

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Patrick de Souza Oliveira**

**Um Modelo SIS Não-Autônomo em Escalas Temporais**

Juiz de Fora

2020



Patrick de Souza Oliveira

Um Modelo SIS Não-Autônomo em Escalas Temporais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Lucy Tiemi Takahashi

Coorientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Patrick.

Um Modelo SIS Não-Autônomo em Escalas Temporais / Patrick de Souza Oliveira. – 2020.

122 f. : il.

Orientadora: Lucy Tiemi Takahashi

Coorientador: Eduard Toon

Dissertação de Mestrado (pós-graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Escalas Temporais. 2. Biomatemática. 3. Modelo SIS. I. Takahashi, Lucy, orient. II. Toon, Eduard, coorient. III. Título.

Patrick de Souza Oliveira

Um Modelo SIS Não-Autônomo em Escalas Temporais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

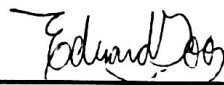
Aprovada em 02 de Março de 2020

BANCA EXAMINADORA




---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lucy Tiemi Takahashi - Orientadora  
Universidade Federal de Juiz de Fora



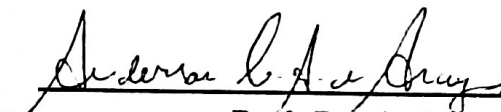
---

Professor Dr. Eduard Toon - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Laércio José dos Santos  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Anderson Araújo  
Universidade Federal de Viçosa



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por acreditar na educação como ferramenta de transformação e por nunca ter medido esforços para que eu pudesse obter a melhor formação acadêmica e humana possíveis.

Agradeço ao Departamento de Matemática, com todos os seus funcionários, além de todos os professores, educadores e servidores que contribuíram, direta e indiretamente, na minha trajetória acadêmica, desde à tenra idade até hoje.

Agradeço aos meus amigos Leone Andrade Campos, Rafael Rocha de Oliveira Garcia, Marcela Medeiros Rodrigues e Robson Ortiz de Oliveira Cunha, por estarem sempre ao meu lado em todas as horas da vida.

Agradeço também à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lucy Tiemi Takahashi, pelos inúmeros anos de parceria e aprendizado, sendo o maior exemplo de profissionalismo e amizade que eu conheço. Agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Eduard Toon, pela disponibilidade, compreensão e paciência inigualáveis.

Por fim, agradeço à CAPES pelo fomento financeiro, ajuda que tornou minha vida dentro do meio acadêmico possível.

Esta dissertação foi realizada com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.





## RESUMO

Neste trabalho exploramos a teoria de equações dinâmicas em escalas temporais, desenvolvendo alguns dos seus principais resultados para as equações dinâmicas lineares e lançando mão de novos resultados para equações dinâmicas não-lineares, a fim de, em seguida, aplicá-los à modelo biomatemático que descreve, através de um problema de valor inicial, a dinâmica de uma doença em uma população dividida entre infectados e suscetíveis. A partir desta modelagem, a qual recebe o nome de Modelo Suscetível-Infectado-Suscetível, SIS de foma abreviada, exploramos a sua versão autônoma e então aplicamos este modelo em um surto de gastroenterite aguda que ocorreu no município de Itatiaia, no estado do Rio de Janeiro, em 2002. Uma vez tratada à versão autônoma deste modelo, nós o generalizamos para a sua versão não-autônoma e desenvolvemos alguns resultados para a sua análise.

Palavras-chave: Escalas Temporais. Biomatemática. Modelo SIS.



## ABSTRACT

In this work we explore the theory of dynamic equations on time scales, developing some of their main results for linear dynamic equations and using new results for nonlinear dynamic equations, in order to apply them in a biomathematical model that describes, through a problem of initial value, the dynamics of a disease in a population divided between infected and susceptible. From this modeling, which is called Susceptible-Infected-Susceptible Model, SIS for short, we explored its autonomous version and applied it in an outbreak of acute gastroenteritis that occurred in the municipality of Itatiaia, in the state of Rio de Janeiro, in 2002. Once explored the autonomous version of this model, we generalized it to its non-autonomous version and developed some results for its analysis.

Keywords: Time Scales. Biomathematics. SIS Model.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Em vermelho, vemos sobre a reta real uma escala temporal $\mathbb{T}$ arbitrária, com $t_0 = \inf \mathbb{T}$ e $I_a = [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$ . Acima da reta real, ainda em vermelho, vemos o gráfico da solução única local $\phi : [t_0, t_0 + \delta]_{\mathbb{T}} \subset I_a \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um PVI do tipo $x^\Delta = f(t, x, x^\sigma)$ , $x(t_0) = x_0$ , garantida pelo Teorema de Picard I. Em preto, vemos $\mathbb{R}^n$ , o espaço de fase deste PVI, assim como $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto tal que $\text{Dom}(f) = \mathbb{T} \times U \times U$ e $B[x_0, b] \subset U$ . 40
Diagrama do Modelo SIS. As setas representam o sentido do fluxo de indivíduos entrando ou saindo das subpopulações de suscetíveis ou infectados. 59
Em laranja vemos o município de Itatiaia, Rio de Janeiro. Fonte: IBGE. . . . . 69
Gráfico do número de casos reportados de gastroenterite aguda no município de Itatiaia por semana epidemiológica no ano de 2002 entre Abril e Setembro. Fonte: [10] . . . . . 70
Em preto, o gráfico do número de infectados $I$ obtido da solução do PVI (3.7) para os parâmetros $\beta = 0,25 \text{ (dia)}^{-1}$ , $\delta = 0,5 \text{ (dia)}^{-1}$ , $\eta = 0,01 \text{ (dia)}^{-1}$ e $a = 0 \text{ (dia)}^{-1}$ ; Em vermelho, os dados referentes ao número reportado de infectados em cada uma das quatro primeiras semanas após o início do surto. . . . . 76
Em preto, temos o gráfico de $\varphi$ para alguns valores de $t \in \mathbb{R}$ . . . . . 108



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Funções exponenciais $e_\alpha(\cdot, t_0)$ , $\alpha \in \mathcal{R}$ constante, definidas para diversas escalas temporais. . . . .	29
Tabela 2 – Alguns dos valores de $E$ para os quais $E(\beta, \delta, \eta) \leq 50$ . . . . .	76





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DINÂMICAS DE PRIMEIRA ORDEM EM ESCALAS TEMPORAIS . . . . .</b>	<b>19</b>
2.1	EQUAÇÕES DINÂMICAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	20
2.1.1	<i>Equações Dinâmicas Lineares Homogêneas . . . . .</i>	20
2.1.2	<i>Equações Dinâmicas Lineares Não-Homogêneas . . . . .</i>	29
2.2	EQUAÇÕES DINÂMICAS NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	33
<b>3</b>	<b>UM MODELO SIS AUTÔNOMO EM ESCALAS TEMPORAIS</b>	<b>51</b>
3.1	HIPÓTESES DO MODELO SIS . . . . .	53
3.2	A MODELAGEM EM ESCALAS TEMPORAIS . . . . .	55
3.3	OS PRINCIPAIS RESULTADOS . . . . .	59
3.4	UM MODELO PARA O SURTO DE GASTROENTERITE EM ITATIAIA . . . . .	69
3.4.1	<i>A Modelagem do Surto . . . . .</i>	71
3.4.2	<i>Simulações Numéricas para o Modelo da Gastroenterite . . . . .</i>	74
3.4.3	<i>Conclusões . . . . .</i>	77
<b>4</b>	<b>UM MODELO SIS NÃO-AUTÔNOMO EM ESCALAS TEMPORAIS . . . . .</b>	<b>79</b>
4.1	OS PRINCIPAIS RESULTADOS . . . . .	81
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>111</b>
	<b>ANEXO A – ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE ESCALAS TEMPORAIS . . . . .</b>	<b>113</b>
A.1	PRELIMINARES . . . . .	113
A.2	DERIVADA DE HILGER . . . . .	113
A.3	INTEGRAL DE HILGER . . . . .	116
A.4	A TRANSFORMAÇÃO CILÍNDRICA . . . . .	121



## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de escalas temporais, primeiramente proposta no final da década de 1980 por Stefan Hilger<sup>1</sup> apud Bohner e Peterson, apresenta-se com o intuito de unificar as análises discreta e contínua na reta. Por vezes, os cursos de graduação e mestrado em matemática dão enfoque ao estudo da análise contínua (análise na reta  $\mathbb{R}$ ) [8], enquanto a análise discreta [11] (ou seja, a análise feita, por exemplo, nos conjuntos  $h\mathbb{Z}$ ,  $h > 0$ ) é tratada de forma esparsa durante a formação acadêmica do matemático, sendo vista apenas em ocasiões específicas como nas disciplinas de análise numérica ou em métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais de primeira ordem (abreviadamente, EDO) e equações diferenciais parciais (abreviadamente, EDP). Entretanto, longe de serem teorias irreconciliáveis, as análises discreta e contínua podem ser estudadas sob a mesma ótica de escalas temporais.

A análise feita sobre as escalas temporais (que nada mais são do que subconjuntos fechados e não-vazios da reta) além de propor a unificação das análises discreta e contínua, generalizam as principais ideias do cálculo diferencial-integral para funções definidas em conjuntos fechados na reta, por exemplo, o conjunto de Cantor [8]. Dessa maneira, surgem uma gama de novos problemas dinâmicos, como problemas de Cauchy com ‘tempo’ definido em uma escala temporal qualquer, que ainda não foram muito explorados na literatura matemática enquanto aplicações.

Além disso, há uma grande promessa do uso de equações dinâmicas em escalas temporais como uma ferramenta que sirva para modelar de forma mais fidedigna vários problemas dinâmicos. Por exemplo, podemos modelar a dinâmica de uma doença sazonal que, durante o verão, o número de infectados é muito baixo e varia de forma discreta, enquanto no inverno o número de infectados cresce significativamente, donde tratamos a sua variação de forma contínua. Assim, além de estarmos preocupados na forma das equações da dinâmica (que descrevem este sistema), também nos interessamos em escolher uma escala temporal que melhor reflita a dinâmica da doença. Fica claro que a versatilidade com que podemos tomar o ‘tempo’ nestes problemas nos permite capturar melhor a essência da sua dinâmica.

Dessa forma, no Capítulo 2 lançamos mão de parte da teoria de equações dinâmicas em escalas temporais necessárias para, no Capítulo 3, desenvolvermos o modelo SIS autônomo, trabalhando desde os princípios em sua modelagem até os seus principais resultados da sua análise. Ao final deste estudo, contextualizamos o modelo com uma aplicação. Mais especificamente, aplicamos o modelo SIS autônomo em um surto de gastroenterite que ocorreu no município de Itatiaia, Rio de Janeiro, no ano de 2002, com a finalidade de verificarmos a aplicabilidade do modelo.

---

<sup>1</sup> Veja a referência [7]

Por fim, trabalhando o modelo autônomo, no Capítulo 4 nós generalizamos este modelo SIS para a sua versão não-autônoma, trabalhando desde a sua modelagem em escalas temporais até o desenvolvimento de resultados para a sua análise.

O modelo SIS não-autônomo proposto no Capítulo 4 é original deste trabalho e foi baseado nos modelos SIS autônomos do artigo [4] e do trabalho de conclusão de curso [9]. Para mostrarmos que este modelo não-autônomo está bem definido, nós desenvolvemos originalmente os resultados da Seção 2.2, em que discutimos existência e unicidade (local e maximal) de soluções para alguns PVI's. Ainda, na Seção 2.1 nós estudamos as equações dinâmicas lineares de primeira ordem em escalas temporais [2] pois, através destas é que faremos a análise nos Capítulos 3 e 4 dos modelos SIS autônomo e não-autônomo, respectivamente.

Assim, no Capítulo 2, temos [2] e [3] como as principais referências da Seção 2.1, enquanto para a Seção 2.2, à exceção do Lema 2.2.1, Definição 2.2.2, Corolário 2.2.5.1 e a Definição 2.2.8 (que podem ser encontrados em [2] e [3]), todos os resultados são originais do autor deste trabalho. No Capítulo 3, as principais referências são [4] e [9]. Por fim, o Capítulo 4 é completamente original deste trabalho e está embasado em tudo que foi construído nos capítulos antecessores.

No Anexo deste trabalho, constam diversas definições e enunciados de resultados da teoria de escalas temporais necessários para o desenvolvimento dos Capítulos 2, 3 e 4. Este material, que serve como pré-requisito para os demais capítulos, desenvolve as noções básicas da teoria de escalas temporais, como, por exemplo, a ideia de Derivada de Hilger e de Integral Hilger para uma escala temporal. A principal referência bibliográfica do Anexo é o Trabalho de Conclusão de Curso [9], o qual trata, com uma abordagem diferente, os principais resultados básicos da teoria de escalas temporais presentes em [2] e [3].

## 2 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE PRIMEIRA ORDEM EM ESCALAS TEMPORAIS

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou simplesmente, as EDOs de primeira ordem [12], constituem uma classe de importantes ferramentas usadas na modelagem de sistemas biológicos. Estamos interessados no estudo de uma classe de equações, ditas equações dinâmicas em escalas temporais, que refletem uma generalização das EDOs agora para o contexto de escalas. Neste estudo, dividiremos estas equações em dois grupos: o grupo formado pelas equações dinâmicas lineares de primeira ordem e o grupo das equações dinâmicas não-lineares de primeira ordem.

Para o primeiro grupo, assim como na teoria clássica de EDOs [12], existe uma caracterização das suas soluções quando estas existem. Entretanto, para o segundo grupo, na maioria das vezes é muito difícil ou até mesmo impossível encontrar soluções explícitas, mas podemos, em alguns casos, garantir a existência de soluções a partir do Teorema de Picard para escalas temporais (analogamente ao que é feito na teoria clássica de EDOs).

Assim, começamos estudando as equações dinâmicas lineares de primeira ordem, vendo o seu caso homogêneo e não-homogêneo, caracterizando suas soluções e algumas propriedades das mesmas. Depois, estudamos a existência e unicidade de soluções para as equações dinâmicas não-lineares de primeira ordem.

Ainda, como o nosso objetivo com estas equações é uma aplicação, trabalhamos diretamente com a noção de problema de Cauchy (ou, problema de valor inicial), uma vez que este é o contexto que surge nas aplicações. Vale ressaltar também que, dado a nossa necessidade futura, ao tratar-mos do modelo SIS, precisamos apenas das noções e resultados das equações dinâmicas lineares ‘na reta’ e das equações dinâmicas não-lineares ‘em  $\mathbb{R}^n$ ’.

É verdade que para construirmos o modelo SIS precisamos apenas tratar de equações dinâmicas não-lineares ‘em  $\mathbb{R}^2$ ’, mas como uma generalização para o  $\mathbb{R}^n$  é imediata, preferimos tratar estas equações de forma mais geral. O mesmo não acontece com as equações dinâmicas lineares. Neste caso, para estas serem tratadas de forma mais geral (ou seja, ‘em  $\mathbb{R}^n$ ’ no lugar de ‘ $\mathbb{R}$ ’), precisamos lançar mão de novos conceitos que não seriam aproveitados neste texto.

Observamos que, como estamos sobretudo interessados em trabalhar com as equações dinâmicas de primeira ordem, daqui em diante iremos nos referir a estas equações apenas como equações dinâmicas. Optamos pela omissão do termo ‘de primeira ordem’ para evitar repetições desnecessárias no texto. As principais referências deste capítulo são [2], [3] e [12].

## 2.1 EQUAÇÕES DINÂMICAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção trabalhamos com os principais resultados sobre equações dinâmicas lineares de primeira ordem na reta. Estes resultados podem ser encontrados em [2] e [3].

### 2.1.1 Equações Dinâmicas Lineares Homogêneas

Na teoria clássica de EDOs, em geral, começamos o estudo pelas EDOs lineares de primeira ordem. Em escalas temporais não faremos diferente. A princípio, gostaríamos de resolver um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} x^\Delta = p(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  está fixo e  $\mathbb{T}$  é uma escala temporal com a sua delta-derivada indicada por  $\Delta$ . Estamos preocupados em garantir a existência e unicidade de soluções  $x$  deste sistema (soluções que podem ser locais ou globais). Também gostaríamos de explicitar estas soluções quando elas existirem.

A seguir estabeleceremos algumas definições e resultados para formalizarmos estas ideias. A primeira definição que se faz necessária diz respeito a uma classe de funções que possui uma propriedade que futuramente será não só útil, mas imprescindível, na solução de um sistema como (2.1).

**Definição 2.1.1.** *Uma função  $p \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  que satisfaz a condição  $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  é dita **regressiva**. O conjunto das funções regressivas é denotamos por  $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{R}(\mathbb{T})$  ou simplesmente  $\mathcal{R}$ .*

Estas funções regressivas têm grande importância para a Definição 2.1.2, onde definimos quem é a função exponencial generalizada. Mais adiante, mostraremos que munido de certa operação, o conjunto  $\mathcal{R}$  torna-se um grupo abeliano.

**Definição 2.1.2.** *Seja  $p \in \mathcal{R}$ . Definimos a **função exponencial generalizada** de  $p$  em  $\mathbb{T}$  por*

$$e_p(t, s) = \exp \left( \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{T} \quad (2.2)$$

em que  $\xi_h$  é a transformação cilíndrica do Teorema A.4.4.

Para evitar confusões, quando por vezes nos referimos a ‘exponencial de uma escala’, queremos nos referir de forma geral a todas as funções exponenciais generalizadas que podem ser definidas para aquela escala, ou seja, todas as funções  $e_p(\cdot, \cdot)$  tais que  $p \in \mathcal{R}$ .

Por outro lado, quando nos referimos a ‘função exponencial de  $p$ ’, estamos nos referindo à função exponencial generalizada de  $p$  em uma escala temporal  $\mathbb{T}$ , em que  $\mathbb{T}$  está dada pelo contexto. Ainda, optamos em tratar as funções  $e_p(\cdot, \cdot)$  por apenas “exponenciais” e não por “exponenciais generalizadas”, para tornar o texto mais fluido. Entretanto, devemos nos atentar que esta nomenclatura é uma abuso de linguagem, uma vez que  $e_p(\cdot, \cdot)$  será a função exponencial apenas se  $p \equiv 1$ ,  $t_0 = 0$  e  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ .

Note a semelhança da definição da função exponencial de  $p$  com a definição de fator integrante de uma EDO linear na teoria clássica que, para o PVI  $x' = p(t)x$ ,  $x_0 = x(s)$ , fica dado por  $\exp(\int_s^t p(\tau)d\tau)$ . De fato, como tratando-se dos reais temos  $\mu(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))d\tau\right) = \exp\left(\int_s^t \xi_0(p(\tau))d\tau\right) = \exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right)$ , uma vez que  $\xi_0(t) = t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Essa identidade nos intui a pensar em uma relação entre o fator integrante e a função exponencial de  $p$ .

No Lema 2.1.3, demonstramos uma propriedade muito importante da função exponencial que será especialmente útil quando mostrarmos que esta função compõe a solução de um sistema como (2.1).

**Lema 2.1.3.** *Se  $p \in \mathcal{R}$ , então para todo  $s, r, t \in \mathbb{T}$  vale  $e_p(t, r) \cdot e_p(r, s) = e_p(t, s)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p \in \mathcal{R}$  e  $r, s, t \in \mathbb{T}$ . Pela Definição 2.1.2, temos

$$\begin{aligned} e_p(t, r) \cdot e_p(r, s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \cdot \exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = e_p(t, s). \quad \square \end{aligned}$$

Antes de falarmos em solução, primeiro vamos formalizar o que queremos dizer com isto. Nas próximas definições esclareceremos algumas ideias acerca do que é um problema de Cauchy (ou, problema de valor inicial) e o que queremos dizer por sua solução.

**Definição 2.1.4.** *Sejam  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$  e  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  o operador avanço de  $\mathbb{T}$ . O sistema de equações*

$$\begin{cases} x^\Delta = f(t, x, x^\sigma) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

*é dito **problema de Cauchy** ou **problema de valor inicial** (abreviadamente, PVI) de primeira ordem.*

Como neste trabalho estamos interessados apenas em problemas de valor inicial em que a EDO envolvida no sistema (2.3) é de primeira ordem, podemos omitir esta informação, passando a nos referir a estes sistemas por apenas PVIs.

Na Definição 2.1.5 esclarecemos o que significa para uma função ser solução de um PVI. Veja que ao falarmos em soluções locais, ou seja, em soluções com domínios em intervalos da escala, precisamos nos atentar ao fato de que não definimos a derivada da solução local para o ‘último’ ponto do intervalo.

**Definição 2.1.5.** *Se  $s, \tau \in \mathbb{T}$ , com  $s \leq t_0 < \tau$ , então  $x : [s, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **solução de (2.3) em  $[s, \tau]_{\mathbb{T}}$**  quando  $x^\Delta(t) = f(t, x(t), x^\sigma(t))$  para todo  $t \in [s, \tau]_{\mathbb{T}}^\kappa$  e  $x(t_0) = x_0$ .*

Observe que na definição acima não devemos ter  $[s, \tau]_{\mathbb{T}}^\kappa = \emptyset$ , pois dessa forma a definição de derivada da solução local  $x$  não estaria bem definida. Ainda, veja que  $[s, \tau]_{\mathbb{T}}^\kappa = \emptyset$  se, e somente se,  $[s, \tau]_{\mathbb{T}} = \{s\}$ .

Uma classe especial de PVI são os PVI lineares. Essa é uma classe de sistemas de equações para as quais conseguimos obter as fórmulas das suas soluções, quando elas existem.

**Definição 2.1.6.** *Se para o PVI (2.3) tivermos  $f$  tal que  $f(t, x, x^\sigma) = f_1(t)x + f_2(t)$  ou  $f(t, x, x^\sigma) = f_1(t)x^\sigma + f_2(t)$ , com  $f_1, f_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , então dizemos que o PVI (2.3) é um **PVI linear de primeira ordem**. Ainda, se  $f_2(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , dizemos que este é um PVI linear homogêneo de primeira ordem, caso contrário, dizemos que este é um PVI linear não-homogêneo de primeira ordem.*

Para a equação  $f(t, x, x^\sigma) = f_1(t)x + f_2(t)x^\sigma + f_3(t)$ , com  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a identidade  $x^\sigma = x + \mu \cdot x^\Delta$ , reduz este PVI ao caso do PVI linear de primeira ordem.

Conforme procedemos anteriormente, omitiremos a terminologia ‘de primeira ordem’ para evitarmos repetições desnecessárias.

No Teorema 2.1.7, resolveremos um caso particular de PVI linear homogêneo. A partir deste resultado poderemos construir a solução de um PVI linear homogêneo geral assim como a solução de um PVI linear não-homogêneo.

**Teorema 2.1.7.** *Sejam  $p \in \mathcal{R}$  e  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Então o PVI dado por*

$$\begin{cases} x^\Delta = p(t)x \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

*possui solução  $x(t) = e_p(t, t_0)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

*Demonstração.* Para mostrarmos que de fato  $x(t) = e_p(t, t_0)$  é solução de (2.4) vamos verificar que  $x^\Delta(t) = p(t)x(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  e  $x(t_0) = 1$ .

A segunda condição é mais fácil de se verificar. Com efeito, note que

$$x(t_0) = e_p(t_0, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = \exp(0) = 1.$$



Para mostrarmos a primeira condição, dividiremos a demonstração em dois casos: quando  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  é discreto à direita e quando  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  é denso à direita.

(i) Seja  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  discreto à direita. Logo  $t < \sigma(t)$  e temos

$$\begin{aligned}
[e_p(t, t_0)]^\Delta &= \frac{e_p(\sigma(t), t_0) - e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{e_p(\sigma(t), t)e_p(t, t_0) - e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \\
&= \frac{e_p(\sigma(t), t) - 1}{\mu(t)} \cdot e_p(t, t_0) \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{\exp\left(\int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) - 1}{\mu(t)} \cdot e_p(t, t_0) \\
&\stackrel{(c)}{=} \frac{e^{\xi_{\mu(t)}(p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} \cdot e_p(t, t_0) \\
&\stackrel{(d)}{=} \xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t))) \cdot e_p(t, t_0) \\
&= p(t)e_p(t, t_0)
\end{aligned}$$

em que (a) é verdadeiro pelo Lema 2.1.3, (b) segue da Definição 2.1.2, (c) é verdadeiro, pois  $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t)f(t)$ , e (d) é verdadeiro uma vez que  $\xi_{\mu(t)}$  é invertível com inversa  $\xi_{\mu(t)}^{-1}$  dada conforme o Teorema A.4.4. Portanto,  $x^\Delta(t) = [e_p(t, t_0)]^\Delta = [e_p(t, t_0)]^\Delta = p(t)e_p(t, t_0) = p(t)x(t)$ .

(ii) Seja  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  denso à direita. Logo  $\sigma(t) = t$ . Vamos mostrar que  $x^\Delta(t) = p(t)x(t)$  através da definição de delta-derivada, ou seja, que dado  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U$  de  $t$  tal que

$$|x(t) - x(s) - p(t)x(t)[t - s]| \leq \varepsilon|t - s|$$

para todo  $s \in U \cap \mathbb{T}$ .

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(s) - p(t)x(t)[t - s]| &= |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)[t - s]| \\
&= |e_p(t, t_0)| \cdot |1 - e_p(s, t) - p(t)(t - s)| \\
&\leq |e_p(t, t_0)| \cdot \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right| + \\
&\quad + |e_p(t, t_0)| \cdot \left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s)\right| \\
&\stackrel{(e)}{=} |e_p(t, t_0)| \cdot \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right| + \\
&\quad + |e_p(t, t_0)| \cdot \left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\Delta\tau\right| (*)
\end{aligned}$$

em que (e) é verdadeira pois  $p(t)(t - s) = \xi_0(p(t))(t - s) = \int_s^t \xi_0(p(t)) \Delta\tau$ .

Para seguirmos a demonstração majorando os termos à esquerda de (\*) por  $\varepsilon|t - s|$ , encontramos, para cada termo, uma vizinhança de  $t$  que satisfaz a majoração  $(\varepsilon/2)|t - s|$ , com  $s$  pertencente à vizinhança. Desse modo, considere:

(ii).(i) Seja  $\varepsilon/(2|e_p(t, t_0)|)$ . Note que  $e_p(t, t_0) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $|e_p(t, t_0)| > 0$ . Vamos calcular o seguinte limite, com  $\tau \in \mathbb{T}$  tendendo à  $t$ , supondo  $\tau$  discreto à direita:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow t} |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))| &\stackrel{(f)}{=} \lim_{\tau \rightarrow t} \left| \frac{\text{Log}(1 + \mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)} - p(t) \right| \\
&= \lim_{\tau \rightarrow t} \left| \text{Log}(1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)} - \text{Log}(e^{p(t)}) \right| \\
&= \lim_{\tau \rightarrow t} \left| \text{Log} \left( \frac{(1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)}}{e^{p(t)}} \right) \right| \\
&\stackrel{(g)}{=} \lim_{\tau \rightarrow t} \left| \ln \left( e^{-p(t)} (1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)} \right) \right| \\
&\stackrel{(h)}{=} \left| \ln \left( \lim_{\tau \rightarrow t} e^{-p(t)} (1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)} \right) \right| \\
&= \left| \ln \left( \lim_{\tau \rightarrow t} e^{-p(t)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow t} (1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)} \right) \right| \\
&= \left| \ln \left( e^{-p(t)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow t} (1 + \mu(\tau)p(\tau))^{1/\mu(\tau)} \right) \right| \\
&\stackrel{(i)}{=} \left| \ln \left( e^{-p(t)} \cdot e^{p(t)} \right) \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

em que (f) segue da definição de  $\xi_h$  no Teorema A.4.4, (g) é verdadeira pois  $p$  é uma função real, (h) é verdadeira pois  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo em  $x = 1$ , (i) é verdadeira pois  $p$  é uma função rd-contínua e  $\mu(\tau) \rightarrow 0^+$  quando  $\tau \rightarrow t$ , donde fazendo  $h = \mu(\tau)$  temos  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + hp(\tau))^{1/h} = \lim_{\tau \rightarrow t} e^{p(\tau)} = e^{p(t)}$ .

Observe que se  $\tau$  tende à  $t$  por pontos densos à direita então trivialmente temos  $\lim_{\tau \rightarrow t} |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))| = \lim_{\tau \rightarrow t} |\xi_0(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))| = 0$ .

Portanto, para toda sequência  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$  tal que  $\tau_n \rightarrow t$ , temos

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} |\xi_{\mu(\tau_n)}(p(\tau_n)) - \xi_0(p(t))| = 0,$$

uma vez que: ou podemos decompor esta sequência em duas subsequências complementares formadas pelos  $\tau_n$  densos à direita e os  $\tau_n$  discretos à direita, e para estas duas subsequências os limites  $\lim_{n \in M \subset \mathbb{N}} |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau_n)) - \xi_0(p(\tau_n))|$  convergem para o mesmo valor, ou a partir de certo índice a sequência  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui apenas pontos densos à direita ou apenas pontos discretos à direita.

Logo, podemos escrever que  $\lim_{\tau \rightarrow t} |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))| = 0$ .

Assim, existe uma vizinhança  $U_1$  de  $t$  tal que para todo  $\tau \in U_1 \cap \mathbb{T}$  temos

$$|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(\tau))| \leq \frac{\varepsilon}{2|e_p(t, t_0)|}.$$

Dessa forma, para  $s \in U_1$ , temos

$$|e_p(t, t_0)| \cdot \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t)) \Delta\tau \right| \leq |e_p(t, t_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{2|e_p(t, t_0)|} |t - s| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t - s|. \quad (2.5)$$

(ii).(ii) Seja  $\varepsilon^* = \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|p(t)e_p(t, t_0)|)\}$ . Pela regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z - e^{-z}}{z} = 0$$

então, tomando  $z = \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau$  temos que  $s \rightarrow t$  implica que  $z \rightarrow 0$ . Ainda,  $e^{-z} = \exp\left(-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau\right) = \exp\left(\int_t^s \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau\right) = e_p(s, t)$ . Daí,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - e_p(s, t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau} = 0$$

donde existe uma vizinhança  $U_2$  de  $t$  tal que para todo  $s \in U_2$ ,  $s \neq t$ , temos

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - e_p(s, t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau} \right| \leq \varepsilon^*.$$

Desse modo, tomando  $U = U_1 \cap U_2$ , para todo  $s \in U \cap \mathbb{T}$  temos

$$\begin{aligned} |e_p(t, t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau)) \Delta\tau - e_p(s, t) \right| &\leq |e_p(t, t_0)| \varepsilon^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| \\ &= |e_p(t, t_0)| \varepsilon^* \left( \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - p(t) + p(t) \Delta\tau \right| \right) \\ &\stackrel{(j)}{\leq} |e_p(t, t_0)| \varepsilon^* \left( \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t)) \Delta\tau \right| + \right. \\ &\quad \left. + |p(t)| \cdot |t - s| \right) \\ &\stackrel{(l)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} |t - s| + \varepsilon^* |e_p(t, t_0)| \cdot |p(t)| \cdot |t - s| \\ &\stackrel{(m)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} |t - s| + \frac{\varepsilon}{2} |t - s| \\ &= \varepsilon |t - s| \end{aligned}$$

em que (j) é verdadeiro pois  $p(t) = \xi_0(p(t))$ , (l) é verdadeiro pois  $\varepsilon^* \leq \varepsilon$  e pela desigualdade (2.5) e (m) é verdadeiro pela definição de  $\varepsilon^*$ .

Assim, demonstramos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(s) - p(t)x(t)[t - s]| &= |e_p(t, t_0)| \cdot \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t) \right| + \\
&\quad + |e_p(t, t_0)| \cdot \left| \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t - s) \right| \\
&\leq \varepsilon|t - s| + \varepsilon|t - s| \\
&= 2\varepsilon|t - s|
\end{aligned}$$

para todo  $s \in U \cap \mathbb{T}$ , o que demonstra que  $x^\Delta(t) = p(t)x(t)$  quando  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  é denso à direita.

Portanto,  $x(t) = e_p(t, t_0)$  é solução de (2.4).  $\square$

A partir desta solução, podemos tratar um PVI linear homogêneo mais geral conforme o Corolário 2.1.7.1.

**Corolário 2.1.7.1.** *Sejam  $p \in \mathcal{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Então o PVI dado por*

$$\begin{cases} x^\Delta = p(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

possui solução dada por  $x(t) = x_0 e_p(t, t_0)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

*Demonstração.* Note que,  $x^\Delta(t) = [x_0 e_p(t, t_0)]^\Delta = x_0 [e_p(t, t_0)]^\Delta = x_0 p(t) e_p(t, t_0) = p(t)x(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  e  $x(t_0) = x_0 e_p(t_0, t_0) = x_0$ , donde  $x$  é solução.  $\square$

A dúvida que surge neste momento é se a solução garantida pelo Teorema 2.1.7 é única. Na Proposição 2.1.8 respondemos a essa pergunta.

**Proposição 2.1.8.** *A solução do PVI (2.4) definido no Teorema 2.1.7 é única.*

*Demonstração.* Seja  $y$  uma solução de (2.4). Pela regra de derivação do quociente, temos

$$\begin{aligned}
\left( \frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} \right)^\Delta &= \frac{y^\Delta(t) e_p(t, t_0) - y(t) e_p^\Delta(t, t_0)}{e_p(\sigma(t), t_0) \cdot e_p(t, t_0)} \\
&= \frac{p(t) y(t) e_p(t, t_0) - y(t) p(t) e_p(t, t_0)}{e_p(\sigma(t), t_0) \cdot e_p(t, t_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $y(t)/e_p(t, t_0)$  é constante conforme o Corolário A.2.6.1. Assim,

$$\frac{y(t)}{e_p(t, t_0)} = \frac{y(t_0)}{e_p(t_0, t_0)} = \frac{1}{1} = 1$$

donde  $y = e_p(\cdot, t_0)$ .  $\square$

Algumas propriedades da função exponencial  $e_p(\cdot, \cdot)$  são muito úteis na resolução de alguns cálculos envolvendo equações diferenciais. Em particular, a função exponencial se comporta muito bem quando trabalhamos com o conjunto  $\mathcal{R}$  com as suas operações próprias. Por isso definiremos a seguir a soma e a subtração em  $\mathcal{R}$ , e após essas definições, alguns resultados interessantes envolvendo propriedades da função exponencial.

