^2}{m^2 + V''} \right) \Big|_{D=4} &= \frac{1}{2} \Omega^2 (m^2 + V'') - \frac{\Omega^4}{4} \\ - \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{m^2 + V''} \right), & \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\frac{\Omega^{D+2}}{D(D+2)} \frac{1}{m^2} {}_2F_1 \left( 1, \frac{D+2}{2}, \frac{D+4}{2}, -\frac{\Omega^2}{m^2} \right) \Big|_{D=4} = \frac{m^4}{2} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2}{m^2} \right) - \frac{m^2 \Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{4}. \quad (3.65)$$

Substituindo as Eqs. (3.62)-(3.65) na Eq. (3.61) chegamos a

$$\begin{aligned} \bar{V}_0^{(1)}(\phi) = & \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 V'' + \frac{\Omega^4}{2} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{\Omega^2 + m^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{m^2 + V''} \right) + \frac{m^4}{2} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2}{m^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Agora, assumindo que  $\Omega$  é grande, podemos usar as seguintes identidades

$$\frac{\Omega^4}{2} \ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{\Omega^2 + m^2} \right) = \frac{1}{2} \Omega^2 V'' - \frac{1}{4} (m^2 + V'')^2 + \frac{m^4}{4} + O \left( \frac{1}{\Omega^2} \right), \quad (3.67)$$

$$\ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2 + V''}{m^2 + V''} \right) = \ln \frac{\Omega^2}{m^2} - \ln \left( \frac{m^2 + V''}{m^2} \right) + O \left( \frac{1}{\Omega^2} \right), \quad (3.68)$$

$$\ln \left( \frac{\Omega^2 + m^2}{m^2} \right) = \ln \frac{\Omega^2}{m^2} + O \left( \frac{1}{\Omega^2} \right) \quad (3.69)$$

e finalmente obtemos

$$\bar{V}_0^{(1)}(\phi) = \bar{V}_{0-div}^{(1)}(\phi) + \bar{V}_{0-fin}^{(1)}(\phi), \quad (3.70)$$

em que

$$\bar{V}_{0-div}^{(1)}(\phi) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \Omega^2 V'' - \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right\} \quad (3.71)$$

e

$$\bar{V}_{0-fin}^{(1)}(\phi) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \left( 1 + \frac{V''}{m^2} \right) - \frac{1}{4} (m^2 + V'')^2 \right\}, \quad (3.72)$$

que reproduz o resultado apresentado em [71]. Nas últimas expressões, incluímos os termos que independem do campo  $\phi$  do tipo  $m^4$ , porque são contribuições para a constante cosmológica e são de fato parte do segundo termo em (3.58).

### 3.3.2 O potencial efetivo no espaço-tempo curvo

O segundo termo na última linha da Eq. (3.57) corresponde à primeira ordem na correção em curvatura  $\bar{V}_1^{(1)}(\phi)$ , que pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int d^D x \bar{V}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{H}_0^{-1} \hat{H}_1 = \frac{1}{2} \text{Tr} \bar{G}_0 \hat{H}_1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \hat{H}_0 \bar{G}_1 \\ &= -\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' \bar{G}_0^{-1}(x, x') \bar{G}_1(x', x), \end{aligned} \quad (3.73)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \int d^D x' \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-x')} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x'-x)} \bar{G}_0^{-1}(k) \bar{G}_1(p) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{G}_0^{-1}(k) \bar{G}_1(k). \end{aligned} \quad (3.74)$$



Agora, podemos usar a Eq. (3.52) e substituir as formas explícitas de  $\bar{G}_0^{-1}(k)$  e  $\bar{G}_1(k)$  na Eq. (3.74) para obtermos

$$\bar{V}_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \tilde{m}^2} \quad (3.75)$$

$$= \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \frac{\Omega^D}{2^D \pi^{D/2} D \Gamma(D/2) \tilde{m}^2} {}_2F_1 \left( 1, \frac{D}{2}; \frac{D+2}{2}; -\frac{\Omega^2}{\tilde{m}^2} \right). \quad (3.76)$$

Para  $D = 4$ , lembrando que  $\tilde{m}^2 = m^2 + V''(\phi)$ , obtemos

$$\bar{V}_1^{(1)}(\phi) = \bar{V}_{1-div}^{(1)}(\phi) + \bar{V}_{1-fin}^{(1)}(\phi), \quad (3.77)$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1-div}^{(1)}(\phi) &= \frac{1}{32\pi^2} \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \left[ \Omega^2 - (m^2 + V'') \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right], \\ \bar{V}_{1-fin}^{(1)}(\phi) &= \frac{1}{32\pi^2} \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R (m^2 + V'') \ln \left( 1 + \frac{V''}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Esse resultado é precisamente o obtido na Ref. [71], onde também os detalhes da renormalização e aspectos relacionados foram discutidos em detalhes e, portanto, não serão considerados aqui.

### 3.4 Simulações numéricas

A principal vantagem da abordagem baseada nas coordenadas normais de Riemann é que o cálculo prático é realizado no espaço plano. Em particular, isso significa que podemos usar os métodos conhecidos de simulações numéricas de Langevin regularizada na rede. Deve ficar claro, no entanto, que os resultados têm validade para  $R$  pequeno.

Como investigação inicial, realizamos simulações numéricas para o caso mais simples em  $D = 3$ ; portanto, as dimensões massivas das quantidades relevantes são as seguintes:  $[\bar{\varphi}] = 1/2$ ,  $[\lambda] = 1$ ,  $[\tau] = -2$ ,  $[\bar{\eta}] = 5/2$ , e  $[R] = 2$ . Resolvemos as equações de Langevin em uma rede  $N^3$ , com espaçamento de rede  $a$ . A discretização do tempo de Langevin é denotada  $\Delta\tau$ . É conveniente redimensionar todas as quantidades dimensionais por  $a$ , a saber

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \hat{\phi} a^{-1/2}, \quad x = \hat{x} a, \quad \tilde{m} = \hat{m} a^{-1}, \quad \lambda = \hat{\lambda} a^{-1}, \\ \bar{\eta} &= \hat{\eta} a^{-5/2} \epsilon^{1/2}, \quad \tau = \hat{\tau} a^2, \quad \Delta\tau = \epsilon a^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nós exemplificamos o procedimento numérico para Eqs. (3.29) e (3.33). Em termos dessas quantidades redimensionadas, as equações discretizadas correspondentes são dadas (in Itô calculus [106]) por

$$\hat{\phi}_0^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau} + \epsilon) = \hat{\phi}_0^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) + \epsilon \left( \hat{\square} - \hat{m}^2 \right) \hat{\phi}_0^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) + \sqrt{\epsilon} \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{\tau}), \quad (3.80)$$

$$\hat{\phi}_1^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau} + \epsilon) = \hat{\phi}_1^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) + \epsilon \left( \hat{\square} - \hat{m}^2 \right) \hat{\phi}_1^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) \hat{R} \hat{\phi}_0^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}), \quad (3.81)$$

com  $\hat{\square} \hat{\phi} = \hat{\phi}(\hat{x} + \hat{e}) - 2\hat{\phi}(\hat{x}) + \hat{\phi}(\hat{x} - \hat{e})$ , em que  $\hat{e}$  é um vetor unitário, e a correlação do ruído  $\langle \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{\tau}) \hat{\eta}(\hat{x}', \hat{\tau}') \rangle_{\eta} = 2 \delta_{\hat{x}, \hat{x}'} \delta_{\hat{\tau}, \hat{\tau}'}$ . As outras equações para  $\hat{\phi}_0^{(2)}, \hat{\phi}_1^{(2)}, \dots$ , assim como as Eqs. (3.53) e (3.54), são discretizadas da mesma maneira.

Resolvemos todas as equações de Langevin usando  $\epsilon = 10^{-4}$  em uma rede  $N^3 = 16^3$ . Os valores da massa e da constante de acoplamento na rede escolhidos são  $\hat{m} = 1 = \hat{\lambda}$ . A curvatura escalar é suposta ser pequena para a expansão em  $R$  fazer sentido; portanto, escolhemos  $\hat{R} = 0.1$ . O campo clássico de fundo no espaço-tempo plano é o campo constante no mínimo do potencial clássico,  $\hat{\phi}_{\text{cl}} = \sqrt{-\hat{m}^2/\hat{\lambda}} = 1$ . A correspondente "massa nua de Higgs" é  $\hat{m}_H^2 = -\hat{m}^2 + 3\hat{\lambda}\hat{\phi}_{\text{cl}}^2 = 2\hat{m}^2 = 2$ .

Vamos primeiro considerar a função de correlação de *1-loop*. Nós nos concentramos na parte dependente em  $R$  da função de correlação, o segundo termo na Eq. (3.37). Em termos das variáveis da rede, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_R^{1\text{-loop}}(\hat{x}, \hat{x}|\tau) &= 2 \langle \hat{\phi}_0^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) \hat{\phi}_1^{(1)}(\hat{x}, \hat{\tau}) \rangle_{\hat{\eta}} \\ &= - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) \frac{\hat{R}}{16N^3} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{N-1} \left\{ \frac{1 - e^{-2\hat{\tau}(k^2 + \hat{m}^2)}}{[d(\hat{m}, n_1, n_2, n_3)]^2} - \frac{2\hat{\tau}e^{-2\hat{\tau}(k^2 + \hat{m}^2)}}{d(\hat{m}, n_1, n_2, n_3)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

em que  $d(\hat{m}, n_1, n_2, n_3) = (\hat{m}/2)^2 + \sum_{i=1}^3 \sin^2(n_i \pi/N)$ . A expressão de *1-loop* possui um fator geral  $\xi - 1/6$ . Esse fator é uma característica comum nos resultados de *1-loop* para o termo não-mínimo. Apesar disso, podemos esperar que o cálculo além de *1-loop* para a função de correlação não apresente apenas termos proporcionais ao coeficiente  $(\xi - 1/6)R$ , isso irá ocorrer devido a presença de termos proporcionais a  $R_{\mu\nu}y^\mu y^\nu$  nas Eqs. (3.34)-(3.36).

A figura 3.1 mostra os resultados de *1-loop* das simulações numéricas (com médias estocásticas feitas com 100 realizações de ruído) para a parte dependente de  $R$  da função

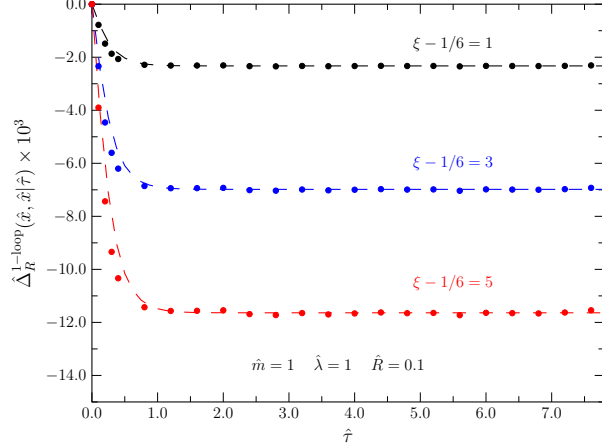


Figura 3.1: Parte dependente de  $R$  da função de correlação, segundo termo na Eq. (3.37), como uma função de  $\hat{\tau}$ . Os pontos pontilhados são os resultados das simulações numéricas e as linhas tracejadas correspondem ao resultado analítico, Eq. (3.82).

de correlação para diferentes valores de  $(\xi - 1/6)$ . Os resultados analíticos correspondentes também são mostrados pelas linhas tracejadas. A figura revela que as simulações de rede reproduzem muito bem os resultados analíticos. Observamos que alterar os valores dos parâmetros não atrapalha essa boa concordância.

A seguir, discutimos resultados para o valor esperado no vácuo do campo  $\langle \hat{\phi} \rangle$  (lembre-se, estamos considerando o caso de quebra espontânea de simetria):

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{N^3} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{N-1} \langle \hat{\phi}(\hat{x}, \hat{\tau}) \rangle_{\eta}. \quad (3.83)$$

Nós escolhemos os valores positivos de  $\langle \hat{\phi} \rangle$ , uma vez que a ação tem simetria  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Inicialmente, comparamos cálculos analíticos e numéricos. Os resultados analíticos de  $2\text{-loops}$  estão em preparação para serem apresentados em um futuro artigo [107]. No entanto, o processo de obtenção e as principais expressões analíticas utilizadas na comparação dos resultados são descritas no apêndice B. No painel esquerdo da Fig. 3.2 mostramos resultados para  $\langle \hat{\phi} \rangle$  em função do acoplamento  $\hat{\lambda}$  calculado até  $2\text{-loops}$ :

$$\langle \hat{\phi} \rangle^{2\text{-loop}} = \left( \hat{\phi}_{\text{cl}} + \langle \hat{\phi}_0^{(2)} \rangle + \langle \hat{\phi}_1^{(2)} \rangle + \langle \hat{\phi}_0^{(4)} \rangle + \langle \hat{\phi}_1^{(4)} \rangle \right) / \hat{\phi}_{\text{cl}}. \quad (3.84)$$

Para esta comparação, consideramos o fundo clássico tanto na abordagem analítica

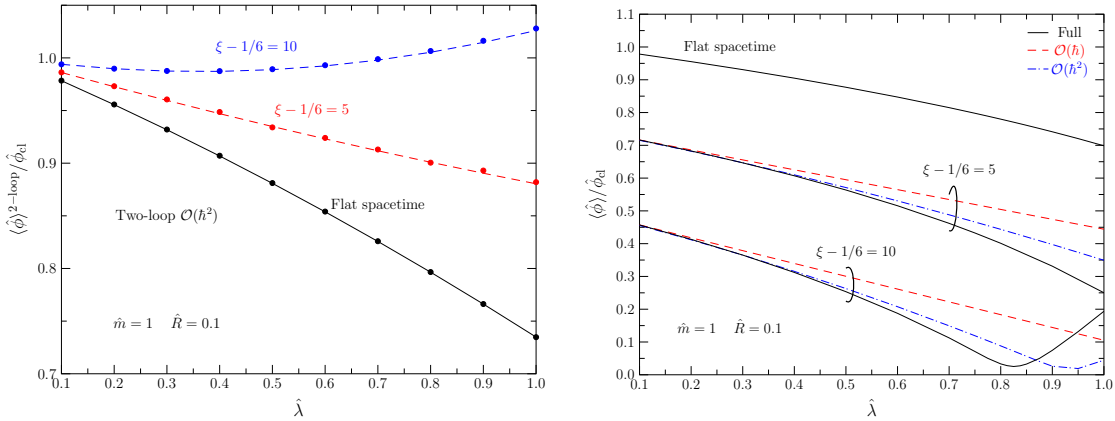


Figura 3.2: Valor esperado no vácuo do campo, Eq. (3.83), em função do acoplamento, e normalizado com  $\hat{\phi}_{\text{cl}} = \sqrt{-\hat{m}^2/\hat{\lambda}}$ . Painel esquerdo: Resultados analíticos e numéricos de  $2\text{-loops}$ , Eq. (3.84), para os espaço-tempo plano e curvo. Os pontos pontilhados são os resultados das simulações numéricas. Painel direito: Todas as curvas sólidas (pretas) representam as soluções das equações completas de Langevin, Eqs. (3.53): a curva superior é para o espaço-tempo plano ( $\hat{R} = 0$ ) e as inferiores para espaço-tempo curvo ( $\hat{R} = 0.1$ ), o fundo clássico inclui efeitos de curvatura.

quanto na numérica como  $\hat{\phi}_{\text{cl}} = \sqrt{-\hat{m}^2/\hat{\lambda}}$ . De acordo com o painel esquerdo da fig. 3.2 obtemos uma boa concordância entre os resultados analíticos e numéricos.

