

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Augusto dos Reis Pereira

Planejamento Econômico de Controle On-Line por Atributo

Juiz de Fora

2016

Augusto dos Reis Pereira

Planejamento Econômico de Controle On-Line por Atributo

Monografia apresentada ao Curso de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador: Lupércio França Bessegato

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pereira, Augusto dos Reis.

Planejamento Econômico de Controle On-Line por Atributo / Augusto dos Reis Pereira. – 2016.

62 f.

Orientador: Lupércio França Bessegato

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Estatística, 2016.

1. Controle on-line por atributo. 2. Planejamento econômico. 3. Erros de classificação. I. Bessegato, Lupércio França, orient. II. Título.

Augusto dos Reis Pereira

Planejamento Econômico de Controle On-Line por Atributo

Monografia apresentada ao Curso de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Aprovada em: 21/12/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lupércio França Bessegato - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Alfredo Chaoubah
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Augusto Carvalho Souza
Universidade Federal de Juiz de Fora

Agradecimentos

À minha família, em especial à minha mãe Divina, meu pai Francisco e minha irmã Mariana, pelo apoio e confiança depositados em mim.

Aos meus amigos, seja os de longa data, do curso de Estatística e os que fiz no ICE, agradeço pela amizade e companheirismo.

À Layla, por todo o carinho e compreensão nesses últimos anos.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFJF, em especial ao professor Lupércio pela orientação e ensinamentos.

A todos que contribuíram para minha formação e realização deste trabalho.

Resumo

O planejamento econômico para controle on-line de processos por atributo, proposto por Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989), consiste na inspeção de um único item a cada m itens produzidos. Supõe-se que o processo inicia-se sob controle. Se o item inspecionado é não conforme, considera-se que o processo está fora de controle, sendo então interrompido e ajustado de forma que volte a sua situação inicial; caso contrário, a produção continua. Partindo dessa premissa, diversos autores expandiram o modelo de Taguchi incorporando características adicionais como: uso de distribuições de probabilidade para descrever a mudança de estado do processo, presença de erros de classificação durante as inspeções, incorporação de intervalos de amostragem variável e amostras não-unitárias. Este trabalho apresenta uma revisão sobre o planejamento econômico de controle on-line de processos por atributo, discute o funcionamento de algoritmos genéticos e sua aplicação em controle estatístico de processos, e por fim, realiza simulações e análises comparando os diferentes modelos apresentados.

Palavras-chave: Controle on-line por atributo. Planejamento econômico. Erros de classificação. Cadeias de Markov. Algoritmo genético.

Abstract

The economical design for online process control by attributes, proposed by Taguchi, Elsayed and Hsiang (1989), consists of inspecting a single item at every m items produced. It is assumed that the process starts operating in-control. If the inspected item is non-conforming, the process is designated as out-of-control and production is stopped for an adjustment; otherwise, the production goes on. Given this premise, several authors expanded Taguchi's model incorporating additional features such as: use of probability distributions to describe the process shift, presence of misclassification errors on inspections, incorporation of variable interval sampling and non-unitary samples. This study presents a review about the economical design of online process control by attributes, discusses the mechanisms of genetic algorithms and its applications in statistical process control, and finally, performs simulations and analysis comparing the different models presented.

Key-words: Online control by attributes. Economical design. Misclassification errors. Markov chains. Genetic algorithms.

Sumário

Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	8
Lista de Quadros	9
Lista de Notações e Símbolos	10
1 Introdução	12
2 Planejamento econômico de controle on-line por atributo	13
2.1 Modelo de Taguchi para controle on-line por atributo	13
2.2 Modelo proposto por Nayebpour e Woodal	14
2.3 Controle on-line por atributo com erros de classificação	16
2.4 Controle on-line com intervalo de inspeção variável	21
2.5 Controle on-line com amostra não-unitária	26
3 Algoritmo genético	35
3.1 Codificação	37
3.2 Métodos de seleção	38
3.3 Métodos de cruzamento	42
3.4 Métodos de mutação	45
4 Aplicação numérica	49
5 Conclusões e perspectivas futuras	59
Referências	60
Apêndice A – Scripts desenvolvidos	62

Lista de Figuras

Figura 1 – Fluxograma do processo do modelo m	17
Figura 2 – Fluxograma do processo do modelo mL	22
Figura 3 – Fluxograma do processo do modelo mn	27
Figura 4 – Estrutura de um algoritmo genético simples.	36
Figura 5 – Exemplo de cromossomos com 10 bits em codificação binária.	38
Figura 6 – Exemplo de cromossomos com 2 variáveis em codificação real.	38
Figura 7 – Exemplo de seleção por roleta.	40
Figura 8 – Exemplo de cruzamento com um ponto de corte.	43
Figura 9 – Exemplo de cruzamento com dois pontos de corte.	43
Figura 10 – Exemplos de cruzamento em caixa com duas e três variáveis.	44
Figura 11 – Exemplo de cruzamento em linha.	45
Figura 12 – Exemplo de mutação com inversão de bits.	46
Figura 13 – Exemplo de mutação gaussiana.	47
Figura 14 – Exemplo de mutação fina.	48
Figura 15 – Gráfico do custo ótimo versus p_2	50
Figura 16 – Gráfico do custo ótimo versus π	51
Figura 17 – Gráfico do custo ótimo versus $\alpha = \beta$	51
Figura 18 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. p_2	52
Figura 19 – Modelo mn : valores ótimos de m e n vs. p_2	52
Figura 20 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. π	53
Figura 21 – Modelo mn : valores ótimos de m e n vs. π	53
Figura 22 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. $\alpha = \beta$	54
Figura 23 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. $\alpha = \beta$	54
Figura 24 – Modelo mL : efeitos principais para $k = 0.05$, $k = 0.10$ e $k = 0.15$	55
Figura 25 – Modelo mn : efeitos principais para $k = 0.05$, $k = 0.10$ e $k = 0.15$	56
Figura 26 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. p_2	57
Figura 27 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. π	58
Figura 28 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. $\alpha = \beta$	58

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros ótimos e custo dos modelos.	49
Tabela 2 – Efeitos principais para níveis de perturbação de 5%, 10% e 15% no modelo mL	56
Tabela 3 – Efeitos principais para níveis de perturbação de 5%, 10% e 15% no modelo mn	56

Lista de Quadros

1	Algoritmo de seleção por torneio.	39
2	Algoritmo de seleção por roleta.	40
3	Algoritmo de seleção por classificação.	41
4	Algoritmo do operador de cruzamento com um ponto de corte.	42
5	Algoritmo do operador de cruzamento com dois pontos de corte.	43
6	Algoritmo do operador de cruzamento em caixa.	44
7	Algoritmo do operador de cruzamento em linha.	45
8	Algoritmo do operador de mutação por inversão de bit.	46
9	Algoritmo do operador de mutação gaussiana	47
10	Algoritmo do operador de mutação fina	48

Lista de Notações e Símbolos

a	quantidade mínima de declarações de conformidade em inspeção para decidir-se pela não intervenção no processo
$b_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial (x, y) assumir valor i
$B_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial (x, y) assumir valores maiores ou iguais a i
$C(x)$	custo do sistema de controle por item enviado ao mercado, em função dos parâmetros de otimização x
c_a	custo de ajuste do processo
c_d	custo de descarte de item inspecionado, quando $c_{sc} = c_{snc}$
c_{insp}	custo de inspeção
c_{nc}	custo de envio de item não-conforme ao mercado
c_{sc}	custo de descarte de item conforme inspecionado
c_{snc}	custo de descarte de item não-conforme inspecionado
d	quantidade de itens produzidos entre a coleta de itens sucessivos
E	espaço de estados da cadeia de Markov
I	número de gerações de um algoritmo genético
\mathbf{I}	matriz identidade
L	comprimento do primeiro ciclo de monitoramento após ajuste
L_D	variável aleatória associada ao custo esperado de se produzir itens não-conformes
M	tamanho da população de indivíduos de um algoritmo genético
m	intervalo entre inspeções
n	tamanho da amostra
\mathbf{P}	matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov
p_1	fração de itens conformes produzidos com o processo operando sob controle
p_2	fração de itens conformes produzidos com o processo operando fora de controle
p_A	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera sob controle
p_D	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera fora de controle

$p_x(w, s)$	probabilidade do intervalo de inspeção do ciclo corrente ter comprimento x , dado que seu estado é (w, s)
pC	probabilidade do operador de cruzamento
pM	probabilidade do operador de mutação
$q_x(t)$	probabilidade do estado do processo se modificar exatamente no t -ésimo item dentre x itens produzidos, dado que ocorra mudança de estado durante sua produção, $1 \leq t \leq x$
R	quantidade de itens produzidos durante a coleta da amostra
s	segundo elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado à decisão decorrente da inspeção do ciclo de monitoramento
T	variável aleatória associada à quantidade de itens produzidos no ciclo
w	primeiro elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado a situação do processo de produção
α	probabilidade de classificar como não-conforme item realmente conforme
β	probabilidade de classificar como conforme item realmente não-conforme
$\eta_x(w, s)$	quantidade esperada de itens descartados e realmente no estado x
$\theta(w, s)$	custo esperado relacionado ao item inspecionado de ciclo cujo estado é (w, s)
$\nu(w, s)$	quantidade esperada de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante a amostragem
$\xi(w, s)$	custo de envio de itens não-conformes ao mercado de ciclo cujo estado é (w, s)
$\boldsymbol{\pi}$	vetor coluna das probabilidades da distribuição invariante da cadeia de Markov
π	probabilidade de mudança de estado do processo em cada item produzido (parâmetro da distribuição geométrica)
$\pi(w, s)$	elemento do vetor da distribuição invariante da cadeia relacionado com o estado (w, s)
Φ	variável aleatória associada ao custo do sistema de controle de ciclo
$\phi(w, s)$	custo esperado do sistema de controle de ciclo cujo estado é (w, s)
$\varphi(w, s)$	custo de ajuste do processo de produção de ciclo cujo estado é (w, s)

1 Introdução

Em geral, é necessário um processo estável para produzir um produto que atenda às especificações e exigências do cliente, ou seja, espera-se que o processo tenha capacidade de operar com pequena variabilidade em torno do valor alvo das características de qualidade do produto (MONTGOMERY, 2004). Essas características podem ser de diversos tipos: físicas, tais como peso, comprimento, voltagem; sensoriais, como gosto, aparência, cor; ou de natureza temporal, como durabilidade, confiabilidade, utilidade. As técnicas estatísticas de controle e monitoramento do processo, CEP, são utilizadas para monitorar o processo de produção ao longo do tempo, com o objetivo de detectar mudanças no desempenho do processo e permitir uma redução sistemática da variabilidade nas características de qualidade de interesse. Provavelmente, a ferramenta de CEP mais utilizada é o gráfico de controle de Shewhart, que consiste na coleta periódica de itens produzidos, análise da característica de interesse e representação gráfica do que foi observado.

No início, as técnicas de planejamento de gráficos de controle baseavam-se estritamente em critérios estatísticos, até que Duncan (1956) propôs utilizar critérios econômicos para planejamento dos gráficos de controle, incorporando-os aos aspectos estatísticos do processo. O objetivo foi buscar minimizar o custo total do processo, considerando todos os custos envolvidos em seu monitoramento. Nessa abordagem de planejamento de gráficos de controle, buscam-se quais os valores dos parâmetros do gráfico de controle que minimizem uma função objetivo associada aos custos de operação do sistema. Na estrutura dos custos de operação são consideradas algumas componentes de custo como: custo de amostragem, custo das perdas devidas a fabricação de itens defeituosos, custos das investigações das causas responsáveis pela mudança de desempenho do processo, custo de ajuste do processo.

Posteriormente, Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) propuseram uma estratégia de planejamento econômico para monitorar em tempo real processos por variável e por atributo. O sistema de monitoramento é automático e consiste na amostragem de um único item a cada inspeção. Os parâmetros ótimos de planejamento são determinados de maneira a minimizarem o custo por item produzido. No caso de processos de variáveis, esses parâmetros são o intervalo de inspeção, m , e o limite de controle, d . Já no caso de processos de atributos, o parâmetro de planejamento é somente o intervalo de inspeção, m . Em geral, essa estratégia pode melhorar processos de alta qualidade que empregam algum tipo de controle automático através da coleta de observações individuais.

O objetivo deste trabalho é discutir, no Capítulo 2, alguns modelos de planejamento econômico de controle on-line por atributo. Descrever, no Capítulo 3, o funcionamento dos algoritmos genéticos, seus operadores, e sua viabilidade como ferramenta de otimização. Além disso, no Capítulo 4, realizar simulações com objetivo de comparar e avaliar os modelos econômicos de controle on-line por atributo apresentados.

2 Planejamento econômico de controle on-line por atributo

Os modelos econômicos de controle on-line por atributo têm como objetivo encontrar os valores dos parâmetros de planejamento do processo que minimizem o custo de operação do sistema por item produzido. Essa estratégia de monitoramento, inicialmente proposta por Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989), foi expandida por diversos autores a partir da incorporação de características adicionais como o uso de distribuições de probabilidade para descrever a mudança de estado do processo, presença de erros de classificação durante as inspeções, uso de intervalos de amostragem variáveis e amostras não-unitárias. Neste capítulo é apresentado e discutido alguns desses modelos de planejamento.

2.1 Modelo de Taguchi para controle on-line por atributo

Considere que o processo de produção é iniciado sob controle e, após a produção de m itens, um único item é inspecionado. Se o item inspecionado é não-conforme, o processo é dado como fora de controle e então é interrompido e ajustado de forma a voltar a sua situação inicial, começando assim um novo ciclo de produção. Se o item inspecionado é conforme, o processo continua a operar com a produção dos próximos m itens. Entende-se assim que o sistema de monitoramento do processo de produção é feito a intervalos fixos, que é denotado por essa quantidade de itens produzidos entre inspeções sucessivas, m .

O objetivo é encontrar o tamanho do intervalo ótimo, m^0 , que minimize o custo esperado por item produzido. Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) consideram duas situações distintas: caso I, quando o processo sai de controle, ocorre uma mudança de 0% de itens não-conformes para 100% de itens não-conformes; e caso II, quando o processo sai de controle, ocorre uma mudança de 0% de itens não-conformes para $p\%$ de itens não-conformes, $0 < p < 100$.

Para o cálculo do intervalo ótimo entre inspeções que minimiza o custo esperado por item produzido, devem ser fixados o custo de se produzir itens não-conformes, c_d , o custo da inspeção do item, c_{insp} , e o custo de ajuste do processo, c_a .

Caso I

O processo de produção se inicia com fração de itens não-conformes produzidos igual a zero e, em um instante aleatório, passa-se a produzir com fração de itens não-conformes igual a 100%. A produção de cada item é independente, e após o m -ésimo item ser produzido ocorre a inspeção do mesmo. Caso seja declarado conforme a produção continua, caso contrário, interrompe-se e ajusta-se o processo. Taguchi considera que do instante em que o item fora de controle é encontrado até a interrupção do processo para ajuste alguns itens são produzidos. Denota-se como l a quantidade de itens que são

produzidos durante esse atraso. Assim, a função de custo C é descrita abaixo:

$$C = \frac{c_{insp}}{m} + \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{c_d}{\bar{u}} + \frac{c_a}{\bar{u}}, \quad (2.1)$$

onde \bar{u} é o número médio de itens produzidos entre ajustes.

O intervalo ótimo entre inspeções, m^0 , é encontrado igualando a zero a derivada da equação (2.1) com relação a m :

$$m^0 = \sqrt{\frac{2\bar{u}c_{insp}}{c_d}}. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) ignora o efeito de l e c_a no cálculo do intervalo ótimo m . Taguchi sugere que se o atraso l for menor que o tempo médio entre ajustes, \bar{u} , e o custo de item não-conforme, c_d , for muito maior que c_a/\bar{u} , a equação acima resulta em uma boa estimativa do valor de m . Caso essas duas condições não forem satisfeitas, deve-se utilizar uma equação alternativa para cálculo do intervalo ótimo de inspeção (equação (2.3)).

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)c_{insp}}{c_d - \frac{c_a}{\bar{u}}}}. \quad (2.3)$$

Caso II

Nas situações onde o processo opera fora de controle e produz uma fração grande de itens não-conformes, a equação descrita no caso I pode ser utilizada para a determinação do intervalo ótimo de inspeção. No entanto, quando o processo produz uma pequena fração de itens não-conformes, utilizar a abordagem acima pode conduzir a uma superestimativa do intervalo ótimo de inspeção. Assim, Taguchi propõe um segundo caso onde a fração de itens não-conformes produzidos com processo fora de controle é $p\%$. Considera-se também uma nova componente de custo c_D , que é definida como sendo o custo de item não-conforme que é transferido para o próximo processo de produção, tal que $c_D \gg c_d$ (onde c_d é redefinido como o custo do item não-conforme que é detectado). Assim, a equação do intervalo ótimo de inspeção é dada pela equação (2.4).

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)c_{insp}}{c_D - \frac{c_a}{\bar{u}}}}. \quad (2.4)$$

2.2 Modelo proposto por Nayebpour e Woodal

Analisando o modelo de Taguchi para controle on-line por atributo, Nayebpour e Woodall (1993) propuseram um modelo probabilístico para o tempo de espera até que o processo saia de controle. Assumindo que a mudança de estado do processo segue

uma distribuição geométrica de parâmetro π , eles desenvolveram expressões matemáticas para calcular o intervalo ótimo de inspeção para os dois casos apresentados por Taguchi. Considera-se que o período de tempo até o ajuste do processo, medido como sendo a quantidade de itens produzidos do início do processo até a inspeção na qual é identificado o item não-conforme, é um ciclo de produção. Define-se as variáveis aleatórias: Φ (custo por ciclo de produção), T (quantidade de itens produzidos por ciclo) e C (custo por item produzido). Assim, de acordo com o Teorema da Renovação (ver ROSS, 1970), tem-se que o custo esperado por item produzido é a razão entre o custo esperado do ciclo de produção e a quantidade esperada de itens produzidos no ciclo, descrito pela expressão (2.5).

$$E(C) = \frac{E(\Phi)}{E(T)}. \quad (2.5)$$

Considerando as componentes de custo que foram adotadas por Taguchi e que o número de itens não-conformes produzidos antes do processo sair de controle é uma variável aleatória geométrica, Nayebpour e Woodall desenvolveram as equações para $E(T)$ e $E(\Phi)$ e, deste modo, o custo esperado por item produzido, $E(C)$, foi reescrito como (2.6) para o caso I e (2.7) para o caso II.

$$E(C) = \frac{\left(\frac{1}{1-q^m} + \text{int}\left(\frac{l}{m}\right)\right) c_{insp} + \left(m - \frac{q}{1-q} + \frac{mq^m}{1-q^m}\right) c_d + c_a}{\frac{m}{1-q^m} + l}, \quad (2.6)$$

e

$$E(C) = \frac{E(L_D) + \left(\frac{\frac{m}{1-q^m} + \frac{m(1-p)}{p}}{m} + \text{int}\left(\frac{l}{m}\right)\right) c_{insp} + c_a}{\frac{m}{1-q^m} + \frac{m(1-p)}{p} + l}, \quad (2.7)$$

onde $q = 1 - \pi$, π é o parâmetro da distribuição geométrica, p é a fração de não-conformidade e $E(L_D)$ é o custo esperado de se produzir itens defeituosos.

