

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Factor Risco Guillen**

**ESCALARIZAÇÃO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS PARA  
CONSTRUÇÃO DE FRENTE DE PARETO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO  
COM DOIS OBJETIVOS**

Juiz de Fora

2020

**Factor Risco Guillen**

**ESCALARIZAÇÃO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS PARA  
CONSTRUÇÃO DE FRENTES DE PARETO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO  
COM DOIS OBJETIVOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire

Coorientador: Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Risco Guillen, Factor.

ESCALARIZAÇÃO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS PARA CONSTRUÇÃO DE FRENTES DE PARETO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM DOIS OBJETIVOS / Factor Risco Guillen. – 2020.

56 f. : il.

Orientador: Wilhelm Passarella Freire

Coorientador: Sandro Rodrigues Mazorche

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Otimização Multi-objetivo. 2. Ótimo de Pareto. 3. Frente de Pareto. 4. Método de Somas Ponderadas. 5. Escalarização de Tchebychev. I. Passarella Freire, Wilhelm, orient., II. Rodrigues Mazorche, Sandro, coorient. III. Título.

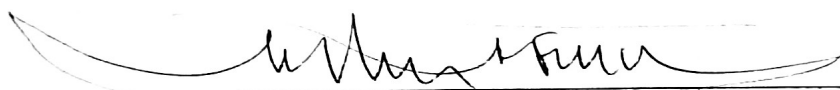
**Factor Risco Guillen**

**Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios para Construção de frentes de Pareto  
de Problemas de Otimização com dois Objetivos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Matemática Aplicada

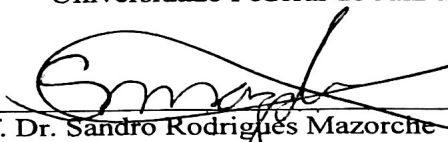
Aprovada em 06 de março de 2020

**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche - Co-orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Grigori Chapiro

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco

IF Sudeste de Minas Gerais

Dedico este trabalho aos meus pais, Luciano e Paulina

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me dar a oportunidade de concluir esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, Luciano e Paulina, pelo exemplo de motivação, carinho e apoio incondicional.

Aos meus irmãos, Nilcerio e Diana, pela ajuda e incentivo que me deram para que pudesse encerrar esse desafio.

Agradeço a minha namorada, Katherine, pelo apoio incondicional, que mesmo estando tão longe me incentivou a todo instante.

Ao meu orientador, Wilhelm Passarella Freire, pela paciência e disponibilidade na orientação deste trabalho, por seus conselhos, correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço ao meu co-orientador, Sandro Rodrigues Mazorche e aos prezados professores Olimpio, Grigori, Laura, Daniel e Jordan que compartilham os seus conhecimentos nas matérias que cursei.

Agradeço aos meus amigos Manuel, Julio, Giovanna, Yvonne, Rosmery, Nelson e Pablo pela amizade e colaboração.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICE-UFJF.

À Coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF.

Aos membros efetivos da banca examinadora, Hernando José Rocha Franco e Grigori Chapiro, pela gentileza em participar da avaliação deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Não há melhor escudo para o imbecil do que o erro do homem honrado.”-Alonso de Varros.

## RESUMO

Este trabalho é sobre Otimização Multi-objetivo. Apresentamos os conceitos básicos, as condições de otimalidade e três técnicas de escalarização para a construção de soluções de problemas de otimização com dois objetivos.

Duas dessas técnicas, o Método das Somas Ponderadas e a Escalarização Clássica de Tchebychev são de amplo conhecimento dos estudiosos da área. A terceira, a Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios, que se trata de uma modificação da Escalarização Clássica de Tchebychev, será discutida em detalhes.

Apresentamos as principais características dessas escalarizações, suas limitações e fazemos comparações com a utilização de exemplos numéricos.

Palavras-chave: Otimização Multi-objetivo. Ótimo de Pareto. Frente de Pareto. Método das Somas Ponderadas. Escalarização de Tchebychev.



## **ABSTRACT**

This dissertation is about Multiobjective Optimization. We present the basic concepts, the optimality conditions and three scalarization techniques for constructing the solutions of optimization problems with two objectives.

Two of these techniques, namely the Weighting Sum and the Classic Tchebychev Scalarization are well known by the specialists. The third, the Tchebychev Scalarization Along Rays, which is a modification of the Classic Tchebychev Scalarization, is broadly discussed.

We present the main features of those scalarizations, their weaknesses and compare them through numerical problems.

**Keywords:** Multiobjective Optimization. Pareto Minimum. Pareto Front. Weighting Sum. Tchebychev Scalarization.

## LISTA DE SÍMBOLOS

Seja  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Neste trabalho,  $v \geq 0$  significará  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $v > 0$  significará  $v_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$\text{conv}(X) \equiv$  envoltória convexa do conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$

$\text{int}X \equiv$  interior do conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$

$\nabla f(x) \equiv$  gradiente da função  $f$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$

$Hf(x) \equiv$  matriz hessiana da função  $f$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$

$npp \equiv$  número de pontos de Pareto

$inc \equiv$  incremento

$i \equiv$  contador

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES GERAIS E CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO . . . . .	13
2.2	DEFINIÇÕES BÁSICAS . . . . .	13
2.3	CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE . . . . .	16
2.3.1	Condições de Primeira Ordem . . . . .	16
2.3.2	Condições de Segunda Ordem . . . . .	20
2.4	OTIMALIDADE DE PARETO VIA CONES . . . . .	21
<b>3</b>	<b>MÉTODOS BÁSICOS</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1	MÉTODOS DAS SOMAS PONDERADAS . . . . .	24
3.2	ESCALARIZAÇÃO DE TCHEBYCHEV . . . . .	30
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1	O ALGORITMO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS . . . . .	45
4.2	Exemplos Numéricos da Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios . . . . .	47
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas vindos de áreas como Engenharia, Economia, Física, Química, Computação e até mesmo Psicologia ou Sociologia são formulados como problemas de otimização, área da Matemática que, dada uma função  $f$ , definida em um conjunto  $X$ , busca encontrar pontos de  $X$  que minimizam ou maximizam  $f(x)$ .

Problemas de Otimização podem receber diversas classificações. Neste trabalho, o foco será Otimização Multi-objetivo que visa otimizar uma função  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Este tipo de problema é também chamado de Otimização Vetorial dada a natureza vetorial da função  $f$ .

No caso clássico de otimização mono-objetivo ou otimização escalar que, dada  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , procura-se pontos  $x^* \in X$  tais que  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$  ou  $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in X$ , é possível estabelecer o conceito de valor mínimo / máximo para a função através do emprego da relação de ordem existente quando tratamos com números reais.

No caso Multi-objetivo, devido à inexistência de relação de ordem em  $\mathbb{R}^p$ , é preciso que se redefina a noção de valor mínimo / máximo para a função  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Isto é feito com a introdução do conceito de ótimo de Pareto. Neste caso, tem-se um conjunto de ótimos, chamado Frente de Pareto (ou conjunto de Pareto), onde não há uma “melhor” solução mas o que denominamos trade-off entre as soluções encontradas no sentido de que ao escolher entre duas possíveis soluções abrir-se-á mão de algum benefício para se ter algum ganho.

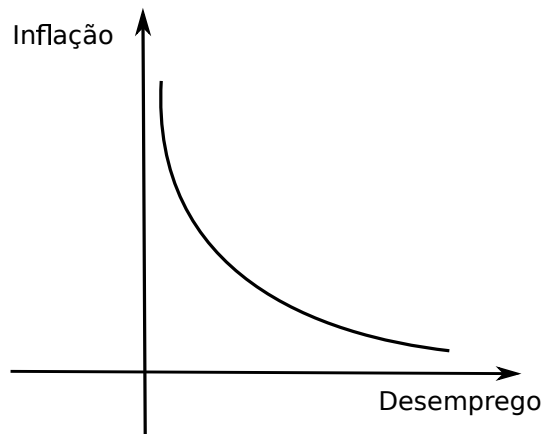
Uma boa ilustração é a curva de Phillips, devida ao economista William Phillips, que relaciona inflação com desemprego. Qualquer país gostaria de minimizar a inflação e o desemprego mas, segundo a teoria proposta por Phillips, no curto prazo, isto não é possível.

Em linguagem matemática, este problema se escreve como um problema com dois objetivos da seguinte forma:

$$\text{minimizar}\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad x \in X$$

onde  $f_1(x)$  fornece a taxa de inflação,  $f_2(x)$  a taxa de desemprego e  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um dado conjunto. De acordo com Phillips, ao diminuir o desemprego gera-se inflação e o combate a inflação produz desemprego. A curva de Phillips tem o seguinte aspecto:

Figura 1 – curva de Phillips



Fonte: Extraído desde <https://www.sunoresearch.com.br/artigos/curva-de-phillips/>

Assim, os dois objetivos, isto é, minimizar  $f_1(x)$  e minimizar  $f_2(x)$  são conflitantes no sentido de que ao diminuir  $f_1(x)$  aumenta-se  $f_2(x)$  e vice-versa.

Quando observamos a curva de Phillips, percebemos que temos infinitas soluções para o problema e a escolha da “melhor” solução dependerá da disposição do governo em gerar mais inflação ou mais desemprego.

Um problema de otimização multi-objetivo geral escreve-se como:

$$\text{minimizar}\{f_1(x), \dots, f_p(x)\}, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

Supõe-se que haja conflito entre as funções  $f_1, \dots, f_p$  pois, caso contrário, o problema se reduziria à minimização de cada  $f_i$  isoladamente, não requerendo nenhuma técnica específica para problemas multi-objetivo.

Em um problema de otimização multi-objetivo busca-se construir uma aproximação da Frente de Pareto que, em geral, é constituída de um número infinito de pontos.

Em geral, utiliza-se Escalarização que consiste na construção de uma função escalar a partir das funções coordenadas  $f_1, \dots, f_p$ . O problema multi-objetivo se torna mono-objetivo com a utilização da Escalarização. Entretanto, a construção do conjunto de Pareto exigirá a solução de tantos problemas mono-objetivo advindos da Escalarização quantos forem os pontos definidos para aproximar o conjunto de Pareto.

O objetivo deste trabalho é estudar e programar uma técnica chamada Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios, proposta por Joydeep Dutta e C. Yalçın Kaya [7], para construção de Frentes de Pareto de problemas de otimização com dois objetivos.

Este trabalho contém 5 capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro. No capítulo 2 faremos as definições básicas e apresentaremos as condições de otimalidade para o caso em que as funções envolvidas são diferenciáveis. No capítulo 3, apresentamos duas técnicas de escalarização básicas que são o Método das Somas Ponderadas e a Escalarização de Tchebychev Clássica. Veremos que o Método das Somas Ponderadas só deve ser aplicado quando a Frente de Pareto for convexa e que a Escalarização de Tchebychev resolve problemas convexos e não convexos.

Veremos que ambos os métodos podem produzir distorções nas Frentes de Pareto dependendo da forma como são implementados. A Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios, estudada no capítulo 4, visa corrigir tais distorções com o preço da introdução de novas restrições ao método de Tchebychev clássico e o aparecimento de pontos que não são ótimos de Pareto. Veremos também no capítulo 4 como eliminar tais pontos. Finalmente, faremos as conclusões no capítulo 5.

Este trabalho foi baseado no artigo “A New Scalarization and Numerical Method for Constructing the Weak Pareto Front of Multi-objective Optimization Problems” de autoria de Dutta e Kaya [7], no livro “NonLinear Multiobjective Optimization” de autoria de Kaisa M. Miettinen [12] bem como em outras referências citadas nestes trabalhos. Algumas figuras foram adaptadas do livro de Miettinen e geradas com utilização do software Inkscape.

Os métodos foram programados em MatLab que também gerou as Frentes de Pareto apresentadas nos exemplos numéricos.

Os resultados teóricos que justificam os métodos estudados foram exibidos no trabalho mas sem as respectivas demonstrações pois o leitor interessado as encontrará nos textos referenciados. Entendemos que exibir as demonstrações seria apenas um mero exercício de repetição e que não traria nenhuma contribuição extra.

## 2 DEFINIÇÕES GERAIS E CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

### 2.1 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

O problema de otimização Multi-Objetivo que abordaremos neste trabalho é:

$$(P) \begin{cases} \text{minimizar} \{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ \text{s.a } x \in X. \end{cases}$$

- A função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$  é contínua e o conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é, em geral, dado por  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$  com  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  contínua.
- A função  $f$  é chamada função objetivo,  $X$  é o conjunto viável, os vetores  $x \in X$  são os vetores (variáveis) de decisão, a imagem do conjunto viável  $X$  pela função  $f$ , o conjunto  $f(X)$ , é a região objetivo viável e  $g(x) \leq 0$  são chamadas restrições de desigualdade.
- Uma vez que maximizar uma função  $f$  é equivalente a minimizar  $-f$ , neste trabalho assumiremos que todas as funções  $f_i$  devem ser minimizadas.
- No contexto de Otimização Multi-Objetivo, a palavra minimizar significa que deseja-se minimizar todas as funções coordenadas simultaneamente. Se não houver conflito entre as elas então a solução ótima poderá ser encontrada minimizando-se cada  $f_i$  isoladamente. Neste caso, nenhuma metodologia para otimização multi-objetivo é necessária.

### 2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

**Definição 2.1** (Ótimo de Pareto). *Um ponto  $x^* \in X$  é dito ótimo de Pareto se não existe outro ponto  $x \in X$  tal que  $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$  e  $f_j(x) < f_j(x^*)$  para algum  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Um ponto ótimo de Pareto produz uma solução tal que melhorar um objetivo implica em piorar algum outro.*

**Definição 2.2** (Ótimo Fraco de Pareto). *Um ponto  $x^* \in X$  é dito ótimo fraco de Pareto se não existe outro ponto  $x \in X$  tal que  $f_i(x) < f_i(x^*)$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$ . Um ótimo fraco de Pareto produz uma solução tal que pode-se melhorar um objetivo sem piorar outro.*

É fácil verificar que todo ótimo de Pareto é também ótimo fraco de Pareto.

Com efeito, seja  $x^* \in X$  um ótimo de Pareto.