Por fim, discutimos os resultados para  $\langle \hat{\phi} \rangle$  com a total dependência de  $\hbar$  mantida, isto é, resultados obtidos com as soluções da Eq. (3.53) e (3.54). Também comparamos com os resultados correspondentes de  $1\text{-loop}$  e  $2\text{-loops}$ . Agora, consideramos os efeitos da curvatura no fundo clássico. A respeito do termo  $R_{\mu\nu}y^\mu y^\nu$ , uma vez que  $y^\mu$  deve ser pequeno, tomamos isso como sendo o espaçamento da rede—valores menores de  $y^\mu$  faria o último termo na Eq. (3.54) ainda menos importante. Para  $R_{\mu\nu}$  invocamos simetria rotacional e tomamos  $R_{\mu\nu} = R_{11} = 1/3 R$  para todos  $\mu$  e  $\nu$ . Os resultados são mostrados no painel direito da Fig. 3.2. As soluções não-perturbativas são representadas pelas curvas sólidas (pretas),  $1\text{-loop}$  e  $2\text{-loops}$  são os tracejados (vermelhos) e as curvas pontilhadas (azuis), respectivamente. Não surpreendentemente, a figura revela que, conforme  $\hat{\lambda}$  aumenta, os resultados  $\mathcal{O}(\hbar)$  divergem consideravelmente da solução completa (sem expansão em  $\hbar$ ). Mas também revela que há uma melhoria quando se vai  $\mathcal{O}(\hbar^2)$ , pelo menos para os

parâmetros escolhidos. Existe uma interação interessante entre os papéis desempenhados por  $\lambda$  e  $\xi$ , como indicado pela presença do decaimento na curva em  $\hat{\lambda} \sim 0.8$  nas soluções para  $(\xi - 1/6) = 10$ . Isso se deve ao fato de que os valores de equilíbrio de  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  tem sinais opostos. Isso fica claro para as soluções clássicas nas Eqs. (3.53) e (3.54): enquanto  $(\bar{\varphi}_0)_{cl} = \pm\sqrt{-m^2/\lambda}$ , a solução de ordem  $R$  é  $(\bar{\varphi}_1)_{cl} = -[(\xi - 1/6)R/(m^2 + 3\lambda\varphi_0)](\bar{\varphi}_0)_{cl}$ , ao negligenciarmos o menor termo proporcional a  $R_{\mu\nu}$  na Eq. (3.54). Para grandes valores de  $\hat{\lambda}$ , flutuações quânticas fazem com que as contribuições  $\hat{\phi}_0$  dominem sobre  $\hat{\phi}_1$ , como pode ser visto pelo aumento da curva em direção à solução de espaço-tempo plano. Observamos que o mesmo decaimento também está presente nas curvas para  $(\xi - 1/6)R = 5$ , mas para um valor de  $\hat{\lambda}$  além do intervalo mostrado na figura.

---

### Invariância de calibre da ação efetiva média de fundo

---

O desenvolvimento recente da TQC baseado em aspectos não-perturbativos das teorias quânticas tem sido solicitado em tratamentos relacionados à natureza não-perturbativa da Cromodinâmica Quântica em baixas energias e também à expectativa de formular uma teoria consistente de Gravitação Quântica. Atualmente, um dos métodos de TQC mais populares e desenvolvidos é o GRF (veja seção 2.5 do Cap. 2 para referências de revisões e aplicações). Muitos aspectos das teorias de calibre na abordagem do GRF foram discutidos com sucesso, mas ainda há uma questão importante que permanece sem solução, a dependência da fixação da condição de calibre da ação efetiva média *on-shell*. A descrição quântica consistente das teorias de calibre deve fornecer independência on-shell sobre a escolha da condição de fixação de calibre. Isso significaria garantir essa independência para os elementos da matriz  $S$  [58]. Vale ressaltar que as teorias de campo com simetria de calibre são de grande importância, em particular, uma vez que todas as interações elementares de física de partículas são descritas por teorias de calibre.

Neste capítulo, descrevemos nossa análise dos problemas mencionados usando o MCF dentro da abordagem do GRF tendo como principal particular exemplo, a teoria de Yang-Mills. Além disso, também consideramos a invariância de calibre e a dependência da

fixação da condição de calibre para a ação efetiva média.

## 4.1 Ação efetiva média de fundo

Inicialmente, vamos discutir o uso do método de campo de fundo aplicado ao GRF, seguindo a publicação original sobre esse assunto de Reuter e Wetterich [55] para o caso da teoria de Yang-Mills com a ação

$$S_0(A) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(A)F_{\mu\nu}^a(A), \quad (4.1)$$

onde  $F_{\mu\nu}^a(A) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$  é a intensidade do campo para o campo vetorial não abeliano  $A_\mu$  e  $g$  é a constante de acoplamento. A correspondência com as notações usadas na Sec. 2.5 do Cap. 2 é

$$\begin{aligned} A^i &\rightarrow A_\mu^a, & \mathcal{B}^i &\rightarrow \mathcal{B}_\mu^a, & F_{\beta\gamma}^\alpha &\rightarrow f^{abc}, \\ R_\alpha^i(A) &\rightarrow D_\mu^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_\mu + gf^{acb}A_\mu^c, \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que os coeficientes de estrutura  $f^{abc}$  do grupo de calibre são constantes. Sabemos que a ação (4.1) é invariante sob as transformações de calibre definidas pelo gerador  $D_\mu^{ab}(A)$  com uma função de calibre arbitrária  $\omega^a$  com  $\varepsilon(\omega^a) = 0$ . Na quantização de Faddeev-Popov, a paridade de Grassmann dos campos  $\phi^A = (A_\mu^a, B^a, C^a, \bar{C}^a)$  é, respectivamente,  $\varepsilon_A = (0, 0, 1, 1)$ .

Para a teoria de Yang-Mills, o MCF define as seguintes transformações do campo de fundo

$$\begin{aligned} \delta_\omega^{(c)} \mathcal{B}_\mu^a &= D_\mu^{ab}(\mathcal{B})\omega^b, & \delta_\omega^{(g)} A_\mu^a &= gf^{abc}A_\mu^b\omega^c, \\ \delta_\omega^{(g)} B^a &= gf^{abc}B^b\omega^c, & \delta_\omega^{(g)} C^a &= gf^{abc}C^b\omega^c, \\ \delta_\omega^{(g)} \bar{C}^a &= gf^{abc}\bar{C}^b\omega^c. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note que o gerador da transformação no setor de campos  $A_\mu^a$  é dada por

$$D_\mu^{ab}(A + \mathcal{B}) - D_\mu^{ab}(\mathcal{B}) = gf^{acb}A_\mu^c, \quad (4.4)$$

e portanto todos os campos quânticos se transformam de acordo com a mesma regra. A escolha padrão da função de fixação de calibre é

$$\chi^a(A, \mathcal{B}) = D_\mu^{ab}(\mathcal{B})A_\mu^b. \quad (4.5)$$

Isso leva à regra de transformação tensorial para  $\chi^a(A, \mathcal{B})$  sob as transformações de campo de fundo,

$$\delta_\omega \chi^a(A, \mathcal{B}) = g f^{abc} \chi^b(A, \mathcal{B}) \omega^c. \quad (4.6)$$

O ponto principal da abordagem do GRF é a introdução da ação reguladora dependente de escala  $S_k(\phi, \mathcal{B})$ , na estrutura do MCF. Vamos escolher a ação reguladora para os campos quânticos  $A_\mu^a$  e  $C^a, \bar{C}^a$  na forma

$$S_k(\phi, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} A_\mu^a R_k^{(1)ab}(D_T(\mathcal{B})) A_\nu^b + \bar{C}^a R_k^{(2)ab}(D_S(\mathcal{B})) C^b. \quad (4.7)$$

As funções reguladoras dependem do campo externo através das derivadas covariantes do tensor  $D_T$  e campos escalares  $D_S$

$$(D_T(\mathcal{B}))_{\mu\nu}^{ab} = -\eta_{\mu\nu}(D^2)^{ab} + 2g f^{acb} F_{\mu\nu}^c(\mathcal{B}), \quad (D^2)^{ab} = D_\rho^{ac}(\mathcal{B}) D_\rho^{cb}(\mathcal{B}), \quad (4.8)$$

$$(D_S(\mathcal{B}))^{ab} = - (D^2)^{ab}. \quad (4.9)$$

A forma dessas funções podem ser escolhidas por exemplo como em [55],

$$R_k(z) = Z_k \frac{z e^{-z/k^2}}{1 - e^{-z/k^2}}, \quad (4.10)$$

com  $Z_k$  correspondente à renormalização da função de onda.

Vamos considerar a variação da ação reguladora (4.7) sob as transformações do campo de fundo (4.3) na aproximação em primeira ordem,  $R_k(z) = Z_k z$ . O primeiro termo em (4.8) pode ser reescrito através da integração por partes, como a seguir

$$-A_\mu^a \eta_{\mu\nu} (D^2)^{ab} A_\nu^b = \chi_{\rho\mu}^c(A, \mathcal{B}) \chi_{\rho\mu}^c(A, \mathcal{B}), \quad (4.11)$$

em que

$$\chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B}) \equiv D_\rho^{ab}(\mathcal{B}) A_\mu^b. \quad (4.12)$$

A regra de transformação para  $\chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B})$  sob as transformações de campo de fundo é bem próxima de (2.52). Tem a seguinte forma

$$\delta_\omega \chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B}) = g f^{acb} \chi_{\rho\mu}^c(A, \mathcal{B}) \omega^b. \quad (4.13)$$



Como consequência, encontramos o primeiro termo invariante

$$\begin{aligned}\delta_\omega(-A_\mu^a \eta_{\mu\nu} (D^2)^{ab} A_\nu^b) &= \delta_\omega(\chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B}) \chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B})) \\ &= 2g f^{acb} \chi_{\rho\mu}^a(A, \mathcal{B}) \chi_{\rho\mu}^c(A, \mathcal{B}) \omega^b \\ &= 0.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Além disso, levando em conta que

$$\delta_\omega^{(c)} F_{\mu\nu}^a(\mathcal{B}) = g f^{acb} F_{\mu\nu}^c(\mathcal{B}) \omega^b,\tag{4.15}$$

para o segundo termo em (4.8), temos

$$\delta_\omega(f^{acb} A_\mu^a F_{\mu\nu}^c(\mathcal{B}) A_\nu^b) = g A_\mu^a A_\nu^b F_{\mu\nu}^c(f^{ace} f^{ebd} + f^{abe} f^{edc} + f^{ade} f^{ecb}) = 0,$$

por causa da identidade de Jacobi. A invariância também vale para o regulador fantasma, e pode se verificar facilmente seguindo a descrição acima. Nesta aproximação, a ação dependente de escala  $S_k(\phi, \mathcal{B})$  obedece a simetria do campo de fundo,  $\delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = 0$ .

A mesma consideração pode ser feita para os termos das ordens mais altas em  $z$ . Portanto, podemos garantir que a invariância é mantida em todas as ordens. Com esses resultados a ação (4.7) é invariante sob as transformações do campo de fundo,

$$\delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = 0.\tag{4.16}$$

A ação completa  $S_{k\,FP} = S_{k\,FP}(\phi, \mathcal{B})$  é construída pela regra

$$S_{k\,FP}(\phi, \mathcal{B}) = S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}),\tag{4.17}$$

em que  $S_{FP}(\phi, \mathcal{B})$  é a ação de Faddeev-Popov (2.40). Usando a ação (4.17), o funcional gerador das funções de Green dependente da escala é dado pela seguinte integral funcional:

$$Z_k(J, \mathcal{B}) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi] \right\} = \exp \{ iW_k(J, \mathcal{B}) \},\tag{4.18}$$

onde  $W_k = W_k(J, \mathcal{B})$  é o funcional gerador das funções de Green conectadas dependente da escala. O principal objeto da abordagem do GRF no método de campo de fundo é a ação efetiva média de fundo  $\Gamma_k = \Gamma_k(\Phi, \mathcal{B})$ , definida através da transformação de Legendre de  $W_k$ ,

$$\Gamma_k(\Phi, \mathcal{B}) = W_k(J, \mathcal{B}) - J\Phi,\tag{4.19}$$

onde

$$\Phi^A = \frac{\delta_l W_k}{\delta J_A}$$

é o campo médio com fonte externa dada por

$$\frac{\delta_r \Gamma_k}{\delta \Phi^A} = -J_A.$$

A ação efetiva média pode ser apresentada como uma soma da ação reguladora do campo médio e correções quânticas,

$$\Gamma_k(\Phi, \mathcal{B}) = S_k(\Phi, \mathcal{B}) + \bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B}). \quad (4.20)$$

O funcional  $\bar{\Gamma}_k$  satisfaz a equação de fluxo, ou equação de Wetterich [42, 55],

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B}) = \frac{i}{2} \text{sTr} \left\{ \frac{\partial_t R_k(\mathcal{B})}{\bar{\Gamma}_k''(\Phi, \mathcal{B}) + R_k(\mathcal{B})} \right\}, \quad (4.21)$$

onde  $\partial_t = k \frac{d}{dk}$ . Em (4.21) relembramos a necessidade de usar o supertraço funcional  $\text{sTr}$ , devido à presença de campos quânticos  $A_\mu^a$  e  $C^a, \bar{C}^a$ , com diferentes paridades de Grassmann. Outra notação importante é

$$\left( \bar{\Gamma}_k''(\Phi, \mathcal{B}) \right)_{AB} = \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A} \left( \frac{\delta_r \bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B})}{\delta \Phi^B} \right) \quad (4.22)$$

para a matriz das derivadas funcionais de segunda ordem com respeito aos campos médios  $\Phi$ .

Como vimos acima, por causa da invariância do termo regulador dependente de escala (4.7), a ação completa (4.17) é invariante sob as transformações do campo de fundo (2.50),

$$\delta_\omega S_k \text{FP}(\phi, \mathcal{B}) = \delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = S_k(\phi, \mathcal{B}) \hat{\mathcal{R}}_\omega(\phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.23)$$

No nível quântico (4.23) fornece a invariância da ação efetiva média de fundo  $\Gamma_k(\Phi, \mathcal{B})$ . De fato, a variação de  $Z_k(J, \mathcal{B})$  com respeito ao campo externo  $\mathcal{B}_\mu^a$  é

$$\delta_\omega^{(c)} Z_k(J, \mathcal{B}) = i J_A \mathcal{R}_\omega^A \left( \frac{\delta_l Z_k}{i \delta J} \right). \quad (4.24)$$

Em termos do funcional  $W_k(J, \mathcal{B})$  a relação (4.24) é reescrita como

$$\delta_\omega^{(c)} W_k(J, \mathcal{B}) = J_A \mathcal{R}_\omega^A \left( \frac{\delta_l W_k}{\delta J} \right). \quad (4.25)$$

Como uma consequência de (4.25), a ação efetiva média de fundo é invariante sob as transformações do campo de fundo,

$$\delta_\omega \Gamma_k(\Phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.26)$$

Em termos do funcional  $\bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B})$  a relação (4.26) se torna

$$\delta_\omega \bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.27)$$

Assim, a simetria do campo de fundo é preservada para a ação efetiva média de fundo  $\bar{\Gamma}_k(\Phi, \mathcal{B})$ , confirmando a principal afirmação do trabalho [55].