Baseado na filosofia de enviar o mínimo de itens defeituosos para a fase seguinte do processo de produção, os autores recomendam utilizar inspeções retrospectivas a fim de identificar os itens não-conformes produzidos e então descartá-los. No caso I, esse procedimento sempre é executado. Já no caso II, como o processo pode possuir uma fração de não-conformidade pequena, o procedimento de inspeções retrospectivas se torna opcional. Assim, o custo esperado da produção de itens não-conformes, $E(L_D)$, para as situações onde o procedimento de inspeções retrospectivas é executado ou não executado

são descritas pelas equações (2.8) e (2.9) respectivamente.

$$E(L_D) = \left(\left(m - \frac{q}{1-q} + \frac{mq^m}{1-q^m} \right) p^2 + mp(1-p) + lp \right) c_d + \left(\left(m - \frac{q}{1-q} + \frac{mq^m}{1-q^m} \right) p(1-p) + m(1-p)^2 \right) c_D, \quad (2.8)$$

e

$$E(L_D) = \left(\left(m - \frac{q}{1-q} + \frac{mq^m}{1-q^m} \right) p + lp + m(1-p) \right) c_D. \quad (2.9)$$

Nota-se que a equação do custo esperado por item produzido, equação (2.5), não possui forma fechada, não sendo possível encontrar a solução ótima de forma analítica. Portanto, é necessário procedimento computacional para buscar o valor do intervalo ótimo de inspeção, m^0 , que minimiza $E(C)$.

Por fim, Nayeypour e Woodall concluem que o modelo de Taguchi para controle on-line de atributos, para o caso I, resulta em estimativas do custo esperado por item produzido e do intervalo ótimo de inspeção bem próximas do modelo proposto por eles. Contudo, para o caso II, o modelo que incorpora a distribuição geométrica para descrever a mudança de estado do processo é muito mais apropriado, resultando em melhores estimativas de $E(C)$ e m^0 .

2.3 Controle on-line por atributo com erros de classificação

A incorporação dos erros de classificação no modelo de planejamento econômico de controle on-line por atributo foi proposto por Borges, Ho e Turnes (2001). Os autores estudaram os efeitos de classificar um item conforme como não-conforme, α , e classificar um item não-conforme como conforme, β , e concluíram que mesmo valores pequenos podem comprometer a determinação do intervalo ótimo entre as inspeções, alterando assim o custo ótimo do sistema de monitoramento do processo.

O processo inicia sob controle, com fração de itens conformes produzidos p_1 . Devido a alguma causa especial, o processo passa à condição fora de controle com fração de itens conformes produzidos p_2 , onde $p_2 < p_1$. A quantidade de tempo que o processo se mantém sob controle, medida pelo número de itens produzidos antes da mudança de estado, é modelada pela distribuição geométrica de parâmetro π . O monitoramento do processo se dá por meio da inspeção de um único item, a cada m itens produzidos. O sistema de classificação é imperfeito, possuindo probabilidade de classificação de item conforme como não-conforme igual a α , e probabilidade de classificação de item não-conforme como conforme igual a β . Se o item inspecionado for classificado como não-conforme, o processo

de produção é considerado como fora de controle, sendo então interrompido e ajustado para retornar a sua situação inicial. A figura 1 ilustra o fluxograma desse processo.

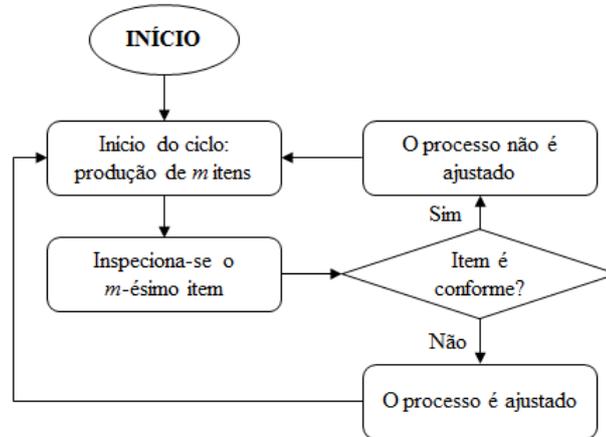


Figura 1 – Fluxograma do processo do modelo m.

As probabilidades de classificar um item inspecionado como conforme, condicionada a real situação do processo, são p_A (o processo está sob controle) e p_D (o processo está fora de controle). As expressões dessas probabilidades são respectivamente:

$$\begin{aligned} p_A &= p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\beta, \\ p_D &= p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O monitoramento do processo pode ser modelado por uma cadeia de Markov em tempo discreto, onde cada passo da cadeia representa um ciclo de inspeção. O espaço de estados é denotado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1\}, \quad (2.11)$$

onde w é a situação onde ocorre a mudança de estado do processo e s é a decisão sobre o ajuste. $w = 0$, o processo se mantém sob controle durante todo o ciclo corrente; $w = 1$, o processo sai de controle durante o ciclo corrente; $w = 2$, o ciclo corrente já se inicia com o processo fora de controle. $s = 0$, o processo é ajustado; $s = 1$, o processo não é ajustado.

As probabilidades de transição entre os estados são denotadas por $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$ onde (w_i, s_i) é o estado da cadeia no i -ésimo ciclo de monitoramento. A probabilidade do processo se manter sob controle, dado que se iniciou nessa situação, é $(1 - \pi)^m$. Assim, as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2$, para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$, são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(0,0)} &= (1 - \pi)^m(1 - p_A), \\ P_{(w,0),(0,1)} &= (1 - \pi)^m p_A. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por sua vez, a probabilidade da mudança de estado do processo acontecer no ciclo corrente é $1 - (1 - \pi)^m$, assim o item inspecionado é produzido com o processo fora de controle. Logo, as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2$, para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^m](1 - p_D), \\ P_{(w,0),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^m]p_D. \end{aligned} \quad (2.13)$$

As transições dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2$, para os estados onde $w = 2$ não são possíveis. Logo $P_{(w,0),(2,s)} = 0$, $s = 0, 1$. Para as transições a partir do estado $(0, 1)$, os ciclos são concluídos com processo sob controle, portanto, $P_{(0,1),(w,s)} = P_{(0,0),(w,s)}$, $\forall (w, s) \in E$. Os estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$, somente são visitados se no ciclo anterior, o processo saiu de controle, $w = 1, 2$, e o item inspecionado foi classificado como conforme, $s = 1$, e portanto o processo não foi ajustado. Assim, para $w = 1, 2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_{(w,1),(2,0)} &= 1 - p_D, \\ P_{(w,1),(2,1)} &= p_D. \end{aligned} \quad (2.14)$$

As demais probabilidades de transição saindo dos estados $(1, 1)$ e $(2, 1)$, para os estados (w, s) , com $w = 1, 2$ e $s = 0, 1$ são:

$$P_{(1,1),(w,s)} = P_{(2,1),(w,s)} = 0. \quad (2.15)$$

Assim, a matriz de probabilidade de transição \mathbf{P} , pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A matriz \mathbf{P} é irredutível e aperiódica, possuindo uma distribuição invariante que é descrita pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]', \quad \text{onde} \quad \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1 \quad (2.17)$$

Considerando um número grande de inspeções, essa distribuição invariante pode ser interpretada como sendo a fração de tempo que o processo passa em cada um dos estados

(w, s) . O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é encontrado resolvendo o sistema de equações lineares $(\mathbf{P}' - \mathbf{I})\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\mathbf{0}$ é o vetor nulo e \mathbf{P}' é a transposta da matriz \mathbf{P} .

Os custos dos estados da cadeia consideram quatro componentes de custo: custo de inspeção, c_{insp} ; custo de ajuste, c_a ; custo de envio de item não-conforme ao mercado, c_{nc} ; custo de descarte de item inspecionado, c_d . Nas situações onde os itens descartados são submetidos a processo de reaproveitamento com custos diferenciados, considera-se em vez da componente c_d , o custo de descarte de item conforme inspecionado, c_{sc} ; e o custo de descarte de item não-conforme inspecionado, c_{snc} . O custo esperado de cada estado (w, s) , $w = 0, 1, 2$ e $s = 0, 1$ é denotado como $\phi(w, s)$, descrito em (2.18).

$$\phi(w, s) = c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s). \quad (2.18)$$

onde $\xi(w, s)$ é o custo esperado por ciclo referente aos itens não conformes dentre os $m - 1$ itens não inspecionados que são enviados ao mercado; $\theta(w, s)$ é o custo esperado por ciclo relacionado ao item inspecionado e descartado; e $\varphi(w, s)$ é o custo de ajuste do processo por ciclo. Para $\forall w \in E$, tem-se (2.19).

$$\varphi(w, s) = \begin{cases} c_a, & \text{se } s = 0. \\ 0, & \text{se } s = 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Para os estados onde $w = 0$, o número esperado de itens não inspecionados não-conformes é $(1 - p_1)(m - 1)$. Assim, o custo esperado dos itens não-conformes não inspecionados que são enviados ao mercado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m - 1), s = 0, 1. \quad (2.20)$$

O item inspecionado é classificado como conforme ou não-conforme, mas devido ao sistema de classificação imperfeito, o item pode ser classificado erroneamente. Os custos esperados de descarte de item inspecionado para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} \theta(0, 0) &= c_{sc} \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)(1 - \beta)}{1 - p_A}, \\ \theta(0, 1) &= c_{sc} \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, os custos esperados do sistema de controle dos estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &= c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a, \\ \phi(0, 1) &= c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Durante os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, o processo sai de controle em algum instante entre a produção dos $m - 1$ itens do ciclo. A probabilidade da mudança de estado ocorrer no instante t é dada por (2.23).

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, t = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Como o item inspecionado é necessariamente produzido com o processo fora controle, o custo esperado dos itens não-conformes não inspecionados que são enviados ao mercado, para $w = 1$, é:

$$\xi(1, s) = c_{nc} \left\{ \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)] \right\}, s = 0, 1. \quad (2.24)$$

Os custos esperados de descarte de item inspecionado são similares a (2.21), com exceção a fração de conformidade do processo de produção que, para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, é igual a p_2 .

$$\begin{aligned} \theta(1, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(1, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Logo, os custos esperados dos estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi(1, 0) &= c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a, \\ \phi(1, 1) &= c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nos estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$, o ciclo corrente já se inicia com o processo fora de controle. Assim, os custos esperados para esses estados são similares aos custos esperados quando $w = 0$, exceto pela fração de conformidade que é igual a p_2 . Portanto, os custos esperados relacionados aos estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$ são:

$$\xi(2, s) = c_{nc}(1 - p_2)(m - 1), s = 0, 1. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \theta(2, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(2, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \phi(2, 0) &= c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a, \\ \phi(2, 1) &= c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para um grande número de inspeções e considerando que a sequência de ciclos de regeneração é um processo de renovação, logo, pelo Teorema da Renovação, o custo esperado por item produzido, $C(m)$, é a razão entre o custo esperado por ciclo de inspeção, $E(L) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w,s)\phi(w,s)$, e a quantidade de itens produzidos e enviados ao mercado em cada ciclo de inspeção, $m - 1$. Logo,

$$C(m) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w,s)\phi(w,s)}{m - 1}. \quad (2.30)$$

A determinação do intervalo de inspeção m que minimiza $C(m)$ é a solução do problema:

$$(m^0) = \arg \min_{(m)} C(m). \quad (2.31)$$

2.4 Controle on-line com intervalo de inspeção variável

Bessegato et al. (2011) propôs uma estratégia de monitoramento que considera o intervalo de tempo até a primeira inspeção após ajuste, L , maior que os demais intervalos entre inspeções, m . Denominada como controle on-line por atributo com intervalo de inspeção variável, essa estratégia de monitoramento considera que o processo de produção inicia sob controle, com fração de itens conformes produzidos igual a p_1 , e em um instante aleatório o processo fica fora de controle, com fração de itens conformes produzidos igual a p_2 , $p_2 < p_1$. O tempo de falha do processo segue uma distribuição geométrica de parâmetro π , onde $0 < \pi < 1$. Após a mudança de estado do processo para fora de controle, ele só retorna ao seu estado inicial por meio de uma intervenção para ajuste. Um único item é inspecionado, e se declarado não-conforme o processo é paralisado e ajustado para retornar ao estado de produção sob controle. O item inspecionado é descartado, e a inspeção está sujeita a erros de classificação, sendo que α é a probabilidade de classificar item não-conforme como conforme, e β é a probabilidade de classificar como conforme item não-conforme. O fluxograma do sistema de monitoramento é apresentado na figura 2.

A modelagem probabilística é feita por meio de uma cadeia de Markov em tempo discreto, onde cada passo da cadeia representa um ciclo. O espaço de estados da cadeia é dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1\}, \quad (2.32)$$

onde w é a situação onde ocorre a mudança de estado do processo e s é a decisão sobre o ajuste. $w = 0$, o processo se mantém sob controle durante todo o ciclo corrente; $w = 1$, o

processo sai de controle durante o ciclo corrente; $w = 2$, o ciclo corrente já se inicia com o processo fora de controle. $s = 0$, o processo é ajustado; $s = 1$, o processo não é ajustado.

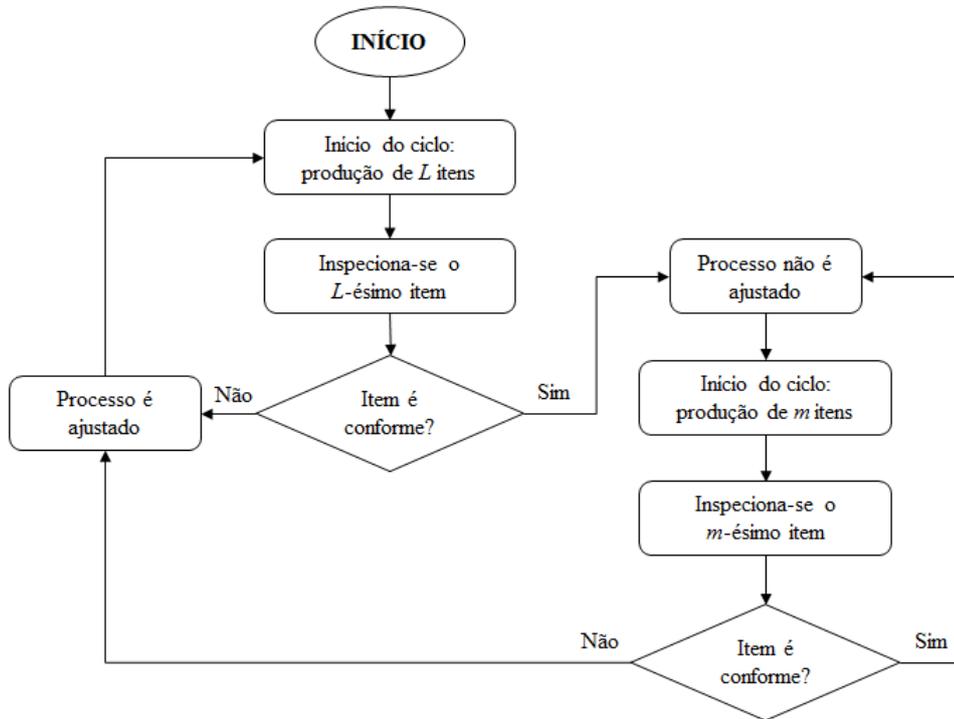


Figura 2 – Fluxograma do processo do modelo mL.

Define-se p_A e p_D como as probabilidades de não se ajustar o processo condicionadas a real situação do mesmo, onde: se o processo está sob controle, tem-se p_A ; e se o processo está fora de controle, tem-se p_D . Essas probabilidades são as mesmas descritas em (2.10). As probabilidades de transição entre os estados são denotadas por $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$ onde (w_i, s_i) é o estado da cadeia no i -ésimo ciclo de monitoramento. Quando um ajuste é efetuado, $s = 0$, o processo retorna a sua condição inicial, sendo possível somente transições para estados onde $w = 0, 1$, com ciclos possuindo intervalo de inspeção de tamanho L . A probabilidade do processo permanecer sob controle durante o ciclo corrente é $(1 - \pi)^L$. Assim, as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2$, para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(0,0)} &= (1 - \pi)^L(1 - p_A), \\ P_{(w,0),(0,1)} &= (1 - \pi)^L p_A. \end{aligned} \quad (2.33)$$

No entanto, a probabilidade do processo sair de controle no primeiro ciclo de inspeção após ajuste é $1 - (1 - \pi)^L$. Logo, as probabilidades de transição dos estados

$(w, 0)$, $w = 0, 1, 2$, para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^L](1 - p_D), \\ P_{(w,0),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^L]p_D. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Após ajuste, não são possíveis transições para os estados onde $w = 2$, portanto $P_{(w,0),(2,s)} = 0$, para $w = 0, 1, 2$; $s = 0, 1$. Quando o processo está sob controle e o item inspecionado é classificado como conforme, $w = 0$ e $s = 1$, o ciclo de inspeção possui tamanho m e são possíveis transições para os estados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Nessas situações, a probabilidade do processo se manter sob controle durante o ciclo corrente é $(1 - \pi)^m$; e a probabilidade do processo sair de controle durante o ciclo corrente é $1 - (1 - \pi)^m$. Logo, as probabilidades de transição do estado $(0, 1)$ para os estados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são respectivamente:

$$\begin{aligned} P_{(0,1),(0,0)} &= (1 - \pi)^m(1 - p_A), \\ P_{(0,1),(0,1)} &= (1 - \pi)^mp_A, \\ P_{(0,1),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^m](1 - p_D), \\ P_{(0,1),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^m]p_D. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Também não são possíveis transições do estado $(0, 1)$ para os estados onde $w = 2$. Portanto $P_{(0,1),(2,s)} = 0$, para $s = 0, 1$. Para que no ciclo corrente, o processo já se encontre fora de controle desde o seu início, $w = 2$, é necessário que no ciclo anterior, o processo já esteja fora de controle, $w = 1, 2$, e que o mesmo não tenha sido ajustado, $s = 1$. Assim, tem-se para $w = 1, 2$:

$$\begin{aligned} P_{(w,1),(2,0)} &= (1 - p_D), \\ P_{(w,1),(2,1)} &= p_D. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Não são possíveis outras transições a partir dos estados onde $w = 1, 2$ e $s = 1$, portanto $P_{(w,1),(0,s)} = P_{(w,1),(1,s)} = 0$, para $w = 1, 2$; $s = 0, 1$. Assim, a matriz de probabilidade de transição \mathbf{P} é:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,1),(0,0)} & P_{(0,1),(0,1)} & P_{(0,1),(1,0)} & P_{(0,1),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

A matriz \mathbf{P} é irredutível e aperiódica, possuindo uma distribuição invariante que é descrita pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]', \text{ onde } \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1 \quad (2.38)$$

O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é encontrado resolvendo o sistema de equações lineares $(\mathbf{P}' - \mathbf{I})\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\mathbf{0}$ é o vetor nulo e \mathbf{P}' é a transposta da matriz \mathbf{P} . De posse do vetor $\boldsymbol{\pi}$, considerando um grande de inspeções, são calculadas as proporções de ciclos de comprimento L e m de cada um dos estados da cadeia de Markov. Seja $p_L(w, s)$ a probabilidade do intervalo de inspeção ter tamanho L e $p_m(w, s)$ a probabilidade do intervalo de inspeção ter tamanho m , $p_m(w, s) = 1 - p_L(w, s)$, tem-se:

$$\begin{aligned} p_L(0, 0) &= \frac{[\pi(0, 0) + \pi(1, 0) + \pi(2, 0)]P_{(0,0),(0,0)}}{\pi(0, 0)}, \\ p_L(0, 1) &= \frac{[\pi(0, 0) + \pi(1, 0) + \pi(2, 0)]P_{(0,0),(0,1)}}{\pi(0, 1)}, \\ p_L(1, 0) &= \frac{[\pi(0, 0) + \pi(1, 0) + \pi(2, 0)]P_{(0,0),(1,0)}}{\pi(1, 0)}, \\ p_L(1, 1) &= \frac{[\pi(0, 0) + \pi(1, 0) + \pi(2, 0)]P_{(0,0),(1,1)}}{\pi(1, 1)}, \\ p_L(2, 0) &= p_L(2, 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A estrutura de custo considerada é a mesma que foi utilizada na seção 2.3. O custo esperado de cada estado (w, s) , $w = 0, 1, 2$ e $s = 0, 1$ é denotado como $\phi(w, s)$, descrito em (2.40).

$$\phi(w, s) = c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s). \quad (2.40)$$

onde $\xi(w, s)$ é o custo esperado por ciclo referente aos itens não conformes dentre os $m - 1$ ou $L - 1$ itens não inspecionados que são enviados ao mercado; $\theta(w, s)$ é o custo esperado por ciclo relacionado ao item inspecionado e descartado; e $\varphi(w, s)$ é o custo de ajuste do processo por ciclo.