**Definição 2.1.9.** *Sejam  $p, q \in \mathcal{R}$ , definimos as funções  $\ominus p, p \oplus q$  e  $p \ominus q$  por:*

$$(i) \quad \ominus p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, (\ominus p)(t) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

$$(ii) \quad p \oplus q : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, (p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

$$(iii) \quad p \ominus q : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, (p \ominus q)(t) = (p \oplus (\ominus q))(t) = \frac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)} \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

**Lema 2.1.10.**  *$(\mathcal{R}, \oplus)$  é um grupo abeliano.*

*Demonstração.* Veja [3], página 58. □

**Teorema 2.1.11.** *Sejam  $p, q \in \mathcal{R}$  e  $t, s, r \in \mathbb{T}$ , então:*

$$(i) \quad e_0(t, s) \equiv 1 \text{ e } e_p(t, t) \equiv 1.$$

$$(ii) \quad e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t)) \cdot e_p(t, s).$$

$$(iii) \quad e_{\ominus p}(t, s) = 1/e_p(t, s).$$

$$(iv) \quad e_{\ominus p}(t, s) = e_p(s, t).$$

$$(v) \quad e_p(t, r) \cdot e_p(r, s) = e_p(t, s).$$

$$(vi) \quad e_p(t, s) \cdot e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s).$$

$$(vii) \quad e_p(t, s)/e_q(t, s) = e_{p \ominus q}(t, s).$$

*Demonstração.* (i) Observe que  $y \equiv 1$  é solução do PVI  $y^\Delta = 0y$ ,  $y(s) = 1$ , portanto, pela unicidade de  $y$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$  temos  $e_0(t, s) = y(t) = 1$ . Veja que esse resultado não depende de qual  $s \in \mathbb{T}$  escolhermos. Ainda, da Definição (2.1.2) temos que  $e_p(t, t) = \exp\left(\int_t^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = \exp(0) = 1$ .

(ii) Seja  $y(t) = e_p(t, t_0)$ , então  $y^\sigma(t) = y(t) + \mu(t)y^\Delta(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Assim,  $y^\sigma(t) = e_p(t, t_0) + \mu(t)[p(t)e_p(t, t_0)]$ , donde  $e_p(\sigma(t), t_0) = y^\sigma(t) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, t_0)$ .

(iii) Seja  $y(t) = e_p(t, s)$  e defina  $z = 1/y$ . Veja que  $z$  é diferenciável satisfazendo

$$\begin{aligned} z^\Delta(t) &= \left(\frac{1}{y}\right)^\Delta(t) = \frac{-y^\Delta(t)}{y(t)y^\sigma(t)} = \frac{-p(t)e_p(t, s)}{e_p(t, s)e_p(\sigma(t), s)} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \cdot \frac{1}{e_p(t, s)} = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \cdot z \end{aligned}$$

donde  $z$  satisfaz o PVI  $z^\Delta = \ominus pz$ ,  $z_0 = z(s) = 1/y(s) = 1$ . Como  $\ominus p \in \mathcal{R}$ , então  $z(t) = e_{\ominus p}(t, s) = 1/e_p(t, s)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

(iv) Sabemos pelo item anterior que  $e_{\ominus p}(t, s) = 1/e_p(t, s)$ . Veja que,

$$1/e_p(t, s) = 1/\exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = \exp\left(\int_t^s \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) = e_p(s, t).$$

(v) Esse resultado foi demonstrado no Lema 2.1.3.

(vi) Seja  $y = e_p(t, s) \cdot e_q(t, s)$ . Logo  $y$  é diferenciável satisfazendo

$$\begin{aligned} y^\Delta(t) &= e_p(t, s)[q(t)e_q(t, s)] + e_q(\sigma(t), s)[p(t)e_p(t, s)] \\ &\stackrel{(ii)}{=} e_p(t, s) \cdot e_q(t, s)[q(t) + p(t) + \mu(t)p(t)q(t)] \\ &= (p \oplus q)(t)y(t) \end{aligned}$$

donde  $y$  satisfaz o PVI  $y^\Delta = (p \oplus q)(t)y$ ,  $y(s) = 1$ . Portanto,  $y(t) = e_p(t, s) \cdot e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

(vii) Com efeito,  $e_p(t, s)/e_q(t, s) \stackrel{(iv)}{=} e_p(t, s) \cdot e_{\ominus q}(t, s) \stackrel{(vi)}{=} e_{p \oplus (\ominus q)}(t, s) = e_{p \ominus q}(t, s)$  para todo  $s, t \in \mathbb{T}$ .  $\square$

Assim, cada escala temporal possui uma função exponencial diferente, uma vez que esta depende diretamente da integral da escala em que está definida. Agora, vejamos alguns exemplos de funções exponenciais definidas para diversas escalas. Na Tabela 1, vemos alguns exemplos de funções exponenciais.

**Exemplo 1.** *Sejam  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ,  $h > 0$ , e  $\alpha \in \mathcal{R}$  com  $\alpha$  constante. Então  $e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha h)^{t/h}$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

Seja  $y(t) = (1 + \alpha h)^{t/h}$ . Note que  $y(0) = (1 + \alpha h)^0 = 1$  e

$$\begin{aligned} y^\Delta(t) &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{(1 + \alpha h)^{(t+h)/h} - (1 + \alpha h)^{t/h}}{h} \\ &= (1 + \alpha h)^{t/h} \cdot \frac{1 + \alpha h - 1}{h} = \alpha y(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo, pela unicidade das soluções de (2.4), temos  $e_\alpha(\cdot, 0) = y$ .

Tabela 1 – Funções exponenciais  $e_\alpha(\cdot, t_0)$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$  constante, definidas para diversas escalas temporais.

$\mathbb{T}$	$e_\alpha(t, t_0)$
$\mathbb{R}$	$e^{\alpha(t-t_0)}$
$\mathbb{Z}$	$(1 + \alpha)^{t-t_0}$
$h\mathbb{Z}$	$(1 + \alpha h)^{(t-t_0)/h}$
$q^{\mathbb{N}_0}$	$\prod_{s=0}^{s<t} [1 + (q-1)\alpha s]$ , se $t > t_0$
$\mathbb{N}_0^2$	$\prod_{s=t_0}^{s<t} [1 + \alpha(2\sqrt{s} + 1)]^{1/(2\sqrt{s}+1)}$ , se $t > t_0$
$\{\sum_{k=1}^n 1/k : n \in \mathbb{N}\}$	$\frac{(n + \alpha)^{n-n_0}}{n^{n-n_0}}$ , se $t = \sum_{k=1}^n 1/k$ e $t_0 = \sum_{k=1}^{n_0} 1/k$

**Exemplo 2.** Sejam  $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2$  e a função constante  $1 \in \mathcal{R}$ . Então  $e_1(t, 0) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Seja  $y(t) = 2^{\sqrt{t}}(\sqrt{t})!$ . Para esta escala temporal temos  $\sigma(t) = (\sqrt{t} + 1)^2$  e  $\mu(t) = 2(1 + \sqrt{t})$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Note que  $y(0) = 1$  e

$$y(\sigma(t)) = 2^{\sqrt{\sigma(t)}}(\sqrt{\sigma(t)})! = 2^{1+\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t})! = 2 \cdot 2^{\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t})(\sqrt{t})! = (1 + \mu(t))y(t)$$

donde  $y^\Delta(t) = y(t)$  e, portanto,  $e_1(\cdot, 0) = y$ .

**Exemplo 3.** Sejam  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  e  $p \in \mathcal{R}$ . Então  $e_p(t, 0) = e^{\int_0^t p(\tau) d\tau}$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Com efeito, pela definição de função exponencial temos  $e_p(t, 0) = \exp\left(\int_0^t \xi_0(p(\tau))\Delta\tau\right)$ , como  $\xi_0$  é o operador identidade e a delta-integral de *Riemann* coincide com a integral de *Riemann*, segue que

$$e_p(t, 0) = \exp\left(\int_0^t \xi_0(p(\tau))\Delta\tau\right) = \exp\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) = e^{\int_0^t p(\tau)d\tau}.$$

### 2.1.2 Equações Dinâmicas Lineares Não-Homogêneas

Agora que já estudamos o PVI linear homogêneo, voltamos a nossa atenção para o PVI linear não-homogêneo definido conforme a Definição 2.1.5 para os sistemas

$$\begin{cases} x^\Delta = p(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Analogamente ao que acontece na teoria clássica de EDOs, podemos identificar as soluções dos PVIs acima a partir do método da variação de constantes. Assim, os próximos teoremas explicitam quem são as soluções destes PVIs.

**Teorema 2.1.12.** *Sejam  $p \in \mathcal{R}$ ,  $f \in C_{rd}$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Então o PVI linear não-homogêneo*

$$\begin{cases} x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

possui solução única dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por

$$x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + e_{\ominus p}(t, t_0) \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau. \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Com efeito, primeiro vejamos que  $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definido uma vez que  $p \in \mathcal{R}$ , donde  $e_{\ominus p}(\cdot, t_0)$  existe, e  $f \in C_{rd}$ , donde a integral de  $x$  está bem definida. Vamos mostrar que  $x$  é solução do PVI (2.7).

De fato, temos

$$x(t_0) = x_0 e_{\ominus p}(t_0, t_0) + e_{\ominus p}(t_0, t_0) \int_{t_0}^{t_0} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau = x_0 \cdot 1 + 0 = x_0.$$

Ainda, derivando  $x$  obtemos

$$\begin{aligned} x^\Delta(t) &= x_0 (\ominus p)(t) e_{\ominus p}(t, t_0) + e_{\ominus p}(t, t_0) \cdot e_{\ominus p}(t_0, t) f(t) + \\ &\quad + (\ominus p)(t) e_{\ominus p}(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau \\ &= f(t) + (\ominus p)(t) \cdot \left( x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + e_{\ominus p}(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau \right) \\ &= f(t) + (\ominus p)(t) \cdot \left( x_0 \frac{e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0)}{1 + \mu(t)(\ominus p)(t)} + \frac{e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0)}{1 + \mu(t)(\ominus p)(t)} \cdot \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau \right) \\ &= f(t) - p(t) \left( x_0 e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) + e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \cdot \int_{t_0}^{\sigma(t)} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau \right) \\ &= f(t) - p(t) x^\sigma(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Portanto,  $x$  é solução de (2.7).

Agora suponha que  $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  também é solução de (2.7). Vamos mostrar que  $x = y$ . Com efeito, considere  $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $z = x - y$ . Note que  $z$  é solução do seguinte PVI linear homogêneo



$$\begin{cases} z^\Delta = -p(t)z^\sigma \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

uma vez que  $z^\Delta(t) = (x+y)^\Delta(t) = x^\Delta(t) + y^\Delta(t) = -p(t)x(\sigma(t)) + f(t) + p(t)y(\sigma(t)) - f(t) = -p(t)(x-y)^\sigma(t) = -p(t)z^\sigma(t)$  e  $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) = x_0 - x_0 = 0$ . Ainda, usando a identidade  $z^\sigma = z + \mu z^\Delta$ , podemos reescrever o PVI acima sob a forma

$$\begin{cases} z^\Delta = (\ominus p)(t)z \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

que possui solução única  $z(t) = z_0 e_{\ominus p}(t, t_0) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo  $x = y$ .  $\square$

**Teorema 2.1.13.** *Sejam  $p \in \mathcal{R}$ ,  $f \in C_{\text{rd}}$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Então o PVI linear não-homogêneo*

$$\begin{cases} x^\Delta = p(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

possui solução única dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por

$$x(t) = x_0 e_p(t, t_0) + e_p(t, t_0) \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau. \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Veja que, se  $x$  é solução de (2.9), então  $x^\Delta(t) = p(t)[x^\sigma(t) - \mu(t)x^\Delta(t)] + f(t)$ , donde, como  $p \in \mathcal{R}$ , verificamos que  $x$  satisfaz o PVI:

$$\begin{cases} x^\Delta = -(\ominus p)(t)x^\sigma + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Note que  $f/(1 + \mu p) \in C_{\text{rd}}$  uma vez que  $f, p, \mu \in C_{\text{rd}}$ . Podemos aplicar o Teorema 2.1.12 a este PVI para determinar  $x$ . Desse modo, temos que

$$x(t) = x_0 e_p(t, t_0) + e_p(t, t_0) \int_{t_0}^t e_p(t_0, \tau) \frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} \Delta\tau$$

em que  $\ominus(\ominus p) = p$  e

$$\frac{e_p(t_0, \tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} = \frac{e_p(t_0, \tau)}{e_p(\sigma(\tau), \tau)} = e_p(t_0, \sigma(\tau)).$$

Pela unicidade garantida no Teorema 2.1.12, segue que (2.10) é único.  $\square$

Um dos subgrupos mais importantes de  $\mathcal{R}$  é o formado pelas funções *positivamente regressivas*. Para um elemento deste subgrupo, em particular, garantimos que a sua função exponencial é positiva. Isso nos ajuda, mais adiante, a discutir o sinal das soluções de PVIs dadas (ou parcialmente compostas) por exponenciais. Na definição a seguir caracterizamos melhor quem é este subgrupo.

**Definição 2.1.14.** *As funções  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  rd-contínuas tais que  $1 + \mu(t)p(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  são ditas **positivamente regressivas**. O conjunto formado por todas as funções positivamente regressivas é denotado por  $\mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{R}^+(\mathbb{T})$  ou simplesmente  $\mathcal{R}^+$ .*

**Lema 2.1.15.**  $(\mathcal{R}^+, \oplus)$  é subgrupo de  $(\mathcal{R}, \oplus)$ .

*Demonstração.* Veja [3], página 67.  $\square$

A proposição a seguir nos permite caracterizar bem o sinal da função exponencial para as funções em  $\mathcal{R}^+$ .

**Proposição 2.1.16.** *Se  $p \in \mathcal{R}^+$  e  $t_0 \in \mathbb{T}$ , então  $e_p(t, t_0) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

*Demonstração.* Como  $p \in \mathcal{R}^+$ , então  $1 + \mu(t)p(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Pela Definição 2.1.2, temos que  $e_p(\cdot, t_0)$  é dado por

$$e_p(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \xi_{\mu(s)}(p(s)) \Delta s \right)$$

em que para todo  $s \in \mathbb{T}$  denso à direita temos  $\int_{t_0}^t \xi_0(p(s)) \Delta s = \int_{t_0}^t p(s) \Delta s \in \mathbb{R}$ , e para todo  $s$  discreto à esquerda

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \xi_{\mu(s)}(p(s)) \Delta s &= \int_{t_0}^t \frac{\text{Log}(1 + \mu(s)p(s))}{\mu(s)} \Delta s \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\ln |1 + \mu(s)p(s)|}{\mu(s)} + i \frac{\arg(1 + \mu(s)p(s))}{\mu(s)} \Delta s = \int_{t_0}^t \frac{\ln |1 + \mu(s)p(s)|}{\mu(s)} \Delta s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

em que  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  é a função argumento, donde temos que  $\arg(1 + \mu(s)p(s)) = 0$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ , uma vez que  $p \in \mathcal{R}^+$ .

Portanto,  $e_p(t, t_0) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .  $\square$

**Lema 2.1.17.** *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f, g \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_0^+)$  com  $-g \in \mathcal{R}^+$ , então valem as seguintes desigualdades*

$$(i) \quad 1 + \int_s^t f(\tau) \Delta\tau \leq e_f(t, s) \leq \exp\left(\int_s^t f(\tau) \Delta\tau\right) \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad 1 - \int_s^t g(\tau) \Delta\tau \leq e_{-g}(t, s) \leq \exp\left(-\int_s^t g(\tau) \Delta\tau\right) \quad (2.12)$$

para todo  $s, t \in \mathbb{T}$  com  $s \leq t$ .

*Demonstração.* Veja o Lema 2 da referência [1], página 2. □

Vale ressaltar que todos os objetos da teoria de escalas temporais utilizados neste capítulo e nos capítulos que se seguem estão definidos no Anexo desta dissertação.

## 2.2 EQUAÇÕES DINÂMICAS NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção, desenvolveremos novos resultados sobre equações dinâmicas não-lineares de primeira ordem em  $\mathbb{R}^n$ . Faremos isso pois precisamos destes resultados para, mais tarde, mostrarmos a existência e unicidade da solução do modelo SIS. Os resultados sobre estas equações na literatura principal de escalas temporais concentram-se nas equações não-lineares do tipo  $x^\Delta = f(t, x)$ , enquanto, para o modelo SIS proposto aqui, precisamos de resultados para equações não-lineares do tipo  $x^\Delta = f(t, x, x^\sigma)$ . Dessa forma, para garantirmos uma boa definição para este modelo, precisamos de resultados que nos digam que este, dado por um PVI, possua solução única.

Para a demonstração do Teorema de Picard em escalas temporais, utilizaremos como ferramenta o Lema das Contrações, através do qual garantimos a existência e unicidade de pontos fixos para contrações em espaços métricos completos. Este resultado é bastante útil quando, conforme veremos, conseguirmos “reescrever” um problema de garantir a existência e unicidade de soluções de um PVI em um problema de ‘encontrar pontos fixos’ de um operador entre espaços de funções.

**Lema 2.2.1.** (Lema das Contrações) *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e seja  $F : X \rightarrow X$  uma contração. Então existe um único ponto fixo  $p \in X$  de  $F$ . Ainda mais, para todo  $x \in X$  a sequência  $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge para  $p$ .*

*Demonstração.* Com efeito, como  $F$  é contração, então existe  $k \in [0, 1)$  tal que para todo  $x, y \in X$  temos  $d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ . Primeiro vamos mostrar a existência de um ponto fixo para  $F$ , e depois mostraremos a sua unicidade.

(i) Existência: Seja  $x \in X$ . Podemos construir a sequência  $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  dada por  $F^0(x) = x$  e  $F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Vejamos que  $(F^n(x))$  é uma sequência de Cauchy.

De fato, sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ . Suponha sem perda de generalidade que  $m \geq n$ , donde existe  $r \in \mathbb{N}_0$  tal que  $m = n + r$ . Assim, temos  $d(F^m(x), F^n(x)) = d(F^n(F^r(x)), F^n(x)) \leq k \cdot d(F^{n-1}(F^r(x)), F^{n-1}(x)) \leq \dots \leq k^n \cdot d(F^r(x), x)$ . Por outro lado, utilizando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} d(F^r(x), x) = d(x, F^r(x)) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + d(F^2(x), F^3(x)) + \dots \\ &\quad \dots + d(F^{r-2}(x), F^{r-1}(x)) + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \\ &\leq d(x, F(x)) + k \cdot d(x, F(x)) + k^2 \cdot d(x, F(x)) + \dots \\ &\quad \dots + k^{r-2} \cdot d(x, F(x)) + k^{r-1} \cdot d(x, F(x)) \\ &= d(x, F(x))(1 + k + k^2 + \dots + k^{r-2} + k^{r-1}) \\ &= d(x, F(x)) \frac{k^r}{1 - k}. \end{aligned}$$

Logo,  $d(F^m(x), F^n(x)) \leq k^n \cdot k^r / (1 - k) d(x, F(x)) = k^m / (1 - k) d(x, F(x))$ . Portanto, como  $k \in [0, 1)$ , dado  $\varepsilon > 0$  basta tomarmos  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que  $k^{n_0} / (1 - k) d(x, F(x)) < \varepsilon$ , donde teremos que para todo  $n, m \geq n_0$  vale  $d(F^m(x), F^n(x)) < \varepsilon$ .

Como  $X$  é um espaço métrico completo, então a sequência  $(F^n(x))$ , que mostramos ser sequência de Cauchy, converge para algum elemento de  $X$ . Digamos que  $(F^n(x))$  converge para  $p \in X$ . Vejamos que  $p$  é ponto fixo de  $F$ . De fato, como  $F$  é contração, então  $F$  é contínua. Dessa forma, vale que  $F(p) = F(\lim_{n \in \mathbb{N}_0} F^n(x)) = \lim_{n \in \mathbb{N}_0} F(F^n(x)) = \lim_{n \in \mathbb{N}_0} F^{n+1}(x) = p$ . Portanto,  $p \in X$  é ponto fixo de  $F$ .

(ii) Unicidade: Agora vejamos que  $p \in X$  é o único ponto fixo do operador  $F$ . Com efeito, suponha que existe  $q \in X$  também ponto fixo de  $F$ . Desse modo,  $d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq k \cdot d(p, q)$ , donde  $d(p, q) = 0$  uma vez que  $k \in [0, 1)$ . Logo,  $p = q$ .  $\square$

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $f : I \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $I$  um intervalo fechado de  $\mathbb{T}$  com  $t_0 = \inf I$  e  $\sigma(t_0) \in I$ . Dizemos que  $f$  é*

(i) **rd-contínua**, se para todo  $h \in C_{\text{rd}}(I, U)$  temos que  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $g(t) = f(t, h(t), h(\sigma_I(t)))$  para todo  $t \in I$  é rd-contínua, em que  $\sigma_I : I \rightarrow I$  é o operador avanço de  $I$ .

(ii) *lipschitziana na segunda e terceira variáveis*, se existe  $L \geq 0$  tal que para todo  $x, y, u, v \in U$  e  $t \in I$  vale que

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, v)\| \leq L \cdot \|x - y\| + L \cdot \|u - v\|.$$

Ainda, dizemos que  $L$  é uma constante de Lipschitz da função  $f$ .

(iii) *limitada*, se existe  $M \geq 0$  tal que para todo  $x, y \in U$  e  $t \in I$  temos

$$\|f(t, x, y)\| \leq M.$$

As definições (i), (ii) e (iii) são bem conhecidas na teoria de EDOs, dentro da análise clássica, pela sua utilização no teorema de Picard [12].

Analogamente, estas são as principais hipóteses que compõe o teorema de Picard para o PVI dado pelas *equações dinâmicas* em escalas temporais, sob a forma

$$\begin{cases} x^\Delta = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Para estas, também garantimos solução local através do teorema de Picard [3].

Neste primeiro momento, estamos interessados na resolução local do PVI dado por  $x^\Delta = f(t, x, x^\sigma)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Aqui, mesmo ao supormos que  $f$  satisfaz as definições (i), (ii) e (iii), não conseguimos reproduzir um teorema análogo ao de Picard para este tipo de PVI. Conforme veremos, precisamos adicionar uma nova definição as definições listadas na Definição 2.2.2, de forma a obter um resultado que nos garanta solução local para este PVI.

Especificamente, trabalharemos com duas hipóteses adicionais, trabalhadas de forma independente. Veja, a estratégia do teorema de Picard é transformar o problema dado por um PVI em um problema de garantir a existência de uma função  $\phi$  que é o único ponto fixo de um certo operador. Mostrar a existência desta função a partir das definições (i),(ii) e (iii) segue a ideia geral do teorema de Picard para o PVI (2.13). Todavia, ao trabalharmos com este segundo PVI mais geral, ao encontrarmos esta certa função, temos um pouco mais de trabalho para mostrar que ela é de fato uma solução local do PVI.

Por sinal, nem sempre esta função de fato será solução deste PVI. Aqui um grande problema pode acontecer: O domínio de  $\phi$  pode ser composto por apenas  $t_0$ , caso  $t_0$  seja discreto à direita e o intervalo local garantido pelo teorema de Picard não cubra  $\sigma(t_0)$ . Dessa forma, a expressão  $\phi^\Delta(t_0) = f(t_0, \phi(t_0), \phi(\sigma(t_0)))$  não fica bem definida e, portanto, não podemos dizer que  $\phi$  é solução local deste PVI.

Perceba que este problema não ocorre quando  $t_0 \in \mathbb{T}$  é denso à direita. Note também que se  $t_0$  é discreto à direita, o menor intervalo de  $\mathbb{T}$  que podemos ter como domínio de uma função para que esta seja solução deste PVI é  $\{t_0, \sigma(t_0)\}$ . Dessa forma, as duas hipóteses adicionais que serão trabalhadas a seguir (em duas versões diferentes do Teorema de Picard) tem como objetivo garantir que este intervalo mínimo é obtido.

A primeira hipótese nos garante que o domínio da  $\phi$  é de fato admissível, isto é, este domínio contém propriamente o conjunto unitário  $\{t_0\}$ , a partir da verificação por uma função  $\delta$  construída a partir da  $f$ . A segunda hipótese remonta ao item (iv).(ii) das definições anteriores, através do qual podemos estender o domínio de  $\phi$  para  $\sigma(t_0)$ .

Além disso, seguem aqui alguns comentários relevantes sobre as definições (i) e (ii) estabelecidas anteriormente.

(a) Note que em (i) se  $h \in C_{\text{rd}}(I, U)$  não necessariamente temos  $h^\sigma \in C_{\text{rd}}(I, U)$ , pois se  $I$  é limitado superiormente com  $t^* = \sup I$ , então podemos ter  $\sigma(t^*) \notin I$ . Todavia  $h^{\sigma^i} \in C_{\text{rd}}(I, U)$ , o que torna  $g$  bem definido.

(b) A definição (ii) é uma clara generalização da hipóteses posta sobre  $f$  no PVI (2.13) dentro do teorema de Picard, em que  $f$  é tomada como lipschitziana na segunda variável.

Antes de enunciarmos e provarmos o próximo resultado (que consta com uma demonstração diferente da referência [2]), vejamos que o espaço  $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ , com  $a, b \in \mathbb{T}$  e  $a < b$ , formado pelas funções contínuas  $h : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de fato um espaço normado.

O conjunto  $C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ , com as operações de soma de funções e multiplicação por escalar, definidas pontualmente, formam um espaço vetorial. Assim, tome  $\|\cdot\|_{\infty} : C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  por  $\|h\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t)\|$  para todo  $h \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ . Veja que  $\|h\|_{\infty} \geq 0$  para todo  $h \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ .

Além disso, para todo  $h, w \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

$$(i) \quad \|h\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow h = 0.$$

De fato, se  $h = 0$  então  $\sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t)\| = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} 0 = 0$ . Por outro lado, se  $\|h\|_{\infty} = 0$  então  $\|h(t)\| \leq \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t)\| = 0$ , donde  $h(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ .

$$(ii) \quad \|\lambda h\|_{\infty} = |\lambda| \cdot \|h\|_{\infty}$$

$$\|\lambda h\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|\lambda h(t)\| = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} |\lambda| \cdot \|h(t)\| = |\lambda| \cdot \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t)\| = |\lambda| \cdot \|h\|_{\infty}.$$

$$(iii) \quad \|h + w\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}$$

$$\|h + w\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t) + w(t)\| \leq \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} (\|h(t)\| + \|w(t)\|) \leq \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|h(t)\| + \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} \|w(t)\| = \|h\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}.$$

**Lema 2.2.3.** *Se  $a, b \in \mathbb{T}$ , então  $\sigma([a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa}) \subset [a, b]_{\mathbb{T}}$ .*

*Demonstração.* Com efeito, seja  $\tau \in \sigma([a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa})$ . Logo, existe  $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa}$  tal que  $\tau = \sigma(t)$ . Logo  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$  e  $\sigma(t) \leq b$ , donde  $\sigma([a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa}) \subset (-\infty, b]_{\mathbb{T}}$ . Por outro lado, veja que  $a \leq t \leq \sigma(t) = \tau$ , donde  $\sigma([a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa}) \subset [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ . Portanto,  $\sigma([a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa}) \subset [a, b]_{\mathbb{T}}$ . (Observe que  $[a, b]_{\mathbb{T}}^{\kappa} = [a, b)_{\mathbb{T}}$ ).  $\square$

A utilidade deste lema se dá, no contexto da demonstração do Teorema 2.2.4, em podermos “tratar” a função  $f$  “lipschitziana na segunda e terceira variáveis” como “lipschitziana na segunda variável”.

**Teorema 2.2.4.** (Teorema de Picard I) *Sejam a bola  $B[y_0, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y_0\| \leq b\}$  e o intervalo  $I_a = [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$  tais que  $a, b > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $\mu(t_0) \leq a$ . Ainda, sejam  $f : I_a \times B[y_0, b] \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rd-contínua, lipschitziana na segunda e terceira variáveis com constante de Lipschitz  $L > 0$  e limitada por  $M > 0$ , e a função  $\delta : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\delta(\varepsilon) = \min\{a, b/M, (1 - \varepsilon)/(2L)\}$ . Assim, para o PVI definido por*

$$\begin{cases} y^\Delta = f(t, y, y^\sigma) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

*se existe  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}}$ , então para cada  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$  o PVI (2.14) possui uma única solução local  $y : [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]_{\mathbb{T}} \rightarrow B[y_0, b]$  no intervalo  $I_{\delta(\varepsilon)} = [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]_{\mathbb{T}}$ .*

*Demonstração.* I) Dado  $\varepsilon \in (0, 1)$ , sejam  $\delta(\varepsilon) = \min\{a, b/M, (1 - \varepsilon)/(2L)\} > 0$  e  $I_{\delta(\varepsilon)} \subset I_a$  a escala temporal dada por  $I_{\delta(\varepsilon)} = [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]_{\mathbb{T}}$ .

Observe que para cada  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$  os intervalos  $I_{\delta(\varepsilon)}$  são não unitários. De fato, se  $t_0 \in \mathbb{T}$  é discreto à direita, então temos  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I_{\delta(\varepsilon_0)} \subset I_{\delta(\varepsilon)}$  para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ . Caso  $t_0$  seja denso à direita, então para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , em particular para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ , temos que  $I_{\delta(\varepsilon)}$  contém uma infinidade de pontos de  $\mathbb{T}$  à direita de  $t_0$ , uma vez que  $t_0 \in I_{\delta(\varepsilon)}$ .

Logo, a noção de integral faz sentido para as escalas temporais  $I_{\delta(\varepsilon)}$ , com  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ .

Assim, seja  $(C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b]), \|\cdot\|_\infty)$  o espaço métrico completo formado pelas funções contínuas  $h : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow B[y_0, b]$ , munido da métrica  $\|\cdot\|_\infty : C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b]) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por  $\|h\|_\infty = \sup_{t \in I_{\delta(\varepsilon)}} \|h(t)\|$  para todo  $h \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$ .

Para cada  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ , seja o operador  $F_{\delta(\varepsilon)} : C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b]) \rightarrow C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$  dado por

$$F_{\delta(\varepsilon)}[h](t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s), h(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(s))) \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \quad (2.15)$$

para cada  $h \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$  e  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}$ . Note que  $F_{\delta(\varepsilon)}[h] : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow B[y_0, b]$  é a imagem de  $h$  por  $F_{\delta(\varepsilon)}$ . Observe que a integral anterior está definida para a escala temporal  $I_{\delta(\varepsilon)}$ , assim como  $\sigma_{\delta(\varepsilon)}$  representa o operador avanço  $\sigma_{\delta(\varepsilon)} : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow I_{\delta(\varepsilon)}$  da escala temporal  $I_{\delta(\varepsilon)}$ .

II) Vejamos que  $F_{\delta(\varepsilon)}$  está bem definido. De fato, como  $f$  é rd-contínua por hipótese, então para todo  $h \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$  a função  $g = f(\cdot, h, h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}})$  é rd-contínua e, portanto, integrável. Logo, a definição de  $F_{\delta(\varepsilon)}[h]$  dada por (2.15) faz sentido.

Note também que por (2.15) a função  $F_{\delta(\varepsilon)}[h]$  dada pela soma de uma constante com uma integral é diferenciável e, portanto, contínua. Segue então que  $F_{\delta(\varepsilon)}[h] \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, \mathbb{R}^n)$ . Por fim, observe que a imagem de  $F_{\delta(\varepsilon)}[h]$  está contida na bola  $B[y_0, b]$ .

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \|F_{\delta(\varepsilon)}[h](t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, h(s), h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s)) \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, h(s), h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s))\| \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \int_{t_0}^t M \Delta_{\delta(\varepsilon)} s = M(t - t_0) \\ &\leq M\delta(\varepsilon) \leq M \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}$ , em que (a) é verdadeiro pela hipótese de  $f$  ser limitada por  $M > 0$ . Dessa forma,  $F_{\delta(\varepsilon)}[h](t) \in B[y_0, b]$  para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}$ , donde  $F_{\delta(\varepsilon)}[h] \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$ .

III) Agora vamos mostrar que para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$  o operador  $F_{\delta(\varepsilon)}$  admite um único ponto fixo  $z$ , ou seja, existe uma única função  $z \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$  tal que  $F(z) = z$ .

Antes de prosseguirmos, precisaremos da seguinte afirmação.

**Afirmação:** Para todo  $h, w \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$ , temos  $\|h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}} - w^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}\|_{\infty} \leq \|h - w\|_{\infty}$ .

*Demonstração.* Lembre-se que pelo Lema 2.2.3 temos  $\sigma_{\delta(\varepsilon)}(I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa}) \subset I_{\delta(\varepsilon)}$ , assim

$$\begin{aligned} \|h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}} - w^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}\|_{\infty} &:= \sup\{\|h(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(s)) - w(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(s))\| : s \in I_{\delta(\varepsilon)}\} \\ &= \sup\{\|h(\tau) - w(\tau)\| : \tau \in \sigma_{\delta(\varepsilon)}(I_{\delta(\varepsilon)})\} \\ &= \sup\{\|h(\tau) - w(\tau)\| : \tau \in \sigma_{\delta(\varepsilon)}(I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa}) \cup \{\sigma_{\delta(\varepsilon)}(\sup I_{\delta(\varepsilon)})\}\} \\ &= \sup\{\|h(\tau) - w(\tau)\| : \tau \in \sigma_{\delta(\varepsilon)}(I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa}) \cup \{\sup I_{\delta(\varepsilon)}\}\} \\ &\leq \sup\{\|h(\tau) - w(\tau)\| : \tau \in I_{\delta(\varepsilon)} \cup \{\sup I_{\delta(\varepsilon)}\}\} \\ &= \|h - w\|_{\infty}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Para mostrarmos que  $F_{\delta(\varepsilon)}$  admite único ponto fixo, mostraremos que  $F_{\delta(\varepsilon)}$  é contração. Dessa forma, dados  $h, w \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$ , temos



$$\begin{aligned}
\|F_{\delta(\varepsilon)}[h](t) - F_{\delta(\varepsilon)}[w](t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, h(s), h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s)) - f(s, w(s), w^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s)) \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, h(s), h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s)) - f(s, w(s), w^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s))\| \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \\
&\stackrel{(b)}{\leq} \int_{t_0}^t L \cdot \|h(s) - w(s)\| + L \cdot \|h(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(s)) - w(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(s))\| \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \\
&\leq L \int_{t_0}^t \|h - w\|_{\infty} + \|h^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}} - w^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}\|_{\infty} \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \\
&\stackrel{(c)}{\leq} 2L \int_{t_0}^t \|h - w\|_{\infty} \Delta_{\delta(\varepsilon)} s \\
&= 2L \cdot \|h - w\|_{\infty} (t - t_0) \\
&\leq 2L \cdot \|h - w\|_{\infty} \cdot \delta(\varepsilon) \\
&\stackrel{(d)}{\leq} (1 - \varepsilon) \cdot \|h - w\|_{\infty}
\end{aligned}$$

para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}$ , em que (b) é verdadeira pois  $f$  é lipschitziana na segunda e terceira variáveis; (c) é verdadeiro pela afirmação anterior e (d) é verdadeira pois  $\delta(\varepsilon) \leq (1 - \varepsilon)/(2L)$ .