Para o funcional  $\bar{\Gamma}_k(\mathcal{B}) = \bar{\Gamma}_k(\Phi = 0, \mathcal{B})$ , a simetria do campo de fundo também é preservada devido à linearidade da transformação do campo de fundo

$$\delta_\omega^{(c)} \bar{\Gamma}_k(\mathcal{B}) = 0, \quad (4.28)$$

em concordância com (2.62). Em particular, isso significa que a equação de fluxo para  $\bar{\Gamma}_k(\mathcal{B})$ ,

$$\partial_t \bar{\Gamma}_k(\mathcal{B}) = \frac{i}{2} \text{sTr} \left\{ \frac{\partial_t R_k(\mathcal{B})}{\bar{\Gamma}_k''(\Phi, \mathcal{B})|_{\Phi=0} + R_k(\mathcal{B})} \right\}, \quad (4.29)$$

mantém a simetria do campo de fundo.

## 4.2 Funções reguladoras invariantes no método de campo de fundo

A prova da invariância de  $S_k$  sob as transformações de campo de fundo (4.16) baseia-se na forma das funções reguladoras e seus argumentos. Em particular, as funções reguladoras (4.10) com argumento (4.8) por si só não são invariantes sob transformações de campo de fundo

$$\delta_\omega^{(c)} R_k^{(1)ab}(D_T(\mathcal{B})) \neq 0, \quad \delta_\omega^{(c)} R_k^{(2)ab}(D_S(\mathcal{B})) \neq 0. \quad (4.30)$$

Nesta seção, discutiremos a simetria de campo de fundo da ação efetiva média de fundo. Formularemos uma possível restrição nas funções reguladoras na ação dependente

da escala  $S_k$  que nos permitirá chegar à invariância da ação efetiva média de fundo sob as transformações de campo de fundo.

Considere a ação reguladora dependente da escala  $S_k = S_k(\phi, \mathcal{B})$  no formalismo de campo de fundo, incluindo o setor fantasma,

$$S_k(\phi, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} A_\mu^a R_k^{(1)ab}(\mathcal{B}) A_\nu^b + \bar{C}^a R_k^{(2)ab}(\mathcal{B}) C^b, \quad (4.31)$$

onde  $R_k^{(1)ab}(\mathcal{B})$  e  $R_k^{(2)ab}(\mathcal{B})$  são as funções reguladoras. Assumimos que elas sejam funções locais de campos externos  $\mathcal{B}_\mu^a$  e suas derivadas parciais. A ação completa tem a seguinte forma padrão na abordagem do GRF

$$S_{kFP}(\phi, \mathcal{B}) = S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}). \quad (4.32)$$

Devido a simetria de campo de fundo da ação de Faddeev-Popov (2.50), a ação completa (4.32) será invariante sob as transformações do campo de fundo (4.3), se a ação reguladora dependente da escala  $S_k = S_k(\phi, \mathcal{B})$  satisfaz a equação

$$\delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.33)$$

Usando a forma explícita das transformações de campo de fundo (2.51) a variação de  $S_k(\phi, \mathcal{B})$  tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = & \frac{1}{2} A_\mu^a \left[ g \left( f^{adc} \omega^d R_k^{(1)cb}(\mathcal{B}) - R_k^{(1)ac}(\mathcal{B}) f^{cdb} \omega^d \right) + \delta_\omega^{(c)} R_k^{(1)ab}(\mathcal{B}) \right] A_\nu^b \\ & + \int dx \bar{C}^a \left[ g \left( f^{adc} \omega^d R_k^{(2)cb}(\mathcal{B}) - R_k^{(2)ac}(\mathcal{B}) f^{cdb} \omega^d \right) + \delta_\omega^{(c)} R_k^{(2)ab}(\mathcal{B}) \right] C^b. \end{aligned} \quad (4.34)$$

A partir da Eq. (4.34) segue que (4.33) é satisfeita se

$$g \left( f^{adc} \omega^d R_k^{(1)cb}(\mathcal{B}) - R_k^{(1)ac}(\mathcal{B}) f^{cdb} \omega^d \right) + \delta_\omega^{(c)} R_k^{(1)ab}(\mathcal{B}) = 0, \quad (4.35)$$

$$g \left( f^{adc} \omega^d R_k^{(2)cb}(\mathcal{B}) - R_k^{(2)ac}(\mathcal{B}) f^{cdb} \omega^d \right) + \delta_\omega^{(c)} R_k^{(2)ab}(\mathcal{B}) = 0. \quad (4.36)$$

Qualquer solução dessas equações fornece a invariância de  $S_k$  sob as transformações de campo de fundo. Vamos considerar o caso em que as funções reguladoras são invariantes sob transformações de fundo do campo externo  $\mathcal{B}_\mu^a$ ,

$$\delta_\omega^{(c)} R_k^{(1)ab}(\mathcal{B}) = 0, \quad \delta_\omega^{(c)} R_k^{(2)ab}(\mathcal{B}) = 0. \quad (4.37)$$

Devido à arbitrariedade na escolha das funções  $\omega^a(x)$ , a partir de (4.35), (4.36) e (4.37) segue as relações

$$[t^d, R_k^{(1)\mu\nu}(\mathcal{B})]_{ab} = 0, \quad [t^d, R_k^{(2)\mu\nu}(\mathcal{B})]_{ab} = 0, \quad (4.38)$$

para os geradores  $(t^a)_{bc} = f^{bac}$  do grupo de Lie. Portanto, vemos que as funções reguladoras comutam com todos os geradores do grupo Lie. Então, aplicando o lema de Shur, encontramos

$$\begin{aligned} R_k^{(1)ab}(\mathcal{B}) &= \delta^{ab} R_k^{(1)}(D(\mathcal{B})), \\ R_k^{(2)ab}(\mathcal{B}) &= \delta^{ab} R_k^{(2)}(D(\mathcal{B})), \end{aligned} \quad (4.39)$$

em que as quantidades  $R_k^{(1)}(D(\mathcal{B}))$  e  $R_k^{(2)}(D(\mathcal{B}))$  são escalares em relação às transformações de campo de fundo do campo externo  $\mathcal{B}_\mu^a$ . Isso significa que os argumentos dessas quantidades devem ser escalares também. É fácil construir um exemplo desse tipo de argumento escalar,  $D(\mathcal{B}) = F_{\mu\nu}^a(\mathcal{B})D_\mu^{ab}(\mathcal{B})\mathcal{B}_\nu^b$ , em que  $F_{\mu\nu}^a$  é definido em (4.1).

Portanto, no caso em consideração, a ação reguladora dependente da escala tem a forma

$$S_k(\phi, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} A_\mu^a R_k^{(1)}(D(\mathcal{B})) A_\nu^a + \bar{C}^a(x) R_k^{(2)}(D(\mathcal{B})) C^a, \quad (4.40)$$

mantendo a simetria do campo de fundo  $\delta_\omega S_k(\phi, \mathcal{B}) = 0$ .

### 4.3 Dependência de calibre da ação efetiva média de fundo

Nesta seção, o problema da dependência de calibre da ação efetiva média de fundo será discutido no cenário geral discutido em 2.4 A ação reguladora  $S_k$  é invariante sob as transformações de fundo (4.16), mas não sob as transformações BRST,

$$S_k(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B}) \neq 0. \quad (4.41)$$

Vamos discutir as implicações desse fato para o problema de dependência de calibre da ação efetiva média de fundo. Considere o funcional gerador estendido das funções de Green

$Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B})$ , e o funcional gerador estendido das funções de Green conectadas  $W_k(J, \phi^*, \mathcal{B})$ ,

$$Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) = \int \mathcal{D}\phi \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\} = \exp\{iW_k(J, \phi^*, \mathcal{B})\}. \quad (4.42)$$

Como primeiro passo, obtemos a identidade de Ward modificada para o GRF no método de campo de fundo que é uma consequência da invariância sob as transformações BRST da ação  $S_{FP}(\phi, \mathcal{B})$  (2.49). Fazendo mudança de variáveis na forma das transformações BRST na integral funcional (4.42),  $\phi^A \rightarrow \varphi^A(\phi) = \phi^A + (\hat{s}\phi^A)\mu$ , e levando em consideração a trivialidade do jacobiano correspondente se as condições

$$(-1)^{\varepsilon_i} \frac{\delta_l R_\alpha^i}{\delta A^i} + (-1)^{(\varepsilon_\alpha+1)} F_{\beta\alpha}^\beta = 0 \quad (4.43)$$

são satisfeitas (para uma discussão detalhada deste ponto, consulte [108]), chegamos à relação

$$\begin{aligned} 0 &= \int D\phi (J_A + S_{k,A}(\phi, \mathcal{B})) (\hat{s}\phi^A) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\} \\ &= \left[ J_A + S_{k,A} \left( \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) \right] \int D\phi (\hat{s}\phi^A) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

A partir da (4.44) a identidade de Ward modificada para o funcional gerador estendido das funções de Green  $Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B})$  é dada por

$$\left[ J_A + S_{k,A} \left( \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) \right] \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.45)$$

Essa identidade em termos do funcional  $W_k(J, \phi^*, \mathcal{B})$  fica

$$\left[ J_A + S_{k,A} \left( \frac{\delta_l W_k}{\delta J} + \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) \right] \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} W_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) = 0. \quad (4.46)$$

Introduzindo o funcional gerador das funções de vértice  $\Gamma_k = \Gamma_k(\Phi, \phi^*, \mathcal{B})$  com a ajuda da transformada de Legendre de  $W_k = W_k(J, \phi^*, \mathcal{B})$

$$\Gamma_k(\Phi, \phi^*, \mathcal{B}) = W_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) - J_A \Phi^A, \quad (4.47)$$

em que

$$\Phi^A = \frac{\delta_l W_k}{\delta J_A}, \quad \frac{\delta_r \Gamma_k}{\delta \Phi^A} = -J_A, \quad \frac{\delta_l \Gamma_k}{\delta \phi_A^*} = \frac{\delta_l W_k}{\delta \phi_A^*}.$$

A identidade de Ward modificada é reescrita na forma

$$\frac{\delta_r \Gamma_k}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_l \Gamma_k}{\delta \phi_A^*} = S_{k,A}(\hat{\Phi}, \mathcal{B}) \frac{\delta_l \Gamma_k}{\delta \phi_A^*}, \quad (4.48)$$

onde a notação

$$\hat{\Phi}^A = \Phi^A + i (\Gamma_k''^{-1})^{AB} \frac{\delta_l}{\delta \Phi^B}, \quad (4.49)$$

foi utilizada. A matriz  $(\Gamma_k''^{-1})$  é inversa à matriz  $\Gamma_k''$ , a última tem elementos

$$(\Gamma_k'')_{AB} = \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A} \left( \frac{\delta_r \Gamma_k}{\delta \Phi^B} \right), \quad (\Gamma_k''^{-1})^{AC} \cdot (\Gamma_k'')_{CB} = \delta_B^A. \quad (4.50)$$

Agora considere a variação do funcional gerador estendido das funções de Green sob variação infinitesimal do funcional de fixação de calibre,  $\Psi(\phi, \mathcal{B}) \rightarrow \Psi(\phi, \mathcal{B}) + \delta\Psi(\phi, \mathcal{B})$ .

Encontramos

$$\begin{aligned} \delta Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) &= i \int D\phi (\delta\Psi(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B})) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) \\ &\quad + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Agora levando em conta que a integral funcional da derivada variacional total é zero, temos a relação

$$\begin{aligned} 0 &= \int D\phi \frac{\delta_r}{\delta \phi^A} \left[ (\delta\Psi s^A) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\} \right] \\ &= \int D\phi \left[ i\delta\Psi s^A (J_A + S_{k,A}) + (\delta\Psi \hat{s}) \right] \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

em que a invariância sob as tranformações de BRST da ação  $S_{FP}$ , a nilpotência das transformações de BRST e as relações (4.43) foram usadas. A partir de (4.52) temos

$$\begin{aligned} &i \int D\phi (\delta\Psi(\phi, \mathcal{B}) \hat{s}(\phi, \mathcal{B})) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + \\ &\quad J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\} = \int D\phi (J_A + S_{k,A} \phi, \mathcal{B}) s^A(\phi, \mathcal{B}) \times \\ &\quad \times \delta\Psi(\phi, \mathcal{B}) \exp\{i[S_{FP}(\phi, \mathcal{B}) + S_k(\phi, \mathcal{B}) + J\phi + \phi^*(\hat{s}\phi)]\}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

que permite apresentar a Eq. (4.51) como,

$$\delta Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) = -i \left[ J_A + S_{k,A} \left( \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) \right] \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} \delta\Psi \left( \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) Z_k(J, \phi^*, \mathcal{B}), \quad (4.54)$$

ou, em termos do funcional  $W_k(J, \mathcal{B})$ ,

$$\delta W_k(J, \phi^*, \mathcal{B}) = - \left[ J_A + S_{k,A} \left( \frac{\delta_l W_k}{\delta J} + \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right) \right] \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} \delta \Psi \left( \frac{\delta_l W_k}{\delta J} + \frac{\delta_l}{i\delta J}, \mathcal{B} \right). \quad (4.55)$$

Na obtenção de (4.55) a identidade modificada de Slavnov-Taylor (4.46) foi utilizada. A última equação pode ser reescrita para a ação efetiva média de campo de fundo,  $\Gamma_k(\Phi, \phi^*, \mathcal{B})$ , na seguinte forma

$$\delta \Gamma_k(\Phi, \phi^*, \mathcal{B}) = \frac{\delta_r \Gamma_k}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} \delta \Psi(\hat{\Phi}, \mathcal{B}) - S_{k,A}(\hat{\Phi}, \mathcal{B}) \frac{\delta_l}{\delta \phi_A^*} \delta \Psi(\hat{\Phi}, \mathcal{B}), \quad (4.56)$$

em que  $\hat{\Phi}$  foi introduzido em (4.49). A partir da Eq. (4.56) segue que

$$\delta \Gamma_k(\Phi, \phi^*, \mathcal{B}) \Big|_{\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \Phi} = 0} \neq 0. \quad (4.57)$$

Como resultado, a ação efetiva média de fundo depende da fixação de calibre mesmo nas equações de movimento *on-shell* e a matriz  $S$  definida na abordagem do GRF é dependente de calibre.



---

### Aspectos quânticos do modelo de Yukawa com campo escalar e escalar axial no espaço-tempo curvo

---

A ação efetiva é a quantidade de maior interesse em TQC, pois é a partir dela que obtemos toda a informação física relevante da teoria em questão. Como vimos, ela admite expansão em *loops*. Entretanto, nesta expansão são encontradas funções de vértices que dependem de integrais de Feynman que divergem para valores elevados de momentos. O que significa que a teoria contém divergências em altas energias na região do ultravioleta. Com o objetivo de eliminar tais divergências na ação efetiva e construir a teoria em consideração com a presença apenas de funções de vértices finitas, faz-se necessário o estudo de procedimentos de renormalização. Para um estudo em detalhes, veja, por exemplo em [64, 77, 109].

Neste capítulo, estudamos o modelo de Yukawa com um campo escalar e um axial escalar, acoplados a  $N$  cópias de férmions Dirac, no espaço-tempo curvo. Como mencionamos na introdução, o estudo desse modelo que preserva a paridade de um campo escalar axial adicional é extremamente relevante, pois pode trazer considerações importantes sobre a renormalização da teoria e pode ser útil para entender melhor uma possível origem quântica dos termos de auto-interações com potências ímpares e também dos novos termos

mistos dos campos escalares. Do ponto de vista de aplicações físicas, é interessante ter uma descrição consistente de um exemplo simples que contempla a interação entre um escalar axial (representando, por exemplo o axion) e férmions através do acoplamento Yukawa.