Para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$, o processo opera sob controle durante todo o ciclo de inspeção. A quantidade esperada de itens não-conformes não inspecionados produzidos no ciclo, para $s = 0, 1$, é $p_m(0, s)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, s)(L - 1)(1 - p_1)$. Logo, os custos esperados por ciclo referente aos itens não-conformes, para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$, são:

$$\begin{aligned} \xi(0, 0) &= c_{nc}\{p_m(0, 0)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 0)(L - 1)(1 - p_1)\}, \\ \xi(0, 1) &= c_{nc}\{p_m(0, 1)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 1)(L - 1)(1 - p_1)\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os custos esperados relacionados ao descarte do item inspecionado, para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned}\theta(0, 0) &= c_{sc} \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)(1 - \beta)}{1 - p_A}, \\ \theta(0, 1) &= c_{sc} \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A}.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Assim, os custos esperados para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$:

$$\begin{aligned}\phi(0, 0) &= c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a, \\ \phi(0, 1) &= c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Nos estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, o processo muda de estado durante o ciclo de inspeção, alterando sua fração de conformidade. O instante onde acontece essa mudança de estado pode ocorrer em qualquer ponto entre o primeiro e o último item produzido no ciclo. Assim, a probabilidade da mudança de estado ocorrer em um instante t qualquer, para ciclos com intervalos de tamanho m é:

$$q_m(t) = \frac{1 - \pi^{t-1}\pi}{1 - (1 - \pi)^m}, t = 1, \dots, m.\tag{2.44}$$

De forma análoga, a probabilidade da mudança de estado quando os ciclos possuem intervalos de tamanho L é:

$$q_L(t) = \frac{1 - \pi^{t-1}\pi}{1 - (1 - \pi)^L}, t = 1, \dots, L.\tag{2.45}$$

Assim, os custos esperados por ciclo referente aos itens não conformes, para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$, são dados por (2.46).

$$\begin{aligned}\xi(1, s) &= c_{nc} \left\{ p_m(1, s) \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)] \right. \\ &\quad \left. + p_L(1, s) \sum_{t=1}^L q_L(t) [(t-1)(1-p_1) + (L-t)(1-p_2)] \right\}, s = 0, 1.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Os custos esperados de descarte do item inspecionado dos estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são similares aos custos descritos em (2.42), exceto pela fração de conformidade do processo que agora é p_2 . Logo:

$$\begin{aligned}\theta(1, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(1, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Assim, os custos esperados para os estados (1, 0) e (1, 1) são:

$$\begin{aligned}\phi(1, 0) &= c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a, \\ \phi(1, 1) &= c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1).\end{aligned}\tag{2.48}$$

Para os estados (2, 0) e (2, 1), os custos esperados são similares aos dos estados (0, 0) e (0, 1), mas com processo operando fora de controle desde o início do ciclo de inspeção. Como não houve ajuste, o comprimento do intervalo é fixo e de tamanho m . Assim, os custos esperados relacionados aos estados (2, 0) e (2, 1) são:

$$\begin{aligned}\xi(2, 0) &= c_{nc}(1 - p_2)(m - 1), \\ \xi(2, 1) &= \xi(2, 0).\end{aligned}\tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}\theta(2, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(2, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}.\end{aligned}\tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\phi(2, 0) &= c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a, \\ \phi(2, 1) &= c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).\end{aligned}\tag{2.51}$$

Por fim, para uma quantidade suficientemente grande de itens produzidos, o custo esperado por item produzido, $C(m, L)$, é a razão entre o custo esperado por ciclo de inspeção, $E(L) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)$, e o número esperado de itens produzidos e enviados ao mercado, $E(T) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)[(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]$.

$$C(m, L) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)[(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]}.\tag{2.52}$$

A determinação dos intervalos de inspeção m e L que minimizam $C(m, L)$ é a solução do problema:

$$(m^0, L^0) = \arg \min_{(m,L)} C(m, L).\tag{2.53}$$

2.5 Controle on-line com amostra não-unitária

O procedimento de controle on-line por atributo com amostra não-unitária, proposto por Bessegato, Quinino e Pereira (2014), consiste na utilização de amostras de tamanho $n \geq 1$ para a decisão sobre a situação do processo. Cada item inspecionado é classificado uma única vez e tem-se a incorporação ao sistema de monitoramento uma restrição sobre

a impossibilidade de se coletar itens em sequência. Essa restrição considera que entre a inspeção de dois itens sucessivos, são produzidos $d - 1$ itens que não são inspecionados, $d \geq 1$. Considera-se que o processo de produção inicia sob controle, com fração de itens conformes produzidos igual a p_1 , e em um instante aleatório o processo fica fora de controle, com fração de itens conformes produzidos igual a p_2 , $p_2 < p_1$. O tempo de falha do processo segue uma distribuição geométrica de parâmetro π , onde $0 < \pi < 1$. Após a mudança de estado do processo para fora de controle, ele só retorna ao seu estado inicial por meio de uma intervenção para ajuste. Após a produção de m itens, inicia-se a fase de amostragem dos itens que serão inspecionados. Inspecciona-se o primeiro item da amostra, e os demais $n - 1$ itens são inspecionados a cada d itens produzidos. Denomina-se R a quantidade de itens que foram produzidos durante a fase de amostragem, $R = (n - 1)d + 1$, $R \geq n$. Os itens inspecionados são descartados, e as inspeções estão sujeitas a erros de classificação. O processo é considerado fora de controle caso a quantidade de itens declarados conformes seja menor que a , $1 \leq a \leq n$. Quando a amostra for unitária ($n = 1$) tem-se o modelo de controle on-line por atributo com erros de classificação proposto por Borges, Ho e Turnes (2001), descrito na seção 2.3. O fluxograma do sistema de monitoramento com amostra não-unitária é apresentado na figura 3.

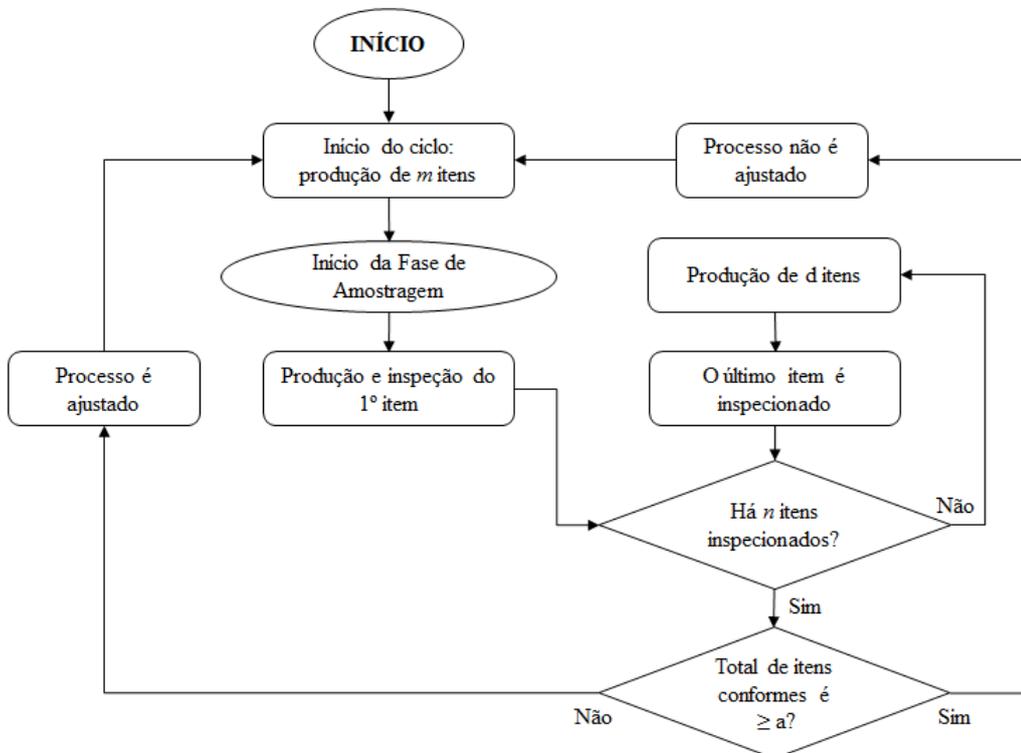


Figura 3 – Fluxograma do processo do modelo mn.

Quando o processo de produção está sob controle, a probabilidade de não se ajustar o processo é p_A . Similarmente, quando o processo de produção está fora de controle, a probabilidade de não se ajustar o processo é p_D . Ambas essas probabilidades são as

mesmas que foram descritas em (2.10). Denota-se como $b_i(x, y)$, a probabilidade de uma variável aleatória binomial(x, y) assumir o valor i ; e $B_i(x, y)$, a probabilidade de uma variável aleatória binomial(x, y) assumir valores maiores ou iguais a i .

Quando toda a amostra é produzida com o processo sob controle, a sequência dos itens que são classificados é identicamente distribuída segundo uma Bernoulli de parâmetro p_A , assim, a probabilidade do processo não ser ajustado após a coleta e classificação da amostra é $B_a(n, p_A)$. Caso toda a amostra seja produzida com o processo fora de controle, essa sequência dos itens que são classificados é identicamente distribuída segunda uma Bernoulli de parâmetro p_D , logo, a probabilidade do processo não ser ajustado após a coleta e classificação da amostra é $B_a(n, p_D)$.

A cadeia de Markov em tempo discreto que modela o sistema de monitoramento tem espaço de estados denotados por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2, 3 \text{ e } s = 0, 1\}, \quad (2.54)$$

onde w é a situação onde ocorre a mudança de estado do processo e s é a decisão sobre o ajuste. $w = 0$, o processo se mantém sob controle durante todo o ciclo corrente; $w = 1$, o processo sai de controle durante a produção dos m itens; $w = 2$, o processo sai de controle durante a fase de amostragem (produção de R itens); $w = 3$, o ciclo corrente já se inicia com o processo fora de controle. $s = 0$, o processo é ajustado; $s = 1$, o processo não é ajustado.

As probabilidades de transição entre os estados são denotadas por $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$ onde (w_i, s_i) é o estado da cadeia no i -ésimo ciclo de monitoramento. Partindo da condição inicial do processo, são possíveis transições para os estados onde $w = 0, 1, 2$. A probabilidade do processo permanecer sob controle durante o ciclo corrente é $(1 - \pi)^{m+R}$. Assim, as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2, 3$, para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(0,0)} &= (1 - \pi)^{m+R}[1 - B_a(n, p_A)], \\ P_{(w,0),(0,1)} &= (1 - \pi)^{m+R}B_a(n, p_A). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Por outro lado, partindo da condição inicial do processo, a probabilidade de ocorrer uma mudança na fração de conformidade no primeiro ciclo após ajuste é $1 - (1 - \pi)^m$. Logo, as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2, 3$, para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^m][1 - B_a(n, p_D)], \\ P_{(w,0),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^m]B_a(n, p_D). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para um ciclo subsequente a um ajuste no processo, tem-se duas situações para as transições para estados em que $w = 2$. Na primeira, a mudança de estado do processo acontece no primeiro item inspecionado, e assim, toda a amostra é produzida com o processo fora de controle. Neste caso, a quantidade de itens classificados como conformes, seguem uma binomial(n, p_D). Na segunda situação, tem-se que a mudança de estado do processo acontece em algum instante após a coleta do primeiro item da amostra. Existe k itens inspecionados que são produzidos com o processo sob controle, $1 \leq k \leq n - 1$. O restante da amostra é produzida com o processo fora de controle, $n - k > 0$. Assim, a quantidade de itens classificados como conformes é distribuída de acordo com uma mistura de modelos binomiais, com diferentes probabilidades de sucesso, onde: de 1 até k , tem-se uma binomial(k, p_A); e de $k + 1$ até n , tem-se uma binomial($n - k, p_D$).

A probabilidade da mudança de estado ocorrer no primeiro item inspecionado é $(1 - \pi)^m \pi$, e dado que ela ocorra, a probabilidade de não acontecer ajuste no processo é $B_a(n, p_D)$. No entanto, a probabilidade da mudança de estado ocorrer entre as inspeções do k -ésimo e $(k + 1)$ -ésimo item da amostra é $(1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d]$. Seja u a quantidade de itens inspecionados classificados como conformes e produzidos com o processo sob controle, a probabilidade de j itens serem declarados conformes e de ocorrer mudança de estado do processo entre a k -ésima e a $(k + 1)$ -ésima inspeções é $(1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d] \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D)$.

Generalizando para todos os valores possíveis de k , $1 \leq k \leq n$, tem-se que as probabilidades de transição dos estados $(w, 0)$, $w = 0, 1, 2, 3$, para os estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$ são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(2,0)} = (1 - \pi)^m \left\{ \pi [1 - B_a(n, p_D)] + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}, \quad (2.57)$$

e

$$P_{(w,0),(2,1)} = (1 - \pi)^m \left\{ \pi B_a(n, p_D) + (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}. \quad (2.58)$$

Não são possíveis as transições para estados onde $w = 3$, dado que o processo foi ajustado no ciclo anterior. Portanto $P_{(w,0),(3,s)} = 0$, para $w = 0, 1, 2, 3$; $s = 0, 1$. Nas situações onde o processo está sob controle e decide-se não ajustá-lo, estado $(0, 1)$, são possíveis transições para os estados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(2, 1)$. As

probabilidades de transição para esses estados é dada por:

$$P_{(0,1),(w,s)} = P_{(0,0),(w,s)}, \forall (w, s) \in E. \quad (2.59)$$

Para os estados $(3, 0)$ e $(3, 1)$, é necessário que no ciclo anterior, o processo de produção esteja fora de controle, $w = 1, 2, 3$, e não tenha acontecido o ajuste do processo, $s = 1$. Assim, as probabilidades de transição dos estados onde $w = 1, 2, 3$, para os estados $(3, 0)$ e $(3, 1)$, são:

$$\begin{aligned} P_{(w,1),(3,0)} &= 1 - B_a(n, p_D), \\ P_{(w,1),(3,1)} &= B_a(n, p_D). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Todas as outras transições a partir dos estados em que $w = 1, 2, 3$ e $s = 1$ não são possíveis. Logo, $P_{(w,1),(0,s)} = P_{(w,1),(1,s)} = P_{(w,1),(2,s)} = 0$, para $w = 1, 2, 3$; $s = 0, 1$.

Por fim, a matriz de probabilidade de transição \mathbf{P} é escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

A matriz \mathbf{P} é irredutível e aperiódica, possuindo uma distribuição invariante que é descrita pelo vetor:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2, 3; s = 0, 1]', \text{ onde } \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1 \quad (2.62)$$

O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é encontrado resolvendo o sistema de equações lineares $(\mathbf{P}' - \mathbf{I})\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, com a restrição descrita em (2.62), onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\mathbf{0}$ é o vetor nulo e \mathbf{P}' é a transposta da matriz \mathbf{P} .

A estrutura de custo considerada é a mesma que foi utilizada na seção 2.3. O custo esperado de cada estado (w, s) , $w = 0, 1, 2, 3$ e $s = 0, 1$ é denotado como $\phi(w, s)$, descrito em (2.63).

$$\phi(w, s) = nc_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s). \quad (2.63)$$

onde nc_{insp} é o custo de realizar n classificações de itens inspecionados, $\xi(w, s)$ é o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes dentre os $m + R - n$ itens não inspecionados que são enviados ao mercado; $\theta(w, s)$ é o custo esperado por ciclo relacionado aos itens inspecionados e descartados; e $\varphi(w, s)$ é o custo de ajuste do processo por ciclo.