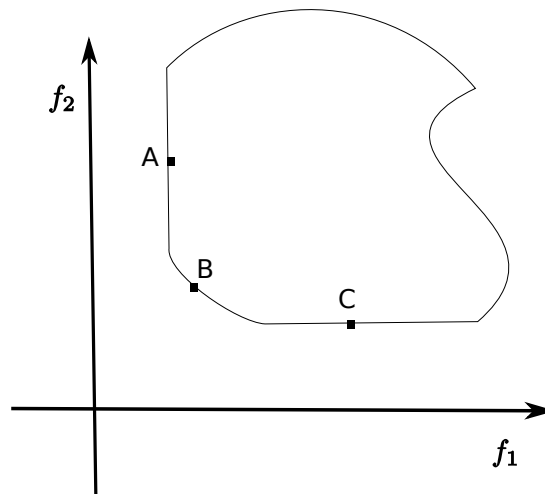
Então, para todo  $x \in X$  existe um índice  $j \in \{1, \dots, p\}$  tal que  $f_j(x) > f_j(x^*)$ .

Portanto, não existe  $x \in X$  tal que  $f_j(x) < f_j(x^*)$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ .

Logo,  $x^*$  é ótimo fraco de Pareto.

A figura 2 abaixo ilustra os conceitos de ótimo e ótimo fraco de Pareto :

Figura 2 – Imagens de pontos de Pareto na região objetivo viável



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

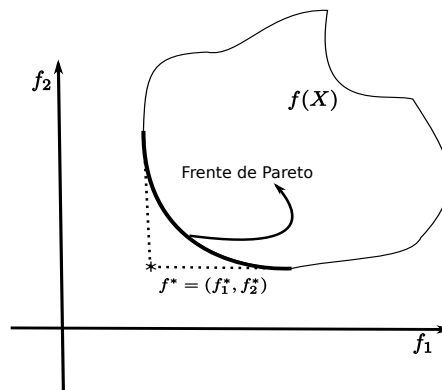
Observando a figura 2, concluímos que :

- Os pontos A e C são imagens de pontos ótimos fracos de Pareto.
- O ponto B é imagem de ponto ótimo de Pareto.

**Definição 2.3** (Frente de Pareto). *O subconjunto  $PF \subset f(X)$  formado pelos pontos  $z = f(x^*)$  onde  $x^*$  é um ótimo de Pareto ou um ótimo fraco de Pareto é chamado Conjunto de Pareto ou Frente de Pareto.*

**Definição 2.4** (Ponto Ideal). *O ponto  $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$  onde  $f_i^* = \min_{x \in X} f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , é chamado Ponto Ideal.*

Figura 3 – Ponto ideal



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

**Definição 2.5** (Ponto Utópico). *O ponto  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*) \in \mathbb{R}^p$  tal que  $u_i^* = f_i^* - \epsilon_i$  onde  $\epsilon_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , é chamado Ponto Utópico.*



**Definição 2.6** (Conjunto Convexo).  $X \subset \mathbb{R}^n$  é convexo se dados  $x, y \in X$  e  $\lambda \in [0, 1]$  então  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ .

**Definição 2.7.** A envoltória convexa de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , denotada por  $\text{conv}(X)$ , é o conjunto de todas as combinações convexas de vetores de  $X$ .

**Definição 2.8** (Função Convexa / Função Côncava). Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo. A função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita convexa se dados  $x, y \in X$  e  $\lambda \in [0, 1]$  tem-se  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Uma função  $f$  é côncava se  $-f$  for convexa.

**Definição 2.9.** O problema de Otimização Multi-Objetivo será dito convexo se o conjunto viável  $X$  for convexo e as funções coordenadas  $f_i, i = 1, \dots, p$ , forem convexas.

**Definição 2.10** (Restrições Ativas). Uma restrição de desigualdade  $g_j$  é dita ativa no ponto  $x^*$  se  $g_j(x^*) = 0$ .

O conjunto dos índices das restrições ativas em  $x^*$  será definido por

$$J(x^*) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(x^*) = 0\}$$

**Definição 2.11** (Ponto Regular). Um ponto  $x^* \in X$  é dito um ponto regular se os gradientes  $\nabla g_j(x^*), j \in J(x^*)$ , forem linearmente independentes.

**Definição 2.12.** Um subconjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  é dito cone se  $x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$ .

**Exemplo 2.13.**

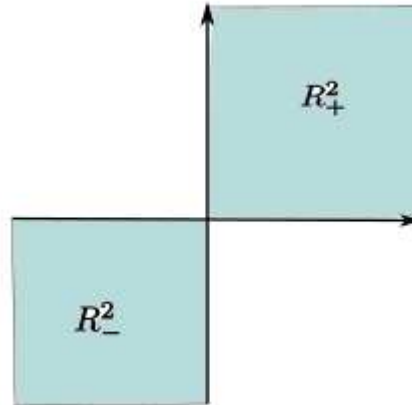
$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \quad e$$

$$\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$$

são cones.

A Figura 4 a seguir ilustra os conjuntos  $\mathbb{R}_+^n$  e  $\mathbb{R}_-^n$  para  $n = 2$ .

Figura 4 – Exemplos de cones em  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

## 2.3 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Neste trabalho abordaremos apenas as condições de otimalidade para o problema de otimização multi-objetivo em que todas as funções envolvidas são diferenciáveis.

Condições de otimalidade para problemas não diferenciáveis podem ser encontradas em [12].

### 2.3.1 Condições de Primeira Ordem

Consideremos o problema

$$(P) \begin{cases} \text{minimizar} \{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ \text{s.a. } x \in X \end{cases}$$

onde  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T \leq 0\}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$  e  $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  são funções continuamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$ .

As primeiras condições de otimalidade para problemas do tipo (P) foram obtidas por Fritz John em 1948 e posteriormente por Kuhn e Tucker. Mais tarde foi descoberto que as condições de Kuhn-Tucker já tinham sido estabelecidas em 1939 por William Karush. Tais condições de otimalidade passaram então a ser chamadas de condições de Karush-Kuhn-Tucker.

**Teorema 2.14** (Condições necessárias de primeira ordem de Fritz John). *Seja  $x^* \in X$  um ótimo de Pareto. Então existem  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  e  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  tais que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \quad (2.1)$$

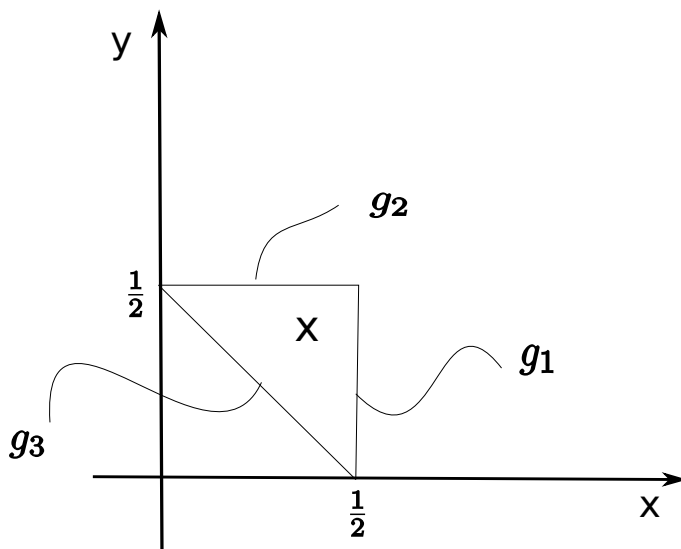
$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

O exemplo 2.15 ilustra o Teorema 2.14.

**Exemplo 2.15.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x, y\} \\ \text{s.a } & g_1(x, y) = x - \frac{1}{2} \leq 0 \\ & g_2(x, y) = y - \frac{1}{2} \leq 0 \\ & g_3(x, y) = 1 - 2x - 2y \leq 0 \end{aligned}$$

Figura 5 – Região viável X



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os gradientes das funções do exemplo são :

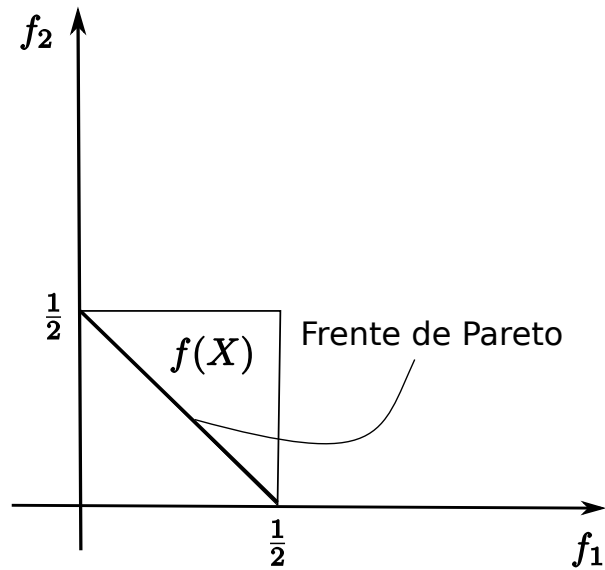
$$\begin{aligned} \nabla f_1(x, y) &= (1, 0) \\ \nabla f_2(x, y) &= (0, 1) \\ \nabla g_1(x, y) &= (1, 0) \\ \nabla g_2(x, y) &= (0, 1) \\ \nabla g_3(x, y) &= (-2, -2) \end{aligned}$$

A região viável X é o conjunto definido por :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, 2x + 2y \geq 1\}$$

A Frente de Pareto é a reta definida por  $2x + 2y = 1$

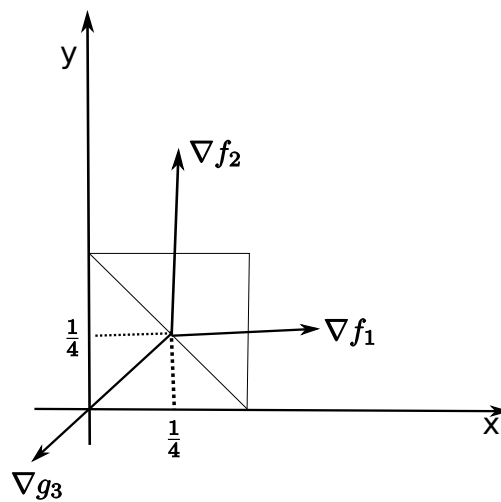
Figura 6 – Frente de Pareto



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A figura 7 ilustra a equação (2.1) do Teorema 2.14 no ponto  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  :

Figura 7 – Ilustração da equação (2.1) do Teorema 2.14

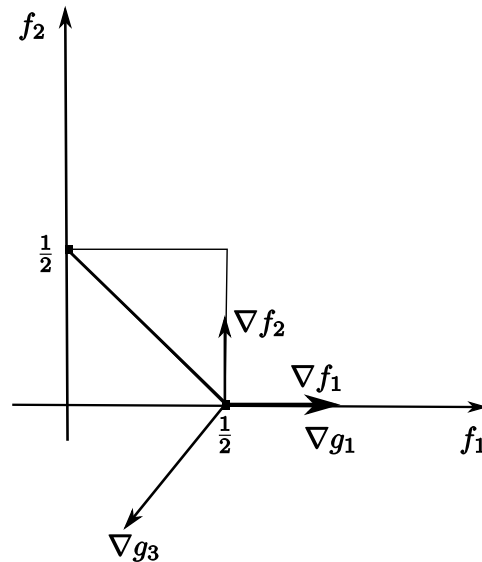


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \nabla f_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \nabla f_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + 0 \cdot \nabla g_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + 0 \cdot \nabla g_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \nabla g_3\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \\
 & = 2 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (-2, -2) = (0, 0).
 \end{aligned}$$

A figura 8 ilustra a equação (2.1) do Teorema 2.14 no ponto  $(\frac{1}{2}, 0)$  :

Figura 8 – Ilustração da equação (2.1) do Teorema 2.14



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

$$\begin{aligned} 1. \nabla f_1(\frac{1}{2}, 0) + 2. \nabla f_2(\frac{1}{2}, 0) + 1. \nabla g_1(\frac{1}{2}, 0) + 1. \nabla g_3(\frac{1}{2}, 0) &= \\ &= 1.(1, 0) + 2.(0, 1) + 1.(1, 0) + 1.(-2, -2) = (0, 0). \end{aligned}$$

Na condição necessária de Fritz-John pode ser que um ou até todos os multiplicadores associados às funções objetivo sejam nulos. Caso algum multiplicador  $\lambda_i$  seja nulo, a informação fornecida pelo  $\nabla f_i$  não aparecerá na condição (2.1). Para que se garanta a positividade de  $\lambda$ , alguma condição de regularidade deve ser admitida. Existem diversas condições de regularidade conhecidas como qualificações das restrições. A seguir, apresentaremos a qualificação das restrições de Kuhn-Tucker.

**Definição 2.16.** *Suponhamos que as funções restrição  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  que aparecem em (P) sejam continuamente diferenciáveis em  $x^* \in X$ . O problema (P) satisfaz a qualificação das restrições de Kuhn-Tucker em  $x^*$  se para qualquer  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla g_j(x^*)d \leq 0$ ,  $j \in J(x^*)$ , existem uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciável em 0 e algum escalar  $a \in \mathbb{R}_+$  tais que  $\alpha(0) = x^*$ ,  $g(\alpha(t)) \leq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  e  $\alpha'(0) = ad$ .*

Levando-se em consideração a qualificação das restrições de Kuhn-Tucker, pode-se garantir que  $\lambda \neq 0$  conforme o

**Teorema 2.17** (Condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker). *Se  $x^* \in X$  é um ótimo de Pareto e (P) satisfaz a qualificação das restrições de Kuhn-Tucker então o Teorema 2.14 vale com  $\lambda \neq 0$ .*

Se (P) for um problema convexo, então as condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker são também suficientes, conforme o

**Teorema 2.18** (Condições suficientes de Karush-Kuhn-Tucker para problemas convexos). *Suponha que  $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_m$  sejam convexas e continuamente diferenciáveis em  $x^* \in X$ . Se existem*

$0 < \lambda \in \mathbb{R}^p$  e  $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$  tais que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \quad (2.3)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

então  $x^*$  é ótimo de Pareto

### 2.3.2 Condições de Segunda Ordem

Vamos supor agora que  $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_m$  sejam duas vezes continuamente diferenciáveis no ponto regular  $x^* \in X$ .