Logo  $\|F_{\delta(\varepsilon)}[h] - F_{\delta(\varepsilon)}[w]\|_{\infty} \leq (1 - \varepsilon) \cdot \|h - w\|_{\infty}$  e, portanto,  $F_{\delta(\varepsilon)}$  é contração para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ .

Assim, segue do Lema 2.2.1 que  $F_{\delta(\varepsilon)}$  admite um único ponto fixo, donde existe um único  $y \in C(I_{\delta(\varepsilon)}, B[y_0, b])$  tal que

$$F_{\delta(\varepsilon)}[y](t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s), y^{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}(s)) \Delta_{\delta(\varepsilon)} = y(t)$$

para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}$ .

IV) Para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$  temos que  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}} \subset I_{\delta(\varepsilon)}$ , donde  $I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa} \neq \emptyset$ . Assim, dado  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$ , vamos mostrar que  $y : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow B[y_0, b]$  é solução única do PVI (2.14) em  $I_{\delta(\varepsilon)}$ . De fato, para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa}$  temos que

$$\begin{aligned}
y^{\Delta}(t) &\stackrel{(e)}{=} y^{\Delta_{\delta(\varepsilon)}}(t) \\
&\stackrel{(f)}{=} f(t, y(t), y(\sigma_{\delta(\varepsilon)}(t))) \\
&= f(t, y(t), y(\sigma(t)))
\end{aligned}$$

em que  $\Delta$  e  $\Delta_{\delta(\varepsilon)}$  representam a derivadas definidas para as escalas temporais  $I_a$  e  $I_{\delta(\varepsilon)}$ , respectivamente. Note que (e) é verdadeiro pois  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}^{\kappa} \subset I_a^{\kappa}$ , em que  $I_{\delta(\varepsilon)}$  e  $I_a$  são

intervalos de  $\mathbb{T}$ , e (f) é verdadeiro pois  $\sigma_{\delta(\varepsilon)}(t) = \sigma(t)$  para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}^\kappa$ . Além disso, note que  $y(t_0) = y_0$ . Portanto,  $y$  é solução local do PVI (2.14) em  $I_{\delta(\varepsilon)}$ .

Por fim, se  $z : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow B[y_0, b]$  é outra solução do PVI, então  $(z - y)^\Delta(t) = 0$  para todo  $t \in I_{\delta(\varepsilon)}^\kappa$ , donde segue pelo Corolário A.2.6.1 que  $(z - y) : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função constante e, portanto, como satisfazem  $z(t_0) = y(t_0) = y_0$ , segue que  $z = y$ .  $\square$

Uma questão que surge imediatamente após este teorema é se conseguimos definir  $y : [t_0, t_0 + \delta(0)]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução local do PVI (2.14) em  $I_{\delta(0)} = [t_0, t_0 + \delta(0)]_{\mathbb{T}}$ . De fato, pela unicidade do ponto fixo que obtemos a partir do Teorema 2.2.4, poderíamos definir  $y : [t_0, t_0 + \delta(0)]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entretanto, para que possamos definir quem seria  $y(t_{\delta(0)})$ , com  $t_{\delta(\varepsilon)} = \sup I_{\delta(\varepsilon)}$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , precisaríamos mostrar que o limite  $\lim_{s \rightarrow t_{\delta(\varepsilon)}^-} y_{\delta(\varepsilon)}(t_{\delta(\varepsilon)})$ , em que  $y_{\delta(\varepsilon)}$  é o ponto fixo de  $F_{\delta(\varepsilon)}$ , existe, mas este nem sempre existe.

A Proposição 2.2.5 reforça o Teorema 2.2.4 nos garantindo quando é possível encontrar  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I_{\delta(\varepsilon_0)}$ . A necessidade de estabelecermos esta hipótese está em garantirmos que a solução local obtida através do Teorema de Picard possua um domínio admissível, ou seja, um domínio  $I \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  tal que  $\{t_0\} \subsetneq I$ .

Veja que, retirando a hipótese sobre a existência de tal  $\varepsilon_0$  no Teorema 2.2.4, poderíamos obter uma solução local  $y : I_{\delta(\varepsilon)} \rightarrow B[y_0, b]$  tal que  $I_{\delta(\varepsilon)} = [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon)]_{\mathbb{T}} = \{t_0\}$ , donde  $I_{\delta(\varepsilon)}^\kappa = \{t_0\}^\kappa = \emptyset$  e, portanto, não poderíamos definir  $y^\Delta : I_{\delta(\varepsilon)}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Na Figura 2.2, vemos o gráfico da solução local do PVI (2.14) garantido pelo Teorema 2.2.4.

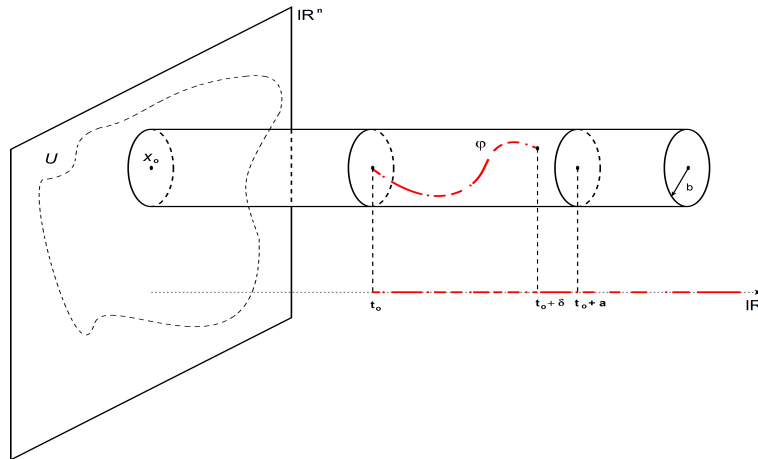


Figura 1 – Em vermelho, vemos sobre a reta real uma escala temporal  $\mathbb{T}$  arbitrária, com  $t_0 = \inf \mathbb{T}$  e  $I_a = [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$ . Acima da reta real, ainda em vermelho, vemos o gráfico da solução única local  $\phi : [t_0, t_0 + \delta]_{\mathbb{T}} \subset I_a \rightarrow \mathbb{R}^n$  de um PVI do tipo  $x^\Delta = f(t, x, x^\sigma)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , garantida pelo Teorema de Picard I. Em preto, vemos  $\mathbb{R}^n$ , o espaço de fase deste PVI, assim como  $U \subset \mathbb{R}^n$  conjunto aberto tal que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{T} \times U \times U$  e  $B[x_0, b] \subset U$ .

**Proposição 2.2.5.** *Nas hipóteses do Teorema 2.2.4, se  $t_0 \in \mathbb{T}$  é denso à direita, então existe  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I_{\delta(\varepsilon_0)}$ . Em particular, para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$  temos  $\{t_0\} \subsetneq I_{\delta(\varepsilon)}$ . Caso  $t_0 \in \mathbb{T}$  seja discreto à direita, então **não** existe  $\varepsilon_0$  com a propriedade anterior se, e somente se, para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$  temos  $\delta(\varepsilon) < \mu(t_0)$ .*

*Demonstração.* Se  $t_0 \in \mathbb{T}$  é denso à direita, então existe uma sequência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$  tal que  $t_0 < t_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \in \mathbb{N}} t_n = t_0$ . Caso  $t_0$  seja discreto à direita, não existe  $\varepsilon_0$  sob as hipóteses do Teorema 2.2.4 se, e só se, para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$  temos  $\{t_0\} = I_{\delta(\varepsilon)}$ , ou seja,  $t_0 + \delta(\varepsilon) < \sigma(t_0) = t_0 + \mu(t_0)$ .  $\square$

Observe que se  $t_0$  é discreto à direita com  $\delta(0) = \mu(t_0)$ , não conseguimos garantir que o operador ‘ $F_{\delta(0)}$ ’, com  $I_{\delta(0)} = [t_0, \sigma(t_0)]_{\mathbb{T}}$ , é contração e, portanto, possui ponto fixo.

A seguir, demonstramos o Teorema de Picard para o PVI (2.13) como consequência do Teorema 2.2.4. Este mesmo resultado pode ser encontrado com outra demonstração na referência [3]

**Corolário 2.2.5.1.** (Teorema de Picard Tradicional) *Sejam a bola  $B[y_0, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y_0\| < b\}$  e o intervalo  $I_a = [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$  tais que  $a, b > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $\mu(t_0) \leq a$ . Ainda, sejam  $f : I_a \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rd-contínua, lipschitziana na segunda variável com constante de Lipschitz  $L > 0$  e limitada por  $M > 0$ , então o PVI (2.13) possui uma única solução local  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no intervalo  $I = [t_0, t_0 + \eta]_{\mathbb{T}}$ , em que  $\eta > 0$  e  $\{t_0\} \subsetneq I \subset I_a$ .*

*Demonstração.* Seja o PVI (2.13), em que  $f$  é rd-contínua, lipschitziana na segunda variável e limitada. Tome  $g : I_a \times B[y_0, b] \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $g(t, x, y) = f(t, x)$  para todo  $x, y \in B[y_0, b]$  e  $t \in I_a$ . É fácil ver que  $g$  é rd-contínua, lipschitziana na segunda e terceira variáveis e limitada.

Caso  $t_0 \in \mathbb{T}$  seja denso à direita, tome  $y : I \rightarrow B[y_0, b]$  única solução do PVI  $y^\Delta = g(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(t_0) = y_0$  em  $I \subset I_a$ , conforme o Teorema 2.2.4. Caso  $t_0 \in \mathbb{T}$  seja discreto à direita, tome  $I = \{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I_a$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $y(t_0) = y_0$  e  $y(\sigma(t_0)) = y_0 + \mu(t_0) \cdot z$ , em que  $z = g(t_0, y_0, y_0 + \mu(t_0) \cdot z) = f(t_0, y_0)$ . Claramente  $y$  é solução única do PVI (2.13) em  $I$ .  $\square$

Uma dificuldade que pode se acontecer no Teorema 2.2.4 está na obtenção explícita da função  $\delta : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Sem esta função, a verificação da existência de um  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ , conforme a Proposição 2.2.5, que satisfaça o Teorema 2.2.4 fica impossibilitada para o caso  $t_0 \in \mathbb{T}$  discreto à direita.

Além deste possível problema, outras hipóteses adicionais podem ser impostas à  $f$  de modo que possamos garantir uma solução local para o PVI (2.14). Dessa forma, no teorema a seguir desenvolvemos uma versão alternativa para o Teorema 2.2.4, em que a existência e unicidade de soluções locais é obtida e não precisamos checar a hipótese sobre

$\delta$ . Aqui, substituiremos a hipótese do Teorema 2.2.4 (sobre a existência de um  $\varepsilon_0$ ) por outra hipótese que nos permite tratar melhor o caso quando  $t_0 \in \mathbb{T}$  é discreto à direita.

**Teorema 2.2.6.** (Teorema de Picard II) *Sejam a bola  $B[y_0, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y_0\| \leq b\}$  e o intervalo  $I_a = [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$  tais que  $a, b > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $\sigma(t_0) \leq t_0 + a$ . Ainda, seja  $f : I_a \times B[y_0, b] \times B[y_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  rd-contínua, lipschitziana na segunda e terceira variáveis e limitada. Se a equação algébrica  $z = f(t_0, x_0, x_0 + \mu(t_0) \cdot z)$  possui única solução  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in B[y_0, b]$ , então o PVI (2.14) possui uma única solução local  $y : I \subset I_a \rightarrow B[y_0, b]$  no intervalo  $I = [t_0, t_0 + \eta]_{\mathbb{T}}$ , em que  $\eta > 0$  e  $\{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I$ .*

*Demonstração.* Com efeito, se  $t_0 \in I_a$  é denso à direita, então pela Proposição 2.2.5 e o Teorema 2.2.4, existe uma solução local do PVI (2.14) em todo intervalo  $I_{\delta(\varepsilon)} \subset I_a$ , com  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Caso  $t_0 \in I_a$  seja discreto à direita, tome  $I = \{t_0, \sigma(t_0)\} \subset I_a$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $y(t_0) = x_0$  e  $y(\sigma(t_0)) = x_0 + \mu(t_0) \cdot z$ , em que  $z$  é a única solução da equação  $z = f(t_0, x_0, x_0 + \mu(t_0) \cdot z)$ . Logo,  $y$  é única solução do PVI (2.14) no intervalo  $I$ .  $\square$

Nos Teoremas 2.2.4 e 2.2.6, assim como no Corolário 2.2.5.1, discutimos algumas hipóteses que nos garantem que o PVI (2.14) possui solução única local, definida para um intervalo  $I \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ . A pergunta que naturalmente nos fazemos agora é sobre quando conseguimos estender a solução local de (2.14).

E, de fato, para que possamos falar em extensão de uma solução local, ou até mesmo, em uma solução maximal, precisamos lançar mão da definição sobre quando uma função  $f$ , no contexto de um PVI  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , é *solúvel na terceira variável*.

**Definição 2.2.7.** *Sejam  $f : I \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  um intervalo fechado de  $\mathbb{T}$  com  $t_0 = \inf I$  e  $\sigma(t_0) \in I$ ,  $x_0 \in U$  e o PVI (2.3). Dizemos que  $f$  é **solúvel na terceira variável** quando as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(i) *Suponha  $t_0 \in I$  discreto à direita. Então  $\sigma(t_0) \in I$  e existe um único  $z \in \mathbb{R}^n$  solução da equação algébrica*

$$z = f(t_0, x_0, x_0 + \mu(t_0) \cdot z),$$

*e este satisfaz  $(x_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in U$ .*

(ii) *Tome  $\tau \in I \setminus \{t_0\}$  discreto à direita. Então  $\sigma(\tau) \in I$  e, supondo que exista  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$  solução única local do PVI (2.3) no intervalo  $[t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ , existe um único  $z \in \mathbb{R}^n$  solução da equação algébrica*

$$z = f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z)$$

*e este satisfaz  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in U$ .*

*Ainda, caso  $t_0 \in I$  seja denso à direita, então (i) é verdadeiro. Caso todo  $\tau \in I \setminus \{t_0\}$  seja denso à direita, então (ii) é verdadeiro.*

A Definição 2.2.2 faz sentido uma vez que, pelos teoremas de Picard estabelecidos neste capítulo, sabemos que existem PVI do tipo  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(t_0) = y_0$  que possuem soluções locais únicas  $\phi : [t_0, t_0 + \delta]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definidas em intervalos fechados da escala. Caso não houvessem estes teoremas de Picard, não poderíamos afirmar que o item (ii) da Definição 2.2.2 é satisfeito por alguma função  $f$ .

A necessidade em se estabelecer a noção de uma função ser solúvel na terceira variável está no nosso interesse em, a partir de um teorema de Picard que nos garante uma solução local  $\phi$  em um intervalo  $[t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$  para um PVI do tipo  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , com  $f|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\Sigma_1 = [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times B[y_0, b] \times B[y_0, b]$ , conseguirmos estender esta solução local para um domínio maior.

Claro, aqui a intuição nos diz que para isto basta tomarmos um novo PVI, agora com o ponto inicial sendo  $\tau \in \mathbb{T}$  e a condição inicial sendo  $y(\tau) = \phi(\tau)$ . E, de fato, se  $\tau$  for denso à direita, pelo Teorema 2.2.4, nós conseguimos estender  $\phi$ . Observe que neste caso a hipótese sobre a existência de  $\varepsilon_0$  no Teorema 2.2.4 é imediatamente satisfeita, conforme podemos verificar através da Proposição 2.2.5.

Contudo, se  $\tau \in \mathbb{T}$  for discreto à direita, não é tão fácil fazer esta extensão. O problema aqui é que, ao tentarmos aplicar o Teorema 2.2.4 à este caso, precisamos fazer a verificação sobre a hipótese da existência de  $\varepsilon_0$  sobre um PVI do tipo  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(\tau) = \phi(\tau)$ , com  $f|_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\Sigma_2 = [\tau, \infty)_{\mathbb{T}} \times B[\phi(\tau), c] \times B[\phi(\tau), c]$ , que não é imediata.

Veja, aqui nós precisaríamos garantir que exista um  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que  $\{\tau, \sigma(\tau)\} \subset [\tau, \tau + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}}$ , em que  $\delta(\varepsilon) = \min\{a, b/M_2, (1 - \varepsilon)/(2L_2)\}$  para todo  $\varepsilon \in [0, 1)$ , com  $M_2 > 0$  uma constante que majore  $\|f\|$  em  $\Sigma_2$  e  $L_2 > 0$  uma constante de Lipschitz de  $f$  em  $\Sigma_2$ .

O grande complicador deste caso está em que, não necessariamente temos que as constantes  $M_1$  e  $M_2$ , além de  $L_1$  e  $L_2$ , definidas para  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , respectivamente, são as mesmas. Dessa forma, é difícil criar uma hipótese geral sobre  $\delta$  (para garantirmos sempre a existência de um  $\varepsilon_0$  conforme o Teorema 2.2.4 que nos permita estender a solução local única que já temos) sem assumirmos que existam  $M > 0$ , que majore  $\|f\|$  em todo o seu domínio, e  $L > 0$ , que torne  $f$  lipschitziana (em todo o seu domínio).

Caso assumíssemos como hipóteses a existências de tais  $M, L > 0$ , nós poderíamos criar um teorema de existência (e unicidade) de soluções maximais, entretanto, ao tratarmos apenas os PVI dados por funções limitadas (consequência da existência de  $M$ ) e lipschitzianas (consequência da existência de  $L$ ), restringimos muito a aplicabilidade deste teorema.

A saída, então, que temos para este problema é definirmos a noção de ser solúvel na terceira variável, que nada mais é do que a verificação algébrica de que podemos estender uma solução única local  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $\tau$  é discreto à direita, também de forma única, para o intervalo  $[t_0, \sigma(\tau)]_{\mathbb{T}}$ .

**Exemplo 4.** (Uma Equação Logística em Escalas Temporais) *Dado  $t_0 \in \mathbb{T}$ , seja o PVI*

$$\begin{cases} x^\Delta = \gamma \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x^\sigma}{\kappa}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

em que  $\kappa : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\kappa(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\gamma \in \mathcal{R}^+$  é tal que  $\gamma(t)/\kappa(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^+$ . Então a função  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x, y) = \gamma(t) \cdot x \cdot (1 - y/\kappa(t))$  para todo  $(t, x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  é solúvel na terceira variável.

Para mostrarmos que  $f$  é solúvel na terceira variável, precisamos mostrar que os itens (i) e (ii) da Definição 2.2.2 são satisfeitos. Dessa forma, para mostrarmos que o item (i) é satisfeito, suponhamos  $t_0 \in \mathbb{T}$  discreto à direita. Assim, considere a equação algébrica

$$z = \gamma(t_0) \cdot x_0 \cdot \left(1 - \frac{x_0 + \mu(t_0) \cdot z}{\kappa(t_0)}\right). \quad (2.17)$$

Primeiro mostraremos que existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação (2.17) e em seguida mostraremos que  $z$  satisfaz a condição  $(x_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ .

I.I) *Existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação algébrica (2.17).*

De fato, podemos manipular a expressão em (2.17) de forma a colocar  $z$  em evidência. Fazendo isto, obtemos

$$z \cdot \left(1 + \mu(t_0) \cdot \frac{\gamma(t_0)}{\kappa(t_0)} \cdot x_0\right) = \gamma(t_0) \cdot x_0 \cdot \left(1 - \frac{x_0}{\kappa(t_0)}\right),$$

donde, como  $\gamma(t_0)/\kappa(t_0) \geq 0$ , então podemos isolar  $z$  e obtermos

$$z = \frac{\gamma(t_0) \cdot x_0 \cdot \left(1 - \frac{x_0}{\kappa(t_0)}\right)}{1 + \mu(t_0) \cdot \frac{\gamma(t_0)}{\kappa(t_0)} \cdot x_0}.$$

Portanto, existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação (2.17).

I.II)  $z$  satisfaz  $(x_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ .

Com efeito, temos

$$x_0 + \mu(t_0) \cdot z = x_0 \cdot \frac{1 + \mu(t_0)\gamma(t_0)}{1 + \mu(t_0) \cdot \frac{\gamma(t_0)}{\kappa(t_0)} \cdot x_0}$$

donde, como  $x_0 > 0$ ,  $\gamma \in \mathcal{R}^+$  e  $\gamma(t_0)/\kappa(t_0) \geq 0$ , então  $(x_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ .

Agora, para mostrarmos que o item (ii) ds Definição 2.2.2 também é satisfeito, tome  $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{t_0\}$  discreto à direita e  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução única do PVI (2.16) em  $[t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ . Assim, considere a equação algébrica dada por

$$z = \gamma(\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z}{\kappa(\tau)}\right). \quad (2.18)$$

Primeiro mostraremos que existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação (2.18) e em seguida mostraremos que  $z$  satisfaz  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ . Observe que neste exemplo estamos considerando, referente à Definição 2.2.2,  $I = \mathbb{T}$  e  $U = \mathbb{R}^+$ .

II.I) Existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação algébrica (2.18).

De fato, manipulando a expressão em (2.18), obtemos

$$z \cdot \left(1 + \mu(\tau) \cdot \frac{\gamma(\tau)}{\kappa(\tau)} \cdot \phi(\tau)\right) = \gamma(\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\phi(\tau)}{\kappa(\tau)}\right),$$

donde, como  $\gamma(\tau)/\kappa(\tau) \geq 0$ , então podemos isolar  $z$  e obtermos

$$z = \frac{\gamma(\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\phi(\tau)}{\kappa(\tau)}\right)}{1 + \mu(\tau) \cdot \frac{\gamma(\tau)}{\kappa(\tau)} \cdot \phi(\tau)}.$$

Portanto, existe um único  $z \in \mathbb{R}$  que resolve a equação (2.18).

II.II)  $z$  satisfaz  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ .

Com efeito, temos

$$\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z = \phi(\tau) \cdot \frac{1 + \mu(\tau)\gamma(\tau)}{1 + \mu(\tau) \cdot \frac{\gamma(\tau)}{\kappa(\tau)} \cdot \phi(\tau)}$$

donde, como  $\phi(\tau) > 0$ ,  $\gamma \in \mathcal{R}^+$  e  $\gamma(\tau)/\kappa(\tau) \geq 0$ , então  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \mathbb{R}^+$ .

Logo,  $f$  é solúvel na terceira variável.

Veja que nem sempre é fácil determinar quando uma função é de fato solúvel na terceira variável. Para as funções lineares, polinomiais de grau 2 e para algumas funções racionais esta verificação pode ser possível, mas para outros tipos de funções, as equações algébricas envolvidas nestas verificações podem se tornar muito complexas.

A função que introduziremos mais adiante para o PVI do modelo SIS é um dos exemplos em que é possível fazer esta verificação. De modo geral, as funções  $f$  que aparecem em modelos epidemiológicos são lineares, polinomiais ou racionais, portanto a hipótese de ser solúvel não se perde em especificidade na maioria destes modelos.

Veja que a ideia de função ser solúvel na terceira variável é necessária para que possamos falar em extensão de soluções locais. Uma forma de verificarmos que uma função  $f$  é solúvel na terceira variável é dado no próximo resultado.

**Definição 2.2.8.**  $\mathbb{T}$  é dita de *granulação limitada* quando  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é limitado.

**Proposição 2.2.9.** *Sejam  $g : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  (na teoria clássica de análise) que leva  $(t, x, y) \in \text{Dom}(g)$  em  $g(t, x, y) \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_y g(w) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador derivada parcial de  $g$  em relação à  $y$  calculado em  $w \in \text{Dom}(g)$ , a função  $f : [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $f := g|_{[t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$  e  $\mathbb{T}$  uma escala temporal de granulação limitada com  $\|\mu\|_{\infty} := \sup_{t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}} \mu(t)$ . Se*

$$\|\mu\|_{\infty} \cdot \sup_{w \in \text{Dom}(g)} \|D_y g(w)\|_o < 1,$$

em que  $\|\cdot\|_o$  representa a norma dos operadores lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , então para o PVI (2.14), segue que  $f$  é solúvel na terceira variável.

*Demonstração.* Dado o PVI (2.14) e a função  $f$  dada conforme o enunciado, para mostrarmos que  $f$  é solúvel na terceira variável precisamos verificar os itens (i) e (ii) da Definição 2.2.2. Aqui, demonstraremos apenas que  $f$  satisfaz as hipóteses do item (ii), uma vez que a verificação para o item (i) segue análoga.

Assim, seja  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução única de (2.14), com  $\tau \in \mathbb{T}$  discreto à direita. Veja que  $\sigma(\tau) \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ . Considere a equação algébrica  $z = f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z)$ . Primeiro, mostraremos que esta equação possui solução única  $z \in \mathbb{R}^n$ . Observe que uma vez que demonstrarmos a existência de  $z$ , automaticamente temos  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \mathbb{R}^n$ .

Dessa forma, para cada  $(\tau, \phi(\tau)) \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n$ , com  $\tau$  discreto à direita, defina  $h_{\tau, \phi(\tau)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $h_{\tau, \phi(\tau)}(v) = g(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot v)$ . Mostremos que  $h_{\tau, \phi(\tau)}$  é uma contração.

Com efeito,  $h_{\tau, \phi(\tau)}$  é uma função de classe  $C^1$  que satisfaz, pela regra da cadeia [8],  $D h_{\tau, \phi(\tau)}(w) = \mu(\tau) \cdot D_y g(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot w)$  para todo  $w \in \mathbb{R}^n$ . Logo, segue do teorema da desigualdade do valor médio [8], que para todo  $u, v \in \mathbb{R}^n$



$$\begin{aligned}
\|h_{\tau,\phi(\tau)}(u) - h_{\tau,\phi(\tau)}(v)\| &\leq \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \|D h_{\tau,\phi(\tau)}(w)\|_o \cdot \|u - v\| \\
&= \mu(\tau) \cdot \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \|D_y g(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot w)\|_o \cdot \|u - v\| \\
&\leq \|\mu\|_\infty \cdot \sup_{s \in \text{Dom}(f)} \|D_y g(s)\|_o \cdot \|u - v\| \\
&= (1 - \varepsilon) \cdot \|u - v\|
\end{aligned}$$

para algum  $\varepsilon \in (0, 1]$ .

Portanto,  $h_{\tau,\phi(\tau)}$  é contração. Desse modo, pelo Lema 2.2.1, segue que existe um único  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $z = h_{\tau,\phi(\tau)}(z) = g(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) = f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z)$ , em que a última identidade é verdadeira pois  $\tau \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ,  $\phi(\tau) \in \mathbb{R}^n$  e  $\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z$ .  $\square$

**Definição 2.2.10.** Dizemos que uma solução  $\phi : I \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  de (2.14) é maximal em  $U$ , se dada outra solução  $\varphi : J \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  de (2.14), temos  $J \subset I$  e  $\phi|_J = \varphi$ .

Por vezes, quando estiver claro no contexto, nos referiremos à soluções maximais em  $U$  por apenas soluções maximais.

No próximo resultado, descrevemos algumas condições suficientes para que o nosso problema de Cauchy tenha solução maximal única definida em um intervalo semi-aberto  $I = [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}}$ .

Note que estamos interessados em soluções do tipo  $\phi : [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma vez que, para as aplicações que iremos desenvolver, a interpretação da escala temporal  $\mathbb{T}$  nas nossas modelagens é referente ao tempo, logo, o que é importante na análise destes modelos é a compreensão da dinâmica que ocorre após um momento inicial (demarcado pelo tempo inicial  $t_0$ ). Assim, ao definirmos solução maximal, na verdade definimos o que é uma solução maximal com domínio no raio  $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ .

**Teorema 2.2.11.** (Existência e Unicidade de Soluções Maximais) *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto tal que  $y_0 \in U$ ,  $\mathbb{T}$  uma escala temporal com  $t_0 = \inf \mathbb{T}$  e o PVI (2.14) em que  $f : \mathbb{T} \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função solúvel na terceira variável tal que para todo  $t \in \mathbb{T}$  e para todo  $x \in U$  existem  $a_t, b_x > 0$ , com  $\mu(t) \leq a_t$ , tais que*

$$f|_{[t, t+a_t]_{\mathbb{T}} \times B[x, b_x] \times B[x, b_x]} : [t, t+a_t]_{\mathbb{T}} \times B[x, b_x] \times B[x, b_x] \subset \mathbb{T} \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*é rd-contínua, limitada e lipschitziana na segunda e terceira variáveis. Então o PVI (2.14) possui uma única solução  $y : [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  maximal em  $U$ , em que  $\omega_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que o PVI (2.14) possui uma única solução maximal em  $U$   $\psi : [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\omega_+ < \infty$  ou  $\omega_+ = \infty$ .

## I) Existência da solução maximal

Tome  $I = \cup_{\phi \in \Sigma} \text{Dom}(\phi) \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ , em que  $\Sigma$  é o conjunto de todas as soluções locais únicas  $\phi$  do PVI (2.14) definidas para algum intervalo fechado, não unitário, de  $\mathbb{T}$  e tais que as suas imagens estão contidas em  $U$  (observe que neste caso temos  $\text{Dom}(\phi) = [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ , para algum  $\tau \in \mathbb{T}$ , com  $\tau > t_0$ , e  $\phi([t_0, \tau]_{\mathbb{T}}) \subset U$ ). Verifiquemos que  $\Sigma$  é um conjunto não-vazio.

Com efeito, considere o PVI  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(t_0) = y_0$  (\*). Mostraremos que ele possui solução única local  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\tau \in \mathbb{T}$ , com  $t_0 < \tau$ ,  $\phi([t_0, \tau]_{\mathbb{T}}) \subset U$ .

I.I) Seja  $t_0 \in \mathbb{T}$  denso à direita. Observe que pelas hipóteses sobre a função  $f$ , existem  $a_{t_0}, b_{y_0} > 0$ , com  $\mu(t_0) \leq a_{t_0}$ , tais que

$$f|_{[t_0, t_0 + a_{t_0}]_{\mathbb{T}} \times B_{[y_0, b_{y_0}]} \times B_{[y_0, b_{y_0}]}} \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é rd-contínua, limitada e lipschitziana na segunda e terceira variáveis. Ainda, como  $t_0$  é denso à direita, então existe  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que  $\{t_0\} = \{t_0, \sigma(t_0)\} \subset [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}}$ , com  $\delta : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada conforme o Teorema 2.2.4.

Logo, pelo Teorema 2.2.4, o PVI (\*) possui solução única  $\phi : [t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  em  $[t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}}$ . Note que  $[t_0, t_0 + \delta(\varepsilon_0)]_{\mathbb{T}} = [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$  para algum  $\tau \in \mathbb{T}$ , com  $\tau > t_0$ .

I.II) Seja  $t_0 \in \mathbb{T}$  discreto à direita. Como supomos  $f$  solúvel na terceira variável, então a equação algébrica  $z = f(t_0, y_0, y_0 + \mu(t_0) \cdot z)$  possui uma única solução  $z \in \mathbb{R}^n$  e esta satisfaz  $(y_0 + \mu(t_0) \cdot z) \in U$ . Logo, a função  $\phi : [t_0, \sigma(t_0)]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  dada por  $\phi(t_0) = y_0$  e  $\phi(\sigma(t_0)) = y_0 + \mu(t_0) \cdot z$  é solução única local do PVI (\*).

Assim, existe  $\phi : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  solução única local do PVI (\*) no intervalo  $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ , com  $t_1 \in \mathbb{T}$ ,  $t_0 < t_1$  e  $\phi([t_0, t_1]_{\mathbb{T}}) \subset U$ . Então,  $\phi \in \Sigma$  e, portanto,  $\Sigma \neq \emptyset$ .

II) Defina  $\psi : I \rightarrow U$  definida por  $\psi(t) = \phi(t)$ , em que  $t \in \text{Dom}(\phi)$ , com  $\phi \in \Sigma$ , para todo  $t \in I$ . Observe que  $\psi$  está bem definida uma vez que  $I \subset \mathbb{T}$  é não-vazio (uma vez que  $\Sigma$  é não-vazio) e  $\phi(t) = \varphi(t)$  se  $t \in \text{Dom}(\phi) \cap \text{Dom}(\varphi)$ .

Isso mostra que o valor de  $\psi(t)$  não depende do representante  $\phi \in \Sigma$ , donde  $\psi$  está bem definida.

III) Resta mostrar, agora, que  $\psi$  é solução maximal do PVI (2.14) em  $U$ . De fato, se  $I = [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ , então  $\psi$  é solução maximal. Dessa forma, considere que  $I$  é um intervalo finito de  $\mathbb{T}$  com mínimo em  $t_0$ .

Veja, se  $I$  fosse um intervalo compacto de  $\mathbb{T}$ , então, tomando  $\tau = \max I$  e o PVI  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(\tau) = \psi(\tau)$ , temos que existe uma solução única local  $\phi$  deste PVI definida para algum intervalo compacto (e não-unitário)  $[\tau, \tau + \delta]_{\mathbb{T}}$ . Tomando  $\varphi : [t_0, \tau + \delta]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  dada por  $\varphi(t) = \psi(t)$  para todo  $t \in I$  e  $\varphi(t) = \phi(t)$  para todo  $t \in [\tau, \tau + \delta]_{\mathbb{T}}$ , temos que  $\varphi \in \Sigma$  e, portanto,  $\text{Dom}(\varphi) \subset \text{Dom}(\psi)$ , contradição. Portanto,  $I$  deve ser um intervalo semi-aberto de  $\mathbb{T}$ , com mínimo em  $t_0$ .

Uma vez demonstrado que  $I = [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}}$ , para algum  $\omega_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ , suponhamos, agora, por contradição, que exista  $\Psi : J \rightarrow U$  uma solução do PVI (2.14) tal que  $I = \text{Dom}(\psi) \subsetneq \text{Dom}(\Psi) = J$ , em que  $J$  é um intervalo de  $\mathbb{T}$  com mínimo em  $t_0$ .

Considere  $\omega_+ < \infty$ , pois para  $\omega_+ = \infty$  já temos  $\psi$  maximal. Dessa forma, existe  $s \in J$  tal que  $I = [t_0, s)_{\mathbb{T}}$ . Observe que, pela definição de  $\psi$  a partir de soluções únicas do PVI (2.14), segue que  $\Psi|_{[t_0, s)_{\mathbb{T}}} = \psi$ . Observe, também, que como  $\Psi$  é solução do PVI (2.14), então o limite  $\lim_{t \rightarrow s^-} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow s^-} \psi(t)$  existe e, portanto, tomando o PVI  $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ ,  $y(s) = \psi(s)$ , temos que existe uma solução única local  $\phi$  deste PVI definida para algum intervalo compacto (e não-unitário)  $[s, s + \delta]_{\mathbb{T}}$ . Tomando  $\varphi : [t_0, s + \delta]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$  dada por  $\varphi(t) = \psi(t)$  para todo  $t \in I$  e  $\varphi(t) = \phi(t)$  para todo  $t \in [s, s + \delta]_{\mathbb{T}}$ , temos que  $\varphi \in \Sigma$  e, portanto,  $\text{Dom}(\varphi) \subset \text{Dom}(\psi)$ , contradição.