Nas seções subsequentes, mostraremos que a teoria possui um conjunto de constantes de acoplamento, incluindo termos escalares com potências ímpares de campos escalares no potencial e constantes de acoplamento não-mínimo dos campos escalares à gravidade. Com o objetivo de obter o cálculo das divergências da maneira mais econômica, usaremos o método de *heat kernel*. Em seguida, descrevemos a renormalização da teoria em consideração e calculamos o conjunto completo de funções beta e gama e para todas as constantes de acoplamento e campos. O cálculo potencial efetivo de *1-loop* dos campos escalares até os termos lineares na curvatura escalar é considerado e algumas dificuldades do grupo de renormalização relacionadas ao potencial efetivo do modelo em consideração são discutidos.

## 5.1 Modelo de Yukawa e sua renormalização

Considere um modelo de Yukawa incluindo um campo escalar real  $\varphi$  e um campo escalar axial  $\chi$ , acoplado a  $N$  cópias de um campo fermiônico  $\Psi_i$ , com a ação clássica da forma

$$\begin{aligned}
S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \bar{\Psi}_i (i\not{V} - M - h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5) \delta^{ij} \Psi_j + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right. \\
& + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m_1^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \chi^2 + \frac{1}{2} \xi_1 R \varphi^2 + \frac{1}{2} \xi_2 R \chi^2 - \frac{\lambda_1}{4!} \varphi^4 - \frac{\lambda_2}{4!} \chi^4 \\
& \left. - \frac{\lambda_3}{2} \varphi^2 \chi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 - \frac{p}{2} \varphi \chi^2 - \tau \varphi - f R \varphi \right\}, \tag{5.1}
\end{aligned}$$

em que  $m_1, m_2$  e  $M$  são respectivamente as massas dos campos escalar, axial e espinorial,  $h_1$  e  $h_2$  são as constantes de acoplamento de Yukawa. Finalmente,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, g, p$  e  $\tau$  são constantes de acoplamento nos setores escalar e axial, que sobrevivem no limite do espaço plano, enquanto que  $\xi_1$  e  $f$  são os parâmetros não-mínimos do campo escalar e  $\xi_2$  o parâmetro não-mínimo da interação entre o campo escalar axial e a gravidade. É fácil observar que a ação não possui apenas os termos pares padrão, mas também um

conjunto de termos ímpares, com os parâmetros dimensionais  $g, p, \tau$  e  $f$ . Como veremos em breve, esses termos são necessários para alcançar a renormalizabilidade da teoria. A última observação é que o termos lineares e cúbicos no campo axial são excluídos pela exigência que a Lagrangiana seja um escalar com paridade par.

Para calcular as divergências de *1-loop*, vamos usar o método de *heat kernel*, e realizar a separação dos campos usando o MCF, de acordo com

$$\varphi \rightarrow \varphi + \sigma, \quad \chi \rightarrow \chi + \rho, \quad \bar{\Psi}_i \rightarrow \bar{\Psi}_i + \bar{\eta}_i, \quad \Psi_j \rightarrow \Psi_j + \eta_j, \quad (5.2)$$

onde  $\varphi, \chi, \bar{\Psi}, \Psi$  são os campos clássicos de fundo  $\sigma, \rho, \bar{\eta}, \eta$  suas contrapartes quânticas.

A parte bilinear nos campos quânticos da ação é escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \\ \eta_j \end{pmatrix} \hat{H} \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \\ \eta_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \sigma H_{11} \sigma + \rho H_{21} \sigma + \bar{\eta}_i H_{31} \sigma + \sigma H_{12} \rho \right. \\ &\quad \left. + \rho H_{22} \rho + \bar{\eta}_i H_{32} \rho + \sigma H_{13} \eta_j + \rho H_{23} \eta_j + \bar{\eta}_i H_{33} \eta_j \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde os elementos do operador matriz  $\hat{H}$  possuem a forma

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\square - m_1^2 + \xi_1 R - g\varphi - \lambda_3 \chi^2 - \frac{\lambda_1}{2} \varphi^2, \\ H_{12} &= -4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi, \quad H_{13} = -2h_1 \bar{\Psi}_j, \quad H_{21} = -4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi, \\ H_{22} &= -\square - m_2^2 + \xi_2 R - p\varphi - \lambda_3 \varphi^2 - \frac{\lambda_2}{2} \chi^2, \\ H_{23} &= -2h_2 \bar{\Psi}_j \gamma^5, \quad H_{31} = -2h_1 \Psi_i, \quad H_{32} = -2h_2 \gamma^5 \Psi_i, \\ H_{33} &= 2(i\nabla\!\!\!/ - M - h_1 \varphi - h_2 \chi \gamma^5) \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para simplificar os cálculos é útil introduzir operador da matriz conjugada

$$\hat{H}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(i\nabla\!\!\!/ + M) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Assim, podemos calcular as divergências de *1-loop* da ação efetiva através da relação

$$\text{Tr} \ln(\hat{H}) = \text{Tr} \ln(\hat{H} \hat{H}^*) - \text{Tr} \ln(\hat{H}^*). \quad (5.6)$$

O último termo  $\text{Tr} \ln \hat{H}^*$  contribui apenas para as divergências de vácuo conhecidas para um modelo arbitrário [64, 110]. Portanto, é suficiente calcular as divergências do produto  $\hat{H}\hat{H}^*$ , que tem uma forma padrão (2.75),

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H}\hat{H}^* = \hat{\square} + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}. \quad (5.7)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{11} &= \square + m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 - \xi_1 R + \lambda_3 \chi^2 + g\varphi, \\ \mathcal{H}_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi\chi, & \mathcal{H}_{13} &= h_1 \bar{\Psi}_j (i\nabla_j + M), \\ \mathcal{H}_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi\chi, & \mathcal{H}_{22} &= \square + m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 - \xi_2 R + \lambda_3 \varphi^2 + p\varphi, \\ \mathcal{H}_{23} &= h_2 \bar{\Psi}_j \gamma^5 (i\nabla_j + M), & \mathcal{H}_{31} &= 2h_1 \Psi_i, & \mathcal{H}_{32} &= 2h_2 \gamma^5 \Psi_i, \\ \mathcal{H}_{33} &= \delta^{ij} \left[ \square - \frac{1}{4}R + M^2 + h_1 \varphi (i\nabla_j + M) + h_2 \chi \gamma^5 (i\nabla_j + M) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde podemos identificar

$$h_{13}^\mu = \frac{ih_1}{2} \bar{\Psi}_j \gamma^\mu, \quad h_{23}^\mu = \frac{ih_2}{2} \bar{\Psi}_j \gamma^5 \gamma^\mu, \quad h_{33}^\mu = \frac{i}{2} (h_1 \varphi + h_2 \chi \gamma^5) \gamma^\mu \delta^{ij} \quad (5.9)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 - \xi_1 R + g\varphi + \lambda_3 \chi^2, & \Pi_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi\chi, \\ \Pi_{13} &= h_1 M \bar{\Psi}_j, & \Pi_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi\chi, \\ \Pi_{22} &= m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 - \xi_2 R + p\varphi + \lambda_3 \varphi^2, \\ \Pi_{23} &= h_2 M \bar{\Psi}_j \gamma^5, & \Pi_{31} &= 2h_1 \Psi_i, & \Pi_{32} &= 2h_2 \gamma^5 \Psi_i, \\ \Pi_{33} &= \delta^{ij} \left[ M^2 - \frac{1}{4}R + h_1 M \varphi + h_2 M \chi \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Como vimos na seção 2.6 do Cap. 2 da tese, o método de Schwinger–DeWitt [2] produz a expressão geral para as divergências de *1-loop* na seguinte forma

$$\Gamma_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{D-4}}{\varepsilon} \int d^D x \sqrt{-g} s \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P} + \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) \right\}, \quad (5.11)$$

em que  $\varepsilon = (4\pi)^2 (D-4)$  e

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \\ \hat{S}_{\mu\nu} &= [\nabla_\nu, \nabla_\mu] \hat{1} + \nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A partir das equações (5.12) e as relações (5.9) e (5.10) podemos obter os elementos da matriz para os operadores  $\hat{P}$  e  $\hat{S}_{\mu\nu}$  necessários para o cálculo das divergências de *1-loop*.

As expressões finais tem a forma

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \hat{h}^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{2} h_1 \nabla_\mu \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} h_2 \nabla_\mu \bar{\Psi}_j \gamma^5 \gamma^\mu \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} (h_1 \nabla_\mu \varphi + h_2 \nabla_\mu \chi \gamma^5) \gamma^\mu \delta^{ij} \end{pmatrix}, \\ \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi + h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5 \\ 0 & 0 & -h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \gamma^5 \varphi + h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi \\ 0 & 0 & (-h_1^2 \varphi^2 + h_2^2 \chi^2) \delta^{ik} \end{pmatrix} \\ \text{e } \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} (h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi - h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5) \gamma_\mu \gamma_\nu \delta^{ik} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} (h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \varphi \gamma^5 - h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi) \gamma_\mu \gamma_\nu \delta^{ik} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} (h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2) \gamma_\mu \gamma_\nu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} P_{11} &= m_1^2 + \frac{\lambda_1 \varphi^2}{2} + g\varphi - \left( \xi_1 - \frac{1}{6} \right) R + \lambda_3 \chi^2, \\ P_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi \chi, \\ P_{13} &= h_1 \bar{\Psi}_k (M + h_1 \varphi - h_2 \chi \gamma^5) - \frac{i}{2} h_1 (\nabla_\mu \bar{\Psi}_k) \gamma^\mu, \\ P_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi \chi, \\ P_{22} &= m_2^2 + \frac{\lambda_2 \chi^2}{2} + p\varphi - \left( \xi_2 - \frac{1}{6} \right) R + \lambda_3 \varphi^2, \\ P_{23} &= h_2 \bar{\Psi}_k (M \gamma^5 + h_1 \varphi \gamma^5 - h_2 \chi) - \frac{i}{2} h_2 (\nabla_\mu \bar{\Psi}_k) \gamma^5 \gamma^\mu, \\ P_{31} &= 2h_1 \Psi_i, \\ P_{32} &= 2h_2 \gamma^5 \Psi_i, \\ P_{33} &= \left[ M^2 - \frac{1}{12} R + h_1 M \varphi + h_2 M \chi \gamma^5 + h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} (h_1 \nabla_\mu \varphi + h_2 \nabla_\mu \chi \gamma^5) \gamma^\mu \right] \delta^{ik} \end{aligned} \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu 13} &= -\frac{i}{2}h_1 [(\nabla_\mu \bar{\Psi}_k)\gamma_\nu - (\nabla_\nu \bar{\Psi}_k)\gamma_\mu] + \frac{1}{4}(h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi - h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5) [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\
S_{\mu\nu 23} &= -\frac{i}{2}h_2 [(\nabla_\mu \bar{\Psi}_k)\gamma^5 \gamma_\nu - (\nabla_\nu \bar{\Psi}_k)\gamma^5 \gamma_\mu] + \frac{1}{4}(h_1 h_2 \varphi \bar{\Psi}_k \gamma^5 - h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi) [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\
S_{\mu\nu 33} &= \left[ [\nabla_\nu, \nabla_\mu] - \frac{i}{2}h_1 [(\nabla_\mu \varphi)\gamma_\nu - (\nabla_\nu \varphi)\gamma_\mu] - \frac{i}{2}h_2 [(\nabla_\mu \chi)\gamma^5 \gamma_\nu - (\nabla_\nu \chi)\gamma^5 \gamma_\mu] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}(h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2) [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right] \delta^{ik}. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

A partir daqui, o cálculo se resume a tomar os supertraços das quantidades na equação (5.11) usando as relações acima. Vale lembrar que é preciso tomar um certo cuidado ao fazer isso, uma vez que os operadores de nosso interesse, denominados,  $\hat{1}$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{S}_{\mu\nu}$  agem no espaço de campos quânticos com paridade de Grassmann mista. Como resultado final, as divergências de *1-loop* no modelo em consideração tem a seguinte forma

$$\Gamma_{div}^{(1)} = \Gamma_{vac, div}^{(1)} + \Gamma_{m, div}^{(1)}, \tag{5.16}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_{vac, div}^{(1)} &= -\frac{\mu^{D-4}}{\varepsilon} \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2}(m_1^4 + m_2^4) - 2NM^4 \right. \\
&\quad + \left( \frac{N}{3}M^2 - m_1^2 \tilde{\xi}_1 - m_2^2 \tilde{\xi}_2 \right) R + \left( \frac{N}{24} + \frac{1}{45} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \frac{8N-2}{180} R_{\mu\nu}^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2 - \frac{N}{9} \right) R^2 + \left( \frac{1}{45} + \frac{N}{9} - \frac{1}{6} \tilde{\xi}_1 - \frac{1}{6} \tilde{\xi}_2 \right) \square R \right\} \tag{5.17}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m,div}^{(1)} = & -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon} \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ \sum_k 3\bar{\Psi}_k \left[ \frac{i}{2} h_1^2 \not{\nabla} - \frac{i}{2} h_2^2 \not{\nabla} + h_1^2 (M + h_1 \varphi - h_2 \chi \gamma^5) \right. \right. \\
& + \left. \left. h_2^2 (M + h_1 \varphi - h_2 \chi \gamma^5) \right] \Psi_k + 2N h_1^2 (\partial_\mu \varphi)^2 - 2N h_2^2 (\partial_\mu \chi)^2 \right. \\
& + \left( \frac{1}{3} N h_1^2 - \frac{\lambda_1}{2} \tilde{\xi}_1 - \lambda_3 \tilde{\xi}_2 \right) R \varphi^2 + \left( \frac{1}{8} \lambda_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_3^2 - 2N h_1^4 \right) \varphi^4 \\
& + \left[ \frac{2}{3} N h_1 M - g \tilde{\xi}_1 - p \tilde{\xi}_2 \right] R \varphi + (m_1^2 g + m_2^2 p - 8N h_1 M^3) \varphi \\
& + \frac{1}{2} (g^2 + p^2 + \lambda_1 m_1^2 + 2\lambda_3 m_2^2 - 24N h_1^2 M^2) \varphi^2 + \left( \lambda_3 p - 8N M h_1^3 + \frac{1}{2} g \lambda_1 \right) \varphi^3 \\
& + \frac{1}{2} (2\lambda_3 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + 8p^2 + 8N h_2^2 M^2) \chi^2 + \left( \frac{1}{2} \lambda_3^2 + \frac{1}{8} \lambda_2^2 - 2N h_2^4 \right) \chi^4 \\
& - \frac{1}{2} \left( \lambda_2 \tilde{\xi}_2 + 2\lambda_3 \tilde{\xi}_1 + \frac{2N}{3} h_2^2 \right) R \chi^2 + \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + 8N h_1^2 h_2^2 + 32\lambda_3^2) \varphi^2 \chi^2 \\
& + \left( g \lambda_3 + \frac{1}{2} p \lambda_2 + 16p \lambda_3 + 8N h_1 h_2^2 M \right) \varphi \chi^2 + \frac{1}{6} (g + p - 8N h_1 M) \square \varphi \\
& + \left. \frac{1}{12} (\lambda_1 + 2\lambda_3 - 16N h_1^2) \square \varphi^2 + \frac{1}{12} (\lambda_2 + 2\lambda_3 + 16N h_2^2) \square \chi^2 \right\}. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Por compacidade, introduzimos as notações  $\tilde{\xi}_{1,2} = \xi_{1,2} - \frac{1}{6}$ . As divergências de vácuo estão incluídas por uma questão de completude.

A expressão (5.18) mostra que os termos ímpares, que incluímos na ação clássica (5.1), surgem nas divergências. Exatamente como é o caso na teoria escalar singular simples, esses termos não têm proteção de simetria e a estrutura das divergências é exatamente como deveria ser esperado dos argumentos de simetria e argumentos através de contagem de potências (*power-counting*).