**Teorema 2.19** (Condição necessária de segunda ordem). *Seja o ponto regular  $x^* \in X$  um ótimo de Pareto. Então existem  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $\lambda \neq 0$  e  $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$  tais que*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \quad (2.5)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

$$d^T \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i H f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j H g_j(x^*) \right) d \geq 0. \quad (2.7)$$

$$\forall d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f_i(x^*)^T d \leq 0, \forall i = 1, \dots, p, \nabla g_j(x^*)^T d = 0, \forall j \in J(x^*)\}.$$

**Teorema 2.20** (Condição suficiente de segunda ordem). *Sejam  $x^* \in X$ ,  $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^p$  tais que  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  e*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0, \quad (2.8)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

$$d^T \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i H f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j H g_j(x^*) \right) d > 0. \quad (2.10)$$

para  $d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f_i(x^*)^T d \leq 0, i = 1, \dots, p, \nabla g_j(x^*)^T d = 0, j \in J(x^*)\}$  ou  $d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(x^*)^T d = 0, j \in J^+(x^*), \nabla g_j(x^*)^T d \leq 0, j \in J(x^*) - J^*(x^*)\}$  onde  $J^*(x^*) = \{j \in J(x^*) \mid \mu_j > 0\}$ . Então, o ponto regular  $x^* \in X$  é ótimo de Pareto.

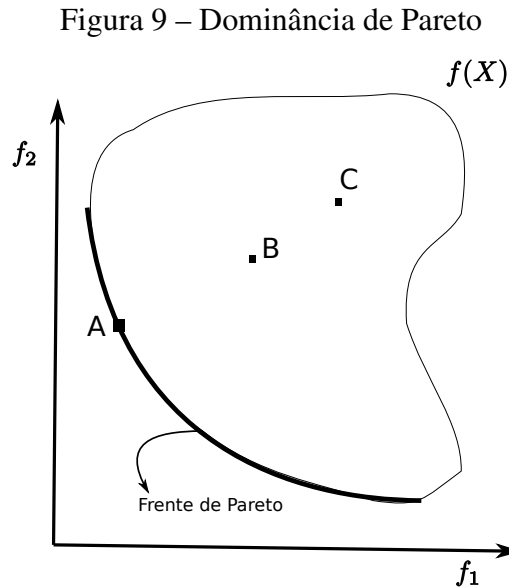
## 2.4 OTIMALIDADE DE PARETO VIA CONES

Veremos agora como usar o conceito de cone na caracterização de pontos ótimos de Pareto. O uso de cones é bastante útil do ponto de vista geométrico. Conhecendo-se a região objetivo viável, a identificação da Frente de Pareto fica bastante simples com o uso de cones.

**Definição 2.21.** *Sejam  $x, y \in X$ . Diremos que  $x$  domina  $y$  e escreveremos  $x \prec y$  quando  $f_i(x) \leq f_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, p$  e existe  $j \in \{1, \dots, p\}$  tal que  $f_j(x) < f_j(y)$ .*

À luz da Definição 2.21, se  $x^* \in X$  é um ponto ótimo de Pareto então não existe  $x \in X$  tal que  $x$  domine  $x^*$ , ou seja, pontos ótimos de Pareto são aqueles que não são dominados por nenhum outro ponto do conjunto viável.

A figura 9 ilustra a Definição 2.21.



Fonte: Wilhelm Passarella Freire (2019).

Na figura 9, sejam  $A = f(x)$ ,  $B = f(y)$  e  $C = f(z)$  com  $x, y, z \in X$  onde  $X$  é o conjunto viável. Vemos que  $x \prec y$ ,  $x \prec z$  e  $y \prec z$ .

Consideremos, agora, o cone  $C = \mathbb{R}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n, x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$ .

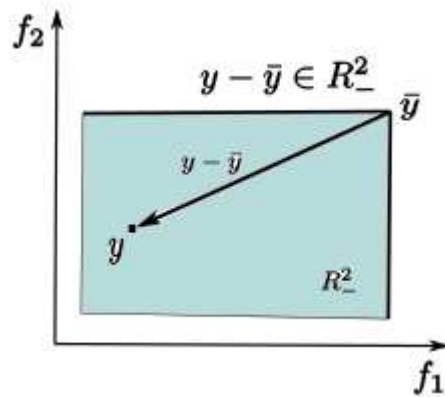
Seja  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . É fácil ver que os pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x \prec \bar{x}$  são aqueles que  $f(x) - f(\bar{x}) \in C$ . Com efeito, sejam  $y = f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $\bar{y} = f(\bar{x}) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$  onde  $y_i = f_i(x)$  e  $\bar{y}_i = f_i(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Ora,  $x \prec \bar{x}$  significa que  $y_i \leq \bar{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $y_j < \bar{y}_j$ .

Daí, segue que  $y_i \leq \bar{y}_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  ou, equivalentemente,  $y_i - \bar{y}_i \leq 0$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , o que implica em  $f(x) - f(\bar{x}) \in C$ .

A figura 10 ilustra essa ideia

Figura 10 – Dominância via cone



Fonte: Wilhelm Passarella Freire (2019).

Estamos prontos para definir otimalidade de Pareto via cones.

**Definição 2.22.**

(1) Um ponto  $x^* \in X$  é ótimo de Pareto se

$$\left( f(x^*) + (\mathbb{R}_-^n - \{0\}) \right) \cap f(X) = \emptyset \quad (2.11)$$

(2) Um ponto  $x^* \in X$  é ótimo fraco de Pareto se

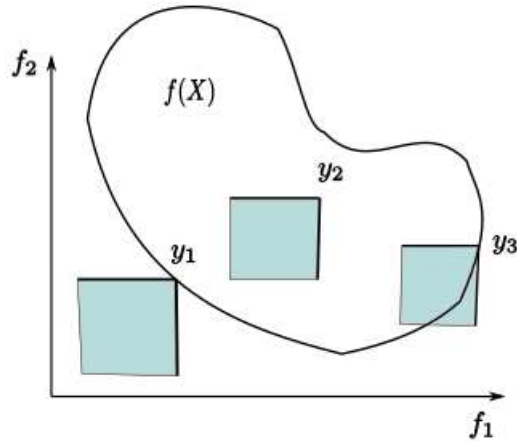
$$\left( f(x^*) + \text{int}(\mathbb{R}_-^n) \right) \cap f(X) = \emptyset \quad (2.12)$$

Para utilizarmos a Definição 2.22 na identificação de ótimos de Pareto devemos, dado um ponto  $y = f(x)$  na região objetivo viável, candidato a ótimo de Pareto, verificar se a condição (2.11) é satisfeita.



A figura 11 a seguir mostra como isso pode ser feito geometricamente.

Figura 11 – Otimalidade de Pareto via cone



Fonte: Wilhelm Passarella Freire (2019).

Observando a Figura 11, vemos que :

$$\left\{ y_1 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\}) \right\} \cap f(X) = \emptyset$$

$$\left\{ y_2 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\}) \right\} \cap f(X) \neq \emptyset$$

$$\left\{ y_3 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\}) \right\} \cap f(X) \neq \emptyset$$

Sejam,  $x_1, x_2, x_3 \in X$  tais que  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$  e  $y_3 = f(x_3)$ .

Combinando as figuras 10 e 11, vemos que os pontos  $x \in X$  que dominam  $x_1$  satisfazem  $f(x) \notin f(X)$ . Portanto,  $x_1$  é ótimo de Pareto. Por outro lado, existem  $\bar{x}, \tilde{x} \in X$  tais que  $\bar{x} \prec x_2$  e  $\tilde{x} \prec x_3$  com  $f(\bar{x}), f(\tilde{x}) \in f(X)$ .

Logo,  $x_2$  e  $x_3$  não são ótimos de Pareto.

### 3 MÉTODOS BÁSICOS

Problemas multi-objetivos em geral são resolvidos através do processo de escalarização que consiste em otimizar uma função escalar obtida a partir das funções coordenadas  $f_1, f_2, \dots, f_p$ .

Neste capítulo apresentamos dois métodos de escalarização que são o Método das Somas Ponderadas e o Método de Tchebychev.

O Método das Somas Ponderadas foi um dos primeiros a surgir para a solução de problemas multi-objetivos. Este método tem a desvantagem de não produzir toda a Frente de Pareto caso esta não seja convexa. Mesmo a Frente de Pareto sendo convexa, esta situação pode ocorrer caso o problema seja linear. O exemplo 3.5 à frente mostrará isso.

O Método de Tchebychev por sua vez pode ser aplicado em problemas não convexos mas tem a desvantagem de produzir funções escalares não diferenciáveis mesmo sendo o problema original diferenciável. Vamos exibir exemplos que mostram que ambos os métodos podem produzir distorções nas Frentes de Pareto devido à concentração de pontos em um pedaço da Frente.

#### 3.1 MÉTODOS DAS SOMAS PONDERADAS

O Método de Somas Ponderadas consiste em atribuir-se coeficientes (pesos) às funções  $f_1, f_2, \dots, f_p$  para obter-se a função escalar a ser minimizada.

Sejam  $w_1, w_2, \dots, w_p$  tais que  $w_i \geq 0, i = 1, \dots, p$  e  $\sum_{i=1}^p w_i = 1$ .

O problema  $(P)$  será transformado em

$$(SP) \begin{cases} \text{minimizar} & w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_p f_p(x) \\ \text{s.a} & x \in X \end{cases}$$

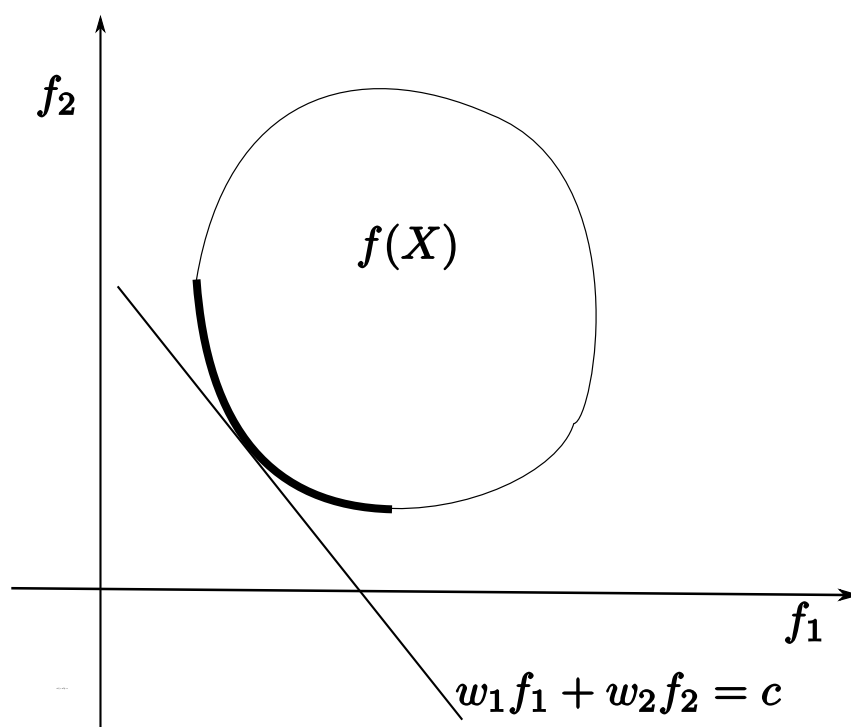
Os Teoremas 3.1 e 3.2 a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [12], asseguram a eficiência do Método das Somas Ponderadas.

**Teorema 3.1.** *Dado  $(w_1, w_2, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p$  com  $w_i \geq 0, i = 1, \dots, p$  e  $\sum_{i=1}^p w_i = 1$ , a solução correspondente de  $(SP)$  é um ótimo fraco de Pareto.*

**Teorema 3.2.** *Se  $w_i > 0, i = 1, \dots, p$ , então a solução de  $(SP)$  é ótimo de Pareto.*

A Figura 12 ilustra o Método das Somas Ponderadas com Frente de Pareto convexa.

Figura 12 – Método das Somas Ponderadas com frente convexa



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

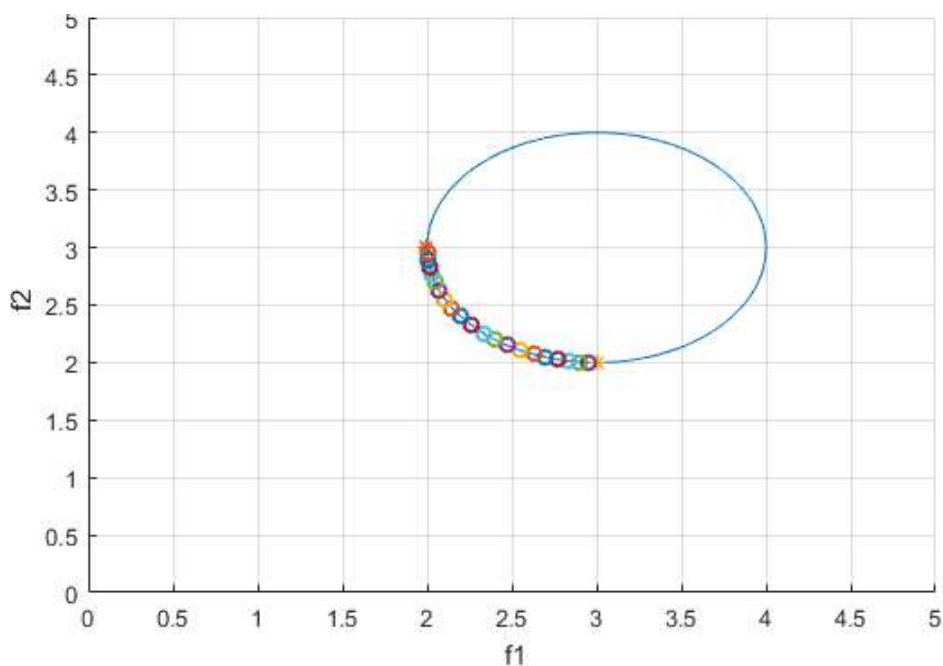
O Exemplo 3.3 a seguir ilustra o Método das Somas Ponderadas aplicado a um problema cuja frente é convexa.

### Exemplo 3.3.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ &s.a \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{npp} &= 20 \\ \text{inc} &= \frac{1}{\text{npp}} \\ i &= 1 : \text{npp} \\ w_1 &= i * \text{inc} \\ w_2 &= 1 - w_1 \end{aligned}$$

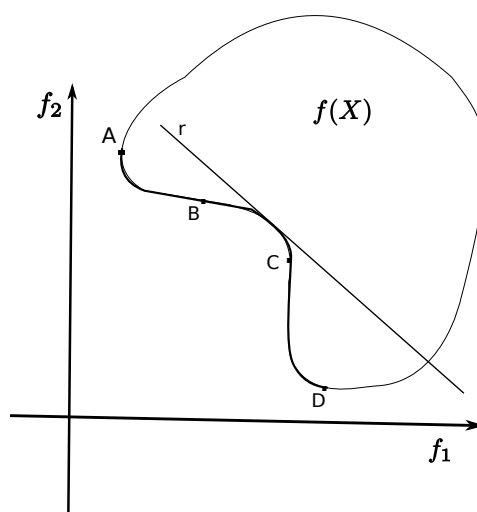
Figura 13 – Frente de Pareto convexa / Exemplo 3.3



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

O Método das Somas Ponderadas pode deixar de encontrar pontos de Pareto caso a Frente seja não convexa, como ilustram a Figura 14 e o Exemplo 3.4.