O processo opera sob controle durante todo o ciclo de inspeção quando ele está em estados onde $w = 0$. A quantidade esperada de itens não-conformes que não são inspecionados por ciclo é $(1 - p_1)(m + R - n)$. Assim o custo esperado por ciclo referente aos itens não-conformes é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m + R - n), s = 0, 1. \quad (2.64)$$

Como o sistema de classificação é imperfeito, os itens conformes podem ser declarados como não-conformes e os itens não-conformes podem ser declarados conformes. Assim, o custo esperado relacionado aos itens inspecionados e descartados para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} \theta(0, 0) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{1 - B_a(n, p_A)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[\frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} i + \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} (n - i) \right] b_i(n, p_A) + nc_{snc}, \\ \theta(0, 1) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{B_a(n, p_A)} \sum_{i=a}^n \left[\frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} i + \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} (n - i) \right] b_i(n, p_A) + nc_{snc}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Assim, os custos esperados para os estados $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são:

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &= nc_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a, \\ \phi(0, 1) &= nc_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Quando a mudança de estado ocorre durante a produção dos m itens, em $w = 1$, o instante onde a fração de conformidade passa de p_1 para p_2 é um ponto qualquer entre o primeiro e o m -ésimo item produzido. A probabilidade da mudança de estado acontecer num instante t é dada por:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, t = 1, \dots, m. \quad (2.67)$$

O número esperado de itens não-conformes produzidos antes do início da inspeção é: $\sum_{t=1}^m q_m(t)[(t - 1)(1 - p_1) + (m - t + 1)(1 - p_2)]$. Como o processo sai de controle antes da fase de amostragem, toda a coleta da amostra é feita com o processo fora de controle. O número esperado de itens defeituosos que não serão inspecionados nessa fase é $(1 - p_2)(R - n)$.

Assim, o custo esperado dos itens não-conformes não inspecionados no ciclo e que serão enviados ao mercado, para $s = 0, 1$, é:

$$\xi(1, s) = c_{nc} \left\{ \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t+1)(1-p_2)] + (1-p_2)(R-n) \right\}. \quad (2.68)$$

Os custos esperados relacionado ao descarte dos itens inspecionados para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são similares aos custos descritos em (2.65), com exceção da probabilidade de se classificar um item como conforme, que agora é p_D , e da fração de conformidade, que passou de p_1 para p_2 .

$$\begin{aligned} \theta(1, 0) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{1 - B_a(n, p_D)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[\frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-i) \right] b_i(n, p_D) + nc_{snc}, \\ \theta(1, 1) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{B_a(n, p_D)} \sum_{i=a}^n \left[\frac{p_2(1-\alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1-p_D} (n-i) \right] b_i(n, p_D) + nc_{snc}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Assim, os custos esperados para os estados $(1, 0)$ e $(1, 1)$ são:

$$\begin{aligned} \phi(1, 0) &= nc_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a, \\ \phi(1, 1) &= nc_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Nos estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$, a fração de conformidade se modifica durante a fase de amostragem, com pelo menos um item sendo produzido com processo fora de controle. O instante no qual ocorre essa mudança acontece em qualquer ponto dentro da produção dos R itens. A probabilidade da mudança de estado acontecer no t -ésimo item produzido durante a fase de amostragem é:

$$q_R(t) = \frac{(1-\pi)^{t-1}\pi}{1-(1-\pi)^R}, t = 1, \dots, R. \quad (2.71)$$

A quantidade de itens inspecionados antes da mudança de estado, quando $n > 1$, é $k = (t-1)d^{-1}$; e $k = 0$, quando $n = 1$. O número esperado de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante a amostragem é descrito por:

$$\nu(2, s) = \begin{cases} \sum_{t=1}^R q_R(t) \left\{ [t - (k+1)](1-p_1) + [R-n - (t - (k+1))](1-p_2) \right\}, & \text{se } n > 1, \\ 0, & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (2.72)$$

Como o processo se mantém sob controle durante toda a produção dos m itens, o número esperado de itens não-conformes produzidos antes da fase de amostragem é

$(1 - p_1)m$. Assim, o custo esperado dos itens não-conformes não inspecionados e enviados ao mercado, para os estados onde $w = 2$ e $s = 0, 1$, é:

$$\xi(2, s) = c_{nc}[(1 - p_1)m + \nu(2, s)], s = 0, 1. \quad (2.73)$$

Para o estado $(2, 1)$, sejam $\eta_c(2, 1)$ e $\eta_{nc}(2, 1)$, respectivamente, o número médio de itens inspecionados e descartados conformes e não-conformes.

$$\begin{aligned} \eta_c(2, 1) = & \frac{(1 - \pi)^m}{P_{(0,0),(2,1)}} \left\{ \pi \sum_{j=a}^n \left[\frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - j) \right] b_j(n, p_D) + \right. \\ & (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=a}^n \left[\frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} u + \right. \\ & \left. \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} (k - u) + \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} (j - u) + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - k - j + u) \right] \times \\ & \left. b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

e $\eta_{nc}(2, 1) = n - \eta_c(2, 1)$.

Para o estado $(2, 0)$, sejam $\eta_c(2, 0)$ e $\eta_{nc}(2, 0)$, respectivamente, o número médio de itens inspecionados e descartados conformes e não-conformes. A expressão para $\eta_c(2, 0)$ é similar a (2.74), exceto por considerar que aqui $\sum_{j=1}^n Y_j < a$. Logo:

$$\begin{aligned} \eta_c(2, 0) = & \frac{(1 - \pi)^m}{P_{(0,0),(2,0)}} \left\{ \pi \sum_{j=0}^{a-1} \left[\frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} j + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - j) \right] b_j(n, p_D) + \right. \\ & (1 - \pi) [1 - (1 - \pi)^d] \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k \sum_{j=0}^{a-1} \left[\frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} u + \right. \\ & \left. \frac{p_1\alpha}{1 - p_A} (k - u) + \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} (j - u) + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - k - j + u) \right] \times \\ & \left. b_u(k, p_A) b_{j-u}(n - k, p_D) \right\}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

e $\eta_{nc}(2, 0) = n - \eta_c(2, 0)$.

Assim, o custo esperado de itens não-conformes inspecionados e descartados, para os estados $(2, 0)$ e $(2, 1)$, são:

$$\begin{aligned} \theta(2, 0) &= (c_{sc} - c_{snc})\eta_c(2, 0) + nc_{snc}, \\ \theta(2, 1) &= (c_{sc} - c_{snc})\eta_c(2, 1) + nc_{snc}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Por fim, o custo esperado dos estados (2, 0) e (2, 1) são:

$$\begin{aligned}\phi(2, 0) &= nc_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a, \\ \phi(2, 1) &= nc_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).\end{aligned}\tag{2.77}$$

Os custos esperados dos estados (3, 0) e (3, 1) são similares àqueles apresentados para os estados (0, 0) e (0, 1), exceto que, em $w = 3$, tem-se que o processo está fora de controle durante todo o ciclo corrente. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}\xi(3, 0) &= c_{nc}(1 - p_2)(m + R - n), \\ \xi(3, 1) &= \xi(3, 0).\end{aligned}\tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}\theta(3, 0) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{1 - B_a(n, p_D)} \sum_{i=0}^{a-1} \left[\frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - i) \right] b_i(n, p_D) + nc_{snc}, \\ \theta(3, 1) &= \frac{(c_{sc} - c_{snc})}{B_a(n, p_D)} \sum_{i=a}^n \left[\frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} i + \frac{p_2\alpha}{1 - p_D} (n - i) \right] b_i(n, p_D) + nc_{snc}.\end{aligned}\tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}\phi(3, 0) &= nc_{insp} + \xi(3, 0) + \theta(3, 0) + c_a, \\ \phi(3, 1) &= nc_{insp} + \xi(3, 1) + \theta(3, 1).\end{aligned}\tag{2.80}$$

Para uma quantidade suficientemente grande de itens produzidos, o custo esperado por item produzido e enviado ao mercado, $C(m, n, a)$, é a razão entre o custo esperado por ciclo, $E(L) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)$, e a quantidade de itens produzidos e enviados ao mercado, $m + R - n$. Logo,

$$C(m, n, a) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)}{m + R - n}.\tag{2.81}$$

A determinação do intervalo de inspeção, m ; do tamanho amostral, n ; e do fator de decisão, a ; que minimizam $C(m, n, a)$ é a solução do problema:

$$(m^0, n^0, a^0) = \arg \min_{(m,n,a)} C(m, n, a).\tag{2.82}$$

3 Algoritmo genético

Com o aumento do número de parâmetros nos modelos de planejamento econômico de controle on-line, pode-se tornar inviável computacionalmente utilizar um algoritmo de busca direta que avalie todas as combinações possíveis dos parâmetros a fim de encontrar a solução ótima. Uma alternativa para resolver essa situação é a utilização de meta-heurísticas, métodos heurísticos (de busca parcial) para resolver de forma genérica problemas de otimização. Comparados com os algoritmos de otimização (Simplex e suas extensões por exemplo) e métodos iterativos (método de Newton, quase-Newton, gradiente descendente), as meta-heurísticas não garantem que a solução globalmente ótima possa ser encontrada para algumas classes de problemas. Alguns exemplos de meta-heurísticas são: algoritmos genéticos, enxame de partículas, colônia de formigas, arrefecimento simulado.

Chatterjee e Laudatto (1997), Carlyle, Montgomery e Runger (2000), Aparisi e García-Díaz (2004) utilizam algoritmos genéticos como ferramenta de otimização em controle estatístico de qualidade. Chen (2003) aplica algoritmos genéticos, ao invés de métodos convencionais, para resolver um modelo de planejamento econômico-estatístico para carta de controle de \bar{X} com tamanho amostral fixo e intervalo de amostragem variável.

Algoritmos Genéticos (AGs) são algoritmos de busca e otimização baseado nas ideias da teoria evolucionista de Darwin, e utiliza mecanismos de seleção natural e da genética. Diferentemente dos algoritmos convencionais de otimização, os AGs possuem regras de transição probabilísticas e não determinísticas, e trabalham com as variáveis codificadas. Foi proposto inicialmente por Holland (1975), que utilizou os primeiros conceitos de teoria evolucionista como recurso computacional. Goldberg (1989) escreveu o livro *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, fundamental para a consolidação da área.

AGs são basicamente compostos de um conjunto de soluções (indivíduos) que são condicionadas a métodos de seleção e operadores genéticos (cruzamento e mutação), as quais são avaliadas quanto a seu nível de adaptação, indicando quais soluções do conjunto (população) melhor se adequam a função objetivo (fitness). Cada indivíduo é composto por um cromossomo que é uma sequência de genes que representa informações relativas as variáveis do problema. Em cada iteração do algoritmo (geração) é esperado que os melhores indivíduos da população sejam selecionados para reprodução e, através dos operadores de cruzamento e mutação, gerem novos indivíduos melhor adaptados a função objetivo. Os indivíduos selecionados são chamados de pais, enquanto os indivíduos gerados a partir do cruzamento entre pais são chamados de filhos. Existem diversos métodos de codificação dos indivíduos como por exemplo: codificação binária, codificação real, codificação por permutação, codificação em árvore, entre outras. Os operadores cruzamento e mutação são específicos de cada método de codificação, enquanto o método de seleção independe

da codificação dos indivíduos. Neste capítulo é apresentado dois métodos de codificação: binária e real, e alguns de seus respectivos operadores de cruzamento e mutação. Também são apresentados quatro métodos distintos de seleção: torneio, roleta, classificação e elitismo. A figura 4 apresenta a estrutura de um algoritmo genético simples, cujos passos são descritos a seguir:

1. Definir a função objetivo, variáveis e parâmetros do algoritmo genético.
2. Inicializar a população inicial.
3. Avaliar cada indivíduo da população na função objetivo.
4. Aplicar o operador genético de seleção.
5. Aplicar o operador genético de cruzamento nos pais.
6. Aplicar o operador genético de mutação nos filhos.
7. Atualizar a população.
8. Verificar critério de parada. Se atendido, encerra-se o algoritmo e o melhor indivíduo da última população é a solução ótima. Caso contrário, voltar para o passo 4.

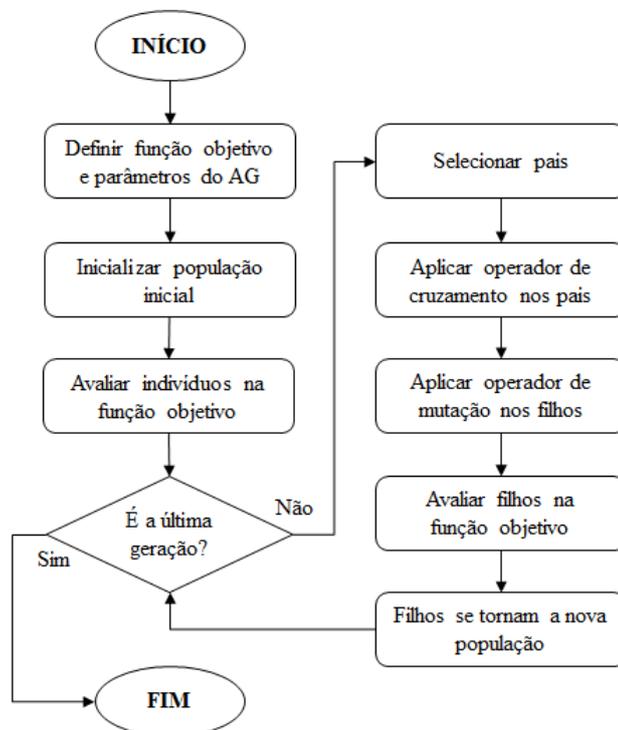


Figura 4 – Estrutura de um algoritmo genético simples.

Os AGs possuem alguns parâmetros básicos que devem ser determinados no início de sua implementação. São eles: o tamanho da população, M , o número de gerações, I , a probabilidade de cruzamento, pC , e a probabilidade de mutação, pM . Os valores associados

a cada um dos parâmetros dependem do problema a ser otimizado e a combinação deles que deixa o algoritmo mais eficiente possível é encontrada de forma empírica. Reeves e Wright (1999) sugerem o uso de procedimentos de planejamento de experimentos a fim de comparar diferentes combinações de operadores e valores dos parâmetros nos algoritmos genéticos.

O tamanho da população indica quantas soluções o algoritmo estará avaliando a cada iteração. Se a população for pequena, o AG tem poucas oportunidades de executar os operadores genéticos e geralmente uma menor parte do espaço de busca é explorado. Se a população for grande, tem-se uma maior exploração do espaço de busca, mas o tempo computacional do algoritmo tende a ser maior. O número de gerações indica quantas iterações o AG vai executar. Normalmente é o critério de parada dos algoritmos genéticos. Um número pequeno de gerações pode não ser suficiente para a convergência do algoritmo, enquanto um número grande de gerações demandaria em um maior tempo computacional. A probabilidade de cruzamento, indica quantas vezes em média o operador de cruzamento será executado. Se a probabilidade de cruzamento for 1, todos os pais selecionados realizam cruzamento. Se a probabilidade de cruzamento for 0, todos os filhos serão cópias idênticas dos indivíduos que foram selecionados como pais. A probabilidade de mutação indica quantas vezes em média o operador de mutação será executado. Se a probabilidade de mutação for 1, todos os genes dos filhos serão modificados. Se a probabilidade de mutação for 0, nenhum gene dos filhos são modificados, portanto os filhos se mantêm exatamente iguais ao que eram quando foram gerados após o operador de cruzamento. Deve-se evitar valores altos para o pM , pois se o operador de mutação ocorrer com muita frequência, o algoritmo torna-se um método primitivo de busca aleatória (JONG, 1975).

3.1 Codificação

A codificação dos indivíduos é um dos primeiros passos à serem feitos quando se pretende resolver um problema usando o AG. O método de codificação utilizado depende da função objetivo do problema, e cada um desses métodos possuem seus próprios operadores de cruzamento e mutação. A função objetivo do problema de planejamento econômico de controle on-line por atributo possui como entrada números inteiros, e como saída um número real positivo que é associado ao valor mínimo da função (custo do sistema de monitoramento). Para esse tipo de função objetivo, dois métodos de codificação são apresentados: a codificação binária e a codificação real.

Codificação binária

A codificação binária é um dos métodos mais comuns de representar as variáveis de uma função no algoritmo genético, e foi o primeiro método a ser utilizado pelos pesquisadores da área. Possui operadores genéticos simples e de fácil implementação.

Nessa codificação, cada cromossomo é uma sequência de bits (cada bit é um gene), 0 ou 1. A quantidade de genes depende do espaço de busca de soluções. A figura 5 apresenta um exemplo de cromossomos em codificação binária.

Cromossomo A:	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
Cromossomo B:	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0

Figura 5 – Exemplo de cromossomos com 10 bits em codificação binária.

Codificação real

A codificação real foi proposta inicialmente por Wright (1991), para resolver problemas onde as variáveis da função a ser otimizada fossem reais. Nesse método de codificação, cada cromossomo é um vetor de valores entre 0 e 1, onde cada gene representa uma variável do problema (ver figura 6). A equação (3.1) é usada para decodificar os valores na codificação real:

$$V_{ij} = (b_j - a_j)v_{ij} + a_j \quad (3.1)$$

onde V_{ij} é o valor decodificado da variável j do cromossomo i , v_{ij} é o valor codificado da variável j do cromossomo i , a_j é o valor mínimo do espaço de busca da variável j e b_j é o valor máximo do espaço de busca da variável j .

Cromossomo A:	0,3267	0,8762
Cromossomo B:	0,6521	0,1288

Figura 6 – Exemplo de cromossomos com 2 variáveis em codificação real.

Vários pesquisadores sugerem que, em alguns problemas, os algoritmos genéticos que utilizam a codificação real podem possuir melhor performance que os que utilizam a representação binária convencional (WRIGHT, 1991; ESHELMAN; SCHAFFER, 1993; HERRERA; LOZANO; VERDEGAY, 1998; ONO; KITA; KOBAYASHI, 1999).

3.2 Métodos de seleção

A cada iteração do algoritmo genético, uma quantidade de indivíduos da população deve ser selecionada como pais para que ocorra reprodução, e assim novos indivíduos (filhos) sejam gerados. Normalmente adota-se que, no processo de reprodução, dois pais produzem dois filhos (mas isso não é regra). Assim, o número total de indivíduos selecionados para

pais deve ser o suficiente para que a quantidade de filhos gerados após reprodução tenha o tamanho da população. Goldberg e Deb (1991) analisam e avaliam alguns métodos de seleção de pais para os AGs. Essa seção apresenta alguns desses métodos.

Seleção por torneio

Na seleção por torneio, são selecionados aleatoriamente dois (ou mais) indivíduos da população. Esses indivíduos são avaliados na função objetivo. O indivíduo com melhor avaliação é escolhido como pai. O processo é repetido até que o número de pais a serem selecionados para a fase de reprodução seja atendido. O quadro 1 apresenta o algoritmo da seleção por torneio.

```

/*Seja pop a população atual, nt o número de indivíduos por torneio
(nt ≥ 2), n o número de pais que devem ser selecionados.*/
algoritmo
  leia pop, nt, n
  para i = 1 até n faça
    para j = 1 até nt faça
      Tj ← um indivíduo aleatório da população pop
    fim para
    paisi ← o indivíduo de T que possui a melhor avaliação na função
      objetivo
    fim para
  retorne pais
fim algoritmo

```

Quadro 1 – Algoritmo de seleção por torneio.

Seleção por roleta

Na seleção por roleta, os indivíduos são selecionados de acordo com sua avaliação na função objetivo. Imagine uma roleta na qual são colocados todos os indivíduos da população. O tamanho de cada seção é proporcional à adequação de cada um dos indivíduos. Gira-se a roleta e o indivíduo da seção na qual a seta de seleção parar é selecionado como pai. Um exemplo de roleta é apresentado na figura 7.

