

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Gabriel Brandão de Miranda

**Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estáveis e Estabilizados para
Escoamentos Miscíveis em Meios Porosos Heterogêneos**

Juiz de Fora

2021

Gabriel Brandão de Miranda

Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estáveis e Estabilizados para
Escoamentos Miscíveis em Meios Porosos Heterogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Miranda, Gabriel B..

Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estáveis e Estabilizados para
Escoamentos Miscíveis em Meios Porosos Heterogêneos / Gabriel Brandão
de Miranda. – 2021.

110 f. : il.

Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computa-
cional, 2021.

1. Métodos mistos híbridos. 2. Meios porosos heterogêneos. 3. Razão
de mobilidade Adversa. I. Igreja, Iury, orient. II. Título.

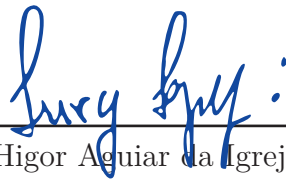
Gabriel Brandão de Miranda

**Métodos de Elementos Finitos Híbridos Estáveis e Estabilizados para
Escoamentos Miscíveis em Meios Porosos Heterogêneos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em:

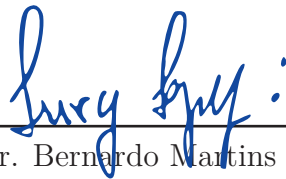
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Abimael Fernando Dourado Loula
Laboratório Nacional de Computação Científica



Prof. Dr. Bernardo Martins Rocha
Universidade Federal de Juiz de Fora



Dr. Thiago de Oliveira Quinelato
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho a todos que me acompanharam na minha caminhada, seja ao meu lado na vida acadêmica ou na vida pessoal. Até mesmo aqueles que agora possam estar distantes, mas que em algum momento me ajudaram a evoluir como profissional e como pessoa. Dedico em especial este trabalho à minha mãe Rossana Brandão, que sempre apoiou quaisquer escolhas feitas por mim. Em cada trecho deste trabalho há também colaboração dessa mulher de garra que fez e faz de tudo por seus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao meu orientador, Iury Higor Aguiar da Igreja, por ter ido muito além da orientação e ter criado uma relação de amizade. Fazendo com que as reuniões se tornassem muito mais leves e conseguindo me corrigir e motivar entre conversas informais. Grato também, como de praxe, por sua paciência durante toda essa jornada, tanto em reuniões quanto em dúvidas enviadas nas horas mais variadas do dia, indo muito além de um bom orientador, sendo um incentivador e conselheiro para comigo.

Aos meus amigos e colegas feitos dentro da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com os quais pude ter uma conversa, seja sobre a vida, seja para discutir dúvidas quando precisasse. Destaco dois nomes que eu sempre pude contar desde a minha graduação, Jhuan Barbosa da Silva e Cedro e Vitor Monteiro Andrade Goulart. Ambos com um talento natural para ensinar, agradeço pelo privilégio de ser amigo desses.

Agradeço também aos membros da banca de avaliação final por aceitarem debater minha pesquisa.

A todos os demais professores do PGMC-UFJF com quem eu pude ter o prazer de ter aulas e expandir meus horizontes de conhecimento deixo meu muito obrigado.

Agradeço também à minha família e amigos fora da academia que me apoiaram durante minha passagem pela instituição. Como não poderia deixar de ser, agradeço principalmente à minha mãe, que foi suporte e carinho em toda minha vida.

Por fim, agradeço à UFJF pelo ambiente agradável fornecido e pelo apoio financeiro concedido juntamente à CAPES em parte dessa jornada.

“A primeira condição para modificar a realidade consiste em conhecê-la.”

Eduardo Galeano; *Las venas abiertas de América Latina*.

RESUMO

O escoamento de fluidos miscíveis em meios porosos é modelado matematicamente pelo acoplamento do problema de Darcy com o transporte. Essas equações apresentam uma forte relação de dependência principalmente em casos com razão de mobilidade adversa. Além da não-linearidade e do forte acoplamento entre as equações, há ainda dificuldades numéricas relacionadas à predominância dos efeitos convectivos, heterogeneidade dos meios porosos e compatibilidade dos espaços de aproximação. Neste sentido, propomos o estudo de métodos de elementos finitos híbridos estáveis e estabilizados capazes de superar as dificuldades típicas deste problema e, em alguns casos, assegurar a conservação local de massa. Os métodos ditos estáveis são caracterizados pelo uso dos espaços de aproximação de Raviart-Thomas, enquanto que os estabilizados incorporam resíduos de mínimos quadrados à formulação. Dessa forma, desenvolvemos métodos mistos híbridos para o problema de Darcy e para o problema do transporte, visando gerar formulações para a equação do transporte compatíveis com as formulações para o problema de Darcy, onde os métodos estáveis para Darcy são combinados aos estáveis para o transporte e o mesmo ocorre para os métodos estabilizados. Portanto para manter esta correspondência entre as formulações, a escolha para os multiplicadores de Lagrange, em ambas as abordagens, é de mesma natureza, associada ao traço da variável escalar. Os métodos estáveis e estabilizados para o problema do transporte são combinados a um esquema upwind, empregado para suavizar os efeitos do regime predominantemente convectivo, e discretizados no tempo por uma abordagem de segunda ordem baseada no método de Crank-Nicolson. Neste contexto, os métodos estáveis e estabilizados empregando multiplicadores contínuos e descontínuos são testados e validados, através de estudos de convergência, para o problema de Darcy e do transporte separadamente e de forma acoplada para problema Darcy-transporte. Além disso, diversos cenários são simulados em meios homogêneos e heterogêneos supondo razão de mobilidade unitária e adversa onde os métodos propostos demonstram a capacidade de capturar os fenômenos de geração de “dedos” e padrões fractais gerados por este tipo de abordagem, além de apresentar uma redução dos efeitos oscilatórios provenientes da convecção dominante que é inerente a essas aplicações.

Palavras-chave: Métodos mistos híbridos. Espaços estáveis. Estabilizações. Meios porosos heterogêneos. Razão de mobilidade Adversa. Problemas acoplados Darcy-Transporte.

ABSTRACT

Miscible displacement in porous media is modeled mathematically by coupling the Darcy problem with transport. These equations are strongly linked, especially in cases with adverse mobility ratio. In addition to the nonlinearity and the strong coupling between the equations, there are still numerical difficulties related to the predominance of convective effects, heterogeneity of the porous media and the compatibility between approximation spaces. In this context, we propose the study of stable and stabilized hybrid finite element methods capable of overcoming the typical difficulties of this problem and, in some cases, ensuring local mass conservation. The so-called stable methods are characterized by the use of Raviart-Thomas approximation spaces, while the stabilized methods incorporate residual terms into the formulation. In this way, we developed mixed hybrid methods for the Darcy problem and for the transport problem, aiming to generate formulations for the transport equation compatible with the formulations for the Darcy problem, where the stable methods for Darcy are combined with the stable ones and the same goes for stabilized methods. Therefore, to maintain this correspondence between the formulations, the choice for Lagrange multipliers, in both approaches, is of the same nature, associated with the trace of the scalar variable. The stable and stabilized methods for the transport problem are combined with an upwind scheme, used to soften the effects of the predominantly convective regime, and discretized in time by a second-order approach based on the Crank-Nicolson method. In this context, the stable and stabilized methods employing continuous and discontinuous multipliers are tested and validated, through convergence studies, independently in order for the Darcy and transport problems and in a coupled way for the Darcy-transport problem. In addition, scenarios are simulated in homogeneous and heterogeneous environments assuming unitary and adverse mobility ratios where the proposed methods demonstrate an ability to capture the viscous fingers generation phenomena and fractal patterns generated by this type of approach, in addition to presenting a reduction in the oscillatory effects from the dominant convection that is inherent to these applications.

Key-words: Mixed hybrid methods. Stable spaces. Stabilizations. Heterogeneous porous media. Adverse mobility ratio. Darcy-Transport coupled problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Exemplos de diferentes casos de deslocamentos miscíveis em meios porosos.	13
Figura 2.1 – Diferentes meios porosos com diferentes permeabilidades. ¹	20
Figura 2.2 – Conservação de massa em um domínio $d\Omega$ para um campo vetorial constante não-nulo apenas na componente u_x .	21
Figura 2.3 – Ilustração de campo de velocidades por linhas de tendência de fluxo para a camada 36 <i>benchmark</i> do SPE-10.	22
Figura 2.4 – Representação de uma aresta e entre dois elementos vizinhos K_1 e K_2 .	25
Figura 2.5 – Pontos de interpolação das variáveis nos elementos e nas arestas para diferentes escolhas de multiplicadores para aproximação bilinear no interior dos elementos e linear nas arestas.	28
Figura 2.6 – Comparações entre os somatórios dos graus de liberdade de todos problemas locais adotando aproximações RT e Lagrange (esquerda) e entre os graus de liberdade dos problemas globais empregando multiplicadores contínuos e descontínuos (direita) para uma malha bidimensional de 64×64 elementos.	30
Figura 3.1 – Malhas com $N \times N$ elementos não uniformes.	42
Figura 3.2 – Ilustração do domínio heterogêneo dividido em duas regiões com diferentes permeabilidades.	45
Figura 3.3 – Solução exata da primeira componente da velocidade.	46
Figura 3.4 – Ilustração do domínio heterogêneo dividido em quatro regiões com diferentes permeabilidades.	50
Figura 3.5 – Solução exata da primeira componente da velocidade.	51
Figura 4.1 – Ilustração da estabilização <i>upwind</i> proposta por Egger e Schöberl[1].	57
Figura 4.2 – Diagrama de transições para a resolução temporal do problema do transporte.	63
Figura 4.3 – Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores contínuos de mesma ordem $(\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - \mathcal{C}_k)$.	66
Figura 4.4 – Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem $(\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - \mathcal{D}_k)$.	67
Figura 4.5 – Formulações estabilizadas de ordem k com multiplicadores contínuos de mesma ordem $([\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - \mathcal{C}_k)$.	68
Figura 4.6 – Formulações estabilizadas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem $([\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - \mathcal{D}_k)$.	69
Figura 4.7 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização <i>upwind</i> para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 1$.	70
Figura 4.8 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização <i>upwind</i> para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 10^{-3}$.	70

Figura 4.9 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização <i>upwind</i> para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 10^{-6}$	70
Figura 4.10–Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem $(\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - \mathcal{D}_k)$	71
Figura 4.11–Formulações estáveis com multiplicadores descontínuos.	72
Figura 4.12–Formulações estabilizadas com multiplicadores contínuos.	72
Figura 4.13–Formulações estabilizadas com multiplicadores descontínuos.	73
Figura 5.1 – Fluxograma para resolução do problema completo fracamente acoplado.	80
Figura 5.2 – Fluxograma para resolução do problema completo fortemente acoplado.	81
Figura 5.3 – (a) Configuração do domínio com suas regiões de contorno, (b) campo de permeabilidades.	85
Figura 5.4 – Seção da concentração em $y = 0.5$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 1.1$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k , sobre uma malha de elementos finitos de 32×32 elementos.	87
Figura 5.5 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $\mathcal{RT}_3 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.	88
Figura 5.6 – Amostra obtida de um campo de permeabilidade definido por (5.9).	89
Figura 5.7 – Seção da concentração em $y = 0.75$ para os diferentes métodos estudados no tempo final de simulação $t = 2.5$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k , sobre uma malha de elementos finitos de 32×32 elementos.	90
Figura 5.8 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $\mathcal{RT}_3 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.	91
Figura 5.9 – Campo de permeabilidade definido referente à camada 36 da base do <i>SPE-10</i>	91
Figura 5.10–Corte da concentração em $y = 0.25$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 4.5$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k	93
Figura 5.11–Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $[\mathbb{Q}_3]^2 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.	94
Figura 5.12–Corte da concentração em $y = 0.25$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 1.3$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k	96
Figura 5.13–Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $[\mathbb{Q}_3]^2 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.	97
Figura 5.14–Esquema do experimento de laboratório a ser reproduzido. (Figura extraída de Malhotra, Sharma e Lehman[2])	98

Figura 5.15—Comparação entre a concentração observada no experimento em uma célula de Hele-Shaw [2] e a solução aproximada para uma malha de 1500×100 elementos, adotando $M = 50$, $P_e = 10234$ e o passo de tempo $\Delta t = 0.1s$	99
Figura 5.16—Comparação entre os perfis de concentração obtidos em simulações do experimento apresentado na Figura 5.15 no instante $t = 90s$ adotando malhas com os seguintes números de elementos em cada malha: 150×10 , 300×20 , 600×40 , 900×60 , 1200×80 e 1500×100 , dispostos aqui nessa ordem. Em todas as simulações adotou-se $\Delta t = 0.1s$	100
Figura 6.1 – Diagrama de transições do programa a se desenvolver para a execução do algoritmo proposto.	103

SUMÁRIO

1	Introdução	13
1.1	Objetivos	18
1.2	Organização do trabalho	19
2	Problema Modelo e Definições	20
2.1	Problema Modelo	20
2.2	Métodos Híbridos e Espaços de Aproximação	24
2.2.1	Condensação Estática	28
2.3	Resolução de Sistemas Lineares	30
3	Métodos Híbridos para o Problema de Darcy	32
3.1	Problema de Darcy no Nível do Elemento	32
3.2	Formulação Híbrida	33
3.2.1	Formulação Híbrida Estabilizada	34
3.2.2	Formulação Híbrida Estável	36
3.2.3	Estratégia de Resolução	37
3.3	Estudos de Convergência	38
3.3.1	Meios Porosos Homogêneos	38
3.3.1.1	Malhas Uniformes	39
3.3.1.2	Malhas Não Uniformes	41
3.3.2	Meios Porosos Heterogêneos	44
3.3.2.1	Meio Isotrópico/Anisotrópico	44
3.3.2.2	Meio Isotrópico com Permeabilidade Variável	49
4	Métodos Híbridos para o Problema do Transporte	55
4.1	Problema no Nível do Elemento e Formulação Mista Híbridizada	55
4.2	Estabilização dos Efeitos Convectivos	56
4.3	Formulações Híbridas Semidiscretas	58
4.3.1	Formulação Híbrida Estabilizada	58
4.3.2	Formulação Híbrida Estável	59
4.4	Discretização Temporal	60
4.4.1	Método de Segunda Ordem no Tempo	61
4.5	Estratégia de Resolução	62
4.6	Resultados Numéricos	63
4.6.1	Regime Estacionário	64
4.6.1.1	Solução Suave	65

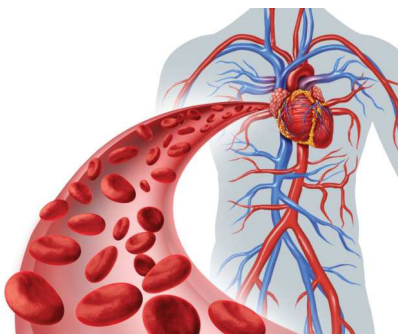
4.6.1.2	Solução com Camada Limite	69
4.6.2	Regime Transiente	73
5	Métodos Híbridos para o Acoplamento Darcy-Transporte . . .	76
5.1	Formulação Acoplada	77
5.2	Estratégia de Resolução	79
5.3	Resultados Numéricos	81
5.3.1	Estudo de Convergência	82
5.3.2	Permeabilidade Senoidal	84
5.3.3	Campo de Permeabilidades Aleatório	88
5.3.4	Campo de Permeabilidades <i>SPE-10</i>	91
5.3.4.1	<i>SPE-10</i> com Mobilidade Adversa	95
5.3.5	Experimentos em células de Hele-Shaw	98
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	101
	REFERÊNCIAS	104

1 Introdução

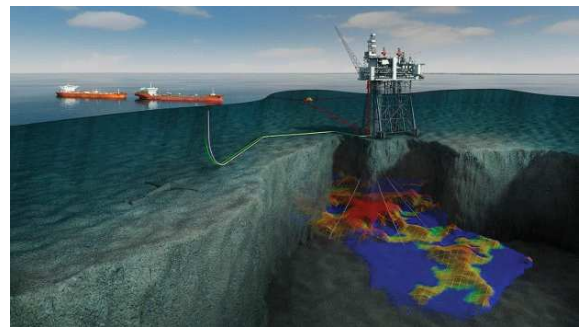
O constante aumento populacional e avanço tecnológico faz com que a busca por recursos energéticos seja um tema de grande importância para a sociedade moderna. Ainda que novos recursos energéticos renováveis venham sendo explorados, o petróleo ainda é a principal matéria responsável pela mobilidade urbana em veículos automotores. Nesse contexto, sendo o petróleo um recurso não renovável, é necessário cada vez mais obter técnicas que tornem mais eficientes as extrações em reservatórios. Os métodos matemáticos e computacionais precisam caminhar junto a esse avanço de modo que venham a tirar proveito da infraestrutura tecnológica mais moderna, agindo como uma ponte entre o ferramental computacional e a demanda necessária.

No contexto da indústria petrolífera, surge a necessidade de realizar modelagens hidrodinâmicas no que se refere ao deslocamento de fluidos em meios porosos cada vez mais precisas para lidar com uma série de problemas em campos como a recuperação de petróleo. Modelagens por equações diferenciais parciais que descrevem deslocamentos miscíveis em meios porosos são muito úteis para simular problemas de injeções de traçadores ativos e/ou passivos com o intuito de caracterizar o meio poroso ou melhorar a extração através da injeção de soluções químicas como surfactantes, espumas, polímeros, entre outros, associadas à recuperação avançada de petróleo [3, 4, 5].

Os problemas estudados neste trabalho possuem aplicações em diversas áreas como, por exemplo, a hidrologia, descontaminação de solos, filtragem de plasma no transporte sanguíneo, processos industriais que envolvem filtragem como o refino de açúcar, sequestro de carbono, recuperação avançada de petróleo e exploração de águas subterrâneas em meios porosos [6].



(a) Hemodinâmica vascular.¹



(b) Recuperação avançada de petróleo.²

Figura 1.1 – Exemplos de diferentes casos de deslocamentos miscíveis em meios porosos.

¹ <<https://blog.transonic.com/hemodialysis/vascular-access-blood-flow-monitoring>>

² <<https://www.enwa.com/water-technology/market-segments/maritime-offshore-oil-gas/offshore-oil-gas-applications/injection-water/enhanced-oil-recovery-eor>>

A modelagem matemática que descreve o fenômeno estudado pode ser descrita matematicamente por um sistema de equações diferenciais parciais, formado por um subsistema para velocidade e pressão, composto pela lei de Darcy e a conservação de massa, e por outro subsistema descrito por uma equação de transporte, que descreve a migração do fluido injetado num meio poroso por meio da taxa de concentração de uma espécie no domínio. A variável de maior interesse nesse problema se trata da concentração, porém é necessária atenção com o subsistema de Darcy, pois a velocidade tem grande influência no cálculo da concentração ao passo que a mesma descreve o trajeto da espécie ao longo do domínio no subsistema do transporte. Propriedades como a permeabilidade do meio e a variação de pressão que determinam esse caminho são recuperadas através do campo de velocidades. Essa observação fundamenta nosso interesse em estudar formulações eficientes tanto para o campo de velocidades quanto para a concentração visando reproduzir de forma precisa o transporte de fluidos em meios porosos.

Modelos numéricos para escoamento de fluidos miscíveis são por vezes abordados com foco na relação entre as viscosidades das espécies presentes nesse regime, essa relação é destacada pela razão de mobilidade [7, 2, 8, 9, 10]. Além disso, se aproximações adotadas para o transporte do fluido injetado apresentarem um diâmetro de célula maior que uma frente de onda, isto pode acarretar em imprecisas representações das interfaces destas frentes, pois estes processos geram estruturas fractais altamente ramificadas [11, 12], dando origem a instabilidades em sua representação quanto maior for a razão de mobilidade. Neste contexto, Nicolaides et al.; Malhotra, Sharma e Lehman; Lee e Wheeler [7, 2, 8] realizam estudos considerando a diferença de viscosidade entre o fluido injetado e o fluido residente, que é denominado razão de mobilidade adversa. Em particular, Malhotra, Sharma e Lehman [2] apresentam experimentos em laboratório de um fluxo num pequeno vão entre duas placas planas como feito por Hele-Shaw [13], controlando a viscosidade dos fluidos por meio da injeção de glicerol e demonstrando visualmente a geração de *fingering* (“dedos”) devido a razão de mobilidade adversa [14]. Nesta direção, integra esse trabalho os experimentos desenvolvido por Igreja e Miranda [10] onde é proposto um algoritmo para reproduzir numericamente os experimentos de Malhotra, Sharma e Lehman [2] destacando as instabilidades inerentes do modelo e a necessidade de capturá-las.

O uso de elementos finitos para simulação de escoamentos em meios porosos é uma área de pesquisa com grande abertura para contribuições, principalmente quanto à precisão, estabilidade e implementação de novas formulações. Nas últimas décadas métodos de elementos finitos mistos têm sido amplamente estudados para aproximar o problema de Darcy [15, 16, 16, 17, 18, 19] com o intuito de determinar com precisão os campo de velocidade em detrimento da pressão. Contudo, aproximações simultâneas das variáveis vetorial e escalar ficam limitadas a necessidade de compatibilização dos espaços [20, 21]. Neste sentido, métodos estáveis foram propostos por Raviart e Thomas; Arnold, Brezzi e Fortin; Brezzi, Douglas e Marini; Arbogast e Correa [15, 22, 16, 23], entre outros, os quais

consistem em adotar espaços de aproximações construídos de forma a compatibilizar as variáveis presente num problema misto. Por outro lado, os métodos mistos estabilizados como proposto por Loula e Toledo; Masud e Hughes; Correa e Loula [24, 25, 26], que são caracterizados pela adição de termos de estabilização associados a resíduos de mínimos quadrados diretamente na formulação variacional do problema, fornecendo uma maior flexibilidade na escolha dos espaços.

De forma semelhante, diversas formulações de elementos finitos surgiram nas últimas décadas para tratar a equação do transporte. Dentre as dificuldades, é conhecido que para problemas predominantemente convectivos, ou seja, onde a difusão é muito pequena comparada à convecção, a formulação de Galerkin não é indicada, pois pode apresentar oscilações espúrias [27, 28, 29, 30]. Partindo de uma formulação de Galerkin, Kelly et al. [31] propõem o uso de um termo de difusão artificial. Esta proposta apresenta uma solução nodalmente exata para casos específicos em problemas unidimensionais [32, 27], porém apresenta uma baixa precisão em todo o domínio por gerar um comportamento excessivamente difusivo em casos de duas ou três dimensões. Nessa direção, Brooks e Hughes [27] propuseram um método estabilizado baseado nas formulações variacionais de Petrov-Galerkin [33, 34], onde uma generalização do esquema ótimo unidimensional é estendido para problemas multidimensionais. Denominado SUPG (*Streamline Upwind/Petrov-Galerkin*), essa proposta consolidou-se na literatura, tendo várias adaptações realizadas posteriormente. Dentre essas adaptações, destacamos casos bem-sucedidos como: CAU (*Consistent Approximate Upwind*) [35], GLS (*Galerkin Least Squares*) [36] e MLPG (*Meshless Local Petrov-Galerkin*) [37]. Tais resultados, apesar do grande avanço em relação ao método clássico, ainda apresentam oscilações, sobretudo em regiões onde a solução apresenta descontinuidades [38].

O surgimento de frentes de ondas destacadas, o *fingering*, devido à razão de mobilidade adversa, pode ser acentuado por heterogeneidades do domínio, destacando ainda mais os caminhos preferenciais na percolação do fluido. Tratar meios com essas características faz com que surja uma dificuldade relacionada a aproximação numérica quando surgem descontinuidades na solução. Dessa forma, o emprego de espaços de elementos finitos contínuos com funções base de Lagrange para o escoamento de Darcy em meios porosos homogêneos pode ser realizado por métodos estabilizados. Todavia essas abordagens não são apropriadas para a simulação em meios heterogêneos com propriedades descontínuas. Neste contexto, os métodos de Galerkin descontínuo (DG, do inglês *Discontinuous Galerkin*) [39, 40, 41] surgem como uma alternativa para superar esse tipo de dificuldade e são amplamente aplicados a vários problemas em ciência e engenharia por causa de sua flexibilidade para escolhas de espaços de aproximação, tratamento natural de descontinuidades e de estratégias de adaptatividade- h , onde a malha é refinada apenas em certas regiões do domínio, adaptatividade- p , onde polinômios de ordem mais alta são utilizados apenas em regiões específica. Sendo possível a paralelização dos processos de

resolução, de modo que tarefas independentes sejam enviadas a diferentes processadores para que sejam executadas num mesmo intervalo de tempo, acompanhando as arquiteturas de processadores mais modernas projetados de modo a propiciar maior eficiência em tarefas paralelizadas. No entanto, geralmente as matrizes geradas pelos métodos DG apresentam dimensão e largura de banda muito maiores do que as geradas pelos métodos de Galerkin contínuo. Uma metodologia alternativa que busca superar este aumento significativo dos graus de liberdade, mas mantendo as mesmas propriedades dos métodos DG, são os métodos de elementos finitos híbridos [17, 42, 43].

Métodos de elementos finitos híbridos foram desenvolvidos por Jones[44] e Pian[45]. No mesmo período, hibridizações dos métodos de elementos finitos emergiram do trabalho de Veubeke[46], que foi entendido como uma técnica de implementação associada à manipulação algébrica matricial já conhecida denominada condensação estática. Tal abordagem é caracterizada por introduzir um multiplicador de Lagrange para impor fracamente a continuidade nas interfaces dos elementos [17]. Esta abordagem dá origem a um problema global em função apenas do multiplicador de Lagrange, enquanto o problema local é escrito em termos das variáveis de interesse. Para problemas que envolvem mais de uma variável desconhecida, vetoriais e escalares, como os problemas estudados neste trabalho o problema é formulado como um método misto e deve satisfazer a condição de compatibilidade entre os espaços de aproximação das variáveis. Dessa forma, as mesmas técnicas de estabilização descritas anteriormente podem ser adotadas neste tipo de abordagem.

Baseados na aplicação e desenvolvimento de métodos de elementos finitos híbridos para problemas mistos em diversas áreas da engenharia computacional e computação científica, Brezzi e Fortin[17] consolidam conceitos voltados para a construção de elementos adaptados a formulações mistas e também a técnicas de estabilização, tratando as condições de continuidade via multiplicadores de Lagrange que conduzem a melhores propriedades dos problemas discretos. Em particular, métodos de elementos finitos híbridos empregados para o problema misto de Darcy podem ser encontrados em Mosé et al.; Cockburn, Gopalakrishnan e Lazarov; Cockburn et al.; Cockburn et al.; Samii, Michoski e Dawson[47, 48, 42, 49, 19]. O trabalho desenvolvido por Mosé et al.[47] apresenta um comparativo entre métodos de elementos finitos mistos híbridos e métodos de elementos finitos clássicos conformes. O estudo conduzido demonstra a superioridade da escolha do método hibridizado em termos de precisão e redução de custo computacional em meios heterogêneos objetivando simulações para o transporte de contaminantes em lençóis freáticos. Cockburn et al. [48, 49] propõem e analisam métodos mistos híbridos para o problema de Darcy empregando aproximações descontínuas e contínuas para os multiplicadores de Lagrange. Samii, Michoski e Dawson[19] exploram as características naturais de paralelização dos métodos híbridos combinadas a técnicas de adaptatividade de malha para obter aproximações precisas em regiões específicas do domínio com um

reduzido custo computacional.

No contexto do problema do transporte, métodos híbridos são considerados em diversos trabalhos [42, 50, 51, 1, 52, 53, 54]. Cockburn et al.; Nguyen, Peraire e Cockburn[42, 50] apresentam hibridizações de métodos DG para o problema do transporte escrito na forma mista, estudando casos transientes e estacionários. Uma análise desses métodos aplicados a malhas não conformes pode ser vista em Chen e Cockburn[51]. Egger e Schöberl; Brunner, Radu e Knabner[1, 52] propõem e analisam métodos mistos híbridos estáveis empregando espaços de Raviart-Thomas combinados com estratégias de estabilização *upwind* derivadas de métodos clássicos DG e de forma similar Oikawa[53] propõe uma metodologia híbrida estabilizada baseada em métodos DG com termos de penalização. Seguindo a mesma proposta Dautov e Fedotov[54] formulam o problema do transporte de forma mista, propõem uma estabilização *upwind* e ainda apresentam um esquema de pós-processamento da concentração para que se atinja uma superconvergência do erro.

Para o problema do acoplamento das equações de Darcy com o transporte destacamos trabalhos que utilizam a combinação de métodos de elementos finitos mistos com esquemas de volumes finitos nos trabalhos de Ohlberger; Fan et al.[55, 56]. Empregando métodos de elementos finitos de Galerkin, Malta e Loula[57] e [58] propuseram uma abordagem onde a velocidade de Darcy é recuperada a partir de um pós-processamento atingindo taxas ótimas de convergência. Adotando uma combinação de métodos de elementos finitos mistos clássicos com métodos DG, Yang e Chen[59] apresentam uma estratégia de pós-processamento que resulta em uma superconvergência para a concentração, aumentando a precisão dos resultados da simulação. Métodos híbridos aplicados ao problema acoplado Darcy-Transporte [60, 9, 61, 62, 10] apresentam bons resultados. Seja combinados a outras estratégias, seja aproximando ambos os sistemas, sua formulação fica condicionada a imposições do problema modelado, como compatibilização dos espaços de aproximação em problemas mistos ou estabilização dos efeitos convectivos, quando necessário. Combinando um método híbrido estabilizado para Darcy com o método SUPG para o problema do transporte, ez; Núñez et al.[38, 9] abordam problemas com razão de mobilidade adversa em meios porosos heterogêneos típicos de reservatórios de petróleo simulando a injeção de traçadores. Igreja e Miranda[10] propõem um método de elementos finitos misto híbrido estável para aproximar ambos os problemas de forma compatível, adotando os mesmos espaços de aproximação para aproximar Darcy e o transporte combinados a um esquema de estabilização *upwind* e um método de diferenças finitas implícito para discretização no tempo. Para problemas onde a hidrodinâmica é modelada pelas equações de Stokes-Darcy combinadas à equação do transporte, podemos citar as seguintes referências: [63, 64, 65], que utilizam métodos de elementos finitos DG ou híbridos para aproximar a hidrodinâmica e métodos estabilizados para aproximar o transporte.

1.1 Objetivos

Neste contexto, este trabalho busca apresentar uma comparação entre métodos mistos híbridos estáveis, onde são empregados espaços \mathcal{RT}_k de Raviart-Thomas [15], e estabilizados, que incluem resíduos de mínimos quadrados à formulação como em [26], para resolver o problema de escoamentos miscíveis em meios porosos. Para tanto, é proposta a metodologia de resolução do problema em duas etapas, onde ambos os problemas serão tratados de forma mista: primeiro os campos de velocidade e pressão, governados pelo problema de Darcy, são aproximados por métodos mistos híbridos localmente conservativos. A aproximação obtida para o campo de velocidades é então empregada para obter a aproximação da concentração do fluido, utilizando um método de elementos finitos híbrido compatível, que emprega os mesmos espaços adotados pelas formulações do problema de Darcy, onde as oscilações espúrias geradas pela predominância dos efeitos convectivos são suavizadas pelo emprego de um esquema *upwind*, combinado com uma discretização temporal de segunda ordem por diferenças finitas para o termo transiente na equação do transporte. Os métodos propostos para os problemas de Darcy e transporte não necessitam de termos de penalidade, como nos métodos DG, para alcançar a estabilidade. Por conta disso, tanto as formulações estáveis quanto as estabilizadas apresentam a característica de conservação local.

A partir da apresentação dos métodos, desenvolvemos estudos de convergência buscando estabelecer uma comparação entre métodos estáveis e estabilizados empregando multiplicadores contínuos e descontínuos para os problemas de Darcy, Transporte e Darcy-Transporte acoplados. Vale ressaltar que, apesar do uso de multiplicadores contínuos não ter a sua estabilidade comprovada quando combinado com espaços de Raviart-Thomas para os problemas locais, estes também são testados numericamente e apresentam resultados de convergência satisfatórios e com reduzido custo computacional se comparado ao uso de multiplicadores descontínuos. Para a realização desses estudos utilizamos diferentes cenários, adotando diferentes graus de polinômios de interpolação, campos de permeabilidade heterogêneos, problemas com convecção dominante e razão de mobilidade adversa. Esse último caso coloca em foco o acoplamento dos subproblemas que compõem o problema modelo de deslocamentos miscíveis e nos aproxima de casos mais complexos e consequentemente com maior custo computacional.