Figura 14 – Frente de Pareto não convexa



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

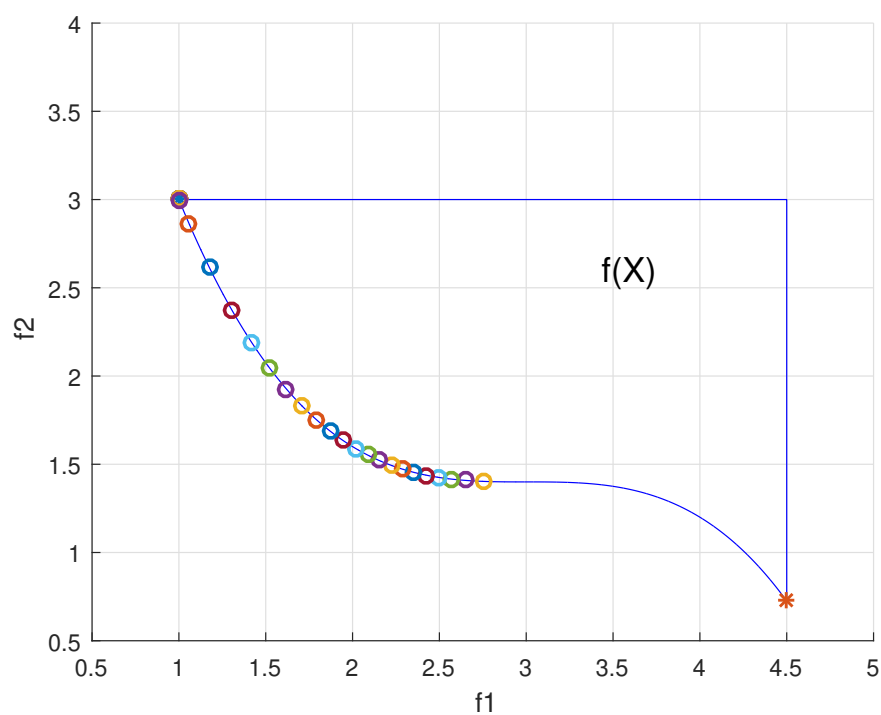
Os pontos entre  $B$  e  $C$  não podem ser encontrados pelo Método das Somas Ponderadas. Pode-se “descer” com a reta  $r$  até encontrar pontos que produzem valores objetivo menores.

No Exemplo 3.4 a seguir, o Método das Somas Ponderadas foi aplicado a um problema cuja Frente de Pareto é não convexa. Uma parte da Frente não foi encontrada.

**Exemplo 3.4.**

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 &\text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\
 &\quad x_1 - 4.5 \leq 0 \\
 &\quad x_2 - 3 \leq 0 \\
 \\ 
 &\text{npp} = 30 \\
 &\text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \\
 &i = 1 : \text{npp} \\
 &w_1 = i * \text{inc} \\
 &w_2 = 1 - w_1
 \end{aligned}$$

Figura 15 – Frente de Pareto não convexa / Exemplo 3.4



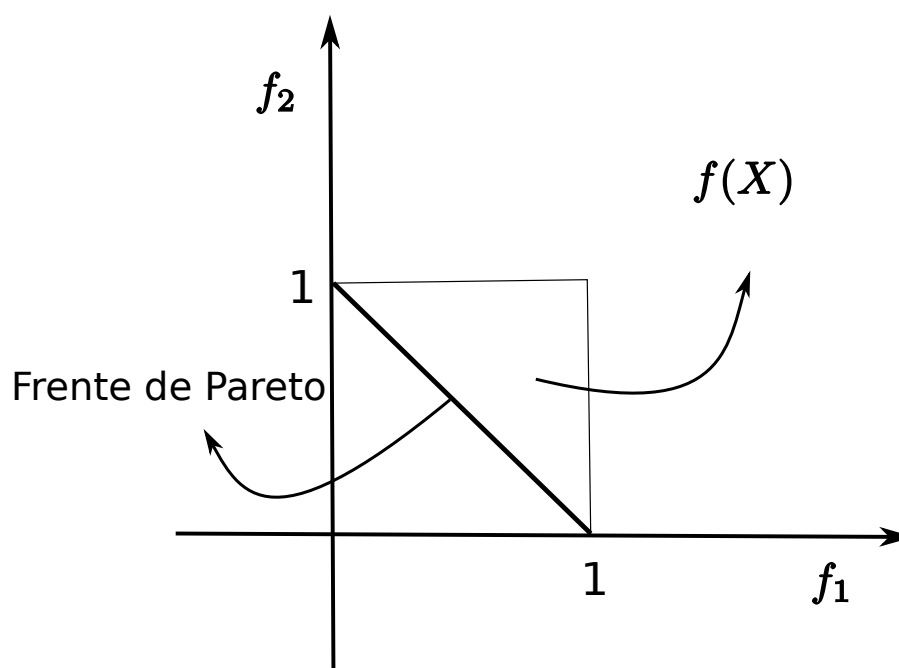
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Mesmo em casos convexos, o Método das Somas Ponderadas pode falhar, como mostra o Exemplo 3.5 a seguir, que trata de um caso linear.

**Exemplo 3.5.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \quad x_1 - 1 \leq 0 \\ & \quad x_2 - 1 \leq 0 \\ \\ & \text{npp} = 30 \\ & \text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \\ & i = 1 : \text{npp} \\ & w_1 = i * \text{inc} \\ & w_2 = 1 - w_1 \end{aligned}$$

Figura 16 – Problema linear



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Mostraremos que neste caso o Método das Somas Ponderadas só encontra três pontos da Frente. Com efeito, a função escalar é dada por

$$\varphi(x_1, x_2) = w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

onde  $w_1, w_2 \geq 0$  e  $w_1 + w_2 = 1$ .

(1) Suponhamos  $w_1 < w_2$ . Temos que

$\varphi(0, 1) = w_2$ ,  $\varphi(1, 0) = w_1$  e sabemos que os mínimos de Pareto satisfazem a equação  $x_1 + x_2 = 1$ .

Daí,  $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, 1 - x_1) = w_1x_1 + w_2(1 - x_1) = (w_1 - w_2)x_1 + w_2$

Sendo  $w_1 - w_2 < 0$  e  $x_1 \leq 1$  segue que

$$(w_1 - w_2)x_1 \geq w_1 - w_2$$

Daí,  $(w_1 - w_2)x_1 + w_2 \geq w_1 = \varphi(1, 0)$

Assim,  $(1, 0)$  é sempre solução no caso em que  $w_1 < w_2$ .

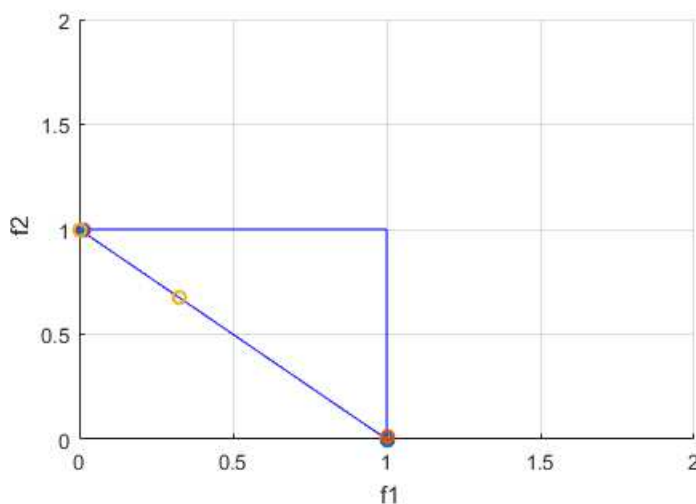
(2) De maneira análoga, concluímos que  $(0, 1)$  sempre será solução para  $w_1 > w_2$ .

(3) Finalmente, se  $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$  teremos

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, 1 - x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(1 - x_1) = \frac{1}{2}, \forall (x_1, x_2).$$

Portanto, qualquer  $(x_1, x_2)$  que satisfaça  $x_1 + x_2 = 1$  é mínimo de  $\varphi$ .

Figura 17 – Frente de Pareto / Exemplo 3.5.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

### 3.2 ESCALARIZAÇÃO DE TCHEBYCHEV

Vimos que o Método das Somas Ponderadas pode não encontrar pontos de Pareto caso a Frente de Pareto seja não convexa ou até mesmo falhar em problemas lineares.

Nesta seção apresentaremos um método, denominado Escalarização de Tchebychev, que pode ser aplicado a problemas convexos bem como a problemas não convexos.

O problema escalarizado fica da seguinte forma

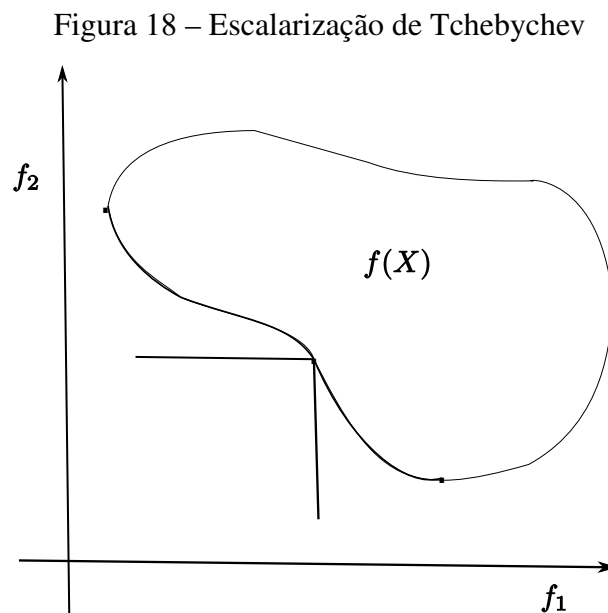
$$(T) \begin{cases} \text{minimizar } \max\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } x \in X. \end{cases}$$

A Escalarização de Tchebychev recebe este nome devido ao emprego da métrica de Tchebychev

$$\max_{i=1, \dots, p} \{|w_i(f_i - u_i^*)|\} = \max_{i=1, \dots, p} \{w_i(f_i(x) - u_i^*)\}$$

que aparece na função objetivo do problema escalarizado.

A Figura 18 ilustra a Escalarização de Tchebychev



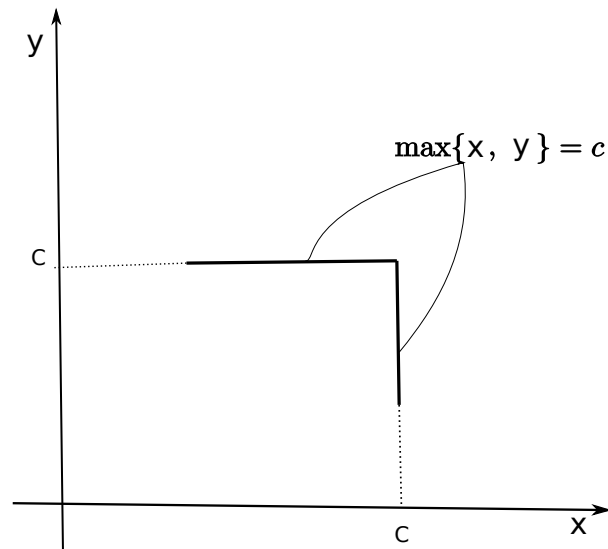
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Note que as curvas de nível  $\max\{f_1, f_2\} = c$  tem o formato do cone  $\mathbb{R}_-^2$ .

Com efeito,  $\max\{f_1, f_2\} = c$  representa a curva definida pelo conjunto  $\{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1 = c \text{ ou } f_2 = c\} \cap \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1 \leq c \text{ e } f_2 \leq c\}$ .



Figura 19 – Curva de nível da função  $\max\{x, y\} = c$



Fonte: Wilhelm Passarella Freire (2019).

A seguir, apresentaremos alguns resultados concernentes à Escalarização de Tchebychev que podem ser encontrados em [12].

**Teorema 3.6.** *Se os coeficientes  $w_1, \dots, w_p$  forem positivos então a solução de  $(T)$  é ótimo fraco de Pareto.*

**Teorema 3.7.** *Se  $(T)$  tem solução única, então esta solução é ótimo de Pareto.*

**Teorema 3.8.** *Seja  $x^* \in X$  um ótimo de Pareto. Existe um vetor  $0 < w \in \mathbb{R}^p$  para o qual  $x^*$  é solução de  $(T)$ .*

Combinando os teoremas 3.6 e 3.8 obtêm-se o

**Teorema 3.9.** *Um ponto  $x^* \in X$  é um mínimo fraco de Pareto se e somente se  $x^*$  é solução de  $(T)$  para algum  $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$ .*

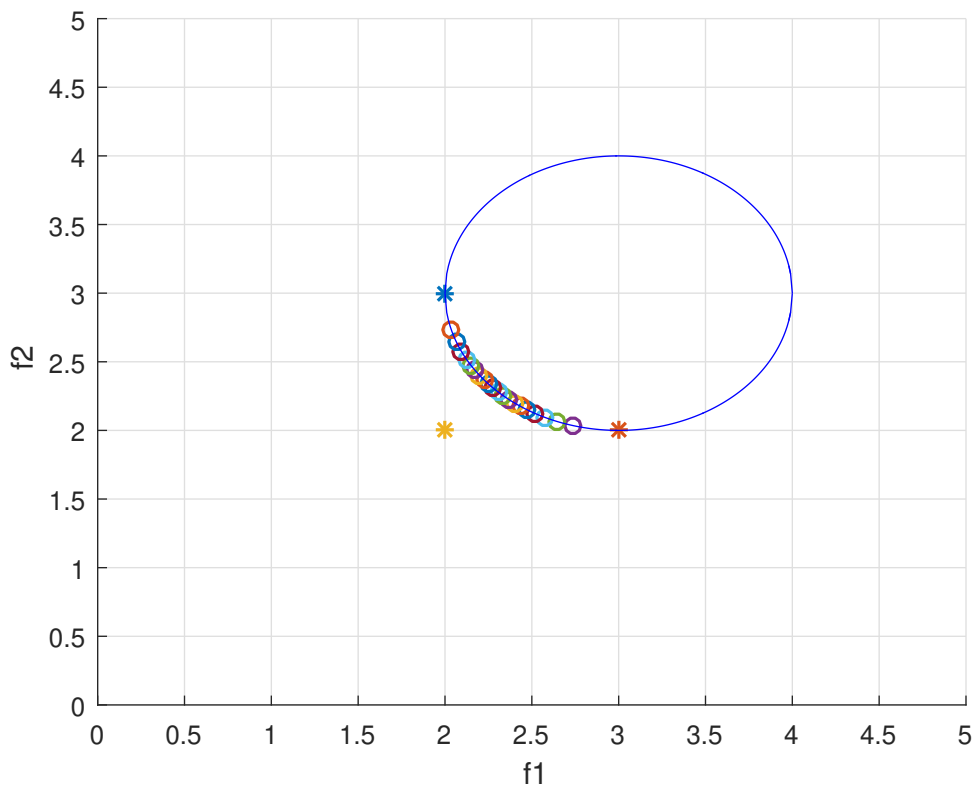
A Escalarização de Tchebychev, à princípio, encontra todos os pontos da Frente de Pareto seja o problema convexo ou não, como ilustram os exemplos 3.10 (frente convexa) e 3.11 (frente não convexa), a seguir.