Uma vez conhecida a forma das divergências de *1-loop*, podemos aplicar o esquema de Subtração Mínima no espaço-tempo curvo [64], e encontrar facilmente as relações entre as quantidades nuas e renormalizáveis. Os contratermos podem ser escritos como  $\Delta S = -\Gamma_{div}$ . Após isso, exigimos que a ação clássica renormalizada,  $S_R = S + \Delta S$ , seja igual à ação fundamental  $S$  em  $D = 4$ . A partir dessa condição, encontramos o conjunto de relações de renormalização para os campos

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left( 1 + \frac{2N h_1^2}{\epsilon} \right) \varphi, & \chi_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left( 1 - \frac{2N h_2^2}{\epsilon} \right) \chi, \\
\Psi_{k0} &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left[ 1 + \frac{3}{4\epsilon} (h_1^2 - h_2^2) \right] \Psi_k. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

As relações para as massas têm a forma

$$\begin{aligned}
M_0 &= \left(1 - \frac{9}{2\epsilon}h_1^2 - \frac{3}{2\epsilon}h_2^2\right)M, \\
m_{10}^2 &= m_1^2 - \frac{g^2 + p^2 + 4Nh_1^2m_1^2 + \lambda_1m_1^2 + 2\lambda_3m_2^2 - 24Nh_1^2M^2}{\epsilon}, \\
m_{20}^2 &= m_2^2 - \frac{8p^2 - 4Nh_2^2m_2^2 + \lambda_2m_2^2 + 2\lambda_3m_1^2 + 8Nh_2^2M^2}{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Para os acoplamentos pares e parâmetros não-mínimos, encontramos

$$\begin{aligned}
\xi_{10} &= \xi_1 - \frac{\lambda_1 + 4Nh_1^2}{\epsilon}\tilde{\xi}_1 - \frac{2\lambda_3}{\epsilon}\tilde{\xi}_2, \\
\xi_{20} &= \xi_2 + \frac{4Nh_2^2 - \lambda_2}{\epsilon}\tilde{\xi}_2 - \frac{2}{\epsilon}\lambda_3\tilde{\xi}_1, \\
h_{10} &= \mu^{\frac{4-D}{2}}h_1\left(1 - \frac{4Nh_1^2 + 9h_1^2 + 3h_2^2}{2\epsilon}\right), \\
h_{20} &= \mu^{\frac{4-D}{2}}h_2\left(1 + \frac{4Nh_2^2 + 9h_2^2 + 3h_1^2}{2\epsilon}\right), \\
\lambda_{10} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_1 + \frac{48Nh_1^4 - 8N\lambda_1h_1^2 - 3\lambda_1^2 - 12\lambda_3^2}{\epsilon}\right), \\
\lambda_{20} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_2 + \frac{48Nh_2^4 + 8N\lambda_2h_2^2 - 3\lambda_2^2 - 12\lambda_3^2}{\epsilon}\right), \\
\lambda_{30} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_3 - \frac{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + 8Nh_1^2h_2^2 + 32\lambda_3^2 + 4N\lambda_3h_1^2 - 4N\lambda_3h_2^2}{\epsilon}\right).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

E, finalmente, para os acoplamentos ímpares e parâmetros não-mínimos,

$$\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}}\left(g + \frac{48NMh_1^3 - 3g\lambda_1 - 6Nh_1^2g - 6\lambda_3p}{\epsilon}\right), \\
\tau_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}}\left(\tau + \frac{8Nh_1M^3 - 2N\tau h_1^2 - m_1^2g - m_2^2p}{\epsilon}\right), \\
p_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left(p - \frac{1}{\epsilon}\left(2\lambda_3g + \lambda_2p + 32\lambda_3p + 16Nh_1h_2^2M - 4Nh_2^2p + 2Nh_1^2p\right)\right), \\
f_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left[f + \frac{g}{\epsilon}\tilde{\xi}_1 + \frac{p}{\epsilon}\tilde{\xi}_2 - \frac{2Nh_1M + 6Nfh_1^2}{3\epsilon}\right].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Observe a renormalização não trivial dos parâmetros de acoplamento ímpares e, em particular, do novo parâmetro de acoplamento não mínimo  $f$ .

As funções  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser calculadas a partir das relações de renormalização para os parâmetros e campos. Para as teorias no espaço-tempo curvo, o procedimento [80, 111] é descrito em detalhes no livro [64], então apresentamos apenas os resultados finais para

$$\beta_P = \lim_{D \rightarrow 4} \mu \frac{dP}{d\mu}, \tag{5.23}$$

$$\gamma_\Phi \Phi = \lim_{D \rightarrow 4} \mu \frac{d\Phi}{d\mu}, \tag{5.24}$$



em que  $P = (m_1^2, m_2^2, M, h_1, h_2, \lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2, g, p, \tau, f)$  são os parâmetros renormalizados e  $\Phi = (\varphi, \chi, \Psi_k)$  são os campos renormalizados. Usando as relações (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22), obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\beta_{h_1} &= \frac{(4Nh_1^3 + 9h_1^3 + 3h_1h_2^2)}{2(4\pi)^2}, \\
\beta_{h_2} &= -\frac{(4Nh_2^3 + 9h_2^3 + 3h_1^2h_2)}{2(4\pi)^2}, \\
\beta_M &= \frac{3M}{2(4\pi)^2} (3h_1^2 + h_2^2), \\
\beta_{\lambda_1} &= \frac{1}{(4\pi)^2} (3\lambda_1^2 + 8N\lambda_1h_1^2 - 48Nh_1^4 + 12\lambda_3^2), \\
\beta_{\lambda_2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} (3\lambda_2^2 - 8N\lambda_2h_2^2 - 48Nh_2^4 + 12\lambda_3^2), \\
\beta_{\lambda_3} &= \frac{1}{(4\pi)^2} (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + 32\lambda_3^2 + 8Nh_1^2h_2^2 + 4N\lambda_3h_1^2 - 4N\lambda_3h_2^2), \\
\beta_{\xi_1} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ (\lambda_1 + 4Nh_1^2) \left( \xi_1 - \frac{1}{6} \right) + 2\lambda_3 \left( \xi_2 - \frac{1}{6} \right) \right], \\
\beta_{\xi_2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ (\lambda_2 - 4Nh_2^2) \left( \xi_2 - \frac{1}{6} \right) + 2\lambda_3 \left( \xi_1 - \frac{1}{6} \right) \right], \\
\beta_g &= \frac{1}{(4\pi)^2} (3g\lambda_1 + 6Ngh_1^2 - 48NMh_1^3 + 6p\lambda_3), \\
\beta_p &= \frac{1}{(4\pi)^2} (p\lambda_2 + 32\lambda_3p - 4Nph_2^2 + 2Nph_1^2 + 2g\lambda_3 + 16NMh_1h_2^2), \\
\beta_{m_1^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ m_1^2\lambda_1 + g^2 + p^2 + (4m_1^2 - 24M^2)Nh_1^2 + 2\lambda_3m_2^2 \right], \\
\beta_{m_2^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ m_2^2\lambda_2 + 8p^2 + (8M^2 - 4m_2^2)Nh_2^2 + 2\lambda_3m_1^2 \right], \\
\beta_\tau &= \frac{1}{(4\pi)^2} (2N\tau h_1^2 + gm_1^2 + pm_2^2 - 8Nh_1M^3), \\
\beta_f &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 2Nfh_1^2 - g \left( \xi_1 - \frac{1}{6} \right) - p \left( \xi_2 - \frac{1}{6} \right) + \frac{2}{3}NMh_1 \right]. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Para as funções  $\gamma$  encontramos

$$\gamma_\varphi = -\frac{2Nh_1^2}{(4\pi)^2}, \quad \gamma_\chi = \frac{2Nh_2^2}{(4\pi)^2}, \quad \gamma_{\Psi_k} = \frac{3}{4(4\pi)^2} (h_2^2 - h_1^2). \tag{5.26}$$

Uma boa verificação é que, se considerarmos a teoria invariante conforme, com massas e outras constantes dimensionais,  $g, p, \tau$  e  $f$  nulas, e assumindo  $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{6}$ , o coeficiente de pólo na expressão para as divergências (5.18) também é invariante conforme. Consequentemente, as funções  $\beta$  para  $\xi_1$  e  $\xi_2$  neste caso, são combinações lineares de  $\tilde{\xi}_1$  e  $\tilde{\xi}_2$ ,

definidas após a Eq. (5.17).

## 5.2 Contribuição escalar para o potencial efetivo

Nesta seção, iremos descrever a obtenção do potencial efetivo de *1-loop* do modelo em consideração até a primeira ordem na curvatura escalar, usando a representação de momento local, com base nas coordenadas normais de Riemann.

Realizamos o cálculo direto das contribuições escalares no modelo (5.1) e mostramos que os resultados são inconsistentes com as expectativas baseadas no Ansatz do grupo de renormalização, que consiste em adivinhar a forma dos logaritmos, tal como (2.31) e (2.32).

Os cálculos apresentados abaixo foram realizados na regularização covariante *cut-off* das integrais euclidianas, usando a representação do momento local através das coordenadas normais de Riemann. No caso do potencial efetivo, essa regularização é a opção mais simples. Por outro lado, a transição para o *cut-off* covariante na integral de tempo próprio e, conseqüentemente, para a regularização dimensional é automática, conforme discutido em [71] (veja também investigação geral anterior no espaço-tempo plano [112]).

Vamos começar pela forma bilinear da ação no setor escalar de (5.3)

$$S_0^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \begin{pmatrix} \sigma & \rho \end{pmatrix} \hat{H}_s \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

onde o operador matricial tem a forma

$$\hat{H}_s = \square \hat{1} + \begin{pmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

com  $\hat{1} = \text{diag}(1, 1)$  e

$$\begin{aligned} M_{11}^2 &= \tilde{m}_1^2 - \xi_1 R, \\ M_{22}^2 &= \tilde{m}_2^2 - \xi_2 R, \\ M_{12}^2 &= M_{21}^2 = 2p\chi + 4\lambda_3\varphi\chi, \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde

$$\tilde{m}_1^2 = m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 + \lambda_3\chi^2 + g\varphi, \quad (5.30)$$

$$\tilde{m}_2^2 = m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 + \lambda_3\varphi^2 + p\varphi. \quad (5.31)$$

Para simplificar os cálculos, vamos diagonalizar a matriz no segundo termo da relação (5.28), fazendo uma rotação no espaço dos campos,

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Após essa transformação, Eq. (5.27) se torna

$$\begin{aligned} S_0^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \phi_1 \square \phi_1 + \phi_2 \square \phi_2 \right. \\ &\quad + \phi_1 [\cos^2(\alpha)M_{11}^2 + \sin^2(\alpha)M_{22}^2 - \sin(2\alpha)M_{12}^2] \phi_1 \\ &\quad + \phi_2 [\sin^2(\alpha)M_{11}^2 + \cos^2(\alpha)M_{22}^2 + \sin(2\alpha)M_{12}^2] \phi_2 \\ &\quad \left. + \phi_1 [\sin(2\alpha)(M_{22}^2 - M_{11}^2) + 2\cos(2\alpha)M_{12}^2] \phi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Agora, podemos simplesmente escolher

$$\cos(2\alpha) = \frac{M_{22}^2 - M_{11}^2}{2M_{12}^2} \sin(2\alpha) \implies \cot(2\alpha) = \Theta = \frac{M_{22}^2 - M_{11}^2}{2M_{12}^2}, \quad (5.34)$$

de modo que o último termo em (5.33) se anula e a nova matriz diagonal  $\hat{\mathcal{H}}_s = U^{-1}\hat{H}_sU$  possui a seguinte forma

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \square \hat{1} + \begin{pmatrix} aM_{11}^2 + bM_{22}^2 - cM_{12}^2 & 0 \\ 0 & bM_{11}^2 + aM_{22}^2 + cM_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

em que

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2\sqrt{1+\Theta^2}}, \quad b = \frac{1}{2} - \frac{\Theta}{2\sqrt{1+\Theta^2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+\Theta^2}}. \quad (5.36)$$

Como estamos interessados na ordem de aproximação linear em curvatura  $\mathcal{O}(R)$ , é útil reescrever (5.35) como

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \begin{pmatrix} \square - \Pi_1 - \zeta_1 R + (R^2 \dots) & 0 \\ 0 & \square - \Pi_2 - \zeta_2 R + O(R^2 \dots) \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

com

$$\Pi_1 = - \left( \frac{1}{2} + \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \tilde{m}_1^2 - \left( \frac{1}{2} - \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \tilde{m}_2^2 + \frac{M_{12}^2}{\sqrt{1+\Theta_0^2}}, \quad (5.38)$$

$$\Pi_2 = - \left( \frac{1}{2} - \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \tilde{m}_1^2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \tilde{m}_2^2 - \frac{M_{12}^2}{\sqrt{1+\Theta_0^2}}, \quad (5.39)$$

e

$$\zeta_1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \xi_1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \xi_2, \quad (5.40)$$

$$\zeta_2 = \left( \frac{1}{2} - \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \xi_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Theta_0}{2\sqrt{1+\Theta_0^2}} \right) \xi_2, \quad (5.41)$$

em que denotamos  $\Theta_0 = \frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{2M_{12}^2}$ .

Como próximo passo, definimos

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

em que  $H^{(1)} = (\square - \Pi_1 - \zeta_1 R)$  e  $H^{(2)} = (\square - \Pi_2 - \zeta_2 R)$ , tal que

$$\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{H}}_s = \ln \text{Det} \hat{\mathcal{H}}_s = \text{Tr} \ln H^{(1)} + \text{Tr} \ln H^{(2)}. \quad (5.43)$$

Gostaríamos de apontar que, usando a rotação no espaço dos campos para diagonalizar  $\hat{H}$ , nós também temos que considerar a contribuição que vem da transformação  $\hat{\mathcal{H}}_s = U^{-1} \hat{H}_s U$ . Na relação (5.43), uma vez que  $\text{Det} U = \text{Det} U^{-1} = 1$ , então não há contribuição. Entretanto, o jacobiano de tal transformação no espaço-tempo quadridimensional é proporcional a  $\delta^4(0)$ , que na regularização dimensional formalmente desaparece enquanto que no nosso caso, via esquema de regularização *cut-off*, isso significa uma contribuição dependente do *cut-off* para a constante cosmológica. Outra observação importante é que a rotação (5.32) e a expansão em primeira ordem em curvatura não são operações comutativas. Isso significa que, se extrairmos o termo  $\mathcal{O}(R)$  primeiro e depois fazer uma rotação apenas para um setor de espaço plano, o resultado seria diferente e não satisfatório do ponto de vista de nossos cálculos.

A partir deste ponto, encontramos um produto de dois operadores escalares normais (5.42), podemos então, usar a técnica elaborada em [105] (veja também [1,62,71]) ou seguir

a mesma descrição apresentada no Cap. 3 para encontrarmos o potencial efetivo de *1-loop* até a primeira ordem em  $R$ , usando as coordenadas normais de Riemann.

A equação para o propagador do campo escalar  $G_c(x, x')$  relacionado a  $H^{(1)}$  tem a forma

$$\left(g^{\frac{1}{4}}\square g^{-\frac{1}{4}} - \Pi_1 - \zeta_1 R\right) \bar{G}(x, x') = -\delta^D(x - x'). \quad (5.44)$$

Em seguida, introduzimos as coordenadas normais de Riemann conforme descrito na seção 3.2 do Cap. 3. Com isso, a equação (5.44) se torna

$$\left[-\partial^2 + \Pi_1 + \left(\zeta_1 - \frac{1}{6}\right)R\right] \bar{G}(x, x') = \delta^D(x - x'). \quad (5.45)$$

Aqui, também levamos em conta o fato de que o último termo na Eq. (3.26) não contribui para o potencial efetivo devido à invariância de Lorentz [105].