Além disso, testamos e comparamos os métodos híbridos propostos em *benchmarks* da literatura, como o campo de permeabilidades disponibilizado pela Sociedade de Engenheiros de Petróleo (SPE, do inglês *Society of Petroleum Engineers*), denominado *SPE-10*, analisando a estabilidade de cada um dos métodos estudados para casos com maior complexidade no contexto da exploração de reservatórios. Reproduzimos numericamente experimentos realizados em laboratório com foco na razão de mobilidade. Finalmente, um estudo adotando razão de mobilidade adversa em meios porosos heterogêneos é desenvol-

vido com intuito de demonstrar a capacidade dos métodos em capturar os efeitos gerados pelos fenômenos físicos em casos mais realistas.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2 são apresentados conceitos importantes para o entendimento do trabalho, bem como as equações governantes do problema de interesse junto do modelo matemático que descreve o processo físico do escoamento de fluidos em um meio poroso, especificamente para problemas de escoamentos de fluidos miscíveis incompressíveis, ou seja, que se dissolvam em um determinado solvente e tenha densidade constante. Feitas as considerações necessárias, é exibido no Capítulo 3 formulações para os métodos de elementos finitos híbridos que serão utilizados ao longo de todo o trabalho, métodos estáveis e estabilizados com diferentes escolhas de multiplicadores. E ainda métodos sem uma comprovação de estabilidade, mas que apresentam bons resultados nos testes propostos. Estudos de convergência são realizados sobre todos os métodos para validação em diferentes cenários. Métodos de elementos finitos híbridos munidos de técnicas para o tratamento de oscilações espúrias decorrentes de efeitos convectivos por meios de esquemas *upwind* são apresentados no Capítulo 4, focando nossos estudos em analisar o comportamento diante de diferentes configurações do meio. Introduzimos também métodos de elementos finitos para problemas transientes ao inserir um esquema de diferenças finitas no tempo e novamente validamos a proposta. No Capítulo 5 unimos as formulações empregadas nos dois Capítulos anteriores e validamos o acoplamento das mesmas. Seguimos com simulações em configurações sem a existência de soluções exatas presentes na literatura onde, a fim de analisar comportamento do método, diferentes permeabilidades, porosidades efetivas e mobilidades foram considerados para que a robustez da proposta pudesse ser concluída. No último Capítulo, 6, é levantada uma discussão sobre os principais pontos doeste trabalhos, apresentadas as conclusões do mesmo e algumas propostas de trabalhos futuros.

2 Problema Modelo e Definições

Neste capítulo é apresentado o problema modelo tema deste trabalho e suas hipóteses simplificadoras. Uma breve discussão sobre os modelos e a importância de empregar técnicas numéricas precisas para aproximar o campo de velocidade é feita buscando instigar o leitor. Em sequência é feita a exposição de notações e definições necessárias para introduzirmos as técnicas de aproximação do problema modelo.

2.1 Problema Modelo

O problema modelo desta dissertação trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais composto pelo acoplamento do problema de Darcy com o transporte aplicado à simulação de problemas complexos que envolvem: meios porosos heterogêneos, razão de mobilidade adversa e forte predominância de efeitos convectivos. O primeiro subsistema é composto pela lei de Darcy [66] combinada a uma equação de continuidade ou conservação de massa. A lei de Darcy descreve uma relação direta entre a velocidade média de escoamento de um fluido em um meio poroso e o gradiente da pressão aplicada no meio. Darcy[66] demonstrou experimentalmente que o volume que atravessa um meio poroso é proporcional à diferença de pressão e à área da seção, e inversamente proporcional à distância percorrida. Essa lei define uma equação constitutiva para o cálculo da vazão em um meio poroso, sendo a velocidade obtida diretamente da razão entre a vazão e a área da seção onde ocorre o escoamento [67, 68], que pode ser generalizada pela seguinte relação:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbb{G}}{\nu}(\nabla p - \rho g \nabla z), \quad (2.1)$$

onde as variáveis $p = p(\mathbf{x})$, $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbf{x})$ e ν denotam a pressão hidrostática, a permeabilidade do meio e a viscosidade do fluido, respectivamente, ρ a densidade do fluido e g é a magnitude da aceleração gravitacional. Por fim, z é uma função vetorial associada à profundidade do meio.

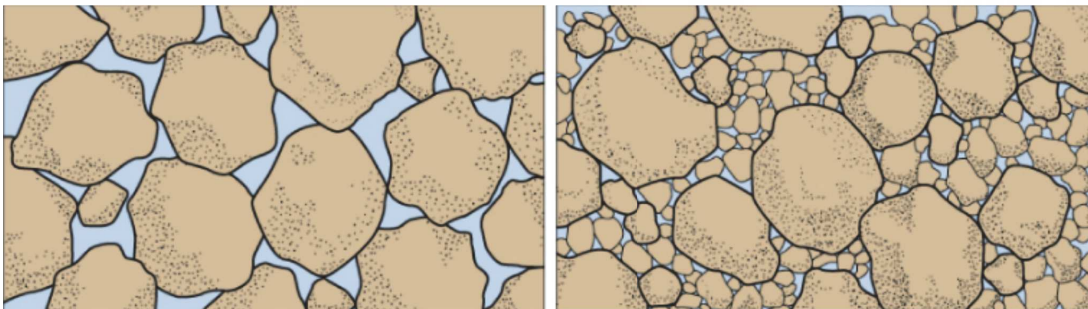


Figura 2.1 – Diferentes meios porosos com diferentes permeabilidades. ¹

Desprezando os efeitos gravitacionais a equação é reduzida a uma relação direta de proporcionalidade entre a velocidade e o gradiente da pressão. O tensor de permeabilidade \mathbb{G} descreve o meio poroso ao longo de todo o domínio, ilustrado pela Figura 2.1, o que nos fornece uma indicação do comportamento da velocidade dada uma configuração do domínio. Definimos ainda o tensor de condutividade hidráulica

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{G}}{\nu},$$

um coeficiente de proporcionalidade que leva em conta as características do meio, incluindo tamanho, distribuição, forma e arranjo das partículas, bem como as características do fluido que está escoando.

A equação de conservação de massa que complementa o problema de Darcy, para o caso incompressível, é definida pelo divergente nulo da velocidade. Essa equação impõe que a massa total de uma espécie em um determinado domínio não varia, ou seja, o fluxo de entrada é o mesmo do fluxo de saída, em outras palavras:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade de Darcy. A Figura 2.2 ilustra a propriedade de conservação de massa.

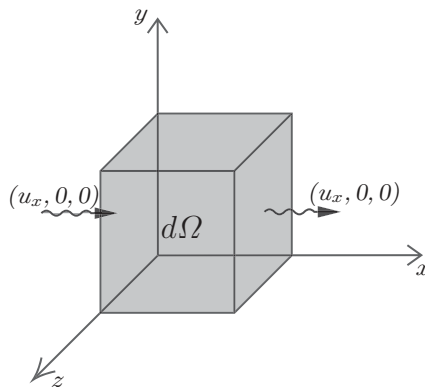


Figura 2.2 – Conservação de massa em um domínio $d\Omega$ para um campo vetorial constante não-nulo apenas na componente u_x .

Para casos particulares, definimos uma fonte f , que faz com que o problema seja reescrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f. \quad (2.3)$$

O transporte do fluido ocorre invariavelmente de regiões de alta pressão para regiões de baixa pressão, com propriedades como a permeabilidade do meio que determinam se o fluido vai escoar adotando em seu trajeto caminhos preferenciais. Todas essas informações são provenientes do campo de velocidades que, quando calculado pelo problema de Darcy,

¹ Extraído e modificado de <https://www.usu.edu/geo/physical/porosity.JPG>

é comumente chamado de velocidade de Darcy. A Figura 2.3 ilustra um campo vetorial bidimensional.

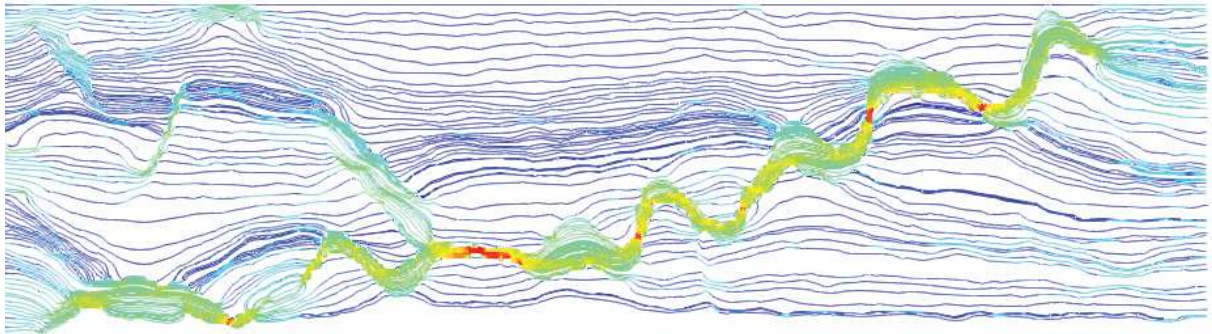


Figura 2.3 – Ilustração de campo de velocidades por linhas de tendência de fluxo para a camada 36 *benchmark* do SPE-10.

O transporte de uma espécie em um meio poroso pode ocorrer por difusão e/ou convecção. Um meio poroso pode ser definido como um sistema constituído por uma fase sólida com espaços vazios, denominados poros. Denominamos ainda a fase sólida do meio como matriz porosa. Os efeitos convectivos ocorrem por meio das correntes de convecção, que são campos vetoriais que descrevem em um sistema o deslocamento de uma espécie devido a esse fenômeno. Já os efeitos difusivos decorrem da diferença de potenciais das espécies, ou seja, a diferença de concentrações entre dois locais num dado sistema. Embora em geral ambos os modos, difusivo e convectivo, ocorram simultaneamente, quase sempre um deles sobressai em relação ao outro, de maneira que seja possível usar soluções aproximadas, considerando apenas o processo dominante. Neste sentido, o segundo subsistema é denotado como problema do transporte, onde supomos o escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido. Assim, a concentração de uma espécie que escoar num meio, através de efeitos difusivos e convectivos, é transportada de um ponto a outro durante um intervalo de tempo. O modelo é representado por um sistema de equações diferenciais parciais não-linear [69, 70], composto por uma equação transiente do tipo convecção-difusão para a concentração da mistura dos fluidos, denotada por $c(\mathbf{x}, t)$:

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbb{D} \nabla c) = g, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{u} é já apresentada, velocidade de Darcy. A função g denota a fonte ou sumidouro para o problema, $\phi = \phi(\mathbf{x})$ representa a porosidade efetiva do meio, e por fim, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbf{u})$ é o tensor de dispersão, que representa os efeitos difusivos/dispersivos presentes na equação e pode ser definido como

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \alpha_{mol} \mathbb{I} + |\mathbf{u}| \left[\alpha_l \mathbb{E}(\mathbf{u}) + \alpha_t \left(\mathbb{E}^\perp(\mathbf{u}) \right) \right], \quad \mathbb{E}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \mathbb{E}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbb{I} - \mathbb{E}(\mathbf{u}), \quad (2.5)$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade, $|\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^d u_i^2$, \otimes é o produto tensorial e α_{mol} , α_l e α_t são os coeficientes de difusão molecular, de dispersão longitudinal e de dispersão transversal,

respectivamente. Em deslocamentos de fluidos miscíveis as dispersões são mais relevantes que a difusão molecular [70, 64]. Dessa forma, geralmente adota-se a dispersão longitudinal (α_l) maior do que a transversal (α_t) por conta da orientação do domínio. Assim,

$$0 < \alpha_{mol} \leq \alpha_l, \quad \alpha_l \geq \alpha_t > 0, \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq 1.$$

Evidenciamos assim uma dependência direta do campo de velocidades para definição dos termos difusivos e convectivos presentes na equação do transporte, o que destaca a importância de métodos que capturem com precisão o campo vetorial calculado através do problema de Darcy dadas as configurações do domínio.

Considerando um meio poroso rígido, saturado por um fluido newtoniano incompressível com efeitos gravitacionais negligenciados em um domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, com contorno $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ e um intervalo de tempo $(0, T]$, apresentamos o seguinte conjunto de equações diferenciais parciais que modela o problema estudado neste trabalho separados no par de problemas:

Problema de Darcy: dados \mathbb{K} , f e \bar{p} , encontrar o par $[\mathbf{u}, p]$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbb{K}\nabla p && \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot (\mathbf{u}) &= f && \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_N, \\ p &= \bar{p} && \text{sobre } \partial\Omega_D. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Problema do transporte: dados \mathbf{u} , ϕ e as funções g , \bar{c} e c_0 , encontrar c , tal que:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbb{D}\nabla c) &= g && \text{em } \Omega \times (0, T], \\ c(\mathbf{x}, 0) &= c_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega, \\ \mathbb{D}\nabla c \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_N \times (0, T], \\ c &= \bar{c} && \text{sobre } \partial\Omega_D \times (0, T]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como dito, a viscosidade da mistura dos fluidos pode depender da concentração do fluido injetado. Neste trabalho essa dependência se dá através de uma função não linear, a lei empírica descrita por Settari, Price e Dupont[3], dada por:

$$\nu(c) = \nu_{res}[1 - c + M^{\frac{1}{4}}c]^{-4}, \quad c \in [0, 1] \tag{2.8}$$

onde M denota a razão de mobilidade.

Quando $M = 1$ temos que os fluidos, injetado e residente, possuem a mesma viscosidade, $\nu_{res} = \nu_{inj}$ e então os termos na equação (2.8) se anulam, tornando a viscosidade constante, independente da concentração. Já quando $M \gg 1$ denomina-se razão de mobilidade adversa e o fluido injetado é mais viscoso que o residente, tornando o problema estudado fortemente acoplado, exigindo métodos numéricos robustos que busquem

de forma precisa e com baixo custo computacional resolver os complexos fenômenos físicos envolvidos. Por fim, f e g são termos fontes para os diferentes subsistemas.

Além da razão de mobilidade, definimos outro parâmetro adimensional que determina o regime de escoamento do modelo, o número de Péclet, $P_e = \|\mathbf{u}\|L/\|\mathbb{D}\|_\infty$, onde L é o comprimento do canal.

Buscando gerar uma equivalência entre os problemas do transporte (2.7) e de Darcy (2.6), em nossas abordagens numéricas que serão introduzidas nos próximos capítulos, reescrevemos o problema do transporte na forma mista incluindo o fluxo difusivo $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbb{D}\nabla c$, que dá origem ao seguinte problema modelo do transporte na forma mista:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{D}\nabla c &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T], \\ \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= g && \text{em } \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (2.9)$$

sujeito às condições de contorno e inicial dadas em (2.7), de forma que a condição de Neumann se estenda para a variável vetorial adicionada ao problema.

2.2 Métodos Híbridos e Espaços de Aproximação

Diferentes abordagens podem ser aplicadas para resolver os subsistemas apresentados. Em particular, uma proposta que vem sendo amplamente estudada na literatura são os métodos de elementos finitos híbridos, como já comentado no capítulo introdutório. Para que a apresentação dos métodos propostos seja feita, introduzimos conceitos importantes como os espaços relacionados aos Métodos de Elementos Finitos (MEF) utilizados posteriormente.

Sendo assim, considerando um espaço de funções $\mathcal{F}(\Omega)$, denotamos $[\mathcal{F}(\Omega)]^d$ e $[\mathcal{F}(\Omega)]^{d \times d}$ como os campos vetoriais e tensoriais cujas componentes pertencem a $\mathcal{F}(\Omega)$, respectivamente. Estes espaços são equipados com a norma induzida pelo produto interno, a qual, por simplicidade, é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{F}(\Omega)}$.

Para um vetor \mathbf{x} , adota-se neste trabalho a norma euclidiana definida como

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \quad (2.10)$$

e para uma matriz \mathbf{A} adotamos a norma do infinito, dada por

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|. \quad (2.11)$$

Tomando um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ de contorno regular $\partial\Omega$, denotamos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert zero, referente às funções quadrado-integráveis em Ω , que pode ser apresentado como

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega |q|^2 d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

o produto interno e a respectiva norma do espaço $L^2(\Omega)$ são expressos por

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u v \, dx \quad \text{e} \quad \|v\|_0 = \|v\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_\Omega}.$$

Definimos ainda os seguintes espaços de Hilbert das funções quadrado-integráveis em Ω com suas normas e seminormas:

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega), \nabla q \in [L^2(\Omega)]^d \right\}; \\ \|q\|_1^2 &= \|q\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|q\|_0^2 + \|\nabla q\|_0^2; \\ |q|_1^2 &= |q|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla q\|_0^2, \end{aligned}$$

para funções escalares com seu respectivo gradiente quadrado-integrável em Ω ;

$$\begin{aligned} H(\text{div}, \Omega) &= H(\text{div}) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}; \\ \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})}^2 &= \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2. \end{aligned}$$

para funções vetoriais com seu respectivo divergente quadrado-integrável em Ω .

A partir deste ponto a apresentação dos conceitos é restringida para um caso bidimensional, $d = 2$, a fim de possibilitar a ilustração de conceitos sobre o domínio. Portanto, considerando uma malha de elementos finitos $\mathcal{T}_h = \{K\}$ formada pela união de todos os elementos $K \in \Omega$, para as arestas e dos elementos, definem-se os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

denota o conjunto de todas as arestas de todos os elementos, também chamado de esqueleto da malha,

$$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$$

é o conjunto das arestas pertencentes ao contorno de Ω e

$$\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^\partial\},$$

é o conjunto das arestas interiores, não pertencentes ao contorno de Ω . A Figura 2.4 ilustra a vizinhança entre dois elementos K_i que compartilham uma aresta e que os divide, ou seja, $e = \partial K_1 \cap \partial K_2$.

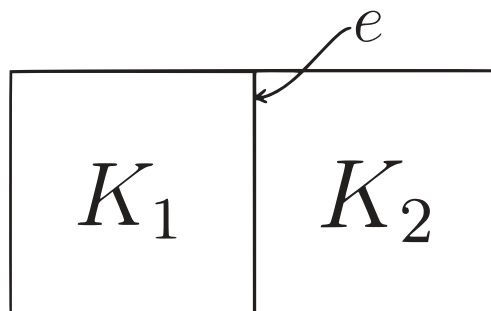


Figura 2.4 – Representação de uma aresta e entre dois elementos vizinhos K_1 e K_2 .

Para cada elemento K e para cada aresta e , associa-se um vetor unitário normal \mathbf{n} externo ao elemento. Se e é uma aresta compartilhada por dois elementos vizinhos K_i , com $i = 1, 2$ então, para duas funções escalares q^i e duas funções vetoriais \mathbf{v}^i , que se relacionam ao seu respectivo elemento definem-se médias e saltos, respectivamente, por

$$\{\!\!\{q\}\!\!\} = \frac{1}{2} (q^1 + q^2), \quad \{\!\!\{\mathbf{v}\}\!\!\} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2), \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (2.12)$$

e

$$[[q]] = q^1 \mathbf{n}^1 + q^2 \mathbf{n}^2, \quad [[\mathbf{v}]] = \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2, \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^0, \quad (2.13)$$

e para arestas no contorno do domínio, definimos

$$\{\!\!\{q\}\!\!\} = q, \quad \{\!\!\{\mathbf{v}\}\!\!\} = \mathbf{v}, \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (2.14)$$

e

$$[[q]] = q\mathbf{n}, \quad [[\mathbf{v}]] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (2.15)$$

onde q e \mathbf{v} se relacionam ao elemento presente no contorno do domínio.

Em problemas com natureza mista, como os que são tratados neste trabalho, ao utilizarmos métodos de elementos finitos descontínuos são empregados espaços de funções quebradas. Diante disso, para os métodos híbridos mistos estabilizados, apresentados nos capítulos a seguir, empregamos espaços vetoriais e escalares compostos de polinômios de Lagrange, que podem ser definidos como

$$\mathcal{V}_h^k = \left\{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{Q}_k(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{Q}_h^k = \left\{ q_h \in L^2(\Omega); q_h|_K \in \mathbb{Q}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (2.17)$$

onde \mathbb{Q}_k denota as funções polinomiais de grau até k em cada variável.

Há ainda a necessidade de compatibilização entre os espaços apresentados para que haja estabilidade no nível do elemento [71]. Uma maneira de satisfazer essa carência seria pela inclusão de termos de estabilização diretamente à formulação variacional do problema. Tais termos são geralmente construídos através de resíduos de mínimos quadrados do problema estudado, garantindo a compatibilidade entre os espaços de aproximações com o intuito de manter a consistência da formulação até mesmo com escolhas de mesmo grau para as variáveis vetorial e escalar, podendo ainda gerar simetria ao sistema [26, 25].

Outra forma de suprir essa necessidade de compatibilidade é a adoção de espaços naturalmente estáveis. Neste sentido, adotamos os espaços de Raviart-Thomas, \mathcal{RT}_k [15] para o campo de velocidades e o espaço \mathcal{Q}_h^k para a pressão, anteriormente definido em (2.17). O espaços não-conformes \mathcal{RT}_k de índice k podem ser definidos como

$$\mathcal{V}_h^{\mathcal{RT}_k} = \left\{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}_h|_K \in P_K^1(\mathbb{Q}_{k+1,k}(\hat{K}) \times \mathbb{Q}_{k,k+1}(\hat{K})), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (2.18)$$

onde $\hat{K} = [-1, 1]^2$ denota o elemento de referência para cada elemento K da malha \mathcal{T}_h e $\mathbb{Q}_{i,j}$ denota o conjunto de funções polinomiais de grau até i em x e até j em y . Além disso, é importante ressaltar que, para esses espaços, a transformação das funções do elemento de referência \hat{K} para o elemento da malha K é feita empregando a transformada de Piola [71].

Para os multiplicadores de Lagrange, utilizamos duas abordagens de interpolação: contínua e descontínua. A escolha de empregar multiplicadores contínuos, se comparada a multiplicadores descontínuos, nos fornece um menor número de graus de liberdade, o mesmo número obtido por métodos clássicos de Galerkin contínuo (para caso de usarmos aproximação linear por aresta), a relação entre essas duas possibilidades pode ser observada na Figura 2.5. Porém, como comentado no Capítulo 1, a escolha de multiplicadores contínuos pode limitar a capacidade de tratar as discontinuidades do meio, como em domínios heterogêneos, por exemplo. Assim justifica-se o uso também dos multiplicadores descontínuos ao fornecerem maior capacidade de reprodução dessas características e muitas vezes uma maior precisão da aproximação. Comparações entre essas duas opções utilizadas nesse trabalho pode ser encontrada em Faria, Loula e Santos; Igreja e Loula; Rocha et al.[43, 72, 73]. Dessa forma, definimos o espaço referente às funções no esqueleto da malha \mathcal{M}_h^l que é definido por meio de uma escolha entre dois espaços diferentes,

$$\mathcal{M}_h^l = \{\mathcal{D}_h^l / \mathcal{C}_h^l\}, \quad (2.19)$$

onde $\{\cdot/\cdot\}$ descreve uma possibilidade de escolha entre dois espaços, \mathcal{D}_h^l representa o espaço de multiplicadores descontínuos

$$\mathcal{D}_h^l = \left\{ \hat{q}_h \in L^2(\mathcal{E}_h); \hat{q}_h|_e \in p_l(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \cup (\mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_N), \hat{q}_h|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D \right\}, \quad (2.20)$$

e \mathcal{C}_h^l dos multiplicadores contínuos

$$\mathcal{C}_h^l = \left\{ \hat{q}_h \in C^0(\mathcal{E}_h); \hat{q}_h|_e \in p_l(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \cup (\mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_N), \hat{q}_h|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D \right\}, \quad (2.21)$$

onde $p_l(e)$ denota o conjunto de funções polinomiais de grau até l sobre e . Geralmente define-se $l = k$, isto é, o espaço dos multiplicadores com mesma ordem dos espaços das variáveis de interesse, abordagem que discutiremos nos capítulos a seguir.

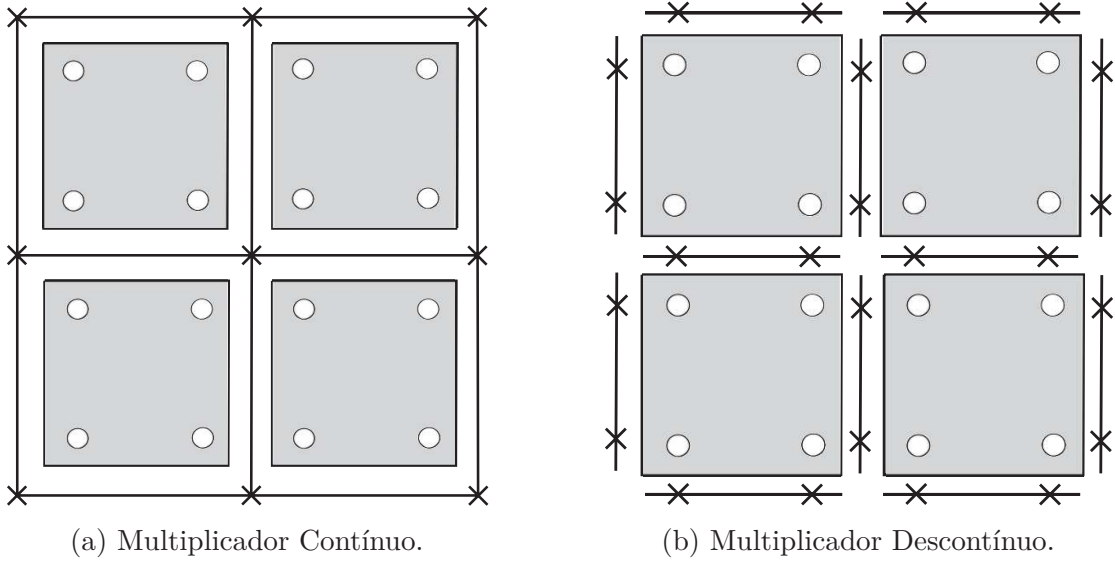


Figura 2.5 – Pontos de interpolação das variáveis nos elementos e nas arestas para diferentes escolhas de multiplicadores para aproximação bilinear no interior dos elementos e linear nas arestas.

2.2.1 Condensação Estática

A condensação estática, ou redução de Irons-Guyan, é um método algébrico proposto em [74] que consiste na redução de dimensionalidade expressa por graus de liberdade em um sistema linear. Assim, dado um sistema linear da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o dividimos em dois grupos com n_a graus de liberdade ativos, e n_c graus de liberdade condensados, de modo que o número total de graus de liberdade presentes no sistema seja $n = n_c + n_a$. Escrevendo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cc} & \mathbf{A}_{ca} \\ \mathbf{A}_{ac} & \mathbf{A}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cc}\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{ca}\mathbf{x}_a &= \mathbf{b}_c \\ \mathbf{A}_{ac}\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{aa}\mathbf{x}_a &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por simplicidade, definimos a segunda linha do sistema (2.23) igual a zero, porém o método permite a resolução sobre sistemas onde não ocorre essa nulidade, casos onde usualmente o problema modelo possui uma condição de Neumann não homogênea. Assim, realizamos a condensação estática em favor da variável \mathbf{x}_c , assumindo que \mathbf{A}_{cc} é uma matriz inversível, manipulamos o sistema (2.22), para obter

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{A}_{cc}^{-1}(\mathbf{b}_c - \mathbf{A}_{ca}\mathbf{x}_a). \quad (2.24)$$

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23), chega-se no sistema global em função somente da variável \mathbf{x}_a , conforme a seguir:

$$(\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ac}\mathbf{A}_{cc}^{-1}\mathbf{A}_{ca})\mathbf{x}_a = -\mathbf{A}_{cc}^{-1}\mathbf{b}_c. \quad (2.25)$$

Assim, obtemos um sistema de dimensão $n_a \times n_a$ equivalente ao sistema original de dimensão $n \times n$, ou seja condensando n_c graus de liberdade.

Formulações híbridas utilizam dessa técnica que, além de condensação estática, pode ser chamada de complemento de Schur ou mesmo hibridização. A principal vantagem em empregar esse método de resolução é a redução do custo computacional, sendo possível ser realizado somente se os problemas locais forem estáveis, o que fornece inversibilidade para a matriz gerada pelos problemas locais. Desse modo, todos os graus de liberdade das variáveis, sejam elas vetoriais ou escalares, podem ser eliminados no nível do elemento em favor de uma nova variável que chamamos de global, gerando um sistema somente com os graus de liberdade dessa última variável. Ainda, em problemas unidimensionais, a matriz de rigidez gerada pela técnica de condensação estática é sempre tridiagonal, independentemente da ordem polinomial empregada, possibilitando uma redução do custo computacional ainda mais significativa devido à possibilidade de empregarmos técnicas de resolução de sistemas lineares por retro-substituição [75].

O problema modelo estudado é definido em duas dimensões, assim o problema local possui 3 graus de liberdade por nó da malha, referente a uma variável vetorial e uma variável escalar, para Darcy (u_x, u_y, p) e para o transporte (σ_x, σ_y, c) . Já o problema global depende apenas do campo escalar, em Darcy associado ao traço da pressão p e no transporte ao traço da concentração c . A fim de evidenciar essa relação e destacar a eficiência da técnica de hibridização, a Figura 2.6 apresenta o número total de graus de liberdade do problema local, ou seja, a soma dos graus de liberdade de cada elemento no domínio (à esquerda) e dos graus de liberdade do problema global, referente ao multiplicador de Lagrange (à direita) empregando as diferentes abordagens estudadas neste trabalho sobre uma malha bidimensional de 64×64 elementos e aproximações com ordem polinomial $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Sendo destacado assim a redução da complexidade do problema ao comparar o número de graus de liberdade sobre o esqueleto da malha à soma dos graus de liberdade dos elementos, isto é, o problema global em relação a união de todos problemas locais. Destaca-se o fato do multiplicador sobre a variável escalar não levar em consideração os graus de liberdade da variável vetorial, gerando um sistema de menor tamanho se comparado a métodos que não fazem a utilização dessa estratégia.

Outros refinamentos de malha apresentariam comportamento similar ao perfil traçado pelo crescimento das barras na Figura 2.6, tanto para o problema global quanto para o local. Ainda, a comparação apresentada ocorre sobre um domínio bidimensional pois os estudos a seguir ocorrerão nessa mesma dimensão. Dito isso, destacamos que o problema relacionado ao tamanho dos problemas global e local agrava-se em domínios tridimensionais, onde os problemas locais tornam-se ainda mais caros que o problema global, principalmente para multiplicadores contínuos. Ao se empregar métodos híbridos, uma opção para tratar o aumento dos graus de liberdade dos problemas, agravados em

três dimensões, é uso de técnicas de paralelização que podem ser implementadas de forma natural devido às características de separação dos problemas locais e resolução de forma independente presentes no método híbrido. Nesse sentido, os problemas locais podem ser resolvidos em diferentes processos de forma simultânea, fato que caracteriza uma tarefa paralelizável pelo computador.