**Exemplo 3.10.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a. } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{npp} &= 20 \\ \text{inc} &= \frac{1}{\text{npp}} \\ i &= 1 : \text{npp} \\ w_1 &= i * \text{inc} \\ w_2 &= 1 - w_1 \end{aligned}$$

Figura 20 – Frente de Pareto convexa / Exemplo 3.10

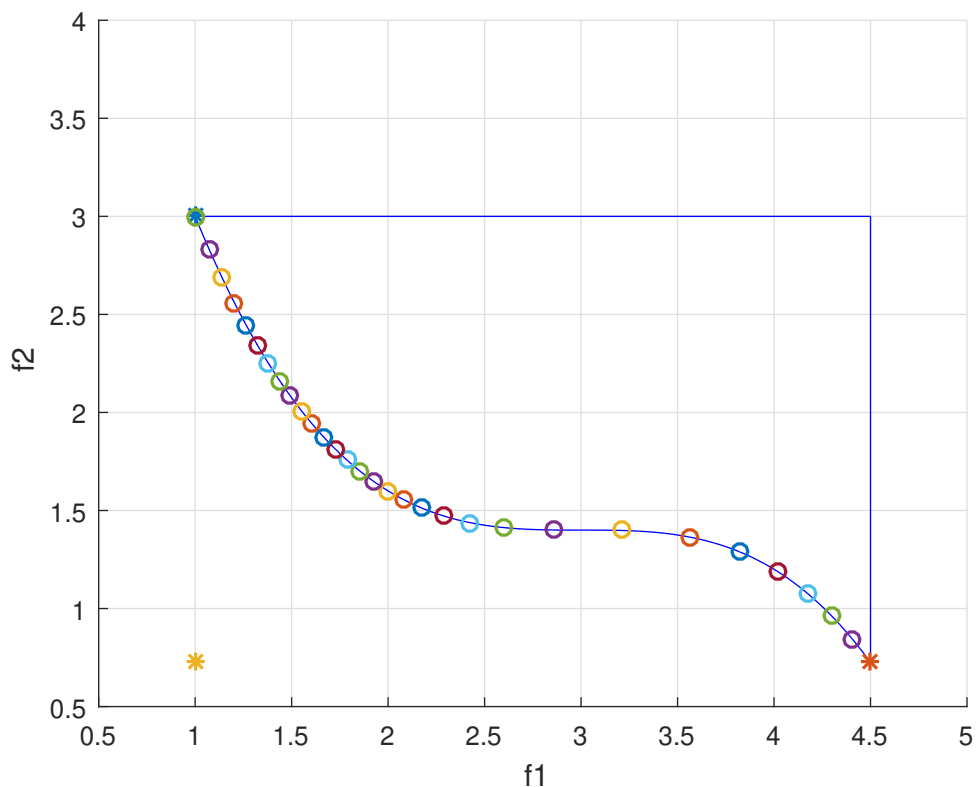


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

**Exemplo 3.11.**

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 &\text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\
 &\quad x_1 - 4.5 \leq 0 \\
 &\quad x_2 - 3 \leq 0 \\
 \\ 
 &\text{npp} = 30 \\
 &\text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \\
 &i = 1 : \text{npp} \\
 &w_1 = i * \text{inc} \\
 &w_2 = 1 - w_1
 \end{aligned}$$

Figura 21 – Frente de Pareto não convexa / Exemplo 3.11



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Embora, à princípio, frente de Pareto inteira possa ser encontrada pela Escalarização de Tchebychev, é importante destacar que o aspecto da frente sofre grande influência da escolha do ponto utópico e também depende de como são escolhidos os pesos.

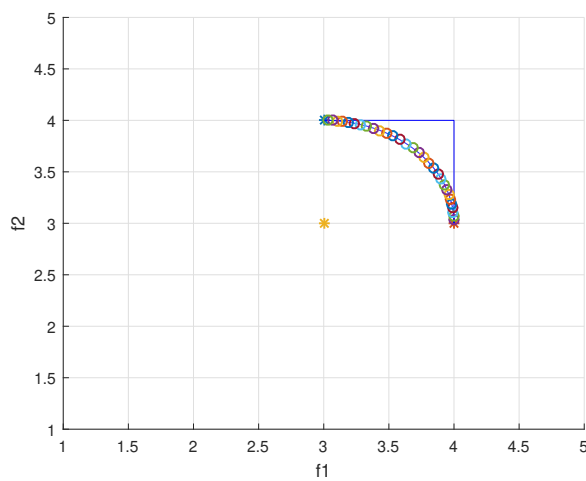
Os exemplos 3.12 e 3.13 mostram a influência da escolha do ponto utópico na construção da Frente de Pareto.

**Exemplo 3.12.**

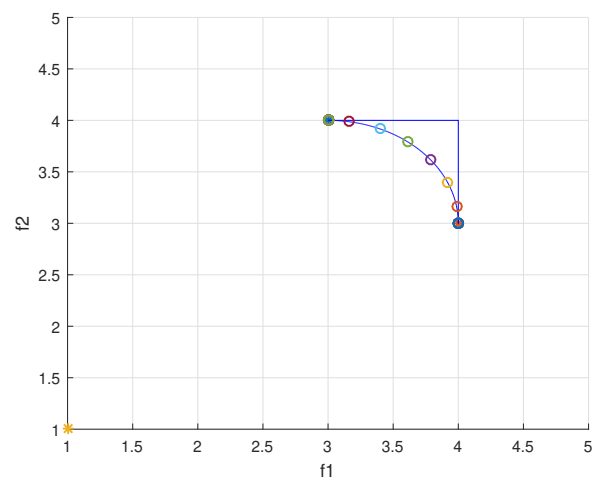
$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 \text{s.a. } & 1 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3)^2 \leq 0 \\
 & x_1 - 4 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 \leq 0 \\
 & 3 - x_1 \leq 0 \\
 & 3 - x_2 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{npp} = 30 \\
 & \text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \\
 & i = 1 : \text{npp} \\
 & w_1 = i * \text{inc} \\
 & w_2 = 1 - w_1
 \end{aligned}$$

Figura 22 – Frentes de Pareto com diferentes pontos utópicos / Exemplo 3.12



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

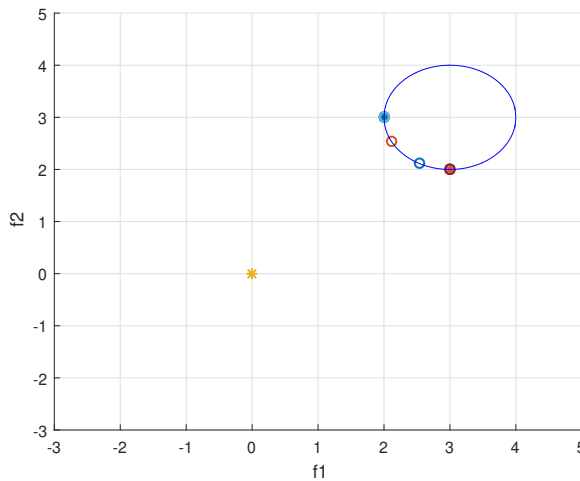
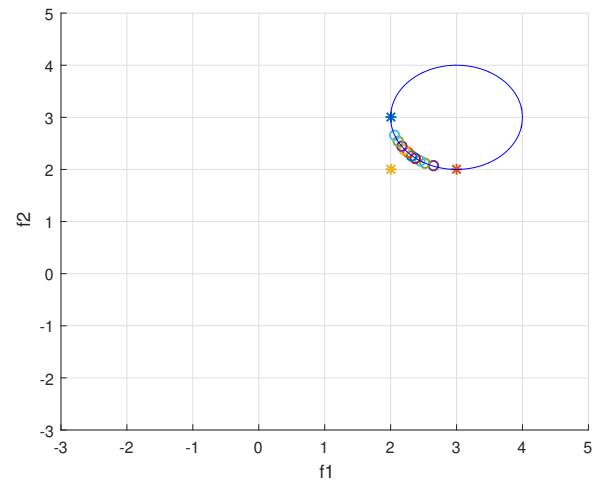
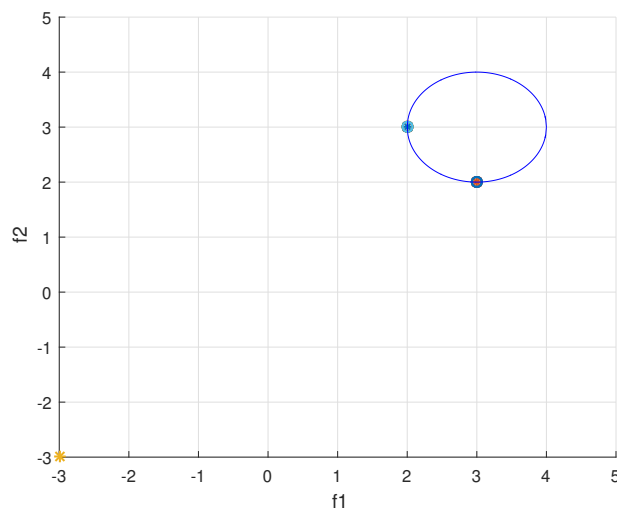
- Figura 22.(a). Frente de Pareto com  $u^* = (3, 3) = f^*$ .
- Figura 22.(b). Frente de Pareto com  $u^* = (1, 1)$ .

**Exemplo 3.13.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{npp} &= 10 \\ \text{inc} &= \frac{1}{\text{npp}} \\ i &= 1 : \text{npp} \\ w_1 &= i * \text{inc} \\ w_2 &= 1 - w_1 \end{aligned}$$

Figura 23 – Frentes de Pareto com diferentes pontos utópicos / Exemplo 3.13

(a) Frente de Pareto com  $u^* = (0, 0)$ (b) Frente de Pareto com  $u^* = (2, 2) = f^*$ (c) Frente de Pareto com  $u^* = (-3, -3)$ 

Fonte. Elaborado pelo autor (2019).

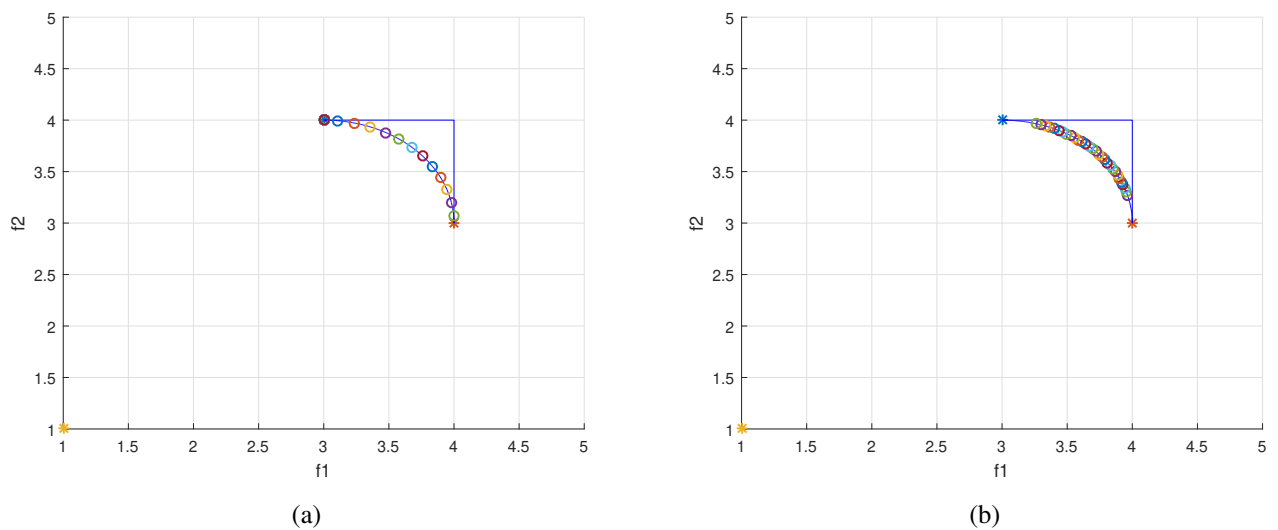
Agora, os exemplos 3.14 e 3.15 mostram a influência da escolha dos pesos na construção da Frente de Pareto.