Portanto, não existe  $s \in J$  tal que  $I = [t_0, s)_{\mathbb{T}}$ , donde  $I = J$  e, portanto,  $\Psi = \psi$ . Logo,  $\psi$  é solução maximal em  $U$  do PVI (2.14).

#### IV) Unicidade da solução maximal

Assim, sejam  $\phi, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluções maximais de (2.14) no intervalo semi-aberto maximal  $I = [t_0, \omega_+)_{\mathbb{T}}$ . Para mostrarmos que estas funções coincidem, tomemos o conjunto  $M = \{t \in I : \phi(t) \neq \varphi(t)\}$  e suponhamos, por contradição, que  $M \neq \emptyset$ . Observe que  $M \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  é limitado inferiormente e não-vazio, portanto tomemos  $t^* = \inf M$ . Dessa forma, veja que

Vamos mostrar que  $t^* \notin M$ .

De fato, para todo  $t \in [t_0, t^*)_{\mathbb{T}}$ , como  $t^* = \inf M$ , então  $t \notin M$ , donde  $\phi(t) = \varphi(t)$ . Assim, se  $t^*$  é denso à esquerda, temos

$$\phi(t^*) = \lim_{s \rightarrow t^{*-}} \phi(s) = \lim_{s \rightarrow t^{*-}} \varphi(s) = \varphi(t^*)$$

uma vez que  $t^* \in I$  e,  $\phi$  e  $\varphi$  por serem soluções de (2.14), são contínuas. Se  $t^*$  é discreto à esquerda, então  $\tau = \rho(t^*)$  é discreto à direita. Observe que  $\tau \notin M$ , donde  $\phi(\tau) = \varphi(\tau)$ . Como  $f$  é solúvel na terceira variável, então a equação

$$z = f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) = f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z)$$

possui única solução  $z \in \mathbb{R}^n$ , com  $z = \phi^\Delta(t) = \varphi^\Delta(t)$ .

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \phi(t^*) &= \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot f(\tau, \phi(\tau), \phi(\sigma(\tau))) \\
 &= \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \\
 &= \varphi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z \\
 &= \varphi(\tau) + \mu(\tau) \cdot f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \\
 &= \varphi(\tau) + \mu(\tau) \cdot f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(\sigma(\tau))) \\
 &= \varphi(t^*).
 \end{aligned}$$

e, portanto,  $t^* \notin M$ .

II) Logo  $\phi(t^*) = \varphi(t^*)$ . Para o PVI  $x^\Delta = f(t, x, x^\sigma)$ ,  $x(t^*) = \phi(t^*) = \varphi(t^*)$  sabemos que existe uma solução  $x$  local única não trivial no intervalo  $[t^*, t^* + \delta]_{\mathbb{T}}$ , para algum  $\delta > 0$ . Logo, temos  $\phi(t) = x(t) = \varphi(t)$  para todo  $t \in [t^*, t^* + \delta]_{\mathbb{T}}$ , o que contradiz a minimalidade de  $t^*$ , já que  $\{t^*\} \subsetneq [t^*, t^* + \delta]_{\mathbb{T}}$ .

Portanto  $M = \emptyset$ , donde  $\phi = \varphi$ .

□

### 3 UM MODELO SIS AUTÔNOMO EM ESCALAS TEMPORAIS

Neste capítulo, desenvolvemos um novo modelo SIS autônomo inspirado em outro modelo SIS presente na referência [4]. Escolhemos trabalhar com esta nova versão do modelo SIS pois, modificando o modelo SIS já existente [4], podemos justificar melhor a interpretação biológica de vários componentes deste modelo.

Um dos modelos matemáticos mais importantes quando falamos em epidemiologia é o modelo SIS, que através de equações diferenciais faz a modelagem da dinâmica de uma população que convive com uma doença. Mais especificamente, o modelo consiste de um PVI de primeira ordem que possui como solução uma função do tempo  $(S, I) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que cada uma das suas componentes,  $S$  e  $I$ , representa uma subpopulação que compõe a população total.

Aqui, convencionamos  $S$  para nos referirmos a subpopulação constituída pelos indivíduos suscetíveis, ou seja, os indivíduos que estão livres da doença e podem se tornar doentes; e  $I$  para a subpopulação constituída pelos indivíduos infectados, ou seja, os indivíduos que estão doentes e podem transmitir a doença.

Quando estamos interessados na modelagem de alguma doença através de equações diferenciais, precisamos compreender bem como se dá a dinâmica daquela doença. Claro, cada doença epidemiológica possui um comportamento diferente, mas nem por isso precisamos de um modelo diferente para cada doença, pois no geral observamos características que nos permitem agrupar várias doenças com um mesmo perfil em um mesmo modelo.

Isso significa que não estamos modelando uma única doença, mas sim um grupo de doenças que possuem uma dinâmica similar. Assim, para estabelecermos quando podemos aplicar o modelo SIS à uma doença, estabeleceremos algumas hipóteses que, se satisfeitas, nos permitem usá-lo.

Em geral, neste modelo estamos interessados em uma doença em que ninguém adquire imunidade permanente. Além disso, esta doença deve ser transmitida de humano para humano, sem a ajuda de vetores como mosquitos, besouros ou outros animais, como ocorre, por exemplo, com a dengue e a doença de Chagas. Consideramos ainda algumas outras hipóteses para este modelo, que serão formalizadas mais a frente, mas podemos adiantar que doenças como a gripe, algumas doenças sexualmente transmissíveis como a gonorreia, sífilis e clamídia, alguns tipos de herpes e alguns tipos de gastroenterite, principalmente causadas por vírus, conforme exemplificaremos em uma aplicação ao final deste capítulo, são exemplos de doenças que se encaixam nesta modelagem.

Enquanto isso, surge a questão de porque fazer a modelagem a partir de equações dinâmicas em escalas temporais e não na teoria clássica de EDOs [12]. Existem vários ganhos transportando-se a modelagem de um PVI da teoria clássica para um PVI em escalas temporais, além da clara generalização.

Cada doença possui, comumente, um perfil sazonal diferente. Por vezes o número de infectados varia muito pouco no tempo, por vezes este número varia bruscamente. Essa sazonalidade fica clara, por exemplo, quando pensamos na gripe que, na passagem do verão para o inverno, o número de infectados aumenta consideravelmente.

Assim, é natural que na modelagem de uma doença nós consideremos o perfil sazonal daquela doença, caso exista, para que escolhamos uma escala temporal adequada ao tipo de variação que se espera nas soluções do modelo. Veja, se o número de infectados por alguma doença varia muito em um curto período de tempo, é justo analisarmos este período com acurácia, ou seja, escolhendo uma escala temporal em que possamos acompanhar o número de infectados a cada curto período de tempo. Caso o número de infectados permaneça aproximadamente constante em certo período, não precisamos tratar este intervalo de tempo com tanta atenção, ou seja, podemos tomar uma escala temporal que o cubra com pontos mais esparsos, uma vez que entendemos bem o comportamento da doença neste período.

Logo, uma das vantagens do uso de equações dinâmicas em modelos epidemiológicos está na escolha de uma escala temporal que ‘otimize’ a nossa análise, isto é, escolhemos a escala temporal que refletem os períodos de tempo essenciais para dinâmica da doença, desconsiderando todo o resto que pouco agrega à análise do modelo. Com isso dizemos que a modelagem feita, por exemplo, sobre  $\mathbb{R}$  de fato pode retratar muito bem a dinâmica de uma doença, mas uma escala temporal  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  pode igualmente fazer também uma boa modelagem. E, ao desconsiderarmos períodos de tempo que consideramos inócuos para a dinâmica, obtemos uma escala de tempo essencial à doença.

De fato, pela teoria de escalas temporais ser relativamente recente, assim como à sua aplicação à modelagem em biomatemática, ainda não existe um método explícito que diga como uma escala temporal deve ser tomada dada uma doença. O que fazemos então, em grande parte, é nos basearmos na bibliografia médica sobre uma doença, onde descobrimos como a doença em questão varia com o tempo. Em geral, as doenças epidemiológicas costumam ter um comportamento assintótico, ou seja, quando o número de infectados se estabiliza em certo valor ao passar do tempo como, por exemplo, nos casos de surto de gastroenterite, ou estas doenças possuem um comportamento sazonal, ou seja, periódico, como é o exemplo da gripe.

Além destas vantagens ao utilizarmos a modelagem em equações dinâmicas, fica claro que ao modelarmos usando a teoria de escalas temporais, nós podemos ter uma grande redução do custo computacional dedicado à resolução numérica dos PVI's associados à cada modelo epidemiológico. Pois, ao discretizarmos uma escala temporal  $\mathbb{T}$  que leva em conta apenas os tempos essenciais à dinâmica, evitamos o cálculos desnecessários.

Dessa forma, trabalharemos neste capítulo com um modelo SIS em escalas temporais, modelado a partir de um PVI não-linear de equações dinâmicas. Descreveremos quais hipóteses uma doença e a população que convive com ela devem satisfazer para que o modelo se aplique nesta população. Depois, descreveremos o modelo salientando as motivações e as interpretações de seus componentes para, então, estabelecermos os principais resultados sobre o mesmo.

Abordaremos um modelo SIS formado por equações dinâmicas autônomas [4], que servirá de base sobre a qual no próximo capítulo consideraremos uma versão mais geral deste modelo, agora na sua versão não-autônoma.

### 3.1 HIPÓTESES DO MODELO SIS

Ao modelarmos a dinâmica de uma doença a partir do modelo SIS, assumimos que esta doença satisfaça algumas hipóteses, de modo que o PVI do modelo reflita todas as principais relações entre suscetíveis e infectados.

**H<sub>1</sub>)** A população total é fechada e constante, ou seja, estamos interessados em uma população que permanece constante ao longo do tempo e que está isolada, isto é, sem fluxos imigratórios ou emigratórios.

**H<sub>2</sub>)** Todos os indivíduos nascem suscetíveis. Isso significa que mulheres grávidas, mesmo que estejam infectadas, não transmitem a doença para os seus filhos durante a gestação, ou seja, não há transmissão vertical do vírus.

**H<sub>3</sub>)** Os indivíduos suscetíveis e infectados estão homogeneamente distribuídos entre a população. Dessa forma, a probabilidade de encontro entre um indivíduo suscetível e um infectado pode ser descrita pela fórmula de probabilidade de eventos aleatórios.

**H<sub>4</sub>)** Um indivíduo suscetível pode tornar-se infectado apenas se, ao encontrar com outro indivíduo no instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$ , este mesmo estará infectado no próximo instante  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ . Ou seja, para alguém suscetível poder se infectar, há duas formas: ou pelo encontro com alguém que está infectado e permanece infectado no próximo instante de tempo, ou pelo encontro com alguém que é considerado suscetível mas torna-se infectado no próximo instante.

**H<sub>5</sub>)** Os indivíduos infectados ou se recuperam, tornando-se novamente suscetíveis, ou morrem de causas naturais.

**H<sub>6</sub>)** A taxa de mortalidade em decorrência exclusiva da doença é nula. Logo, toda morte que acontece nessa população não é causada diretamente pela doença, ocorrendo igualmente entre suscetíveis e infectados.

**H<sub>7</sub>)** Um indivíduo suscetível que se infectou num instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$  torna-se infectado no próximo instante de tempo  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ .

**H<sub>8</sub>)** Um indivíduo infectado que se recuperou da doença no instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$  torna-se suscetível no próximo instante de tempo  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ .

Na hipótese  $H_4$ , dizemos que a doença é transmitida tanto entre indivíduos que estão infectados e permanecerão assim por um tempo, quanto por indivíduos *falsos suscetíveis*, isto é, indivíduos assintomáticos capazes de transmitir o patógeno responsável pela doença.

Podemos exemplificar esta primeira rota de transmissão da hipótese  $H_4$  pensando novamente na gripe. Nos últimos dias da doença, alguém infectado já desenvolveu os anticorpos necessários para combater a gripe. Assim, por mais que o patógeno ainda persista no corpo do indivíduo infectado, o seu sistema imunológico já o refreou. Logo, este indivíduo, por apresentar sintomas e ainda possuir o vírus no seu organismo, ainda é tecnicamente infectado, todavia, pelo controle do seu sistema imunológico que está prestes a extinguir o vírus, faz com que ele não possa mais infectar alguém suscetível. Portanto, este é um infectado que não é capaz de transmitir a doença.

Veja que, se um indivíduo suscetível encontra com este infectado neste instante, então no próximo instante de tempo o indivíduo suscetível permanece suscetível, pois não houve transmissão, e o indivíduo infectado também torna-se suscetível, pois seu sistema imunológico terminou de combater o vírus.

Assim, para que ocorra a transmissão da doença, pedimos que o indivíduo ‘transmissor’ permaneça infectado no próximo instante de tempo, pois dessa forma garantimos que o contato ocorreu entre um indivíduo que ainda não havia combatido completamente a doença e um suscetível, donde poderia haver transmissão.

A segunda rota de transmissão da hipótese  $H_4$  também pode ser exemplificada com a gripe. De fato, um indivíduo suscetível que acabou de entrar em contato com alguém gripado ainda é, tecnicamente, um indivíduo suscetível, por mais que o patógeno responsável pela gripe esteja agora presente no seu organismo. Claramente este indivíduo, pela baixa quantidade de patógeno em seu corpo, é inicialmente assintomático, mas não necessariamente incapaz de transmitir a doença. Por exemplo, se ele adquiriu este patógeno após entrar em contato com algum fluido corporal contaminado de alguém gripado, este mesmo fluido pode ser repassado por esta pessoa recém infectada à alguém suscetível. Naturalmente, no próximo instante de tempo desta dinâmica, o indivíduo recém infectado agora já possui uma maior quantidade de patógenos em seu organismo e passa a apresentar sintomas.

Note que não há conflito entre as hipóteses  $H_4$  e  $H_7$  uma vez que o indivíduo *falso suscetível*, isto é, recentemente infectado, é suscetível no instante  $t \in \mathbb{T}$  quando ocorre a



transmissão e torna-se infectado no próximo instante  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ . Haveria problema caso, a partir da transmissão, este indivíduo não desenvolve a doença.

Ao trabalharmos com a escala  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  a hipótese  $H_4$  se simplifica ao dizer que um indivíduo suscetível se tornará infectado apenas ao encontrar com um indivíduo infectado. Neste caso, como todo ponto de  $\mathbb{R}$  é denso à direita, um indivíduo infectado é sempre capaz de transmitir a doença. Claro, quando consideramos uma escala como  $\mathbb{R}$ , não existe maneira fácil de determinar a partir de quando ao final de uma doença alguém deixa de ser infectado.

Diferente de uma escala temporal formado por pontos isolados onde em  $t \in \mathbb{T}$  um indivíduo é considerado doente e no próximo instante  $\sigma(t) \in \mathbb{T}$  ele é considerado suscetível, em  $\mathbb{R}$  não temos como fazer essa divisão qualitativa binária sem que para algum instante de tempo alguém seja considerado ao mesmo tempo suscetível e infectado. Assim, evitamos problemas na modelagem ao supormos que nestes instantes de tempo densos à direita, a infecção possa ocorrer caso haja o encontro entre suscetível e infectado.

### 3.2 A MODELAGEM EM ESCALAS TEMPORAIS

Ao modelarmos uma doença que se enquadra nas hipóteses do modelo SIS, estamos sobretudo interessados na análise qualitativa das suas soluções. Isto significa que queremos interpretar, a partir das soluções do modelo, como a doença evolui na população total.

Por exemplo, esperamos que as doenças que possuam altas taxas de infecção em relação as suas taxas de recuperação tendam a se manter presentes na população. De fato, no geral estamos dizendo que a cada instante de tempo existem mais pessoas se tornando infectadas do que se recuperando da doença. Logo, esperamos que o número de infectados cresça ou, seria melhor dizer, não decresça ao longo do tempo. Entretanto, apesar da prosperidade da doença, mesmo se o número de infectados atingir o número total da população, com o nascimento de novos indivíduos suscetíveis chegaríamos a um estado de coexistência entre infectados e suscetíveis, mantendo o ciclo da doença indefinidamente.

Por outro lado, para as doenças que possuem baixas taxas de infecção em relação as taxas de recuperação, esperamos que com o passar do tempo a subpopulação de infectados se extinga, uma vez que a cada instante existem em média mais pessoas tornando-se suscetíveis do que infectadas.

Fica evidente então que a análise sobre o comportamento geral das soluções do modelo está intimamente ligado com a quantidade de infectados que persistem na população total. Dessa forma, precisamos saber o que acontece com  $I(t)$ , em que  $I(t)$  é o número total de infectados no instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$ , quando  $t$  tende à infinito, isto é, queremos saber se a doença persiste ou se extingue quando o tempo passa indefinidamente.

Para que faça sentido esta análise, precisamos escolher uma escala temporal (sobre a qual estamos considerando o modelo SIS) seja ilimitada superiormente. Assim, assumimos como hipótese adicional que  $\sup \mathbb{T} = \infty$ . Note que neste caso temos  $\mathbb{T} = \mathbb{T}^\kappa$ . Ainda, como  $\mathbb{T}$  é interpretado como a escala de tempo do modelo e precisamos de um tempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$  para formularmos o PVI do modelo, assumimos que  $\inf \mathbb{T} = t_0$ . Portanto, estamos interessados apenas na dinâmica que acontece para os instantes de tempo  $t \in \mathbb{T} = [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  após o início da dinâmica.

Agora que discutimos as hipóteses do modelo e estabelecemos as principais ideias acerca da modelagem em escalas temporais, precisamos determinar a equação dinâmica de primeira ordem que compõe o PVI do modelo. Para isso, precisamos considerar todas as principais relações que regem as variações nas populações de suscetíveis e infectados.

Dessa forma, como a nossa população total, que denotaremos por  $N$ , é subdividida apenas entre suscetíveis e infectados, precisamos de duas equações: uma que descreva a variação no tempo da quantidade de suscetíveis, dada pela função  $S^\Delta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , e outra que descreva a variação no tempo da quantidade de infectados, dada pela função  $I^\Delta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Veja que devemos ter  $N(t) = S(t) + I(t)$  para todo  $t \in I$ .

Baseados, então, no modelo SIS [4], propomos o seguinte PVI

$$\begin{cases} S^\Delta = -\beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aS + \delta I^\sigma + aK \\ I^\Delta = \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aI - \delta I^\sigma \\ S_0 > 0, \quad I_0 > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $\beta$  e  $\delta$  são, respectivamente, as taxas de transmissão e recuperação da doença,  $a$  é a taxa de mortalidade natural da população e  $aK$  representa a natalidade da população, com  $K = S_0 + I_0$ .

A diferença entre o PVI (3.1) e o PVI do modelo SIS da referência [4] está na fração que surge nos termos  $\beta SI^\sigma / (S^\sigma + I^\sigma)$  e  $-\beta SI^\sigma / (S^\sigma + I^\sigma)$ . Mais adiante, detalhamos o significado deste termo com fração para o modelo, assim como explicamos como este termo remonta às hipóteses que assumimos previamente.

Observe que pela hipótese  $H_5$  temos que as mortes que ocorrem nesta população são por causas naturais, isto é, não são em decorrência específica da doença. Dessa forma, a cada instante de tempo devemos contabilizar um decréscimo (se existir), correspondente aos indivíduos que morreram naquele instante, sobre  $S$  e  $I$ . Naturalmente, quanto maior a população, maior será o número de mortos por unidade de tempo. Portanto, a variação da população  $N^\Delta$  deve ser proporcional a ‘saída’ da quantidade de mortos, ‘saída’ que podemos supor ser proporcional ao número total de indivíduos na população.

Assim, os termos  $-aI$  na segunda equação e  $-aS$  na primeira equação, estão contabilizando o número de indivíduos infectados e suscetíveis, respectivamente, que estão saindo das suas respectivas categorias por conta da mortalidade natural. Observe que a taxa de mortalidade natural recebe como unidade  $T^{-1}$ , onde  $T$  é a unidade de tempo de  $\mathbb{T}$ .

Ainda, esperamos que quanto menor a expectativa de vida desta população, maior será o número de mortos por unidade de tempo. Analogamente, quanto maior a expectativa de vida, menor deverá ser a quantidade de mortos por unidade de tempo. Isso nos induz a pensar que a taxa de mortalidade é inversamente proporcional a expectativa de vida. Logo, interpretamos a taxa de mortalidade  $a$  como  $a = 1/T_m$ , em que  $T_m$  é o tempo médio que um indivíduo leva para morrer.

Pela hipótese  $H_5$  temos que, com a recuperação dos infectados, o número de recuperados  $\delta I^\sigma$  deve decrescer da população de infectados e somar na população de suscetíveis. Ainda, note que  $\delta I^\sigma(t)$  é o número de infectados que se recuperaram no instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$ , e que este número é proporcional a quantidade total de infectados. E, quanto mais infectados, maior deve ser o número de infectados recuperados por unidade de tempo.

Note que  $\delta$ , a taxa de recuperação, recebe como unidade  $T^{-1}$ , em que  $T$  é a unidade de tempo de  $\mathbb{T}$ , e de forma semelhante a interpretação que damos a taxa  $a$ , temos que  $\delta = 1/T_r$ , em que  $T_r$  é o tempo médio que um indivíduo infectado leva para se recuperar da doença. Desse modo, quanto maior o tempo que uma população leva para se recuperar, menor será o número de recuperados por unidade de tempo. Analogamente, quanto menor o tempo de infecção, maior deverá ser o número de recuperados por unidade de tempo.

Da hipótese  $H_3$  temos que, como a população está homoganeamente distribuída entre suscetíveis e infectados, a probabilidade  $P$  de um indivíduo suscetível encontrar um infectado é dada por  $P = I/N$ . Assim, o número de indivíduos suscetíveis que encontraram um infectado é dado por  $S \cdot I/N$ . Observe que pela hipótese  $H_4$  o número  $S(t) \cdot I(t)/N(t)$  não representa o número de suscetíveis que se infectaram, pois não garantimos que este encontro ocorreu com um infectado que permaneceu infectado no próximo instante de tempo  $\sigma(t)$ .

Para corrigirmos este problema, no lugar de considerarmos a probabilidade  $P$ , consideraremos  $P^\sigma = I^\sigma/N^\sigma$ . Veja, a probabilidade de um indivíduo suscetível no tempo  $t$  de encontrar alguém que estará infectado no tempo  $\sigma(t)$  é dado por

$$\tilde{P} = \frac{S-1}{N-1} \cdot \frac{I^\sigma}{N^\sigma-1} + \frac{I}{N-1} \cdot \frac{I^\sigma}{N^\sigma-1}$$

em que  $P_1 = (S-1)/(N-1)$  e  $P_2 = I/(N-1)$  representam, respectivamente, as probabilidades de, escolhido um indivíduo suscetível no tempo  $t \in \mathbb{T}$ , escolhermos outro indivíduo que seja suscetível ou infectado neste mesmo instante; e  $P_3 = I^\sigma/(N^\sigma-1)$

representa a probabilidade de escolhermos um indivíduo no tempo  $\sigma(t)$  que seja infectado.

Observe que  $\tilde{P} \approx P^\sigma$  quando  $N$ , a população total, é grande o suficiente. Deste modo, podemos interpretar  $P^\sigma$  como a probabilidade de um indivíduo suscetível encontrar-se no tempo  $t$  com outro indivíduo que se tornará infectado no próximo instante  $\sigma(t)$ .

Pela hipótese  $H_7$ , isto é o mesmo que dizer que  $P^\sigma$  é a probabilidade de que ocorra a transmissão da doença e, portanto,  $S(t) \cdot I^\sigma(t)/N^\sigma(t)$  representa o número de suscetíveis que expuseram-se ao contágio pela doença no instante  $t \in \mathbb{T}$ .

Ainda, como pela hipótese  $H_1$  a população total permanece constante, então devemos ter  $N(t) = N(\sigma(t))$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . O número de novos indivíduos infectados criados no tempo  $t$  deve ser proporcional ao número de suscetíveis que tiveram contágio com indivíduos que estarão, no próximo instante, infectados. Além disso, o número de novos indivíduos infectados criados no tempo  $t$  também deve ser proporcional a taxa de transmissão da doença, pois, quanto maior a taxa de transmissão, maior é o potencial da doença em se espalhar pela população. Assim, como a população permanece constante no tempo, a probabilidade  $P^\sigma$  se reduz a forma  $P^\sigma = S \cdot I^\sigma/N_0$ , em que  $N_0 = S_0 + I_0$ , e a quantidade de indivíduos infectados criados no tempo  $t$  fica dado por  $\beta P^\sigma = \beta S(t) \cdot I(\sigma(t))/N_0$ .

Observe que a taxa de infecção  $\beta$  também recebe como unidade  $T^{-1}$ , em que  $T$  é a unidade de tempo da escala temporal e, de forma semelhante aos outros parâmetros descritos anteriormente, interpretamos  $\beta$  como  $\beta = 1/T_\beta$ , em que  $T_\beta$  é o tempo médio que um indivíduo suscetível leva para se tornar infectado.

Note que estamos considerando, até então, apenas a mortalidade natural da população. Para que a população total permaneça constante no tempo conforme a hipótese  $H_1$ , devemos ao somar a primeira equação com a segunda equação de (3.1) obter  $N^\Delta(t) = S^\Delta(t) + I^\Delta(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Dessa forma, precisamos considerar uma taxa de natalidade nessa população afim de que o número de nascimentos seja igual ao número de mortes. Como pela hipótese  $H_2$  temos que todos os indivíduos nascem suscetíveis, consideramos o termo  $aK$  na primeira equação como a taxa de natalidade dessa população.

No diagrama a seguir representamos todos os fluxos de indivíduos infectados e suscetíveis considerados neste modelo.

Consideramos para o PVI (3.1) que  $\beta > 0$  e  $\delta, a \geq 0$ . Essas considerações significam que vamos tratar de uma doença em que há de fato contaminação e recuperação na população, uma vez que  $\beta > 0$ . De fato, caso  $\beta = 0$ , então estamos dizendo que a doença não é transmissível, o que é ilógico para qualquer doença epidemiológica, já que a sua permanência numa população depende da existência de contágio entre as pessoas.

Por outro lado, a taxa de recuperação  $\delta$  não precisa ser necessariamente maior que zero, uma vez que podemos considerar uma doença insanável. Ainda, as taxas de

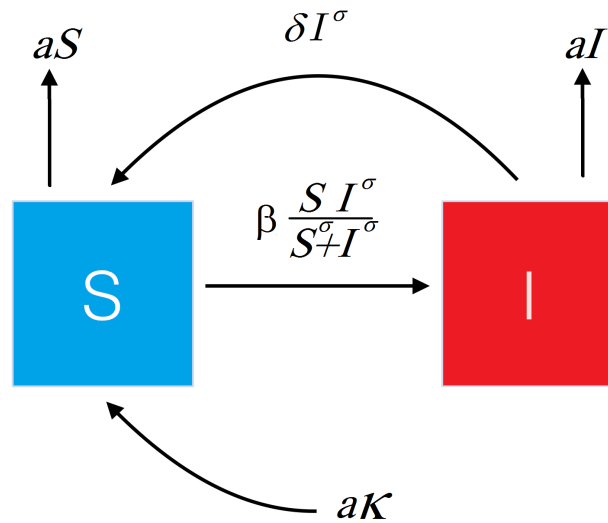


Figura 2 – Diagrama do Modelo SIS. As setas representam o sentido do fluxo de indivíduos entrando ou saindo das subpopulações de suscetíveis ou infectados.

natalidade e mortalidade são tomadas de forma que a população total seja constante, independente se ocorrem novos nascimentos por período de tempo, donde  $a > 0$ , ou não ocorrem, donde  $a = 0$ .

Uma vez que definimos as hipóteses básicas para o modelo e para os seus parâmetros  $\beta, \delta, a$  e discutimos as especificidades da modelagem em escalas temporais, estamos preparados para procurar soluções únicas para o PVI (3.1) e interpretá-las. Claro, antes de procurarmos estas soluções, precisamos garantir que elas existem.

Assim, como trataremos no próximo capítulo sobre um modelo SIS não-autônomo que generaliza o PVI descrito em (3.1), deixaremos as demonstrações que garantem unicidade das soluções deste modelo para um segundo momento. Agora nos concentraremos na análise das soluções de (3.1) à partir do índice de reprodutibilidade basal da doença modelada. Esta análise é apenas possível uma vez que as equações dinâmicas que compõe (3.1) são autônomas e as suas soluções possuem um perfil assintótico.

De fato, para a versão não-autônoma deste modelo não conseguimos fazer este mesmo tipo de análise uma vez que, ao generalizarmos as equações dinâmicas em (3.1), podemos obter uma gama maior de comportamento das soluções para além do assintótico. Além disso, ao trabalharmos com este caso mais específico e já explorado na literatura biomatemática em escalas temporais [4], obtemos resultados igualmente interessantes.

### 3.3 OS PRINCIPAIS RESULTADOS

A seguir, trataremos de alguns resultados que nos permitem encontrar a solução única do PVI (3.1). Começaremos tratando de um caso específico quando  $I_0 = 0$  e

$S_0 > 0$ . Note que esta condição inicial está fora das condições que propusemos para (3.1), entretanto a sua análise tem alguma relevância biológica para justificar a boa adequação das equações dinâmicas escolhidas no PVI (3.1).

**Teorema 3.3.1.** *O PVI dado pelas equações dinâmicas de (3.1) e a **nova** condição inicial  $S_0 > 0$ ,  $I_0 = 0$  possui solução dada por  $S(t) = S_0$  e  $I(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste resultado será deixada para o Capítulo 4.  $\square$

Como esperado, quando  $I_0 = 0$  não existem doentes espalhados na população, portanto a doença não pode mais ser transmitida, uma vez que ela se mantém através do contágio. No Teorema 3.3.2, tratamos da solução única do PVI (3.1).

**Teorema 3.3.2.** *Se  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta - \beta \neq 0$ , então o PVI (3.1) possui solução única dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por*

$$\begin{cases} I(t) = \frac{\alpha I_0}{e_{(\delta-\beta)\ominus(-a)}(t, t_0) (\alpha + I_0) - I_0} \\ S(t) = S_0 + I_0 - I(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $\alpha := N_0(a + \delta - \beta)/\beta$ . Ainda,  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

*Demonstração.* De fato, segue do Teorema 4.1.1 do Capítulo 4 que o PVI (3.1) possui solução  $(S, I)$  única, definida para todo  $t \in \mathbb{T}$  e estritamente positiva em todo o seu domínio. Note que o Teorema 4.1.1 pede apenas que  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e que  $K$  seja não-decrescente, hipóteses aqui satisfeitas. Usaremos a existência e unicidade desta solução para verificarmos que (3.2) é de fato única solução de (3.1).

Veja, somando as equações de (3.1) e resolvendo o PVI linear para  $N = S + I$  dado por

$$\begin{cases} N^\Delta(t) = a(K - N(t)) \\ N(t_0) = S_0 + I_0 \end{cases}$$

como  $-a \in \mathcal{R}^+$  e  $K \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ , segue do Teorema 2.1.13 que

$$\begin{aligned}
N(t) &= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))aK \Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + aKe_{-a}(t, t_0) \int_{t_0}^t e_{\ominus(-a)}(\sigma(s), t_0) \Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + aKe_{-a}(t, t_0) \int_{t_0}^t e_{\ominus(-a)}(s, t_0) \left(1 + \mu(s) \frac{a}{1 - \mu(s)a}\right) \Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + Ke_{-a}(t, t_0) \int_{t_0}^t e_{\ominus(-a)}(s, t_0) \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + Ke_{-a}(t, t_0) \int_{t_0}^t e_{\ominus(-a)}(s, t_0) \cdot (\ominus(-a)) \Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + Ke_{-a}(t, t_0) e_{\ominus(-a)}(s, t_0) \Big|_{t_0}^t \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + Ke_{-a}(t, t_0)(e_{\ominus(-a)}(t, t_0) - e_{\ominus(-a)}(t_0, t_0)) \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + K - Ke_{\ominus(-a)}(t, t_0) \\
&= S_0 + I_0
\end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $N$  é constante e, portanto,  $S(t) = N_0 - I(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Seja também  $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $u(t) = 1/I(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Veja que  $u$  está bem definida uma vez que  $I(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e que  $u$  é diferenciável.

Tome  $N_0 = S_0 + I_0$ . Derivando  $u$  e substituindo  $I^\Delta$  pela segunda equação de (3.1) e  $S(t) = N_0 - I(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
u^\Delta &= \frac{-I^\Delta}{I.I^\sigma} \\
&= -\frac{1}{I.I^\sigma} \left( \beta(N_0 - I) \frac{I^\sigma}{N_0} - aI - \delta I^\sigma \right) \\
&= -\frac{1}{I.I^\sigma} \left( \beta I^\sigma - \frac{\beta}{N_0} I.I^\sigma - aI - \delta I^\sigma \right) \\
&= a \frac{1}{I^\sigma} + (\delta - \beta) \frac{1}{I} + \frac{\beta}{N_0} \\
&= au^\sigma + (\delta - \beta)u + \frac{\beta}{N_0}
\end{aligned}$$

em que utilizando a identidade  $u^\sigma = u + \mu u^\Delta$ , temos

$$u^\Delta(t) = (a + \delta - \beta)u + \frac{\beta}{N_0} + a\mu(t)u^\Delta(t)$$

donde, como  $-a \in \mathcal{R}^+$ , temos que  $u$  satisfaz o seguinte PVI linear

$$\begin{cases} u^\Delta = \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(t)a}u + \frac{\beta}{N_0(1 - \mu(t)a)} \\ u(t_0) = 1/I_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Tomando  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $p(t) = (a + \delta - \beta)/(1 - \mu(t)a)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , segue que  $p(t) = (\delta - \beta) \ominus (-a)(t)$ . Ainda, como  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ , segue que  $p \in \mathcal{R}^+$ .