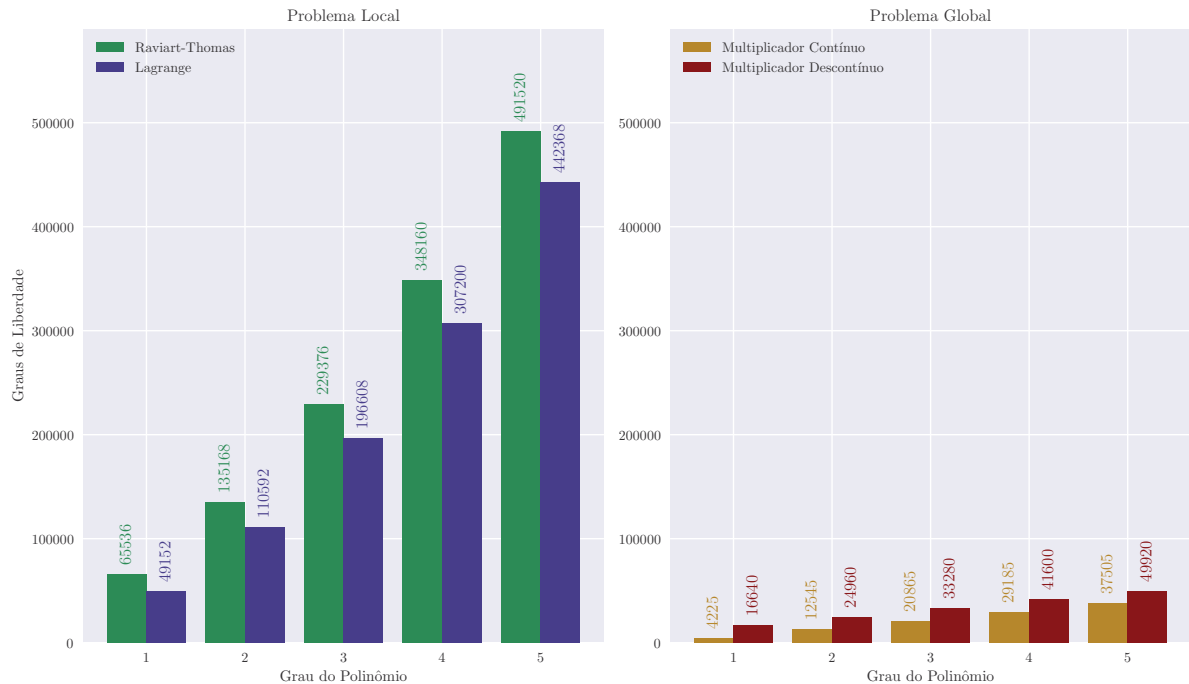


Figura 2.6 – Comparações entre os somatórios dos graus de liberdade de todos problemas locais adotando aproximações RT e Lagrange (esquerda) e entre os graus de liberdade dos problemas globais empregando multiplicadores contínuos e descontínuos (direita) para uma malha bidimensional de 64×64 elementos.

2.3 Resolução de Sistemas Lineares

Para a resolução do sistema linear gerado pela construção matricial do problema (2.25), duas abordagens podem ser empregadas: métodos iterativos e métodos diretos. Nos experimentos computacionais preliminares com métodos iterativos verificou-se um bom desempenho para casos simétricos, como o problema de Darcy, ao empregar o método do Gradiente Biconjugado Estabilizado (BiCGStab) [76]. Em casos assimétricos, como o problema do transporte, o método do mínimo residual generalizado (GMRES) [77] se mostra eficiente. As matrizes geradas pelo problema acoplado Darcy-Transporte em meios heterogêneos e/ou razão de mobilidade adversa, em outras palavras sobre condições mais realistas, apresentam padrões mais complexos porém mantendo certa esparsidade no sistema global. Na literatura é possível encontrar resolvedores robustos que combinam diferentes estratégias para obter o melhor desempenho possível. Diante disso, foi verificado um bom resultado tanto em casos mais simples quanto mais complexos ao se empregar

um conjunto de rotinas por meio do método MultiFrontal Assimétrico (UMFPACK, do inglês *Unsymmetric MultiFrontal PACKage*) [78] presentes na biblioteca SuiteSparse² para resolução de sistemas lineares esparsos que além do própria método utiliza, entre outros procedimentos, alocação dinâmica de memória, fase de pré-ordenação e análise de limites superiores em fatoração LU visando reduzir ainda mais o custo computacional.

Desse modo, os experimentos conduzidos neste trabalho foram todos realizados por meio do resolvidor `SuiteSparse::UMFPACK`. Esse algoritmo e as rotinas presentes em todo o código desenvolvido, podem ser encontrados nas ferramentas disponibilizadas pela biblioteca adotada, `deal.ii` [79], sendo complementados apenas pelo uso de bibliotecas padrões do C++. O código desenvolvido para as simulações em cada capítulo pode ser encontrado integralmente em https://github.com/GabrielBMiranda/HMSS_Study.

² <https://people.engr.tamu.edu/davis/suitesparse.html>

3 Métodos Híbridos para o Problema de Darcy

Este capítulo apresenta métodos de elementos finitos mistos híbridos para o problema de Darcy (2.6). A resolução desta etapa por um método robusto é de suma importância para que, dada a permeabilidade do meio, o campo vetorial que descreve a percolação pelo meio poroso possa ser obtido com precisão e assim caracterizar os caminhos preferenciais de um determinado meio e empregado para o cálculo do problema do transporte (2.7). Para aproximação do problema de Darcy, propomos duas abordagens híbridas localmente conservativas: formulações estáveis e formulações estabilizadas. Iniciamos o capítulo introduzindo o problema escrito no nível do elemento, a fim de preparar o leitor para introdução da formulação híbrida que é construída logo em sequência. Definidas as formulações através de formas bilineares, associamos as mesmas com a estratégia de resolução apresentada no capítulo 2.

Fechamos o capítulo com estudos de convergência em meios porosos homogêneos e heterogêneos munidos de soluções exatas. Assim, podendo analisar a precisão e taxa de convergência dos métodos empregados diante de diferentes cenários empregando multiplicadores contínuos e descontínuos.

3.1 Problema de Darcy no Nível do Elemento

Para que seja possível introduzir as formulações híbridas referentes ao problema de Darcy, definimos inicialmente o problema modelo (2.6) em cada elemento K de uma malha de elementos finitos \mathcal{T}_h , onde o contorno de Dirichlet $\Omega_D = \emptyset$, como a seguir

Dados \mathbb{K} e f , encontrar \mathbf{u} e p tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbb{K}\nabla p & \text{em } K, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= f & \text{em } K, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial. \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal exterior ao elemento K .

O problema definido acima está sujeito às seguintes condições de transmissão ou continuidade sobre as arestas dos elementos

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket &= 0, & \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \\ \llbracket p \rrbracket &= 0, & \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, considerando as equações no sistema (3.1) multiplicadas por suas respectivas funções peso \mathbf{v} e q , nos espaços $H(\text{div}, K)$ e $L_0^2(K)$, e integrando por partes o termo do gradiente da pressão, obtemos a seguinte formulação variacional em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$:

Dados \mathbb{K} e f , encontrar $[\mathbf{u}, p] \in H(\text{div}, K) \times L_0^2(K)$ tais que

$$\int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_K p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0, \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}, K) \quad (3.3)$$

$$- \int_K \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = - \int_K f q \, d\mathbf{x}, \forall q \in L_0^2(K). \quad (3.4)$$

De acordo com a condição de contorno apresentada no problema (3.1), a componente normal da velocidade se anula no contorno de Ω . Assim, a integral no contorno do elemento apresentada em (3.4) se anula sobre as arestas do contorno do domínio, $e \in \mathcal{E}_h^\partial$, conforme a condição de contorno apresentada em (3.1).

Como a pressão não é conhecida nas arestas dos elementos faz-se necessário adotar uma estratégia para recuperar essa informação, que será apresentada na próxima seção.

3.2 Formulação Híbrida

Utilizando os espaços apresentados no Capítulo 2 podemos construir formulações híbridas, caracterizadas pela inclusão do multiplicador de Lagrange, para resolução do problema de Darcy (2.6). Nesta seção formulamos para o problema de Darcy as duas propostas mistas híbridas: utilizando espaços de Raviart-Thomas, e utilizando resíduos de mínimos quadrados para compatibilização de espaços de Lagrange. Ambas podendo adotar diferentes escolhas de aproximação para o multiplicador: contínuo ou descontínuo. Para isso propõe-se a introdução de um multiplicador de Lagrange definido como

$$\hat{p} = p|_e, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \quad (3.5)$$

que também faz o papel de impor as condições de transmissão (3.2) entre os elementos. Conforme pontuado anteriormente, necessitamos de escolhas de espaços de aproximação apropriadas para as variáveis de interesse. Dessa forma, supondo formulações estáveis, o campo de velocidade pertence ao espaço $\mathbf{V}_h^{\text{RT}^k}$ definido em (2.16) e, para formulações estabilizadas, é empregado o espaço \mathcal{V}_h^k definido em (2.18). Para ambas as formulações, o campo de pressão pertence ao espaço \mathcal{Q}_h^k apresentado em (2.17).

Definimos o espaço produto \mathbf{V}_h^k , um espaço suficientemente regular relacionado às variáveis $\mathbf{u}_h, p_h, \hat{p}_h$, e reescrevemos o problema (3.4) da seguinte forma:

Encontrar a tripla $[\mathbf{u}_h, p_h, \hat{p}_h] \in \mathbf{V}_h^k$, tal que $\forall [\mathbf{v}_h, q_h, \hat{q}_h] \in \mathbf{V}_h^k$, satisfaça

$$\int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds - \int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (3.6)$$

$$- \int_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, q_h \, d\mathbf{x} = - \int_K f q_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (3.7)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) \, \hat{q}_h \, ds = 0. \quad (3.8)$$

O problema acima pode ser separado em **problema local**, formado pelas equações (3.6)-(3.7), e **problema global**, formado pela equação (3.8) definida no esqueleto da malha \mathcal{E}_h ,

que tem por objetivo impor fracamente a condição de continuidade do campo de velocidade entre os elementos (3.2) e, assim, assegurar a conservação local de massa.

Apresentaremos uma forma bilinear para este problema, a qual nos ajudará na construção e representação das formulações presentes neste trabalho. A fim de introduzir essas abordagens para o problema de Darcy definimos então a seguinte forma bilinear referente ao problema elíptico:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) ds \right. \\ \left. + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) ds - \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo

$$\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}} = [\mathbf{u}_h, p_h, \hat{p}_h] \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_h = [\mathbf{v}_h, q_h, \hat{q}_h].$$

Neste contexto, $\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k$. Discutiremos a seguir algumas escolhas para o espaço \mathbf{V}_h^k que tornam o problema solucionável pelo método híbrido.

3.2.1 Formulação Híbrida Estabilizada

Dados os espaços \mathcal{V}_h^k e \mathcal{Q}_h^k , apresentados em (2.16) e (2.17) respectivamente, definimos as aproximações usuais compostas por polinômios de Lagrange $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^k$ e $p_h \in \mathcal{Q}_h^k$. Essas escolhas de espaços são instáveis para a formulação (3.6)-(3.8) e, por isso propomos a adição de termos de estabilização que fornecem flexibilidade na escolha dos espaços de aproximação. Assim, associado à lei de Darcy, Masud e Hughes[25] propuseram a adição de resíduos de mínimos quadrados relacionados à lei de Darcy, que podem ser escritos como

$$\delta_1^{\mathcal{D}} \int_K \mathbb{K} (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{v}_h + \nabla q_h) d\mathbf{x}. \quad (3.10)$$

A adição desse termo na formulação visa modificar a forma bilinear para uma em que os espaços sejam compatíveis. A estimativa do erro adotando formulações mistas contínuas para o problema de Darcy com a inclusão desse termo é apresentado por Masud e Hughes[25]. Adotando polinômios de mesma ordem k para os campos de velocidade e pressão, sobre uma malha de elementos finitos de diâmetro h e soluções suficientemente regulares ($\mathbf{u} \in [H^{k+1}]^d$ e $p \in H^{k+1}$), resulta em

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1} |p|_{k+1}, \quad (3.11)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^k |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (3.12)$$

isto é, taxa ótima para a pressão e subótima para a velocidade, ambas na norma $L^2(\Omega)$. Sendo assim, a adição desse termo não garante a obtenção de taxas ótimas de convergência para a variável vetorial [80, 25, 26].

Neste contexto, Loula e Toledo[24] propuseram, para um problema de transferência de calor, a adição de termos de mínimos quadrados relacionados à equação de conservação de massa, que pode ser adaptado à segunda equação do subsistema do problema de Darcy (2.6) gerando a seguinte expressão:

$$\delta_2^{\mathcal{D}} \int_K |\mathbb{K}^{-1}| (\nabla \cdot \mathbf{u}_h - f) \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \quad (3.13)$$

A inclusão dos termos (3.10) e (3.13) às formulações mistas contínuas para o problema de Darcy fornece as seguintes estimativas para o erro na norma $L^2(\Omega)$ [24, 26]:

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1} |p|_{k+1}, \quad (3.14)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^k |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (3.15)$$

$$\|\nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^k |\mathbf{u}|_{k+1}. \quad (3.16)$$

Do rotacional da lei de Darcy é observada a propriedade de irrotacionalidade [26], admitindo que a função \mathbb{K}^{-1} seja diferenciável em cada elemento K , escrevemos $\mathbb{K}^{-1} \in C^1(K)$

$$\delta_3^{\mathcal{D}} \int_K |\mathbb{K}| \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \quad (3.17)$$

Dessa forma, através da adição dos três termos de mínimos quadrados (3.10), (3.13) e (3.17), Correa e Loula[26] demonstraram a seguinte estimativa de erro na norma L^2 :

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1} |p|_{k+1}, \quad (3.18)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1}, |\mathbf{u}|_{k+1} \quad (3.19)$$

estimativas ótimas de convergência tanto para a pressão quanto para a velocidade.

Dados estes três termos, (3.10), (3.13) e (3.17), podemos definir uma forma bilinear referente às estabilizações a serem incluídas nessa proposta de resolução:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{stab}(\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\delta_1^{\mathcal{D}} \int_K \mathbb{K} (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla p_h) \cdot (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} \right. \\ & + \delta_2^{\mathcal{D}} \int_K |\mathbb{K}^{-1}| \nabla \cdot \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ & \left. + \delta_3^{\mathcal{D}} \int_K |\mathbb{K}| \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Escrevemos ainda a parte do funcional linear referente ao segundo termo de estabilização apresentado (3.13), dada por:

$$\mathcal{F}_{stab}(\mathbf{Y}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\delta_2^{\mathcal{D}} \int_K |\mathbb{K}^{-1}| f \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right]. \quad (3.21)$$

A partir das definições apresentadas acima, (3.20) e (3.21), apresentamos o método híbrido estabilizado para o problema de Darcy, que pode ser enunciado como segue:

Encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h), \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k \quad (3.22)$$

onde define-se

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^l$$

onde o lado esquerdo da equação é dado pela combinação das formas bilineares referente ao problema original (3.9) e a estabilização por meio dos termos de mínimos quadrados (3.20)

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{A}_{clip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{A}_{stab}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h); \quad (3.23)$$

já a forma presente no lado direito da equação (3.22) é obtida diretamente pelo produto interno do termo fonte f pela função peso q_h somada a estabilização relacionada ao termo fonte (3.21):

$$F(\mathbf{Y}_h) = - \int_K f q_h d\mathbf{x} + \mathcal{F}_{stab}(\mathbf{Y}_h). \quad (3.24)$$

É importante ressaltar que a estimativa de erro (3.18)-(3.19) proposta por Correa e Loula[26] foi desenvolvida para um método conforme misto dual incluindo os termos de estabilização (3.10), (3.13) e (3.17). Contudo, como é possível observar na Seção 3.3.1, os resultados obtidos para o método híbrido estabilizado (3.22) também apresentam taxas ótimas de convergência para velocidade e pressão. Além disso, de acordo com Badia e Codina[18], a análise feita para o método proposto por Correa e Loula[26] não contempla alguns casos com meios porosos heterogêneos, isso ocorre se essas heterogeneidades violarem as hipóteses de regularidade adotadas. Neste sentido, pode ser observado nos resultados numéricos apresentados na Seção 3.3.2 que as taxas obtidas em meios homogêneos não se mantêm em meios heterogêneos, onde é possível notar uma degradação da taxa de convergência do método estabilizado.

3.2.2 Formulação Híbrida Estável

Trataremos agora a formulação (3.6)-(3.8) empregando um espaço de aproximação estável que, por isso, não necessita da inclusão de termos de estabilização. Nossa escolha se trata dos espaços de Raviart-Thomas para a variável vetorial $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^{\mathcal{RT}^k}$ definido em (2.18), e para campo de pressão o espaço \mathcal{Q}_h^k apresentado em (2.17).

Com a estabilidade da formulação garantida pela escolha dos espaços de aproximação, o problema é grafado de forma similar, definindo

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^{\mathcal{RT}^k} \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{D}_h^k :$$

Encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h), \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k, \quad (3.25)$$

onde

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{A}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) \quad (3.26)$$

e

$$F(\mathbf{Y}_h) = - \int_K f q_h d\mathbf{x}. \quad (3.27)$$

O método (3.25) apresenta as seguintes estimativas para o erro na norma $L^2(\Omega)$ [71, 15]:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (3.28)$$

$$\|p - p_h\|_0 \leq Ch^{k+1} |p|_{k+1}. \quad (3.29)$$

Essas estimativas pressupõem o uso de multiplicadores descontínuos e serão verificadas numericamente nas seções a seguir.

Observação: Apesar de não ser do nosso conhecimento a existência de demonstrações a respeito da estabilidade para este método, quando adotado espaços de aproximação contínuos para o multiplicador de Lagrange, esta abordagem será testada numericamente na seção de resultados numéricos deste capítulo. Cabe ressaltar que os resultados obtidos são bastante satisfatórios, mesmo em malhas distorcidas e meios heterogêneos, e com reduzido custo computacional do problema global se comparado ao emprego de multiplicadores descontínuos.

3.2.3 Estratégia de Resolução

Relacionaremos as formulações apresentadas nas subseções anteriores com a estratégia de resolução apresentada em (2.22)-(2.25). Para tal fim, escrevemos as seguintes formas bilineares para representação dos termos presentes no problema (3.25)-(3.27) :

$$\begin{aligned} a_{cc}([\mathbf{u}_h, p_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\mathbf{x}, \\ a_{ca}(\hat{p}_h, [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_{\partial K} \hat{p}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) ds, \\ a_{ac}([\mathbf{u}_h, p_h], \hat{q}_h) &= \int_{\partial K} \hat{q}_h (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) ds, \\ a_{aa}(\hat{p}_h, \hat{q}_h) &= 0, \\ b_c([\mathbf{v}_h, q_h]) &= - \int_K f q_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para a formulação estabilizada, são somados à $a_{cc}(\cdot, \cdot)$ os termos da forma \mathcal{A}_{stab} definidos em (3.20) e à $b_c(\cdot)$ a forma \mathcal{F}_{stab} definida em (3.21).

Adotando essas formas podemos escrever o sistema da seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cc} \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{ca} \mathbf{x}_a &= \mathbf{b}_c \\ \mathbf{A}_{ac} \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{aa} \mathbf{x}_a &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_a = [\hat{p}_h]. \quad (3.32)$$

As matrizes \mathbf{A}_{cc} , \mathbf{A}_{ca} , \mathbf{A}_{ac} e \mathbf{A}_{aa} relacionam-se respectivamente com as formas bilineares $a_{cc}(\cdot, \cdot)$, $a_{ca}(\cdot, \cdot)$, $a_{ac}(\cdot, \cdot)$ e $a_{aa}(\cdot, \cdot)$ definidas em (3.30). Por outro lado, o vetor \mathbf{b}_c relaciona-se com a forma linear $b_c(\cdot)$.

Conforme apresentado na Seção 2.2.1, o processo de resolução segue o isolamento de \mathbf{x}_c na primeira linha do sistema (3.31), e a substituição da expressão para \mathbf{x}_c na segunda linha deste sistema. Resolvendo (2.25), em termos apenas da variável \mathbf{x}_a , que representa o multiplicador de Lagrange \hat{p}_h , o multiplicador é conhecido globalmente, e então é possível resolver os problemas locais para obtenção do par $[\mathbf{u}_h, p_h]$ em cada elemento K .

3.3 Estudos de Convergência

Nesta seção são realizados estudos de convergência comparando os métodos híbridos estabilizados (3.22) com os estáveis (3.25) considerando meios porosos homogêneos e heterogêneos, interpolações contínuas e descontínuas para o multiplicador de Lagrange para aproximações bilineares, biquadráticas e bicúbicas.

3.3.1 Meios Porosos Homogêneos

Considerando um meio poroso homogêneo com $\mathbb{K} = \mathbb{I}$ em um domínio $\Omega = [0, 1]^d$ de dimensão d e dada uma fonte

$$f(\mathbf{x}) = d \pi^2 \prod_{i \in \{1, d\}} \sin(\pi x_i), \quad (3.33)$$

forma-se a seguinte solução analítica:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\pi \mathbb{K} \left[\cos(\pi x_j) \prod_{i \in \{1, d\}, i \neq j} \sin(\pi x_i) \right]_j, \quad j \in \{1, d\} \quad (3.34)$$

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \{1, d\}} \sin(\pi x_i), \quad (3.35)$$

Limitando a solução analítica acima ao caso bidimensional, $d = 2$, com condições de contorno de Dirichlet obtida diretamente da solução exata (3.35), estudos de convergência são realizados adotando malhas $N \times N$, com $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ elementos bilineares, biquadráticos e bicúbicos, aproximações contínuas e descontínuas para os multiplicadores de Lagrange em ambas as formulações (3.22) e (3.25), fixando $-\delta_1^D = \delta_2^D = \delta_3^D = 0.5$ [26].

3.3.1.1 Malhas Uniformes

Supondo malhas uniformes, as Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam os resultados para os casos estudados empregando, respectivamente, multiplicadores contínuos e descontínuos com ordem de aproximação l igual à ordem k , referente às variáveis de interesse: velocidade e pressão. Em outras palavras temos a mesma ordem polinomial, $l = k$, para todas as variáveis. Em geral, os resultados mostram que ambas as formulações estudadas, utilizando multiplicadores contínuos ou descontínuos, apresentam taxas ótimas de convergência para os campos de velocidade e pressão. Contudo, é possível observar que o uso de multiplicadores contínuos, tanto para a formulação em espaços de Raviart-Thomas quanto para método estabilizado, apresentam taxa subótima para o campo de velocidades adotando aproximações polinomiais de segunda ordem. O resultado subótimo para multiplicadores contínuos é observado para polinômios de ordem par e, apesar de não apresentado neste trabalho, também foi obtido para escolhas de ordem polinomial $k = 4, 6, \dots$. Além disso os erros de aproximação da variável vetorial utilizando multiplicador descontínuo são menores. Por outro lado, em todos os casos estudados, observamos que o emprego de espaços \mathcal{RT}_k mostrou-se mais preciso que o método estabilizado.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	1.349e-01	-	2.194e-02	-	9.780e-02	-	1.623e-02	-
	8	3.376e-02	2.00	5.263e-03	2.06	2.445e-02	2.00	4.059e-03	2.00
	16	8.443e-03	2.00	1.300e-03	2.02	6.112e-03	2.00	1.016e-03	2.00
	32	2.111e-03	2.00	3.241e-04	2.00	1.528e-03	2.00	2.540e-04	2.00
	64	5.278e-04	2.00	8.096e-05	2.00	3.820e-04	2.00	6.350e-05	2.00
	128	1.319e-04	2.00	2.024e-05	2.00	9.550e-05	2.00	1.587e-05	2.00
2	4	2.360e-02	-	1.979e-03	-	2.320e-02	-	1.167e-03	-
	8	5.622e-03	2.07	2.549e-04	2.96	6.260e-03	1.89	1.505e-04	2.95
	16	1.387e-03	2.02	3.211e-05	2.99	1.597e-03	1.97	1.899e-05	2.99
	32	3.456e-04	2.00	4.021e-06	3.00	4.012e-04	1.99	2.380e-06	3.00
	64	8.632e-05	2.00	5.029e-07	3.00	1.004e-04	2.00	2.977e-07	3.00
	128	2.157e-05	2.00	6.287e-08	3.00	2.512e-05	2.00	3.722e-08	3.00
3	4	2.798e-03	-	1.059e-04	-	4.172e-04	-	5.317e-05	-
	8	1.739e-04	4.01	5.828e-06	4.18	2.621e-05	3.99	3.333e-06	4.00
	16	1.084e-05	4.00	3.527e-07	4.05	1.640e-06	4.00	2.085e-07	4.00
	32	6.767e-07	4.00	2.187e-08	4.01	1.025e-07	4.00	1.303e-08	4.00
	64	4.229e-08	4.00	1.364e-09	4.00	6.407e-09	4.00	8.146e-10	4.00
	128	2.643e-09	4.00	8.521e-11	4.00	4.005e-10	4.00	5.092e-11	4.00

Tabela 3.1 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores contínuos.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	1.329e-01	-	2.143e-02	-	5.093e-02	-	1.613e-02	-
	8	3.364e-02	1.98	5.229e-03	2.03	1.276e-02	2.00	4.056e-03	1.99
	16	8.436e-03	2.00	1.298e-03	2.01	3.191e-03	2.00	1.015e-03	2.00
	32	2.111e-03	2.00	3.240e-04	2.00	7.979e-04	2.00	2.540e-04	2.00
	64	5.278e-04	2.00	8.096e-05	2.00	1.995e-04	2.00	6.350e-05	2.00
	128	1.319e-04	2.00	2.024e-05	2.00	4.987e-05	2.00	1.587e-05	2.00
2	4	2.017e-02	-	2.593e-03	-	3.375e-03	-	1.072e-03	-
	8	2.675e-03	2.91	2.710e-04	3.26	4.233e-04	3.00	1.347e-04	2.99
	16	3.392e-04	2.98	3.161e-05	3.10	5.295e-05	3.00	1.685e-05	3.00
	32	4.255e-05	2.99	3.874e-06	3.03	6.620e-06	3.00	2.107e-06	3.00
	64	5.323e-06	3.00	4.818e-07	3.01	8.276e-07	3.00	2.634e-07	3.00
	128	6.655e-07	3.00	6.015e-08	3.00	1.034e-07	3.00	3.293e-08	3.00
3	4	7.905e-04	-	8.800e-05	-	1.670e-04	-	5.308e-05	-
	8	4.371e-05	4.18	5.560e-06	3.98	1.047e-05	4.00	3.332e-06	3.99
	16	2.646e-06	4.05	3.486e-07	4.00	6.549e-07	4.00	2.085e-07	4.00
	32	1.641e-07	4.01	2.180e-08	4.00	4.094e-08	4.00	1.303e-08	4.00
	64	1.023e-08	4.00	1.363e-09	4.00	2.559e-09	4.00	8.146e-10	4.00
	128	6.392e-10	4.00	8.519e-11	4.00	1.600e-10	4.00	5.092e-11	4.00

Tabela 3.2 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores descontínuos.

Baseada na abordagem proposta e analisada por Oikawa[81], onde é apresentada uma estratégia que envolve a redução em uma ordem da aproximação do multiplicador em relação às variáveis primais para o problema de Stokes, a Tabela 3.3 apresenta resultados adotando multiplicadores contínuos e descontínuos aproximados com uma ordem a menos em relação aos campos de velocidade e pressão, ou seja, $l = k - 1$. Para tanto é necessário também reduzir, na mesma ordem, o número de pontos de integração numérica empregada para o multiplicador. Esta abordagem reduz significativamente o tempo de montagem do problema e, ainda, o número de graus de liberdade do problema global se comparado aos resultados obtidos nas Tabelas 3.1 e 3.2, onde fixamos $l = k$. Neste contexto, empregamos esta estratégia para o método estabilizado e os resultados são apresentados na Tabela 3.3. Podemos observar que para ordem $k = 1$, onde o grau para o multiplicador é $l = 0$, o multiplicador descontínuo apresenta taxa ótima para a pressão e subótima para a velocidade, influenciada pelo uso de interpolações constantes para o multiplicador. Para o multiplicador contínuo este caso não se aplica. Para $k = 2, 3$ é mostrado que taxas ótimas são obtidas para velocidade e pressão, empregando multiplicadores descontínuos, e usando multiplicadores contínuos observamos uma degradação da ordem de convergência tanto para a velocidade quanto para a pressão ao aumentarmos a ordem do polinômio.

k	N	Multiplicador Descontínuo				Multiplicador Contínuo			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	5.251e-01	-	3.258e-02	-	-	-	-	-
	8	2.547e-01	1.04	8.430e-03	1.95	-	-	-	-
	16	1.263e-01	1.01	2.126e-03	1.99	-	-	-	-
	32	6.300e-02	1.00	5.326e-04	2.00	-	-	-	-
	64	3.148e-02	1.00	1.332e-04	2.00	-	-	-	-
	128	1.574e-02	1.00	3.331e-05	2.00	-	-	-	-
2	4	1.774e-02	-	1.925e-03	-	1.142e-01	-	4.076e-03	-
	8	2.301e-03	2.95	2.449e-04	2.97	2.857e-02	2.00	4.739e-04	3.10
	16	2.903e-04	2.99	3.074e-05	2.99	7.145e-03	2.00	5.804e-05	3.03
	32	3.637e-05	3.00	3.846e-06	3.00	1.786e-03	2.00	7.217e-06	3.01
	64	4.548e-06	3.00	4.809e-07	3.00	4.466e-04	2.00	9.009e-07	3.00
	128	5.686e-07	3.00	6.012e-08	3.00	1.116e-04	2.00	1.126e-07	3.00
3	4	2.588e-03	-	1.013e-04	-	1.592e-02	-	4.916e-04	-
	8	1.625e-04	3.99	5.755e-06	4.14	4.590e-03	1.79	7.081e-05	2.80
	16	1.016e-05	4.00	3.516e-07	4.03	1.191e-03	1.95	9.204e-06	2.94
	32	6.353e-07	4.00	2.185e-08	4.01	3.006e-04	1.99	1.162e-06	2.99
	64	3.971e-08	4.00	1.364e-09	4.00	7.534e-05	2.00	1.456e-07	3.00
	128	2.482e-09	4.00	8.520e-11	4.00	1.885e-05	2.00	1.822e-08	3.00

Tabela 3.3 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelo método híbrido estabilizado adotando multiplicadores contínuos e descontínuos com um grau inferior ($l = k - 1$).

3.3.1.2 Malhas Não Uniformes

Supondo malhas não uniformes, como as apresentadas na Figura 3.1, avaliamos o comportamento das metodologias estudadas neste trabalho. Assim, sobre o domínio $\Omega = [0, 1]^2$ com fonte (3.33), munido das soluções exatas (3.34) e (3.35), geramos os resultados das Tabelas 3.4 e 3.5 adotando as mesmas configurações das simulações anteriores.