**Exemplo 3.14.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & 1 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3)^2 \leq 0 \\ & x_1 - 4 \leq 0 \\ & x_2 - 4 \leq 0 \\ & 3 - x_1 \leq 0 \\ & 3 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{npp} = 30 \\ & i = 1 : \text{npp} \\ & \text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \end{aligned}$$

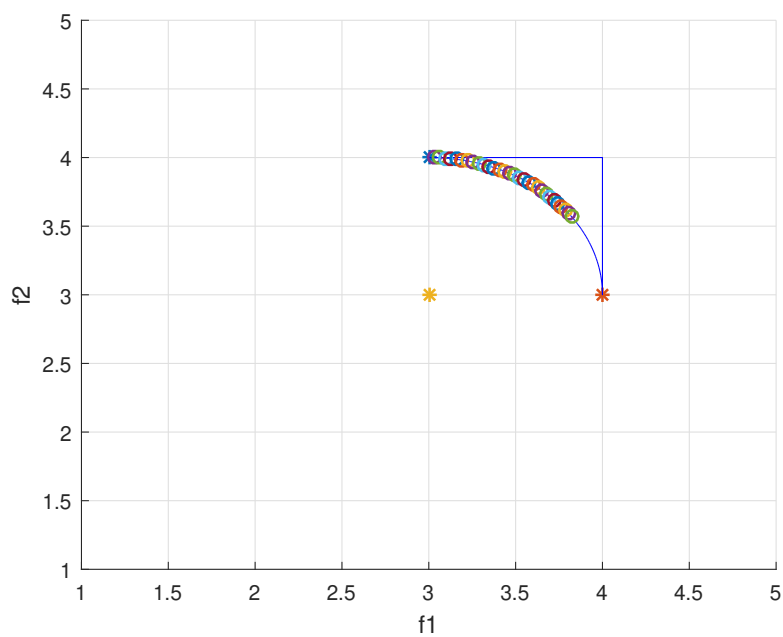
Figura 24 – Frentes de Pareto com  $u^* = (1, 1)$  e diferentes pesos / Exemplo 3.14



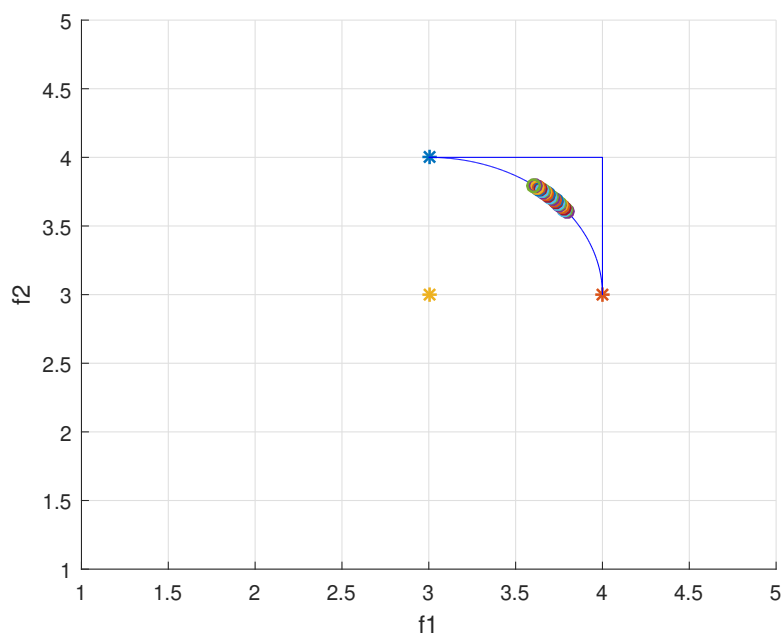
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

- Figura 24 (a). Frente de Pareto com  $w_1 = \cos(i * \text{inc})$  e  $w_2 = \sin(i * \text{inc})$ .
- Figura 24 (b). Frente de Pareto com  $w_1 = 3 + i * \text{inc}$  e  $w_2 = 4 - i * \text{inc}$ .
- $u^* = (1, 1)$

Figura 25 – Frentes de Pareto com  $u^* = (3, 3) = f^*$  e diferentes pesos / Exemplo 3.14



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

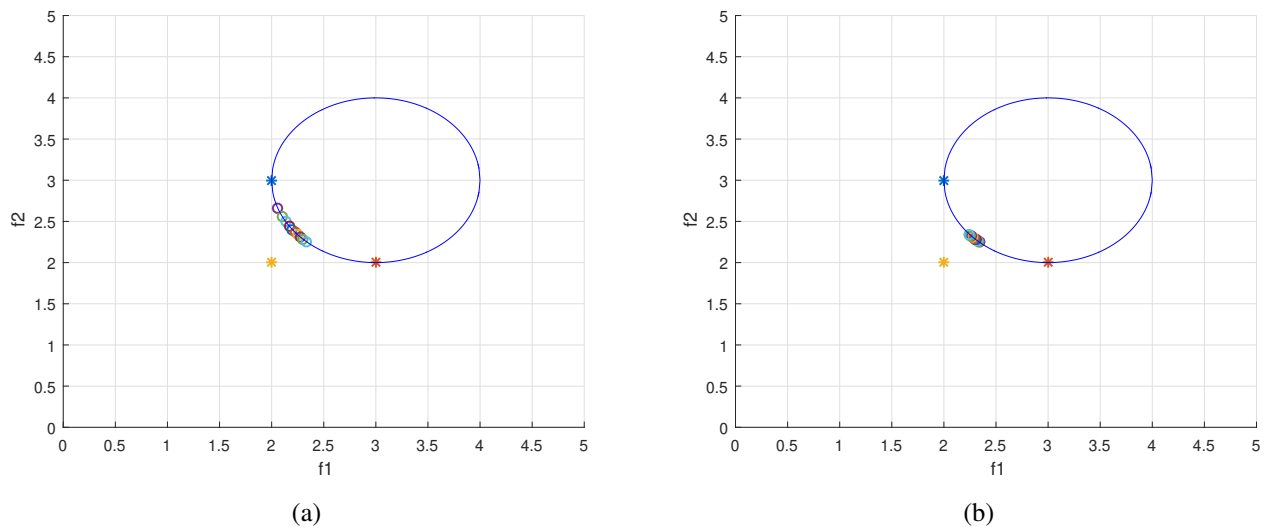
- Figura 25 (a). Frente de Pareto com  $w_1 = \cos(i * \text{inc})$  e  $w_2 = \text{sen}(i * \text{inc})$ .
- Figura 25 (b). Frente de Pareto com  $w_1 = 3 + i * \text{inc}$  e  $w_2 = 4 - i * \text{inc}$ .
- $u^* = (3, 3) = f^*$

**Exemplo 3.15.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{npp} = 10 \\ & i = 1 : \text{npp} \\ & \text{inc} = \frac{1}{\text{npp}} \end{aligned}$$

Figura 26 – Frentes de Pareto com  $u^* = (2, 2) = f^*$  e diferentes pesos / Exemplo 3.15

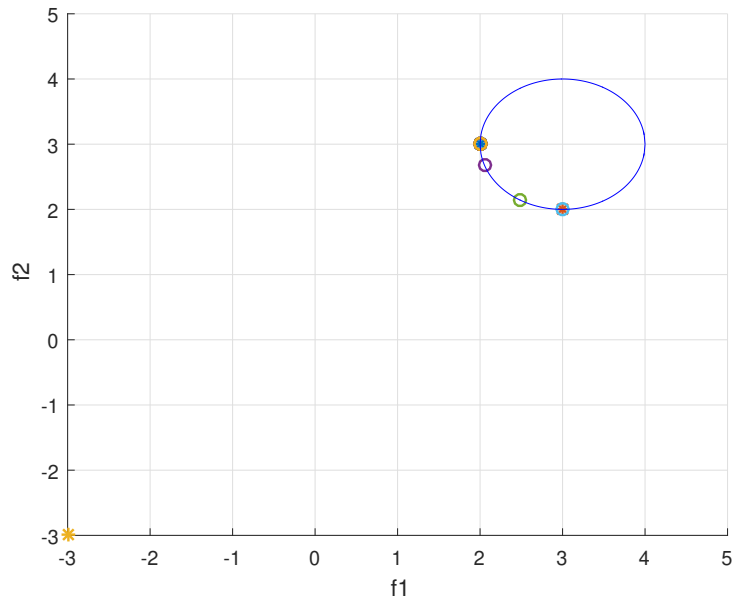


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

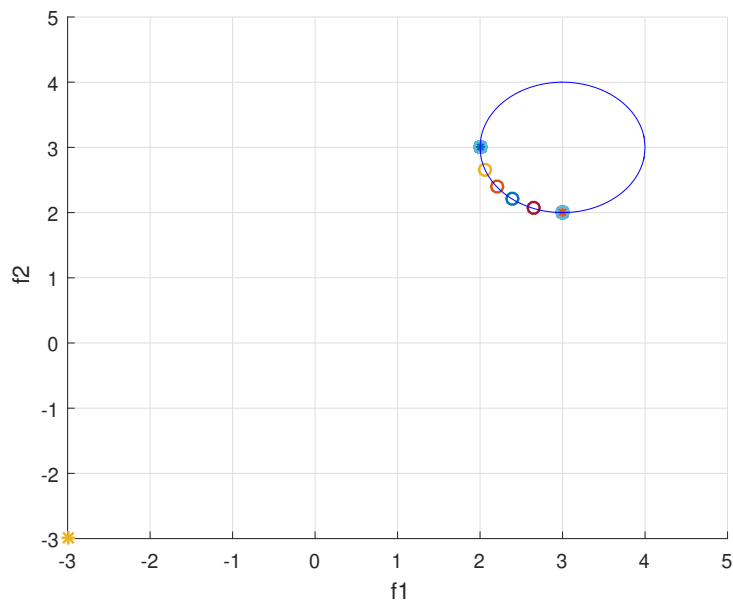
- Figura 26(a). Frente de Pareto com  $w_1 = \cos(i * \text{inc})$  e  $w_2 = \text{sen}(i * \text{inc})$ .
- Figura 26(b). Frente de Pareto com  $w_1 = 2 + i * \text{inc}$  e  $w_2 = 3 - i * \text{inc}$ .
- $u^* = (2, 2) = f^*$



Figura 27 – Frentes de Pareto com  $u^* = (-3, -3)$  e diferentes pesos / Exemplo 3.15



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

- Figura 27(a). Frente de Pareto com  $w_1 = \cos(i * \text{inc})$  e  $w_2 = \text{sen}(i * \text{inc})$ .
- Figura 27(b). Frente de Pareto com  $w_1 = 2 + i * \text{inc}$  e  $w_2 = 3 - i * \text{inc}$ .
- $u^* = (-3, -3)$

Com o intuito de obter uma distribuição mais uniforme para a frente de Pareto, Dutta e Kaya [7] modificaram a Escalarização Clássica de Tchebychev incorporando ao problema ( $T$ ) restrições que foram denominadas Raios. Este método modificado, denominado Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios, será descrito no próximo capítulo.

## 4 MÉTODO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS

No Capítulo 3, apresentamos o Método das Somas Ponderadas e o Método de Tchebychev para construção da Frente de Pareto para problemas de otimização multi-objetivo.

Vimos que o Método das Somas Ponderadas falha ao buscar pontos de Pareto caso a Frente de Pareto não seja convexa e, mesmo sendo convexa, pode-se encontrar dificuldades na construção da frente como no caso linear, ilustrado pelo Exemplo 3.5.

Apresentamos então o Método de Tchebychev, que pode ser aplicado para problemas em que a frente não é convexa. Entretanto, pode ser que haja uma concentração dos pontos solução em uma parte da frente, deixando assim de retratar seu real aspecto.

Neste capítulo, vamos apresentar uma nova técnica, proposta em [7], que trata-se de uma modificação do Método de Tchebychev, chamada Tchebychev ao Longo de Raios, que visa obter uma distribuição mais uniforme dos pontos da Frente de Pareto para problemas multi-objetivo convexos ou não convexos. Veremos que essa nova abordagem produz uma Frente mais bem distribuída. Entretanto, surgem pontos que não são ótimos de Pareto como solução do problema resultante da nova escalarização. Veremos então como contornar essa inconveniência com a introdução de uma técnica que elimina pontos que não são ótimos de Pareto.

Consideremos novamente o problema

$$(T) \begin{cases} \text{minimizar } \max\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } x \in X \end{cases}$$

O Teorema 4.1 abaixo pavimenta o caminho para a formulação do Método de Tchebychev ao Longo de Raios.

**Teorema 4.1.** [14, Teorema 1] *Suponha que  $x^* \in X$  é um mínimo de Pareto de  $(P)$  tal que*

$$w_1(f_1(x^*) - u_1^*) = \dots = w_p(f_p(x^*) - u_p^*) \quad (4.1)$$

para certos  $w_1, \dots, w_p > 0$ .

Sejam  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) = (f_1(x^*), \dots, f_p(x^*))$  e  $\bar{x}$  solução de  $(T)$  com os mesmos  $w_1, \dots, w_p > 0$ . Então  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$  será o único vetor de valores ótimos.

Note que as equações

$$w_1(f_1 - u_1^*) = \dots = w_p(f_p - u_p^*) \quad (4.2)$$

representam uma semi-reta (raio) com vetor diretor  $v = (\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_p})$  e com origem no ponto utópico.

Uma equação paramétrica para o raio na região objetivo viável pode ser escrita como

$$f = tv + u^* \quad , \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

Combinando os teoremas 3.9 e 4.1, vemos que se o raio definido por (4.2) intercepta a Frente de Pareto para algum  $w = (w_1, \dots, w_p)$  e se esse ponto de interseção é um mínimo de Pareto então

a solução de  $(T)$  produz tal ponto de interseção na Frente de Pareto.

Esta ideia pode ser útil para se gerar uma boa aproximação da Frente de Pareto no caso em que os mínimos fracos de Pareto são também mínimos de Pareto.

Nesta situação, usa-se um conjunto conveniente de pesos  $w_1, \dots, w_p$  e escolhe-se “apropriadamente” o ponto utópico para a construção da Frente de Pareto. Métodos que usam este conceito são encontrados em [8, 9, 10, 13].

A ideia apresentada por Dutta e Kaya [7] é diferente da acima mencionada no sentido que estes últimos propõem uma nova escalarização com a qual é possível construir uma aproximação de Frentes de Pareto que contenham mínimos fracos.

A escalarização tipo Tchebychev apresentada em [7] acrescenta ao problema  $(T)$  restrições dadas pelos raios associados aos pesos  $w_1, \dots, w_p$ . O problema escalarizado fica

$$(TR) \begin{cases} \text{minimizar } \max\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } w_i(f_i(x) - u_i^*) - w_{i+1}(f_{i+1}(x) - u_{i+1}^*) = 0, i = 1, \dots, p-1 \\ x \in X \end{cases}$$

Essa nova escalarização foi denominada de Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios.

No que segue são apresentados dois resultados concernentes à Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios cujas demonstrações podem ser encontradas em [7].

**Teorema 4.2.** *Se  $x^*$  é um mínimo fraco de Pareto de  $(P)$  então  $x^*$  é solução de  $(TR)$  para algum vetor  $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$ .*

A recíproca do Teorema 4.2 não é verdadeira a menos que a Frente de Pareto seja conexa. Este fato pode ser verificado como segue.