Assim, como  $p \in \mathcal{R}^+$  e  $\beta/(N_0(1 - \mu a)) \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ , então  $u$  é dado unicamente para cada  $t \in \mathbb{T}$  por

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{I_0}e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(s)) \frac{\beta}{N_0(1 - \mu(s)a)} \Delta s \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{I_0}e_p(t, t_0) + \frac{\beta}{(a + \delta - \beta)N_0}e_p(t, t_0) \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(s)) \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(s)a} \Delta s \\ &= \frac{1}{I_0}e_p(t, t_0) + \frac{\beta}{(a + \delta - \beta)N_0}e_p(t, t_0) \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(s))p(s) \Delta s \\ &= \frac{1}{I_0}e_p(t, t_0) + \frac{\beta}{(a + \delta - \beta)N_0}e_p(t, t_0) (e_p(t_0, t_0) - e_p(t_0, t)) \\ &= e_p(t, t_0) \left( \frac{1}{I_0} + \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)} \right) - \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que (a) é verdadeiro uma vez que  $a + \delta - \beta \neq 0$ .

Substituindo  $I = 1/u$ , obtemos

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{e_p(t, t_0) \left( \frac{1}{I_0} + \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)} \right) - \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)}} \\ &= \frac{I_0}{e_p(t, t_0) \left( 1 + I_0 \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)} \right) - I_0 \frac{\beta}{N_0(a + \delta - \beta)}} \\ &= \frac{\alpha I_0}{e_p(t, t_0) (\alpha + I_0) - I_0} \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , em que  $\alpha = N_0(a + \delta - \beta)/\beta$ .

Portanto, (3.2) é solução única de (3.1).  $\square$



Pelo resultado obtido em (3.2) podemos perceber pela presença da exponencial da escala  $e_{-a}(\cdot, t_0)$  que o número de infectados nesta população varia de forma assintótica. Mais adiante, verificaremos este comportamento analisando o número de reprodutibilidade basal desta doença.

No próximo capítulo discutiremos qual interpretação podemos extrair das hipóteses sobre  $-a$  e  $\delta - \beta$  serem regressivamente positivas. Vale aqui comentar que estas hipóteses implicam em uma boa definição do modelo. A grosso modo, elas garantem que a informação da dinâmica desta doença que acontece nos intervalos de tempo que ‘desconsideramos’, ou seja, nos intervalos de tempo  $(\tau, \sigma(\tau))$  com  $\tau \in \mathbb{T}$  discreto à direita, não atrapalham a dinâmica a partir de  $\sigma(\tau)$ .

Desse modo, é reforçada a ideia de que podemos fazer a modelagem de uma doença em uma escala temporal com pontos discretos à direita, sem perdermos o comportamento essencial da doença. Esta é a principal preocupação que surge ao desconsiderarmos os intervalos  $(\tau, \sigma(\tau))$ , onde a dinâmica da doença continua a acontecer no mundo real mas não nas equações dinâmicas.

Todavia, a modelagem é possível desde que os pontos discretos à direita escolhidos sejam tomados cuidadosamente, de modo que nos intervalos ‘perdidos’  $(\tau, \sigma(\tau))$  não aconteça nada impactante para o resto da dinâmica. Neste modelo, dizer que os pontos discretos à direita foram cuidadosamente escolhidos significa dizer, através do Teorema 3.3.2, que foram tomados de forma que  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ .

Já a hipótese de que  $a + \delta - \beta \neq 0$  está relacionada diretamente com a obtenção do número de reprodutibilidade basal desta doença. No Teorema 3.5, cobriremos o caso quando  $a + \delta - \beta = 0$ .

**Teorema 3.3.3.** *Se  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta - \beta = 0$ , então (3.1) possui solução única dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por*

$$\begin{cases} I(t) = \frac{\tilde{\alpha} I_0}{\tilde{\alpha} + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s} \\ S(t) = S_0 + I_0 - I(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

em que  $\tilde{\alpha} := a/\beta$ . Ainda,  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

*Demonstração.* Na notação do Teorema 3.3.2, considere novamente  $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada unicamente pela equação (3.4) por

$$u(t) = u_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(s)) \frac{\beta}{N_0(1 - \mu(s)a)} \Delta s$$

em que  $p(t) = (a + \delta - \beta)/(1 - \mu(t)a) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo,

$$u(t) = u_0 e_0(t, t_0) + \frac{\beta}{a.N_0} \int_{t_0}^t e_0(t, \sigma(s)) \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s = \frac{1}{I_0} + \frac{\beta}{a.N_0} \int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $I = 1/u > 0$  fica dado por

$$I(t) = \frac{\tilde{\alpha} I_0}{\tilde{\alpha} + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s}.$$

□

Com estes resultados, mostramos que para toda condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , a solução referente ao PVI (3.1) permanece no conjunto  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Munidos da solução explícita de (3.1), podemos nos perguntar qual comportamento ao longo do tempo sua solução terá. No próximo resultado, estudamos os pontos de equilíbrio de (3.1) em função do seu número de reprodutibilidade basal, comumente denotado por  $R_0$ .

### *O Número de Reprodutibilidade Basal $R_0$*

O número de reprodutibilidade basal é definido como a média do número de novos infectados gerados por um único indivíduo infectado em uma população completamente suscetível (a exceção deste único indivíduo infectado), isto é,  $R_0$  é nada mais do que a média de casos secundários de infecção causados por um único agente. Assim, esse número nos mostra o potencial infeccioso da doença ao quantificarmos quantos novos doentes um único doente pode gerar.

O interessante em se analisar o comportamento das soluções de um modelo epidemiológico a partir do  $R_0$  é que, de antemão, este número condensa o comportamento do número de infectados pelo tempo. Isso acontece pois, para uma doença com  $R_0$  menor do que 1, podemos dizer a partir da definição do  $R_0$  que em média cada infectado transmitirá a doença para menos de uma pessoa suscetível. Ou seja, podemos dizer que alguns infectados podem transmitir a doença para mais de uma pessoa suscetível, mas no geral a maioria dos infectados não passará a doença adiante. Isso nos mostra que o número de novos infectados deve ser decrescente no tempo, pois para cada instante de tempo o número de novos infectados deverá ser menor que o número de infectados do instante anterior. Assim, para  $R_0 < 1$ , espera-se que a doença não seja próspera na população.

Por outro lado, se  $R_0 > 1$ , podemos dizer que em média cada infectado transmite a doença para mais de uma pessoa suscetível. Logo, o número de novos infectados deve

umentar a cada instante de tempo quando comparado com o número de infectados num instante anterior. Isso mostra que a doença se espalha de forma eficiente e, dependendo da velocidade com que as transmissões acontecem, existe o risco de uma epidemia.

Nos modelos epidemiológicos dentro da teoria clássica de análise existe uma vasta bibliografia sobre o número de reprodutibilidade basal de cada modelo clássico como o SI, SIS ou SIR [13]. Mesmo para modelos novos, existe uma forma analítica de se determinar quem é seu  $R_0$ . Todavia, para os modelos epidemiológicos em escalas temporais ainda não existe tal recurso. Assim, estaremos preocupados aqui em encontrar um número  $R_0$  que satisfaça o que discutimos nos parágrafos anteriores, este número, cuja interpretação no modelo é equivalente à de  $R_0$ , será denotado por  $P_0$ .

Na Definição 3.3.4, descrevemos uma definição que será utilizada no Teorema 3.3.5.

**Definição 3.3.4.** *Seja uma equação dinâmica de primeira ordem da forma  $x^\Delta = f(x, x^\sigma)$ , em que  $f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x^* \in U$  é um ponto de equilíbrio desta equação dinâmica quando  $f(x^*, x^*) = 0$ .*

Observe que a noção de ponto de equilíbrio para as equações dinâmicas está bem definido apenas para as equações dinâmicas autônomas.

**Teorema 3.3.5.** *Seja  $\mathbb{T}$  uma escala temporal de granulação limitada,  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta - \beta \neq 0$ . Tomando  $P_0 = 1 - \alpha/N_0$ , com  $\alpha$  dado como no Teorema 3.3.2, temos*

(i) *Se  $P_0 < 1$ , então  $x_1 = (S_0, 0)$  é assintoticamente estável para todas as soluções de (3.1) com condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

(ii) *Se  $P_0 > 1$ , então  $x_2 = \left( (S_0 + I_0) \frac{a + \delta}{\beta}, (S_0 + I_0) \frac{\beta - a - \delta}{\beta} \right)$  é assintoticamente estável para todas as soluções de (3.1) com condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

em que  $x_1$  e  $x_2$  são os únicos pontos de equilíbrio de (3.1) obtidos resolvendo-se o sistema homogêneo associado à (3.1).

*Demonstração.* Para simplificarmos a notação, considere  $N_0 = I_0 + S_0$ . Primeiro vejamos que  $x_1 = (S_0, I_0)$  e  $x_2 = (N_0(a + \delta)/\beta, N_0(\beta - a - \delta)/\beta)$  são pontos de equilíbrio de (3.1). Com efeito, substituindo  $x_1$  no PVI do modelo SIS, obtemos

$$\begin{cases} S^\Delta = -\beta \frac{S_0 \cdot 0}{N_0} - a \cdot S_0 + \delta \cdot 0 + aK = 0 \\ I^\Delta = \beta \frac{S_0 \cdot 0}{N_0} - a \cdot 0 - \delta \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

em que  $-a.S_0 + aK = -a.S_0 + a(S_0 + 0) = 0$ . Portanto,  $x_1$  é ponto de equilíbrio de (3.1).

Substituindo  $x_2 = (N_0(a + \delta)/\beta, N_0(\beta - a - \delta)/\beta) = (S^*, I^*)$ , obtemos

$$\begin{cases} S^\Delta = -\frac{\beta}{N_0}S^*I^* - aS^* + \delta I^* + aK = 0 \\ I^\Delta = \frac{\beta}{N_0}S^*I^* - aI^* - \delta I^* = I^* \left( \frac{\beta}{N_0}S^* - a - \delta \right) = 0 \end{cases}$$

donde, pela segunda equação, como  $I_0 > 0$ , então  $I^* \neq 0$ , e, portanto,  $S^* = N_0(a + \delta)/\beta$ . Substituindo  $S^*$  na primeira equação, ou igualando  $S^* + I^* = N_0$ , obtemos  $I^* = N_0(\beta - a - \delta)/\beta$ . Portanto,  $x_2$  é ponto de equilíbrio de (3.1).

(i) Seja  $P_0 < 1$ . Vamos mostrar que  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $p(t) = (a + \delta - \beta)/(1 - \mu(t)a) < 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Com efeito, como  $a + \delta - \beta \neq 0$  e  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ , então segue pelo Teorema 3.3.2 que  $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado para todo  $t \in \mathbb{T}$  por

$$I(t) = \frac{\alpha I_0}{e_{(\delta-\beta)\ominus(-a)}(t, t_0)(\alpha + I_0) - I_0}$$

em que  $\alpha = N_0(a + \delta - \beta)/\beta$ .

Como  $P_0 = 1 - \alpha/N_0$  e  $P_0 < 1$ , então  $\alpha/N_0 > 0$ , e como  $N_0 = S_0 + I_0 > 0$ , segue que  $\alpha > 0$ . Pelo Lema 2.1.17, segue que para todo  $t \in \mathbb{T}$  vale a desigualdade

$$1 + \int_{t_0}^t \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(s)a} \Delta s \leq e_{(\delta-\beta)\ominus(-a)}(t, t_0) \equiv e_p(t, t_0).$$

Como  $a \geq 0$  e  $\mu(s) \geq 0$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ , segue que  $1 \geq 1 - \mu(s)a$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ . Logo, como  $-a \in \mathcal{R}^+$ , donde  $1 - \mu(s)a > 0$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ , segue que  $1/(1 - \mu(s)a) \geq 1$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ . Assim,

$$e_p(t, t_0) \geq 1 + \int_{t_0}^t \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(s)a} \Delta s \geq 1 + (a + \delta - \beta) \int_{t_0}^t 1 \Delta s = 1 + (a + \delta - \beta)(t - t_0)$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Portanto, como  $a + \delta - \beta = \alpha\beta/N_0 > 0$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t, t_0) = +\infty$ . Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha I_0}{e_p(t, t_0)(\alpha + I_0) - I_0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $S(t) + I(t) = S_0 + I_0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0 + I_0$ . Observe que, caso  $I_0 = 0$ , ainda temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0 + I_0$ . Então para toda condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$  temos que  $(S, I)(t)$  converge para  $x_1$ .

(ii) Seja  $P_0 > 1$ . Como  $P_0 = 1 - \alpha/N_0$ , com  $N_0 > 0$ , segue que  $\alpha < 0$ . Como  $\alpha = N_0(a + \delta - \beta)/\beta$ , com  $\beta > 0$ , segue que  $a + \delta - \beta < 0$  e  $p(s) < 0$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ .

Pelo Lema 2.1.17, para todo  $t \in \mathbb{T}$  vale a desigualdade

$$e_p(t, t_0) = e_{(\delta-\beta)\ominus(-a)}(t, t_0) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(s)a} \Delta s\right).$$

Como  $\mathbb{T}$  é uma escala de granulação limitada, tome  $\|\mu\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} \mu(t)$ , donde  $\mu(s) \leq \|\mu\|_\infty$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ . Daí, temos  $1 - \|\mu\|_\infty a \leq 1 - \mu(s)a$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ .

Ainda, por hipótese temos que  $1 - \|\mu\|_\infty a > 0$ , donde  $1/(1 - \mu(s)a) \leq 1/(1 - \|\mu\|_\infty a)$  para todo  $s \in \mathbb{T}$  e, portanto,

$$\begin{aligned} e_p(t, t_0) &\leq \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu(s)a} \Delta s\right) \leq \exp\left((a + \delta - \beta) \int_{t_0}^t \frac{1}{1 - \|\mu\|_\infty a} \Delta s\right) \\ &= \exp\left(-\left|\frac{a + \delta - \beta}{1 - \|\mu\|_\infty a}\right|(t - t_0)\right) \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Portanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t, t_0) = 0$ . Lembre-se que  $e_p(\cdot, t_0) > 0$ .

Assim, concluimos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha I_0}{e_p(t, t_0)(\alpha + I_0) - I_0} \\ &= \frac{\alpha I_0}{-I_0} \\ &= (S_0 + I_0) \frac{\beta - a - \delta}{\beta} \end{aligned}$$

e ainda,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = N_0 - N_0(\beta - a - \delta)/\beta = N_0(a + \delta)/\beta$ . Logo para toda condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$  temos que  $(S, I)(t)$  converge para  $x_2$ .  $\square$

Observe que a hipótese sobre  $a + \delta - \beta \neq 0$  garante que existe outro ponto de equilíbrio além do trivial  $x_1$ , que representa a população livre da doença. Quando adicionamos esta hipótese, abrimos a possibilidade de que a doença persista nessa população, tendo convergência para um ponto fixo com infectados e suscetíveis coexistindo.

Claro, para que esta coexistência exista, a doença deve ter uma taxa de transmissão maior do que a soma das taxas de recuperação e mortalidade natural da população, caso contrário ou mais pessoas se recuperariam da doença do que seriam infectadas, donde a doença se erradicaria naturalmente, ou mais pessoas morreriam do que seriam infectadas, donde a doença também se erradicaria naturalmente.

No Teorema 3.3.6, mostraremos que para o caso  $a + \delta = \beta$ , existe apenas um único ponto fixo que é assintoticamente estável.

**Teorema 3.3.6.** *Sejam  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta - \beta = 0$ . Então  $x_1 = (S_0, 0)$ , único ponto de equilíbrio de (3.1), é assintoticamente estável para toda condição inicial  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.3.5 verificamos que de fato  $x_1$  é único ponto de equilíbrio de (3.1). Pelo Teorema 3.3.3 temos que para todo  $t \in \mathbb{T}$  vale que

$$I(t) = \frac{\tilde{\alpha} I_0}{\tilde{\alpha} + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s}.$$

em que  $\tilde{\alpha} = a/\beta$ .

Assim, como  $0 < 1 - \mu(s)a \leq 1$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ , então  $1/(1 - \mu(s)a) \geq 1$  para todo  $s \in \mathbb{T}$ . Dessa forma,

$$\int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s \geq a \int_{t_0}^t 1 \Delta s = a(t - t_0)$$

donde  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t a/(1 - \mu(s)a) \Delta s = +\infty$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \frac{\tilde{\alpha} I_0}{\tilde{\alpha} + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{a}{1 - \mu(s)a} \Delta s} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $S(t) + I(t) = S_0 + I_0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_0 + I_0$ . Portanto  $(S, I)(t)$  converge para o ponto de equilíbrio  $x_1$ .  $\square$

Em geral, quando estamos analisando o comportamento à longo prazo de uma doença através do seu índice de reprodutibilidade basal, não conseguimos determinar o que acontecerá com a população modelada quando  $R_0 = 1$ . Isso pois, se em média cada pessoa infectada consegue infectar apenas outra pessoa, qualquer flutuação nesta média, para cima ou para baixo, mudaria completamente a interpretação do que acontece com esta dinâmica ao longo do tempo.

Aqui, quando olhamos para a hipótese  $a + \delta = \beta$ , nada mais do que estamos analisando este caso patológico. Neste modelo, se a taxa de transmissão é tão eficiente quanto as taxas de recuperação e mortalidades juntas, a tendência ainda é de que a doença se extinga com o tempo.

Na Seção 3.4, trataremos de uma aplicação do modelo SIS (3.1).

### 3.4 UM MODELO PARA O SURTO DE GASTROENTERITE EM ITATIAIA

No ano de 2002, no município de Itatiaia no estado do Rio de Janeiro (veja a Figura 3), ocorreu um surto de gastroenterite aguda devido a infecção causada pelo Astrovírus. Este vírus, que hoje sabe-se abranger ao menos oito tipos diferentes de sorotipos humanos, é comumente implicado em casos de gastroenterite marcadas por sintomas como náusea, vômitos, dor abdominal, febre e diarreia aquosa com duração média entre 2 a 3 dias. Pacientes imunodeprimidos, ou seja, pacientes com o seu sistema imunológico comprometido, podem desenvolver maiores complicações em decorrência destes sintomas.

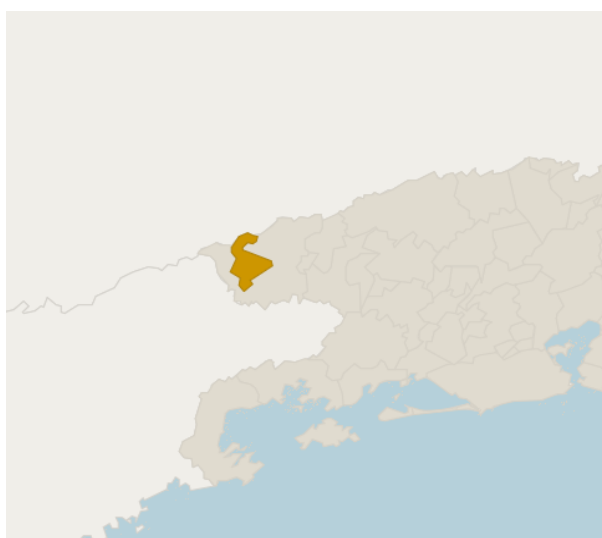


Figura 3 – Em laranja vemos o município de Itatiaia, Rio de Janeiro. Fonte: IBGE.

O surto, que durante 6 dias do mês de agosto registrou mais de 615 casos, foi marcado por um aumento por cerca de 60 vezes o número médio semanal de casos de gastroenterite no ano de 2002 no município (veja a Figura 4). Os principais sintomas relatados foram: (54%) vômito, diarreia aquosa (49%), dor abdominal (23%) e febre (9%). Não houve registro de óbito em decorrência da doença.

A partir deste acontecimento, o Centro Nacional de Epidemiologia, que atualmente recebe o nome de Secretaria de Vigilância à Saúde, foi notificado do surto e então estabeleceu-se, posteriormente, um estudo caso-controle em Itatiaia em que tentou-se confirmar a existência do surto, assim como a provável fonte de infecção e fatores de risco, descrevendo a evolução da doença durante aquele ano, e propondo medidas profiláticas e de controle da infecção.

O município de Itatiaia é abastecido pelo sistema de captação Campo Belo, que recebe água principalmente do manancial do rio Campo Belo. Análises da potabilidade da água desta rede de abastecimento, promovidas pela equipe técnica de saneamento na Funasa/CORE/RJ e colaboradores, demonstraram que a água destinada ao consumo

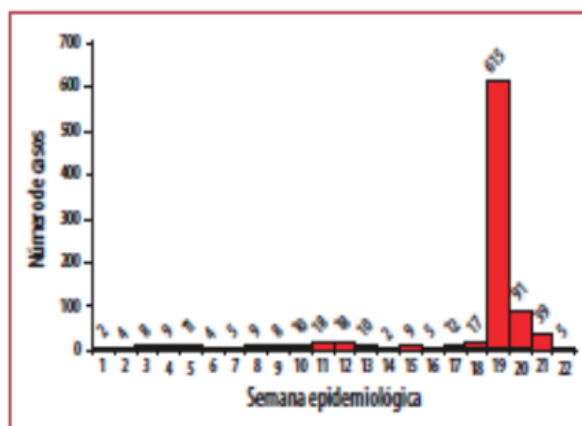


Figura 4 – Gráfico do número de casos reportados de gastroenterite aguda no município de Itatiaia por semana epidemiológica no ano de 2002 entre Abril e Setembro. Fonte: [10]

humano estava fora dos padrões potabilidade. O manancial que abastece o sistema de captação de Campo Belo é protegido por vegetação natural, não é monitorado e provavelmente recebe descarte de esgoto oriundos dos hotéis ao longo do manancial. Além disso, o reservatório recebe provavelmente contaminação por animais silvestres e não mantém-se registro do histórico de limpeza do mesmo, a exceção, conforme foi relatado pelos então gestores do município, pela limpeza que procedeu-se por volta de três dias antes do surto de gastroenterite aguda que ocorreu na décima nona semana epidemiológica do ano de 2002.

Assim, surgiu a hipótese de que o surto foi gerado pela limpeza do reservatório que, como os testes realizados também pelos órgãos: Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (Setesb), Companhia de Abastecimento de Água de Campinas (Sanasa) e pelo Departamento de Parasitologia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), demonstraram que a qualidade da água destinada ao consumo humano já não era ideal e, portanto, com a utilização da água que passou pelo processo de limpeza do reservatório, um nível patogênico acima do usual provavelmente desencadeou o surto na população ao consumir esta água.

Além disso, a rede de distribuição de água deste reservatório divide-se em dois reservatórios de distribuição: um em Vila Pinheiro e outro no Centro. Em ambos não há ponto de coleta de amostras para controle de qualidade e não há histórico de limpeza. O método de difusão de cloro gasoso é utilizado para desinfecção da água, mas testes confirmaram pelo nível de cloro residual livre que não há tempo o suficiente para a ação do cloro. Mesmo após o ponto de cloração, existe uma injeção de água bruta, provinda de outro manancial, que não recebe tratamento antes da distribuição.

Resultados laboratoriais feitos sobre amostras de fezes de pessoas que apresentaram os sintomas durante o surto, demonstraram a presença do Astrovírus do sorotipo 1, o



sorotipo humano de Astrovírus com maior prevalência mundial em casos de surto de gastroenterite. Das 34 amostras recolhidas, 24 (61,5 % das amostras) atestaram presença do Astrovírus do sorotipo 1 e negaram a presença de parasitas e micro-organismos, além de vírus como o Adenovírus e Rotavírus, possivelmente associados com o surto.

Dessa forma, concluiu-se que a presença do Astrovírus do sorotipo 1 nas amostras de fezes de pessoas que apresentaram os sintomas de gastroenterite aguda durante o surto, juntamente com o manejo inadequado do tratamento de água que o sistema de abastecimento de Campo Belo recebe: em que a cloração da água ocorre com turbidez elevada e em pouco tempo efetivo para a desinfecção e injeção de água bruta de outro manancial após a cloração da água a ser distribuída, fazem com que o sistema de distribuição esteja vulnerável a falhas e a dispersão, conforme foram verificados em teses, de patógenos comumente associados a problemas de saneamento.

A principal referência para o estudo feito sobre o surto de gastroenterite aguda de Itatiaia no ano de 2002 é o boletim eletrônico epidemiológico [10].

#### 3.4.1 *A Modelagem do Surto*

Para modelarmos o surto de gastroenterite de Itatiaia, utilizaremos como base todos os resultados e conceitos que desenvolvemos para o modelo SIS, adaptando-o conforme a nossa necessidade específica em contemplar algumas particularidades que não são consideradas naquele modelo.

Observe que a infecção gástrica causada pelo Astrovírus divide a população de Itatiaia em dois grupos: os suscetíveis e os infectados. Claramente, ao modelarmos a evolução da quantidade de suscetíveis e infectados neste município durante o ano de 2002, o ano para o qual o boletim [10] nos fornece dados, podemos considerar que a população permaneceu constante, uma vez que o crescimento médio percentual da população brasileira no ano de 2002, segundo o Banco Mundial, foi de apenas 1,3%. Ainda, desconsideramos os fluxos imigratórios e emigratórios da cidade, passando a considerar, para o modelo, a sua população fechada e constante durante aquele ano.

Quanto a dinâmica interna da população, salientamos que os indivíduos nascidos durante aquele ano, sendo a gastroenterite causada por vírus, nasceram livres da doença e, portanto, suscetíveis. Dessa forma, para que ocorra a contaminação existe duas vias: A primeira delas é a transmissão de indivíduo infectado para indivíduo suscetível, uma vez que a Astrovirose é transmitida via oral-fecal, então o preparo de alimentos, aliado a baixa precaução com hábitos higiênicos, propicia a passagem do vírus entre indivíduos. A segunda via, que fica clara pelo estudo feito em [10], se dá pela água contaminada abastecida pelo sistema de abastecimento de Campo Belo. Logo, a infecção por parte deste patógeno se justifica não só pelo contato entre suscetível e infectado, como também pela rede de abastecimento.

Pelos dados recolhidos ao longo do ano de 2002, conforme exposto na Figura 4, conclui-se que a população de Itatiaia convivía com aproximadamente uma média de 9 casos de diarreia aguda notificados por semana epidemiológica. Isso evidencia, pela baixa variância dos dados, que a população convivía de forma relativamente estável com os casos de gastroenterite. Fato que, na modelagem, seria justificado por um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em que há coexistência entre suscetíveis e infectados.

Entretanto, durante a décima nona semana epidemiológica, a partir da limpeza feita nos reservatórios, ocorreu o surto no município. Assim, consideramos que a limpeza do reservatório, fato que, conforme relatado, sugere que não era uma prática comum, representou um evento atípico na dinâmica que se estabelecia na doença naquela cidade. Antes da décima nona semana, existe um estado de equilíbrio no número de infectados e então, a partir da lavagem do reservatório, uma quantidade maior de *Astrovírus* é lançada na rede de abastecimento, fazendo o número de indivíduos infectados aumentarem em cerca de 60 vezes.

A grande vantagem em utilizarmos a teoria de escalas temporais para fazer estes modelos está na mudança ostensiva de magnitude entre os dados colhidos sobre o número de infectados durante, principalmente, as duas primeiras semanas epidemiológicas a partir do surto (evidenciando-se a primeira semana de surto) para as demais semanas. Há um salto de 615 casos registrados na décima nona semana epidemiológica para 5 casos registrados na vigésima segunda semana epidemiológica.

Logo, uma escala temporal que contemple uma pequena granulação nas primeiras semanas de surto e possua uma granulação maior para o estágio final do surto, corresponde melhor a mudança dos dados observados no estudo. Assim, tomamos  $\mathbb{T}$  uma escala temporal com unidade tempo referente à dias, dada por

$$\mathbb{T} = [0, 7] \cup \{7 + 7/2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{14, 14 + 7/2, 21, 21 + 7/2, \dots\}$$

em que o intervalo fechado  $[0, 7]$  representa a primeira semana de surto, em que há um grande número de infectados; o intervalo  $\{14, 14 + 7/2, 21, 21 + 7/2, \dots\}$  representa, após as duas primeiras semanas de surto, os dias marcando o início e meio de cada semana epidemiológica subsequente, na qual o número de infectados se aproxima da média de casos pré-surto; e o conjunto  $\{7 + 7/2^n : n \in \mathbb{N}\}$  representa a segunda semana de surto, em que há uma queda significativa no número de infectados. Observe que  $\mathbb{T}$  é uma escala temporal ilimitada superiormente e de granulação limitada.

Dessa forma, propomos o seguinte PVI para modelar o surto de gastroenterite

$$\begin{cases} S^\Delta = -\beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aS + \delta I^\sigma + aK - \eta I^\sigma \\ I^\Delta = \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aI - \delta I^\sigma + \eta I^\sigma \\ S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que os parâmetros  $a, \beta, \delta$  e  $\eta$  representam, respectivamente, a taxa de mortalidade do município de Itatiaia; a taxa de transmissão da gastroenterite causada pelo Astrovírus do sorotipo 1; a taxa de recuperação da gastroenterite; e a taxa de contaminação pelo Astrovírus por meio do sistema de abastecimento da cidade.

Ainda, consideramos  $t_0 = 0 \in \mathbb{T}$  como o início da décima nona semana epidemiológica, além de  $I_0 = 615$ , conforme o número de casos notificados, e  $S_0 = 28\,783 - 615$  (em que 28 783 representa a o número de habitantes do município de Itatiaia estimado pelo IBGE no censo de 2010 e 615 representa o número de casos registrados de indivíduos infectados durante a primeira semana do surto).

O termo  $\eta I^\sigma$  na segunda equação de (3.6) representa a quantidade de indivíduos que se tornam infectados através da contaminação pelo Astrovírus por meio do sistema de abastecimento de Campo Belo. De fato, a quantidade de indivíduos infectados desta forma é proporcional a população total da cidade, uma vez que quanto maior o número de indivíduos na cidade, maior serão as taxas de contaminação do manancial que abastece os reservatórios que distribuem água para a população. Isso nos induz a introduzir o termo  $\eta(S + I)$  na segunda equação, todavia, um número maior de indivíduos suscetíveis não deve contribuir para a contaminação do manancial, uma vez que estes estão livres da doença.

Portanto, a quantidade de indivíduos infectados deve ser proporcional apenas ao número de infectados. Assim, intuímos que o termo acrescido deve ser  $\eta I$ , mas, como uma última observação, gostaríamos de garantir que o número de infectados causados pela água contaminada tenha se devido a indivíduos plenamente capazes de transmitir a doença. Logo, alteramos o termo acrescido para  $\eta I^\sigma$ . Na primeira equação, para que a população total permaneça constante, introduzimos o termo  $-\eta I^\sigma$ .

Esta alteração nos permite modelar este problema que não se enquadra perfeitamente no modelo SIS que descrevemos neste capítulo, uma vez que, pela hipótese  $H_4$ , o contágio ocorre apenas de pessoa para pessoa, e aqui incluímos a ação da água por conta da contaminação. Entretanto, reescrevendo o PVI (3.6) sob a forma

$$\begin{cases} S^\Delta = -\beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aS + (\delta - \eta)I^\sigma + aK \\ I^\Delta = \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aI - (\delta - \eta)I^\sigma \\ S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

fica evidente que podemos utilizar os teoremas desenvolvidos para o modelo SIS para a análise deste modelo. Em particular, podemos resgatar os Teoremas 3.3.3 e 3.3.5 da seguinte forma:

**Teorema 3.4.1.** *Se  $-a, \delta - \eta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta \neq \eta + \beta$ , então (3.7) possui solução única dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por*

$$\begin{cases} I(t) = \frac{\gamma I_0}{e^{(\delta - \eta - \beta) \ominus (-a)}(t, t_0) (\gamma + I_0) - I_0} \\ S(t) = S_0 + I_0 - I(t). \end{cases}$$

em que  $\gamma := N_0(a + \delta - \eta - \beta)/\beta$ . Ainda,  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

**Teorema 3.4.2.** *Se  $-a, \delta - \eta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $a + \delta \neq \eta + \beta$ . Definindo  $P_0 = 1 - \gamma/N_0$ , temos*

(i) *Se  $P_0 < 1$ , então  $y_1 = (S_0 + I_0, 0)$  é assintoticamente estável para todas as soluções de (3.7) quando  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

(ii) *Se  $P_0 > 1$ , então  $y_2 = \left( (S_0 + I_0) \frac{a + \delta - \eta}{\beta}, (S_0 + I_0) \frac{\beta + \eta - a - \delta}{\beta} \right)$  é assintoticamente estável para todas as soluções de (3.7) quando  $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

em que  $y_1$  e  $y_2$  são os pontos de equilíbrio de (3.7).

### 3.4.2 Simulações Numéricas para o Modelo da Gastroenterite

Conforme descrito em [6] e [10], os principais sintomas da gastroenterite, como a diarreia aquosa, duram entre 2 a 3 dias. O período de incubação do Astrovírus é descrito

como variando entre 1 a 4 dias [6], o que está de acordo com a nossa expectativa, uma vez que após 3 dias da limpeza do reservatório de Campo Belo, observou-se o início do surto de gastroenterite. Ainda, de acordo com Banco Mundial, a expectativa de vida no Brasil, no ano de 2002, era de 70,9 anos.

Dessa forma, estimamos que  $T_a$ , a expectativa de vida média de um indivíduo, é dado por  $T_a \approx 25\,878,5$  dias, donde a taxa de mortalidade fica dada por  $a = 3,8642 \times 10^{-5}$  (dia) $^{-1}$ . Como esta é uma taxa com ordem de magnitude muito inferior as demais, consideraremos  $a = 0$ . O tempo médio que um indivíduo suscetível leva para se tornar infectado,  $T_\beta$ , corresponde ao tempo de incubação do Astrovírus. Considerando que o surto aconteceu 3 dias após a contaminação da água, temos  $T_\beta \in \{t \text{ dia} : t \in [3, 4]\}$  e, portanto, estimamos  $\beta \in \{t \text{ (dia)}^{-1} : t \in [1/4, 1/3]\}$ . Interpretamos o tempo médio que um indivíduo leva para se recuperar da doença,  $T_\delta$ , como correspondente ao tempo sob os sintomas da gastroenterite, donde  $T_\delta \in \{t \text{ dia} : t \in [2, 3]\}$  e, portanto,  $\delta \in \{t \text{ (dia)}^{-1} : t \in [1/3, 1/2]\}$ .

Para estimarmos o valor do parâmetro  $\eta$  consideramos que o período de tempo dado desde a primeira até a décima nona semana epidemiológica do ano de 2002 foi caracterizado, nesta modelagem, por um período de estabilidade entre o número de indivíduos suscetíveis e infectados, portanto, a média de 9 casos notificados semanais, ou, aproximadamente 1,28 casos notificados por dia, representam o número de infectados do ponto de equilíbrio de (3.7) que corresponde a coexistência entre suscetíveis e infectados. Assim, pelo Teorema 3.4.2, temos (adimensionalmente) que  $1,28 \approx N_0(\beta + \eta - a - \delta)/\beta$ , donde

$$\eta \approx a + \delta - \beta \left(1 - \frac{1,28}{N_0}\right)$$

em que  $N_0$  representa a população total do município de Itatiaia em 2002, que pelo último censo, de acordo com o IBGE, constavam 28 783 habitantes. Assim, a partir das regiões que consideradas para  $\delta$  e  $\beta$ , temos  $\eta \in \{t \text{ (dia)}^{-1} : 0 \leq t \leq 0,25\}$ .