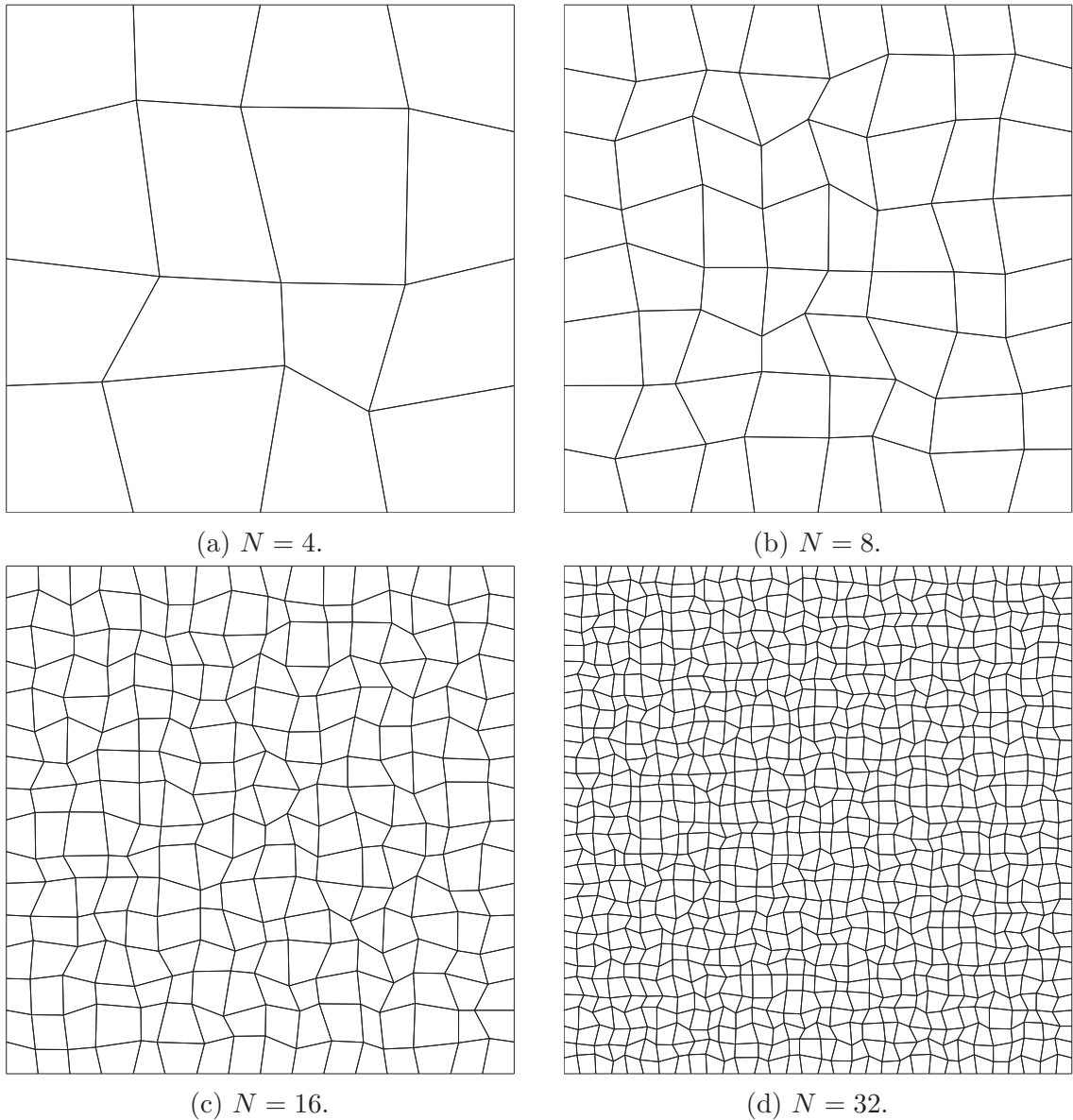


Figura 3.1 – Malhas com $N \times N$ elementos não uniformes.

Nas Tabelas 3.4-?? é possível observar que o método que adota espaços de Raviart-Thomas combinado com multiplicadores descontínuos demonstra a taxa esperada, sendo o único a apresentar taxas ótimas de convergência para todas as ordens de aproximação avaliadas. O uso de multiplicadores contínuos apresenta uma degeneração das taxas, mas apesar disso demonstrou resultados melhores do que o esperado pelos autores.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.868e-01	-	3.466e-02	-	2.591e-01	-	2.617e-02	-
	8	1.109e-01	1.37	7.097e-03	2.29	1.058e-01	1.29	5.315e-03	2.30
	16	5.841e-02	0.93	2.007e-03	1.82	6.203e-02	0.77	1.496e-03	1.83
	32	3.107e-02	0.91	5.310e-04	1.92	3.299e-02	0.91	3.935e-04	1.93
	64	1.500e-02	1.05	1.302e-04	2.03	1.596e-02	1.05	9.642e-05	2.03
	128	7.605e-03	0.98	3.288e-05	1.99	8.124e-03	0.97	2.435e-05	1.99
2	4	3.165e-02	-	2.619e-03	-	2.865e-02	-	1.562e-03	-
	8	5.683e-03	2.48	3.904e-04	2.75	9.421e-03	1.60	2.447e-04	2.67
	16	1.268e-03	2.16	5.094e-05	2.94	2.448e-03	1.94	3.205e-05	2.93
	32	2.990e-04	2.08	6.316e-06	3.01	6.087e-04	2.01	3.979e-06	3.01
	64	7.243e-05	2.05	7.994e-07	2.98	1.533e-04	1.99	5.042e-07	2.98
	128	1.787e-05	2.02	1.001e-07	3.00	3.842e-05	2.00	6.314e-08	3.00
3	4	4.586e-03	-	2.504e-04	-	2.279e-03	-	1.402e-04	-
	8	3.906e-04	3.55	1.200e-05	4.38	2.277e-04	3.32	6.427e-06	4.45
	16	3.170e-05	3.62	8.043e-07	3.90	3.612e-05	2.66	4.810e-07	3.74
	32	2.291e-06	3.79	5.194e-08	3.95	4.837e-06	2.90	3.217e-08	3.90
	64	1.726e-07	3.73	3.173e-09	4.03	5.915e-07	3.03	1.985e-09	4.02
	128	1.469e-08	3.55	6.136e-10	2.37	7.523e-08	2.98	1.254e-10	3.99

Tabela 3.4 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores contínuos sobre malhas não uniformes.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.051e-01	-	3.077e-02	-	6.464e-02	-	2.268e-02	-
	8	6.284e-02	1.71	6.951e-03	2.15	1.505e-02	2.10	4.707e-03	2.27
	16	3.084e-02	1.03	2.386e-03	1.54	3.872e-03	1.96	1.292e-03	1.87
	32	1.090e-02	1.50	6.338e-04	1.91	9.618e-04	2.01	3.332e-04	1.95
	64	5.015e-03	1.12	1.900e-04	1.74	2.406e-04	2.00	8.263e-05	2.01
	128	2.074e-03	1.27	5.935e-05	1.68	6.021e-05	2.00	2.077e-05	1.99
2	4	6.209e-02	-	3.882e-03	-	3.879e-03	-	1.425e-03	-
	8	8.747e-03	2.83	5.206e-04	2.90	5.527e-04	2.81	2.177e-04	2.71
	16	2.002e-03	2.13	7.313e-05	2.83	7.544e-05	2.87	2.856e-05	2.93
	32	5.109e-04	1.97	1.090e-05	2.75	9.761e-06	2.95	3.549e-06	3.01
	64	1.123e-04	2.19	1.553e-06	2.81	1.256e-06	2.96	4.500e-07	2.98
	128	2.640e-05	2.09	2.391e-07	2.70	1.579e-07	2.99	5.631e-08	3.00
3	4	4.639e-03	-	2.709e-04	-	3.416e-04	-	1.361e-04	-
	8	5.729e-04	3.02	1.618e-05	4.07	1.989e-05	4.10	6.224e-06	4.45
	16	7.157e-05	3.00	1.326e-06	3.61	1.340e-06	3.89	4.626e-07	3.75
	32	8.566e-06	3.06	9.095e-08	3.87	8.401e-08	3.99	3.092e-08	3.90
	64	1.001e-06	3.10	6.265e-09	3.86	5.245e-09	4.00	1.910e-09	4.02
	128	1.140e-07	3.13	7.248e-10	3.11	3.294e-10	3.99	1.205e-10	3.99

Tabela 3.5 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores descontínuos sobre malhas não uniformes.

3.3.2 Meios Porosos Heterogêneos

Validamos agora o método através da simulação de dois problemas distintos com solução exata em meios porosos heterogêneos. Primeiramente simulamos um meio poroso com isotropia em parte do domínio e anisotropia noutra parte, apresentado por Crumpton, Shaw e Ware[82]. A segunda simulação é proposta por Antonietti e Heltai[83] em um meio isotrópico com quatro subdomínios contendo permeabilidades distintas.

3.3.2.1 Meio Isotrópico/Anisotrópico

Assim como realizado por Crumpton, Shaw e Ware[82], estudamos a convergência em um meio heterogêneo partindo dos seguintes tensores de condutividade hidráulica:

$$\mathbb{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

em um domínio quadrado $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$, composto pelos subdomínios Ω_1 e Ω_2 , tal que $\Omega_2 = (-1, 1) \times (-1, 1)$ e $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2$, conforme descrito na Figura 3.2.

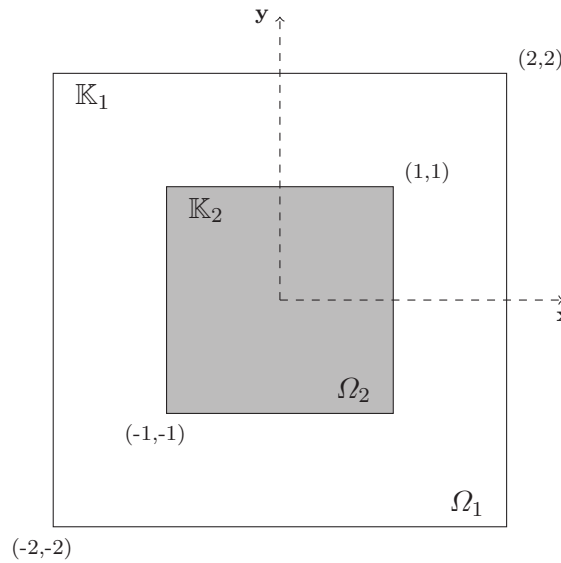


Figura 3.2 – Ilustração do domínio heterogêneo dividido em duas regiões com diferentes permeabilidades.

Assim, a solução exata para este problema apresenta no domínio Ω_1 , caracterizado pelo tensor \mathbb{K}_1 , as seguintes expressões para os campos de velocidade e pressão:

$$\mathbf{u}_1 = -2\pi \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}, \quad p_1 = 2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (3.37)$$

cuja fonte é dada por

$$f_1 = 4\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (3.38)$$

Já no subdomínio Ω_2 , cujo tensor de condutividade hidráulica está associado a \mathbb{K}_2 , temos

$$\mathbf{u}_2 = -\pi \begin{bmatrix} 2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}, \quad p_2 = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (3.39)$$

e

$$f_2 = 2\pi^2(2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) - \cos(\pi x) \cos(\pi y)). \quad (3.40)$$

A Figura 3.3 ilustra o perfil da componente x da velocidade obtida através da solução exata apresentada acima, onde é possível observar a descontinuidade do campo vetorial devido à interface de descontinuidade gerada pela diferença de condutividade hidráulica (3.36) definida em cada subdomínio.

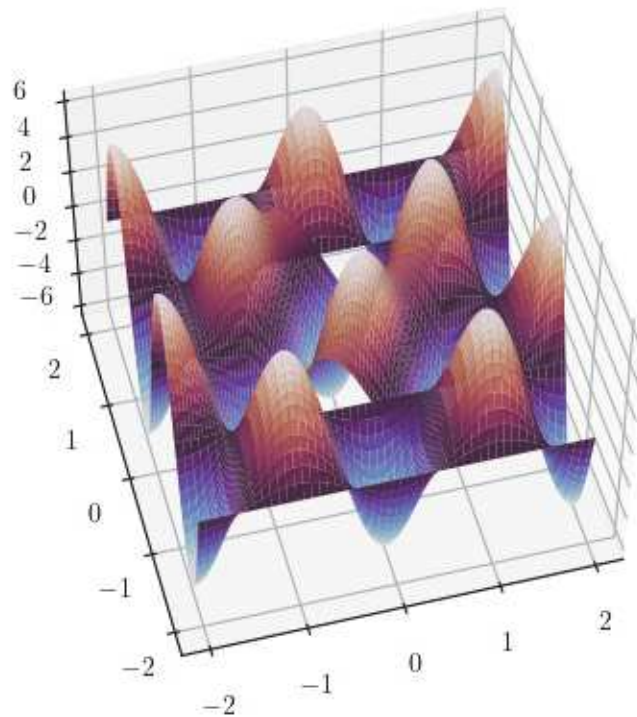


Figura 3.3 – Solução exata da primeira componente da velocidade.

Empregando a solução exata dada em (3.37) e (3.39) obtemos a condição de Dirichlet, no contorno do domínio, para realizar o estudo de convergência buscando computar os erros de aproximação e taxas de convergência para cada um dos métodos híbridos estudados. As Tabelas 3.6 e 3.7 apresentam estudos de convergência comparando métodos híbridos estáveis com estabilizados, adotando multiplicadores contínuos e descontínuos. Pode ser observado nessas tabelas que o método estabilizado sofre uma degradação das taxas de convergência para a velocidade quando aplicado à simulação de meios heterogêneos. As taxas subótimas do campo de velocidade observadas por polinômios de grau par em meios homogêneos é evidenciada aqui também e estende-se às interpolações de grau 1 para o método estabilizado. Novamente adotar espaços \mathcal{RT}_k mostra-se mais preciso que optar pelo método estabilizado e o campo de pressão converge com taxa ótima em todas as simulações efetuadas com ambos os métodos híbridos. A Tabela 3.8 repete o estudo para a escolha $l = k - 1$, apresentada na seção anterior, para um meio homogêneo. Os resultados são similares aos apresentados na seção anterior sendo neste caso heterogêneo, evidenciada uma degradação da taxa de convergência das ordens 2 e 3 quando são empregados multiplicadores descontínuos.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	3.520e-01	-	2.267e-02	-	1.745e-01	-	1.632e-02	-
	8	1.286e-01	1.45	5.406e-03	2.07	4.367e-02	2.00	4.066e-03	2.01
	16	5.673e-02	1.18	1.334e-03	2.02	1.092e-02	2.00	1.016e-03	2.00
	32	2.733e-02	1.05	3.323e-04	2.00	2.731e-03	2.00	2.540e-04	2.00
	64	1.354e-02	1.01	8.301e-05	2.00	6.827e-04	2.00	6.350e-05	2.00
	128	6.751e-03	1.00	2.075e-05	2.00	1.707e-04	2.00	1.587e-05	2.00
2	4	4.507e-02	-	1.980e-03	-	4.600e-02	-	1.176e-03	-
	8	1.039e-02	2.12	2.521e-04	2.97	1.255e-02	1.87	1.509e-04	2.96
	16	2.539e-03	2.03	3.163e-05	2.99	3.220e-03	1.96	1.900e-05	2.99
	32	6.312e-04	2.01	3.957e-06	3.00	8.105e-04	1.99	2.379e-06	3.00
	64	1.576e-04	2.00	4.947e-07	3.00	2.030e-04	2.00	2.976e-07	3.00
	128	3.938e-05	2.00	6.185e-08	3.00	5.077e-05	2.00	3.720e-08	3.00
3	4	3.224e-03	-	1.018e-04	-	7.525e-04	-	5.327e-05	-
	8	1.956e-04	4.04	5.856e-06	4.12	4.702e-05	4.00	3.335e-06	4.00
	16	1.213e-05	4.01	3.588e-07	4.03	2.937e-06	4.00	2.085e-07	4.00
	32	7.562e-07	4.00	2.232e-08	4.01	1.835e-07	4.00	1.303e-08	4.00
	64	4.724e-08	4.00	1.393e-09	4.00	1.146e-08	4.00	8.146e-10	4.00
	128	2.953e-09	4.00	8.726e-11	4.00	7.164e-10	4.00	5.091e-11	4.00

Tabela 3.6 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores contínuos.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	4.495e-01	-	2.902e-02	-	1.149e-01	-	1.617e-02	-
	8	2.072e-01	1.12	7.396e-03	1.97	2.867e-02	2.00	4.059e-03	1.99
	16	1.015e-01	1.03	1.857e-03	1.99	7.153e-03	2.00	1.016e-03	2.00
	32	5.052e-02	1.01	4.647e-04	2.00	1.786e-03	2.00	2.540e-04	2.00
	64	2.523e-02	1.00	1.162e-04	2.00	4.463e-04	2.00	6.350e-05	2.00
	128	1.261e-02	1.00	2.905e-05	2.00	1.115e-04	2.00	1.587e-05	2.00
2	4	1.046e-01	-	3.902e-03	-	7.585e-03	-	1.073e-03	-
	8	2.236e-02	2.23	4.736e-04	3.04	9.491e-04	3.00	1.347e-04	2.99
	16	4.840e-03	2.21	5.483e-05	3.11	1.186e-04	3.00	1.685e-05	3.00
	32	9.986e-04	2.28	6.062e-06	3.18	1.481e-05	3.00	2.107e-06	3.00
	64	2.026e-04	2.30	6.755e-07	3.17	1.851e-06	3.00	2.634e-07	3.00
	128	4.098e-05	2.31	7.703e-08	3.13	2.314e-07	3.00	3.293e-08	3.00
3	4	3.535e-03	-	1.080e-04	-	3.752e-04	-	5.311e-05	-
	8	2.463e-04	3.84	6.062e-06	4.16	2.347e-05	4.00	3.332e-06	3.99
	16	1.938e-05	3.67	3.662e-07	4.05	1.466e-06	4.00	2.085e-07	4.00
	32	1.609e-06	3.59	2.257e-08	4.02	9.161e-08	4.00	1.303e-08	4.00
	64	1.375e-07	3.55	1.401e-09	4.01	5.724e-09	4.00	8.146e-10	4.00
	128	1.194e-08	3.53	8.752e-11	4.00	3.577e-10	4.00	5.091e-11	4.00

Tabela 3.7 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores descontínuos.

k	N	Multiplicador Descontínuo				Multiplicador Contínuo			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Ordem
1	4	9.532e-01	-	3.281e-02	-	-	-	-	-
	8	4.535e-01	1.07	8.432e-03	1.96	-	-	-	-
	16	2.236e-01	1.02	2.123e-03	1.99	-	-	-	-
	32	1.114e-01	1.01	5.316e-04	2.00	-	-	-	-
	64	5.564e-02	1.00	1.330e-04	2.00	-	-	-	-
	128	2.781e-02	1.00	3.324e-05	2.00	-	-	-	-
2	4	3.445e-02	-	2.007e-03	-	2.344e-01	-	4.016e-03	-
	8	4.625e-03	2.90	2.524e-04	2.99	5.913e-02	1.99	4.720e-04	3.09
	16	6.259e-04	2.89	3.153e-05	3.00	1.482e-02	2.00	5.802e-05	3.02
	32	8.803e-05	2.83	3.935e-06	3.00	3.706e-03	2.00	7.221e-06	3.01
	64	1.308e-05	2.75	4.915e-07	3.00	9.267e-04	2.00	9.016e-07	3.00
	128	2.056e-06	2.67	6.140e-08	3.00	2.317e-04	2.00	1.127e-07	3.00
3	4	3.019e-03	-	9.966e-05	-	3.246e-02	-	5.369e-04	-
	8	1.880e-04	4.01	5.835e-06	4.09	9.667e-03	1.75	7.822e-05	2.78
	16	1.192e-05	3.98	3.587e-07	4.02	2.536e-03	1.93	1.018e-05	2.94
	32	7.707e-07	3.95	2.232e-08	4.01	6.421e-04	1.98	1.285e-06	2.99
	64	5.130e-08	3.91	1.394e-09	4.00	1.610e-04	2.00	1.610e-07	3.00
	128	3.566e-09	3.85	8.727e-11	4.00	4.029e-05	2.00	2.014e-08	3.00

Tabela 3.8 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelo método híbrido estabilizado adotando multiplicadores contínuos e descontínuos com um grau inferior ($l = k - 1$).

3.3.2.2 Meio Isotrópico com Permeabilidade Variável

A solução exata adotada nesta seção foi proposta em Antonietti e Heltai[83] e visa simular um meio poroso com heterogeneidade entre diferentes regiões do domínio. Tomando um domínio $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ composto de quatro subdomínios

$$\Omega = \bigcup_{i \in [1,4]} \Omega_i, \quad (3.41)$$

tal que $\Omega_1 = (-1, 0) \times (-1, 0)$, $\Omega_2 = (0, 1) \times (-1, 0)$, $\Omega_3 = (0, 1) \times (0, 1)$ e $\Omega_4 = (-1, 0) \times (0, 1)$ com suas respectivas condutividades hidráulicas \mathbb{K}_i , definidas da forma

$$\mathbb{K}_i = 10^{i-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e com condições de contorno de Neumann e Dirichlet, $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$, $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$, conforme ilustrado na Figura 3.4.

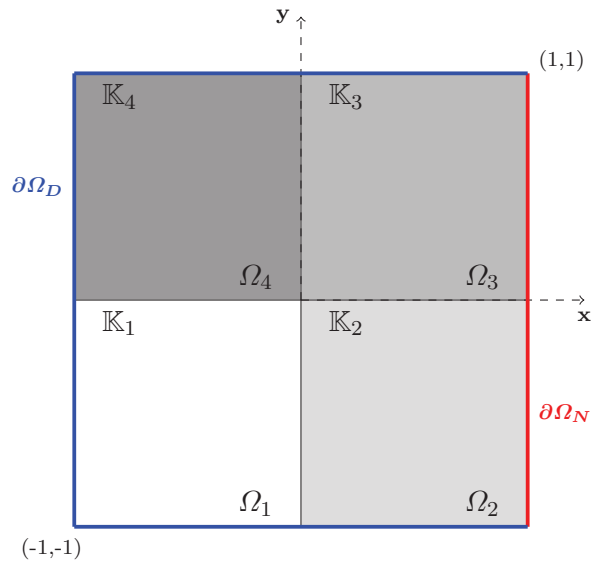


Figura 3.4 – Ilustração do domínio heterogêneo dividido em quatro regiões com diferentes permeabilidades.

Neste contexto, a solução exata é dada por

$$\mathbf{u} = 10^{i-1} \pi \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{bmatrix}, \quad p = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \quad (3.43)$$

com fonte

$$f = 2\pi^2 10^{i-1} \cos(\pi x) \cos(\pi y), \quad (3.44)$$

onde i é o índice do subdomínio como apresentado na Figura 3.4 que ilustra a variação da permeabilidade, sendo homogênea por partes.

A Figura 3.5 ilustra a descontinuidade do campo vetorial por meio da solução exata (3.43) da componente x da velocidade \mathbf{u} . A componente y apresenta comportamento similar, observada a forma senoidal de ambas as componentes da variável vetorial.

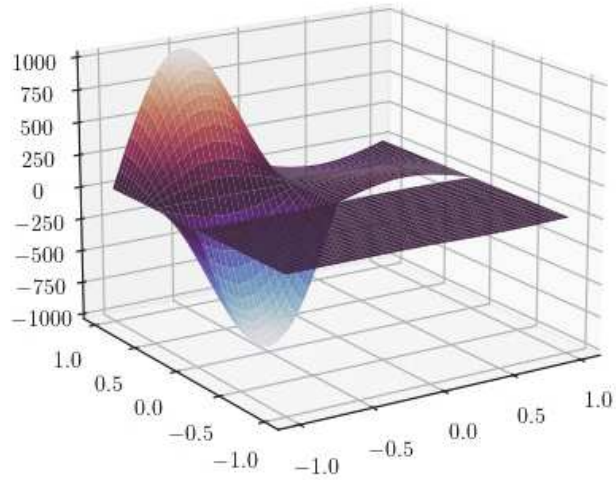


Figura 3.5 – Solução exata da primeira componente da velocidade.

Podemos observar nas Tabelas 3.9-3.11 que as taxas de convergência obtidas simulando o campo heterogêneo descrito na Figura 3.4 são similares às obtidas na seção anterior, onde foi adotado o meio poroso heterogêneo apresentado na Figura 3.2. Em particular, os resultados da formulação estabilizada para meios heterogêneos estudados nesta Seção 3.3.2 demonstram certa limitação do método híbrido estabilizado em tratar problemas com descontinuidades apresentando taxas subótimas de convergência para a velocidade. Conforme ressaltado por Badia e Codina[18], devido a suposições de regularidade assumidas por Correa e Loula[26], as estimativas de erro (3.18)-(3.19) não contemplam certas descontinuidades no campo de permeabilidade e, por isso, não é garantida a preservação dessas taxas em meios heterogêneos.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	5.420e+03	-	1.936e-01	-	3.947e+03	-	1.338e-01	-
	8	1.353e+03	2.00	4.382e-02	2.14	9.830e+02	2.01	3.245e-02	2.04
	16	3.391e+02	2.00	1.052e-02	2.06	2.457e+02	2.00	8.118e-03	2.00
	32	8.485e+01	2.00	2.600e-03	2.02	6.142e+01	2.00	2.031e-03	2.00
	64	2.122e+01	2.00	6.482e-04	2.00	1.536e+01	2.00	5.079e-04	2.00
	128	5.304e+00	2.00	1.619e-04	2.00	3.839e+00	2.00	1.270e-04	2.00
2	4	1.030e+03	-	2.791e-02	-	7.286e+02	-	1.738e-02	-
	8	1.956e+02	2.40	3.865e-03	2.85	2.332e+02	1.64	2.335e-03	2.90
	16	4.449e+01	2.14	5.002e-04	2.95	6.291e+01	1.89	3.011e-04	2.96
	32	1.088e+01	2.03	6.309e-05	2.99	1.605e+01	1.97	3.799e-05	2.99
	64	2.706e+00	2.01	7.904e-06	3.00	4.033e+00	1.99	4.760e-06	3.00
	128	6.756e-01	2.00	9.886e-07	3.00	1.009e+00	2.00	5.954e-07	3.00
3	4	3.015e+02	-	3.774e-03	-	6.542e+01	-	1.687e-03	-
	8	2.597e+01	3.54	2.025e-04	4.22	4.194e+00	3.96	1.063e-04	3.99
	16	1.681e+00	3.95	1.154e-05	4.13	2.634e-01	3.99	6.666e-06	4.00
	32	1.068e-01	3.98	7.043e-07	4.03	1.648e-02	4.00	4.170e-07	4.00
	64	6.737e-03	3.99	4.373e-08	4.01	1.030e-03	4.00	2.606e-08	4.00
	128	4.232e-04	3.99	2.741e-09	4.00	6.440e-05	4.00	1.629e-09	4.00

Tabela 3.9 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores contínuos.

k	N	$[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k - p_k$				$\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k - p_k$			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	5.064e+03	-	1.808e-01	-	2.056e+03	-	1.262e-01	-
	8	1.334e+03	1.92	4.281e-02	2.08	5.169e+02	1.99	3.226e-02	1.97
	16	3.380e+02	1.98	1.045e-02	2.03	1.289e+02	2.00	8.112e-03	1.99
	32	8.478e+01	2.00	2.596e-03	2.01	3.216e+01	2.00	2.031e-03	2.00
	64	2.121e+01	2.00	6.479e-04	2.00	8.030e+00	2.00	5.079e-04	2.00
	128	5.304e+00	2.00	1.619e-04	2.00	2.006e+00	2.00	1.270e-04	2.00
2	4	1.460e+03	-	4.600e-02	-	2.709e+02	-	1.682e-02	-
	8	3.230e+02	2.18	6.067e-03	2.92	3.412e+01	2.99	2.144e-03	2.97
	16	5.704e+01	2.50	6.499e-04	3.22	4.267e+00	3.00	2.693e-04	2.99
	32	9.773e+00	2.54	7.143e-05	3.19	5.330e-01	3.00	3.371e-05	3.00
	64	1.686e+00	2.53	8.299e-06	3.11	6.659e-02	3.00	4.214e-06	3.00
	128	2.938e-01	2.52	9.997e-07	3.05	8.321e-03	3.00	5.268e-07	3.00
3	4	2.595e+02	-	3.475e-03	-	2.683e+01	-	1.670e-03	-
	8	2.301e+01	3.50	2.059e-04	4.08	1.691e+00	3.99	1.062e-04	3.98
	16	2.911e+00	2.98	1.305e-05	3.98	1.056e-01	4.00	6.664e-06	3.99
	32	3.651e-01	3.00	8.072e-07	4.02	6.595e-03	4.00	4.169e-07	4.00
	64	4.552e-02	3.00	5.015e-08	4.01	4.119e-04	4.00	2.606e-08	4.00
	128	5.683e-03	3.00	3.140e-09	4.00	2.573e-05	4.00	1.629e-09	4.00

Tabela 3.10 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelos métodos híbridos com espaços de Lagrange, $[\mathbb{Q}_k]^2 \times \mathbb{Q}_k$, e com espaços de Raviart-Thomas, $\mathcal{RT}_k \times \mathbb{Q}_k$, adotando multiplicadores descontínuos.

k	N	Multiplicador Descontínuo				Multiplicador Contínuo			
		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	1.123e+04	-	2.322e-01	-	-	-	-	-
	8	5.244e+03	1.10	6.314e-02	1.88	-	-	-	-
	16	2.555e+03	1.04	1.618e-02	1.96	-	-	-	-
	32	1.269e+03	1.01	4.071e-03	1.99	-	-	-	-
	64	6.331e+02	1.00	1.019e-03	2.00	-	-	-	-
	128	3.164e+02	1.00	2.550e-04	2.00	-	-	-	-
2	4	1.312e+03	-	3.043e-02	-	4.555e+03	-	7.790e-02	-
	8	2.047e+02	2.68	3.964e-03	2.94	1.147e+03	1.99	8.100e-03	3.27
	16	2.971e+01	2.78	4.977e-04	2.99	2.872e+02	2.00	9.461e-04	3.10
	32	4.433e+00	2.74	6.201e-05	3.00	7.181e+01	2.00	1.160e-04	3.03
	64	6.955e-01	2.67	7.727e-06	3.00	1.795e+01	2.00	1.443e-05	3.01
	128	1.142e-01	2.61	9.640e-07	3.00	4.488e+00	2.00	1.802e-06	3.00
3	4	3.636e+02	-	4.130e-03	-	4.616e+02	-	5.760e-03	-
	8	2.541e+01	3.84	1.987e-04	4.38	1.602e+02	1.53	9.911e-04	2.54
	16	1.613e+00	3.98	1.147e-05	4.11	4.613e+01	1.80	1.418e-04	2.81
	32	1.015e-01	3.99	7.028e-07	4.03	1.197e+01	1.95	1.841e-05	2.94
	64	6.364e-03	4.00	4.370e-08	4.01	3.022e+00	1.99	2.324e-06	2.99
	128	3.984e-04	4.00	2.741e-09	4.00	7.572e-01	2.00	2.913e-07	3.00

Tabela 3.11 – Taxas de convergência e precisão das aproximações \mathbf{u}_h e p_h obtidas pelo método híbrido estabilizado adotando multiplicadores contínuos e descontínuos com um grau inferior ($l = k - 1$).

4 Métodos Híbridos para o Problema do Transporte

Neste capítulo, como feito no capítulo anterior, estudamos formulações de elementos finitos híbridos estáveis e estabilizados, porém objetivando a simulação de problemas de difusão-convecção onde os efeitos de convecção dominante são estabilizados por meio de um esquema *upwind* proposto por Egger e Schöberl[1] combinado com um esquema implícito de segunda ordem para a integração temporal. Estudos de convergência empregando multiplicadores contínuos e descontínuos em regime estacionário e transiente são apresentados a fim de comparar as taxas de convergência dos métodos híbridos estáveis e estabilizados e destacar a capacidade dessas formulações em estabilizar oscilações espúrias características de problemas predominantemente convectivos.

4.1 Problema no Nível do Elemento e Formulação Mista Híbridizada

Como feito no capítulo anterior definiremos o problema no nível do elemento para que as formulações utilizadas sejam apresentadas em sequência. Assim, partindo do sistema misto para o problema do transporte (2.9), escrevemos para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$

Dados \mathbb{D} , ϕ , \mathbf{u} e g , encontrar $\boldsymbol{\sigma}$ e c tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{D}\nabla c &= 0 && \text{em } K \times (0, T], \\ \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= g && \text{em } K \times (0, T], \\ (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}c) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \times (0, T], \\ c(0, \mathbf{x}) &= c_0(\mathbf{x}) && \text{em } K. \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujeito às condições de transmissão ou continuidade sobre as arestas dos elementos

$$\begin{aligned} [[\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}c]] &= 0, && \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \times (0, T], \\ [[c]] &= 0, && \forall e \in \mathcal{E}_h^0 \times (0, T]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Assim, tomando as equações no nível elemento (4.1) multiplicadas por suas respectivas funções peso, nos espaços $H(\operatorname{div}, K)$ e $L^2(K)$, integrando por partes o termo do gradiente da concentração, obtendo o seguinte problema variacional semidiscreto em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$:

Encontrar o par $[\boldsymbol{\sigma}, c] \in H(\operatorname{div}, K) \times H^1(K) \times (0, T]$, tal que

$$\begin{aligned} \int_K \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_K c \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds &= 0, && \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, K) \\ \int_K \phi \frac{\partial c}{\partial t} q \, d\mathbf{x} + \int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} q \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u} \cdot \nabla c) q \, d\mathbf{x} &= \int_K g q \, d\mathbf{x}, && \forall q \in L^2(K), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal à cada elemento K . Suplementado pelas condições de contorno e iniciais citadas em (4.1).