Seja o problema bi-objetivo  $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ ,  $x \in X \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $x_1^*$  e  $x_2^*$  são soluções dos problemas mono-objetivos

$$(P_1) \quad \min f_1(x), \quad x \in X$$

$$(P_2) \quad \min f_2(x), \quad x \in X$$

respectivamente.

Sejam

$$f_1^* = f_1(x_1^*), \quad \bar{f}_2 = f_2(x_1^*)$$

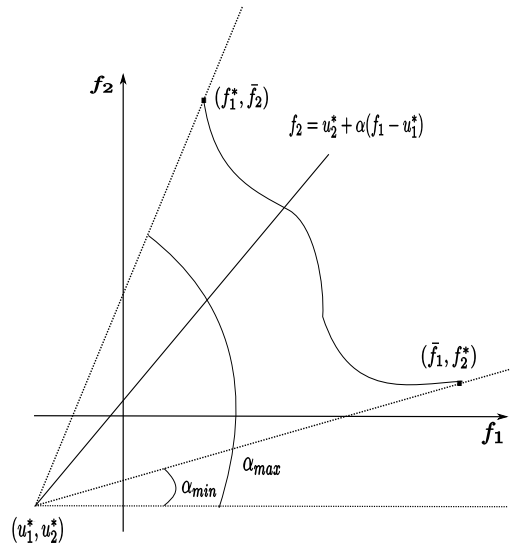
$$\bar{f}_1 = f_1(x_2^*), \quad f_2^* = f_2(x_2^*)$$

A Frente de Pareto será conexa se e somente se a reta  $f_2 = u_2^* + \alpha(f_1 - u_1^*)$  no espaço objetivo intercepta a Frente para todo ângulo  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  onde

$$\alpha_{\min} = \arctg\left(\frac{f_2^* - u_2^*}{f_1^* - u_1^*}\right)$$

$$\alpha_{\max} = \arctg\left(\frac{\bar{f}_2 - u_2^*}{\bar{f}_1 - u_1^*}\right)$$

Figura 28 – Frente de Pareto conexa



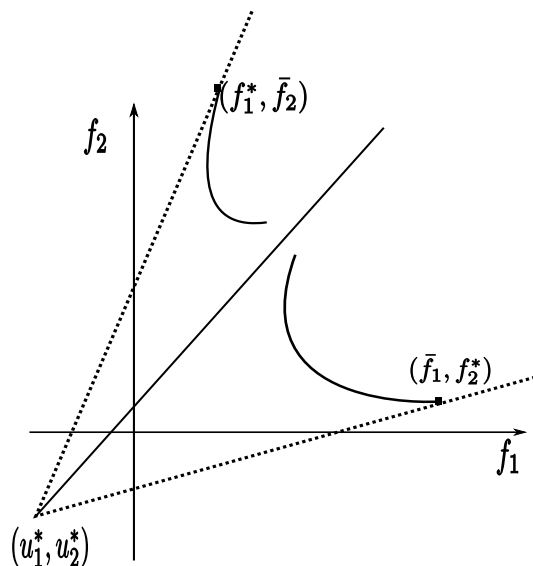
Fonte: Extraído de Dutta, J. and Kaya, C. Y. (2011) [7].

Se a Frente de Pareto não for conexa então existirão  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  e  $w = (w_1, w_2)$  tais que a semi-reta

$$w_1(f_1(x) - u_1^*) = w_2(f_2(x) - u_2^*) \quad (4.4)$$

não interceptará a Frente.

Figura 29 – Frente de Pareto não conexa



Fonte: Extraído de Dutta, J. and Kaya, C. Y. (2011) [7].

Neste caso, a solução de  $(TR)$  com a restrição (4.4) não será um mínimo de Pareto.

Vale a recíproca do Teorema 4.2 desde que a Frente de Pareto seja conexa, conforme o

**Teorema 4.3.** *Suponha que Frente de Pareto associada ao problema  $(P)$  seja conexa.*

*Se  $x^*$  é uma solução de  $(TR)$  para algum  $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$  então  $x^*$  é um mínimo fraco de Pareto de  $(P)$ .*

O Método de Tchebychev ao Longo de Raios se vale do Teorema 4.3 para superar as dificuldades encontradas pelos métodos estudados no Capítulo 3, no caso de Frentes de Pareto conexas.

Este Método acrescenta restrições definidas por raios que, no caso conexo, atravessam a frente produzindo uma solução de Pareto.

Deve-se escolher uma distribuição o mais uniforme possível para os raios de modo a se obter uma boa aproximação para a frente.

Obviamente, a princípio, não há como saber se um determinado raio intercepta a Frente de Pareto. Portanto, uma solução de  $(TR)$  pode não ser um ponto de Pareto. Tais soluções são eliminadas com a introdução de uma rotina descrita no último passo do algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios, descrito a seguir, que identifica pontos que não são Pareto.

#### 4.1 O ALGORITMO DE TCHEBYCHEV AO LONGO DE RAIOS

No que segue, descreveremos os passos do algoritmo que utiliza a Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios.

- Passo 1 (Inicialização)

Fixe  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  e  $N = npp$ . Faça  $k = 1$

- Passo 2 (Pontos Extremos da Frente)

2.1 Encontre  $\bar{x}_1$  solução de minimizar  $f_1(x)$ ,  $x \in X$

Faça  $f_1^* = f_1(\bar{x}_1)$  e  $\bar{f}_2 = f_2(\bar{x}_1)$

Defina  $P^0 = (f_1^*, \bar{f}_2)$

2.2 Encontre  $\bar{x}_2$  solução de minimizar  $f_2(x)$ ,  $x \in X$

Faça  $\bar{f}_1 = f_1(\bar{x}_2)$  e  $f_2^* = f_2(\bar{x}_2)$

Defina  $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

- Passo 3 (Ponto Utópico)

Faça  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  com  $u_1^* = f_1^* - \epsilon_1$ ,  $u_2^* = f_2^* - \epsilon_2$

- Passo 4 (Ângulos)

Calcule  $\alpha_{\min} = \arctg\left(\frac{f_2^* - u_2^*}{f_1^* - u_1^*}\right)$

$\alpha_{\max} = \arctg\left(\frac{\bar{f}_2 - u_2^*}{\bar{f}_1 - u_1^*}\right)$

$\Delta\alpha = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{npp}$

- Passo k (Loop)

k.1 Faça  $\alpha = \alpha_{\min} + k\Delta\alpha$

Faça  $w_1 = \sin \alpha$  e  $w_2 = \cos \alpha$

k.2 Encontre  $\bar{x}$  solução de (TR)

Defina  $P^k = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$

k.3 Se  $k = npp$  vá para o Passo N

Se não, faça  $k = k + 1$  e vá para k.1

- Passo N (Eliminando pontos não Pareto)

Para  $i = 1, \dots, npp$  se existe  $j = 0, \dots, npp$

tal que  $P_1^j < P_1^i$  e  $P_2^j < P_2^i$  então elimine  $P^i$ .

O algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios provê uma boa ferramenta para a construção de Frentes de Pareto para problemas de otimização com dois objetivos, podendo ser adaptado para problemas com três ou mais objetivos [5, 8, 13].

Com o intuito de obter uma boa distribuição dos pontos de Pareto é importante escolher os pesos  $w_1$  e  $w_2$  uniformemente e tomar o ponto utópico suficientemente longe do ponto ideal, o que pode ser feito escolhendo-se  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  suficientemente grandes.

Outro aspecto importante do algoritmo é que no passo  $k.2$  o problema não diferenciável ( $TR$ ) precisa ser resolvido. Assim como em [7], neste trabalho, empregamos o Deflected Subgradient Method (DSG) [1, 2, 3, 4] que utiliza Dualidade Lagrangiana como técnica não-diferenciável. Essa abordagem requer a solução de subproblemas irrestritos de otimização, os quais foram resolvidos usando-se a subrotina `fminsearch` do MatLab que emprega o Método de Nelder-Mead [11].

A versão do MatLab empregada foi *R2015b* instalada em um computador Intel(R) Core (TM)i5-3337U CPU, Memória instalada(RAM) 4,00 GB com sistema operacional de 64bits.

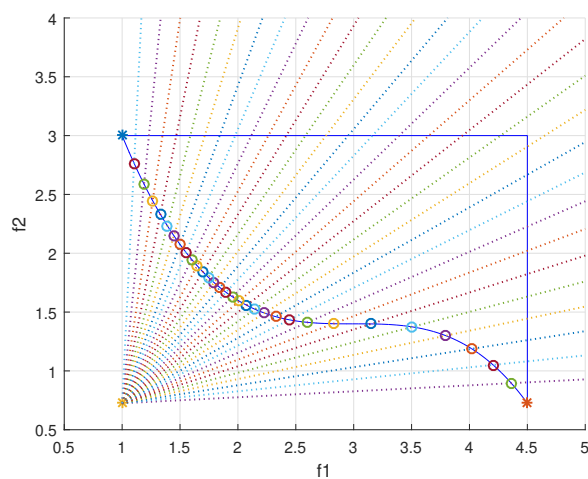
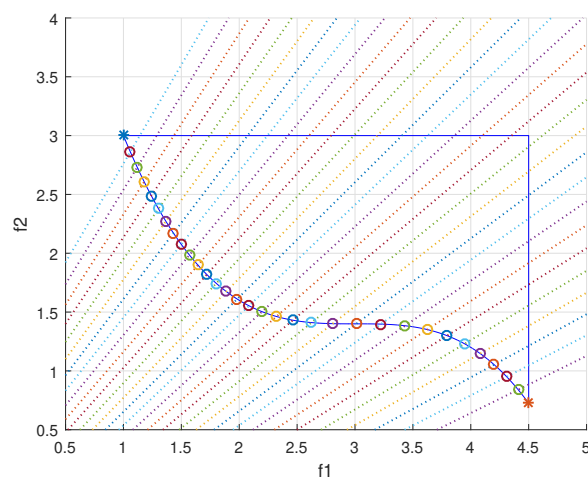


## 4.2 Exemplos Numéricos da Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios

**Exemplo 4.4.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ & \quad x_1 - 4.5 \leq 0 \\ & \quad x_2 - 3 \leq 0 \\ & \text{npp} = 30 \end{aligned}$$

Figura 30 – Frente de Pareto / Exemplo 4.4

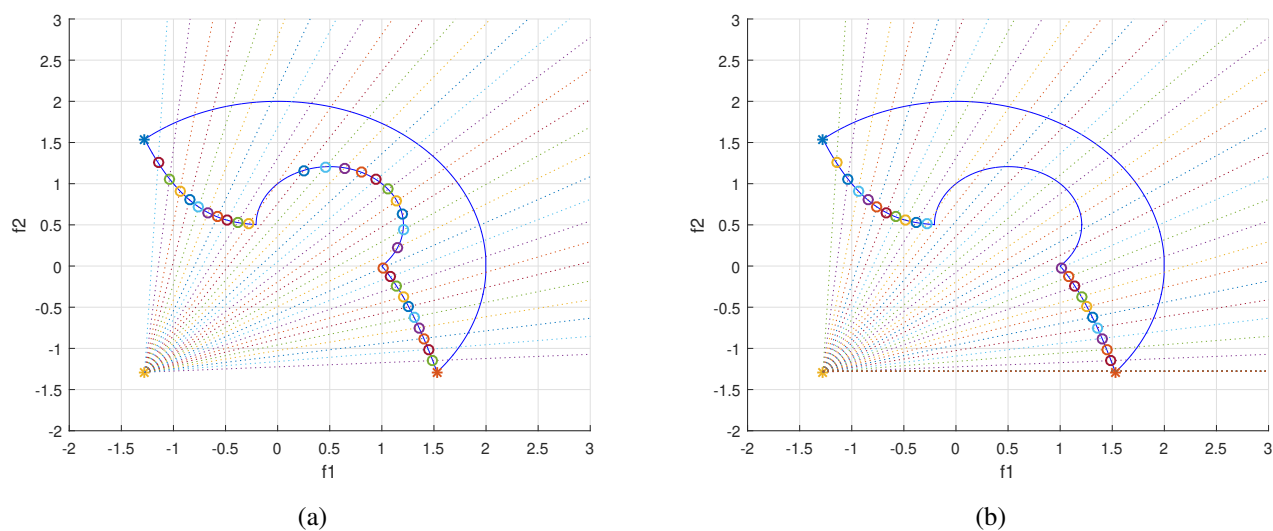
(a)  $u^* = (1, 0.7250)$ (b)  $u^* = (-2, -2.2750)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

**Exemplo 4.5.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & -(x_1 - 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ & -x_1^3 - 2x_2 + 1 \leq 0 \\ & \text{npp} = 30 \end{aligned}$$

Figura 31 – Exemplo 4.5 com  $u^* = (-1.2764, -1.2888)$



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

- Figura 31(a): pontos ótimos e não ótimos de Pareto encontrados por (TR).
- Figura 31(b): Frente de Pareto após eliminação de pontos não Pareto.

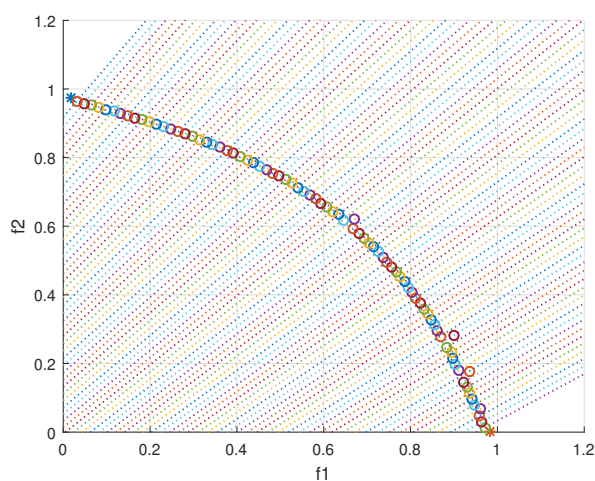
**Exemplo 4.6.**

$$\text{minimizar } \left\{ 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 (x_i - 0.577)^2\right), 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 (x_i + 0.577)^2\right) \right\}$$

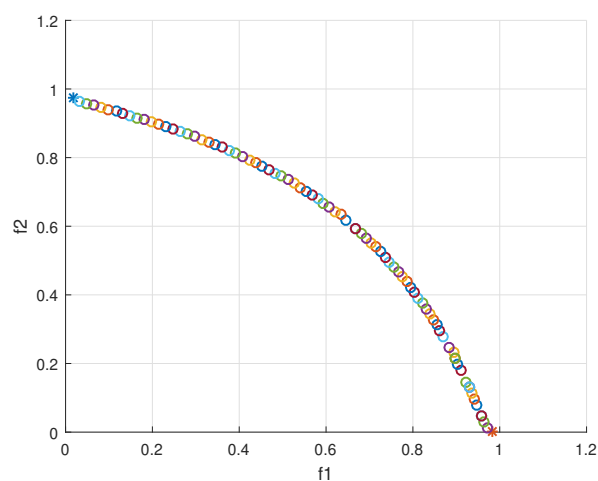
$$\text{s.a } -0.577 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 0.577$$

$$\text{npp} = 80$$

Figura 32 – Exemplo 4.6 com  $u^* = (-1.9820, -2)$



(a)



(b)

Fonte: Extraído de [6].