A solução até a primeira ordem na curvatura tem a forma

$$\bar{G}(x, x') = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{iky} \left[ \frac{1}{k^2 + \Pi_1} - \left(\zeta_1 - \frac{1}{6}\right) \frac{R}{(k^2 + \Pi_1)^2} \right]. \quad (5.46)$$

É importante ressaltar que o resultado na equação (5.46) é escrito em analogia com o resultado (3.52) mostrado no Cap.3. Entretanto, nesse caso, temos duas notações diferentes,  $\Pi_1$  e  $\zeta_1$ , com formas mais complicadas, dadas pelas relações (5.38) e (5.40). O mesmo é válido para as relações de  $\Pi_2$  e  $\zeta_2$ .

Os resultados apresentados acima permitem encontrar o potencial efetivo de *1-loop*. Levando em consideração a expansão do operador bilinear  $H^{(1)}$  e da função de Green  $\bar{G}(x, x')$  até primeira ordem em  $R$  como mostrado em (3.57), temos

$$-\text{Tr} \ln \bar{G} = \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{(1)} + \text{Tr} \bar{G}_0 \hat{H}_1^{(1)}. \quad (5.47)$$

Para o potencial efetivo no espaço-tempo plano, precisamos apenas do primeiro termo no lado direito da Eq. (5.47), de modo que

$$-\int d^D x \bar{V}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S_2(\varphi, \chi) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S_2(\varphi = \chi = 0), \quad (5.48)$$

onde  $S_2(\varphi)$  é a forma bilinear da ação clássica no formalismo de campo de fundo. A partir da Eq. (5.48) encontramos

$$\bar{V}_0^{(1)}(\varphi, \chi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left( \frac{k^2 + \Pi_1}{k^2 + m_1^2} \right). \quad (5.49)$$

Utilizando o momento *cut-off* euclidiano  $\Omega$ , para  $D = 4$  temos que

$$\bar{V}_0^{(1)}(\varphi, \chi) = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int_0^\Omega dk^2 k^2 \ln \left( \frac{k^2 + \Pi_1}{k^2 + m_1^2} \right). \quad (5.50)$$

Resolvendo a integral finalmente obtemos

$$\bar{V}_0^{(1)}(\varphi, \chi) = \bar{V}_{0-div}^{(1)}(\varphi, \chi) + \bar{V}_{0-fin}^{(1)}(\varphi, \chi), \quad (5.51)$$

em que

$$\bar{V}_{0-div}^{(1)}(\varphi, \chi) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \Omega^2 (\Pi_1 - m_1^2) - \frac{\Pi_1^2}{2} \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} m_1^4 \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \right\}, \quad (5.52)$$

$$\bar{V}_{0-fin}^{(1)}(\varphi, \chi) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ -\frac{1}{4} (\Pi_1^2 - m_1^4) + \frac{\Pi_1^2}{2} \ln \frac{\Pi_1}{\mu^2} - \frac{1}{2} m_1^4 \ln \frac{m_1^2}{\mu^2} \right\}. \quad (5.53)$$

O segundo termo no lado direito da Eq. (5.47) corresponde à primeira ordem na correção da curvatura  $\bar{V}_1^{(1)}(\varphi, \chi)$ , que pode ser obtida através da relação

$$\bar{V}_1^{(1)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \bar{G}_0^{-1}(k) \bar{G}_1(k). \quad (5.54)$$

Para  $D = 4$  e substituindo as formas explícitas de  $\bar{G}_0^{-1}(k)$  e  $\bar{G}_1(k)$  da Eq. (5.46) na Eq. (5.54), encontramos

$$\bar{V}_1^{(1)} = -\frac{1}{2(2\pi)^4} \left( \zeta_1 - \frac{1}{6} \right) R \int_0^\Omega \frac{k^2 dk^2}{k^2 + \Pi_1}. \quad (5.55)$$

Depois de resolver a última integral, o resultado tem a forma

$$\bar{V}_1^{(1)}(\varphi, \chi) = \bar{V}_{1-div}^{(1)}(\varphi, \chi) + \bar{V}_{1-fin}^{(1)}(\varphi, \chi), \quad (5.56)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1-div}^{(1)}(\varphi, \chi) &= -\frac{1}{32\pi^2} \left( \zeta_1 - \frac{1}{6} \right) R \left[ \Omega^2 - \Pi_1 \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \right], \\ \bar{V}_{1-fin}^{(1)}(\varphi, \chi) &= -\frac{1}{32\pi^2} \left( \zeta_1 - \frac{1}{6} \right) R \Pi_1 \ln \frac{\Pi_1}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Descrevemos os cálculos para a primeira contribuição devido à  $\hat{H}^{(1)}$ . Para o segundo termo  $\hat{H}^{(2)}$  os cálculos são análogos, exceto que, neste caso, temos que usar  $\Pi_2$  e  $\zeta_2$  em vez de  $\Pi_1$  e  $\zeta_1$ . O resultado final da contribuição de *1-loop* dos campos escalares para o

potencial efetivo tem a forma

$$\begin{aligned}
\bar{V}(\varphi, \chi) &= \bar{V}_0^{(1)}(\varphi, \chi) + \bar{V}_0^{(2)}(\varphi, \chi) + \bar{V}_1^{(1)}(\varphi, \chi) + \bar{V}_1^{(2)}(\varphi, \chi) \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ -\frac{1}{4} [\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - (m_1^4 + m_2^4)] \right. \\
&\quad + \Omega^2 [\Pi_1 + \Pi_2 - (m_1^2 + m_2^2)] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2) \ln \frac{\Pi_2}{\mu^2} - \frac{1}{2}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2) \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \\
&\quad - \frac{1}{2}m_1^4 \ln \frac{m_1^2}{\mu^2} - \frac{1}{2}m_2^4 \ln \frac{m_2^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}(m_1^4 + m_2^4) \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \\
&\quad - \left( \zeta_1 - \frac{1}{6} \right) R \left[ \Pi_1 \ln \frac{\Pi_1}{\mu^2} + \Omega^2 - \Pi_1 \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \right] \\
&\quad \left. - \left( \zeta_2 - \frac{1}{6} \right) R \left[ \Pi_2 \ln \frac{\Pi_2}{\mu^2} + \Omega^2 - \Pi_2 \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2} \right] \right\}. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Algumas observações sobre a expressão (5.58) são dadas a seguir. Primeiramente, a parte divergente está em perfeita correspondência com a parte correspondente do resultado (5.18), obtido com base no método *heat kernel*. Para ver isso, basta usar a conhecida correspondência entre o *cut-off* covariante e o parâmetro de regularização dimensional (veja por exemplo, [113]),

$$\frac{2}{4-n} \mu^{n-4} \sim \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2}, \quad n \longrightarrow 4. \tag{5.59}$$

Segundo, a dependência no parâmetro de renormalização  $\mu$  é exatamente a forma padrão, de modo que o potencial efetivo é uma solução da equação padrão do grupo de renormalização (2.29).

Assim, a expressão (5.58) indica que as correções quânticas são dadas por alguns termos logarítmicos, semelhante a forma geral baseada no grupo de renormalização (2.30). Por outro lado, os termos logarítmicos em (5.58) dependem de argumentos incomuns que representam a mistura de diferentes campos escalares, suas massas e constantes de acoplamento. Essa situação é, de fato, típica das correções quânticas provenientes de *loops* com linhas internas mistas, como por exemplo no caso de campos com massas leves e pesadas [69] (veja também o trabalho recente [70] para a extensão ao espaço-curvo). No entanto, é interessante ressaltar que essa forma de potencial efetivo não confirma uma expectativa ingênua de que a contribuição dos campos escalares para o potencial efetivo

pode ser obtida usando o *Ansatz* da forma  $t^{(0)}$  a partir da Eq. (2.31) para cada um dos escalares de fundo. Este último significa que a possibilidade de obter o resultado completo (5.58) a partir da equação do grupo de renormalização não é evidente e merece um estudo mais aprofundado.

Podemos destacar que no limite de grandes campos escalares, quando ambos  $|\varphi| \rightarrow \infty$  e  $|\chi| \rightarrow \infty$ , nosso resultado (5.58) reduz à soma das contribuições logarítmicas dos campos escalares. Contudo, em geral o potencial efetivo tem forma mais complicada. A origem dessa característica do modelo de dois escalares é a rotação (5.32), que mistura diferentes massas, interações e parâmetros não-mínimos.



---

### Conclusões gerais e considerações finais

---

Finalmente, apresentamos as nossas conclusões a respeito dos resultados originais discutidos nos Caps. 3, 4 e 5 e também apontamos nossas perspectivas de trabalhos futuros.

#### **Conclusões e perspectivas referentes ao Cap. 3:**

O formalismo de quantização estocástica permite ir além da teoria usual das perturbações, em particular quando se usa métodos numéricos de rede para resolver a equação de Langevin associada. Apresentamos uma construção dessa equação para o campo escalar auto-interagente em um fundo curvo arbitrário. Mostramos que a solução da equação de Langevin pode ser realizada analiticamente ou numericamente, por meio da representação do momento local.

Na parte analítica do trabalho, usamos a equação de Langevin para reproduzir o resultado conhecido para o potencial efetivo do campo escalar auto-interagente no espaço curvo na dimensão  $D = 4$ , confirmando que a equivalência da quantização estocástica e a integral de caminho também se mantém no espaço curvo. Além disso, obtemos o potencial efetivo de *1-loop* em uma dimensão arbitrária  $D$  no espaço curvo. Até onde sabemos, este resultado é original. Também fizemos comparações de cálculos analíticos e numéricos de

*2-loops*.

O ponto principal do estudo apresentado neste capítulo é a complementação das abordagens analíticas e numéricas, especialmente a possibilidade de usar simulações numéricas baseadas em métodos de rede no espaço-tempo curvo. Isso é facilitado pela representação de momento local, que nos permite obter resultados do espaço curvo fazendo cálculos práticos no espaço plano.

A partir dos resultados numéricos, mostramos que as simulações numéricas podem ser executadas em uma ordem arbitrária em  $\hbar$ , um recurso que dificilmente é possível em cálculos analíticos devido ao aparecimento de integrais de *multi-loops* complicadas de resolver. A solução numérica é facilitada porque as equações perturbativas de Langevin para as diferentes ordens em  $\hbar$  têm a mesma estrutura, são lineares e podem ser resolvidas iterativamente. Além disso, como mostramos explicitamente, o uso da expansão em *loops* não é realmente necessário, pois simulações numéricas podem ser executadas usando uma expansão em  $R$  apenas, sem a necessidade da expansão em  $\hbar$ , isto é, nenhuma expansão no campo de ruído.

Planejamos fazer uma análise mais completa das simulações numéricas em um trabalho futuro para o caso realista de  $D = 4$  para o qual, em particular, estudaremos sobre renormalização. Isso permitirá comparações detalhadas com uma extensão às ordens superiores dos cálculos de *2-loops* anteriores, por exemplo, as Refs. [114, 115].

O progresso dos métodos não-perturbativos no espaço-tempo curvo poderá abrir o caminho para trabalhos futuros. Talvez o passo mais relevante seja o desenvolvimento de métodos não-perturbativos para avaliar a ação efetiva, que é uma generalização do potencial efetivo para um campo de fundo não constante. Outro possível desenvolvimento da abordagem apresentada aqui está relacionado à quantização de teorias com inclusão de férmions e bósons de calibre.

#### **Conclusões e perspectivas referentes ao Cap. 4:**

Consideramos vários aspectos da ação efetiva média de fundo na abordagem do GRF. Em primeiro lugar, confirmamos o conhecido resultado clássico de [55] referente à invariância de fundo das ações reguladoras e da ação efetiva média de fundo no formalismo

do método de campo de fundo para uma ampla classe de funções reguladoras que incluem (4.10), mas podem ser generalizadas para quaisquer outras funções dos argumentos  $z$ . Como novo resultado técnico, formulamos condições gerais da ação reguladora invariável em relação às transformações puramente de fundo.

A principal motivação deste trabalho foi verificar se a dependência *on-shell* da ação efetiva média [58] se mantém dentro do formalismo do método de campo de fundo. A resposta a esta pergunta é dada pela relação (4.57) e é estritamente positiva. Este resultado não contradiz os trabalhos recentes [50, 56] porque nessas publicações o objeto de estudo foi a invariância de calibre da ação efetiva média de fundo e a questão da dependência da fixação de calibre não foi investigada. Do nosso ponto de vista, a dependência de calibre *on-shell* da ação efetiva média é uma dificuldade principal fundamental da abordagem GRF aplicada às teorias de Yang-Mills. Confirmamos que a situação não melhora no método de campo de fundo.

Não está claro se é possível obter uma interpretação física razoável dos resultados obtidos no formalismo de GRF aplicado às teorias de Yang-Mills, e, portanto, faz sentido discutir as possíveis saídas dessa situação difícil.

Certamente, a maneira mais simples é ignorar o problema, por exemplo ao decidir que uma fixação especial de calibre é “ física ” ou “ correta ”, de modo que a mudança de calibre seja estritamente proibida. Uma vez que o formalismo GRF fornece resultados não perturbativos valiosos, a formulação teoricamente inconsistente é o preço a pagar por ir além da abordagem perturbativa bem definida.

Outra possibilidade é procurar alguns observáveis que possam ser invariantes sob a fixação de calibre. Por exemplo, no ponto fixo, a ação efetiva média de fundo se resume à ação efetiva padrão da TQC e, assim, à matriz  $S$ , amplitudes e todos os observáveis relacionados são bem definidos. Infelizmente, mesmo nas proximidades do ponto fixo, isso não é verdade devido à relação (4.57). Como a procura do ponto fixo não perturbativo é baseada nos fluxos do grupo de renormalização e os últimos devem ser dependentes da fixação de calibre, não está claro como a invariância do ponto fixo pode atualmente ser usada.

Uma idéia de perspectiva já colocada em prática é que aplicamos a mesma abordagem

estudada aqui para modelos de gravitação quântica de forma geral. Como resultado, podemos estabelecer uma classe especial de funções reguladoras que preservam a simetria do campo de fundo da ação efetiva média. Infelizmente, independentemente da simetria de calibre ser preservada no nível quântico, a não invariância da ação reguladora sob as transformações globais de BRST leva à dependência da fixação da condição de calibre *on shell* [116].

Existe também uma formulação alternativa do GRF em teorias de calibre elaborada em [58] que é independente da fixação de calibre, exatamente como uma TQC perturbativa convencional. Esse esquema é tecnicamente mais complicado, uma vez que as ações reguladoras incluem campos compostos. Pelo menos até agora, a desvantagem dessa abordagem é que não há método para realizar cálculos práticos.

### Conclusões e perspectivas referentes ao Cap. 5:

Formulamos o modelo Yukawa de um campo escalar estéril e outro escalar axial (pseudoscalar) interagindo entre si e também ao conjunto de férmions através dos acoplamentos Yukawa.

A análise completa da renormalização em *1-loop* do modelo em consideração, bem como as funções  $\beta$  e  $\gamma$  da teoria foi descrita. Os principais resultados desta parte são a importância dos termos mistos escalares e axiais, que não possuem proteção de simetria e, como resultado, são indispensáveis para a renormalizabilidade da teoria.