Definimos os seguintes conjuntos de variáveis referentes ao problema do transporte:

$$\mathbf{X}_h^\mathcal{T} = [\boldsymbol{\sigma}_h, c_h, \hat{c}_h] \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_h = [\mathbf{v}_h, q_h, \hat{q}_h]$$

tal que $\mathbf{X}_h^\mathcal{T} \in \mathbf{V}_h^k$, um espaço suficientemente regular. Nas seções a seguir faremos escolhas adequadas para empregá-lo no problema do transporte.

A concentração não é conhecida no nível do elemento, fazendo-se necessário introduzir um multiplicador de Lagrange definido como $\hat{c}_h = c|_e$ sobre cada aresta $e \in \mathcal{E}_h$, com o intuito de impor as condições de transmissão entre os diferentes elementos. A partir dessas definições escrevemos os problemas denominados local e global, referentes ao problema em cada elemento e ao problema sobre o esqueleto da malha de elementos finitos.

Encontrar $\mathbf{X}_h^\mathcal{T} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que $\forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k$, satisfaça

$$\int_K \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K c_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \hat{c}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0, \quad (4.4)$$

$$\int_K \phi \frac{\partial c_h}{\partial t} q_h \, d\mathbf{x} + \int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h q_h \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{u} \cdot \nabla c_h) q_h \, d\mathbf{x} = \int_K g q_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{q}_h (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0, \quad (4.6)$$

onde (4.4) e (4.5) compõem o **problema local** e (4.6) o **problema global**, que é caracterizado pela imposição fraca da continuidade do fluxo difusivo nas arestas dos elementos.

Assim como feito para o problema de Darcy, para fins de organização do trabalho, introduzimos uma forma bilinear referente à parte elíptica do problema do transporte. Assim, coletamos os termos associados a discretização espacial dos problemas local (4.4)-(4.5) e global (4.6), para definir

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^\mathcal{T}, \mathbf{Y}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_K c_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \hat{c}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds \right. \\ \left. + \int_{\partial K} \hat{q}_h (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}) \, ds - \int_K q_h \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir da definição desta forma, o próximo passo é apresentar as abordagens numéricas para os termos convectivo e transiente do problema do transporte para, assim, introduzir as formulações estáveis e estabilizadas estudadas neste trabalho.

4.2 Estabilização dos Efeitos Convectivos

Antes de avançarmos para a apresentação das formulações híbridas abordamos propostas para estabilização de oscilações espúrias características dos efeitos convectivos presentes nesse tipo de equações. Utilizamos neste trabalho um esquema *upwind*, adaptado

de formulações de Galerkin descontínuo para formulações híbridas de elementos finitos por Egger e Schöberl[1].

A partir de abordagens *upwind* para métodos DG aplicadas a problemas hiperbólicos [84, 85, 86], Egger e Schöberl[1] fizeram uma adaptação para os métodos híbridos por meio da inserção de um termo avaliado no contorno dos elementos, que pode ser definido como

$$\int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \{\hat{c}_h/c_h\} (\hat{q}_h - q_h) ds, \quad \forall [\hat{q}_h, q_h] \in \mathcal{M}_h^m \times \mathcal{Q}_h^l \quad (4.8)$$

onde

$$\{\hat{c}_h/c_h\} = \begin{cases} \hat{c}_h, & e \subset \partial K^{\text{in}} \\ c_h, & e \subset \partial K^{\text{out}} \end{cases},$$

sendo $\partial K^{\text{out}} = \{x \in \partial K : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0\}$ e $\partial K^{\text{in}} = \partial K \setminus \partial K^{\text{out}}$ as regiões sobre o contorno onde há fluxo de saída e o fluxo de entrada (ou ausência de fluxo) respectivamente. A Figura 4.1 ilustra a proposta para um fluido escoando entre dois elementos vizinhos.

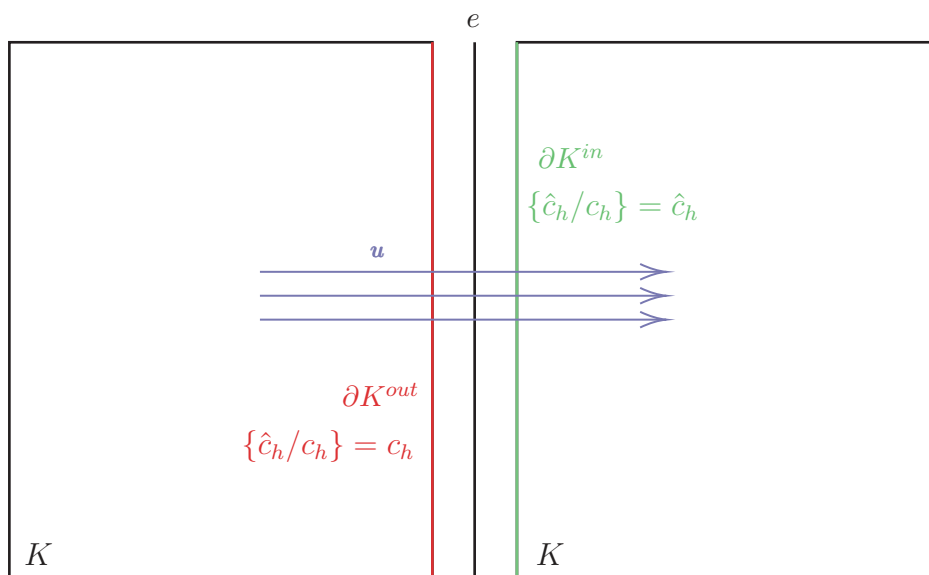


Figura 4.1 – Ilustração da estabilização *upwind* proposta por Egger e Schöberl[1].

A estabilização dos efeitos convectivos ocorrida pela inserção do termo (4.8) decorre de uma manipulação dos termos que surgem no contorno dos elementos a partir da integração por partes do termo convectivo. Assim, integrando por partes o termo convectivo e aplicando a definição (4.8), escrevemos a forma bilinear referente à convecção presente na equação do transporte junto de sua devida estabilização:

$$\mathcal{B}_{conv}(\mathbf{X}_h^T, \mathbf{Y}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K c_h \mathbf{u} \cdot \nabla q_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \{\hat{c}_h/c_h\} (\hat{q}_h - q_h) ds \right]. \quad (4.9)$$

Outras propostas de estabilização *upwind* estudadas para o método híbrido são apresentadas em [53, 52].

4.3 Formulações Híbridas Semidiscretas

Nesta seção, apresentamos formulações mistas híbridas estáveis e estabilizadas para o problema do transporte (2.9) utilizando os espaços de funções quebradas introduzidos na Seção 2.2.

4.3.1 Formulação Híbrida Estabilizada

Nos baseamos nos termos de mínimos quadrados (3.10), (3.13) e (3.17) para o problema de Darcy a fim de compatibilizar e estabilizar também o problema local do transporte (4.1) utilizando os espaços (2.16)-(2.17). Assim, partindo das mesmas premissas assumidas para o problema de Darcy, escrevemos o termo de mínimos quadrados relacionado à equação (4.3) como

$$\delta_1^{\mathcal{T}} \int_K \mathbb{D} (\mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h + \nabla c_h) \cdot (\mathbb{D}^{-1} \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x}, \quad (4.10)$$

oriundo da primeira linha do sistema (4.1), que relaciona o gradiente da concentração com o fluxo difusivo. Esse termo de estabilização é similar a (3.10) a menos da mudança nas variáveis de interesse e no tensor que acompanha a variável vetorial. Sua inclusão também visa compatibilizar os espaços de aproximação.

Já o segundo termo necessita de uma adaptação maior se comparado a estabilização referente à conservação de massa do problema de Darcy (3.13), pois a segunda equação do sistema (4.1) apresenta a inclusão de termos transiente e convectivo, dada essas considerações, temos:

$$\delta_2^{\mathcal{T}} \int_K |\mathbb{D}^{-1}| \left(\phi \frac{\partial c_h}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla c_h - g \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \quad (4.11)$$

Assumindo a irrotacionalidade do fluxo difusivo, derivamos o terceiro e último termo de estabilização, análogo ao termo de resíduos de mínimos quadrados (3.17) proposto por Correa e Loula[26],

$$\delta_3^{\mathcal{T}} \int_K |\mathbb{D}| \operatorname{rot}(\mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \operatorname{rot}(\mathbb{D}^{-1} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \quad (4.12)$$

Com os termos de resíduos de mínimos quadrados definidos em (4.10), (4.11) e (4.12) introduzimos a forma bilinear referente às estabilizações do problema do transporte

$$\mathcal{B}_{stab}(\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\delta_1^{\mathcal{T}} \int_K \mathbb{D} (\mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h + \nabla c_h) \cdot (\mathbb{D}^{-1} \mathbf{v}_h + \nabla q_h) \, d\mathbf{x} \right. \quad (4.13)$$

$$\left. + \delta_2^{\mathcal{T}} \int_K |\mathbb{D}^{-1}| \left(\phi \frac{\partial c_h}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla c_h \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right. \quad (4.14)$$

$$\left. + \delta_3^{\mathcal{T}} \int_K |\mathbb{D}| \operatorname{rot}(\mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \operatorname{rot}(\mathbb{D}^{-1} \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \right] \quad (4.15)$$

e o termo a ser inserido na fonte do problema

$$\mathcal{G}_{stab}(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\delta_2^{\mathcal{T}} \int_K |\mathbb{D}^{-1}| g \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right] \quad (4.16)$$

Para este caso, o conjunto de espaços de aproximação são dados por

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^l.$$

Aqui, definiremos a ordem do polinômio do multiplicador $l = k$, visando deixar a apresentação dos estudo Através das formas bilineares definidas, apresentamos o método misto híbrido estabilizado semidiscreto para o problema do transporte.

Dado \mathbf{u}_h encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que

$$- \int_K \phi \frac{\partial c_h}{\partial t} q_h \, d\mathbf{x} + B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = G(\mathbf{Y}_h) \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k, \quad (4.17)$$

onde

$$B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{conv}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{stab}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h). \quad (4.18)$$

E a função linear $G(\cdot)$ é definida como o termo fonte g multiplicado pela função peso q_h mais a estabilização necessária na fonte, isto é

$$G(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K g q_h \, d\mathbf{x} + \mathcal{G}_{stab}(\mathbf{Y}_h). \quad (4.19)$$

Sujeito às condições iniciais e de contorno presentes em (4.1). Apesar de não na literatura análise numérica para a formulação (4.17), que seja do nosso conhecimento, de acordo com os resultados apresentados ao final deste capítulo é possível observar taxas ótimas de convergência para o campo de concentração, mesmo em casos de convecção dominante.

4.3.2 Formulação Híbrida Estável

Escolhendo agora $\sigma_h \in \mathcal{V}_h^{\mathcal{R}\mathcal{T}^k}$ redefinimos o espaço referente às variáveis de aproximação

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^{\mathcal{R}\mathcal{T}^k} \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^l.$$

A formulação híbrida estável para o problema do transporte toma a seguinte forma:

Dado \mathbf{u}_h encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que

$$- \int_K \phi \frac{\partial c_h}{\partial t} q_h \, d\mathbf{x} + B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = G(\mathbf{Y}_h) \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k, \quad (4.20)$$

onde

$$B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{conv}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) \quad (4.21)$$

e

$$G(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K g q_h \, d\mathbf{x}. \quad (4.22)$$

Análogo ao ocorrido no capítulo anterior para o problema de Darcy, a escolha dos espaços de Raviart-Thomas para a variável vetorial, neste caso $\boldsymbol{\sigma}_h$, torna a formulação estável sem a necessidade da adição de resíduos de mínimos quadrados (4.13)-(4.16), quando empregados aproximações descontínuas para o espaço do multiplicador. Por outro lado, espaços contínuos para o multiplicador neste caso não apresentam estabilidade comprovada na literatura. Porém, os resultados numéricos, que podem ser vistos na Seção 4.6, mostram que para os estudos realizados esta abordagem apresenta resultados satisfatórios mas com decréscimo da ordem de convergência da variável $\boldsymbol{\sigma}$ se comparado ao caso que adota multiplicadores descontínuos.

4.4 Discretização Temporal

Finalizamos a modelagem numérica para o problema do transporte aplicando o método de diferenças finitas para a discretização do termo temporal. Seja então o passo de tempo $\Delta t > 0$, tal que $N = T/\Delta t$, o instante de tempo $t_n = n\Delta t$ com $n = 0, 1, 2, \dots, N$ e o intervalo de tempo $I_h = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$ que define uma partição de $I = (0, T]$. O método de Euler implícito para a derivada temporal da aproximação c_h pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\phi \frac{\partial c_h}{\partial t} = \phi \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t}, \quad (4.23)$$

onde $c_h^n = c_h(t_n)$, isto é, a concentração avaliada no instante n .

Dessa forma reescrevemos as variáveis de interesse de modo a contemplar a discretização temporal implícita:

$$\mathbf{X}_h^{\mathcal{J},n+1} = [\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, c_h^{n+1}, \hat{c}_h^{n+1}].$$

Logo, dada a função peso q_h , podemos escrever a formulação variacional para expressão obtida:

$$\int_K \frac{\phi}{\Delta t} (c_h^{n+1} - c_h^n) q_h \, d\mathbf{x}. \quad (4.24)$$

Essa nova expressão nos leva à seguinte formulação discreta no tempo e espaço

Dado \mathbf{u}_h , encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{J},n+1} \in \mathbf{V}_h^k$, para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, tal que

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \frac{\phi}{\Delta t} (c_h^{n+1} - c_h^n) q_h \, d\mathbf{x} \right] + B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{J},n+1}, \mathbf{Y}_h) = G(\mathbf{Y}_h) \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k, \quad (4.25)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ pode assumir as definições (4.18) e (4.21), assim como $G(\cdot)$ pode assumir (4.19) e (4.22) acompanhando as respectivas escolhas de $B(\cdot, \cdot)$.

4.4.1 Método de Segunda Ordem no Tempo

Para a discretização temporal acompanhar a ordem de convergência da aproximação usualmente adota-se o tamanho do passo de tempo $\Delta t = h^{k+1}$ em um algoritmo de *Euler* implícito, onde h é parâmetro de malha e k é o grau do polinômio. Porém, ao adotar esse valor para Δt atingimos um tempo de processamento muito alto devido à necessidade de se realizar um número muito maior de resoluções no tempo para atingir o tempo final da simulação.

Assim, propomos um esquema de segunda ordem baseado no método de Crank-Nicolson [87], que sugere uma escolha do passo temporal visando manter a convergência espacial da ordem de $\Delta t = h^{(k+1)/2}$.

Assim, tomando a seguinte expansão em série de Taylor em relação a variável temporal e truncando ambos no termo de segunda ordem, obtemos

$$\begin{aligned} c_h(t_n) &= c_h(t_n + \frac{\Delta t}{2}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{dc_h}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + \tau_{n-}, \\ c_h(t_n + \Delta t) &= c_h(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} \frac{dc_h}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + \tau_{n+}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $\tau_{n\pm} = \frac{(\pm \frac{\Delta t}{2})^2}{2!} \frac{d^2 c_h}{dt^2}(\xi)$, $t_n < \xi < t_n + \Delta t$. Somando as expansões, obtemos:

$$c_h(t_n) + c_h(t_n + \Delta t) = 2c_h\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) + \tau_n(\Delta t^2), \quad (4.27)$$

ou alternativamente

$$c_h\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{c_h(t_n) + c_h(t_n + \Delta t)}{2} + \tau_n(\Delta t^2). \quad (4.28)$$

Dessa forma, podemos escrever a seguinte aproximação de segunda ordem, $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, para a concentração no ponto médio do intervalo de tempo $[t_n, t_n + 1]$, denominada $c_h^{n+\frac{1}{2}}$, como segue

$$c_h^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{c_h^n + c_h^{n+1}}{2}. \quad (4.29)$$

Reescrevendo a discretização temporal (4.25) adotando um passo de tempo intermediário, podemos recuperar o método de Crank-Nicolson,

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \frac{2\phi}{\Delta t} \left(c_h^{n+\frac{1}{2}} - c_h^n \right) q_h \, d\mathbf{x} \right] + B \left(\mathbf{X}_h^{\mathcal{J}, n+\frac{1}{2}}, \mathbf{Y}_h \right) = G(\mathbf{Y}_h). \quad (4.30)$$

Estendendo o resultado (4.29) para $\mathbf{X}_h^{\mathcal{J}}$ e substituindo na equação (4.30):

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \frac{\phi}{\Delta t} \left(c_h^{n+1} - c_h^n \right) q_h \, d\mathbf{x} \right] + B \left(\frac{\mathbf{X}_h^{\mathcal{J}, n} + \mathbf{X}_h^{\mathcal{J}, n+1}}{2}, \mathbf{Y}_h \right) = G(\mathbf{Y}_h). \quad (4.31)$$

Portanto, o algoritmo de resolução no tempo se dá em duas partes: dada a solução aproximada c_h^n , resolvemos o sistema de equações (4.30) para obter $c_h^{n+\frac{1}{2}}$ e por fim recuperamos c_h^{n+1} por meio da relação (4.29), que isolando c_h^{n+1} vem

$$c_h^{n+1} = 2c_h^{n+\frac{1}{2}} - c_h^n. \quad (4.32)$$

A principal vantagem dessa abordagem, além de ser uma aproximação de segunda ordem no tempo, é não depender de um chute inicial para o multiplicador de Lagrange, como seria o caso de adotar a discretização temporal clássica de Crank-Nicolson (4.31) ou ainda, outras metodologias de aproximação temporal de alta ordem como por exemplo os esquemas BDF (*Backward Differentiation Formula*).

4.5 Estratégia de Resolução

Para aplicação da condensação estática, definida na Seção 2.2.1, escrevemos primeiramente as formas bilineares referentes aos termos presentes no problema (4.21):

$$\begin{aligned} a_{cc}([\boldsymbol{\sigma}_h, c_h], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_K \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K c_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K q_h \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h d\mathbf{x}, \\ &\quad + \int_K c_h \mathbf{u} \cdot \nabla q_h d\mathbf{x} - \int_{\partial K \cap \partial K_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_h q_h ds - \int_K \phi \frac{\partial c_h}{\partial t} q_h d\mathbf{x}, \\ a_{ca}(\hat{c}_h, [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_{\partial K} \hat{c}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{\partial K \cap \partial K_{in}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \hat{c}_h q_h ds, \\ a_{ac}([\boldsymbol{\sigma}_h, c_h], \hat{q}_h ds) &= \int_{\partial K} \hat{q}_h (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\partial K \cap \partial K_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_h q_h ds, \\ a_{aa}(\hat{c}_h, \hat{q}_h) &= \int_{\partial K \cap \partial K_{in}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \hat{c}_h q_h ds, \\ b_c([\mathbf{v}_h, q_h]) &= - \int_K g q_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Incluindo a discretização apresentada na Seção 4.4 para $\frac{\partial c_h}{\partial t}$ obtemos

$$\begin{aligned} a_{cc}([\boldsymbol{\sigma}_h^{n+\frac{1}{2}}, c_h^{n+\frac{1}{2}}], [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_K \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K c_h^{n+\frac{1}{2}} \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_K q_h \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+\frac{1}{2}} d\mathbf{x} + \int_K c_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{u} \cdot \nabla q_h d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\partial K \cap \partial K_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_h^{n+\frac{1}{2}} q_h ds - \int_K \frac{2\phi}{\Delta t} c_h^{n+\frac{1}{2}} q_h d\mathbf{x}, \\ a_{ca}(\hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}}, [\mathbf{v}_h, q_h]) &= \int_{\partial K} \hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{\partial K \cap \partial K_{in}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}} q_h ds, \\ a_{ac}([\boldsymbol{\sigma}_h^{n+\frac{1}{2}}, c_h^{n+\frac{1}{2}}], \hat{q}_h) &= \int_{\partial K} \hat{q}_h \left(\boldsymbol{\sigma}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n} \right) ds + \int_{\partial K \cap \partial K_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c_h^{n+\frac{1}{2}} q_h ds \\ a_{aa}(\hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}}, \hat{q}_h) &= \int_{\partial K \cap \partial K_{in}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}} q_h ds, \\ b_c([\mathbf{v}_h, q_h]) &= - \int_K g q_h d\mathbf{x} - \int_K \frac{2\phi}{\Delta t} c_h^n q_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Destacamos que $\{\hat{c}_h/c_h\}$ trata-se de um termo condicionado ao comportamento do fluido sobre o contorno. Desse modo, as formas acima dependem de uma avaliação do

sentido de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, como descrito na Seção 4.2, sendo determinante qual região, $\partial K \cap \partial K_{out}$ ou $\partial K \cap \partial K_{in}$.

Ainda, para o tratamento da formulação estabilizada, são somados à $a_{cc}(\cdot, \cdot)$ e à $b_c(\cdot)$ os termos \mathcal{B}_{stab} (4.13)-(4.15) e G_{stab} (4.16), respectivamente.

As matrizes \mathbf{A}_{cc} , \mathbf{A}_{ca} , \mathbf{A}_{ac} e \mathbf{A}_{aa} se relacionam respectivamente com as formas bilineares $a_{cc}(\cdot, \cdot)$, $a_{ca}(\cdot, \cdot)$, $a_{ac}(\cdot, \cdot)$ e $a_{aa}(\cdot, \cdot)$ definidas em (4.34) tomando como base a conformação matricial apresentada em (2.23). Do mesmo modo, o vetor \mathbf{b}_c relaciona-se com a forma linear $b_c(\cdot)$. Os vetores incógnitos são definidos como

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \sigma_h^{n+\frac{1}{2}} \\ c_h^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{c}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

O resultado para a solução do transporte possui uma dependência da solução no tempo anterior, c^n . Assim o algoritmo inicia-se dada uma solução inicial para a concentração, c^0 , e avança no tempo utilizando a formulação apresentada em (4.30), a correção do instante $t = n + \frac{1}{2}$ para o instante $t = n + 1$ ocorre por meio da equação (4.32). O processo se repete até atingir o instante de tempo final $t = T$. O diagrama apresentado na Figura 4.2 ilustra essa estratégia de resolução.

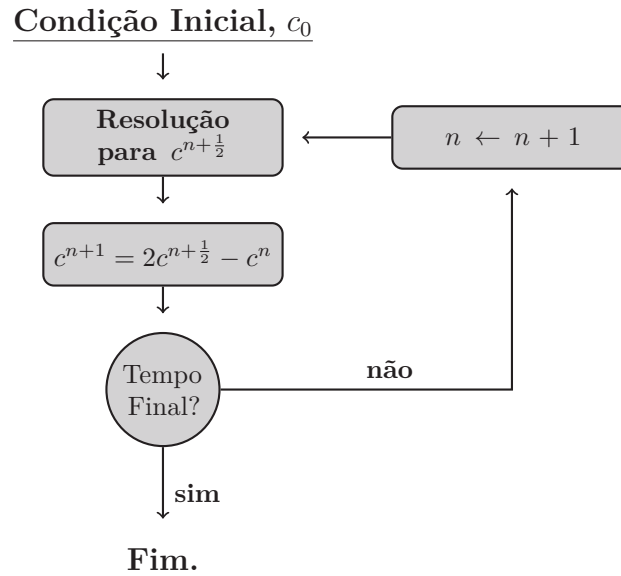


Figura 4.2 – Diagrama de transições para a resolução temporal do problema do transporte.

4.6 Resultados Numéricos

Nesta seção realizamos estudos de convergência das formulações propostas em (4.17) e (4.20) adotando a discretização temporal descrita na Seção (4.4.1) por meio de simulações em diferentes cenários. Os termos de estabilização (4.11)-(4.12) necessitam

de um estudo mais aprofundado dos parâmetros $\delta_2^\top, \delta_3^\top$ para que possam ser empregados nas simulações. Portanto, para os estudos empregando a formulação estabilizada, fixamos $\delta_1^\top = -0.5$ e $\delta_2^\top = \delta_3^\top = 0$, essa escolha é capaz de estabilizar os problemas locais retornando, na maioria dos casos estudados, taxas ótimas de convergência para a concentração. As simulações realizadas empregam aproximações bilineares, biquadráticas ou bicúbicas adotando a mesma ordem polinomial para todas as variáveis (fluxo difusivo, concentração e multiplicador de Lagrange, ou seja, $l = k$) e o uso de interpolações contínuas ou descontínuas para o multiplicador de Lagrange. A estabilização *upwind* para a convecção, apresentada na Seção 4.2 é testada para casos estacionários na presença de uma camada limite e a discretização incluindo o termo transiente para uma solução clássica do transporte.

As taxas de convergência são apresentadas por meio de gráficos. Essa escolha é feita devido à variação nas escolhas do coeficiente difusivo ε que geraria um número elevado de tabelas. Apesar de haver perdas no detalhamento dos valores relacionados à precisão, há ganhos na análise de tendência das taxas.

Os estudos com redução de ordem polinomial para o multiplicador de Lagrange, $l = k - 1$, vistos no capítulo anterior, não são repetidos aqui pois os resultados obtidos no Capítulo 3, são semelhantes ao que seria obtido para o problema do transporte, no que diz respeito às taxas de convergência.

Nossa variável de interesse neste problema é a concentração, sendo o fluxo difusivo apenas um artifício para gerar formulações compatíveis as obtidas pelo problema de Darcy. Desse modo, os resultados ressaltados nos estudos a seguir estão voltados para a variável escalar.

4.6.1 Regime Estacionário

A fim de avaliar a proposta de estabilização dos efeitos convectivos pelo termo adotado (4.8) simulamos dois problemas diferentes em regime estacionário. Assim reescrevemos a equação (2.9) anulando a derivada temporal, dando origem a uma simplificação do problema original: *Dados \mathbf{u} e g , encontrar $\boldsymbol{\sigma}$ e c , tais que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{D}\nabla c &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla c + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= g && \text{em } \Omega \times (0, T]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Dado este problema reduzido, avaliaremos o esquema *upwind* proposto por meio da simulação e estudo de regimes predominantemente convectivos. Utilizaremos a seguir duas soluções estudadas por Oikawa[53].

4.6.1.1 Solução Suave

Assim como feito no capítulo anterior, partiremos de uma solução analítica sobre um domínio bidimensional, $d = 2$. Definimos o campo vetorial constante $\mathbf{u} = [1, 1]^T$, o domínio $\Omega = [0, 1]^d$, e a solução exata

$$c(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \{1, d\}} \text{sen}(\pi x_i), \quad (4.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -\pi \mathbb{D} \left[\begin{array}{c} \cos(\pi x_j) \prod_{i \in \{1, d\}, i \neq j} \text{sen}(\pi x_i) \end{array} \right]_j, \quad j \in \{1, d\}. \quad (4.38)$$

Adotando ainda $\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é o tensor identidade, temos

$$g(\mathbf{x}) = \varepsilon d \pi^2 \prod_{i \in \{1, d\}} \text{sen}(\pi x_i) + \pi \sum_{j \in \{1, d\}} \left(\cos(\pi x_j) \prod_{i \in \{1, d\}, i \neq j} \text{sen}(\pi x_i) \right). \quad (4.39)$$

Seguindo Oikawa[53] variamos nossa constante referente ao termo difusivo a fim de estabelecer regimes de convecção dominante, tomando $\varepsilon = 1, 10^{-3}, 10^{-6}$.

A partir da solução exata impomos condições de contorno de Dirichlet para a realização de estudos de convergência a fim de comparar os métodos estáveis e estabilizados utilizando multiplicadores contínuos e descontínuos em termos da qualidade da aproximação.

As Figuras 4.3-4.6 ilustram as taxas de convergência obtidas para as aproximações c_h e $\boldsymbol{\sigma}_h$, escolhendo k como grau dos polinômios de aproximação do fluxo difusivo, concentração e do multiplicador de Lagrange, esse último com escolhas de funções interpoladoras contínuas ou descontínuas, em malhas de $N \times N$ elementos, onde $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$. Em geral, os resultados mostram que todas as metodologias estudadas, estável e estabilizada, utilizando multiplicadores contínuos ou descontínuos, apresentam taxas ótimas de convergência para a concentração. Por outro lado, é possível observar certa deficiência na aproximação do gradiente da concentração, aqui representado pelo fluxo difusivo. Esse resultado é esperado com o uso do método estabilizado, pois não foram aplicados todos os termos de estabilização, como em Darcy, que garantem taxas ótimas de convergência. O mesmo comportamento pode ser observado para o método estável à medida que o coeficiente difusivo tem seu valor reduzido, isto é, com a convecção mais acentuada, os métodos estáveis não conseguem manter taxas de convergência ótimas.

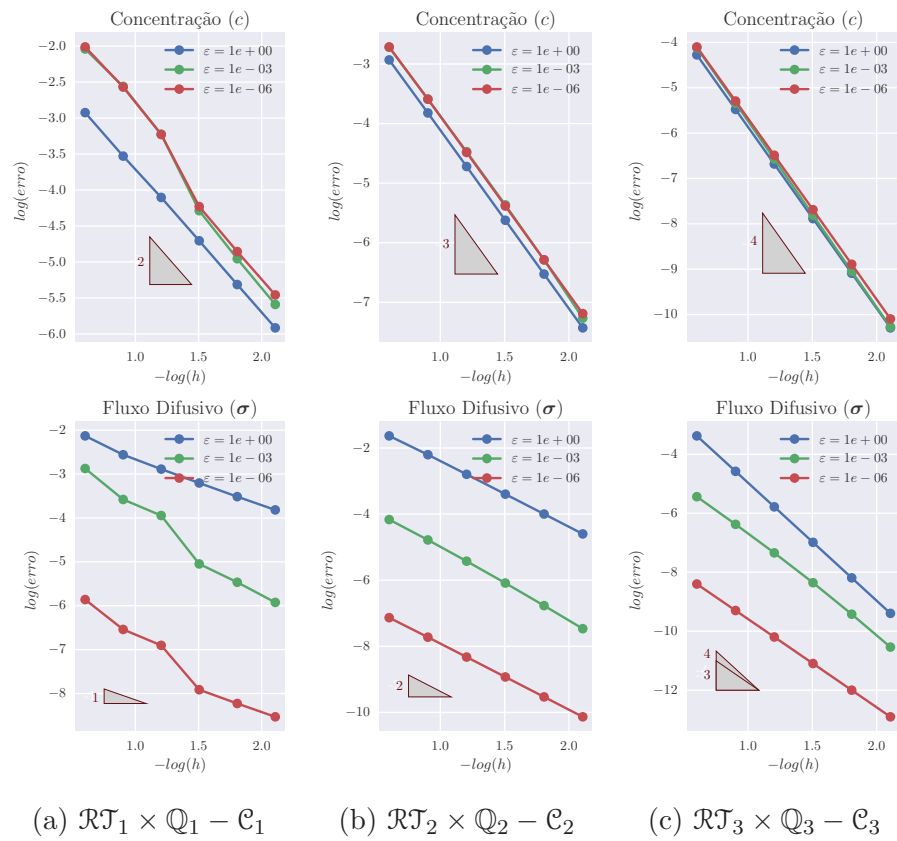


Figura 4.3 – Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores contínuos de mesma ordem ($\mathcal{RT}_k \times \mathcal{Q}_k - \mathcal{C}_k$).