Logo, definimos  $R = [1/4, 1/3] \times [1/3, 1/2] \times [0, 1/4]$  como a região admissível dos parâmetros  $(\beta, \delta, \eta)$ . Para estimarmos qual subregião de  $R$  corresponde a escolha de parâmetros que melhor descreve o comportamento de queda do número de infectados visto na Figura 5, definimos uma função “erro”  $E : R \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tal que

$$E(\beta, \delta, \eta) = |615 - M_1(\beta, \delta, \eta)| + |91 - M_2(\beta, \delta, \eta)| + |39 - M_3(\beta, \delta, \eta)| + |5 - M_4(\beta, \delta, \eta)|$$

para todo  $(\beta, \delta, \eta) \in R$ , em que  $M_i = \sup I(t)$  representa para  $i = 1, 2, 3, 4$ , o maior número de casos de infectados na primeira (equivalente à  $i = 1$ ), segunda ( $i = 2$ ), terceira ( $i = 3$ ) ou quarta ( $i = 4$ ) semanas após o surto. Ainda,  $I$  é obtido a partir da solução do PVI (3.7), utilizando-se os parâmetros  $\beta, \delta$  e  $\eta$ .

Para julgarmos melhor o efeito que os parâmetros  $(\beta, \delta, \eta) \in R$  possuem em relação à reproduzir o comportamento dos dados da Figura 4, e possamos também verificar qualitativamente, à partir de  $E$ , quais escolhas de parâmetros se aproximam mais dos

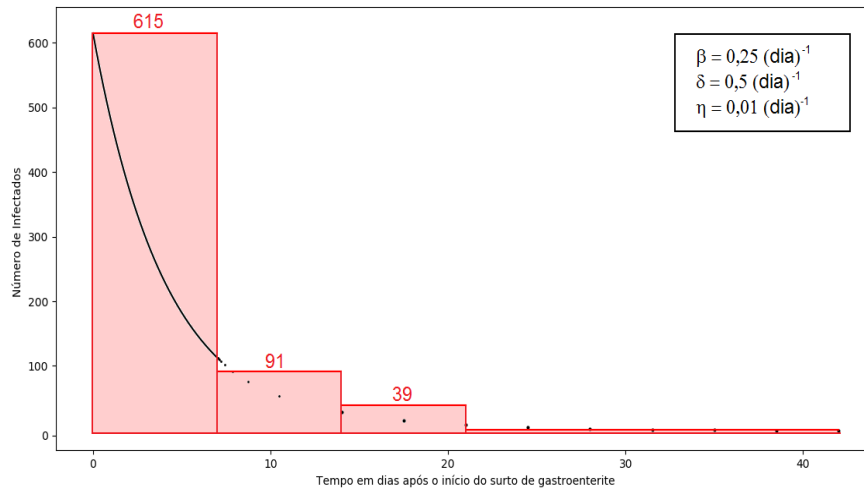


Figura 5 – Em preto, o gráfico do número de infectados  $I$  obtido da solução do PVI (3.7) para os parâmetros  $\beta = 0,25 \text{ (dia)}^{-1}$ ,  $\delta = 0,5 \text{ (dia)}^{-1}$ ,  $\eta = 0,01 \text{ (dia)}^{-1}$  e  $a = 0 \text{ (dia)}^{-1}$ ; Em vermelho, os dados referentes ao número reportado de infectados em cada uma das quatro primeiras semanas após o início do surto.

Tabela 2 – Alguns dos valores de  $E$  para os quais  $E(\beta, \delta, \eta) \leq 50$ .

$E(\beta, \delta, \eta)$	$\beta \text{ (dia)}^{-1}$	$\delta \text{ (dia)}^{-1}$	$\eta \text{ (dia)}^{-1}$
41,95	0,25	0,47	0
28,74	0,25	0,48	0
41,81	0,26	0,48	0
16,63	0,25	0,49	0
5,52	0,25	0,5	0
16,51	0,26	0,5	0
16,62	0,25	0,5	0,01
41,81	0,26	0,5	0,02
28,73	0,25	0,5	0,02
41,94	0,25	0,5	0,03

dados reais, lançamos mão da Tabela 2. Nesta tabela estão presentes alguns dos valores de  $E$  sobre  $R$  tais que o valor desta função que mede a diferença entre os dados do número de infectados nas quatro primeiras semanas do surto em relação ao número máximo do número de infectados do modelo em cada uma destas semanas.

De fato, os valores na Tabela 2 sugerem que a escolha de parâmetros  $(\beta, \delta, \eta) = (0,5, 0,25, 0)$  minimizam  $E$  ou está próximo do mínimo de  $E$  sobre  $R$ . Ainda, pela tabela percebemos que a taxa de contaminação proveniente da rede de abastecimento  $\eta$  possui ordem de grandeza menor em relação aos demais parâmetros quando o “erro”  $E$  é pequeno.

### 3.4.3 Conclusões

Podemos observar que o comportamento da solução para a escolha de parâmetros, conforme a Figura 5, corresponde a queda, semanal, no número de infectados após o início do surto de gastroenterite aguda em Itatiaia. Fica claro pela Figura 5 e Tabela 2 que a baixa diferença entre os resultados da modelagem pelo PVI (3.6) e os dados reais verificam a aplicabilidade do modelo e, por consequência, do modelo SIS, assim como a aplicabilidade da teoria de escalas temporais como ferramenta da modelagem biomatemática.

Em particular, ressaltamos que os dados obtidos através de  $E$  sugerem que a taxa de contaminação por gastroenterite por meio da água oriunda do sistema de abastecimento de Itatiaia é muito baixa, senão virtualmente nula. Veja que esta conclusão não entra em conflito com o boletim epidemiológico [10], uma vez que a quantidade média de infectados semanais neste município que apresentavam sintomas em comum à gastroenterite causada pelo Astrovírus já era muito baixa, o que sugere, em retrospecto, que estes casos não estão necessariamente vinculados a qualidade da água da região.

Isso não significa que a origem do surto não foi causada pela lavagem dos reservatórios e a subsequente utilização desta água para consumo. O que podemos inferir baseado no modelo é que a taxa de contaminação pela água, imediatamente após esta lavagem, era provavelmente muito alta devido à presença do Astrovírus recém diluído, mas como o fluxo de água para abastecimento é contínuo e a lavagem do reservatório ocorreu uma vez, a quantidade de Astrovírus presente na água do reservatório caiu exponencialmente, assumindo uma assíntota horizontal próxima à 0. Essa assíntota é o que nos permitiu trabalhar com  $\eta$  constante uma vez determinados os primeiros casos de gastroenterite, e esta mesma assíntota remonta ao valor fixo que  $\eta$  possuía antes do início do surto. Além disso, podemos perceber que o surgimento de novos casos da doença após a primeira semana de surto ocorreram, muito provavelmente, devido à transmissão entre pessoas e não pela rede de abastecimento de água, uma vez que neste estágio o valor  $\eta$  já era novamente muito baixo.

No Capítulo 4 trataremos de uma generalização ao modelo SIS aqui proposto em que, agora, os parâmetros  $a$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $K$  são funções da escala temporal  $\mathbb{T}$ .





## 4 UM MODELO SIS NÃO-AUTÔNOMO EM ESCALAS TEMPORAIS

No Capítulo 3, trabalhamos o modelo SIS dado pelo PVI autônomo (3.1). Agora, nos perguntamos o que acontece com o PVI (3.1) quando as taxas de mortalidade, transmissão e recuperação, além da entrada correspondente a natalidade, dadas respectivamente  $a, \beta, \delta$  e  $aK$ , não são constantes.

Essa pergunta surge com o interesse em modelarmos dinâmicas de doenças em que ao menos algumas destas taxas possui um perfil sazonal. Por exemplo, a gripe é uma das doenças que podemos tratar pelo modelo SIS, uma vez que as hipóteses para este modelo são satisfeitas. Entretanto, quando consideramos o PVI (3.1), acabamos considerando que as taxas de transmissão e infecção desta doença como constantes no tempo, o que vai de encontro com a nossa percepção sobre a dinâmica da doença.

Veja, nos períodos mais frios e secos do ano, as pessoas tendem a ficarem mais próximas e em locais mais fechados para abrigarem-se do frio, o que faz com que a taxa de transmissão aumente, uma vez que há mais contato entre os indivíduos (donde a probabilidade de ocorrer a transmissão entre um indivíduo infectado para um suscetível aumenta). Por outro lado, nos períodos mais quentes e chuvosos do ano, a tendência é que não aconteça aglomerações em locais fechados. Além disso, o regime de chuvas aliado com ambientes mais arejados, aumentam a qualidade do ar, o que impacta em um aumento da taxa de recuperação da doença. Fica claro então, que as doenças com perfis sazonais precisam de uma modelagem mais flexível, mais abrangente, que contemple a variação sazonal dos seus parâmetros.

Essa necessidade também fica clara quando olhamos em retrospecto para toda a análise do modelo SIS autônomo que fizemos. Naquele caso, independente dos parâmetros (constantes) tomados, o comportamento da solução é sempre assintótico. E, de fato, os principais resultados que estabelecemos para o modelo SIS autônomo são em busca do valor limite da solução de (3.1), uma vez que pela solução sempre ter comportamento assintótico, este limite sempre existe.

Agora, quando considerarmos os parâmetros  $a, \beta, \delta$ , assim como o termo  $aK$ , não constantes, ganhamos uma gama maior de possibilidades de comportamento da sua solução em relação ao modelo não-autônomo. Aqui, nem sempre conseguiremos encontrar qual o valor limite da sua solução, pois este pode até mesmo não existir. Por vezes estaremos interessados em apenas verificar se a população de infectados se extingue com o passar do tempo, donde podemos discutir se a doença se extingue ou se permanece indefinidamente na população.

Dessa forma, assumiremos todas as hipóteses sobre o modelo SIS trabalhadas na Seção 4.1, com exceção da primeira, considerando ainda que  $\mathbb{T} = [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Observe que, a quantidade de indivíduos infectados (respectivamente suscetíveis) que morreram

no instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$  é dada por  $a(t)I(t)$  (respectivamente  $a(t)S(t)$ ), pois  $a(t)$  representa a taxa de mortalidade naquela população para o tempo  $t$ .

De forma análoga, a quantidade de indivíduos recuperados e a quantidade de indivíduos infectados no instante  $t$  são dadas por  $\delta(t)I(t)$  e  $\beta(t)S(t)I^\sigma(t)/(S^\sigma(t) + I^\sigma(t))$ , respectivamente. Uma vez que as taxas de recuperação e transmissão da doença no instante  $t \in \mathbb{T}$ , tempo quando ocorre a recuperação ou contágio, respectivamente,  $\delta(t)$  e  $\beta(t)$ .

Observe que o diagrama da Figura 2 também representa o fluxo de indivíduos entre os compartimentos das subpopulações de infectados e suscetíveis no modelo SIS não-autônomo, isto é, que a população total seja constante. Aqui, não fixaremos o valor do termo  $K$ , motivo pelo qual não consideramos a primeira hipótese sobre o modelo SIS autônomo. Essa mudança se dá para que possamos considerar uma possível migração de indivíduos suscetíveis para a população modelada.

Dessa forma, o termo  $aK$ , que no modelo não-autônomo passa a ser  $a(t)K(t)$ , representa o surgimento de novos indivíduos suscetíveis na população total. Estes indivíduos tanto contemplam os oriundos do nascidos a partir da procriação entre indivíduos que pertencem a população total prévia ao nascimento, assim como contempla os imigrantes, que aqui também consideramos sempre suscetíveis. Assim,  $a(t)K(t)$  representa a soma entre a taxa de natalidade e a taxa de migração no instante  $t \in \mathbb{T}$ .

Esclarecida as nossas motivações, além das nossas hipóteses e interpretações sobre o fluxo de indivíduos, considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} S^\Delta = -\beta(t)\frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - a(t)S + \delta(t)I^\sigma + a(t)K(t) \\ I^\Delta = \beta(t)\frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - a(t)I - \delta(t)I^\sigma \\ S(t_0) = S_0 > 0, \quad I(t_0) = I_0 > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

em que  $\beta$  e  $\delta$  são, respectivamente, as taxas de transmissão e recuperação da doença,  $a$  é taxa de mortalidade natural da população e  $aK$  representa a soma entre a natalidade e a imigração da população.

Na versão autônoma do modelo SIS, convencionamos  $K = S_0 + I_0 = N$ , o que significa dizer que a cada instante de tempo o número de indivíduo que adentravam à população era igual ao número de indivíduos daquela população que morriam de forma natural, donde a população total  $N$  permanecia constante. Assim, como agora passamos a considerar  $K$  uma função no tempo, precisamos nos atentar a uma situação específica: O que acontece se no instante de tempo inicial  $t_0$  tivermos mais pessoas morrendo naturalmente do que surgindo na população?

Claramente a população total diminui. Em particular, e aqui mora o problema, a

população inicial, onde a doença está presente, pode se extinguir, e com ela a doença. Caso isso aconteça, como a partir do momento inicial  $t_0$  apenas restarão indivíduos suscetíveis criados pelo fluxo gerado por  $aK$ , a dinâmica da doença se extingue. Para evitarmos esta situação, consideramos  $K(t_0) \geq S_0 + I_0$ .

Assim, assumimos que  $a, \beta, \delta$  e  $K$  são funções limitadas tais que  $\beta, \delta, K \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$  e  $a \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_0^+)$ . A importância desta condição sobre os parâmetros, além da aplicabilidade dentro dos resultados sobre o PVI (4.1) que se seguem, está em dizermos implicitamente que os parâmetros deste modelo possuem certa ‘regularidade’.

Faz sentido olharmos para uma classe mais estrita de parâmetros, pedindo que estes sejam rd-contínuos. Veja, se algum destes parâmetros não fosse rd-contínuo, poderíamos estar lidando com alguma taxa que varia de forma muito errática no tempo. Assim, uma vez que as soluções deste modelo SIS dependem destes parâmetros, estes parâmetros poderiam induzir na solução o mesmo tipo de variação errática no tempo. Entretanto, como a solução do modelo SIS é a solução de um PVI, então ela é diferenciável e, portanto, muito “suave”. Dessa forma, deve existir algumas restrições sobre os parâmetros.

Além do mais, é natural que os parâmetros que muitas vezes dependem das condições ambientais sazonais variem de forma *suave* no tempo. Assim, estas condições não nos fazem perder a generalidade na modelagem.

#### 4.1 OS PRINCIPAIS RESULTADOS

No Teorema 4.1.1, mostraremos que o PVI (4.1) possui solução única e explicitaremos a sua forma.

**Teorema 4.1.1.** *Sejam  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $K$  função não-decrescente. Então o PVI (4.1) possui solução única  $(S, I) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  dada para todo  $t \in \mathbb{T}$  por*

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) = N(t) - I(t) \\ I(t) = \frac{I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)}{1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(s), t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

em que  $N, \tilde{\beta}, p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  são dados por

$$N(t) = (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))a(s)K(s) \Delta s \quad (4.3)$$

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(t) \frac{N(t)}{N^\sigma(t)} = \beta(t) \cdot \frac{N}{(1 - \mu a)N + \mu a K}(t) \quad (4.4)$$

$$p(t) = (\delta - \tilde{\beta}) \ominus (-a)(t) = \frac{a + \delta - \tilde{\beta}}{1 - \mu a}(t) \quad (4.5)$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração deste teorema em duas partes. Na primeira, mostraremos que o PVI (4.1) possui solução única maximal em  $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  quando  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $K$  é não-decrescente, e que esta solução é dada por (4.2).

Na segunda parte desta demonstração, mostraremos que o sistema de identidades (4.2) é solução do PVI (4.1).

I) O PVI (4.1) possui solução única maximal em  $\Omega$ .

Seja  $f : \mathbb{T} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y))$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $x, y \in \Omega$ , em que  $f_1, f_2 : \mathbb{T} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são dados por

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y) &= -\beta(t) \frac{x_1 y_2}{y_1 + y_2} - a(t)x_1 + \delta(t)y_2 + a(t)K(t) \\ f_2(t, x, y) &= \beta(t) \frac{x_1 y_2}{y_1 + y_2} - a(t)x_2 - \delta(t)y_2 \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \Omega$ .

Como  $f_1$  e  $f_2$  são funções racionais em relação à  $x$  e  $y$ , e como as funções  $a, \beta$  e  $\delta$  são limitadas, segue que  $f_1$  e  $f_2$  quando restritas aos conjuntos  $I_t \times B[x_0, b] \times B[x_0, b] \subset \text{Dom}(f)$  (tomados conforme o Teorema 2.2.11) são funções rd-contínuas, lipschitzianas em  $x$  e  $y$ , além de limitadas. Logo,  $f|_{I_t \times B[x_0, b] \times B[x_0, b]}$  também cumpre estas propriedades.

Assim, para aplicarmos o Teorema 2.2.11 à  $f$ , para mostrarmos que o PVI (4.1) possui solução única maximal em  $\Omega$ , basta checarmos que de fato  $f$  é solúvel na terceira variável.

I.I)  $f$  é solúvel na terceira variável.

Para mostrarmos que  $f$  é solúvel na terceira variável, precisamos verificar os itens (i) e (ii) da Definição 2.2.2. Aqui, verificaremos apenas o item (ii), uma vez que a verificação do item (i) segue análoga.

Assim, seja  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \Omega$  uma solução do PVI (4.1) no intervalo  $[t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ , tal que  $\tau \in \mathbb{T}$  é discreto à direita. Observe que  $\sigma(\tau) \in \mathbb{T}$  e que, como supomos  $\phi$  solução local de (4.1), então  $\phi(t) \in \Omega$  para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ .

Primeiro, mostremos que a equação algébrica

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \\ f_2(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \end{pmatrix} = f(\tau, \phi(\tau), \phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \quad (4.6)$$

possui solução única  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$  e esta satisfaz  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \Omega$ .

I.I.I) Existe  $z \in \mathbb{R}^2$  que resolve a equação algébrica (4.6).

Para trabalharmos com uma notação mais familiar, considere  $\phi(t) = (S(t), I(t))$  para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ . Utilizando as definições de  $f_1$  e  $f_2$ , temos

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\tau, (S(\tau), I(\tau)), (S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1, I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)) \\ f_2(\tau, (S(\tau), I(\tau)), (S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1, I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)) \end{pmatrix}$$

donde  $z_1$  e  $z_2$  ficam dados pelas equações

$$z_1 = -\beta(\tau) \frac{S(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)}{I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1 + S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2} - a(\tau)S(\tau) + \delta(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2) + a(\tau)K(\tau) \quad (4.7)$$

$$z_2 = \beta(\tau) \frac{S(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)}{I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1 + S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2). \quad (4.8)$$

Somando estas duas identidades, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -a(\tau)(S(\tau) + I(\tau)) + a(\tau)K(\tau) \\ &= a(\tau)(K(\tau) - S(\tau) - I(\tau)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Denotando  $N^\sigma(\tau) := S(\tau) + I(\tau) + \mu(\tau) \cdot (z_1 + z_2)$  e substituindo  $N^\sigma(\tau)$  em (4.7) e (4.8) temos

$$z_1 = -\beta(\tau) \frac{S(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)S(\tau) + \delta(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2) + a(\tau)K(\tau) \quad (4.10)$$

$$z_2 = \beta(\tau) \frac{S(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)(I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2). \quad (4.11)$$

Note que para as equações (4.10) e (4.11) estarem bem definidas, precisamos verificar que  $N^\sigma(\tau) \neq 0$ . Faremos essa verificação mais adiante. Ainda, pela equação (4.11), temos

$$z_2 \cdot \left( 1 - \mu(\tau) \left( \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - \delta(\tau) \right) \right) = \beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)I(\tau) \quad (4.12)$$

Observe que para resolvermos a equação anterior, precisamos que o fator que multiplica  $z_2$  no lado esquerdo desta igualdade seja não nulo. Como este fator não depende de  $z_1$  ou  $z_2$  (pois, pela equação (4.9), temos que  $N^\sigma(\tau)$  não depende de  $z_1$  ou  $z_2$ ) assim como o lado esquerdo da igualdade anterior, podemos obter  $z_2$  e, novamente pela equação (4.9), podemos obter  $z_1$ .

Nesse intuito, vamos agora mostrar que o fator  $1 - \mu(\tau)(\beta(\tau)S(\tau)/N^\sigma(\tau) - \delta(\tau))$  é não nulo, ou equivalentemente, que  $\delta(\tau) - \beta(\tau)S(\tau)/N^\sigma(\tau) \in \mathcal{R}$ . Lembre-se que por hipótese temos  $\delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ , donde para todo  $t \in \mathbb{T}$  vale que  $1 + \mu(t)(\delta(t) - \beta(t)) > 0$ .

Lembre-se também que  $\phi : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \Omega$  é dado como solução de (4.1). Logo, pelo PVI (4.1) temos que  $S^\Delta(t) + I^\Delta(t) = a(t)(K(t) - S(t) - I(t))$  para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}^\kappa$ , em que  $\phi = (S, I)$ . Tomando  $N : [t_0, \tau]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $N(t) = S(t) + I(t)$  para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ , segue que  $N$  satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} N^\Delta(t) = a(t)(K(t) - N(t)) \\ N(t_0) = S_0 + I_0 > 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

em que, por hipótese,  $-a \in \mathcal{R}^+$  e  $aK \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ . Logo, segue do Teorema 2.1.13 que o PVI anterior possui solução única dada por

$$N(t) = (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))a(s)K(s) \Delta s \quad (4.14)$$

para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ . Observe que  $N$  é estritamente positivo em todo o seu domínio.

Além disso, note que

$$\begin{aligned} N^\sigma(\tau) &:= S(\tau) + I(\tau) + \mu(\tau) \cdot (z_1 + z_2) \\ &= N(\tau) + \mu(\tau) \cdot (z_1 + z_2) \\ &\stackrel{(4.9)}{=} N(\tau) + \mu(\tau)(a(\tau) \cdot (K(\tau) - N(\tau))) \\ &= (1 - \mu(\tau)a(\tau))N(\tau) + \mu(\tau)a(\tau)K(\tau) \\ &> 0 \end{aligned}$$

uma vez que  $-a \in \mathcal{R}^+$ ,  $a, K \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_0^+)$  e  $N \in C_{\text{rd}}([t_0, \tau]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ . Logo os denominadores nas equações (4.7), (4.8) estão bem definidos.

Ainda, pela equação (4.14), como  $N(t_0) = S_0 + I_0 \leq K(t_0)$  e  $K$  é função não-decrescente por hipótese, então

$$\begin{aligned}
N(t) &= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))a(s)K(s)\Delta s \\
&\leq (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + K(t) \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))a(s)\Delta s \\
&= (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + K(t)(1 - e_{-a}(t, t_0)) \\
&= (S_0 + I_0 - K(t))e_{-a}(t, t_0) + K(t) \\
&\stackrel{(a)}{\leq} K(t)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ , em que (a) é verdade pois  $-a \in \mathcal{R}^+$ , donde  $e_{-a}(t, t_0) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Além disso temos  $K(t) \geq K(t_0) \geq S_0 + I_0$ , donde  $S_0 + I_0 - K(t) \leq 0$  para todo  $t \in [t_0, \tau]_{\mathbb{T}}$ .

Portanto, da equação (4.9) e (4.15) temos que  $z_1 + z_2 = a(\tau)(K(\tau) - N(\tau)) > 0$ . Dessa forma, finalmente segue que

$$\begin{aligned}
\mu(\tau) \left( \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - \delta(\tau) \right) &= \mu(\tau) \left( \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N(\tau) + \mu(\tau)(z_1 + z_2)} - \delta(\tau) \right) \\
&= \mu(\tau) \left( \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{S(\tau) + [I(\tau) + \mu(\tau)(z_1 + z_2)]} - \delta(\tau) \right) \\
&\stackrel{(b)}{<} \mu(\tau) (\beta(\tau) - \delta(\tau)) \\
&\stackrel{(c)}{<} 1
\end{aligned}$$

em que (b) é verdadeiro pois  $I(\tau) > 0$ , uma vez que  $\phi(\tau) \in \Omega$ , e como vimos  $z_1 + z_2 > 0$ ; (c) é verdadeiro pois  $\delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ , donde  $1 + \mu(\tau)(\delta(\tau) - \beta(\tau)) > 0$ . Logo,

$$1 - \mu(\tau) \left( \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - \delta(\tau) \right) > 0$$

Portanto, a equação (4.12) possui única solução em  $z_2$ , e pela equação (4.9), obtemos um único  $z_1$ . Isso mostra que existe um único  $z \in \mathbb{R}^2$  que resolve a equação algébrica (4.6).

I.I.II)  $z$  satisfaz  $(\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z) \in \Omega$ .

Para verificarmos esta propriedade, precisamos mostrar que  $S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1 > 0$  e  $I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2 > 0$ .

Pela equação (4.12), obtemos

$$z_2 = \frac{\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)I(\tau)}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} I(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_2 &= I(\tau) + \mu(\tau) \frac{\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)I(\tau)}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \\ &= \frac{I(\tau) + \mu(\tau)\delta(\tau)I(\tau) - \mu(\tau)\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)}}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \\ &\quad + \frac{\mu(\tau)\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - \mu(\tau)I(\tau)(a(\tau) + \delta(\tau))}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \\ &= \frac{(1 - \mu(\tau)a(\tau))I(\tau)}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} S(\tau) + \mu(\tau) \cdot z_1 &= S(\tau) + \mu(\tau) \cdot [a(\tau)(K(\tau) - N(\tau)) - z_2] \\ &= \mu(\tau)a(\tau)(K(\tau) - N(\tau)) + S(\tau) - \mu(\tau) \frac{\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} - a(\tau)I(\tau) - \delta(\tau)I(\tau)}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \\ &= \mu(\tau)a(\tau)(K(\tau) - N(\tau)) + \frac{S(\tau) + \mu(\tau)\delta(\tau)S(\tau) - \mu(\tau)\beta(\tau) \frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)}}{1 + \mu(\tau) \left( \delta(\tau) - \beta(\tau) \frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)} \right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{-\mu(\tau)\beta(\tau)\frac{S(\tau)I(\tau)}{N^\sigma(\tau)} + \mu(\tau)(a(\tau) + \delta(\tau))I(\tau)}{1 + \mu(\tau)\left(\delta(\tau) - \beta(\tau)\frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)}\right)} \\
& \geq \frac{S(\tau)(1 + \mu(\tau)\delta(\tau)) - \mu(\tau)\beta(\tau)\frac{S(\tau)N(\tau)}{N(\tau) + \mu(\tau)(z_1 + z_2)} + \mu(\tau)(a(\tau) + \delta(\tau))I(\tau)}{1 + \mu(\tau)\left(\delta(\tau) - \beta(\tau)\frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)}\right)} \\
& \geq \frac{S(\tau)(1 + \mu(\tau)\delta(\tau)) - \mu(\tau)\beta(\tau)\frac{S(\tau)N(\tau)}{N(\tau) + \mu(\tau)(z_1 + z_2)}}{1 + \mu(\tau)\left(\delta(\tau) - \beta(\tau)\frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)}\right)} \\
& \geq \frac{S(\tau)(1 + \mu(\tau)\delta(\tau)) - \mu(\tau)\beta(\tau)S(\tau)}{1 + \mu(\tau)\left(\delta(\tau) - \beta(\tau)\frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)}\right)} \\
& = \frac{S(\tau)(1 + \mu(\tau)(\delta(\tau) - \beta(\tau)))}{1 + \mu(\tau)\left(\delta(\tau) - \beta(\tau)\frac{S(\tau)}{N^\sigma(\tau)}\right)} \\
& > 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\phi(\tau) + \mu(\tau) \cdot z = (S + \mu(\tau) \cdot z_1, I + \mu(\tau) \cdot z_2) \in \Omega$ , donde  $f$  é solúvel na terceira variável.

I.II) A solução (4.2) é única.

Com efeito,  $f$  satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.2.11, portanto existe uma única solução maximal  $\phi : [t_0, \omega)_{\mathbb{T}} \rightarrow \Omega$  de (4.1). Além disso, veja que substituindo as identidades (4.2) no PVI (4.1), estas satisfazem o PVI (estas verificações serão detalhadas na segunda parte deste teorema), donde a função  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varphi(t) = (I(t), S(t))$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  (em que  $S$  e  $I$  são dados conforme (4.2)) é solução do PVI (4.1).

Vamos mostrar que  $\phi = \varphi$ . Para isso, vejamos que  $\text{Im}(\varphi) \subset \Omega$ , donde  $\varphi$  é solução maximal do PVI (4.1) em  $\Omega$ , e como  $\phi$  é solução única maximal deste PVI em  $\Omega$ , então  $\phi = \varphi$ .

I.II.I)  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

**Obs:** A função  $N = S + I$  está definida para todo  $t \in \mathbb{T}$ , e a sua fórmula explícita pode ser obtida através da resolução do PVI (4.3) no contexto da escala temporal  $\mathbb{T}$ .  $N$  é uma função estritamente positiva e diferenciável com  $N^\Delta = a \cdot (K - N)$ . Estas verificações

podem ser feitas da mesma forma como foram feitas no item I.I. Ainda, temos  $N(t) \leq K(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $N^\Delta$  é não-negativa.

Seja  $\tilde{\beta} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\tilde{\beta}(t) = \beta(t)N(t)/N^\sigma(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Note que  $\tilde{\beta}$  está bem definido pois  $N(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $N^\sigma(t) = N(\sigma(t)) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Agora, vejamos que  $p = (\delta - \tilde{\beta}) \ominus (-a) \in \mathcal{R}^+$ . Com efeito, como  $-a \in \mathcal{R}^+$ , basta mostrarmos que  $\delta - \tilde{\beta} \in \mathcal{R}^+$ . Com isto em mente, note

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(t) \frac{N(t)}{N^\sigma(t)} = \beta(t) \frac{N(t)}{N(t) + \mu(t)N^\Delta(t)} \leq \beta(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo  $\tilde{\beta}(t) - \delta(t) \leq \beta(t) - \delta(t) < 1/\mu(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  discreto à direita, donde  $\delta - \tilde{\beta} \in \mathcal{R}^+$ .

Dessa forma, pela fórmula de  $I$  em (4.2), como  $I_0 > 0$ ;  $-a, \delta - \tilde{\beta} \in \mathcal{R}^+$ , donde  $p \in \mathcal{R}^+$ ; e  $N = S + I$  é estritamente positivo, então  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

I.II.II)  $S(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Defina  $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(t) = S(t)/I(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Como  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , segue que  $v$  está bem definida. Note que para  $v$  temos

$$\begin{aligned} v^\Delta &= \left( \frac{S}{I} \right)^\Delta \\ &= \frac{1}{I \cdot I^\sigma} \left( I \left( -\beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aS + \delta I^\sigma + aK \right) - S \left( \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - \delta I^\sigma - aI \right) \right) \\ &= \frac{1}{I \cdot I^\sigma} \left( (\delta - \tilde{\beta})SI^\sigma + \delta I \cdot I^\sigma + aK \cdot I \right) \\ &= (\delta - \tilde{\beta}) \frac{S}{I} + \delta + aK/I^\sigma \\ &= (\delta - \tilde{\beta})v + (\delta + aK/I^\sigma). \end{aligned}$$

Logo, como  $\delta - \tilde{\beta} \in \mathcal{R}^+$ ,  $\delta + aK/I^\sigma \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$  e  $v(t_0) = S_0/I_0$ , segue do Teorema 2.1.13 que para cada  $t \in \mathbb{T}$  temos

$$v(t) = \frac{S_0}{I_0} e_{\delta - \tilde{\beta}}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{\delta - \tilde{\beta}}(t, \sigma(s)) (\delta + aK/I^\sigma)(s) \Delta s$$

em que  $\delta + aK/I^\sigma \geq 0$ , e, portanto,  $v(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Então  $S(t) = v(t) \cdot I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Assim,  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \Omega$  é solução maximal de (4.1) em  $\Omega$ , e temos que este PVI possui solução maximal única  $\phi$  em  $\Omega$ . Então  $\phi = \varphi$ , o que implica que a solução dada pelas identidades (4.2) é única.

II) A função dada pelo sistema (4.2) é uma solução de (4.1).

Sabemos do item anterior que, se  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ ,  $I_0, S_0 > 0$  e  $K$  não-decrescente, então o PVI (4.1) possui solução única maximal  $\phi$  em  $\Omega$ . Esta solução está definida em um intervalo maximal  $[t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$  que, a priori, não podemos afirmar que cobre toda a escala temporal  $\mathbb{T}$ .

No item I.II mostramos que de fato a solução  $\varphi$  dada por (4.2) é a única solução maximal de (4.1). Todavia, o leitor pode ter a dúvida sobre como as fórmulas em (4.2) foram obtidas. De fato, ao garantirmos que o PVI (4.1) possui solução única  $\phi$  em  $\Omega$ , mesmo sem saber a sua forma explícita, podemos, através de alguns métodos convenientes, encontrar a forma explícita de  $\phi$ .

Claro, a fórmula que obtemos para  $\phi$ , através destes métodos, também está definida para o intervalo  $[t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ , diferentemente de (4.2) que está definida para toda a escala  $\mathbb{T}$ . Felizmente, ao obtermos a formula explícita para  $\phi$  em  $[t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ , estendê-la para toda a escala  $\mathbb{T}$ , sem perdermos a propriedade mais importante desta que é resolver o PVI (4.1), ocorre naturalmente.

Portanto, a partir da garantia de existência de  $\phi$  obtemos as fórmulas em (4.2). Observe que todos os cálculos que faremos adiante são embasados na existência e propriedades de  $\phi$ .

Assim, seja  $\phi = (S, I)$  solução única maximal de (4.1) em  $\Omega$ , com  $S, I : [t_0, \omega)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ . O processo que descreveremos a seguir remonta ao processo natural para obtermos as fórmulas para  $S$  e  $I$ . Ao final, quanto obtivermos estas fórmulas, verificaremos imediatamente que estas podem ser definidas para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

## II.I) Uma fórmula para $N$ .

Defina  $N : [t_0, \omega)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $N(t) = (S + I)(t)$  para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ . Veremos que  $N$  satisfaz um PVI linear de primeira ordem. Primeiramente, note que  $N^\Delta = S^\Delta + I^\Delta$ . Somando as equações de (4.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
 N^\Delta &= S^\Delta + I^\Delta \\
 &= \left( -\beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - aS + \delta I^\sigma + aK \right) + \left( \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - \delta I^\sigma - aI \right) \\
 &= -a(S + I) + aK \\
 &= -aN + aK \\
 &= a(K - N).
 \end{aligned}$$

Logo  $N$  satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} N^\Delta = -aN + aK \\ N(t_0) = S_0 + I_0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Como  $-a \in \mathcal{R}^+$  e  $aK \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ , segue do Teorema 2.1.13 que  $N$  é dado por

$$N(t) = (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{-a}(t, \sigma(s))a(s)K(s)\Delta s. \quad (4.17)$$

para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ .