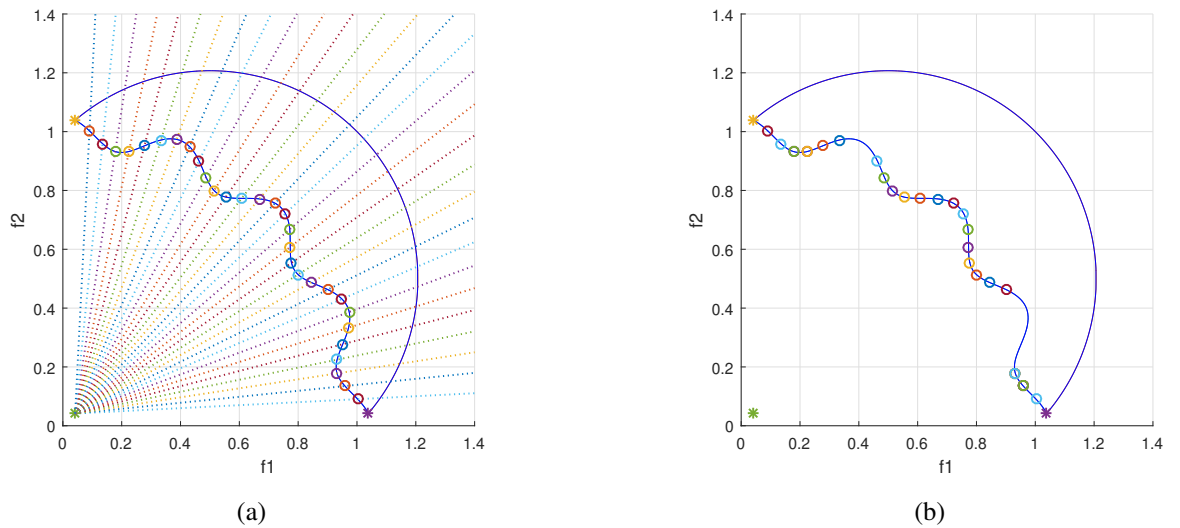
- Figura 32(a): pontos ótimos e não ótimos de Pareto encontrados por  $(TR)$ .
- Figura 32(b): Frente de Pareto após eliminação de pontos não Pareto.

**Exemplo 4.7.**

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 \text{s.a } & -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0.1\cos(16\arctg(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0 \\
 & (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 0.5 \leq 0 \\
 & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi
 \end{aligned}$$

$npp = 30$

Figura 33 – Exemplo 4.7 com  $u^* = (0.0417, 0.0417) = f^*$



Fonte. Extraído de [6].

- Figura 33(a): pontos ótimos e não ótimos de Pareto encontrados por  $(TR)$ .
- Figura 33(b): Frente de Pareto após eliminação de pontos não Pareto.

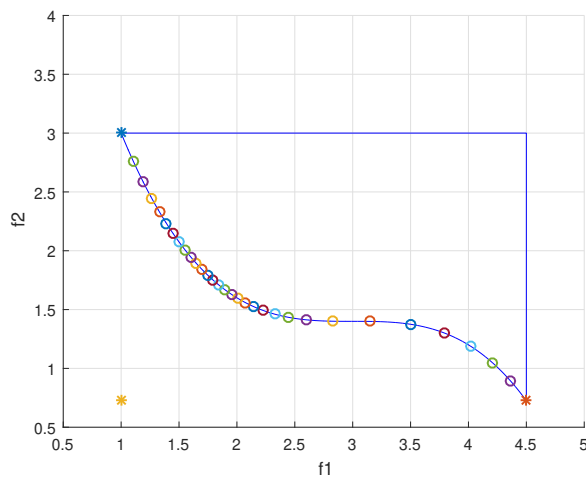
O algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios, no seu passo k.1, sugere uma boa escolha para os pesos  $w_1$  e  $w_2$ .

Nos exemplos 4.8, 4.9 e 4.10 a seguir empregamos o Método Clássico de Tchebychev e tais pesos para construir as Frentes de Pareto dos exemplos 3.11, 3.12 e 4.7, respectivamente.

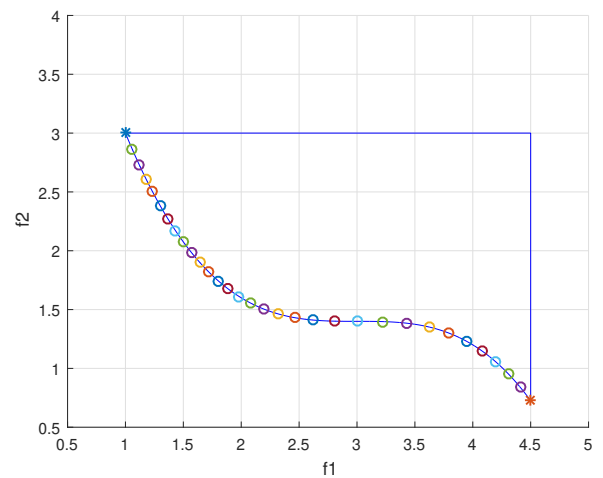
**Exemplo 4.8.**

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ & \quad x_1 - 4.5 \leq 0 \\ & \quad x_2 - 3 \leq 0 \\ & \text{npp} = 30 \end{aligned}$$

Figura 34 – Exemplo 3.11 com Tchebychev Clássico e pesos do algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios



(a)  $u^* = (1, 0.7250) = f^*$



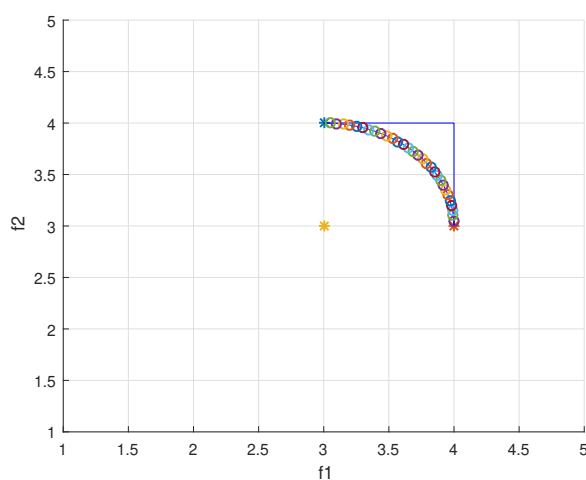
(b)  $u^* = (-2, -2.2750)$

Fonte. Elaborado pelo autor (2020).

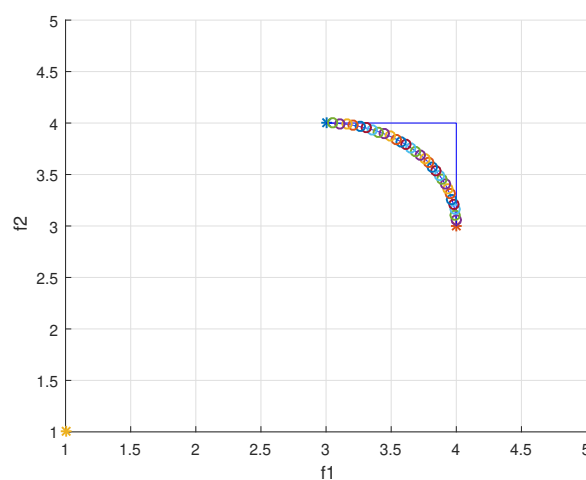
**Exemplo 4.9.**

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 \text{s.a } & 1 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3)^2 \leq 0 \\
 & x_1 - 4 \leq 0 \\
 & x_2 - 4 \leq 0 \\
 & 3 - x_1 \leq 0 \\
 & 3 - x_2 \leq 0 \\
 \\ 
 & \text{npp} = 30
 \end{aligned}$$

Figura 35 – Exemplo 3.12 com Tchebychev Clássico e pesos do algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios



(a)  $u^* = (3, 3) = f^*$



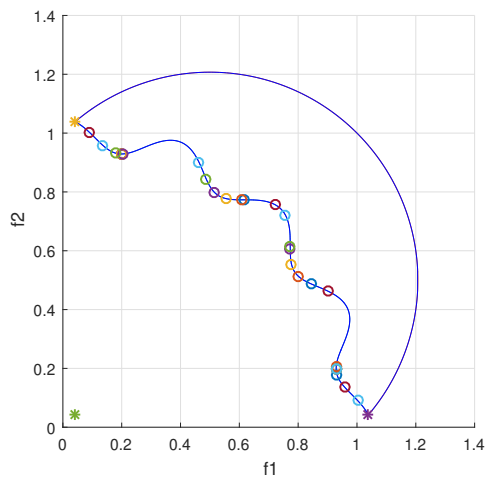
(b)  $u^* = (1, 1)$

Fonte. Elaborado pelo autor (2020).

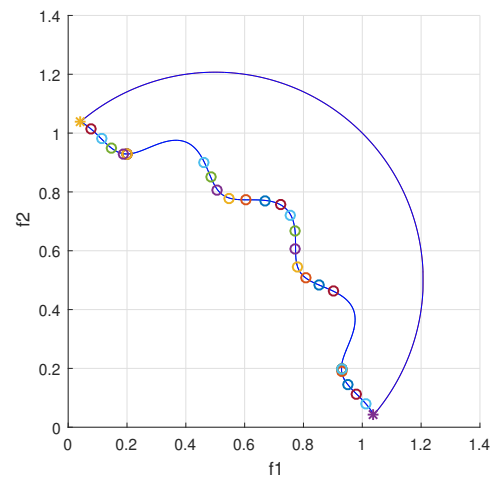
**Exemplo 4.10.**

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 & \text{s.a } -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0.1\cos(16\arctg(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0 \\
 & \quad (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 0.5 \leq 0 \\
 & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \\
 \\
 & \text{npp} = 30
 \end{aligned}$$

Figura 36 – Exemplo 4.7 com Tchebychev Clássico e pesos do algoritmo de Tchebychev ao Longo de Raios



(a)  $u^* = (0.0417, 0.0417) = f^*$



(b)  $u^* = (-1.9583, -1.9583)$

Fonte: Extraído de [6].

## 5 CONCLUSÃO

No contexto da Otimização Multi-objetivo, a Frente de Pareto oferece um conjunto de soluções que a princípio parecem ser indiferentes no sentido de não haver uma melhor que as outras. O que se observa na realidade é a existência do “trade off” e a escolha da “melhor” solução se dá sempre tendo-se em mente que para melhorar um objetivo paga-se o preço de piorar outros.

O objetivo da Otimização Multi-objetivo é a construção da Frente de Pareto, isto é, a determinação das diversas soluções de Pareto.

A escalarização é, em geral, a técnica utilizada para resolver um problema de Otimização Multi-objetivo. Apresentamos três dessas técnicas que foram o Método das Somas Ponderadas, a Escalarização de Tchebychev e a Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios. Vimos as características de cada um desses métodos e também suas deficiências.

O Método das Somas Ponderadas não é bom se a Frente de Pareto for não convexa. A Escalarização de Tchebychev pode ser aplicada a Frentes convexas ou não mas, conforme a escolha dos pesos e do ponto utópico, pode levar a resultados pobres, além de produzir um problema escalar não diferenciável mesmo se o problema original o for. A Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios produz uma aproximação melhor para a Frente de Pareto mas com o inconveniente da introdução de restrições adicionais ao problema original e o aparecimento de pontos não Pareto, exigindo uma rotina que elimine tais pontos.

Portanto, usando o jargão da Otimização Multi-objetivo, percebemos o trade-off entre as três técnicas apresentadas. Quando se escolhe um método em detrimento de outro paga-se algum preço.

O objetivo desta dissertação foi prover ao leitor interessado em Otimização Multi-objetivo os elementos básicos da teoria bem como apresentar em detalhes a Escalarização de Tchebychev ao Longo de Raios para construção de Frentes de Pareto para problemas de otimização com dois objetivos. Assim, o estudante iniciante nesta tão importante sub-área da Otimização terá uma nova fonte de consulta ao seu dispor onde encontrará o material necessário para começar a entender Otimização Multi-objetivo bem como construir algoritmos computacionais para resolução de problemas.



## REFERÊNCIAS

- [1] Burachik, R. S., Gasimov, R. N., Ismayilova, N. A., and Kaya, C. Y. (2006). On a modified subgradient algorithm for dual problems via sharp augmented lagrangian. *Journal of Global Optimization*, 34(1):55–78.
- [2] Burachik, R. S. and Kaya, C. Y. (2007). An update rule and a convergence result for a penalty function method. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(2):381.
- [3] Burachik, R. S. and Kaya, C. Y. (2010). A deflected subgradient method using a general augmented lagrangian duality with implications on penalty methods. In *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control*, pages 109–132. Springer.
- [4] Burachik, R. S., Kaya, C. Y., and Mammadov, M. (2010). An inexact modified subgradient algorithm for nonconvex optimization. *Computational Optimization and Applications*, 45(1):1–24.
- [5] Das, I. and Dennis, J. E. (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM journal on optimization*, 8(3):631–657.
- [6] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- [7] Dutta, J. and Kaya, C. Y. (2011). A new scalarization and numerical method for constructing the weak pareto front of multi-objective optimization problems. *optimization*, 60:1091–1104.
- [8] Eichfelder, G. (2008). *Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization*, volume 436. Springer.
- [9] Eichfelder, G. (2009a). An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 19(4):1694–1718.
- [10] Eichfelder, G. (2009b). Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, 44(2):249.
- [11] Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., and Wright, P. E. (1998). Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1):112–147.
- [12] Miettinen, K. (1998). *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- [13] Mueller-Gritschneider, D., Graeb, H., and Schlichtmann, U. (2009). A successive approach to compute the bounded pareto front of practical multiobjective optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 20(2):915–934.

- [14] Ogryczak, W. (2001). Comments on properties of the minmax solutions in goal programming. *European Journal of Operational Research*, 132(1):17–21.