A probabilidade do indivíduo ser selecionado é dado pela equação (3.2).

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^M f_j} \quad (3.2)$$

onde p_i é a probabilidade do indivíduo i ser selecionado, f_i é a avaliação do indivíduo i na função objetivo e $\sum_{j=1}^M f_j$ é a soma das avaliações de todos os indivíduos da população.

O método de seleção se inicia calculando a soma S das avaliações de todos os indivíduos da população. Após o cálculo de S , é gerado um número aleatório r dentro

do intervalo $[0, S]$. Toda a população é então percorrida e calcula-se a soma s_i (soma de todas as avaliações até o indivíduo i). O primeiro indivíduo cuja soma s_i for maior que r é selecionado como pai. O processo é repetido até que o número de pais a serem selecionados para a fase de reprodução seja atendido. O quadro 2 apresenta o algoritmo da seleção por roleta.

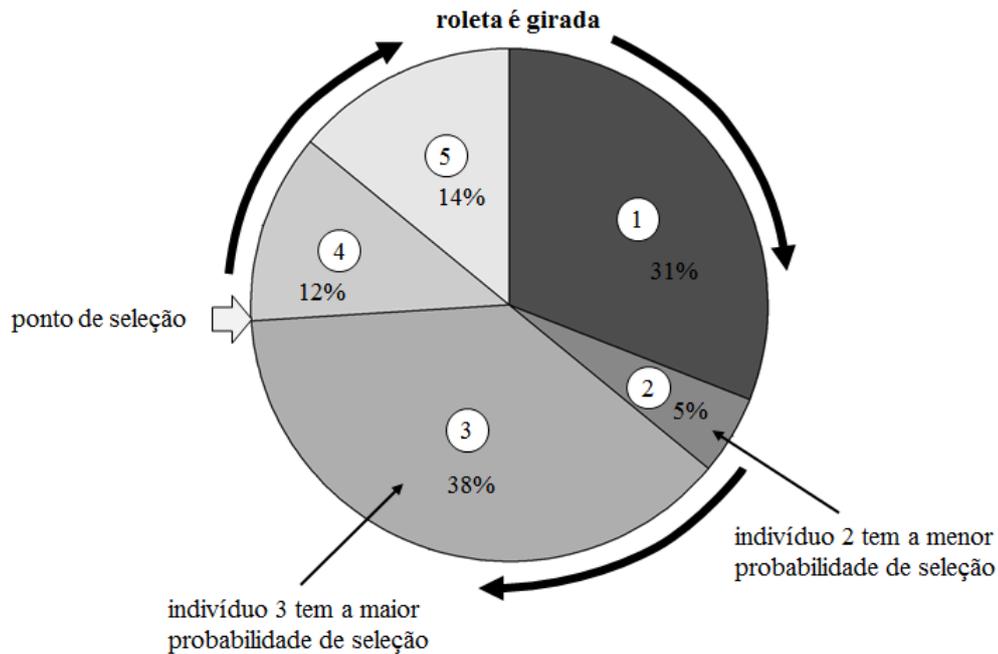


Figura 7 – Exemplo de seleção por roleta.

```

/*Seja pop a população atual, m o tamanho da população, n o número
de pais que devem ser selecionados, S a soma das avaliações de
todos os indivíduos da população.*/
algoritmo
  leia pop, m, n, S
  para i = 1 até n faça
    s ← 0
    r ← um número aleatório entre  $[0, S]$ 
    para j = 1 até m faça
      s ← s + avaliação do indivíduo j
      se s > r então
        paisi ← o indivíduo j
        interrompa
      fim se
    fim para
  retorne pais
fim algoritmo

```

Quadro 2 – Algoritmo de seleção por roleta.

Seleção por classificação

O método de seleção por classificação é similar ao método de seleção por roleta, a diferença é que os tamanhos das seções na roleta é dado agora pelas classificações dos indivíduos, em vez da adaptação deles na função objetivo. A classificação de cada um dos indivíduos é dada pela ordenação deles de acordo com suas avaliações na função objetivo. O pior indivíduo recebe classificação 1, o segundo pior recebe classificação 2, ..., o melhor indivíduo recebe classificação M . A probabilidade do indivíduo ser selecionado é dada pela equação (3.3).

$$p_i = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^M c_j} \quad (3.3)$$

onde p_i é a probabilidade do indivíduo i ser selecionado, c_i é a classificação do indivíduo i e $\sum_{j=1}^M c_j$ é a soma das classificações de todos os indivíduos da população.

O processo de seleção se inicia calculando a soma C das classificações de todos os indivíduos da população. Após o cálculo de C , é gerado um número aleatório r dentro do intervalo $[0, C]$. Toda a população é então percorrida e calcula-se a soma s_i (soma de todas as classificações até o indivíduo i). O primeiro indivíduo cuja soma s_i for maior que r é selecionado como pai. O processo é repetido até que o número de pais a serem selecionados para a fase de reprodução seja atendido. O quadro 3 apresenta o algoritmo da seleção por classificação.

```

/*Seja pop a população atual, m o tamanho da população, n o número
   de pais que devem ser selecionados, C a soma das classificações
   de todos os indivíduos da população.*/
algoritmo
  leia pop, m, n, C
  para i = 1 até n faça
    s ← 0
    r ← um número aleatório entre [0,C]
    para j = 1 até m faça
      s ← s + classificação do indivíduo j
      se s > r então
        paisi ← o indivíduo j
        interrompa
      fim se
    fim para
  fim para
  retorne pais
fim algoritmo

```

Quadro 3 – Algoritmo de seleção por classificação.

Elitismo

O elitismo garante que pelo menos um indivíduo da população atual permaneça na população seguinte. Assim, evita-se que entre uma iteração e outra do algoritmo você possa perder (através dos operadores genéticos) a melhor solução já encontrada. Geralmente é utilizado juntamente com algum outro método de seleção. O processo de elitismo é feito copiando o melhor indivíduo (ou melhores indivíduos) da população atual para a população subsequente. Esses indivíduos não passam pelos operadores de cruzamento e mutação.

3.3 Métodos de cruzamento

Os métodos de cruzamento dependem da codificação de variáveis utilizada no algoritmo. Esse operador é usado para variar a informação de um cromossomo entre uma geração e outra. O processo é feito a partir da recombinação das informações relativas aos cromossomos dos indivíduos que foram selecionados para pais. Para cada dois pais, um número aleatório r é gerado e a condição $r < pC$ é verificada, indicando se ocorrerá ou não o operador de cruzamento. Vários operadores de cruzamento são descritos em Bäck, Fogel e Michalewicz (2000).

Codificação binária: um ponto de corte

O operador de cruzamento com um ponto de corte consiste na determinação de uma única posição de corte nos pais. Toda a informação que estiver além do ponto de corte é trocada entre eles. Os indivíduos resultantes são chamados de filhos. A figura 8 ilustra um exemplo desse cruzamento. O algoritmo do operador é visto no quadro 4.

```

/*Seja A e B pais selecionados para cruzamento, n o número de bits,
   Z(1) e Z(2) os filhos gerados após o operador de cruzamento.*/
algoritmo
  leia A, B, n
  p ← um número aleatório inteiro entre 1 e n-1
  para i = 1 até p faça
    Zi(1) ← Ai
    Zi(2) ← Bi
  fim para
  para j = p+1 até n faça
    Zj(1) ← Bj
    Zj(2) ← Aj
  fim para
  retorne Z(1) e Z(2)
fim algoritmo

```

Quadro 4 – Algoritmo do operador de cruzamento com um ponto de corte.

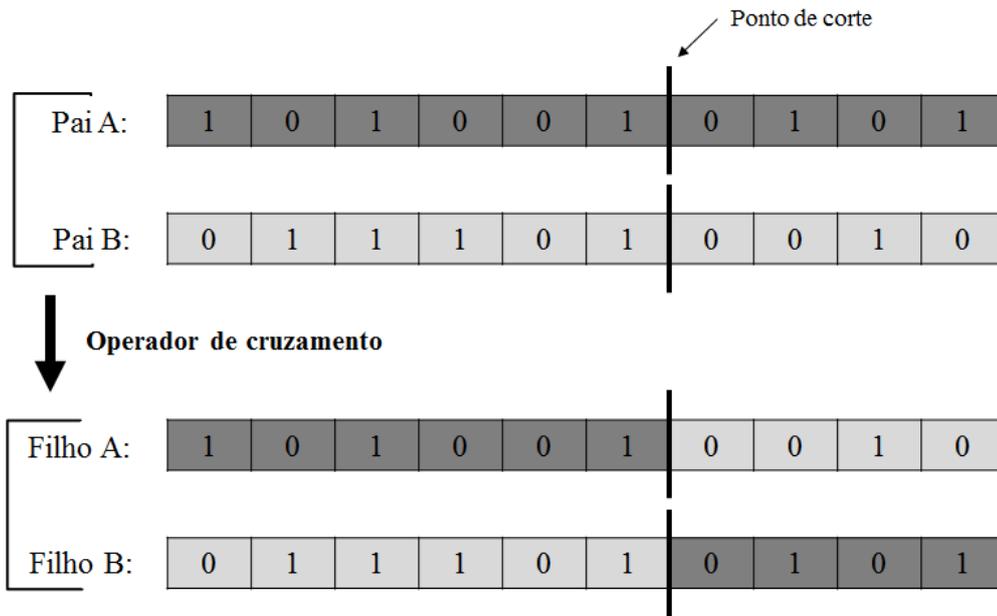


Figura 8 – Exemplo de cruzamento com um ponto de corte.

Codificação binária: dois pontos de corte

O operador de cruzamento com dois pontos de corte é similar ao anterior. A diferença é que são selecionadas duas posições de corte nos pais. Toda a informação que estiver entre os dois pontos são trocadas entre eles. Os indivíduos gerados a partir do operador são chamados de filhos. A figura 9 ilustra um exemplo desse cruzamento. O algoritmo do operador de cruzamento é apresentado no quadro 5.

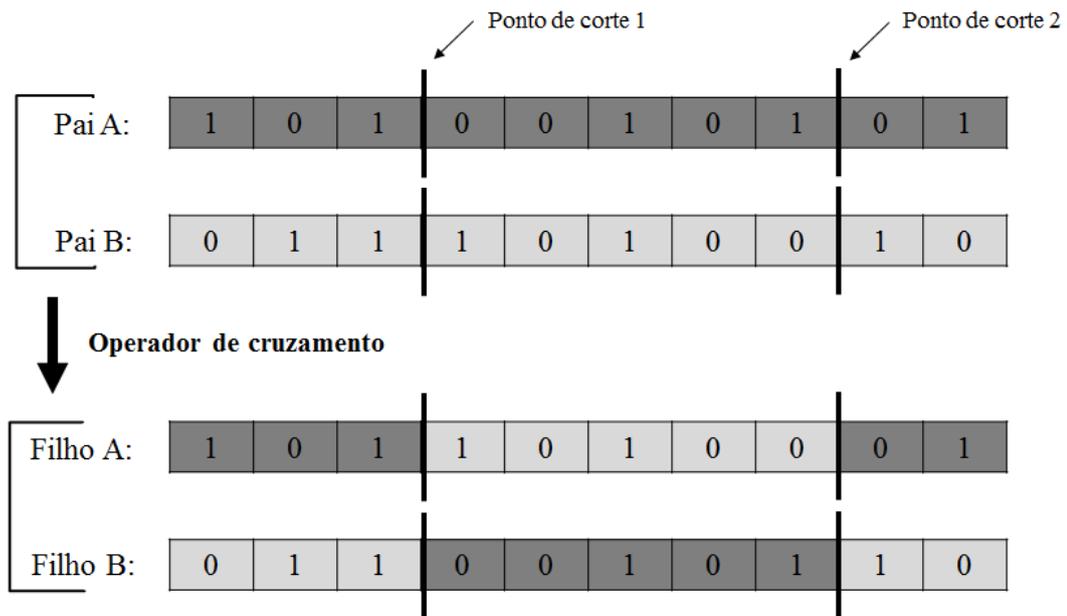


Figura 9 – Exemplo de cruzamento com dois pontos de corte.

```

/*Seja A e B pais selecionados para cruzamento, n o número de bits,
  Z(1) e Z(2) os filhos gerados após o operador de cruzamento.*/
algoritmo
  leia A, B, n
  [p1, p2] ← dois números aleatórios inteiros entre 1 e n-1
  /*onde p1 < p2;*/
  para i = 1 até p1 faça
    Zi(1) ← Ai
    Zi(2) ← Bi
  fim para
  para j = p1 + 1 até p2 faça
    Zj(1) ← Bj
    Zj(2) ← Aj
  fim para
  para k = p2 + 1 até n faça
    Zk(1) ← Ak
    Zk(2) ← Bk
  fim para
  retorne Z(1) e Z(2)
fim algoritmo

```

Quadro 5 – Algoritmo do operador de cruzamento com dois pontos de corte.

Codificação real: cruzamento em caixa

O operador de cruzamento em caixa consiste em gerar aleatoriamente um filho que esteja dentro da caixa (hiper-retângulo) na qual dois dos cantos diagonalmente opostos são os pais. Isso é feito selecionando, para cada uma das variáveis do problema, um número aleatório entre o mínimo e o máximo dessa variável nos pais. A figura 10 ilustra um exemplo desse cruzamento, e o algoritmo do operador de cruzamento é descrito no quadro 6.

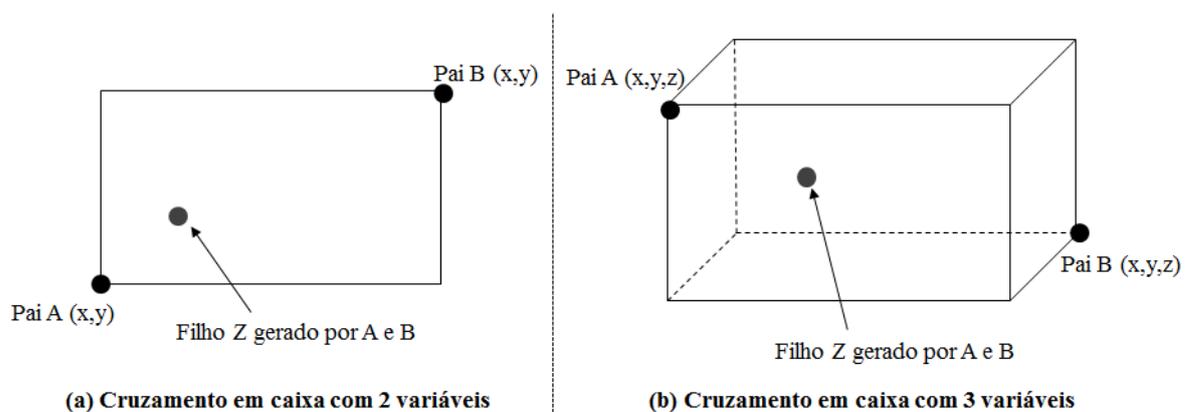


Figura 10 – Exemplos de cruzamento em caixa com duas e três variáveis.

```

/*Seja  $A$  e  $B$  pais selecionados para cruzamento,  $n$  o número de
  variáveis,  $Z$  o filho gerado após o operador de cruzamento.*/
algoritmo
  leia  $A$ ,  $B$ ,  $n$ 
  para  $i = 1$  até  $n$  faça
     $Z_i \leftarrow$  um número aleatório entre  $[\min(A_i, B_i), \max(A_i, B_i)]$ 
  fim para
  retorne  $Z$ 
fim algoritmo

```

Quadro 6 – Algoritmo do operador de cruzamento em caixa.

Codificação real: cruzamento em linha

O operador de cruzamento em linha consiste em gerar aleatoriamente um filho que esteja diretamente no segmento de reta que conecta os dois pais. Um exemplo (ver figura 11) e o algoritmo do operador de cruzamento em linha (ver quadro 7) são apresentados abaixo:

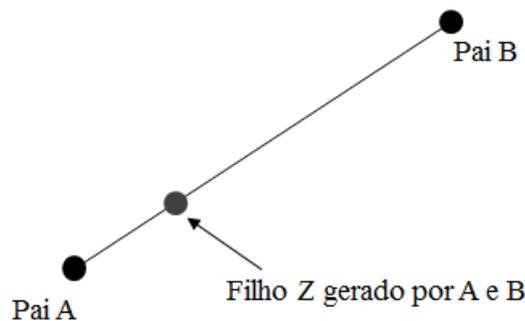


Figura 11 – Exemplo de cruzamento em linha.

```

/*Seja  $A$  e  $B$  pais selecionados para cruzamento,  $n$  o número de
  variáveis,  $Z$  o filho gerado após o cruzamento.*/
algoritmo
  leia  $A$ ,  $B$ ,  $n$ 
   $\lambda \leftarrow$  um número aleatório entre  $[0, 1]$ 
  para  $i = 1$  até  $n$  faça
     $Z_i \leftarrow \lambda A_i + (1 - \lambda) B_i$ 
  fim para
  retorne  $Z$ 
fim algoritmo

```

Quadro 7 – Algoritmo do operador de cruzamento em linha.

3.4 Métodos de mutação

Os métodos de mutação também dependem da codificação de variáveis utilizada no algoritmo. Esse operador é necessário para preservar a diversidade genética de uma

população e que essa possa ser passada para a geração seguinte. Além disso, a mutação pode ajudar a evitar uma possível convergência do algoritmo para ótimos locais. Bäck, Fogel e Michalewicz (2000) descreve alguns operadores de mutação para as codificações binária e real. Nesta seção é apresentado um operador de mutação para a codificação binária e dois operadores de mutação para a codificação real.

Codificação binária: inversão de bit

O operador de mutação por inversão de bit consiste em percorrer todos os genes do filho e verificar em quais dos genes a mutação vai acontecer. Para isso, é gerado aleatoriamente um valor r entre $[0, 1]$ para cada um dos genes, se $r_i < pM$, ocorre a inversão do bit no gene i . O processo de mutação é ilustrado pela figura 12. O algoritmo do operador de mutação por inversão de bit é apresentado no quadro 8.