II.II) Uma fórmula para  $I$ .

Seja a função auxiliar  $u : [t_0, \omega)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = 1/I(t)$  para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ . Veja que  $u$  está bem definido uma vez que  $(S, I)(t) \in \Omega$  para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ .

De (4.17), tomamos a igualdade  $S = N - I$  e substituindo na segunda equação de (4.1), obtemos

$$\begin{aligned} I^\Delta &= \beta \frac{SI^\sigma}{S^\sigma + I^\sigma} - \delta I^\sigma - aI \\ &= \beta \frac{SI^\sigma}{N^\sigma} - \delta I^\sigma - aI \\ &= \beta(N - I) \frac{I^\sigma}{N^\sigma} - \delta I^\sigma - aI \\ &= \frac{\beta N}{N^\sigma} I^\sigma - \frac{\beta}{N^\sigma} I \cdot I^\sigma - \delta I^\sigma - aI \\ &= -\frac{\beta}{N^\sigma} I \cdot I^\sigma + \left( \frac{\beta N}{N^\sigma} - \delta \right) I^\sigma - aI. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por  $-1/(I \cdot I^\sigma)$ , temos

$$\frac{-I^\Delta}{I \cdot I^\sigma} = \frac{\beta}{N^\sigma} - \left( \frac{\beta N}{N^\sigma} - \delta \right) \frac{1}{I} + a \frac{1}{I^\sigma}.$$

Veja que  $u^\Delta = -I^\Delta/(I \cdot I^\sigma)$ . Dessa forma, substituindo os valores de  $u$  e  $u^\Delta$  na igualdade acima, obtemos

$$u^\Delta = \frac{\beta}{N^\sigma} - (\tilde{\beta} - \delta)u + au^\sigma \quad (4.18)$$

em que  $\tilde{\beta} = N\beta/N^\sigma$ .

Utilizando a identidade  $u^\sigma = u + \mu u^\Delta$ , reescrevemos a equação (4.18)

$$u^\Delta = \frac{\beta}{N^\sigma} - (\tilde{\beta} - \delta)u + a(u + \mu u^\Delta),$$

donde

$$(1 - \mu a)u^\Delta = \frac{\beta}{N^\sigma} + (a + \delta - \tilde{\beta})u.$$

Como  $-a \in \mathcal{R}^+$ , temos o PVI

$$\begin{cases} u^\Delta = \frac{a + \delta - \tilde{\beta}}{1 - \mu a} u + \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)} \\ u(t_0) = u_0 = 1/I_0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Vamos mostrar que  $p := (a + \delta - \tilde{\beta})/(1 - \mu a) = (\delta - \tilde{\beta}) \ominus (-a) \in \mathcal{R}^+$ , uma vez que  $\delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ . Veja que para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$  discreto à direita temos

$$\beta(t) \frac{N(t)}{N^\sigma(t)} - \delta(t) = \beta(t) \frac{N(t)}{N(t) + \mu(t)N^\Delta(t)} - \delta(t) \leq \beta(t) - \delta(t) < 1/\mu(t)$$

Logo  $1 + \mu(t)(\delta(t) - \tilde{\beta}(t)) > 0$  para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ , donde  $\delta - \tilde{\beta} \in \mathcal{R}^+$ .

Além de  $p \in \mathcal{R}^+$ , claramente  $\beta/N^\sigma(1 - \mu a) \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$ . Dessa forma, o PVI (4.19) possui solução única dada por

$$u(t) = u_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(s)) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s. \quad (4.20)$$

para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ .

Fazendo  $u = 1/I$  e  $u_0 = 1/I_0$  em (9), obtemos

$$I(t) = \frac{1}{(1/I_0)e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(s)) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s}.$$

Como  $p \in \mathcal{R}^+$ , podemos tomar  $e_{\ominus p}(t, t_0)$ . Multiplicando a identidade acima pelo fator  $I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)/I_0 e_{\ominus p}(t, t_0) \equiv 1$ , obtemos

$$I(t) = \frac{I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)}{1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(s), t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s} \quad (4.21)$$

para todo  $t \in [t_0, \omega)_{\mathbb{T}}$ , em que  $e_{\ominus p}(t, t_0) = e_p(t_0, t)$  e  $e_p(t_0, t)e_p(t, \sigma(s)) = e_p(t_0, \sigma(s))$ .

Note que  $I$  está bem definida para todo  $t \in \mathbb{T}$  (assim como  $N$ ) uma vez que a integral no denominador de (4.21) é sempre não negativa, uma vez que  $-a, p \in \mathcal{R}^+$  e  $N > 0$  em  $\mathbb{T}$ . Ainda, como  $S = N - I$ , segue a boa definição das fórmulas em (4.2).  $\square$

Uma das motivações para estabelecermos modelos na teoria de escalas temporais está na possibilidade de apenas considerarmos os instantes de tempo que julgamos serem vitais à dinâmica em questão. Mesmo que possamos optar pela modelagem usando  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{T} = [t_0, \infty)$ , nem sempre a escolha destas escalas temporais “completas no tempo” é necessária para uma boa modelagem.

De fato, quando estamos modelando sobre uma escala  $\mathbb{T}$  arbitrária, temos a preocupação de nos seus pontos  $\tau$  discretos à direita tomarmos a granulação  $\mu(\tau)$ , que mede a distância entre  $\tau$  e o próximo ponto da escala  $\sigma(\tau)$ , de forma que ela seja “pequena” quando a solução deste modelo varia “muito” e, analogamente, gostaríamos de tomar  $\mu(\tau)$  “grande” quando esta solução varia “pouco”.

Claro, esta noção é apenas qualitativa e a nossa escolha de  $\mathbb{T}$ , ao menos dentro da modelagem epidemiológica, se baseia principalmente no que já conhecemos do comportamento da doença em questão, de modo que possamos escolher uma escala temporal adequada ao perfil da doença.

A importância de se fazer esta consideração sobre o tamanho de  $\mu(\tau)$  vem da ideia de que nós “perdemos” informação sobre a dinâmica do modelo ao desconsiderar o intervalo de tempo real  $(\tau, \sigma(\tau))$ , ou seja, como o modelo não se preocupa em capturar a dinâmica que acontece nos instantes de tempo dentro do intervalo  $(\tau, \sigma(\tau))$ , ele não é capaz de processar estas novas informações que podem afetar a solução. Mas, de fato, esta desconsideração não é algo negativo caso o que aconteça com a solução dentro deste intervalo de tempo não seja relevante para a dinâmica a partir dali.

Dessa forma, quando sabemos que a solução do modelo deve permanecer aproximadamente constante em um intervalo, consideramos tratar este intervalo com pontos discretos à direita. Por outro lado, quando sabemos que a solução deve apresentar uma variação relevante em um intervalo, é natural este esteja cravejado por pontos densos à direita.

Uma vez que estas preocupações existem sobre a modelagem dentro da teoria de escalas temporais, não é surpreendente que dado um modelo existam outras hipóteses que adéquem os seus parâmetros ao regime temporal estabelecido pela escala temporal tomada. Em particular, os parâmetros de um modelo epidemiológico, como estão intimamente ligados ao fluxo de indivíduos entre categorias em uma população, precisam satisfazer algumas hipóteses de modo que estes fluxos estejam bem definidos.

Podemos ver algumas destas hipóteses adicionais feitas sobre  $a, \beta$  e  $\delta$  no Teorema 4.1.1 quando pedimos que  $-a, \delta - \beta \in \mathcal{R}^+$  e  $K$  seja função não-decrescente. Começamos analisando a hipótese sobre  $K : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  ser não-decrescente. Com efeito, suponha que  $K$  é decrescente e que  $K(t_0) \geq S_0 + I_0$ , como  $N^\Delta = a(K - N)$ , sabemos que enquanto  $K$  for maior que  $N$  a tendência é que  $N$  cresça. Isto significa que a população total tende a aumentar enquanto a diferença entre o número de mortes naturais não ultrapassa o

número de suscetíveis gerados pela natalidade e pela migração.

Todavia, se  $K$  é decrescente e  $N$  cresce enquanto é menor que  $K$ , existe a real possibilidade de a partir de algum momento  $t$  a situação se inverter, em que agora temos  $K(t) < N(t)$ . Deste ponto em diante o número de indivíduos que morrem naturalmente supera o número de novos suscetíveis gerados. Portanto, a tendência é que a população total evolua para a extinção. Logo, a hipótese sobre  $K$  ser não-decrescente significa que a população total também será não-decrescente.

Para os parâmetros  $a, \beta$  e  $\delta$  um outro tipo de hipótese surge, agora relacionado a ser positivamente regressivo. Para o primeiro parâmetro, pedimos que  $-a \in \mathcal{R}^+$ , ou seja, para todo  $t \in \mathbb{T}$  temos  $1 + \mu(t)(-a(t)) > 0$ .

Um primeiro olhar nesta desigualdade não nos fornece uma visão melhor sobre o que esta hipótese representa ao modelo. Todavia, ao reorganizarmos sob a forma  $\mu(t) \cdot a(t) < 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , e ao lembrarmos que a unidade que é dada à  $\mu$  é referente ao tempo, enquanto a unidade referente à  $a$  é o inverso do tempo, podemos perceber o seguinte: Se  $\tau$  um ponto discreto à direita, quanto maior for  $\mu(\tau)$  menor deve ser  $a(\tau)$  e vice-versa, isto é, ao “desconsiderarmos” à dinâmica do modelo no intervalo real  $(\tau, \sigma(\tau))$ , precisamos da garantia que a taxa de mortalidade seja adequada ao tamanho deste intervalo.

Veja, quanto maior for o intervalo desconsiderado, menor deve ser a taxa de mortalidade, enquanto que, quanto menor for este intervalo, maior a taxa de mortalidade poderá ser. Essa condição remonta à ideia de que na passagem de tempo de  $\tau$  para  $\sigma(\tau)$  menos do que um indivíduo que estava vivo no instante  $\tau$  vai morrer. Note que isso não significa que a população não varia neste intervalo. Estamos dizendo que a informação sobre a mortalidade natural não foi perdida ao “desconsiderarmos” o intervalo  $(\tau, \sigma(\tau))$ .

De forma semelhante, a hipótese sobre  $\delta - \beta \in \mathcal{R}^+$ , ou seja, para todo  $t \in \mathbb{T}$  temos  $\mu(t) \cdot (\beta(t) - \delta(t)) < 1$ , representa que um indivíduo infectado que se recuperou no tempo  $\tau$  discreto à direita não se tornará infectado novamente dentro do intervalo de tempo  $(\tau, \sigma(\tau))$ . Caso isso acontecesse, contradiria a hipótese sobre os indivíduos recuperados no instante  $t$  tornarem-se suscetíveis no instante  $\sigma(t)$ , uma vez que dentro deste intervalo de tempo poderia haver a recontaminação pela doença.

Lembre-se que as taxas  $\beta$  e  $\delta$  representam um sobre o tempo médio que um indivíduo suscetível leva para se contaminar pela doença e um sobre o tempo médio que um indivíduo infectado leva para se recuperar, respectivamente. Dessa forma, podemos interpretar  $1/(\beta - \delta)$  como o tempo médio que um indivíduo passa sendo suscetível.

Veja, em geral ao modelarmos temos que  $\delta \leq \beta$ , uma vez que  $\delta \geq \beta$  representa uma doença que deve erradicar-se naturalmente. Assim, se  $\beta - \delta$  é ‘grande’, então  $1/(\beta - \delta)$  é ‘pequeno’, e devemos ter  $\beta$  muito maior do que  $\delta$ . Nessa situação, estamos trabalhando com uma doença que é altamente contagiosa e presente na população (pois a taxa de recuperação é ‘baixa’), então o tempo que um indivíduo passa sendo suscetível corresponde

ao tempo médio que um indivíduo suscetível leva para se infectar, pois após a primeira infecção a tendência é que este indivíduo permaneça infectado.

Por outro lado, se  $\beta - \delta$  é ‘pequeno’, então devemos ter  $\beta$  muito próximo de  $\delta$ . Aqui, a doença possui um perfil contagioso porém de fácil recuperação. Portanto, o tempo médio que um indivíduo passa sendo suscetível é grande, correspondentemente à  $1/(\beta - \delta)$ .

Desse modo, ao pedirmos que  $\mu(\tau) \cdot (\beta(\tau) - \delta(\tau)) < 1$  para  $\tau \in \mathbb{T}$  discreto à direita, dizemos que o intervalo de tempo  $(\tau, \sigma(\tau))$  é menor do que o tempo médio que um indivíduo passa sendo suscetível. Logo, um indivíduo que se recuperou no instante  $\tau$  deve permanecer suscetível até o instante  $\sigma(\tau)$ .

Observe que esta hipótese dialoga com uma das hipóteses sobre o modelo SIS em que estabelecemos que um indivíduo recuperado no tempo  $\tau \in \mathbb{T}$  discreto à direita torna-se suscetível no instante  $\sigma(\tau)$ . De fato, estamos dizendo que a informação desta dinâmica para os indivíduos *recuperados* não é perdida no intervalo  $(\tau, \sigma(\tau))$ , evitando que estes tornem-se infectados novamente antes de  $\sigma(\tau)$ .

**Corolário 4.1.1.1.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, a solução de (4.1) permanece para todo instante de tempo  $t \in \mathbb{T}$  em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .*

Uma das primeiras preocupações que surgem após a construção de um modelo epidemiológico como o SIS é se dada uma condição inicial com entradas não negativas então a solução do PVI dado por esta condição permanece não negativa quando o tempo evolui. Quando a modelagem é feita na teoria clássica, nos preocupamos apenas em fazer esta verificação para os instantes de tempo após o tempo inicial  $t_0$ . Aqui, como a nossa escala começa em  $t_0$ , verificamos esta propriedade para toda à escala  $\mathbb{T}$ .

A importância desta verificação está em testar a admissibilidade do modelo. Veja, ao começarmos com uma condição inicial não negativa, dizemos que cada população considerada pelo modelo é nula ou positiva no tempo inicial, o que faz completo sentido uma vez que seria um absurdo tomarmos alguma destas populações negativa. Mas não basta que a condição inicial seja admissível, precisamos que a solução maximal que surge através dela também seja não negativa para todo ponto da escala.

Observe que ao mostrar a solução de (4.1) é invariante em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  não provamos que este modelo é um bom retrato das dinâmicas que ocorrem entre suscetíveis e infectados, no lugar disso, apenas verificamos que as soluções refletem o que é esperado da modelagem de populações que nunca ficam negativas. Além disso, podemos testar continuar testando a admissibilidade do modelo ao verificarmos as soluções de (4.1) para algumas condições iniciais específicas.

É intuitivo pensarmos que se em um população dada, em algum momento o número de infectados chega a zero, então a partir daquele momento a doença se extingue. Assim,



ao considerarmos o PVI (4.1) com as novas condições iniciais  $S_0 > 0$  e  $I_0 = 0$ , devemos ter que  $I(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . E, de fato, para este novo PVI temos como solução  $(S(t), I(t)) = (N(t), 0)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , o que nos mostra que uma população sem doentes deve permanecer desta forma. Lembrem-se que o fluxo migratório que consideramos é constituído por apenas indivíduos suscetíveis.

**Proposição 4.1.2.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, então  $N = S + I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função não-decrescente que satisfaz  $N(t) \leq K(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Ainda, se*

$$\int_{t_0}^{\infty} a(s) \Delta s = +\infty, \quad (4.22)$$

então  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t)$ .

*Demonstração.* De fato, na demonstração do Teorema 4.1.1 mostramos que  $K$  não-decrescente e que satisfaz  $K(t_0) \geq S_0 + I_0$  implica que  $N$  é não-decrescente com  $N(t) \leq K(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Vamos então mostrar que  $\int_{t_0}^{\infty} a(s) \Delta s = \infty$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t)$ . Com efeito, como  $a \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_0^+)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $-a \in \mathcal{R}^+$ , então pelo Lema 2.1.17 segue que  $e_{-a}(t, t_0) \leq \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) \Delta s\right)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Disso, segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{-a}(t, t_0) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\ominus(-a)}(t, t_0) = +\infty$ .

Tome  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(t) = N(t) - (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Observe que pela identidade (4.17) temos que  $F$  é não negativa. Ainda, pelo Teorema A.2.7, como  $e_{\ominus(-a)}(t, t_0), [e_{\ominus(-a)}(t, t_0)]^\Delta > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t e_{-a}(t_0, \sigma(s)) a(s) K(s) \Delta s}{e_{\ominus(-a)}(t, t_0)} \\ &\stackrel{(a)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_{-a}(t_0, \sigma(t)) a(t) K(t)}{\ominus(-a)(t) e_{\ominus(-a)}(t, t_0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{\ominus(-a)(t)} e_{-a}(t, \sigma(t)) K(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{\ominus(-a)(t)} e_{\ominus(-a)}(\sigma(t), t) K(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1}{\ominus(-a)} \cdot (1 + \mu(\ominus(-a)))(t) K(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1 - \mu a}{a} \cdot \frac{1}{1 - \mu a}(t) K(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) \end{aligned}$$

em que (a) é verdadeiro pelo Teorema A.2.7, uma vez que  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t)$  existe já que  $K$  é monótono e limitado.

Por fim, basta vermos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (S_0 + I_0)e_{-a}(t, t_0) + \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t).$$

□

Na Proposição 4.1.2, verificamos que uma taxa de mortalidade natural alta não é suficiente para que a população descrita por este modelo tenda à zero. De fato, por maior que seja esta taxa (que nas hipóteses é “medida” através da integral  $\int_{t_0}^{\infty} a(s) \Delta s \geq 0$ , representando uma “acumulação” de  $a$  ao longo de  $\mathbb{T}$ ), temos que o fluxo imigratório combinado com a natalidade natural (que a cada instante  $t \in \mathbb{T}$  injeta  $a(t)K(t)$  novos indivíduos nesta população) é capaz de suplantar as mortes naturais mantendo a população total crescendo ou estabilizada. Isso pois esta introdução de novos indivíduos é não-decrescente.

No Teorema 4.1.3, discutimos algumas hipóteses que garantem que o número de infectados dado pela solução (4.2) fica controlado no tempo.

**Teorema 4.1.3.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, se  $p(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , então  $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dado em (4.2) é uma função não-crescente. Ainda mais, tomando  $P, B \in \overline{\mathbb{R}}$  dados por*

$$P := \int_{t_0}^{\infty} p(s) \Delta s \quad e \quad B := \int_{t_0}^{\infty} \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s,$$

*temos os seguintes resultados:*

- (i) *Se  $P = \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .*
- (ii) *Se  $P < \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \Leftrightarrow B = \infty$ .*

*Demonstração.* Primeiro vejamos que se  $p \geq 0$ , então  $I$  é função não-crescente. Com efeito, tome as funções  $u, v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\begin{aligned} u(t) &= I_0 e_{\ominus p}(t, t_0), \\ v(t) &= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(s), t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s. \end{aligned}$$

Pelas identidades em (4.2), temos que  $I(t) = u(t)/v(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Note que  $u$  e  $v$  são funções diferenciáveis em que  $u^\Delta(t) = I_0(\ominus p)(t) \cdot e_{\ominus p}(t, t_0) \leq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$

e  $v^\Delta(t) = I_0 e_{\ominus p}(\sigma(t), t_0) \beta(t) / [N(\sigma(t))(1 - \mu(t)a(t))] \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo  $u$  é uma função não-crescente e  $v$  é uma função não-decrescente, donde  $I = u/v$  é uma função não-decrescente.

Como  $I(t_0) = I_0$ ,  $I(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $I$  é uma função não-decrescente, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$  existe e temos  $\lim_{t \in \infty} I(t) = I^* \in [0, I_0]$ . Desse modo, tomando  $P$  e  $B$  conforme o enunciado, vamos demonstrar os resultados (i) e (ii).

(i) Seja  $P = \infty$ . Primeiro, mostremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t, t_0) = \infty$ . Com efeito, como  $p \in C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)$ , então segue do Lema 2.1.17 que

$$1 + \int_{t_0}^t p(s) \Delta s \leq e_p(t, t_0) \leq \exp \left( \int_{t_0}^t p(s) \Delta s \right). \quad (4.23)$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Logo, fazendo  $t \rightarrow \infty$ , segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t, t_0) = \infty$ . Ainda, como  $e_{\ominus p}(\cdot, t_0) = 1/e_p(\cdot, t_0)$ , segue imediatamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\ominus p}(t, t_0) = 0$ .

Por fim, vejamos que pela identidade para  $I$  em (4.2) temos que para todo  $t \in \mathbb{T}$

$$I(t) = \frac{I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)}{1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(s), t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s} \leq I_0 e_{\ominus p}(t, t_0),$$

donde segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

(ii) Seja  $P < \infty$ . Lembre-se que pela Proposição 4.1.2 temos que  $0 < S_0 + I_0 \leq N(t) \leq K(t) < M$ , em que  $M$  é alguma cota superior para a função  $K$ .

Observe que as funções  $u$  e  $v$  são ambas funções positivas e, em particular,  $u$  é limitada e monótona, donde  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  existe.

Caso  $v$  seja limitada, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  existe, por outro lado, se  $v$  é ilimitada, então como  $v$  é não-decrescente, segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ .

Assim, se  $v$  é limitada, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) / \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ , caso  $v$  seja ilimitada, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ . Logo, temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  se, e somente se,  $v$  é ilimitada.

Dessa forma, para demonstrarmos o resultado (ii) basta checarmos que  $v$  é ilimitada se, e somente se,  $B = \infty$ . Para isso, é necessário e suficiente demonstrarmos que existem constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$c_1 \int_{t_0}^t \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s \leq v(t) - 1 \leq c_2 \int_{t_0}^t \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s.$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Desse modo, para  $v$  temos

$$\begin{aligned}
v(t) &= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(\sigma(s), t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s \\
&= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \left( \frac{1 + \mu p}{1 + \mu p} + \mu \frac{-p}{1 + \mu p} \right) (s) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)}(s) \Delta s \\
&= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a)(1 + \mu p)}(s) \Delta s \\
&= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 - \mu a) \left( \frac{1 - \mu a}{1 - \mu a} + \mu \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu a} \right)}(s) \Delta s \\
&= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\stackrel{(a)}{\geq} 1 + I_0 \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s p(\tau) \Delta \tau\right) \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\stackrel{(b)}{\geq} 1 + I_0 \exp\left(-\int_{t_0}^\infty p(\tau) \Delta \tau\right) \int_{t_0}^t \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\stackrel{(c)}{\geq} 1 + \frac{I_0}{M} \exp\left(-\int_{t_0}^\infty p(\tau) \Delta \tau\right) \int_{t_0}^t \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s
\end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , em que (a) e (b) são verdadeiras pois  $e_{\ominus p}(t, t_0) \geq \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) \Delta s\right) \geq \exp\left(-\int_{t_0}^\infty p(s) \Delta s\right)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  por (4.23); e (c) é verdade pois  $N(t) \leq M$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $1/N(\sigma(t)) \geq 1/M$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Logo, basta tomar  $c_1 = I_0 e^{-P}/M$ . Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
v(t) &= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\stackrel{(d)}{\leq} 1 + I_0 \int_{t_0}^t \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\stackrel{(e)}{\leq} 1 + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s
\end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , em que (d) é verdadeiro pois  $e_{\ominus p}(\cdot, t_0) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ ; e (e) é verdadeiro pois  $1/N^\sigma(t) \leq 1/(S_0 + I_0)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Logo, basta tomar  $c_2 = I_0/(S_0 + I_0)$ .  $\square$

No Teorema 4.1.3, quando pedimos que  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada conforme o Teorema 4.1.1, seja não-negativa, estamos dizendo que para todo  $t \in \mathbb{T}$  temos  $a(t) + \delta(t) \geq \beta(t)$ . Isso significa que a cada instante de tempo existem mais indivíduos morrendo ou recuperando-se da doença do que tornando-se infectados. Não surge como uma surpresa, então, quando esta hipótese implica no número de infectados pelo tempo ser uma função não-decrescente.

No Capítulo 3, quando discutimos o modelo SIS autônomo, nós introduzimos a ideia sobre o número de reprodutibilidade basal, denotado por  $R_0$ . Esse número (que em geral é definido para modelos epidemiológicos autônomos) resume em si o comportamento assintótico a longo prazo que uma doença tratada por este modelo possui. Todavia, por mais que para o modelo SIS não-autônomo nós não possamos utilizar a mesma ideia, ainda podemos revisitá-la para ajudar-nos a interpretar as outras hipóteses do Teorema 4.1.3.

De fato, previamente definimos  $P_0 = 1 - \alpha/N_0$ , em que  $\alpha = N_0(a + \delta - \beta)/\beta$ . Note que, neste caso, temos  $P_0 < 1$  se, e só se,  $\alpha > 0$ , e analogamente,  $P_0 > 1$  se, e só se,  $\alpha < 0$ , em que  $P_0$  é um número que, se não é o número de reprodutibilidade basal da doença em questão, então é análogo no sentido de que  $R_0 > 1$  se, e só se,  $P_0 > 1$ , além de que,  $R_0 < 1$  se, e só se,  $P_0 < 1$ . Interpretação, esta, que vem da análise dos pontos de equilíbrio do modelo SIS autônomo.

Agora, consideraremos  $P_0$  como uma função da escala temporal, assim como fizemos com os parâmetros  $a, \delta, \beta$  e  $K$  ao montarmos o modelo SIS não-autônomo.

Naturalmente, definimos  $P_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $P_0(t) = 1 - \alpha(t)/N_0$ , com  $\alpha(t) = N_0(a(t) + \delta(t) - \beta(t))/\beta(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Aqui, entendemos  $P_0(t)$  como a média de indivíduos infectados gerados por um único indivíduo infectado no tempo  $t \in \mathbb{T}$ . Ou seja, se no tempo  $t \in \mathbb{T}$  recolhêssemos um único infectado e o colocássemos em uma população com apenas suscetíveis, após a interação entre essas pessoas, esperaríamos o surgimento de  $P_0(t)$  novos casos de infecção. Portanto, a média do número de casos secundários causados por um único indivíduo infectado no tempo  $t$  será menor ou igual à  $P_0(t)$ , dependendo do número de suscetíveis no tempo  $t$ .

Com isso em mente, veja que  $p(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  se, e somente se,  $P_0(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Logo, sob a hipótese do Teorema 4.1.3 de  $p(t) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , temos que para qualquer instante de tempo a média de indivíduos infectados secundários gerados por um único indivíduo infectado é no máximo 1. Isso mostra que esta doença pode, no máximo de sua eficiência, manter seu número de infectados constante.

Veja que se  $P_0(t) < 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , então é razoável dizer que esta doença deve erradicar-se com o tempo e, de fato, neste caso temos que  $a(t) + \delta(t) < \beta(t)$  para  $t \in \mathbb{T}$ , o que nos mostra que existem menos pessoas tornando-se infectadas do que recuperando-se ou morrendo naturalmente.

Uma vez esclarecidas estas ideias, podemos entender melhor o significado de  $P$  à partir do  $P_0$ . Para isso, podemos reescrever  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$p(t) = (1 - P_0(t)) \cdot \frac{N_0 \beta(t)}{1 - \mu(t)a(t)}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ , e observarmos que para uma escala de granulação limitada tal que  $b = \inf_{t \in \mathbb{T}} \beta(t) > 0$ ,  $\|a\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} a(t) < \infty$  e  $\|\beta\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} \beta(t) < \infty$ , vale a seguinte “equivalência” de integrais

$$\frac{bN_0}{1 - \|\mu\|_\infty \cdot \|a\|_\infty} \int_{t_0}^\infty 1 - P_0(s) \Delta s \leq P \leq \|\beta\|_\infty N_0 \int_{t_0}^\infty 1 - P_0(s) \Delta s.$$

Note que sob estas hipóteses, que estão longe de serem muito específicas, temos que  $P = \infty$  se, e só se,  $\int_{t_0}^\infty 1 - P_0(s) \Delta s = \infty$ , e analogamente,  $P < \infty$  se, e só se,  $\int_{t_0}^\infty 1 - P_0(s) \Delta s < \infty$ . Dessa forma, sabemos que a interpretação de  $P$  está intimamente conectada com a interpretação da integral envolvendo  $P_0$ .

Observe que, como  $P_0(t) \in [0, 1]$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , podemos entender  $1 - P_0(t) \in [0, 1]$  como a defasagem **entre** a média de indivíduos suscetíveis que, ao entrarem em contato com um único infectado no tempo  $t \in \mathbb{T}$ , tornam-se infectados no próximo instante de tempo, e a maior média desses casos de infecção secundários que pode haver quando  $p(t) \geq 0$  para  $t \in \mathbb{T}$ . Isto é,  $1 - P_0(t)$  representa o número médio de casos de infecção secundários que, caso fossem acrescentados ao número médio de casos de infecção secundários real, dariam ao número de infectados a *possibilidade* de manter-se constante, contribuindo com a sobrevida da doença.

Logo, neste caso  $1 - P_0(t)$  mede o quão “distante” uma doença está, no tempo  $t$ , de continuar presente na população. Como esta interpretação sobre  $1 - P_0$  só nos fornece uma estimativa imediata de como o número de infectados deve variar com o surgimento de novos infectados, precisamos de uma ferramenta que analise globalmente a função  $1 - P_0$ , a fim de extrairmos, igualmente, uma conclusão global. E, uma forma de fazermos isto é a partir da integral  $\int_{t_0}^\infty 1 - P_0(s) \Delta s$ , que mede a “acumulação” de  $1 - P_0$  sobre  $\mathbb{T}$ .

Assim, munidos destas interpretações e apoiados nas inequações anteriores, podemos dizer que: (i)  $P < \infty$  se, somente se, o número médio de indivíduos suscetíveis que entraram em contato com um único indivíduo infectado e tornaram-se infectados tende à 1 “rapidamente” com o passar do tempo, o que significa que esta doença não demora a apresentar o perfil de uma doença em que cada infectado consegue infectar alguém, mantendo esta subpopulação constante.

Neste contexto,  $P < \infty$  demonstra que a doença possui potencial para manter-se presente na população, em que esta presença ocorre com o número de infectados mantendo-se constante. Por outro lado, (ii)  $P = \infty$  se, e somente se, o número de casos secundários

de infecção ou não tende à 1 (o que demonstra que esta é uma doença em que dificilmente um indivíduo infectado consegue passar adiante a doença e, portanto, perpetuá-la na população) ou o número de casos secundários de fato tende à 1, mas mesmo isso ocorrendo, o seu crescimento à 1 é tão “lento” que, por mais que o potencial de criar-se novos infectados com o passar do tempo cresça, o número de infectados decresce exponencialmente nesse meio tempo, o que impede a manutenção do número de infectados.

Logo  $P$  está relacionado com a incapacidade de geração de *novos infectados* desta doença, afim de perpetuá-la. Portanto, se estamos lidando com uma doença em que cada infectado produz, em geral, menos de um novo indivíduo infectado, então esperamos que  $P = \infty$ . Se cada infectado produz, no máximo, um novo infectado, mas esta geração ocorre lentamente, ou seja, muito tempo após o contágio, então também esperamos que  $P = \infty$ .

Por outro lado, se estamos lidando com uma doença em que cada indivíduo infectado produz, em geral, um novo indivíduo infectado, e esta geração ocorre rapidamente, ou seja, em curto espaço de tempo após o contágio, então esperamos que  $P < \infty$ . Nessa situação específica não podemos afirmar nada além de que a doença possui potencial para perpetuar-se, pois, por mais que haja uma criação rápida de novos infectados, mantendo o número de infectados aproximadamente constante, o que será crucial para a continuidade da doença será o perfil da sua taxa de transmissão. Perfil este que, semelhante a outras análises, pode-se ser feita sobre a integral  $B = \int_{t_0}^{\infty} \beta(s)/(1 - \mu(s)(\delta - \beta)(s)) \Delta s$ .

Em resumo, nas situações em que  $P = \infty$ , fica claro que o número de novos infectados deve decrescer com o tempo e, de fato, pela demonstração do teorema anterior, sabemos que  $I$  decai à 0 de forma exponencial. Por outro lado, se  $P < \infty$ , como cada indivíduo infectado produz, aproximadamente, um novo indivíduo infectado, e esta geração é rápida após o contágio, então o que determina se esta população de infectados se mantém ou se decai à 0, é se a taxa de transmissão é “globalmente significativa” para a manutenção da transmissão da doença. Isso pois, se a taxa de transmissão é “globalmente significativa”, então em um curto período de tempo um indivíduo infectado pode gerar outro. Todavia, se a taxa de transmissão é “globalmente insignificante”, então por mais que a geração de um novo infectado à partir do contágio seja rápida, o própria taxa de transmissão pode ser muito baixa, fazendo o contágio ser menos provável de acontecer.

Assim, quando  $P < \infty$ , os infectados têm a chance de manter sua subpopulação constante, mas isso depende única e exclusivamente de o quão “eficiente” ou “significativa”  $\beta$  é globalmente. E, para medirmos esta “eficiência global” da taxa de transmissão, usamos a integral definida por  $B$  que é diretamente proporcional à  $\beta$  e surge como uma forma de mensurarmos esta taxa em  $\mathbb{T}$ .