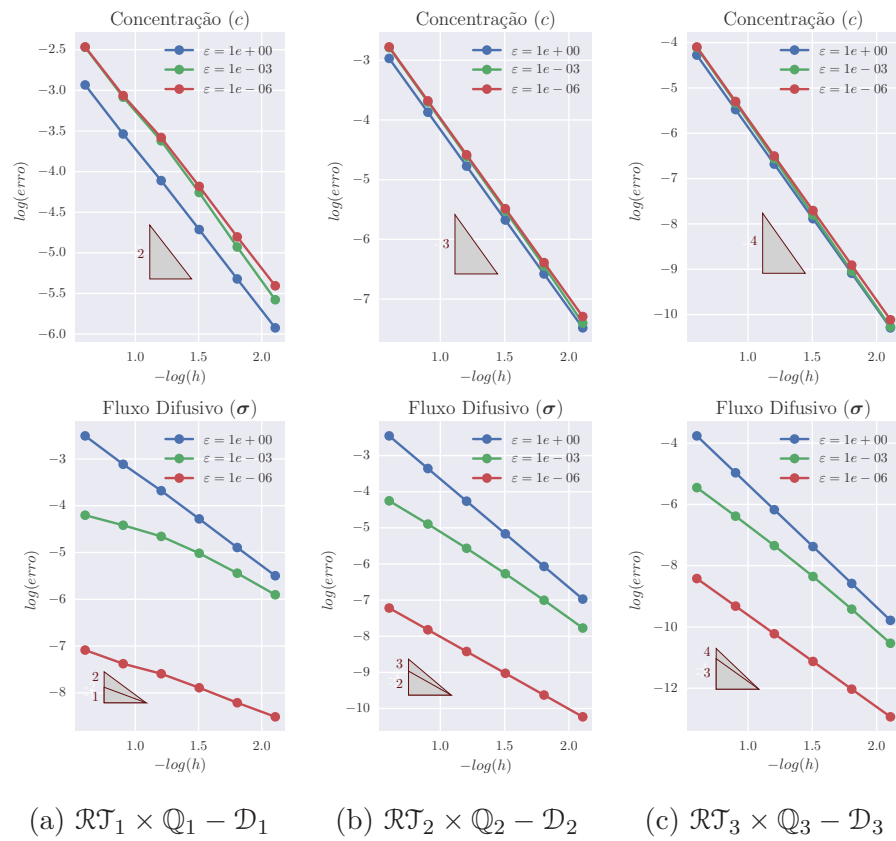


Figura 4.4 – Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem $(\mathcal{RT}_k \times \mathcal{Q}_k - \mathcal{D}_k)$.

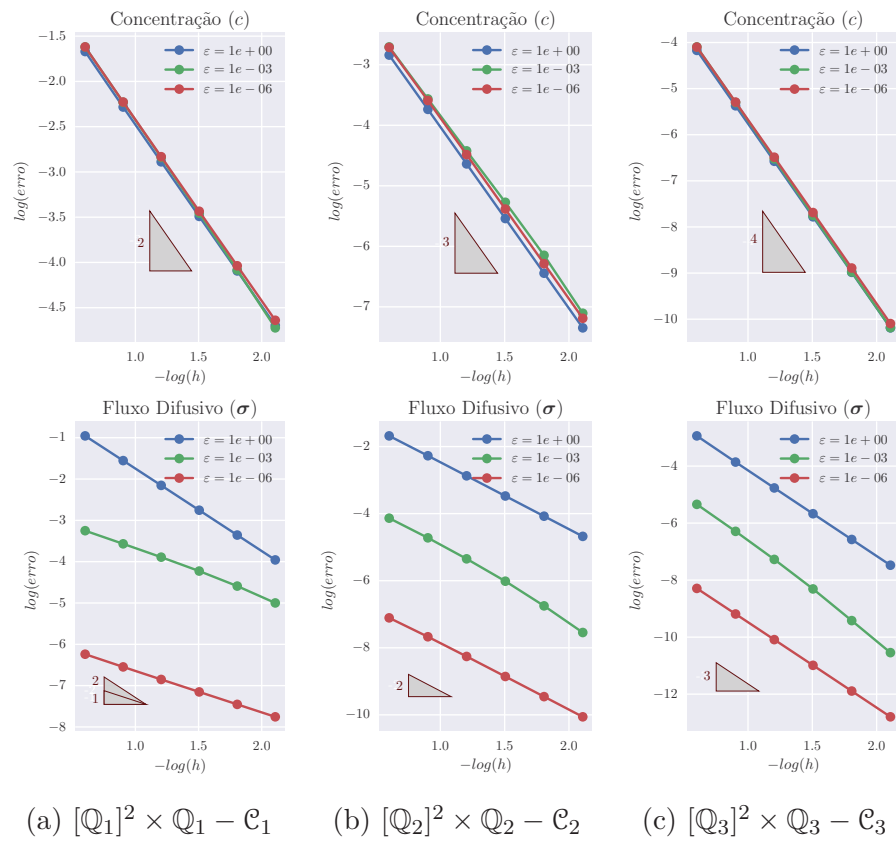


Figura 4.5 – Formulações estabilizadas de ordem k com multiplicadores contínuos de mesma ordem ($[Q_k]^2 \times Q_k - \mathcal{C}_k$).

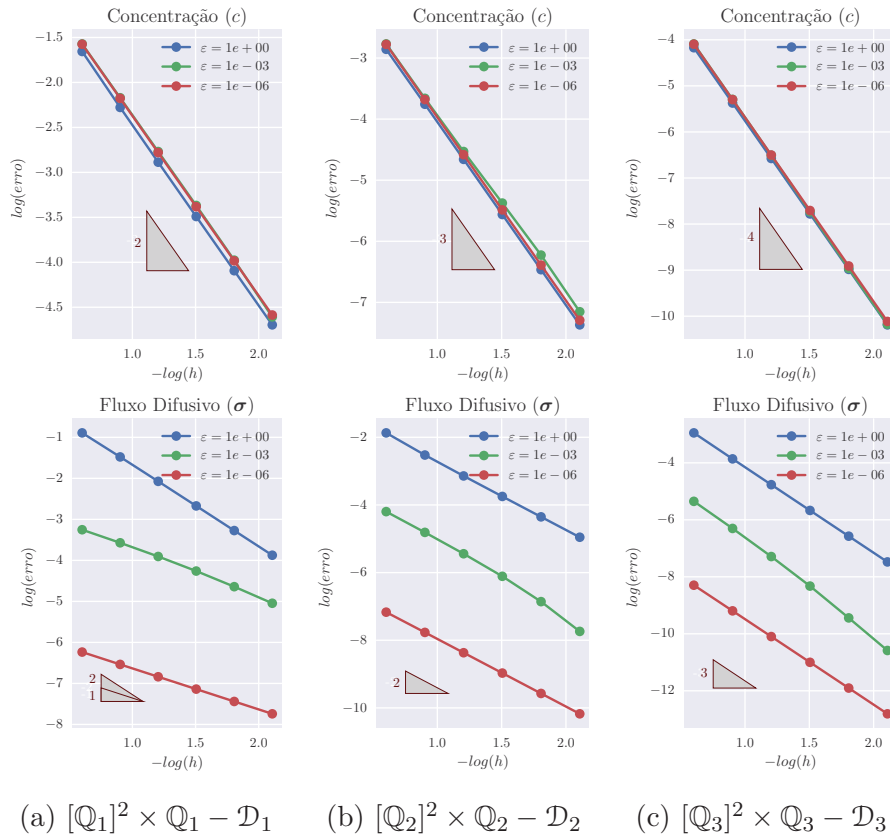


Figura 4.6 – Formulações estabilizadas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem ($[Q_k]^2 \times Q_k - \mathcal{D}_k$).

4.6.1.2 Solução com Camada Limite

Mantendo as mesmas configurações do estudo anterior, porém adotando uma solução exata com camada limite, que pode ser escrita como

$$c(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \{1, d\}} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x_i}{2} \right) \left(1 - e^{(x_i - 1)/\varepsilon} \right), \quad (4.40)$$

a solução para o fluxo difusivo, bem como a fonte do problema e condição de contorno de Dirichlet podem ser derivados por meio das relações apresentadas na equação (2.9).

As Figuras 4.7-4.9 reproduzem o gráfico da aproximação para a concentração (4.40) em malhas de 32×32 elementos com polinômio de grau 1 em cada elemento, para diferentes valores de ε . Os gráficos de superfície com curvas de nível buscam evidenciar a necessidade do tratamento de oscilações espúrias na presença de regimes predominantemente convectivos e confirmam a eficiência da estratégia *upwind* adotada para elevados valores do número de Péclet. Ressalta-se a instabilidade em casos intermediários na região próxima da camada limite, como ilustrado na Figura 4.8, fato que pode ser observado também nas taxas de convergência obtidas, expostas nas Figuras 4.10-4.13.

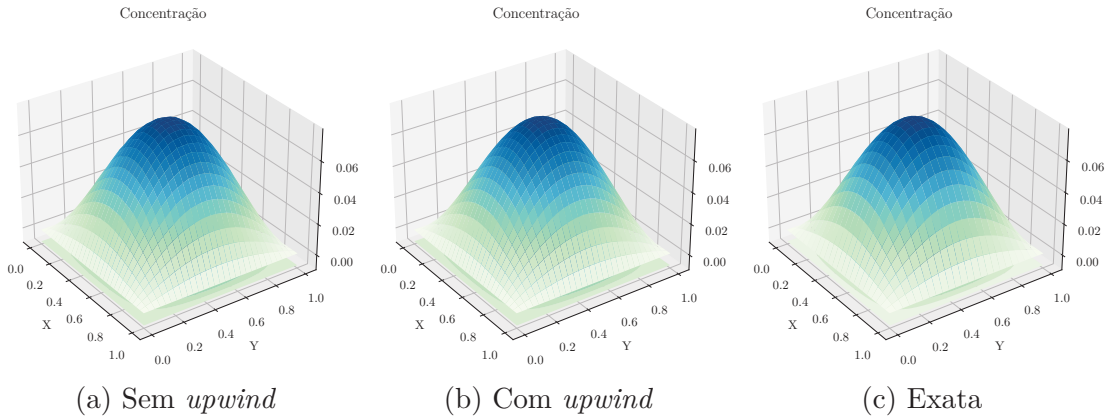


Figura 4.7 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização *upwind* para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 1$.

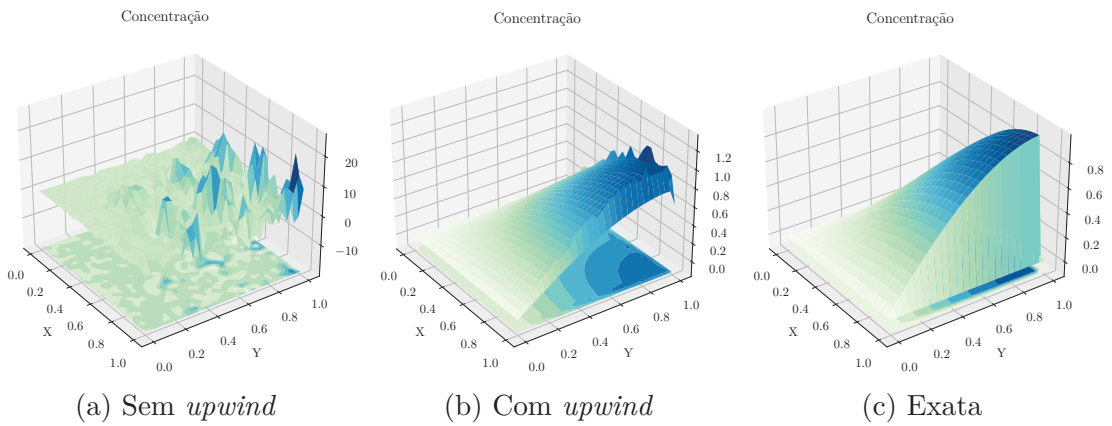


Figura 4.8 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização *upwind* para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 10^{-3}$.

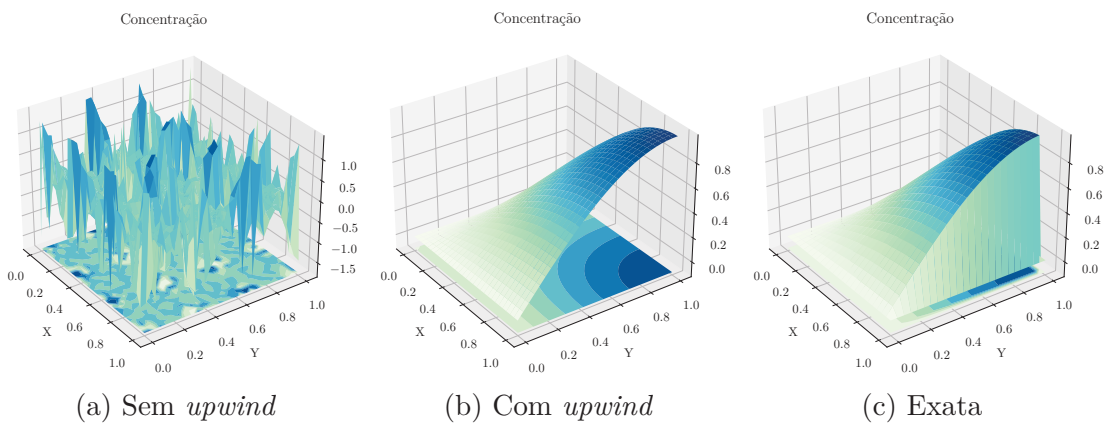


Figura 4.9 – Comparação entre simulações sem e com o uso da estabilização *upwind* para uma escolha de coeficiente difusivo $\varepsilon = 10^{-6}$.

A seguir reproduzimos os estudos de Oikawa[53], calculando o erro na norma L^2 em um domínio $\Omega_{0,9} = (0, 0.9)^2$, adotando polinômios de ordem $k = 1, 2, 3$, em malhas de $N \times N$ elementos, com $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

As Figuras 4.10-4.13 apresentam estudos de convergência comparando métodos híbridos estáveis com estabilizados adotando multiplicadores contínuos e descontínuos para escolhas de $\varepsilon = 1, 10^{-3}, 10^{-6}$. Ambos os métodos híbridos apresentam convergência ótima para a concentração para ambas as escolhas de multiplicadores. Porém, o método híbrido estabilizado demonstra-se mais preciso que o método estável em malhas mais refinadas. Os resultados com multiplicadores descontínuos mostram-se mais precisos do que com multiplicadores contínuos. Os resultados reforçam a eficiência da estabilização ainda em casos com mudanças abruptas no comportamento da função devido a fortes gradientes da concentração gerados por baixos valores do coeficiente difusivo ε . É possível observar que o refinamento da malha e/ou o grau do polinômio influenciam de maneira mais significativa na precisão do método, pois em dado momento ao reduzirmos o tamanho do elemento ocorre uma queda brusca no erro da aproximação.

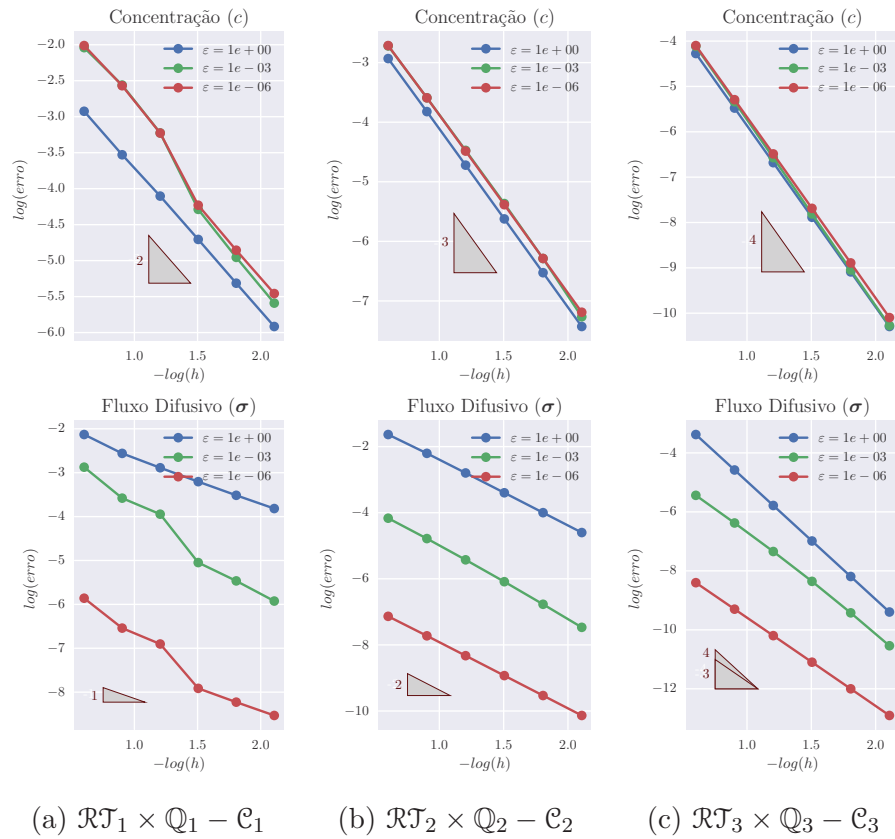


Figura 4.10 – Formulações de Raviart-Thomas de ordem k com multiplicadores descontínuos de mesma ordem ($\mathcal{RT}_k \times \mathcal{Q}_k - \mathcal{D}_k$).

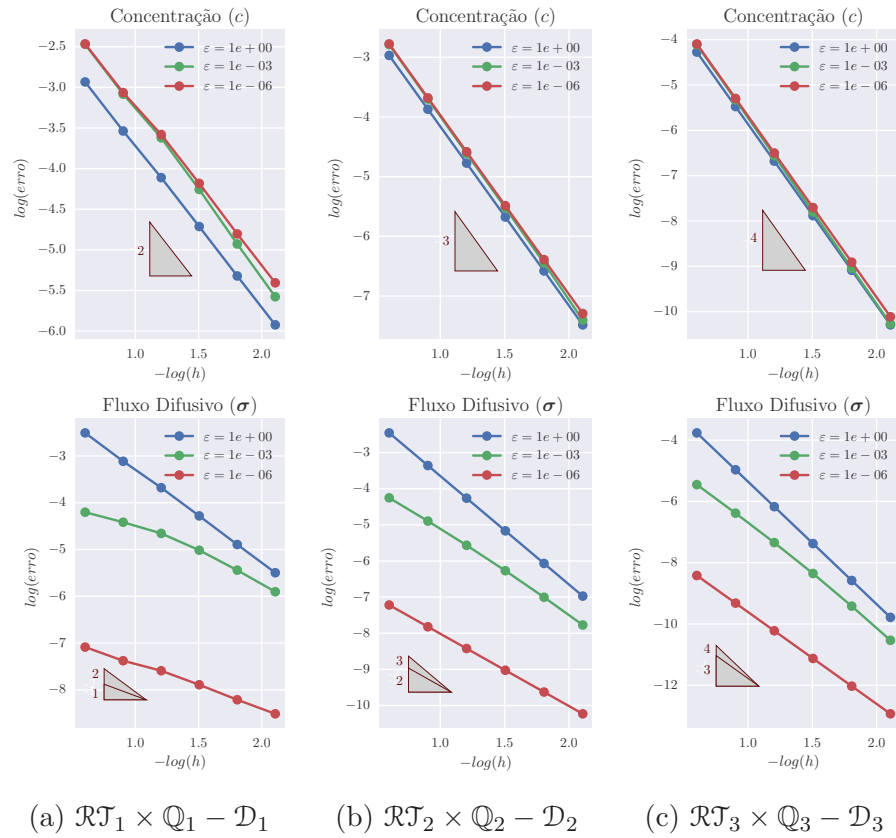


Figura 4.11 – Formulações estáveis com multiplicadores descontínuos.

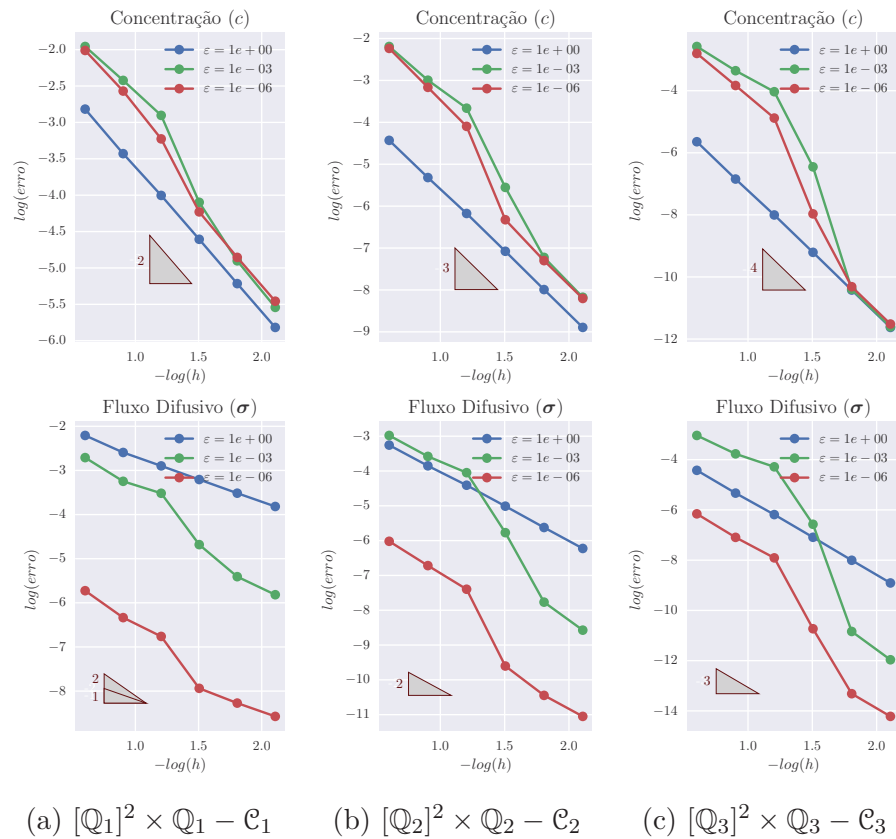


Figura 4.12 – Formulações estabilizadas com multiplicadores contínuos.

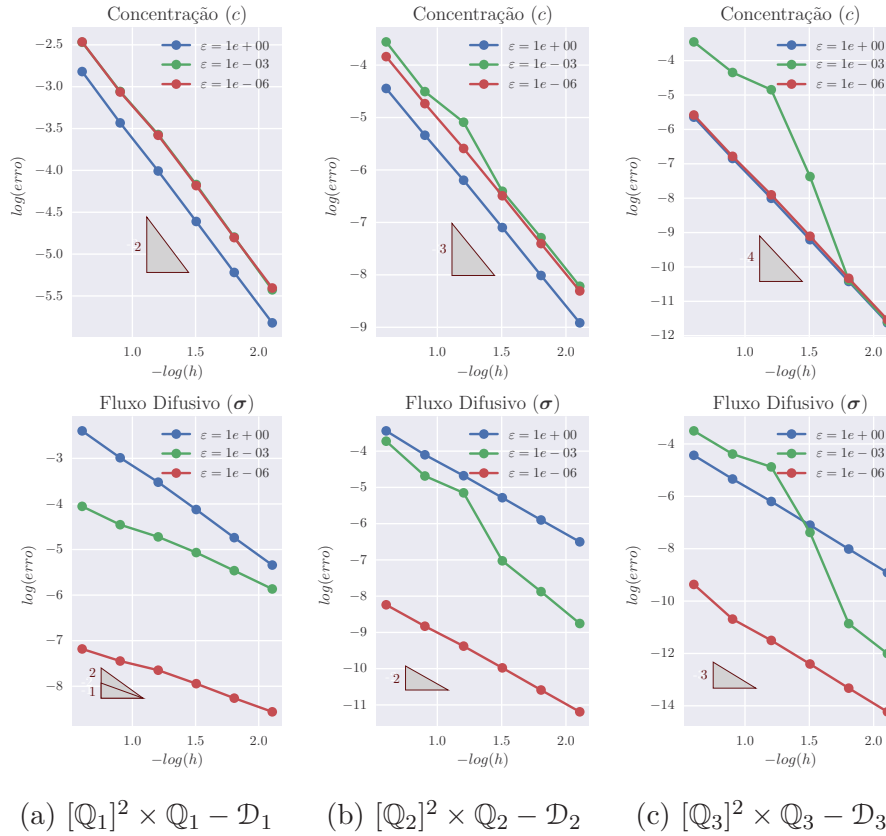


Figura 4.13 – Formulações estabilizadas com multiplicadores descontínuos.

4.6.2 Regime Transiente

Considerando a equação do transporte em regime transiente descrita em (2.9) realizamos estudos de convergência adotando a aproximação de segunda ordem no tempo descrita na Seção 4.4.1. A fim de validar as formulações estáveis e estabilizadas discretizadas no espaço e tempo e analisar a ordem de convergência desses métodos, definimos os coeficientes de forma a simplificar a construção da solução exata. Para isso, escrevemos a porosidade efetiva $\phi = 1$, o tensor de dispersão $\mathbb{D} = \mathbb{I}$ e o campo de velocidades constante ao longo de todo domínio $\Omega = [0, 1]^2$ como $\mathbf{u} = [1, 1]^T$, bem como o intervalo de tempo $(0, 0.25]$. A solução exata é dada por

$$\begin{aligned}
 c(\mathbf{x}, t) &= e^{-t} \operatorname{sen} \left(\sum_{i \in \{1, d\}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \right), \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbb{D} \left[e^{-t} \cos \left(\sum_{i \in \{1, d\}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \right) \right]_j, \quad j \in \{1, d\}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

e a fonte do problema é

$$g(\mathbf{x}) = d \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t} \cos \left(\sum_{i \in \{1, d\}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_i \right) \right). \tag{4.42}$$

Para o caso simulado definimos $d = 2$.

A partir da solução exata recuperamos a condição inicial, c_0 , e a condição de contorno, \bar{c} , para fins de reprodução deste experimento. Assim como feito nos estudos anteriores, avaliamos malhas de $N \times N$ elementos, onde $N = 4, 8, 16, 32, 64$, com escolhas de $k = 1, 2, 3$ como grau dos polinômios de aproximação do fluxo difusivo, concentração e do multiplicador de Lagrange e $\Delta t = h^{\frac{k+1}{2}}$, empregando as diferentes formulações propostas neste trabalho.

Podemos observar nas Tabelas 4.1 e 4.2 que os resultados obtidos revelam uma taxa de convergência ótima para a concentração em todos os casos, o que atesta a convergência de segunda ordem para o termo temporal proposta na Seção 4.4.1. Em particular, os resultados adotando multiplicadores contínuos com uma escolha de polinômios quadráticos demonstram a degradação da solução para a variável vetorial, como observado no problema de Darcy, porém conforme explicitado no início desta Seção, não se trata da nossa variável de interesse e sua taxa subótima não reflete na variável escalar.

k	N	Misto Híbrido Estabilizado				Misto Híbrido Estável			
		$\ c - c_h\ $		$\ \sigma - \sigma_h\ $		$\ c - c_h\ $		$\ \sigma - \sigma_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	7.383e-03	-	5.321e-03	-	7.482e-03	-	5.122e-03	-
	8	8.204e-04	3.17	9.450e-04	2.49	8.495e-04	3.14	8.760e-04	2.55
	16	2.291e-04	1.84	1.743e-04	2.44	2.354e-04	1.85	1.572e-04	2.48
	32	6.059e-05	1.92	3.626e-05	2.27	6.205e-05	1.92	3.145e-05	2.32
	64	1.555e-05	1.96	8.224e-06	2.14	1.590e-05	1.96	6.907e-06	2.19
2	4	1.711e-03	-	2.182e-03	-	1.711e-03	-	2.157e-03	-
	8	1.674e-04	3.35	1.486e-04	3.88	1.675e-04	3.35	1.308e-04	4.04
	16	1.650e-05	3.34	3.031e-05	2.29	1.651e-05	3.34	2.553e-05	2.36
	32	2.208e-06	2.90	7.349e-06	2.04	2.209e-06	2.90	6.117e-06	2.06
	64	2.664e-07	3.05	1.828e-06	2.01	2.664e-07	3.05	1.524e-06	2.01
3	4	3.748e-04	-	7.870e-04	-	3.748e-04	-	7.864e-04	-
	8	1.475e-05	4.67	2.403e-05	5.03	1.475e-05	4.67	2.400e-05	5.03
	16	9.716e-07	3.92	1.230e-06	4.29	9.715e-07	3.92	1.231e-06	4.28
	32	6.151e-08	3.98	7.257e-08	4.08	6.152e-08	3.98	7.288e-08	4.08
	64	3.860e-09	3.99	4.466e-09	4.02	3.861e-09	3.99	4.462e-09	4.03

Tabela 4.1 – Taxas de convergência e precisão das aproximações σ_h e c_h obtidas pelos métodos híbridos estável e estabilizado adotando multiplicadores contínuos, no instante de tempos $t_n = 0.25$.

k	N	Misto Híbrido Estabilizado				Misto Híbrido Estável			
		$\ c - c_h\ $		$\ \sigma - \sigma_h\ $		$\ c - c_h\ $		$\ \sigma - \sigma_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	7.324e-03	-	5.659e-03	-	7.432e-03	-	5.031e-03	-
	8	8.196e-04	3.16	1.001e-03	2.50	8.492e-04	3.13	8.443e-04	2.58
	16	2.292e-04	1.84	1.817e-04	2.46	2.356e-04	1.85	1.430e-04	2.56
	32	6.060e-05	1.92	3.727e-05	2.29	6.207e-05	1.92	2.659e-05	2.43
	64	1.555e-05	1.96	8.361e-06	2.16	1.590e-05	1.96	5.443e-06	2.29
2	4	1.710e-03	-	2.125e-03	-	1.710e-03	-	2.118e-03	-
	8	1.673e-04	3.35	9.041e-05	4.55	1.673e-04	3.35	8.690e-05	4.61
	16	1.650e-05	3.34	8.044e-06	3.49	1.650e-05	3.34	7.331e-06	3.57
	32	2.206e-06	2.90	7.016e-07	3.52	2.206e-06	2.90	6.240e-07	3.55
	64	2.664e-07	3.05	7.315e-08	3.26	2.665e-07	3.05	6.764e-08	3.21
3	4	3.748e-04	-	7.871e-04	-	3.748e-04	-	7.864e-04	-
	8	1.475e-05	4.67	2.405e-05	5.03	1.475e-05	4.67	2.402e-05	5.03
	16	9.716e-07	3.92	1.231e-06	4.29	9.714e-07	3.92	1.233e-06	4.28
	32	6.153e-08	3.98	7.245e-08	4.09	6.154e-08	3.98	7.280e-08	4.08
	64	3.861e-09	3.99	4.462e-09	4.02	3.862e-09	3.99	4.461e-09	4.03

Tabela 4.2 – Taxas de convergência e precisão das aproximações σ_h e c_h obtidas pelos métodos híbridos estável e estabilizado adotando multiplicadores descontínuos, no instante de tempos $t_n = 0.25$.

5 Métodos Híbridos para o Acoplamento Darcy-Transporte

Neste capítulo aborda-se a relação dos problemas estudados nos Capítulos 3 e 4 compondo o modelo completo como em (2.6)-(2.7). Abordamos o problema deste capítulo por meio de uma separação do sistema tratando-o como uma sequência de subproblemas. A estratégia de particionar um problema em duas ou mais etapas tem o intuito de linearizar o problema, ou seja, evitar tratamentos de não-linearidades presentes no problema e ainda reduzir o tamanho do sistema a ser resolvido através da resolução de dois ou mais subsistemas de menor dimensão. Em casos transientes, como o problema abordado neste trabalho, o ganho ocorre em cada instante de tempo, obtendo uma redução ainda maior no custo computacional. Há ainda casos nos quais uma das variáveis pode não possuir uma dependência do tempo; tratá-la de forma separada permite que seja evitada a repetição de um cálculo já realizado.

O problema Darcy-transporte, bem como a relação entre as variáveis, poderia ser tratada num único sistema da seguinte maneira:

Dados ϕ e as funções f , g e c_0 encontrar $[\mathbf{u}, p, c]$, tal que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= -\mathbb{K}\nabla p && \text{em } \Omega, \\
 \nabla \cdot (\mathbf{u}) &= f && \text{em } \Omega, \\
 \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbb{D}\nabla c) &= g && \text{em } \Omega \times (0, T], \\
 c(\mathbf{x}, 0) &= c_0(\mathbf{x}) && \text{em } \Omega, \\
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbb{D}\nabla c \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_N \times (0, T], \\
 p = 0, \quad c &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_D \times (0, T].
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ao realizar a modelagem dessa maneira passamos a tratar um problema não-linear, ao passo que \mathbf{u} e c são variáveis a se determinar e são multiplicadas entre si na terceira equação do sistema (5.1), além da dependência do tensor de dispersão com a velocidade (2.5) e da viscosidade com a concentração, em problemas onde $\mu \neq 1$ (2.8). Problemas não-lineares requerem, em geral, o uso de estratégias de linearização que acrescentam dificuldades numéricas e um maior custo computacional para resolução. Desassociar os sistemas é uma possibilidade para evitar o tratamento dessa não-linearidade, além de prover ganhos nos custos computacionais.