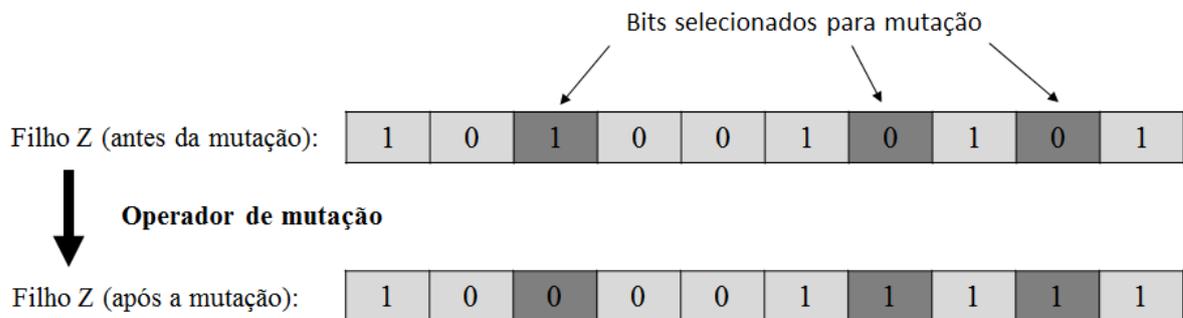


Figura 12 – Exemplo de mutação com inversão de bits.

```

/*Seja Z um filho, pM a probabilidade de mutação e n o número de
  bits.*/
algoritmo
  leia Z, pM, n
  para i = 1 até n faça
    r ← número aleatório entre [0,1]
    se r < pM então
      ocorre inversão no bit Zi
    fim se
  fim para
  retorne Z
fim algoritmo

```

Quadro 8 – Algoritmo do operador de mutação por inversão de bit.

Codificação real: mutação gaussiana

A mutação gaussiana é considerada o método clássico de mutação onde as variáveis da função objetivo são números reais (BÄCK; SCHWEFEL, 1993). O método consiste em causar uma perturbação d aleatória, segundo uma distribuição normal $[N(0, \sigma^2)]$, ao valor

atual da variável do filho. Geralmente é utilizado $\sigma = 1/10$. O operador é ilustrado pela figura 13. O algoritmo da mutação gaussiana é apresentado no quadro 9.

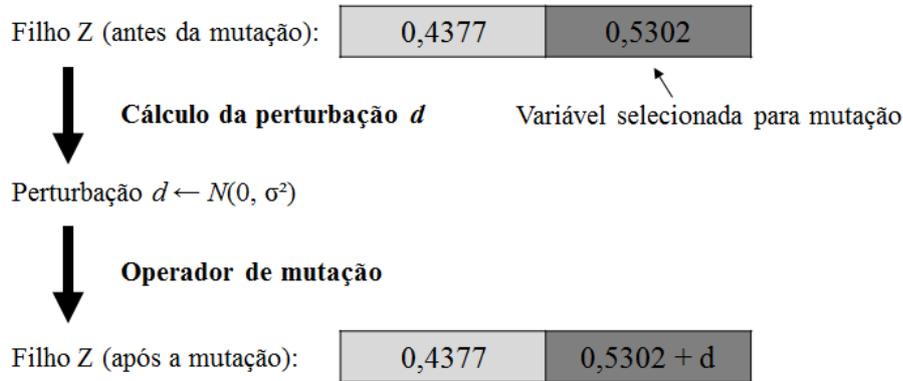


Figura 13 – Exemplo de mutação gaussiana.

```

/*Seja Z um filho, pM a probabilidade de mutação e n o número de
  variáveis.*/
algoritmo
  leia Z, pM, n
  para i = 1 até n faça
    r ← número aleatório entre [0,1]
    se r < pM então
      Zi ← Zi + N(0, σ²)
      /*onde N(0, σ²) é uma distribuição Normal com média 0 e
        variância σ²*/
    fim se
  fim para
  retorne Z
fim algoritmo

```

Quadro 9 – Algoritmo do operador de mutação gaussiana

Codificação real: mutação fina

O operador de mutação fina é uma variação do operador de mutação gaussiana, na qual é considerado um valor dinâmico para o desvio padrão σ . O método consiste em causar uma perturbação d aleatória, segundo uma distribuição normal $[N(0, |A_i - B_i|)]$, ao valor atual da variável do filho, onde $|A_i - B_i|$ é a distância entre os pais A e B na variável i . Nota-se que a medida que a população do algoritmo vai convergindo, a força do operador de mutação vai aproximando de zero, pois os indivíduos se tornam cada vez mais parecidos, diminuindo assim as distâncias entre os valores de suas variáveis. Um exemplo do operador é visto na figura 14. O algoritmo do operador de mutação fina é apresentado no quadro 10.

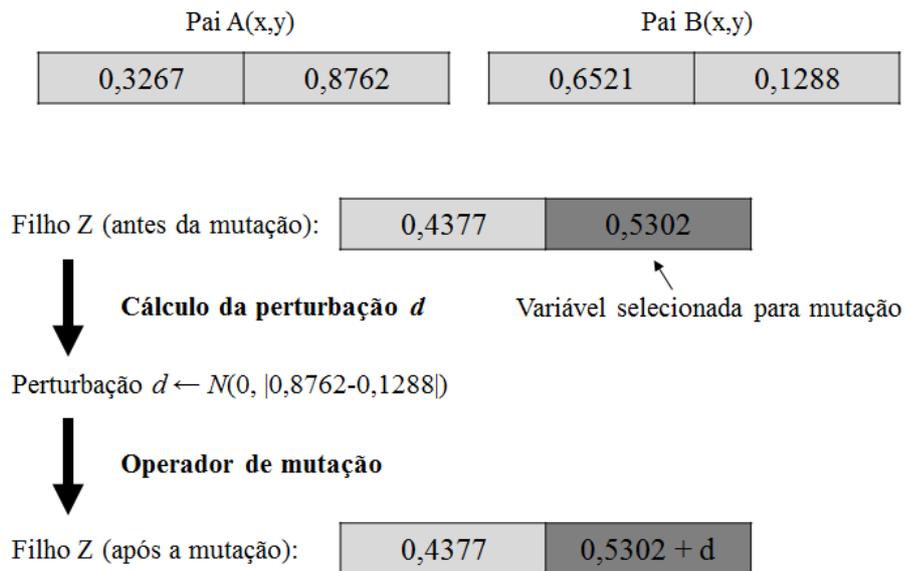


Figura 14 – Exemplo de mutação fina.

```

/*Seja Z um filho, A e B os pais que geraram Z, pM a probabilidade
de mutação e n o número de variáveis.*/
algoritmo
  leia Z, A, B, pM, n
  para i = 1 até n faça
    r ← número aleatório entre [0,1]
    se r < pM então
       $Z_i \leftarrow Z_i + N(0, |A_i - B_i|)$ 
      /*onde  $N(0, |A_i - B_i|)$  é uma distribuição Normal com média 0 e
      variância  $|A_i - B_i|$ */
    fim se
  fim para
  retorne Z
fim algoritmo

```

Quadro 10 – Algoritmo do operador de mutação fina

4 Aplicação numérica

O cenário descrito é baseado em Bessegato, Mota e Quinino (2016), Bessegato, Quinino e Pereira (2014), Bessegato et al. (2011), Trindade, Ho e Quinino (2007), Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989). Essa escolha é devida a sua facilidade de adequação a outras aplicações, como por exemplo: manutenção preventiva na produção de semicondutores, produção de diodos em placas de circuito impresso e em processos químicos.

A fabricação de circuitos integrados de alto volume apresenta dificuldades com o processo de solda, tais como insuficiência ou excesso de solda, projeção de solda ou posicionamento incorreto do filete. Dados históricos permitem adotar, em processo de solda, $p_1 = 0,999$ como a probabilidade de conformidade do processo sob controle, podendo-se usar uma distribuição geométrica com parâmetro $\pi = 0,0001$ para descrever a mudança de estado do processo, operando fora de controle, com fração de conformidade $p_2 = 0,95$. O sistema automático de inspeção por raios-X instalado na linha de produção é imperfeito, assumindo-se os erros de inspeção $\alpha = \beta = 0,01$. Os componentes de custo são estimados em $c_{insp} = 0,25$, $c_{nc} = 20$, $c_a = 100$ e $c_{sc} = c_{snc} = 2$.

Define-se como modelo m , a estratégia de planejamento que incorpora os erros de classificação (apresentado na seção 2.3); modelo mL , a estratégia que incorpora o intervalo de inspeção variável (apresentado na seção 2.4); e modelo mn , a estratégia que incorpora o uso de amostras não unitárias (apresentado na seção 2.5); além dos modelos Taguchi e Nayebpour apresentados respectivamente nas seções (2.1) e (2.2).

Consideradas as condições de operação descritas, as melhores estratégias encontradas por meio da aplicação de algoritmo genético, para os modelos apresentados no trabalho, estão quantificadas na tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros ótimos e custo dos modelos.

Modelo	m	L	n	a	Custo
Modelo Taguchi	34	-	-	-	0,179746
Modelo Nayebpour	38	-	-	-	0,175038
Modelo m	51	-	-	-	0,170475
Modelo mL	40	896	-	-	0,162314
Modelo mn	197	-	4	4	0,170278

Pela tabela 1 nota-se que a estratégia de utilizar amostras não-unitárias não contribui tanto para reduzir o custo esperado por item produzido (redução de 0,12% no custo ótimo em relação ao modelo m). Já a estratégia que incorpora o uso de intervalo de inspeção variável, modelo mL , apresenta uma redução de 4,79% em relação ao modelo m . Os modelos de Taguchi e Nayebpour, não são boas estratégias de planejamento pois, para o cenário apresentado, o sistema de classificação é imperfeito e ambos os modelos

desconsideraram os erros de classificação.

Para verificação da sensibilidade dos resultados, analisou-se o comportamento dos custos ótimos dos modelos referentes ao sistema de monitoramento. Variou-se um parâmetro probabilístico do modelo de cada vez, em um intervalo arbitrariamente grande, mantendo-se os demais valores constantes e iguais àqueles descritos no exemplo numérico. As figuras 15, 16 e 17 ilustram a influência de p_2 , π e dos erros de classificação sobre o custos ótimos dos modelos para o cenário apresentado.

Na figura 15 pode-se verificar que para todos os modelos, a medida que a fração de conformidade com processo fora de controle aumenta, o custo ótimo diminui. O modelo mL é o que apresenta, para todos os valores de p_2 analisados, o menor custo. Nota-se também que o modelo mn só atinge um custo levemente menor que o modelo m quando a fração de conformidade com processo fora de controle é próxima de 0.95; indicando que, para os valores menores de p_2 , utilizar amostras não-unitárias não contribui para a redução do custo.

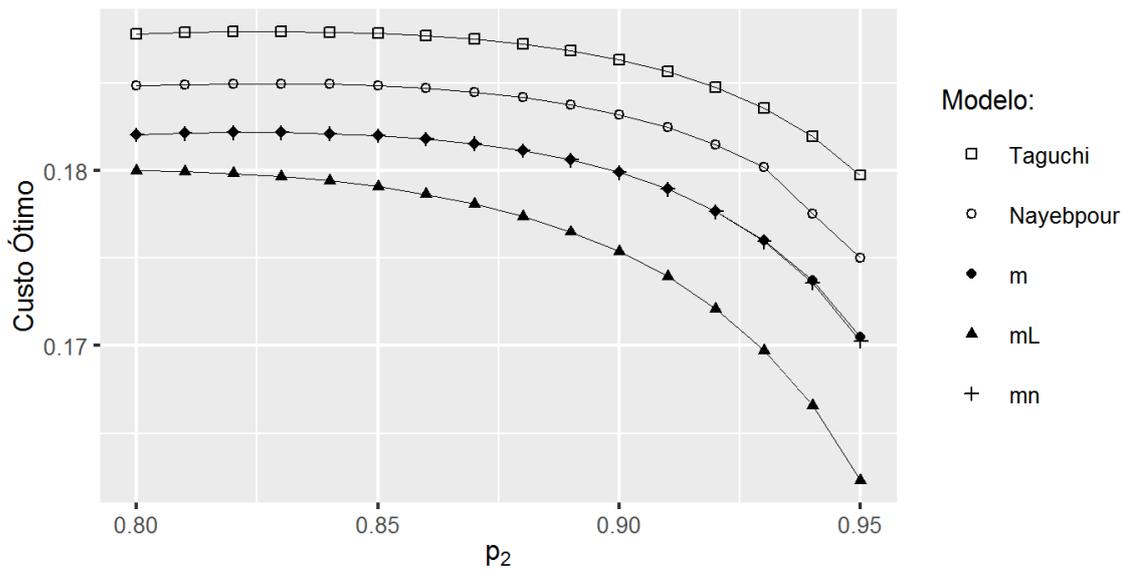


Figura 15 – Gráfico do custo ótimo versus p_2 .

A figura 16 mostra um aumento no custo ótimo para todos os modelos a medida que o valor de π aumenta. É possível perceber que o modelo que utiliza o intervalo de inspeção variável L , possui um menor crescimento no custo ótimo do sistema de controle, indicando a importância da presença do intervalo de inspeção variável na estratégia de monitoramento do processo. Nota-se também que o modelo Taguchi, por não descrever a probabilidade de shift do processo como sendo o parâmetro π da distribuição geométrica, acaba possuindo um comportamento diferente dos demais modelos quando π começa a admitir valores maiores.

Por outro lado, na figura 17, observa-se que nos modelos Taguchi e Nayebpour ocorre

um crescimento praticamente linear do custo ótimo a medida que o erro de classificação aumenta. Isso ocorre devido a não incorporação dos erros de classificação na estratégia de planejamento. Já os modelos que incorporam o erro de classificação não sofrem tanto com essas alterações de α e β . Percebe-se também que a medida que os erros de classificação ficam maiores, a curva do custo ótimo do modelo que considera amostras não-unitárias, mn , começa a se distanciar da curva do custo ótimo do modelo m , indicando uma maior contribuição do uso de amostras não-unitárias para a redução do custo esperado por item produzido. Mas, mesmo assim, o modelo com intervalo de inspeção variável, mL , é o que possui a curva com o menor custo ótimo.

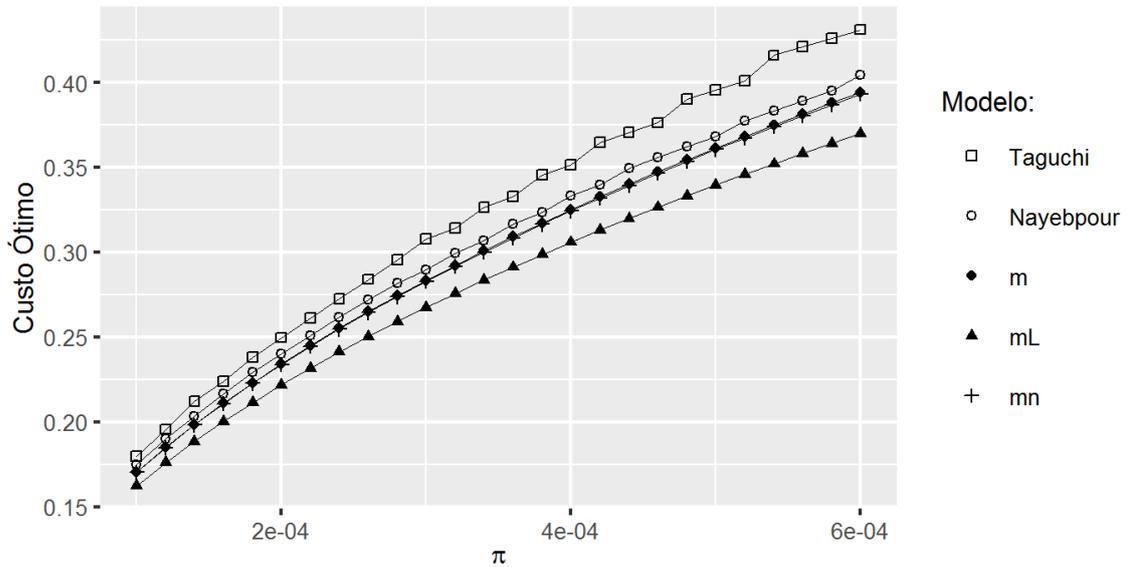


Figura 16 – Gráfico do custo ótimo versus π .

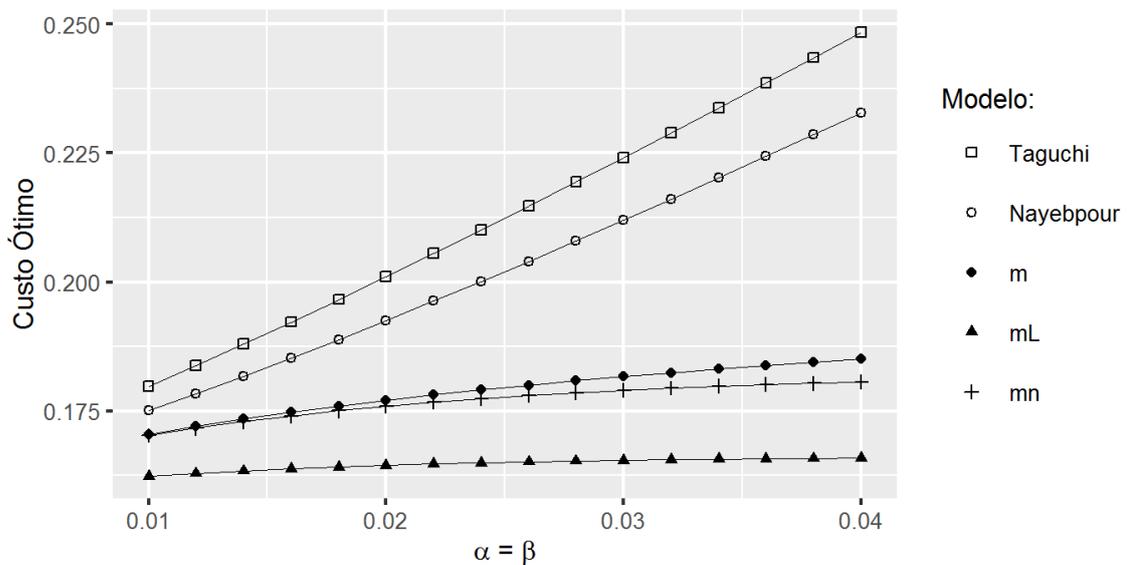


Figura 17 – Gráfico do custo ótimo versus $\alpha = \beta$.

Considerando os intervalos de estudo dos parâmetros probabilísticos citados anteriormente, verificou-se qual o comportamento do intervalo de inspeção variável, L , e do tamanho da amostra, n , para os modelos mL e mn respectivamente. Esses resultados são ilustrados pelas figuras 18, 19, 20, 21, 22 e 23.