No Teorema 4.1.4 exploraremos o caso quando  $p(t) < 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

**Teorema 4.1.4.** *Nas hipóteses do Teorema 4.1.1, seja  $p(t) < 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Tomando  $P_{\ominus}, B \in \overline{\mathbb{R}}$  dados por*

$$P_{\ominus} := \int_{t_0}^{\infty} \ominus p(s) \Delta s \quad e \quad B = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s,$$

*temos os seguintes resultados*

(i) *Se  $P_{\ominus} = \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{a + \delta}{\beta}(t) - 1 \right| = 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .*

(ii) *Se  $P_{\ominus} = \infty$  e  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{a + \delta}{\beta}(t) - 1 \right| > 0$ , então  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$ .*

(iii) *Se  $P_{\ominus} < \infty$  e  $B = \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .*

(iv) *Se  $P_{\ominus} < \infty$  e  $B < \infty$ , então  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada conforme o Teorema 4.1.1, tal que  $p(t) < 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Veja que seu inverso  $\ominus p$  dado por  $(\ominus p)(t) = -p(t)/(1 + \mu(t)p(t))$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  é estritamente positivo, uma vez que  $p \in \mathcal{R}^+$ . Dessa forma, pelo Lema 2.1.17, ficamos munido das seguintes desigualdades

$$1 + \int_{t_0}^t \ominus p(s) \Delta s \leq e_{\ominus p}(t, t_0) \leq \exp \left( \int_{t_0}^t \ominus p(s) \Delta s \right) \leq \exp \left( \int_{t_0}^{\infty} \ominus p(s) \Delta s \right) \quad (4.24)$$

que valem para todo  $t \in \mathbb{T}$ , em que a última desigualdade faz sentido em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Considere novamente  $u, v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , dados conforme a demonstração do Teorema 4.1.3, tais que  $I = u/v$ . Vejamos que  $B = \infty$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ . De fato, como  $(\ominus p)(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , então  $e_{\ominus p}(\cdot, t_0)$  é uma função não-decrescente, e como  $e_{\ominus p}(t_0, t_0) = 1$ , segue então que  $e_{\ominus p}(t, t_0) \geq 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Dessa forma, vale a identidade

$$v(t) \stackrel{(a)}{=} 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^{\sigma}(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \quad (4.25)$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Lembre-se que  $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada, pois  $0 \leq I(t) \leq M$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , em que  $M > 0$  é uma cota superior de  $K$ . Assim, se tivermos  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ , mas não necessariamente a recíproca é verdadeira.



Com estas ideias em mente, demonstraremos os itens (i),(ii),(iii) e (iv).

(iii) Sejam  $P_{\ominus} < \infty$  e  $B = \infty$ . Logo, por (4.24) temos que  $u$  é limitado, enquanto que pela desigualdade (4.25) temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ . Portanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u/v)(t) = 0$ .

(ii) Sejam  $P_{\ominus} = \infty$  e  $\liminf_{t \rightarrow \infty} |a(t) + \delta(t) - \beta(t)|/\beta(t) > 0$ . Veja que a hipótese sobre  $P_{\ominus} = \infty$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ , pela desigualdade (4.24). Ainda, como  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ . Logo, como  $v(t), v^{\Delta}(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , podemos aplicar o Teorema A.2.7 da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{u^{\Delta}(t)}{v^{\Delta}(t)} \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ominus p)(t) e_{\ominus p}(t, t_0)}{e_{\ominus p}(t, t_0) \frac{\beta}{N^{\sigma}(1 + \mu(\delta - \beta))}(t)} \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N^{\sigma}}{\beta} \cdot \ominus p \cdot (1 + \mu(\delta - \beta))(t) \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N^{\sigma}}{\beta} \cdot \left( \frac{-p}{1 + \mu p}(t) \right) \cdot (1 + \mu(\delta - \beta))(t) \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N^{\sigma}}{\beta} \cdot \left( -\frac{\frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu a}}{1 + \mu \frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu a}} \right) (t) \cdot (1 + \mu(\delta - \beta))(t) \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N^{\sigma}}{\beta} \cdot \left( -\frac{\frac{a + \delta - \beta}{1 - \mu a}}{\frac{1 - \mu a + \mu a + \mu(\delta - \beta)}{1 - \mu a}} \right) (t) \cdot (1 + \mu(\delta - \beta))(t) \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N^{\sigma}}{\beta} \cdot |a + \delta - \beta| \\
&\stackrel{(a)}{\geq} (S_0 + I_0) \cdot \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{|a + \delta - \beta|}{\beta} > 0.
\end{aligned}$$

em que (a) é verdadeiro pela Proposição 4.1.2. Portanto,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$ .

(i) Sejam  $P_{\ominus} = \infty$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} |a(t) + \delta(t) - \beta(t)|/\beta(t) = 0$ . Analogamente ao que foi feito no item anterior, podemos utilizar o Teorema A.2.7 para encontrarmos a desigualdade

$$(S_0 + I_0) \cdot \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{|a + \delta - \beta|}{\beta}(t) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq M \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|a + \delta - \beta|}{\beta}(t),$$

donde, como  $\lim_{t \rightarrow \infty} |a(t) + \delta(t) - \beta(t)|/\beta(t) = 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

(iv) Sejam  $P_\ominus < \infty$  e  $B < \infty$ . Note que por (4.24) temos

$$\begin{aligned}
v(t) &= 1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s \\
&\leq 1 + \frac{I_0}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^s \ominus p(s) \Delta s\right) \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s \\
&\leq 1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} \int_{t_0}^t \frac{\beta}{1 + \mu(\delta - \beta)}(s) \Delta s \leq 1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} B.
\end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Note também que pela fórmula de  $I$  dada em (4.2) e pela desigualdade (4.24), temos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)}{1 + I_0 \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(s, t_0) \frac{\beta}{N^\sigma(1 + \mu(\delta - \beta))}(s) \Delta s} \\
&\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_0 e_{\ominus p}(t, t_0)}{1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} B} \\
&\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_0}{1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} B} \left(1 + \int_{t_0}^t \ominus p(s) \Delta s\right) \\
&= \frac{I_0}{1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} B} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \int_{t_0}^t \ominus p(s) \Delta s\right) \\
&= \frac{I_0(1 + P_\ominus)}{1 + \frac{I_0 e^{P_\ominus}}{S_0 + I_0} B} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$ . □

De forma semelhante a ideia que desenvolvemos para  $P, B \in \overline{\mathbb{R}}$  definidos no Teorema 4.1.3, aqui entendemos que a interpretação de  $P_\ominus$  segue análoga à interpretação de  $P$ , uma vez que ambos podem ser vistos como integrais “equivalentes” a integral do módulo de  $p$  sobre  $\mathbb{T}$ .

Observe que a maior diferença entre  $P$  e  $P_\ominus$  está no denominador  $1 + \mu \cdot p$  que surge na expressão de  $P_\ominus$ . Todavia, como a parte “dimensional” desta expressão, isto é, tudo aquilo dentro da integral que representa uma grandeza física real, está ligada à  $|p|$  e não à

$1 + \mu \cdot p$ , então a interpretação de  $P_{\ominus}$  está intimamente ligada à da função  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , assim como a integral  $P$ . As informações que estes denominadores adimensionais encodificam, devem, portanto, agregar à interpretação que já desenvolvemos para estas expressões.

Assim, trataremos aqui  $P_{\ominus}$ , assim como  $P$ , como uma grandeza intimamente ligada à incapacidade de uma doença perpetuar-se na população através da geração de novos infectados.

Desse modo, os resultados (iii) e (iv) do Teorema 4.1.4 surgem como uma releitura do item (ii) do Teorema 4.1.3, com a diferença de que, para  $p(t) < 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , o comportamento de  $I$  pode não ser assintótico, logo não podemos afirmar que a população de infectados estabiliza-se em algum valor. Dessa forma, se queremos saber se a doença persiste na população, no lugar de nos perguntarmos se  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I^* > 0$ , precisamos perguntar se  $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) = I^* > 0$ , uma vez que esta doença pode variar de forma sazonal na população mantendo-se sempre presente.

O que surge como novidade então em relação ao Teorema 4.1.3 são os resultados (i) e (ii) do Teorema 4.1.4. Neste caso, quando  $P_{\ominus} < \infty$ , quem determina a persistência da doença na população são as taxas  $a, \delta$  e  $\beta$ . Aqui, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} |(a + \delta)(t)/\beta(t) - 1| = 0$ , então por mais que em média o mesmo número de pessoas tornando-se suscetíveis ou morrendo se iguale ao número de novos infectados, a geração de novos infectados ocorre mais lentamente, uma vez que  $P_{\ominus} < \infty$ , e, portanto, o número de infectados deve cair à 0.

Por outro lado, mesmo quando a geração de novos infectados é lenta, isto é,  $P_{\ominus} < \infty$ , se a taxa de transmissão é (a partir de certo tempo) maior do que as taxas combinadas  $a + \delta$ , então os novos infectados criados são criados em quantidade o suficiente para serem capazes de compensar a lentidão em que são criados, mantendo assim um número mínimo de infectados na população.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos e elaboramos alguns resultados da teoria de escalas temporais a fim de concretizarmos uma modelagem epidemiológica nesta área. O objetivo deste trabalho, então, é de lançar mão dos resultados e técnicas básicas que podem ser utilizadas na modelagem de algum problema biológico, sobretudo dentro da epidemiologia, utilizando-se a teoria de escalas temporais. Como a literatura biomatemática nesta área é escassa, trazemos com este trabalho algumas ideias que, além de incentivar a modelagem, também fornecem alguns resultados que fundamentam a implementação de tais modelos.

O modelo epidemiológico que desenvolvemos aqui, o modelo SIS, já possui uma versão na literatura de escalas temporais [4], todavia nós revisitamos este modelo com duas algumas intenções: a primeira intenção é propormos uma nova versão do modelo SIS de [4], em que as equações do seu PVI (3.1) estejam biologicamente fundamentadas; a segunda intenção é de, uma vez proposto este novo modelo SIS (3.1), queremos generalizá-lo de modo à considerar os seus parâmetros como funções de uma escala temporal, donde esta generalização passa a ser não-autônoma (4.1); e a terceira intenção é a de aplicar este modelo em algum contexto real.

Assim, neste trabalho nós propomos um novo modelo SIS, embasando à sua modelagem com argumentos biológicos, desenvolvemos os resultados teóricos suficientes para demonstrarmos que este modelo está bem definido e ainda desenvolvemos outros resultados para à análise deste modelo. Além disso, aplicamos a versão autônoma deste modelo à um surto de gastroenterite aguda que ocorreu no município de Itatiaia, no estado do Rio de Janeiro, em 2002 [10].

Dessa forma, no Capítulo 4 nós propomos um modelo SIS não-autônomo (4.1). As justificativas biológicas para esta modelagem estão presentes no Capítulo 3, onde estudamos, primeiramente, este mesmo modelo na sua versão autônoma. Os resultados teóricos que precisamos lançar mão para demonstrarmos que o modelo do Capítulo 4 (4.1), assim como a sua versão autônoma no Capítulo 3 (3.1), estão bem definidos estão presentes na Seção 2.2 no Capítulo 2. Ainda, como para este modelo nós conseguimos determinar a sua solução explícita via solução de PVI's lineares de primeira ordem, no Capítulo 2, na Seção 2.1, nós estudamos os PVI's lineares lineares de primeira ordem em escalas temporais.

## DESAFIOS E TRABALHOS FUTUROS

Algumas questões acerca do uso da teoria de escalas temporais e algumas particularidades no seu uso ainda não estão totalmente claras. A primeira dificuldade que encontramos quando modelamos uma dinâmica (seja epidemiológica ou não) é em relação a qual escala temporal iremos utilizar. A princípio, não existe um critério único e exato

na escolha de tal escala.

O que nós fizemos, então, no modelo para o surto de gastroenterite em Itatiaia, foi justificar a escolha da escala temporal trabalhada de acordo com a variação dos dados (veja a Figura 3) que já estavam disponíveis. E, de fato, esta não pode ser a *única* forma de se definir uma escala temporal para um modelo. Afinal, essa abordagem só funciona ao modelarmos a evolução de uma epidemia que já ocorreu e para a qual possuímos os dados da sua evolução catalogados, o que nem sempre é o caso.

Por outro lado, apesar da falta de um critério claro, entendemos que a granulação da escala está intimamente ligada com a magnitude da variação da solução. De modo que, se a solução varia muito em um curto período de tempo, então o ideal é que a granulação neste período seja pequena, uma vez que isso implica em um melhor acompanhamento da evolução da solução.

Para exemplificar essa necessidade, podemos considerar o seguinte exemplo ingênuo: Suponha que a função  $\varphi(t) = \cos(t^2)$ , veja a Figura 6, seja uma solução de uma equação dinâmica. Suponha também que independente da escala temporal tomada para esta equação dinâmica,  $\varphi$  é sempre uma de suas soluções.

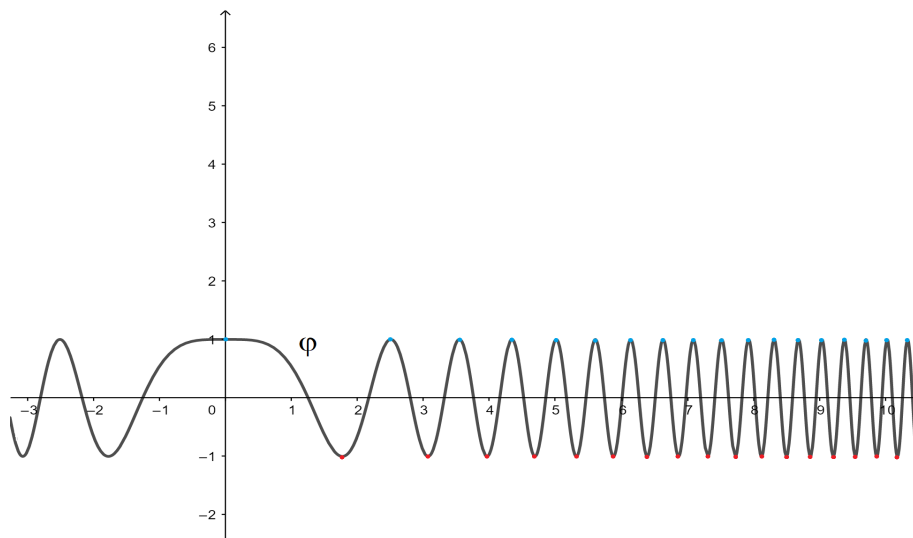


Figura 6 – Em preto, temos o gráfico de  $\varphi$  para alguns valores de  $t \in \mathbb{R}$ .

Observe então que, se tomássemos a escala temporal  $\mathbb{T}_1$  dada pela projeção em  $\mathbb{R}$  dos pontos vermelhos da Figura 6, teríamos que  $\varphi(t) = -1$  para todo  $t \in \mathbb{T}_1$ . Se tomássemos a escala temporal  $\mathbb{T}_2$  dada pela projeção em  $\mathbb{R}$  dos pontos azuis da Figura 6, teríamos  $\varphi(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{T}_2$ . Aqui fica claro que, por mais que uma escala tenha infinitos pontos, ou seja compacta, ou seja de granulação limitada, ou tenha periodicidade (basta pensarmos em  $\phi(t) = \cos(t)$ , por exemplo), nada disso garante que, quando olharmos para o gráfico da solução de uma equação dinâmica, estamos observando toda a variação que aquela solução pode ter.

O leitor, agora, pode achar um pouco estranho termos assumido no exemplo anterior que  $\varphi$  possui a mesma fórmula independente da escolha da escala temporal da sua equação dinâmica. Por isso vale comentar que, existem sim exemplos, ainda que ingênuos, de soluções que se comportam dessa maneira. Por exemplo, se tomarmos a equação dinâmica  $x^\Delta = 0$ , o seu conjunto de soluções é dado pelas funções constantes e isso acontece independentemente da escala temporal tomada. Ainda, além desse exemplo trivial, não é um absurdo completo supor tal  $\phi$ . Isso pois, por mais que (em geral) a cara explícita de uma solução de uma equação dinâmica mude de escala temporal para escala temporal (basta pensarmos, por exemplo, nas soluções das PVI's de primeira ordem, que dependem, na sua forma, diretamente da integral da escala em que estão definidos), se as escalas são “parecidas”, então as soluções para uma mesma equação também são parecidas.

Veja também que não há grande problema em pensarmos que uma equação dinâmica  $x^\Delta = f(t, x)$  pode ser resolvida para diversas escalas temporais, uma vez que o que prende uma equação desta à uma escala é apenas o domínio temporal de  $f(t, \cdot)$ . Então, se  $f(t, \cdot)$  pode ser definida, por exemplo, em mais de uma escala temporal, a equação  $x^\Delta = f(t, x)$  também pode.

Estas considerações nos sugerem que há a necessidade de um critério claro, baseado na equação dinâmica, que nos permita determinar se uma escala temporal é adequada para aquela equação. Assim, como um trabalho futuro, fica tanto o amadurecimento na discussão desse tema quando, de fato, o estabelecimento deste critério.





## REFERÊNCIAS

- [1] BOHNER, M. Some Oscillation Criteria For First Order Delay Dynamic Equations, **Functional Differential Equations**, vol. 16, 2005.
- [2] BOHNER, M.; PETERSON, A. **Advances in dynamic equations on time scales**. Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 2003.
- [3] BOHNER, M.; PETERSON, A. **Dynamic equations on time scales, An introduction with applications**. Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 2001.
- [4] BOHNER, M.; STREITPERT, S. The SIS-Model on Time Scales. **Pliska Stud. Math.**, 26:11–28, 2016. ISSN 0204-9805.
- [5] BORZUNOV, S.; KURGALIN, S. **The Discrete Math Workbook: A Companion Manual for Practical Study**. Springer, 1. ed., 2018.
- [6] CARDOSO D. D.; SANTOS R. A. Astrovírus. **Rev. Patol. Trop.**, 34: 161-174, 2005.
- [7] HILGER, S. **Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrums-mannigfaltigkeiten**. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade de Würzburg. Alemanha, 1988.
- [8] LIMA, E. L. **Análise no  $\mathbb{R}^n$** . Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [9] OLIVEIRA, P. S. **Um Modelo SIS Autônomo em Escalas Temporais**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.
- [10] SECRETARIA DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. Investigação de surto de gastroenterite associado com o Astrovírus sorotipo 1. **Boletim Eletrônico Epidemiológico**, ano 4, n. 03, 2004. Disponível em: <portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2014/julho/16/Ano04-n03-surto-gast-astro-noro-virus-rj.pdf.pdf>. Acesso em: 30/10/2019.
- [11] SANDEFUR, J. T. **Discrete Dynamical Systems, Theory and Applications**. Oxford University Press, 1990.
- [12] SOTOMAYOR, J. M. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, 1985.
- [13] VARELA, G. **Número reproductivo básico para sistemas epidemiológicos: una aplicación al estudio de la rickettsiosis**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidadde Sonora, Hermosillo, 2015.



## ANEXO A – ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DE ESCALAS TEMPORAIS

Apresentaremos aqui os principais resultados e definições da teoria básica de escalas temporais que são necessários para trabalharmos com as equações dinâmicas. Todos estes resultados e definições podem ser encontrados nas referências [2] e [3], assim como também podem ser encontrados, com outra abordagem, na referência [9].

### A.1 PRELIMINARES

**Definição A.1.1.** *Um conjunto  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  é uma **escala temporal** se, e somente se,  $\mathbb{T} \neq \emptyset$  e  $\mathbb{T}$  é um conjunto fechado.*

Ainda, dados  $a, b \in \mathbb{T}$ , denotamos o conjunto  $[a, b] \cap \mathbb{T}$ , que por vezes nos referimos como um intervalo de  $\mathbb{T}$ , por  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ .

**Definição A.1.2.** *Seja  $\mathbb{T}$  uma escala temporal. Definimos  $\rho, \sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  como respectivamente os **operadores recuo** e **avanço** de  $\mathbb{T}$ . Para cada  $t \in \mathbb{T}$  temos que*

$$(i) \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

$$(ii) \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

em que convencionamos  $\inf \emptyset := \sup \mathbb{T}$  e  $\sup \emptyset := \inf \mathbb{T}$ . Ainda, se  $t < \sigma(t)$ , dizemos que  $t$  é discreto à direita, se  $t = \sigma(t)$ , dizemos que  $t$  é denso à direita; se  $\rho(t) < t$ , dizemos que  $t$  é discreto à esquerda e se  $\rho(t) = t$ , então dizemos que  $t$  é denso à esquerda.

**Definição A.1.3.** *Seja  $\mathbb{T}$  uma escala temporal. Definimos  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  como a função **granulação** de  $\mathbb{T}$  dada para cada  $t \in \mathbb{T}$  por  $\mu(t) = \sigma(t) - t$ .*

### A.2 DERIVADA DE HILGER

**Definição A.2.1.** *Seja  $\mathbb{T}$  uma escala temporal. Definimos  $\mathbb{T}^\kappa \subset \mathbb{T}$  por  $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ , se  $\mathbb{T}$  é ilimitado superiormente, ou por  $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ , se  $\mathbb{T}$  é limitado superiormente.*

**Definição A.2.2.** *Sejam  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Dizemos que  $f$  é **diferenciável**, ou  $\Delta$ -diferenciável, em  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  se existe  $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U$  de  $t$  tal que, para todo  $s \in U \cap \mathbb{T}$ , temos*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

**Teorema A.2.3.** *Sejam  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ . Então valem os seguintes resultados:*

(i) *Se  $f$  é diferenciável em  $t$ , então  $f$  é contínua em  $t$ .*

(ii) *Se  $f$  é contínua em  $t$  um ponto discreto à direita, então  $f$  é diferenciável em  $t$  com*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

(iii) *Seja  $t$  um ponto denso à direita. Então  $f$  é diferenciável em  $t$  se, e somente se, o limite*

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

*existe, e neste caso*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) *Se  $f$  é diferenciável em  $t$ , então  $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$ .*

*Demonstração.* Veja [3], página 5. □

**Teorema A.2.4.** *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis,  $t \in \mathbb{T}^\kappa$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então valem os seguintes resultados:*

(i)  *$f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $t$  com  $(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$ .*

(ii)  *$\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $t$  com  $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$ .*

(iii)  *$f \cdot g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $t$  com*

$$(f \cdot g)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)) = f(\sigma(t))g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(t).$$

(iv) *Se  $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ , então  $1/f$  é diferenciável em  $t$  com*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = \frac{-f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) *Se  $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ , então  $f/g$  é diferenciável em  $t$  com*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

*Demonstração.* Veja [3], página 8. □

**Teorema A.2.5.** (Princípio da Indução em Escalas Temporais) *Seja  $t_0 \in \mathbb{T}$  e  $A$  uma afirmação indexada em  $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ , ou seja,  $A = \{A(t) : t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}\}$ , em que cada  $A(t)$  é uma afirmação. Se  $A$  satisfaz as seguintes hipóteses:*

- (i)  $A(t_0)$  é verdadeira.
- (ii) Se  $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  é discreto à direita e  $A(t)$  é verdadeiro, então  $A(\sigma(t))$  também é verdadeiro.
- (iii) Se  $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  é denso à direita e  $A(t)$  é verdadeiro, então existe  $U$  uma vizinhança de  $t$  tal que  $A(s)$  é verdadeiro para todo  $s \in U \cap [t, \infty)_{\mathbb{T}}$ .
- (iv) Se  $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  é denso à esquerda e  $A(s)$  é verdadeiro para todo  $s \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$  tal que  $s \leq t$ , então  $A(t)$  também é verdadeiro.

então a afirmação  $A$  é verdadeira, ou seja,  $A(t)$  é verdadeiro para todo  $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ .

*Demonstração.* Veja [3], página 4. □

**Teorema A.2.6.** (Teorema da Desigualdade do Valor Médio) *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Se  $|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ , então*

$$|f(t) - f(s)| \leq g(t) - g(s) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{T}, \text{ com } s \leq t.$$

*Demonstração.* Veja [3], página 23. □

**Corolário A.2.6.1.** *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis e  $s, t \in \mathbb{T}$ . Então valem os seguintes resultados:*

- (i)  $|f(t) - f(s)| \leq K \cdot |t - s|$ , em que  $K = \sup_{\tau \in [s, t]_{\mathbb{T}}} |f^\Delta(\tau)|$ .
- (ii) Se  $f^\Delta(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ , então  $f$  é uma função constante.
- (iii) Se  $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}^\kappa$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = g(t) + c$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

*Demonstração.* Veja [3], página 25. □

**Teorema A.2.7.** *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$  e  $g, g^\Delta$  são estritamente positivas em algum raio  $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ , com  $t_0 \in \mathbb{T}$ , então*

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Veja [3], página 48. □

### A.3 INTEGRAL DE HILGER

**Definição A.3.1.** *Uma função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **regrada** quando para todo ponto  $s \in \mathbb{T}$  denso à direita e todo ponto  $\tau \in \mathbb{T}$  denso à esquerda temos que os limites  $\lim_{t \rightarrow s^+} f(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t)$  existem (e portanto são finitos).*

**Definição A.3.2.** *Uma função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  regrada que é contínua em todos os pontos densos à direita de  $\mathbb{T}$  é dita **rd-contínua**. Denotamos o conjunto de todas as funções rd-contínuas por  $C_{\text{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ,  $C_{\text{rd}}(\mathbb{T})$  ou simplesmente  $C_{\text{rd}}$ .*

**Teorema A.3.3.** *Sejam  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{T} \rightarrow g(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$ , então vale que*

- (i) *Se  $f$  é contínua, então  $f$  é rd-contínua.*
- (ii) *Se  $f$  é rd-contínua, então  $f$  é contínua pela direita e regrada.*
- (iii) *Se  $f$  é regrada (respec. rd-contínua), então  $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  também é regrada (respec. rd-contínua).*
- (iv) *Se  $f$  é contínua e  $g$  é regrada (respec. rd-contínua), então  $f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é regrada (respec. rd-contínua)*
- (v) *O operador avanço  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  é rd-contínuo.*

*Demonstração.* Veja [3], página 22. □

**Definição A.3.4.** Dado  $[a, b]_{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$ , dizemos que o conjunto  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  é uma **partição** do intervalo  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  se  $P \subset [a, b]_{\mathbb{T}}$  com  $t_0 = a$  e  $t_n = b$ . Denotamos por  $\mathcal{P}(a, b)$  como o conjunto formado por todas as partições  $P$  de  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ .

**Definição A.3.5.** Dada  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, com  $a < b$ , definimos  $M(f) = M = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} f(t)$  e  $m(f) = m = \inf_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} f(t)$ . Ainda, dada uma partição  $P \in \mathcal{P}(a, b)$ , com  $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ , definimos  $M_i(f) = M_i = \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}} f(t)$  e  $m_i(f) = m_i = \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}} f(t)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição A.3.6.** Dados  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, com  $a < b$ , e  $P \in \mathcal{P}(a, b)$ , definimos a  **$\Delta$ -soma superior de Darboux** de  $f$  em relação à  $P$  como o número real  $U(f, P)$  dado por

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Analogamente, definimos a  **$\Delta$ -soma inferior de Darboux** de  $f$  em relação à  $P$  como o número real  $L(f, P)$  dado por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

**Definição A.3.7.** Dada  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a < b$ , uma função limitada, dizemos que  $f$  é **Darboux  $\Delta$ -integrável** no intervalo  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  (ou simplesmente, integrável), quando  $U(f) = L(f)$ , em que definimos

$$U(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(a, b)} U(f, P)$$

$$L(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(a, b)} L(f, P).$$

Neste caso, dizemos que a integral de  $f$  em  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ , denotada por  $\int_a^b f(\tau) \Delta\tau$ , vale  $U(f)$ .

**Proposição A.3.8.** Sejam  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $M = \sup_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} f(t)$ ,  $m = \inf_{t \in [a, b]_{\mathbb{T}}} f(t)$  e  $P, Q \in \mathcal{P}(a, b)$ . Então,

- (i)  $m(b - a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b - a)$ .
- (ii)  $L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, P)$ .
- (iii)  $L(f, P) \leq U(f, Q)$ .
- (iv)  $L(f) \leq U(f)$ .

*Demonstração.* Veja [2], página 119. □

**Teorema A.3.9.** (Critério de Integrabilidade I) *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Então  $f$  é integrável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P \in \mathcal{P}(a, b)$  tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

*Demonstração.* Veja [2], página 120. □

**Corolário A.3.9.1.** *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se para algum  $P \in \mathcal{P}(a, b)$  vale que  $L(f, P) = U(f, P)$ , então  $f$  é integrável.*

*Demonstração.* Veja [2], página 120. □

**Proposição A.3.10.** *Se  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  é regrada, então  $f$  é limitada.*

*Demonstração.* Veja [3], página 23. □

**Teorema A.3.11.** *Toda função regrada é integrável.*

*Demonstração.* Veja [2], página 129. □

**Corolário A.3.11.1.** *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada.*

(i) *Se  $f$  é monótona, então  $f$  é integrável.*

(ii) *Se  $f$  é rd-contínua, então  $f$  é integrável.*

*Demonstração.* Veja [2], página 129. □

**Definição A.3.12.** *Sejam  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $a, b \in \mathbb{T}$ . Definimos  $\int_a^b f(\tau)\Delta\tau = 0$  se  $a = b$ , e  $\int_b^a f(\tau)\Delta\tau = -\int_a^b f(\tau)\Delta\tau$  se  $a < b$ .*



**Proposição A.3.13.** *Sejam  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ . Se  $f$  é integrável nos intervalos  $[a, c]_{\mathbb{T}}$  e  $[c, b]_{\mathbb{T}}$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  e vale que*

$$\int_a^b f(\tau) \Delta\tau = \int_a^c f(\tau) \Delta\tau + \int_c^b f(\tau) \Delta\tau.$$

*Demonstração.* Veja [2], página 134. □

**Definição A.3.14.** *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $P \in \mathcal{P}(a, b)$ , com  $a < b$ . Definimos a **variação** de  $f$  em  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  como o número  $w(f) \in \mathbb{R}_0^+$  dado por  $w(f) = w = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]_{\mathbb{T}}\}$ . Analogamente, para  $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ , definimos  $w_i(f) = w_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_i, t_{i+1}]_{\mathbb{T}}\}$  como a variação de  $f$  em  $[t_i, t_{i+1}]_{\mathbb{T}}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Proposição A.3.15.** (Critério de Integrabilidade II) *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Então  $f$  é integrável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P \in \mathcal{P}(a, b)$  tal que  $\sum_{i=1}^n w_i(f)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Veja [2], página 132. □

**Proposição A.3.16.** *Sejam  $f, g : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então,*

(i)  *$(f \cdot g) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e se  $g \equiv \alpha$  for uma função constante, então vale que*

$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(\tau) \Delta\tau = \alpha \int_a^b f(\tau) \Delta\tau.$$

(ii)  *$f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável com  $\int_a^b (f + g)(\tau) \Delta\tau = \int_a^b f(\tau) \Delta\tau + \int_a^b g(\tau) \Delta\tau$ .*

*Demonstração.* Veja [3], página 28. □

**Proposição A.3.17.** *Sejam  $f, g : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis. Se  $f(t) \leq g(t)$  para todo  $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ , então*

$$\int_a^b f(\tau) \Delta\tau \leq \int_a^b g(\tau) \Delta\tau.$$

*Demonstração.* Veja [3], página 28. □

**Corolário A.3.17.1.** *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então  $|f|$  é integrável e vale que*

$$\left| \int_a^b f(\tau) \Delta\tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| \Delta\tau.$$

*Demonstração.* Veja [3], página 28. □

**Proposição A.3.18.** *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então para todo  $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$  temos*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t) f(t).$$

*Demonstração.* Veja [3], página 28. □

**Teorema A.3.19.** (Teorema Fundamental do Cálculo I) *Seja  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então a função  $F : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(t) = \int_a^t f(\tau) \Delta\tau$  para todo  $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$  é uniformemente contínua. Além disso, se  $f$  é contínua em  $s \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ , então  $F$  é diferenciável em  $s$  com  $F^\Delta(s) = f(s)$ .*

*Demonstração.* Veja [2], página 137. □

**Teorema A.3.20.** (Teorema Fundamental do Cálculo II) *Seja  $g : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com derivada  $g^\Delta$  integrável em  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ . Então vale que*

$$\int_a^b g^\Delta(\tau) \Delta\tau = g(b) - g(a).$$

*Demonstração.* Veja [2], página 138. □

**Corolário A.3.20.1.** (Integração por Partes) *Sejam  $f, g : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis com derivadas  $f^\Delta, g^\Delta : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis, então*

$$\int_a^b f(\tau) g^\Delta(\tau) \Delta\tau + \int_a^b f^\Delta(\tau) g(\sigma(\tau)) \Delta\tau = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

*Demonstração.* Veja [2], página 138. □

**Definição A.3.21.** Dado  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e  $P = \{a = t_0, \dots, t_n = b\} \in \mathcal{P}(a, b)$  uma partição, dizemos que a soma

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

onde  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  é a  **$\Delta$ -soma de Riemann** de  $f$  em relação à  $P$ .

**Definição A.3.22.** Dada  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  limitada, dizemos que  $f$  é  **$\Delta$ -Riemann integrável** (respect. Riemann  $\Delta$ -integrável, ou simplesmente Riemann integrável) se existe um número  $I \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P \in \mathcal{P}(a, b)$  tal que  $|S - I| < \varepsilon$ , em que  $S$  é tomado conforme a definição anterior e a majoração é independente da escolha dos  $\xi_i$ 's. Caso tal número exista dizemos que a integral de Riemann de  $f$  em  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  vale  $I$ .

**Teorema A.3.23.** Uma função é Riemann integrável se, e somente se, é Darboux integrável. Ainda, se  $f$  é integrável, então as integrais de Riemann e Darboux tem o mesmo valor.

*Demonstração.* Veja [2], página 125. □

#### A.4 A TRANSFORMAÇÃO CILÍNDRICA

**Definição A.4.1.** Seja  $h \geq 0$ . Definimos o conjunto dos **números complexos de Hilger**, denotado por  $\mathbb{C}_h$ , dado por

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}$$

quando  $h > 0$ , e  $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$ , quando  $h = 0$ .

**Definição A.4.2.** Seja  $h \geq 0$ . Definimos o conjunto  $\mathbb{Z}_h \subset \mathbb{C}$  dado por

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$$

quando  $h > 0$ , e  $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$ , quando  $h = 0$ .

**Proposição A.4.3.** As operações  $\oplus : \mathbb{C}_h \times \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$  e  $\dot{+} : \mathbb{Z}_h \times \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$  definidas por

$$(i) \quad x \oplus y := x + y + hxy$$

$$(ii) \quad u \dot{+} v := \begin{cases} x + y, & \text{quando } h = 0 \\ k, & \text{em que } k \in \mathbb{Z}_h \text{ e } k = u + v \pmod{\frac{2\pi i}{h}}, \text{ quando } h > 0 \end{cases}$$

tornam  $(\mathbb{C}_h, \oplus)$  e  $(\mathbb{Z}_h, \dot{+})$  grupos abelianos.

*Demonstração.* Veja [2], página 54. □

**Teorema A.4.4.** A transformação cilíndrica  $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$  dada por

$$\xi_h(z) = \begin{cases} z, & \text{quando } h = 0 \\ \frac{\text{Log}(1 + hz)}{h}, & \text{quando } h > 0 \end{cases}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}_h$  é um homomorfismo entre os grupos  $(\mathbb{C}_h, \oplus)$  e  $(\mathbb{Z}_h, \dot{+})$ . Ainda, a inversa  $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$  é dada por

$$\xi_h^{-1}(z) = \begin{cases} z, & \text{quando } h = 0 \\ \frac{e^{hz} - 1}{h}, & \text{quando } h > 0 \end{cases}$$

para todo  $z \in \mathbb{Z}_h$ .

*Demonstração.* Veja [2], página 58. □