Em nossa abordagem optamos pela adoção de espaços de mesma dimensão ao inserirmos o fluxo difusivo, σ , na equação do transporte, de modo a criar um problema misto e adotar os mesmos espaços de aproximação tanto para formulações de Darcy quanto para formulações do transporte. Isso proporciona benefícios como: estabilizações provenientes dos métodos que lidam com sistemas de duas variáveis; o uso de espaço de memória de igual tamanho, pois os subproblemas possuem mesma dimensão, o que facilita o acesso aos graus de liberdade correspondentes a cada subproblema, e a possibilidade de

reutilização de código ao realizarmos uma única formulação dos subproblemas, devido à sua similaridade a menos de termos convectivos e transientes a serem inseridos.

É importante destacar que neste trabalho não ocorre o estudo de convergência com o uso do que denominaremos aqui como formulação cruzadas, que se trata da adoção de diferentes formulações para cada um dos subproblemas. Logo, neste trabalho ao optarmos por um método para formulação de um subproblema esse também será utilizado na formulação do outro subproblema que completa o modelo. Porém, tais abordagens podem vir a ser muito úteis em casos onde os diferentes problemas que compõem o modelo apresentem mais precisão com diferentes formulações, ou ainda ao ser possível reduzir o custo computacional, seja devido às características de um determinado problema, seja por um interesse maior em determinada variável.

Neste contexto, apresentamos neste Capítulo primeiramente a formulação acoplada completa, para as escolhas de métodos abordadas neste trabalho, evidenciando a relação entre os problemas. Damos sequência com estratégias de resolução do problema acoplado, que pode ocorrer de duas formas diferentes conforme a viscosidade das espécies, denominadas aqui acoplamento forte ou acoplamento fraco. Realizamos um estudo de convergência para os métodos propostos, validando o acoplamento de nosso modelo, reafirmando os resultados obtidos nos Capítulos anteriores para os problemas resolvidos separadamente.

Em sequência apresentamos simulações de casos onde os métodos híbridos estáveis e estabilizados são empregados para a reprodução de fenômenos em meios porosos homogêneos e heterogêneos combinados a estudos de casos com razão de mobilidade unitária e adversa, junto de conclusões e análises sobre os resultados obtidos.

5.1 Formulação Acoplada

Nesta seção, escrevemos uma formulação que evidencia a capacidade de reproduzir os dois problemas estudados de forma similar. Assim, para facilitar a apresentação, definimos a tripla

$$\mathbf{X}_h = [\mathbf{w}_h, s_h, \lambda]$$

pertencente a \mathbf{V}_h^k .

Podemos evidenciar a relação entre as formas elípticas (3.9) e (4.7), referente aos problemas de Darcy e do transporte, respectivamente, buscando demonstrar uma generalização das formas variacionais. Para isso definimos a forma bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{elip}([\mathbf{X}_h, \mathbf{Y}_h]; \mathbb{C}) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbb{C} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_K s_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K} \lambda (\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}) ds \right. \\ \left. + \int_{\partial K} \mu_h (\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}) ds - \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h d\mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

Voltando às formas (3.9) e (4.7), destacamos a relação

$$\mathcal{C}_{elip}([\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h]; \mathbb{K}^{-1}) = \mathcal{A}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{elip}([\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h]; \mathbb{D}^{-1}) = \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h).$$

O método estabilizado, tanto para o problema de Darcy quanto para o problema do transporte, necessita ainda da forma bilinear referente aos termos de resíduos de mínimos quadrados (3.20) e (3.21) a fim de garantir a estabilidade dos problemas locais e atingir taxas ótimas de convergência. Já o problema do transporte depende ainda da forma referente à convecção (4.9), independente do método escolhido, e de sua respectiva estabilização (4.13)-(4.15) e (4.16) quando optado por métodos estabilizados. Desse modo, escrevemos as formulações estáveis e estabilizadas para o problema de Darcy e do transporte de forma generalizada como segue:

Problema de Darcy: dado c_h , achar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = F(\mathbf{Y}_h) \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k. \quad (5.3)$$

Problema do transporte: dado \mathbf{u}_h , encontrar $\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}} \in \mathbf{V}_h^k$, tal que para todo $\mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k$

$$- \int_K \phi \frac{\partial c_h}{\partial t} q_h \, d\mathbf{x} + B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = G(\mathbf{Y}_h) \quad \forall \mathbf{Y}_h \in \mathbf{V}_h^k. \quad (5.4)$$

A discretização temporal para o problema do transporte segue a estratégia descrita na Seção 4.4.1; a escolha do espaço de aproximação \mathbf{V}_h^k , que é o mesmo adotado para a formulação de Darcy e do transporte, depende da escolha da formulação: se estabilizada, combinam-se os espaços (2.16), (2.17) e (2.19); caso contrário, os espaços (2.18), (2.17) e (2.19). Além disso, as formas bilineares e lineares que compõem os problemas de Darcy (5.3) e do transporte (5.4), de acordo com o tipo de formulação, são dados por:

Optando pelo uso de espaço de Raviart-Thomas (3.26) para o **problema de Darcy**, temos

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{A}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h),$$

onde a forma $\mathcal{A}_{elip}(\cdot, \cdot)$ é definida em (3.9), e o funcional linear $F(\cdot)$ apresentado em (3.27):

$$F(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f q_h \, d\mathbf{x}.$$

Analogamente para o **problema do transporte**, descrito em (4.21),

$$B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{conv}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h),$$

onde os termos que compõem a forma, \mathcal{B}_{elip} e \mathcal{B}_{conv} são definidos em (4.7) e (4.9), respectivamente, e a fonte do sistema é definida por (4.22):

$$G(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K g q_h \, d\mathbf{x}.$$

O espaço das variáveis de aproximação torna-se

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^{\mathbb{R}\mathcal{T}^k} \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^l.$$

Por outro lado, ao adotarmos um método estabilizado por resíduos de mínimos quadrados, podemos escrever o **problema de Darcy** como

$$A(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{A}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{A}_{stab}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{D}}, \mathbf{Y}_h),$$

$$F(\mathbf{Y}_h) = - \int_K f q_h d\mathbf{x} + \mathcal{F}_{stab}(\mathbf{Y}_h),$$

onde os termos \mathcal{A}_{elip} , \mathcal{A}_{stab} e \mathcal{F}_{stab} são definidos em (3.9), (3.20) e (3.21), respectivamente. De forma análoga o **problema do transporte** combina as seguintes formas:

$$B(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) = \mathcal{B}_{elip}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{conv}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h) + \mathcal{B}_{stab}(\mathbf{X}_h^{\mathcal{T}}, \mathbf{Y}_h),$$

$$G(\mathbf{Y}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K g q_h d\mathbf{x} \right] + \mathcal{G}_{stab}(\mathbf{Y}_h).$$

com \mathcal{B}_{elip} , \mathcal{B}_{conv} , \mathcal{B}_{stab} e \mathcal{G}_{stab} definidos em (4.7), (4.9), (4.13)-(4.15) e (4.16) respectivamente.

Para esta escolha de método o espaço de aproximação é dado por

$$\mathbf{V}_h^k = \mathcal{V}_h^k \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^l.$$

Assim, temos o problema completo escrito através dos termos bilineares apresentados nos Capítulos 3 e 4. O uso da forma \mathcal{C}_{elip} (5.2) abre o caminho para escrita de uma formulação única como proposto por Igreja e Miranda[10].

5.2 Estratégia de Resolução

Para a resolução dos problemas formulados de forma compatível por (5.3)-(5.4) é necessário estabelecer uma estratégia de resolução capaz de tratar a troca de informações do campo de velocidades presente no transporte e, para o caso particular da razão de mobilidade adversa, a concentração presente na equação de Darcy. Isto é, quando há dependência de uma variável que se trata da solução de outro problema, deve-se haver uma maneira definida para que o seu resultado seja recuperado. Neste sentido, adotamos uma estratégia *staggered* que visa separar o problema de Darcy do problema do transporte buscando tratar a não-linearidade característica do acoplamento dos sistemas.

A resolução de cada um dos problemas é feita separadamente, como apresentado nas Seções 3.2.3 e 4.5 para os problemas de Darcy e transporte, respectivamente. Porém, a ordem de execução deve ser levada em consideração para que os dados referentes a cada problema sejam distribuídos corretamente, isto é, necessita-se estabelecer estrutura

organizacional para que parte da solução de um problema venha a ser um dado de entrada do outro problema. Esta seção dedica-se a explicar a estratégia adotada para tratar os dois diferentes casos que geram o acoplamento entre o problema de Darcy e o problema do transporte.

Como descrito no Capítulo 2, ao estudarmos fluidos de mesma viscosidade temos um acoplamento fraco entre os subproblemas. Pela equação (2.8)

$$: \nu(c) = \nu_{res}[1 - c + M^{\frac{1}{4}}c]^{-4}, \quad (5.5)$$

ao adotarmos $M = 1$ temos que $\nu(c) = \nu_{res}$, ou seja, uma viscosidade constante independente da concentração do fluido injetado. Assim, podemos ilustrar o esquema para resolução de um problema com acoplamento fraco através do diagrama presente na Figura 5.1.

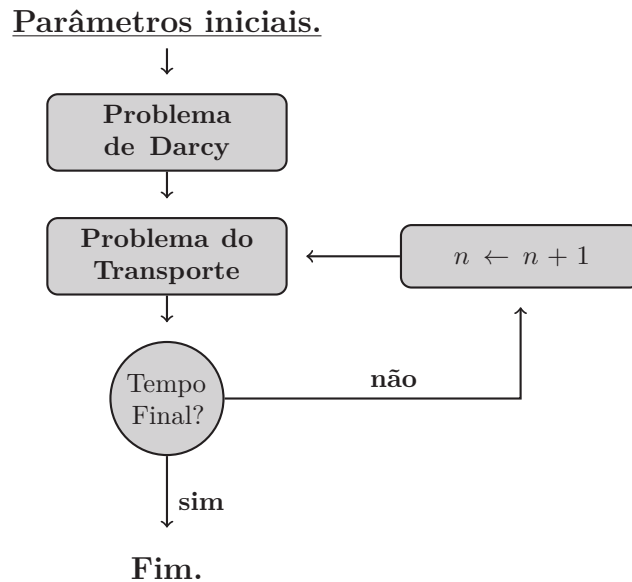


Figura 5.1 – Fluxograma para resolução do problema completo fracamente acoplado.

A velocidade de Darcy não apresenta variação no tempo, sendo assim necessário realizar seu cálculo uma única vez, enquanto o problema do transporte avança no tempo usando a estratégia descrita no diagrama 4.2.

De maneira análoga, para casos onde a mobilidade $M \neq 1$ ocorre um forte acoplamento entre os subproblemas e, portanto, a resolução de ambos sistemas entra em um processo iterativo, não só pela equação do transporte, dependente da velocidade, mas também pela dependência da concentração na lei de Darcy. A estratégia de resolução adotada neste caso é ilustrada pelo diagrama 5.2. Com a viscosidade dependente da concentração $\nu_{inj} = \nu(c)$, o campo tensorial descrito pela condutividade hidráulica $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\mathbf{x}, c)$ pode sofrer agora alterações a cada instante de tempo e o cômputo do problema de Darcy deve ser realizado a cada passo de tempo para que se atualize o campo de velocidades, que por

sua vez irá modificar o resultado da concentração, repetindo esse processo sucessivamente até que se atinja o tempo final desejado.

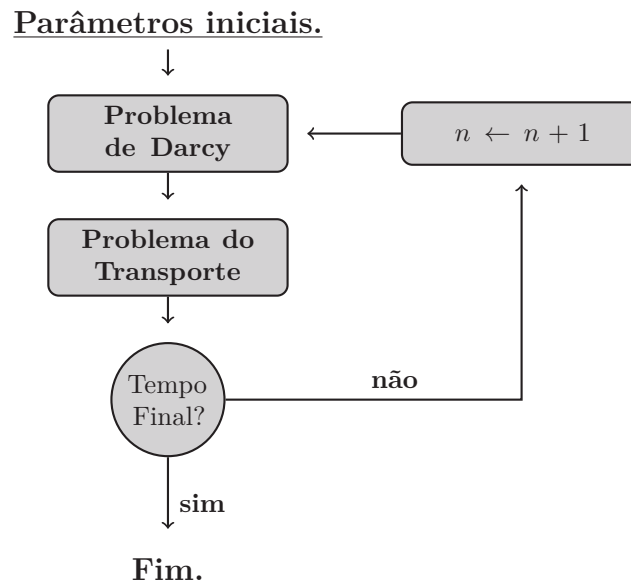


Figura 5.2 – Fluxograma para resolução do problema completo fortemente acoplado.

Assim como no acoplamento fraco, o esquema de discretização temporal para o problema do transporte segue o descrito no diagrama 4.2. Porém, quando ocorre acoplamento forte entre os problemas, a velocidade de Darcy é atualizada a cada iteração; nesse caso reescrevemos a tripla de variáveis para o problema de Darcy da seguinte forma:

$$\mathbf{X}_h^D = [\mathbf{u}_h^n, p_h^n, \hat{p}_h^n],$$

de modo que, dada uma concentração c^n , o problema (5.3) deve ser resolvido a cada instante de tempo $t = n$, como é ilustrado na Figura 5.2.

5.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, buscamos validar os métodos híbridos para o problema de Darcy e do transporte propostos, respectivamente em (5.3) e (5.4), utilizando formulações estáveis e estabilizadas empregando multiplicadores contínuos e descontínuos. Assim, nesta seção utilizamos de uma solução exata para o problema completo a fim de apresentar a qualidade da aproximação e as taxas de convergência das variáveis de interesse comparando as formulações propostas. São executadas simulações de casos que não apresentam soluções exatas, diferente do que vinha ocorrendo até este ponto do trabalho, visando reproduzir casos complexos e mais realistas. Para isso os métodos híbridos são testados em diferentes cenários com meios porosos homogêneos e heterogêneos com razão de mobilidade unitária ou adversa. Por fim, é posta uma discussão sobre esses resultados.

5.3.1 Estudo de Convergência

Definindo um domínio bidimensional $\Omega = [0, 1]^2$ de permeabilidade constante $\mathbb{G} = \mathbb{I}$, tensor de dispersão $\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{I}$ e um intervalo de tempo $I = (0, 0.5]$, adotando os termos fontes

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ g &= 2\pi^2\varepsilon \sin(\pi(x + y - 2t)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

e os parâmetros $\nu(c) = 0.2c - 0.5$, $\varepsilon = 0.01$ e $\phi = 1$. Derivamos a solução analítica [55]

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p = \frac{0.2}{\pi} \cos(\pi(x + y - 2t)) + 0.5(x + y), \quad c = \sin(\pi(x + y - 2t)) \quad (5.7)$$

a partir da qual a condição de contorno de Dirichlet pode ser calculada diretamente.

Simularemos este caso com as formulações apresentadas em (5.3)-(5.4) fortemente acopladas com aproximações c_h , p_h e \mathbf{u}_h de ordem k , bem como seus respectivos multiplicadores de Lagrange, \hat{c}_h e \hat{p}_h em malhas de $N \times N$ elementos, onde $k = 1, 2, 3$ e $N = 4, 8, 16, 32, 64$ para todas as formulações, escolhendo $\Delta t = h^{\frac{k+1}{2}}$.

As taxas de convergência obtidas são apresentadas nas Tabelas 5.1-5.4 onde é possível observar taxas ótimas de convergência para a concentração para todos os casos simulados. Além disso, os resultados do estudo são compatíveis com os resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 e validam tanto a estratégia *staggered* descrita no diagrama 5.2 quanto a abordagem de discretização temporal de segunda ordem descrita no diagrama 4.2.

Método Misto Híbrido Estabilizado com Multiplicadores Contínuos

k	N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ c - c_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.379e-01	-	9.363e-03	-	2.971e-01	-
	8	4.309e-02	2.47	1.170e-03	3.00	5.425e-02	2.45
	16	9.701e-03	2.15	2.161e-04	2.44	1.206e-02	2.17
	32	2.365e-03	2.04	5.073e-05	2.09	2.908e-03	2.05
	64	5.874e-04	2.01	1.257e-05	2.01	7.176e-04	2.02
2	4	4.527e-02	-	3.709e-03	-	8.643e-02	-
	8	4.592e-03	3.30	3.042e-04	3.61	7.653e-03	3.50
	16	6.123e-04	2.91	3.198e-05	3.25	8.215e-04	3.22
	32	1.135e-04	2.43	4.280e-06	2.90	1.073e-04	2.94
	64	2.388e-05	2.25	5.289e-07	3.02	1.323e-05	3.02
3	4	8.767e-03	-	8.510e-04	-	1.917e-02	-
	8	3.447e-04	4.67	3.466e-05	4.62	7.892e-04	4.60
	16	2.264e-05	3.93	2.273e-06	3.93	5.073e-05	3.96
	32	1.477e-06	3.94	1.441e-07	3.98	3.195e-06	3.99
	64	1.036e-07	3.83	9.045e-09	3.99	2.003e-07	4.00

Tabela 5.1 – Taxas de convergência para as aproximações \mathbf{u}_h , p_h e c_h .

Método Misto Híbrido Estabilizado com Multiplicadores Descontínuos

k	N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ c - c_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.308e-01	-	9.346e-03	-	2.964e-01	-
	8	4.125e-02	2.48	1.161e-03	3.01	5.398e-02	2.46
	16	9.264e-03	2.15	2.153e-04	2.43	1.203e-02	2.17
	32	2.256e-03	2.04	5.065e-05	2.09	2.903e-03	2.05
	64	5.599e-04	2.01	1.256e-05	2.01	7.168e-04	2.02
2	4	4.525e-02	-	3.712e-03	-	8.647e-02	-
	8	4.521e-03	3.32	3.044e-04	3.61	7.655e-03	3.50
	16	5.598e-04	3.01	3.201e-05	3.25	8.221e-04	3.22
	32	9.215e-05	2.60	4.284e-06	2.90	1.074e-04	2.94
	64	1.664e-05	2.47	5.301e-07	3.01	1.327e-05	3.02
3	4	8.768e-03	-	8.510e-04	-	1.917e-02	-
	8	3.447e-04	4.67	3.466e-05	4.62	7.892e-04	4.60
	16	2.264e-05	3.93	2.273e-06	3.93	5.073e-05	3.96
	32	1.477e-06	3.94	1.441e-07	3.98	3.195e-06	3.99
	64	1.036e-07	3.83	9.046e-09	3.99	2.003e-07	4.00

Tabela 5.2 – Taxas de convergência para as aproximações \mathbf{u}_h , p_h e c_h .

Método Misto Híbrido Estável com Multiplicadores Contínuos

k	N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ c - c_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.482e-01	-	1.071e-02	-	3.198e-01	-
	8	4.441e-02	2.48	1.454e-03	2.88	5.913e-02	2.44
	16	9.984e-03	2.15	2.843e-04	2.35	1.321e-02	2.16
	32	2.433e-03	2.04	6.773e-05	2.07	3.191e-03	2.05
	64	6.041e-04	2.01	1.682e-05	2.01	7.879e-04	2.02
2	4	4.352e-02	-	3.720e-03	-	8.653e-02	-
	8	4.284e-03	3.34	3.042e-04	3.61	7.635e-03	3.50
	16	5.777e-04	2.89	3.190e-05	3.25	8.177e-04	3.22
	32	1.135e-04	2.35	4.249e-06	2.91	1.062e-04	2.95
	64	2.581e-05	2.14	5.217e-07	3.03	1.299e-05	3.03
3	4	8.758e-03	-	8.508e-04	-	1.916e-02	-
	8	3.438e-04	4.67	3.467e-05	4.62	7.892e-04	4.60
	16	2.241e-05	3.94	2.276e-06	3.93	5.074e-05	3.96
	32	1.417e-06	3.98	1.442e-07	3.98	3.197e-06	3.99
	64	8.900e-08	3.99	9.046e-09	3.99	2.003e-07	4.00

Tabela 5.3 – Taxas de convergência para as aproximações \mathbf{u}_h , p_h e c_h .

Método Misto Híbrido Estável com Multiplicadores Descontínuos

k	N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ p - p_h\ $		$\ c - c_h\ $	
		Erro	Taxa	Erro	Taxa	Erro	Taxa
1	4	2.354e-01	-	1.100e-02	-	3.200e-01	-
	8	4.332e-02	2.44	1.471e-03	2.90	5.899e-02	2.44
	16	9.798e-03	2.14	2.852e-04	2.37	1.318e-02	2.16
	32	2.392e-03	2.03	6.779e-05	2.07	3.187e-03	2.05
	64	5.942e-04	2.01	1.682e-05	2.01	7.873e-04	2.02
2	4	4.314e-02	-	3.729e-03	-	8.664e-02	-
	8	4.026e-03	3.42	3.046e-04	3.61	7.636e-03	3.50
	16	4.267e-04	3.24	3.194e-05	3.25	8.178e-04	3.22
	32	5.684e-05	2.91	4.248e-06	2.91	1.061e-04	2.95
	64	7.188e-06	2.98	5.219e-07	3.02	1.299e-05	3.03
3	4	8.758e-03	-	8.508e-04	-	1.916e-02	-
	8	3.437e-04	4.67	3.468e-05	4.62	7.891e-04	4.60
	16	2.240e-05	3.94	2.276e-06	3.93	5.074e-05	3.96
	32	1.417e-06	3.98	1.443e-07	3.98	3.198e-06	3.99
	64	8.896e-08	3.99	9.047e-09	4.00	2.003e-07	4.00

Tabela 5.4 – Taxas de convergência para as aproximações \mathbf{u}_h , p_h e c_h .

Com esse último resultado apresentado consolida-se o modelo e o estudo pode avançar para o tratamento de problemas de maior complexidade, reproduzindo experimentos que não possuem soluções exatas conhecidas, assim como ocorre em casos reais.

5.3.2 Permeabilidade Senoidal

Em nossos primeiros experimentos sem solução exata conhecida utilizamos tensores de condutividade hidráulica descritos através de funções matemáticas sem considerar a diferença de viscosidade entre os fluidos, isto é, $M = 1$ e portanto $\mathbb{G} = \mathbb{K}(\mathbf{x})$ para uma viscosidade do fluido residente $\nu_{res} = 1$.

A primeira função de permeabilidade que utilizaremos representa uma única fenda sinuosa ao longo de todo domínio bidimensional $\Omega = [0, 1]^2$ (exemplo *step-21*¹ - *deal.ii* [88]), a qual é dada por

$$\mathbb{K}(\mathbf{x}) = \max \left(e^{-\left(\frac{x_2 - \frac{1}{2} - 0.1 \sin(10x_1)}{0.1} \right)^2}, 0.01 \right). \quad (5.8)$$

Limita-se inferiormente a função a 0.01 visando garantir que a razão entre a permeabilidade máxima e mínima permaneça limitada. Abranger muitas ordens de magnitude nesse campo pode acarretar em problemas na resolução do sistema, pois a razão entre as permeabilidade máxima e mínima é um fator a se considerar na etapa de condensação estática. Ainda, se esta razão for muito grande poderá impedir que resolvedores lineares iterativos atinjam

¹ <https://www.dealii.org/8.5.0/doxygen/deal.II/step_21.html>

convergência. A Figura 5.3 ilustra as configurações do domínio e a distribuição do campo de permeabilidades.

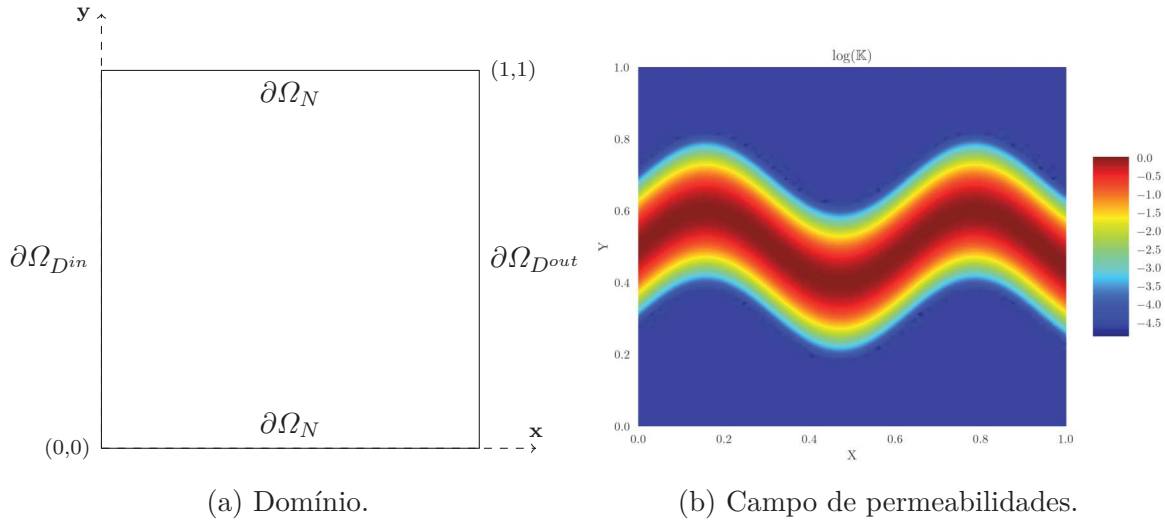


Figura 5.3 – (a) Configuração do domínio com suas regiões de contorno, (b) campo de permeabilidades.

A simulação ocorre dentro do intervalo de tempo $(0, 1.1]$, com sobre o domínio Ω complementado pelas condições de contorno para o problema de Darcy

$$p = 1.0 \text{ em } \partial\Omega_{Din} \times (0, T], \quad p = 0.0 \text{ em } \partial\Omega_{Dout} \times (0, T], \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0.0 \text{ em } \partial\Omega_N \times (0, T],$$

e para o problema do transporte

$$c = 1.0 \text{ em } \partial\Omega_{Din} \times (0, T], \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0.0 \text{ em } \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_{Dout} \times (0, T].$$

As condições iniciais para os problemas de Darcy e do transporte são definidas respectivamente como pressão nula e concentração nula, isto é, $p_0 = 0$ e $c_0 = 0$.

Tomando os coeficientes referentes ao tensor de dispersão \mathbb{D} como

$$\alpha_{mol} = 1.8 \times 10^{-5}, \quad \alpha_l = 1.8 \times 10^{-3}, \quad \alpha_t = 1.8 \times 10^{-4}$$

resultará num número de Péclet, $P_e = 546.97$, o que indica um regime predominantemente convectivo. Estabelecemos ainda $\phi = 1$ e as fontes $f = g = 0$.

Para uma escolha fixa de malha 32×32 , um passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e polinômios de ordem $k = 1, 2, 3$, simulamos o problema postulado nesta subseção. As Figuras 5.4a-5.4c apresentam uma comparação dos métodos híbridos estáveis com estabilizados empregando multiplicadores contínuos e descontínuos através de uma seção da solução em $y = 0.5$. Neste caso, uma maior estabilidade pode ser observada com o uso de multiplicadores descontínuos. Os resultados para os métodos estáveis e estabilizados com multiplicadores descontínuos muito parecidos. Porém, é possível observar uma suavidade maior na aproximação com

espaços \mathcal{RT}_k para $k = 2, 3$ próximo ao ponto $x = 0.5$. Desse modo, optamos por esse método para apresentação da simulação bidimensional realizada ao longo do intervalo de tempo $(0, 0.5]$.

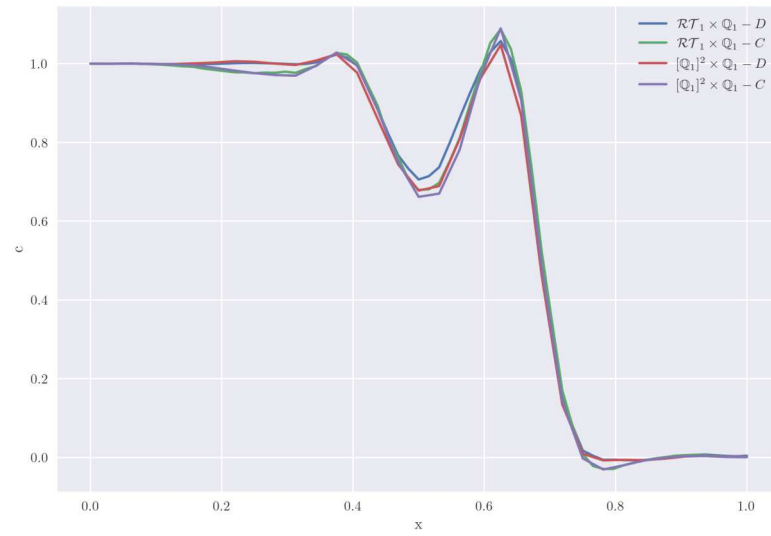
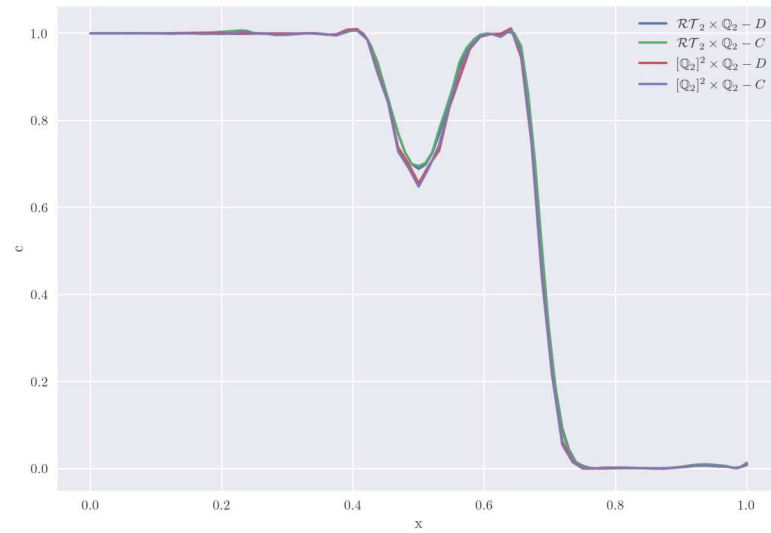
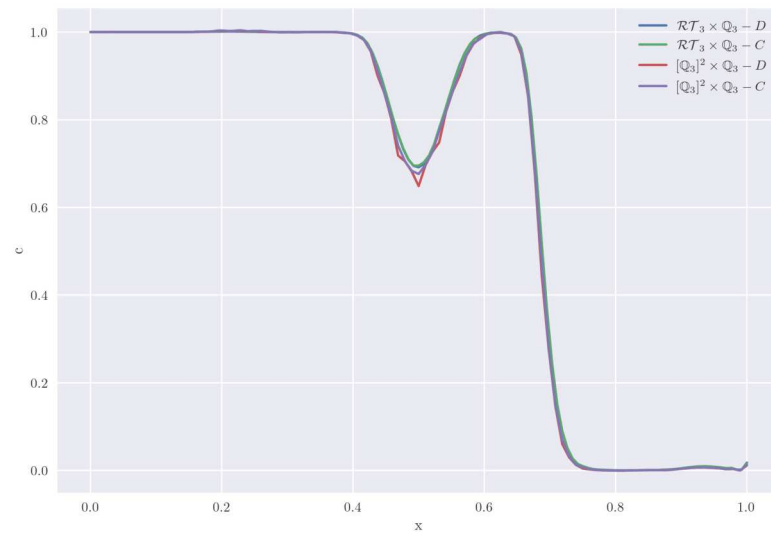
(a) $k = 1$.(b) $k = 2$.(c) $k = 3$.

Figura 5.4 – Seção da concentração em $y = 0.5$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 1.1$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k , sobre uma malha de elementos finitos de 32×32 elementos.

A Figura 5.5 apresenta a superfície descrita pela aproximação obtida ao empregarmos um método estável com multiplicadores descontínuos, os resultados são todos visualmente parecidos, optou-se por exibir apenas um deles.