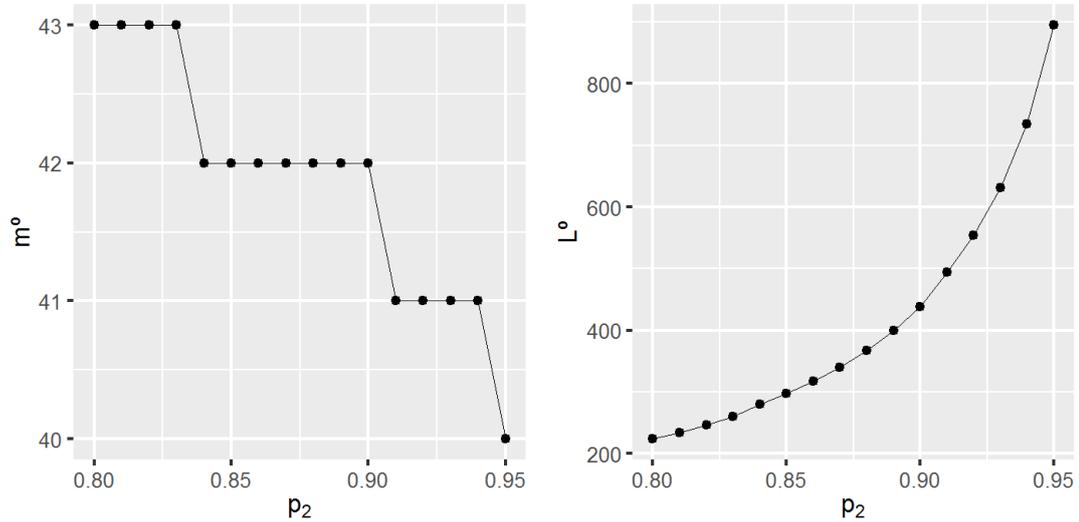


Figura 18 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. p_2 .

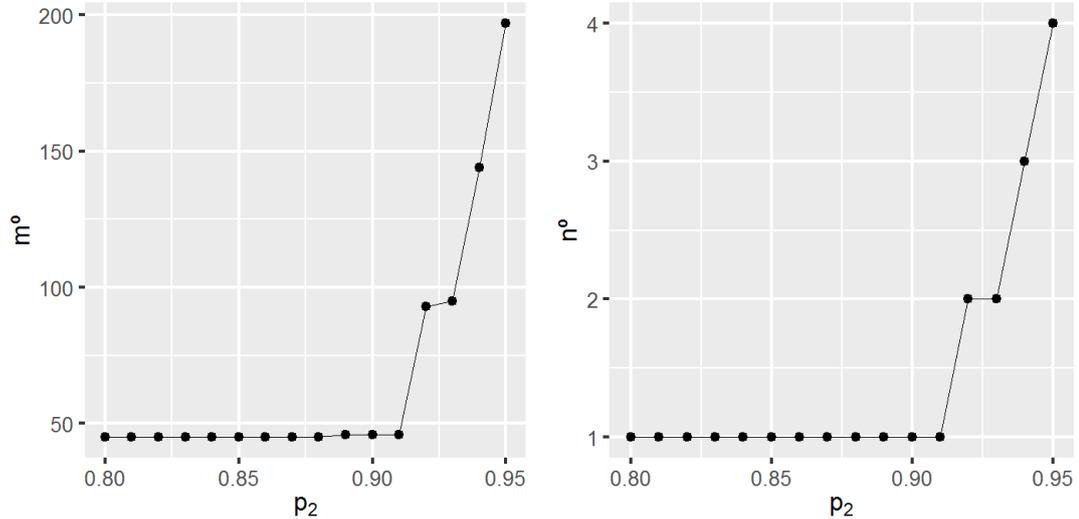


Figura 19 – Modelo mn : valores ótimos de m e n vs. p_2 .

Na figura 18, com o aumento da fração de conformidade com processo fora de controle, p_2 , acontece um crescimento no primeiro intervalo de inspeção após ajuste, L , e, em contrapartida, ocorre a diminuição dos intervalos de inspeção subsequentes, m . Já na figura 19, percebe-se que o aumento do valor de p_2 resulta em intervalos entre amostragens crescentes, compensados com amostras de maior tamanho.

Nota-se na figura 20 que a medida que a probabilidade de falha do processo aumenta, ambos os intervalos de inspeção m e L diminuem. Isso ocorre pois, como a mudança de

estado para fora de controle é mais frequente, é necessário intervalos de inspeções menores a fim de possibilitar a identificação dessa mudança de estado com maior rapidez.

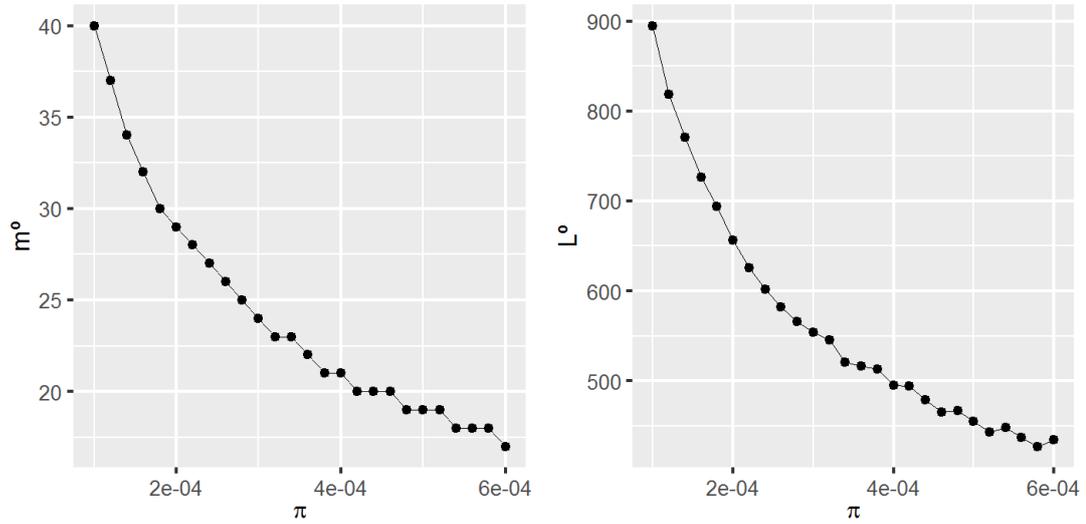


Figura 20 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. π .

Para o modelo mn , como pode ser visto na figura 21, basicamente o mesmo acontece. Dado um valor fixo do tamanho da amostra, n , o intervalo entre as amostragens, m , diminui a medida que π aumenta. No momento onde ocorre a mudança do tamanho ótimo da amostra, acontece um salto no intervalo m , compensado pelo aumento de n .

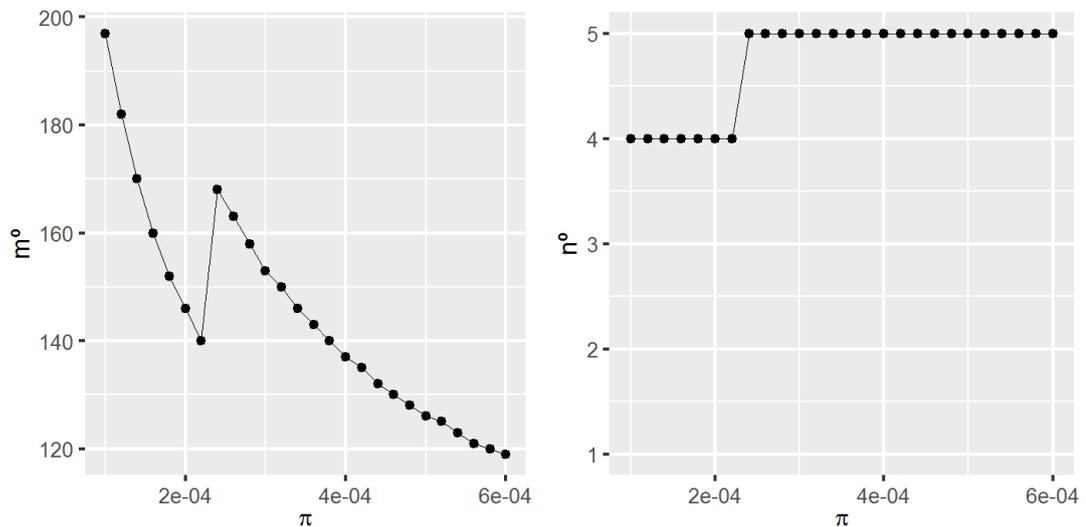


Figura 21 – Modelo mn : valores ótimos de m e n vs. π .

As figuras 22 e 23 ilustram o comportamento dos parâmetros dos modelos mL e mn quando os erros de classificação aumentam. No modelo mL , ocorre um aumento nos intervalos de inspeção m e L , a medida que os erros de classificação vão ficando maiores. Quanto maior o erro de classificação, maior será a probabilidade de se ajustar erroneamente o processo de produção. Assim, intervalos maiores diminuem a taxa de itens

mal classificados e, conseqüentemente, diminuem a quantidade de ajustes desnecessários. Para o modelo mn , também acontece um aumento no intervalo entre amostragens, m , juntamente com o crescimento do tamanho amostral ótimo, a fim de diminuir essa quantidade de ajustes desnecessários.

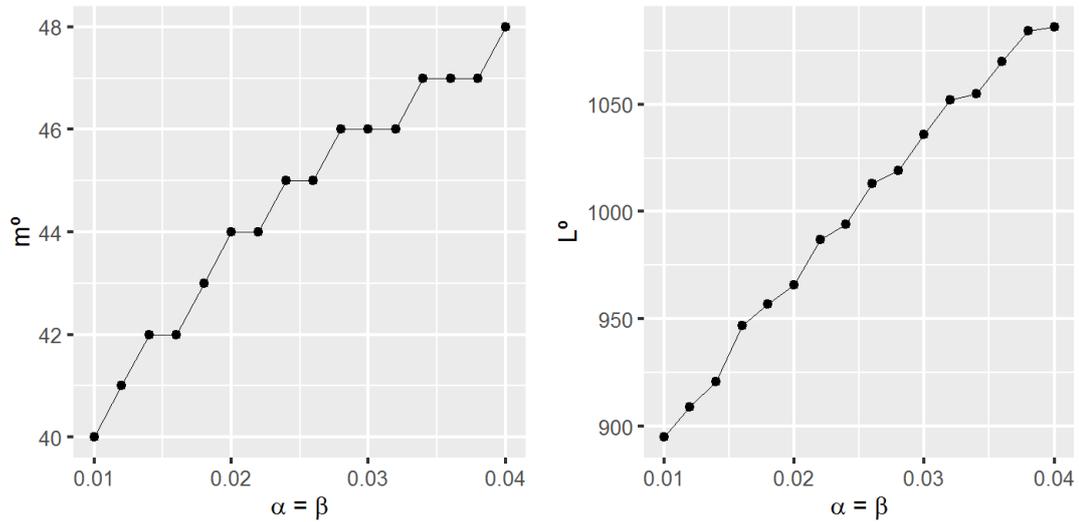


Figura 22 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. $\alpha = \beta$.

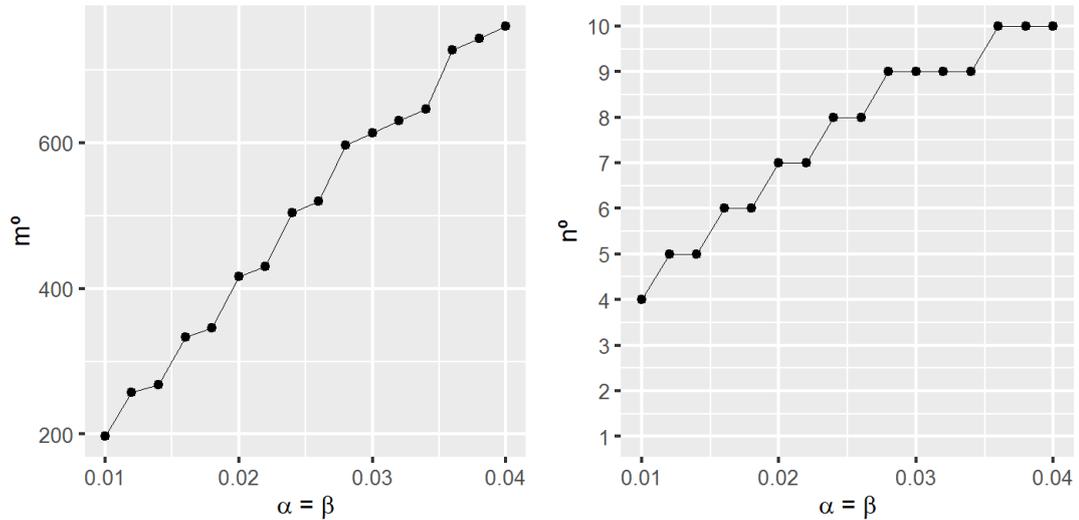


Figura 23 – Modelo mL : valores ótimos de m e L vs. $\alpha = \beta$.

Um dos pontos importantes da aplicabilidade dos modelos de planejamento econômico de controle on-line é poder garantir que os custos associados ao processo sejam suficientemente robustos às entradas do modelo, especialmente aqueles que possuem uma maior dificuldade em sua estimação. Alguns parâmetros de custo, como por exemplo a perda associada ao envio de itens não conformes ao mercado, podem ser determinados sem muita precisão. Assim, é necessário um estudo das variáveis de planejamento e do custo final, em resposta à imposição de níveis distintos de perturbação nos parâmetros de custo.

Assumindo que cada parâmetro de custo pode atingir três níveis de perturbação com magnitudes conhecidas e, que cada combinação entre elas é equiprovável, é elaborado um planejamento fatorial no qual os quatro fatores de custo (custo de inspeção, custo de envio de item não conforme, custo de ajuste e custo de descarte) são condicionados a três níveis em uma amplitude de variação de $k \times 100\%$, onde o nível 1 corresponde a uma redução de $k \times 100\%$ no valor original; o nível 2 é o próprio valor do custo, sem nenhuma perturbação; o nível 3 corresponde a um aumento de $k \times 100\%$ no valor original. A quantidade de combinações possíveis equivale a $3^4 = 81$. São desempenhados testes para os modelos mL e mn utilizando os seguintes níveis de perturbação: $k = 0.05$, $k = 0.10$; $k = 0.15$. A variabilidade resultante sobre o custo esperado por item produzido é quantificada através dos gráficos de efeitos principais apresentados nas figuras 24 e 25.

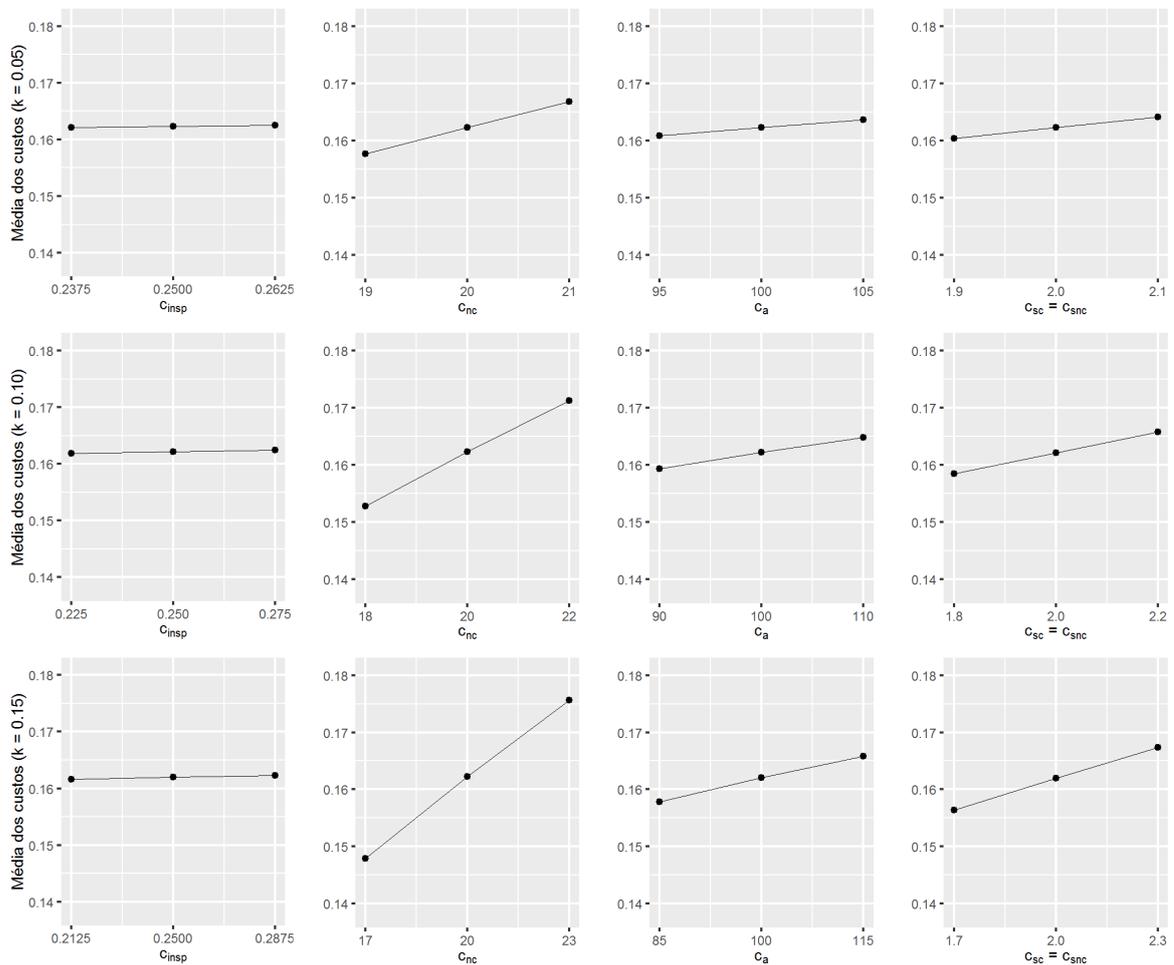


Figura 24 – Modelo mL : efeitos principais para $k = 0.05$, $k = 0.10$ e $k = 0.15$.

Os gráficos de efeitos principais evidenciam uma alta dependência entre o custo médio do sistema de controle e o custo de envio de item não conforme ao mercado, c_{nc} , reiterando a importância e cautela em sua estimação. A importância de cada parâmetro está quantificada nas tabelas 2 e 3, que mostram a mudança no custo médio do sistema de monitoramento produzido pela variação entre os custos unitários dos níveis 1 e 3 para

cada parâmetro de custo considerado no modelo.