O potencial efetivo foi calculado até ordem linear em termos de curvatura escalar. Os resultados são uma soma de contribuições independentes do *loop* dos campos escalares e do *loop* do campo spinorial. As contribuições do setor escalar foram calculadas de forma explícita e demonstram uma dependência não trivial dos campos escalares de fundo, das massas e constantes de acoplamento. A obtenção da contribuição fermiônica para o potencial efetivo na teoria massiva completa não foi possível devido a dificuldades técnicas e a deixamos para um trabalho futuro.

É interessante que, diferentemente dos modelos com um único campo escalar, o potencial efetivo no modelo de dois escalares em discussão contém termos logaritmos usuais e também os termos assintoticamente não-logaritmos. No setor de *loop* escalar, o modelo

em consideração é qualitativamente semelhante à situação com dois campos quânticos com massas diferentes, que é bem conhecido na literatura (veja, por exemplo [69]) e foi discutido recentemente no espaço curvo [70]. É notável, no entanto, que em nossas expressões podemos observar o efeito das massas mesmo no potencial efetivo local, sem a necessidade dos fatores de forma não-locais, como é feito nas publicações mencionadas.

## APÊNDICE A

---

### Resultados úteis

---

Aqui apresentamos a prova da fórmula,

$$[R_{\alpha}^{\mu} y^{\nu} y^{\alpha} y^{\beta} \partial_{\mu} \partial_{\nu} - R_{\beta}^{\alpha} y^{\beta} \partial_{\alpha}] \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) = 0, \quad (\text{A.1})$$

útil nos cálculos do Cap. 3. Lá encontramos que

$$\bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau'). \quad (\text{A.2})$$

A prova da Eq. (A.1) baseia-se no uso da seguinte transformação bem conhecida nas coordenadas normais de Riemann

$$y^{\alpha} e^{iky} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial k_{\alpha}} e^{iky} \right) \quad (\text{A.3})$$

além de uma integração por partes. Usando a identidade (A.3) para o segundo termo da Eq. (A.1) podemos realizar a seguinte simplificação (lembrando que  $x^{\mu} = x'^{\mu} + y^{\mu}$ )

$$\begin{aligned} R_{\beta}^{\alpha} y^{\beta} \partial_{\alpha} \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) &= \int_0^{\tau} d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} R_{\beta}^{\alpha} y^{\beta} \partial_{\alpha} e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau') \\ &= \int_0^{\tau} d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} R_{\beta}^{\alpha} y^{\beta} e^{ikx} i k_{\alpha} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau') \\ &= \int_0^{\tau} d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} R_{\beta}^{\alpha} \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial k_{\beta}} e^{ikx} \right) i k_{\alpha} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau'). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
R_\beta^\alpha y^\beta \partial_\alpha \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) &= - \int_0^\tau d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} R_\beta^\alpha e^{ikx} \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left[ k_\alpha e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \bar{\eta}(k, \tau') \right] \\
&= - \int_0^\tau d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} R_\beta^\alpha e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \times \\
&\quad \times \left\{ [\delta_\alpha^\beta - 2 k_\alpha k^\beta (\tau - \tau')] \bar{\eta}(k, \tau') + k_\alpha \frac{\partial \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\beta} \right\}. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
R_\beta^\alpha y^\beta \partial_\alpha \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) &= - \int_0^\tau d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \times \\
&\quad \times \left\{ [R - 2 R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu (\tau - \tau')] \bar{\eta}(k, \tau') + R_\beta^\alpha k_\alpha \frac{\partial \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\beta} \right\}. \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para o primeiro termo, seguindo as mesmas etapas, depois de um cálculo muito mais longo, temos

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) &= - \int_0^\tau d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \times \\
&\quad \times \left\{ [R - 2 R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu (\tau - \tau')] \bar{\eta}(k, \tau') + 2 R_\beta^\alpha k_\alpha \frac{\partial \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\beta} - R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \frac{\partial^2 \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \right\}. \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Usando os resultados (A.6) e (A.7) encontramos

$$\begin{aligned}
[R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu - R_\beta^\alpha y^\beta \partial_\alpha] \bar{\varphi}_0^{(1)}(x, \tau) &= \quad (\text{A.8}) \\
&= - \int_0^\tau d\tau' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau - \tau')} \left[ R_\beta^\alpha k_\alpha \frac{\partial \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\beta} - R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \frac{\partial^2 \bar{\eta}(k, \tau')}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \right].
\end{aligned}$$

Agora, para entender por que os termos com as derivadas do campo de ruído aleatório na Eq. (A.8) se anula, devemos lembrar que  $\bar{\eta}(k, \tau)$  é uma função invariante de Lorentz, por isso pode ser uma função somente de  $k^2 = k^\mu k_\mu$ . Para tal função, usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial \bar{\eta}(k^2, \tau)}{\partial k_\beta} = 2 k^\beta \bar{\eta}'(k^2, \tau), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}(k^2, \tau)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} = 2 \eta^{\alpha\beta} \bar{\eta}'(k^2, \tau) + 4 k^\alpha k^\beta \bar{\eta}''(k^2, \tau), \quad (\text{A.10})$$

onde ' significa derivada em relação a  $k^2$ . Finalmente, fazendo as substituições (A.9) e (A.10) na expressão (A.8), o termo correspondente à Eq. (A.9) desaparece com o primeiro termo no lado direito da Eq. (A.10), enquanto o segundo desaparece devido as propriedades de simetria do tensor de Riemann e a prova está completa.

---

### Resultado analítico do valor esperado no vácuo do campo escalar até *2-loops*

---

No Cap. 3, comparamos os resultados analíticos e numéricos de *2-loops* para o espaço-tempo curvo no painel esquerdo da Fig. 3.2. Entretanto, no mesmo capítulo, não mostramos os resultados analíticos. O motivo é que tal cálculo contém expressões muito longas, as quais ainda estão em preparação para futura publicação.

A fim de justificar tal resultado, o nosso objetivo aqui é mostrar as expressões finais obtidas, utilizadas na comparação com os resultados numéricos.

Para encontrarmos as contribuições de *2-loops* para o valor esperado no vácuo do campo escalar até a primeira ordem na curvatura escalar precisamos resolver todas as expressões (3.29)-(3.36), uma vez que para este cálculo precisamos das soluções de ordem  $\bar{\varphi}^{(4)}$  até primeira ordem em curvatura e ambas as expressões de quarta ordem dependem das soluções das equações anteriores, como veremos a seguir. As soluções do campo médio  $\bar{\varphi}^{(4)}$  para o espaço-tempo plano e curvo respectivamente são dadas por

$$\bar{\varphi}_0^{(4)}(k, \tau) = \int_0^\tau dt e^{-(k^2 + \tilde{m})(\tau-t)} \bar{\eta}_0^{(4)}(k, t), \quad (\text{B.1})$$



$$\bar{\varphi}_1^{(4)}(k, \tau) = \int_0^\tau dt e^{-(k^2 + \bar{m}^2)(\tau-t)} \bar{\eta}_1^{(4)}(k, t), \quad (\text{B.2})$$

em que as expressões para os campos de ruídos até quarta ordem são

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0^{(4)}(k, \tau) = & -V^{(III)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(3)}(k-q, \tau) \\ & - \frac{V^{(III)}}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(2)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q, \tau) \\ & - \frac{V^{(IV)}}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q-r, \tau) \\ & - \frac{V^{(V)}}{24} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \times \\ & \times \bar{\varphi}_0^{(1)}(p, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(k-q-r-p, \tau), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^{(4)}(k, \tau) = & - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \bar{\varphi}_0^{(4)}(k, \tau) - V^{(III)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(3)}(q, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(k-q, \tau) \\ & - V^{(III)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_1^{(3)}(k-q, \tau) \\ & - V^{(III)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(2)}(q, \tau) \bar{\varphi}_1^{(2)}(k-q, \tau) \\ & - \frac{V^{(IV)}}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \bar{\varphi}_1^{(2)}(k-q-r, \tau) \\ & - V^{(IV)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(r, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(k-q-r, \tau) \\ & - \frac{V^{(IV)}}{6} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \times \\ & \times \bar{\varphi}_0^{(1)}(p, \tau) \bar{\varphi}_1^{(1)}(k-q-r-p, \tau) \\ & - \frac{V^{(III)}}{12} R_{\mu\nu}(x') y^\mu y^\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(3)}(k-q, \tau) \\ & - \frac{V^{(III)}}{24} R_{\mu\nu}(x') y^\mu y^\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(2)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q, \tau) \\ & - V^{(IV)} R_{\mu\nu}(x') y^\mu y^\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q-r, \tau) \\ & - \frac{V^{(V)}}{8} R_{\mu\nu}(x') y^\mu y^\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \times \\ & \times \bar{\varphi}_0^{(1)}(p, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(k-q-r-p, \tau). \end{aligned}$$

Começando com o espaço plano e substituindo (B.3) na Eq. (B.1), a expressão completa

para a solução do campo médio  $\langle \bar{\varphi}_0^{(4)} \rangle$  no espaço de coordenadas tem a forma

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\varphi}_0^{(4)}(x, \tau) \rangle &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^\tau dt e^{-(k^2 + \tilde{m}^2)(\tau-t)} \left[ -V^{(III)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(3)}(k-q, \tau) \rangle \right. \\
&\quad - \frac{V^{(III)}}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \langle \bar{\varphi}_0^{(2)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q, \tau) \rangle \\
&\quad - \frac{V^{(IV)}}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \bar{\varphi}_0^{(2)}(k-q-r, \tau) \rangle \\
&\quad - \frac{V^{(V)}}{24} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle \bar{\varphi}_0^{(1)}(q, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(r, \tau) \times \\
&\quad \left. \times \bar{\varphi}_0^{(1)}(p, \tau) \bar{\varphi}_0^{(1)}(k-q-r-p, \tau) \rangle \right].
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Como mencionamos acima, a partir da relação (B.4), podemos ver que o cálculo de  $\langle \bar{\varphi}_0^{(4)}(k, \tau) \rangle_\eta$  depende diretamente de correlações das soluções dos campos com ordens inferiores. O mesmo acontece para o caso com curvatura  $\langle \bar{\varphi}_1^{(4)}(k, \tau) \rangle$ . A forma de obter tais soluções e o cálculo das correlações seguem os mesmos passos elaborados no Cap. 3. O resultado final no limite do equilíbrio tem a forma

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_0^{(4)}(x) \rangle &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{4} (V^{(III)})^3 \left[ \frac{d_k + 2d_{k-q}}{\tilde{m}^2 d_q d_k^2 d_{k-q} (d_q + d_k + d_{k-q})} \right. \right. \\
&\quad + \left. \frac{d_k + 2\tilde{m}^2}{2\tilde{m}^6 d_q d_k^2} \right] + \frac{1}{2} V^{(III)} V^{(IV)} \left[ \frac{1}{\tilde{m}^2 d_q d_k (d_q + d_k + d_{k-q})} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{d_k + \tilde{m}^2}{2\tilde{m}^4 d_q d_k^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

para o espaço-tempo plano e até primeira ordem na curvatura

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_1^{(4)}(x) \rangle &= - \left( \xi - \frac{1}{6} \right) R \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{2} V^{(III)} V^{(IV)} \left[ \frac{1}{\tilde{m}^6 d_q d_k} \right. \right. \\
&+ \frac{1}{\tilde{m}^2 d_q d_k (d_q + d_k + d_{k-q})^2} + \frac{d_k^2 + d_{k-q}^2 + d_q (d_k + d_{k-q}) + 6d_{k-q} d_k}{2\tilde{m}^2 d_{k-q}^2 d_k^2 (d_q + d_{k-q} + d_k)^2} \\
&+ \left. \frac{d_q + \tilde{m}^2}{\tilde{m}^4 d_q^2 d_k (d_q + d_k + d_{k-q})} + \frac{(2d_q + d_k) (d_k + \tilde{m}^2)}{2\tilde{m}^4 d_q^2 d_k^3} \right] \\
&- \frac{1}{4} (V^{(III)})^3 \left[ \frac{d_q^2 + 2d_q d_{k-q} + 2d_{k-q} d_k}{\tilde{m}^2 d_q^2 d_{k-q}^2 d_k^2 (d_q + d_{k-q} + d_k)} \right. \\
&+ \frac{(2d_{k-q} + d_k) (d_q + d_{k-q} + 2d_k)}{\tilde{m}^2 d_q d_{k-q} d_k^3 (d_q + d_{k-q} + d_k)^2} + \frac{(d_k + 2\tilde{m}^2) (3d_k + 2\tilde{m}^2)}{2\tilde{m}^8 d_q d_k^3} \\
&+ \frac{d_k (d_q + d_{k-q}) (d_{k-q} + d_k) + \tilde{m}^2 d_{k-q} (d_q + d_k)}{\tilde{m}^4 d_q^2 d_{k-q} d_k^3 (d_q + d_{k-q} + d_k)} \\
&+ \left. \left. \frac{2d_k + \tilde{m}^2}{\tilde{m}^4 d_q d_k^3 (d_q + d_{k-q} + d_k)} \right] \right\}, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

onde introduzimos a notação útil para o inverso dos propagadores  $d_k = k^2 + \tilde{m}^2$ ,  $d_k = q^2 + \tilde{m}^2$  e  $d_{k-q} = (k - q)^2 + \tilde{m}^2$ . Este é o resultado final para o valor esperado no vácuo do campo escalar de  $\mathcal{2}$ -loops.

A seguir, fazemos algumas observações. Notamos que para  $\langle \phi \rangle$  as contribuições do termo  $R_{\mu\nu}(x') y^\mu y^\nu$  desaparecem depois de tirar a média do ruído, mas elas não desaparecem nas funções de correlação. Confirmamos essa característica nas simulações numéricas.

---

## Bibliografia

---

- [1] E.A. Reis, G. Krein, T. d. P. Netto and I.L. Shapiro, *Stochastic quantization of a self-interacting nonminimal scalar field in semiclassical gravity*, Phys. Lett. B **798** (2019) 134925, [arXiv:1804.04569].
- [2] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, New York U.S.A -1965).
- [3] L. F. Abbott, E. Farhi and M. B. Wise, *Particle Production in the New Inflationary Cosmology*, Phys. Lett. B **117** (1982) 29.
- [4] A. D. Dolgov and A. D. Linde, *Baryon Asymmetry in Inflationary Universe*, Phys. Lett. B **116** (1982) 329.
- [5] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, M. S. Turner and F. Wilczek, *Reheating an Inflationary Universe*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1437.
- [6] A. D. Dolgov and D. P. Kirilova, *On Particle Creation By A Time Dependent Scalar Field*, Sov. J. Nucl. Phys. **51** (1990) 172.
- [7] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, 2005).

- [8] M. V. Fischetti, J. B. Hartle and B. L. Hu, *Quantum Effects in the Early Universe. 1. Influence of Trace Anomalies on Homogeneous, Isotropic, Classical Geometries* Phys. Rev. D **20** (1979) 1757.
- [9] A. A. Starobinsky, *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*, Phys. Lett. B **91** (1980) 99.
- [10] A. A. Starobinski, Phys. Lett. B **91** (1980) 99; *Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational De Sitter Stage and its Observational Consequences*, Proceedings of the second seminar "Quantum Gravity", pp. 58-72 (Moscow, 1982).
- [11] A. M. Pelinson, I. L. Shapiro and F. I. Takakura, *Stability issues in the modified Starobinsky model*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127** (2004) 182.
- [12] T. d. P. Netto, A. M. Pelinson, I. L. Shapiro and A. A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation*, Eur. Phys. J. C **76** (2016) no.10, 544, [arXiv:1509.08882 [hep-th]].
- [13] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*, Phys. Lett. B **659** (2008) 703, [arXiv:0710.3755 [hep-th]].
- [14] F. L. Bezrukov, A. Magnin and M. Shaposhnikov, *Standard Model Higgs boson mass from inflation*, Phys. Lett. B **675** (2009) 88, [arXiv:0812.4950 [hep-ph]].
- [15] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov and S. Sibiryakov, *Higgs inflation: consistency and generalisations*, JHEP **1101** (2011) 016, [arXiv:1008.5157 [hep-ph]].
- [16] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Standard Model Higgs boson mass from inflation: Two loop analysis*, JHEP **0907** (2009) 089, [arXiv:0904.1537 [hep-ph]].
- [17] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik and A. A. Starobinsky, *Inflation scenario via the Standard Model Higgs boson and LHC*, JCAP **0811** (2008) 021, [arXiv:0809.2104 [hep-ph]].