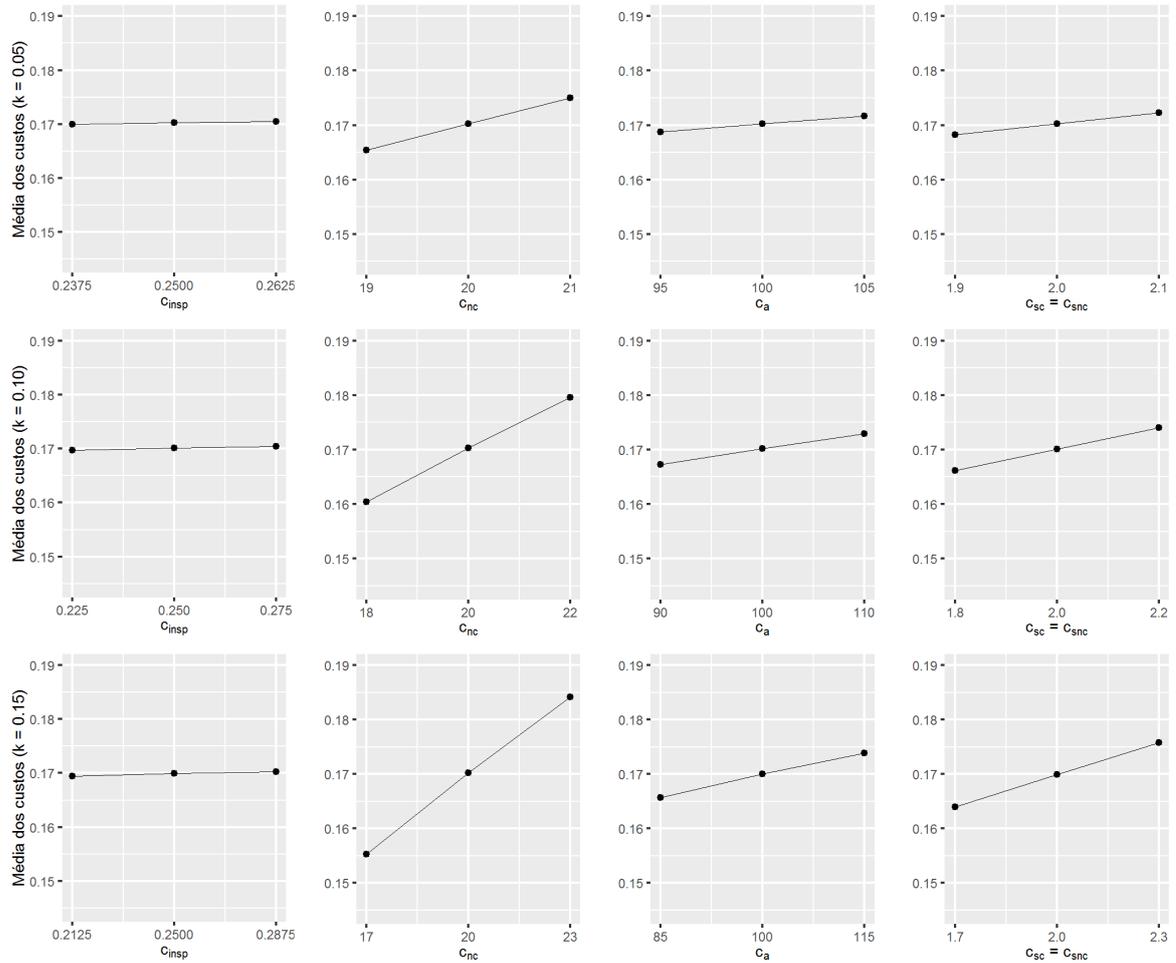


Figura 25 – Modelo mn : efeitos principais para $k = 0.05$, $k = 0.10$ e $k = 0.15$.

Tabela 2 – Efeitos principais para níveis de perturbação de 5%, 10% e 15% no modelo mL .

Custo	5%		10%		15%	
	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação
c_{insp}	0,000388	0,24%	0,000611	0,38%	0,000675	0,42%
c_{nc}	0,009190	5,66%	0,018443	11,36%	0,027758	17,11%
c_a	0,002774	1,71%	0,005428	3,35%	0,007963	4,91%
$c_{sc} = c_{snc}$	0,003724	2,23%	0,007472	4,68%	0,010943	6,76%

Tabela 3 – Efeitos principais para níveis de perturbação de 5%, 10% e 15% no modelo mn .

Custo	5%		10%		15%	
	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação
c_{insp}	0,000421	0,25%	0,000670	0,39%	0,000748	0,44%
c_{nc}	0,009554	5,61%	0,019168	11,26%	0,028847	16,95%
c_a	0,002877	1,69%	0,005633	3,31%	0,008262	4,86%
$c_{sc} = c_{snc}$	0,004016	2,36%	0,007950	4,67%	0,011805	6,95%

Woodall (1986) criticou o planejamento econômico de gráficos de controle, apontando que, em muitas situações, o erro tipo I do gráfico de controle é consideravelmente maior do que seria em um planejamento estatístico. Montgomery (2004) afirma que essas situações podem ser superadas com uma avaliação conjunta do planejamento econômico com critérios de desempenho estatístico. Nayebpour e Woodall (1993) sugerem um aumento na frequência de amostragem caso a fração esperada de itens não conformes ao mercado for inaceitavelmente alta para o intervalo de amostragem ótimo encontrado pelo modelo econômico. Desse modo, analisa-se para os dois modelos, mL e mn , o comportamento dos erros tipo I, ajustar o processo quando o mesmo está sob controle; erros tipo II, não ajustar o processo quando o mesmo está fora de controle; e fração esperada de não-conformidade enviada ao mercado.

Percebe-se na figura 26, que o erro tipo I dos dois modelos se mantém o mesmo até $p_2 = 0.91$, a partir desse ponto, o modelo mn começa a admitir tamanho amostral ótimo diferente de 1, resultando em um aumento da probabilidade de se ajustar o processo quando o mesmo está sob controle. Com relação ao erro tipo II, o modelo com intervalo de inspeção variável apresenta uma curva com levemente acima do modelo de amostras não-unitárias. Essa diferença aumenta a medida que ocorre o crescimento de p_2 , indicando que o uso de um único item para a tomada de decisão sobre o ajuste do processo possui um pior desempenho na identificação de seu real estado quando fora de controle. A fração esperada de itens não conformes enviadas ao mercado dos dois modelos são bem próximas, entre 0.45% e 0.50%. Para valores menores de p_2 , o modelo mn apresenta uma menor fração de não-conformidade, a partir de $p_2 = 0.92$, o modelo mL se torna melhor.

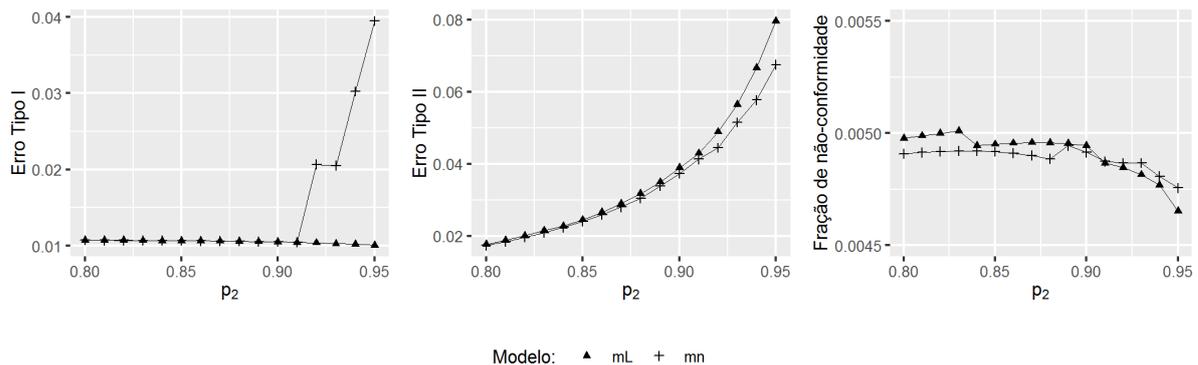


Figura 26 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. p_2 .

Em relação ao parâmetro probabilístico π , o modelo mn possui erro tipo I com magnitude 4 a 5 vezes maior que o modelo mL . Para ambos os modelos, esse erro decresce a medida que a probabilidade do processo sair de controle aumenta. Já o erro tipo II e a fração esperada de itens não conformes enviados ao mercado, são crescentes em relação ao valor de π , resultado de uma maior frequência esperada do processo mudar da situação sob controle para fora de controle.

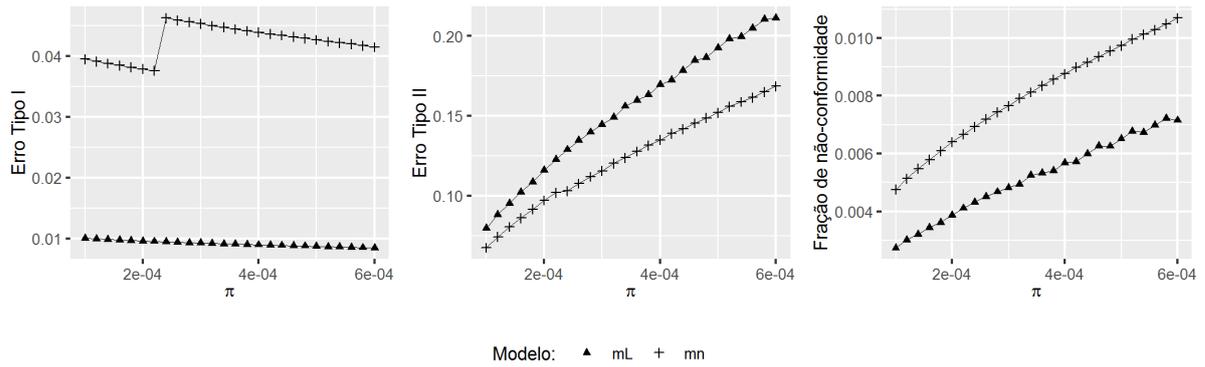


Figura 27 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. π .

Por fim, quanto a variação dos valores dos erros de classificação, o erro tipo I no modelo mn é bastante afetado pelo aumento de α e β , o que não ocorre com o modelo mL . Em relação ao erro tipo II, a estratégia de usar amostras não-unitárias contribui para redução desse erro quanto maior for o erro de classificação. Já a fração esperada de itens não conformes enviados ao mercado é cerca de 4 vezes menor para o modelo com intervalo de inspeção variável quando $\alpha = \beta = 0.01$. Com o aumento no erro de classificação, essa fração de não-conformidade é muito mais afetada no modelo mL do que no modelo mn .

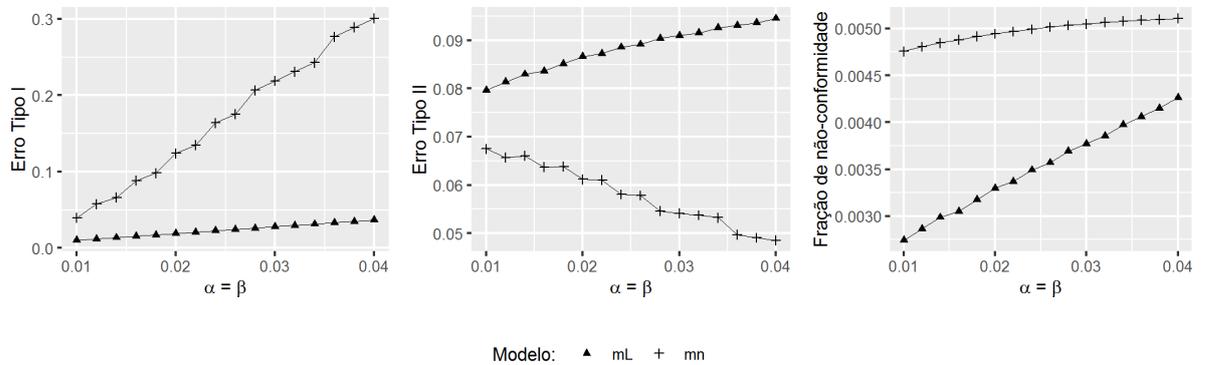


Figura 28 – Erro Tipo I, Erro Tipo II e Fração de não-conformidade enviada ao mercado vs. $\alpha = \beta$.

De forma geral, o modelo mL possui uma melhor performance que o modelo mn em relação ao erro tipo I e a fração de não-conformidade enviada ao mercado, nos intervalos de p_2 , π e erros de classificação analisados. Combinado ao fato de também possuir o menor custo esperado por item produzido, o modelo com intervalo de inspeção variável é o que se destaca em relação aos outros modelos no cenário apresentado.

5 Conclusões e perspectivas futuras

Considerando o cenário que foi descrito na aplicação numérica, os resultados indicam que o modelo que incorpora o intervalo de inspeção variável, modelo mL , é o que apresenta o menor custo esperado por item produzido, aproximadamente 4,72% menor que o custo do modelo mn . Salienta-se que o custo de envio de item não conforme ao mercado é complexo para ser apropriado e os dois modelos são bastante afetados por pequenas perturbações nessa componente de custo. Uma perturbação de $\pm 5\%$ causa variações de 5,66% e 5,61% nos custos médios dos modelos mL e mn respectivamente. Logo, deve haver cautela quanto a sua estimativa. Desse modo, também é importante avaliar o desempenho dos modelos em relação a fração esperada de itens não conformes que serão enviados ao mercado. Nas análises apresentadas, o modelo mL obteve uma melhor performance, quanto a fração esperada de não-conformidade, que o modelo mn na maioria das situações avaliadas, com exceção onde $p_2 < 0,90$. Mas, embora o modelo mL possua fração de não-conformidade relativamente acima do modelo mn nesse intervalo de p_2 , seu custo esperado por item produzido se mantém menor.

Contudo, o que determina o quão mais eficiente será o modelo é a combinação específica dos fatores de custo, das probabilidades de produção nos estados, da probabilidade de mudança de estado e dos erros de classificação do sistema de controle em questão. Assim, podem existir determinados cenários onde o uso de amostras não-unitárias podem ser importantes para redução do custo esperado do sistema de controle. Como os modelos mL e mn são generalizações do modelo m , de intervalo de inspeção fixo e amostra unitária, é recomendado sempre a avaliação de ambos os dois modelos quanto ao seu desempenho e também a sua adequação em relação aos termos práticos de suas aplicações em processos reais. Já o modelo desenvolvido por Borges, Ho e Turnes (2001) é mais simples de ser implementado, pois não demanda o uso do intervalo de inspeção variável e da amostragem não-unitária.

Para trabalhos futuros sugere-se a avaliação de um modelo mais geral, proposto em Bessegato (2009), que incorpora intervalos e amostras variáveis. Essa situação pode levar a uma redução ainda maior do custo esperado por item produzido. Propõe-se também avaliar a inclusão das informações sobre o desempenho estatístico dos modelos: erro tipo I, erro tipo II e fração esperada de não-conformidade, diretamente no algoritmo de otimização. Dessa forma, em vez de otimizar a função objetivo somente em relação a minimização do custo esperado do sistema de monitoramento, podemos avaliar o uso de algoritmos de otimização com restrições e/ou algoritmos de otimização multiobjetivo.

Referências

- APARISI, F.; GARCÍA-DÍAZ, J. C. Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers & Operations Research*, v. 31, p. 1437 – 1454, 2004.
- BÄCK, T.; FOGEL, D. B.; MICHALEWICZ, Z. *Evolutionary computation 1: basic algorithms and operators*. [S.l.]: CRC Press, 2000. v. 1.
- BÄCK, T.; SCHWEFEL, H.-P. An overview of evolutionary algorithms for parameter optimization. *Evolutionary computation*, MIT Press, v. 1, n. 1, p. 1–23, 1993.
- BESSEGATO, L. et al. Variable interval sampling in economical designs for online process control of attributes with misclassification errors. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 62, n. 7, p. 1365–1375, 2011.
- BESSEGATO, L. F. *Extensão para controle on-line por atributo com erros de classificação:: intervalo de inspeção variável, amostragem não-unitária, horizonte finito e infinito*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2009.
- BESSEGATO, L. F.; MOTA, L. S.; QUININO, R. C. Online control by attributes in the presence of classification errors with variable inspection interval. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 45, n. 11, p. 3283–3301, 2016.
- BESSEGATO, L. F.; QUININO, R. C.; PEREIRA, A. R. Planejamento econômico de controle on-line por atributo em presença de erros de classificação. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 6, n. 1, p. 565–574, 2014.
- BORGES, W.; HO, L. L.; TURNES, O. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 17, n. 3, p. 261 – 276, 2001.
- CARLYLE, W. M.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Optimization problems and methods in quality control and improvement. *Journal of Quality Technology*, ASQC AMERICAN SOCIETY FOR QUALITY CONTROL, v. 32, n. 1, p. 1–17, 2000.
- CHATTERJEE, S.; LAUDATTO, M. Genetic algorithms in statistics: procedures and applications. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, v. 26, n. 4, p. 1617–1630, 1997.
- CHEN, Y. K. An evolutionary economic-statistical design for VSI X control charts under non-normality. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 22, n. 7, p. 602–610, 2003.
- DUNCAN, A. J. The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, v. 51, p. 228 – 242, 1956.
- ESHELMAN, L. J.; SCHAFFER, J. D. Real-coded genetic algorithms and interval-schemata. *Foundations of genetic algorithms*, v. 2, p. 187–202, 1993.
- GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

- GOLDBERG, D. E.; DEB, K. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. *Foundations of genetic algorithms*, v. 1, p. 69–93, 1991.
- HERRERA, F.; LOZANO, M.; VERDEGAY, J. L. Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis. *Artificial intelligence review*, Springer, v. 12, n. 4, p. 265–319, 1998.
- HOLLAND, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. [S.l.]: U Michigan Press, 1975.
- JONG, K. A. D. *Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. Tese (Doutorado) — University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, EUA, 1975.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- NAYEBPOUR, M. R.; WOODALL, W. H. An analysis of Taguchi's on-line quality-monitoring procedures for attributes. *Technometrics*, v. 35, n. 1, p. 53 – 60, 1993.
- ONO, I.; KITA, H.; KOBAYASHI, S. A robust real-coded genetic algorithm using unimodal normal distribution crossover augmented by uniform crossover: Effects of self-adaptation of crossover probabilities. In: *Proceedings of the 1st Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation-Volume 1*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 496–503.
- REEVES, C. R.; WRIGHT, C. C. Genetic algorithms and the design of experiments. In: *Evolutionary Algorithms*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 207–226.
- ROSS, S. M. *Applied probability models with optimization applications*. San Francisco, Calif.: Holden-Day, 1970.
- TAGUCHI, G.; ELSAYED, E. A.; HSIANG, T. *Quality Engineering in Production Systems*. New York: McGraw-Hill, 1989.
- TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. C. Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 23, p. 339 – 358, 2007.
- WOODALL, W. H. Weaknesses of economic design of control charts (Letter to the Editor). *Technometrics*, v. 28, p. 408 – 410, 1986.
- WRIGHT, A. H. Genetic algorithms for real parameter optimization. *Foundations of genetic algorithms*, v. 1, p. 205–218, 1991.

Apêndice A – Scripts desenvolvidos

Os scripts que implementam os códigos dos AGs e as funções objetivo de cada um dos modelos foram desenvolvidos em MATLAB (versão R2012b). Em relação aos gráficos, apresentados na aplicação numérica, foi utilizado o software livre R (versão 3.3.1).

A fim de permitir a replicação das análises realizadas neste trabalho, todos os scripts desenvolvidos podem ser encontrados no repositório `adosrp/tccAugustoUFJF` no GitHub.

URL: <<https://github.com/adosrp/tccAugustoUFJF>>