- [18] A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, C. Kiefer, A. A. Starobinsky and C. Steinwachs, *Asymptotic freedom in inflationary cosmology with a non-minimally coupled Higgs field*, JCAP **0912** (2009) 003, [arXiv:0904.1698 [hep-ph]].
- [19] J. Elias-Miro, J.R. Espinosa, G.F. Giudice, H.M. Lee, and A. Strumia, *Stabilization of the Electroweak Vacuum by a Scalar Threshold Effect*, JHEP **1206** (2012) 031, [arXiv:1203.0237].
- [20] I. L. Shapiro and J. Sola, *On the possible running of the cosmological 'constant'*, Phys. Lett. B **682** (2009) 105, [arXiv:0910.4925 [hep-th]].
- [21] A. Babic, B. Guberina, R. Horvat and H. Stefancic, *Renormalization group running of the cosmological constant and its implication for the Higgs boson mass in the standard model*, Phys. Rev. D **65** (2002) 085002, [arXiv:0111207 [hep-ph]].
- [22] I. L. Shapiro and J. Sola, *Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology*, JHEP **0202** (2002) 006 [arXiv:0012227 [hep-th]].
- [23] I. L. Shapiro, J. Sola and H. Stefancic, *Running  $G$  and  $\Lambda$  at low energies from physics at  $M(X)$ : Possible cosmological and astrophysical implications*, JCAP **0501** (2005) 012, [arXiv:0410095 [hep-th]].
- [24] I. L. Shapiro, *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001, [arXiv:0801.0216 [gr-qc]].
- [25] C. Farina, W.J. M. Kort-Kamp, S. Mauro and I.L. Shapiro, *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity*, Phys. Rev. D **83** (2011) 124037, [arXiv:1101.5611 [gr-qc]].
- [26] J. Grande, J. Sola, J.C. Fabris, and I.L. Shapiro, *Cosmic perturbations with running  $G$  and  $\Lambda$* , Class. Quant. Grav. **27** (2010) 105004, [arXiv:1001.0259];
- [27] J.C. Fabris, I.L. Shapiro, and A.M. Velasquez-Toribio *Testing dark matter warmness and quantity via the reduced relativistic gas model*, Phys. Rev. **D85** (2012) 023506, [arXiv:1105.2275].

- [28] D.C. Rodrigues, P.S. Letelier and I.L. Shapiro, *Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections*, JCAP **1004** (2010) 020, [arXiv:0911.4967 [astro-ph.CO]].
- [29] J.D. Toniato, D.C. Rodrigues, Á.O. F. de Almeida and N. Bertini, *Will-Nordtvedt PPN formalism applied to renormalization group extensions of general relativity*, Phys. Rev. D **96** (2017) no.6, 064034, [arXiv:1706.09032 [gr-qc]].
- [30] S. Durr *et al.*, *Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses*, Science **322** (2008) 1224, [arXiv:0906.3599 [hep-lat]].
- [31] C. Gattringer and C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice*, Lect. Notes Phys. **788** (2010) 1.
- [32] G. Aarts, *Introductory lectures on lattice QCD at nonzero baryon number*, J. Phys. Conf. Ser. **706** (2016) no.2, 022004, [arXiv:1512.05145 [hep-lat]].
- [33] E. Nelson, *Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics* Phys. Rev. **150** (1966) 1079.
- [34] E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, (Princeton University Press-2001).
- [35] G. Parisi and Y. s. Wu, *Perturbation Theory Without Gauge Fixing*, Sci. Sin. **24** (1981) 483.
- [36] P. H. Damgaard and H. Huffel, *Stochastic Quantization* (World Scientific, Singapore, 1988)
- [37] M. Namiki, *Basic ideas of stochastic quantization*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **111** (1993) 1.
- [38] B.L. Hu, and E. Verdaguer, *Stochastic Gravity: Theory and Applications*, Living Rev. Rel. **7** (2004) 3, gr-qc/0307032; *ibid*, **11** (2008) 3, [arXiv:0802.0658].
- [39] A.A. Starobinsky, J. Yokoyama, *Equilibrium state of a selfinteracting scalar field in the De Sitter background*, Phys. Rev. **D50** (1994) 6357, [arXiv: 9407016 [astro-ph]].

- [40] G. Menezes and N.F. Svaiter, *Stochastic quantization of scalar fields in Einstein and Rindler spacetime* J. Phys. A **40** (2007) 8545, [arXiv:0706.0920 [hep-th]].
- [41] T. C. de Aguiar, G. Menezes and N. F. Svaiter, *Stochastic Quantization of Scalar Fields in de Sitter Spacetime*, Class. Quant. Grav. **26** (2009) 075003, [arXiv:0809.2273 [hep-th]].
- [42] C. Wetterich, *Average Action and the Renormalization Group Equations*, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991).
- [43] C. Wetterich, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [44] T.R. Morris, *The Exact renormalization group and approximate solutions*, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994) .
- [45] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, *Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*. Phys. Rept. **363** 223 (2002).
- [46] C. Bagnuls and C. Bervillier, *Exact renormalization group equations: an introductory review*, Phys. Rept. **348**, 91 (2001).
- [47] H. Gies, *Introduction to the functional RG and applications to gauge theories*, (Springer Lect. Notes in Physics, **62** 2012).
- [48] J.M. Pawłowski, *Aspects of the functional renormalisation group*, Annals Phys. **322**, 2831 (2007).
- [49] A. Wipf, *Statistical Approach to Quantum Field Theory: An Introduction*, Springer Lect. Notes in Physics, **864**, (2013).
- [50] C. Wetterich, *Gauge-invariant fields and flow equations for Yang-Mills theories*, Nucl. Phys. B **934**, 265 (2018), [arXiv:1710.02494].
- [51] A.O. Barvinsky, D. Blas, M. Herrero-Valea, S.M. Sibiryakov and C.F. Steinwachs, *Renormalization of gauge theories in the background-field approach*, JHEP **1807**, 035(2018), [arXiv:1705.03480].



- [52] I.A. Batalin, P.M. Lavrov and I.V. Tyutin, *Multiplicative renormalization of Yang-Mills theories in the background-field formalism*, Eur. Phys. J. C **78**, 570 (2018).
- [53] J. Frenkel and J.C. Taylor, *Background gauge renormalization and BRST identities*, Annals Phys. **389**, 234 (2018).
- [54] P.M. Lavrov, *Gauge (in)dependence and background field formalism*, Phys. Lett. B **791**, 293 (2019), [arXiv:1805.02149].
- [55] M. Reuter and C. Wetterich, *Effective average action for gauge theories and exact evolution equations*, Nucl. Phys. B **417**, 181 (1994).
- [56] A. Codello, *Renormalization group flow equations for the proper vertices of the background effective average action*, Phys. Rev. D **91**, 065032 (2015), [arXiv:1304.2059].
- [57] P. M. Lavrov, E. A. dos Reis, T. da Paula Netto and I. L. Shapiro, *Gauge invariance of the background average effective action*, European Physical Journal C **79**, no. 8, 661 (2019).
- [58] P.M. Lavrov and I.L. Shapiro, *On the Functional Renormalization Group approach for Yang-Mills fields*, JHEP **1306**, 086 (2013), [arXiv:1212.2577].
- [59] D.J. Toms, *Effective action for the Yukawa model in curved spacetime*, JHEP **1805** (2018) 139, [arXiv:1804.08350].
- [60] D.J. Toms, *Gauged Yukawa model in curved spacetime*, Phys. Rev. **D98** (2018) 025015, [arXiv:1805.01700].
- [61] D.J. Toms, *Yang-Mills Yukawa model in curved spacetime*, [arXiv:1906.02515].
- [62] V. F. Barra, I. L. Buchbinder, J. G. Joaquim, A. R. Rodrigues and I. L. Shapiro, *Renormalization of Yukawa model with sterile scalar in curved space-time*, Eur. Phys. J. **C79** (2019) 458, [arXiv:1903.11546].
- [63] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization group equations in curved space-time with torsion*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1197.

- [64] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [65] S.R. Coleman and E.J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, Phys. Rev. **D7** (1973) 1888.
- [66] I.L. Buchbinder and S.D. Odintsov, *Effective Potential In A Curved Space-time*, Sov. Phys. J. **27** (1984) 554; Class. Quant. Grav. **2** (1985) 721.
- [67] I.L. Buchbinder and J.J. Wolfengaut, *Renormalization Group Equations and Effective Action in Curved Space-time*, Class. Quant. Grav. **5** (1988) 1127.
- [68] S. Alexander and N. Yunes, *Chern-Simons Modified General Relativity*, Phys. Rept. **480** (2009) 1. [arXiv:0907.2562].
- [69] V. Ilisie, *Concepts in Quantum Field Theory. A Practitioner's Toolkit*, (Springer, 2016).
- [70] T.G. Ribeiro and I.L. Shapiro, *Scalar model of effective field theory in curved space*, [arXiv:1908.01937].
- [71] F. Sobreira, B.J. Ribeiro and I.L. Shapiro, *Effective Potential in Curved Space and Cut-Off Regularizations*, Phys. Lett. B **B705** (2011) 273.
- [72] N. D. Birrel & P. C. W. Davies; *Quantum fields in curved space*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1982).
- [73] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in curved spacetime*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1989)
- [74] L. E. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time: Quantized Fields and Gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2009).
- [75] I. L. Shapiro; *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 10.

- [76] A. Z. Petrov; *Einstein Spaces*, (Pergamon Press, Oxford - 1969).
- [77] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. (Addison-Wesley, New York, 1995).
- [78] S.R. Coleman, E.J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, Phys. Rev. **D7** (1973) 1888.
- [79] I.L. Shapiro, *Primer in Tensor Analysis and Relativity*, (Springer-Nature, NY, 2019).
- [80] I.L. Buchbinder, *On Renormalization Group Equations in Curved Space-Time*, Theoret. Math. Phys. **61** (1984) 1215 (Russian version: Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **61** (1984) 393).
- [81] B.S. De Witt, *Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory*, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967).
- [82] I.Ya. Arefeva, L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Generating functional for the s matrix in gauge theories*, Theor. Math. Phys. **21**, 1165 (1975). Teor. Mat. Fiz. **21**, 311-321 (1974).
- [83] L.F. Abbott, *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B **185**, 189-203 (1981).
- [84] L.D. Faddeev and V.N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).
- [85] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *The abelian Higgs-Kibble Model, unitarity of the S-operator*, Phys. Lett. B **52**, 344 (1974).
- [86] I.V. Tyutin, *Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism*, Lebedev Inst. preprint N 39 (1975).
- [87] J.C. Taylor, *Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field*, Nucl. Phys. B **33**, 436 (1971).
- [88] A.A. Slavnov, *Ward identities in gauge theories*, Theor. Math. Phys. **10**, 99 (1972).

- [89] R.E. Kallosh and I.V. Tyutin, *The equivalence theorem and gauge invariance in renormalizable theories*, Sov. J. Nucl. Phys. **17**, 98 (1973).
- [90] I.V. Tyutin, *Once again on the equivalence theorem*, Phys. Atom. Nucl. **65**, 194 (2002).
- [91] J. Polchinski, *Renormalization and effective lagrangians*, Nucl. Phys. B 231 (1984) 269.
- [92] K. G. Wilson, *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 773.
- [93] J. S. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. 82 (1951) 664.
- [94] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin 1/2 fields*, Nucl. Phys. **B191** (1981) 237.
- [95] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rept. 119 (1985) 1.
- [96] C. Morette, *On the definition and approximation of Feynman's path integrals*, Phys. Rev. **81**, 848-852 (1951).
- [97] C. G. Bollini & J. J. Giambiagi; *Dimensional regularization in configuration space*, Phys. Rev. D **53**, (1966) 5761.  
G. Leibbrandt; *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. of Modern Phys. **47** (1975) 4.
- [98] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun, C. H. Taubes, *Continuum Regularization of QCD*, Phys. Lett. **165B** (1985) 151,
- [99] J. M. Pawłowski, I. O. Stamatescu, F. P. G. Ziegler, *Cooling Stochastic Quantization with colored noise*, Phys. Rev. D **96** (2017) no.11, 114505, [arXiv:1705.06231].
- [100] J. Martin, M. A. Musso, *Stochastic quintessence*, Phys. Rev. D **71** (2005) 063514, [arXiv:0410190 [astro-ph]].

- [101] J. Martin, M. Musso, *Solving stochastic inflation for arbitrary potentials*, Phys. Rev. D **73** (2006) 043516, [arXiv:0511214 [hep-th]].
- [102] J. Martin, M. Musso, *On the reliability of the Langevin perturbative solution in stochastic inflation*, Phys. Rev. D **73** (2006) 043517, [arXiv:0511292 [hep-th]].
- [103] K. E. Kunze, *Perturbations in stochastic inflation*, JCAP **0607** (2006) 014, [arXiv:0603575 [astro-ph]].
- [104] N. C. Cassol-Seewald, R. L. S. Farias, G. Krein, R. S. Marques de Carvalho, *Noise and ultraviolet divergences in simulations of Ginzburg-Landau-Langevin type of equations*, Int. J. Mod. Phys. C **23** (2012) no.08, 1240016,
- [105] T.S. Bunch, L. Parker, *Feynman Propagator in Curved spacetime: A Momentum Space Representation*, Phys. Rev. D **20** (1979) 2499.
- [106] C. Gardiner, *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences* (Springer, Berlin, 2009).
- [107] E. A. dos Reis, T. d. P. Netto, G. Krein, em preparação.
- [108] B.L. Giacchini, P.M. Lavrov and I.L. Shapiro, *Background field method and nonlinear gauges*, [arXiv:1906.04767 [hep-th]].
- [109] J.C. Collins, *Renormalization*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [110] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [111] D.J. Toms, *The Effective Action And The Renormalization Group Equation In Curved Space-Time*, Phys. Lett. **B126** (1983) 37.
- [112] S.-B. Liao, *Connection between momentum cutoff and operator cutoff regularizations*, Phys. Rev. D **53** (1996) 2020.
- [113] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119** (1985) 1.

- [114] B. L. Hu and D. J. O'Connor, *Effective Lagrangian for  $\lambda\phi^4$  Theory in Curved Space-time With Varying Background Fields: Quasilocal Approximation*, Phys. Rev. D **30** (1984) 743 .
- [115] N. C. Tsamis and R. P. Woodard, *Matter contributions to the expansion rate of the universe*, Phys. Lett. B **426** (1998) 21. [arXiv:9710466 [hep-ph]].
- [116] Vítor F. Barra, Peter M. Lavrov, Eduardo Antonio dos Reis, Tibério de Paula Netto and Ilya L. Shapiro, *Functional renormalization group approach and gauge dependence in gravity theories*, (2019), submetido para publicação ao jornal Phys. Rev. D, [arXiv:1910.06068 [hep-ph]].