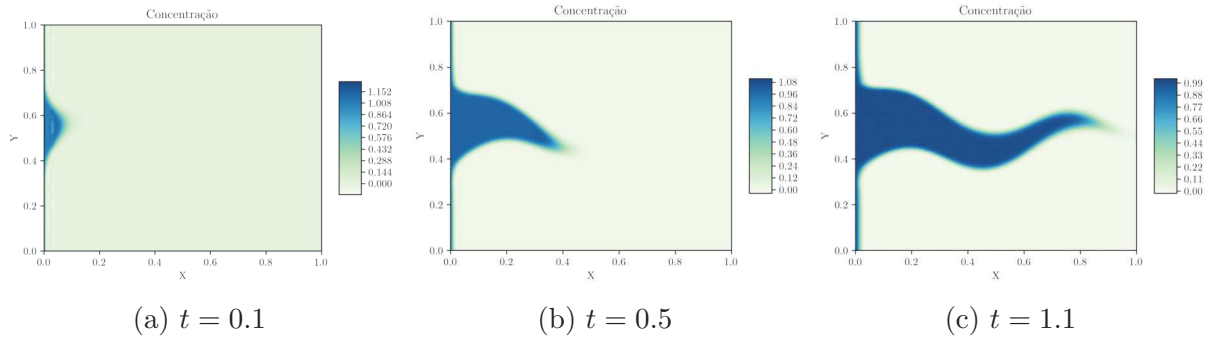


Figura 5.5 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $\mathcal{RT}_3 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.

5.3.3 Campo de Permeabilidades Aleatório

Simulamos um novo meio heterogêneo gerado de forma aleatória, onde o tensor de permeabilidade é dado pela seguinte função que modela um meio aleatório (`deal.i.i` [88], exemplo `step-21`)

$$\mathbb{K}(\mathbf{x}) = \min \left(\max \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i(\mathbf{x}), 0.01 \right), 1 \right), \quad (5.9)$$

onde

$$\gamma_i(\mathbf{x}) = e^{-\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}{0.05}\right)^2}$$

e os pontos x_i são posições escolhidas aleatoriamente dentro do domínio Ω . Para a simulação apresentada neste trabalho em específico definiu-se $N = 40$ e a semente para o estado aleatório inicial com o valor 123. A função (5.9) modela um meio no qual existem centros de maior permeabilidade, como por exemplo falhas numa rocha, incorporados em uma matriz porosa. Observe que limitamos a função de permeabilidade acima e abaixo a fim de garantir um domínio espacial controlado, o qual é ilustrado na Figura 5.6.

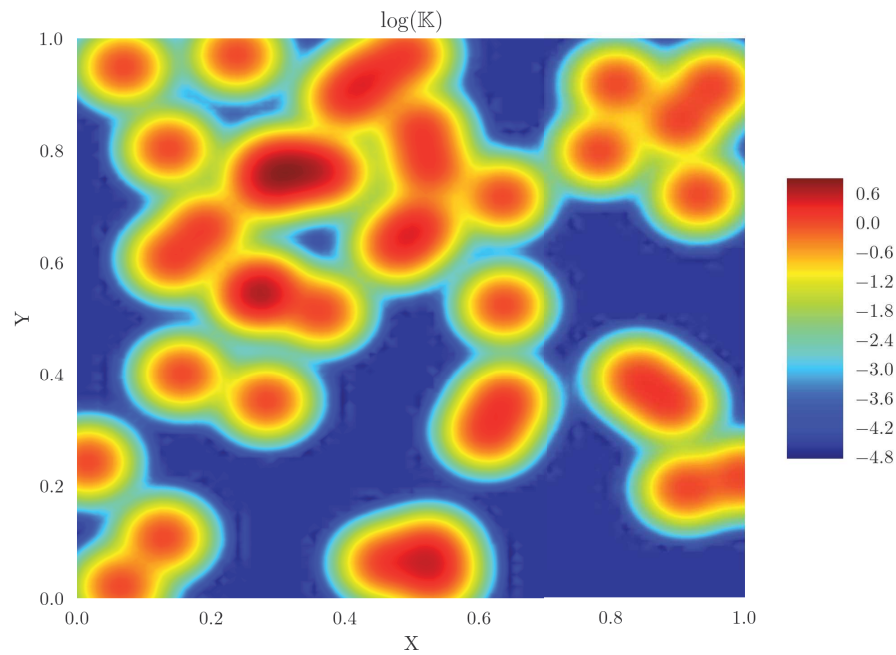


Figura 5.6 – Amostra obtida de um campo de permeabilidade definido por (5.9).

Para esta simulação, assumimos as mesmas configurações da simulação anterior, apresentada na Seção 5.3.2, porém com um novo campo de permeabilidades (5.9) em um domínio temporal $(0, 2.5]$. A partir dessas configurações obtemos um número de Péclet $Pe = 543.61$.

Para este estudo, devido à configuração do campo de permeabilidades no domínio (5.9), a seção é realizada em $y = 0.75$, região onde há indicação de maior permeabilidade como revelado pela Figura 5.6. Os resultados nesta seção são apresentados na Figura 5.7, onde é possível observar diferenças consideráveis entre as aproximações por polinômios de diferentes ordens próximo à região $x = 0.7$, descrevendo um perfil muito diferente com aproximações lineares, Figura 5.7a, se comparado aos resultados para $k = 2, 3$, Figuras 5.7b e 5.7c .

Apresentamos na Figura 5.8 a superfície descrita pela aproximação obtida ao empregarmos um método estável com multiplicadores descontínuos. Novamente os resultados são visualmente semelhantes, dificultando a dedução de um método superior. Porém, mantido o critério da simulação anterior justificamos a escolha feita.

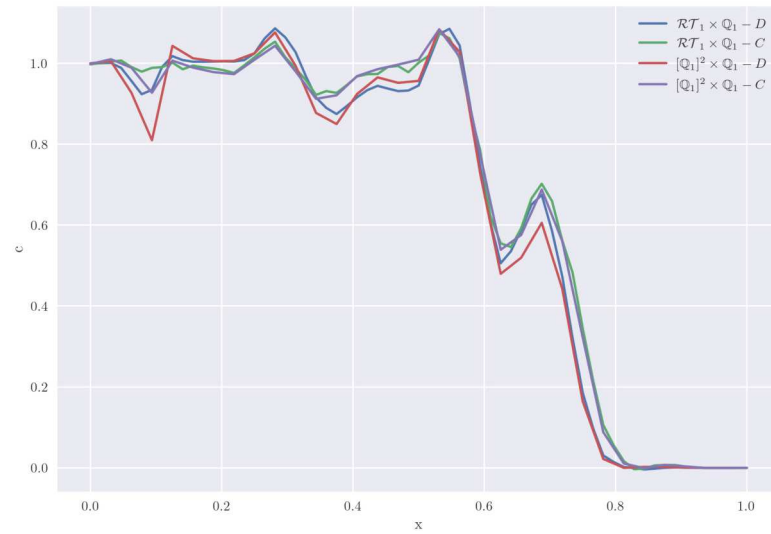
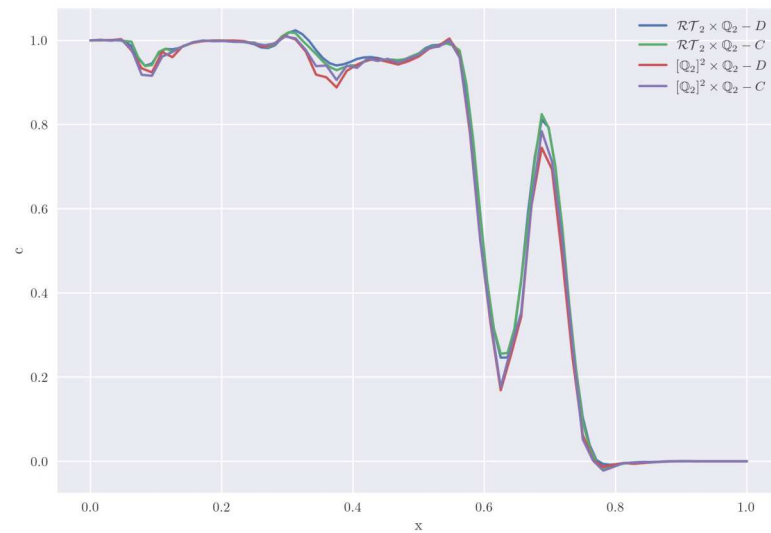
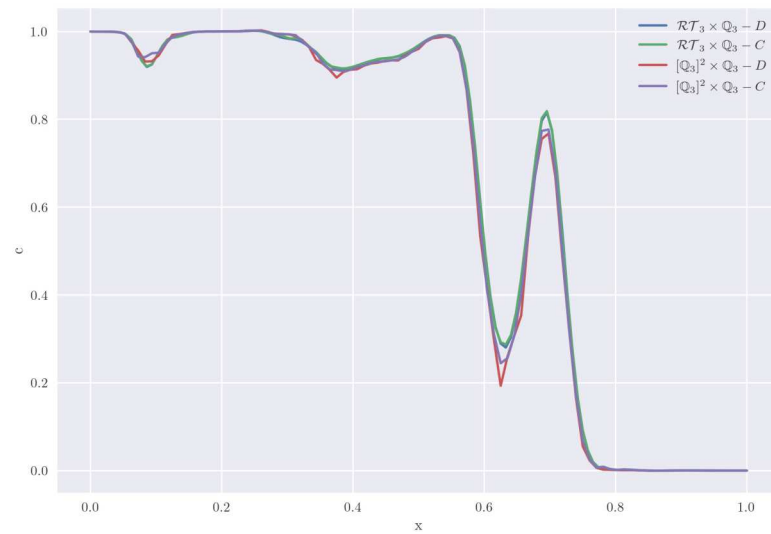
(a) $k = 1$.(b) $k = 2$.(c) $k = 3$.

Figura 5.7 – Seção da concentração em $y = 0.75$ para os diferentes métodos estudados no tempo final de simulação $t = 2.5$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k , sobre uma malha de elementos finitos de 32×32 elementos.

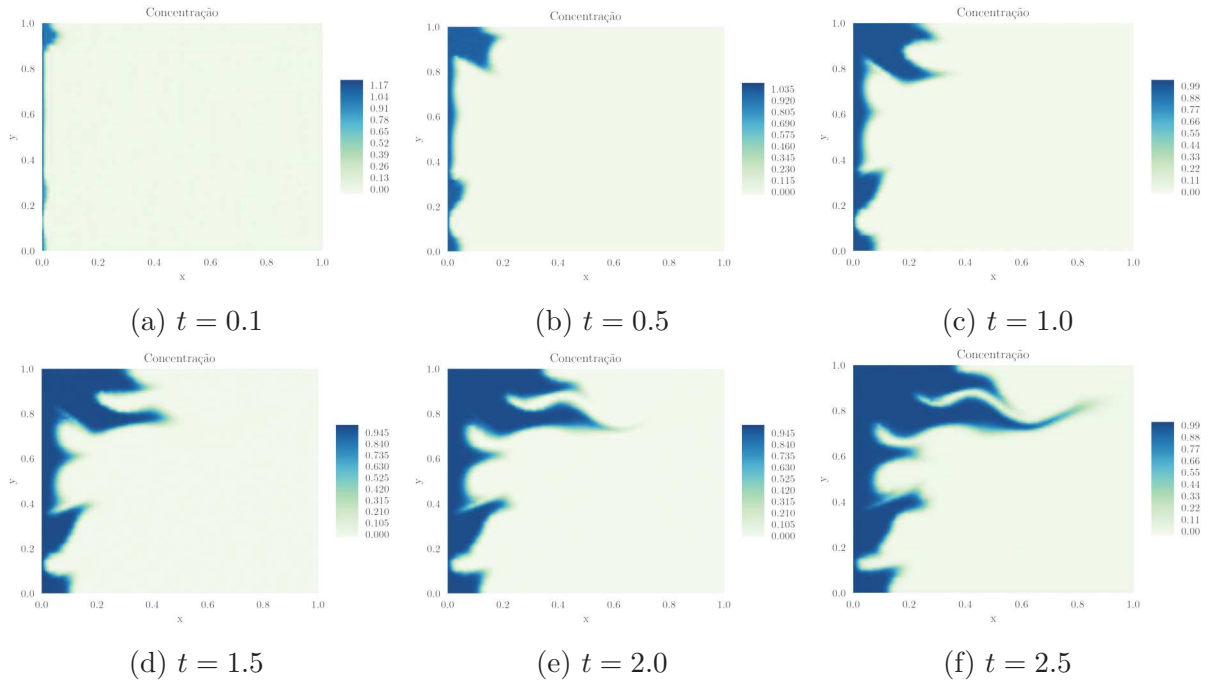


Figura 5.8 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $\mathcal{RT}_3 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.

5.3.4 Campo de Permeabilidades *SPE-10*

Buscando construir um *benchmark* para comparação de métodos na simulação de escoamentos em meios porosos bem como a eficácia de previsão do comportamento do fluido sobre milhões de elementos, a Sociedade de Engenheiros de Petróleo (SPE) criou seu Projeto de Solução Comparativa². Trata-se de uma base de dados que descreve um domínio dividido em $60 \times 220 \times 85$ elementos, o que resulta no número de 1.122.000 elementos. Das 85 camadas na terceira dimensão da geometria, as 35 camadas superiores são descritas como uma formação de *Tarbert* [89], que caracteriza águas rasas com uma permeabilidade relativamente suave; já as 50 camadas inferiores representam águas mais profundas, onde geralmente aparecem canais com uma permeabilidade mais destacada.

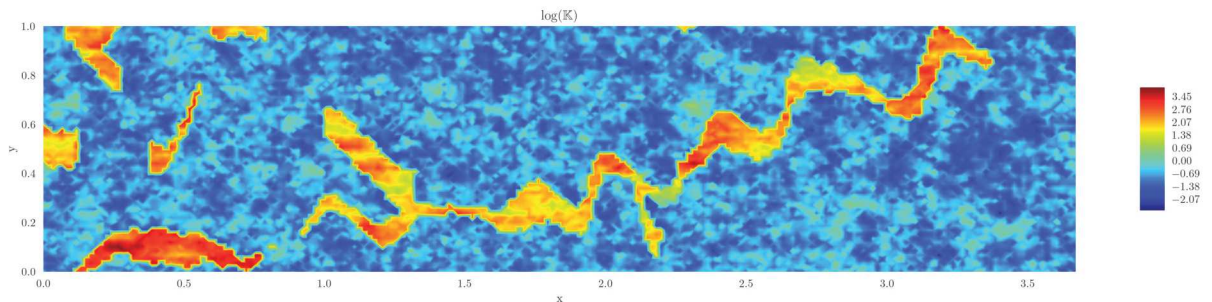


Figura 5.9 – Campo de permeabilidade definido referente à camada 36 da base do *SPE-10*.

¹ Base de dados do projeto <<https://www.spe.org/web/csp/datasets/set02.htm>>

Dessa forma, utilizamos para simulação a camada 36, ilustrada na Figura 5.9, presente no conjunto mais inferior dessa base, ou seja, que descreve águas profundas e possui canais de permeabilidade mais destacados. A simulação do problema inicia-se a partir de um dado de entrada com o campo de permeabilidades sobre um domínio $\Omega = [0; 3.67] \times [0; 1.0]$, com condições de contorno idênticas às do problema definido na subseção 5.3.2, ajustados à configuração do novo domínio, ou seja, movendo a condição de contorno de saída, $\partial\Omega_{Dout}$, para o limite do domínio em $x = 3.67$. Para essas configurações calculamos um número de Péclet $P_e = 1977.67$. Conforme as especificações provenientes da entrada de dados, o domínio é discretizado por uma malha de 220×60 elementos.

Seguindo a estratégia de cortes no domínio para análise do resultado, optamos por uma seção em $y = 0.25$ conforme a configuração do campo de permeabilidades. A Figura 5.10 apresenta o perfil de concentração ao longo da seção escolhida para polinômios de diferentes ordens de aproximação ($k = 1, 2, 3$).

Os perfis obtidos destacam mais uma vez certa deficiência de estabilidade empregando multiplicadores contínuos, principalmente para aproximações de ordem $k = 1$, ver Figura 5.10a. Tanto o método estável quanto o método estabilizado apresentam fortes oscilações em diversos pontos críticos da seção, sendo mais pronunciados em pontos próximos a $x = 1.5$. Os resultados obtidos empregando um multiplicador descontínuo se assemelham nos testes realizados e são apresentados na Figura 5.11. Porém, além de uma leve indicação de convergência para um perfil, já traçado pelo método estabilizado ainda com polinômios lineares (o perfil traçado pelo método estabilizado com multiplicadores descontínuos próximo a $x = 1.5$, por exemplo), esse método possui um menor custo computacional se comparado ao método estável com espaços de Raviart-Thomas. Apesar dos perfis serem visualmente semelhantes essas observações motivam a apresentação da superfície simulada com o método estabilizado com multiplicadores descontínuos na Figura 5.11.

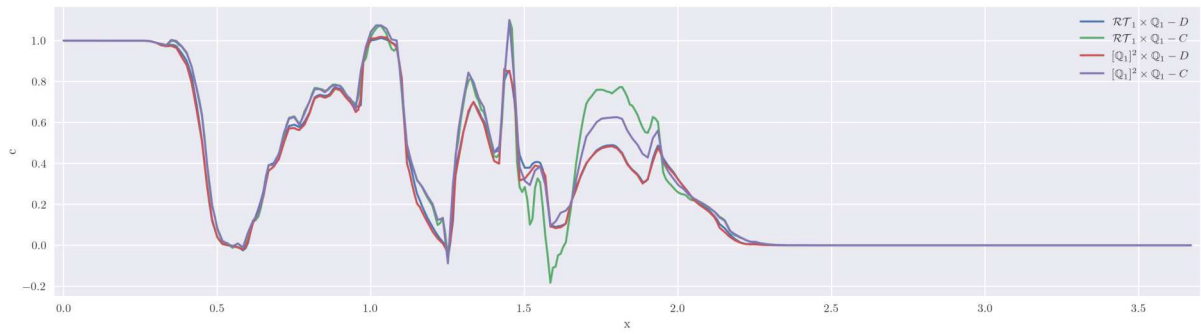
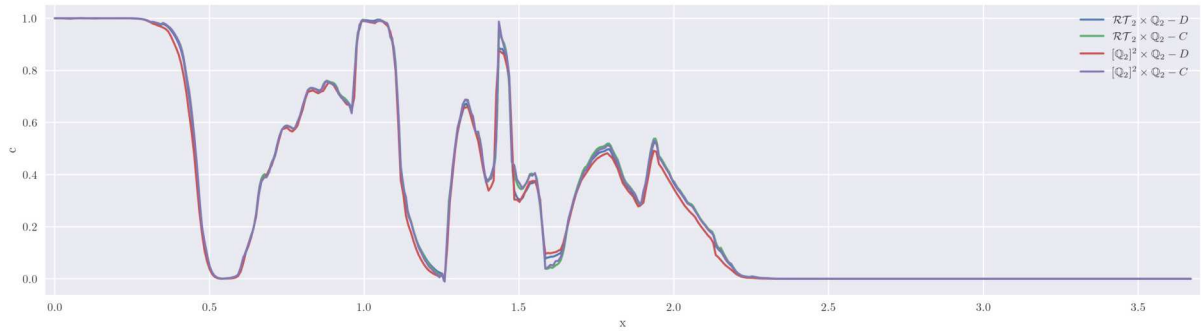
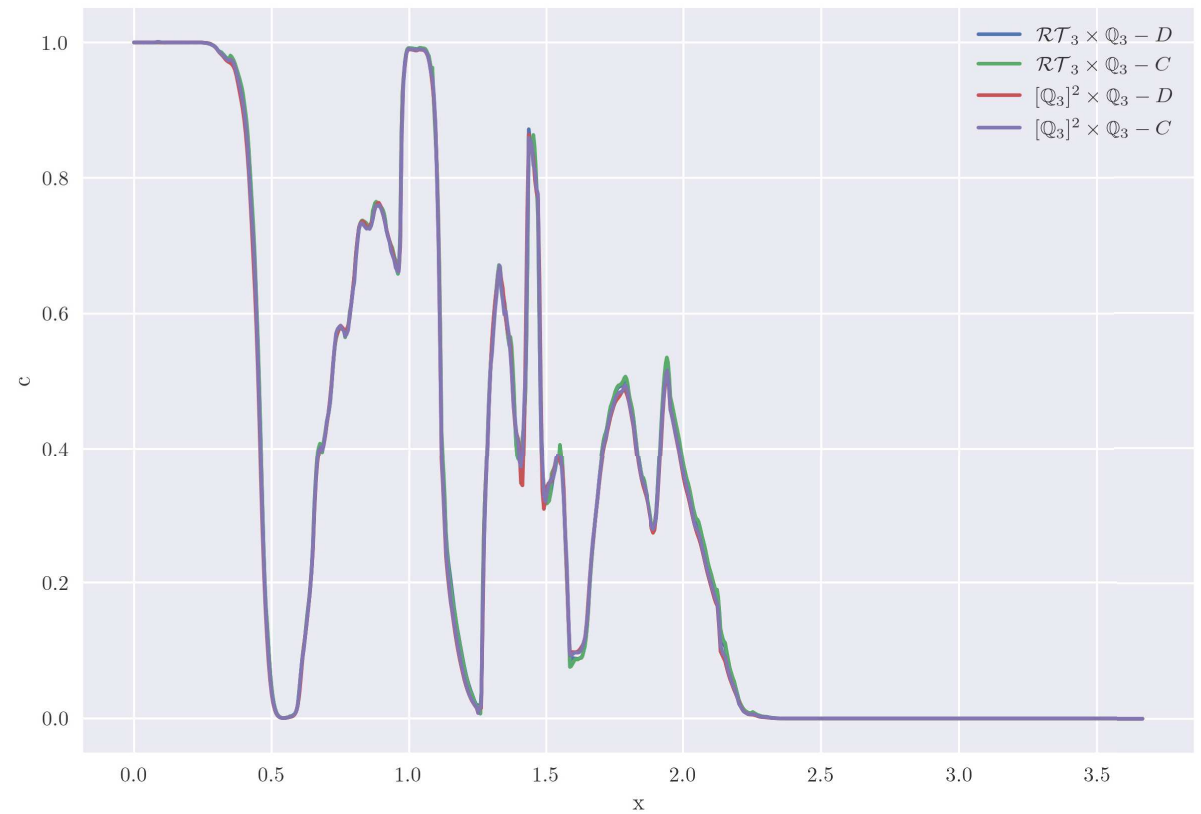
(a) $k = 1$.(b) $k = 2$.(c) $k = 3$.

Figura 5.10 – Corte da concentração em $y = 0.25$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 4.5$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k .

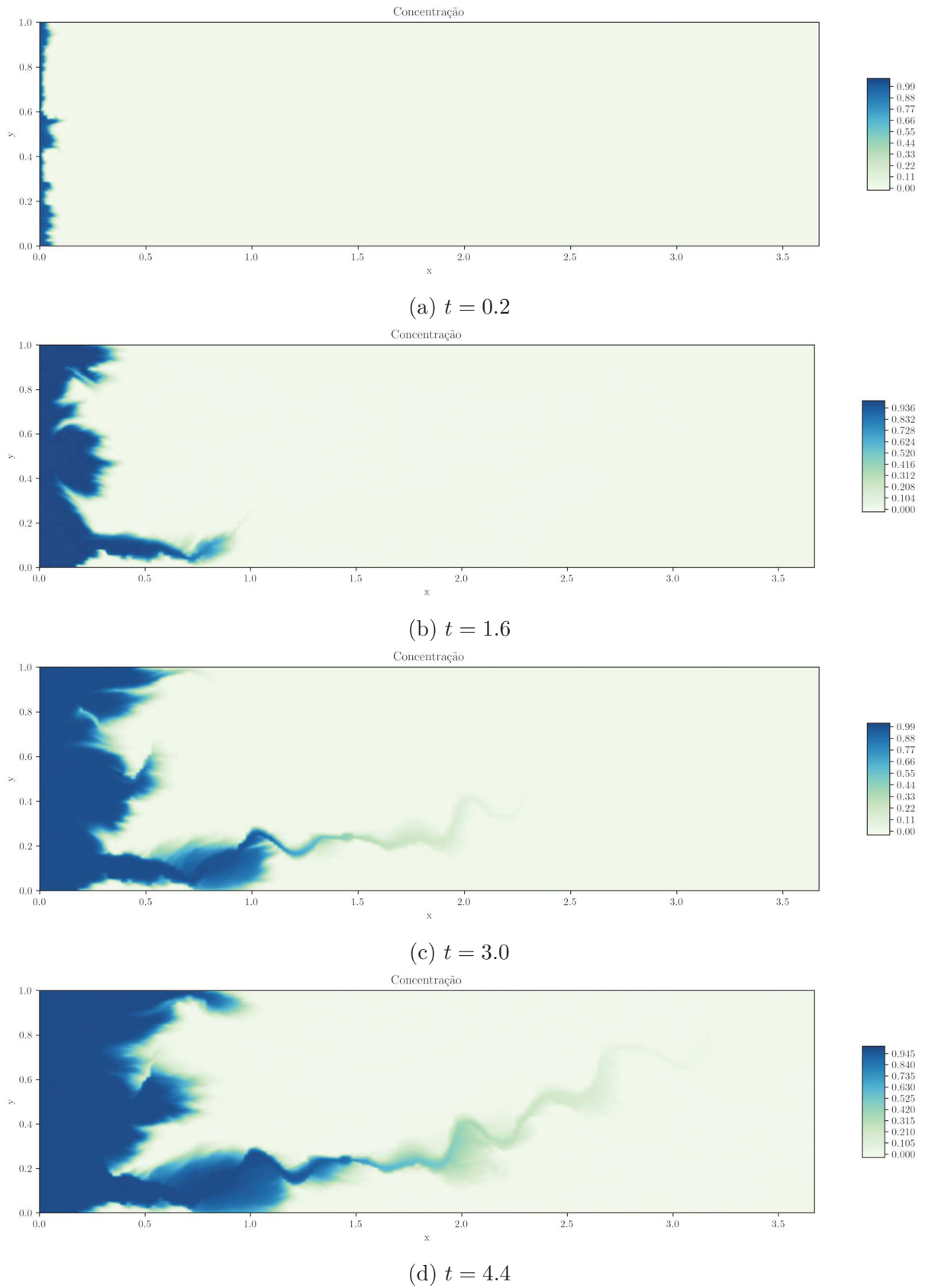


Figura 5.11 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $[\mathbb{Q}_3]^2 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.

5.3.4.1 SPE-10 com Mobilidade Adversa

Simulamos a mesma configuração do problema estudado na subseção 5.3.4, adotando uma razão de mobilidade adversa $M = 100$, fixada a viscosidade do fluido residente, $\nu_{res} = 1$, e portanto uma condutividade hidráulica dependente da concentração $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbf{x}, c)$. Essa escolha gera um problema fortemente acoplado, o que nos obriga resolver o problema de Darcy em todo instante de tempo como no esquema descrito na Figura 5.2. A diferença de viscosidades entre duas espécies miscíveis tem como consequência a aceleração do processo de migração, favorecendo ainda mais formação de “dedos” no transporte do fluido injetado. Por esse motivo escolhemos um tempo final menor para as simulações, $t = 1.3$.

O ponto de corte para avaliação de uma seção do resultado é mantida no ponto $y = 0.25$ visto que o campo de permeabilidades é mantido o mesmo. Assim, os resultados do estudo comparativo são exibidos na Figura 5.12, onde é possível evidenciar um realce da proeminência do *fingering* nas soluções se comparado ao problema anterior com razão de mobilidade unitária. Para essa simulação observamos o maior número de Péclet, $P_e = 1994.56$, dentre todos os instantes de tempo.

O método híbrido estabilizado adotando multiplicadores descontínuos novamente demonstra uma capacidade em capturar mudanças abruptas no comportamento do fluido em certas regiões, porém ao se observar toda a seção, não há uma concordância entre os métodos mesmo ao adotarmos aproximação polinomiais cúbicas, como pode ser observado na Figura 5.12c, fato ocorrido com os experimentos anteriores. Apresentamos na Figura 5.13 o comportamento do fluido onde é possível observar a geração de padrões fractais característicos de problemas com razão de mobilidade adversa.

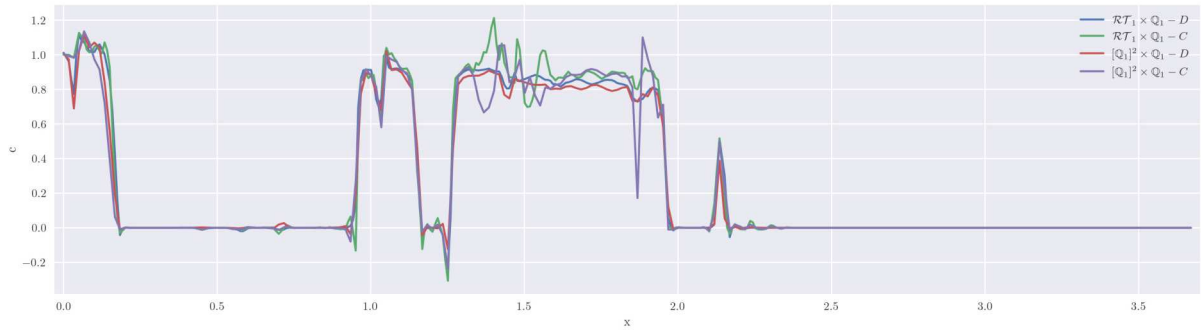
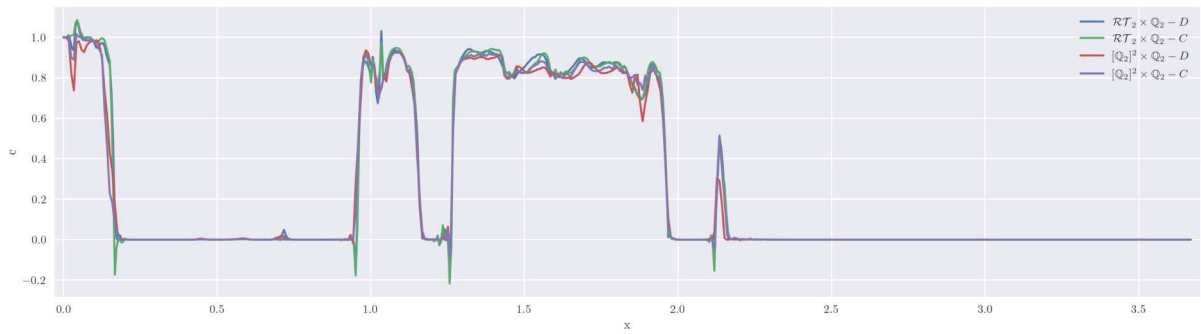
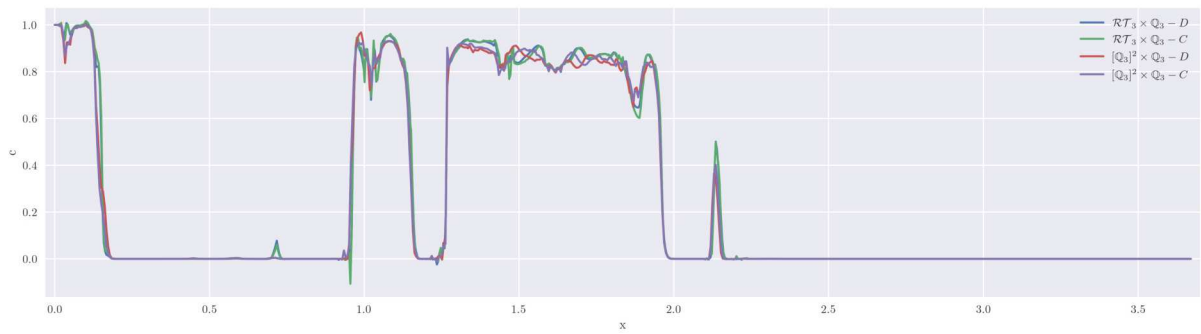
(a) $k = 1$.(b) $k = 2$.(c) $k = 3$.

Figura 5.12 – Corte da concentração em $y = 0.25$ para diferentes métodos no tempo final de simulação $t = 1.3$, com resultados agrupados pela escolha de ordem polinomial k .

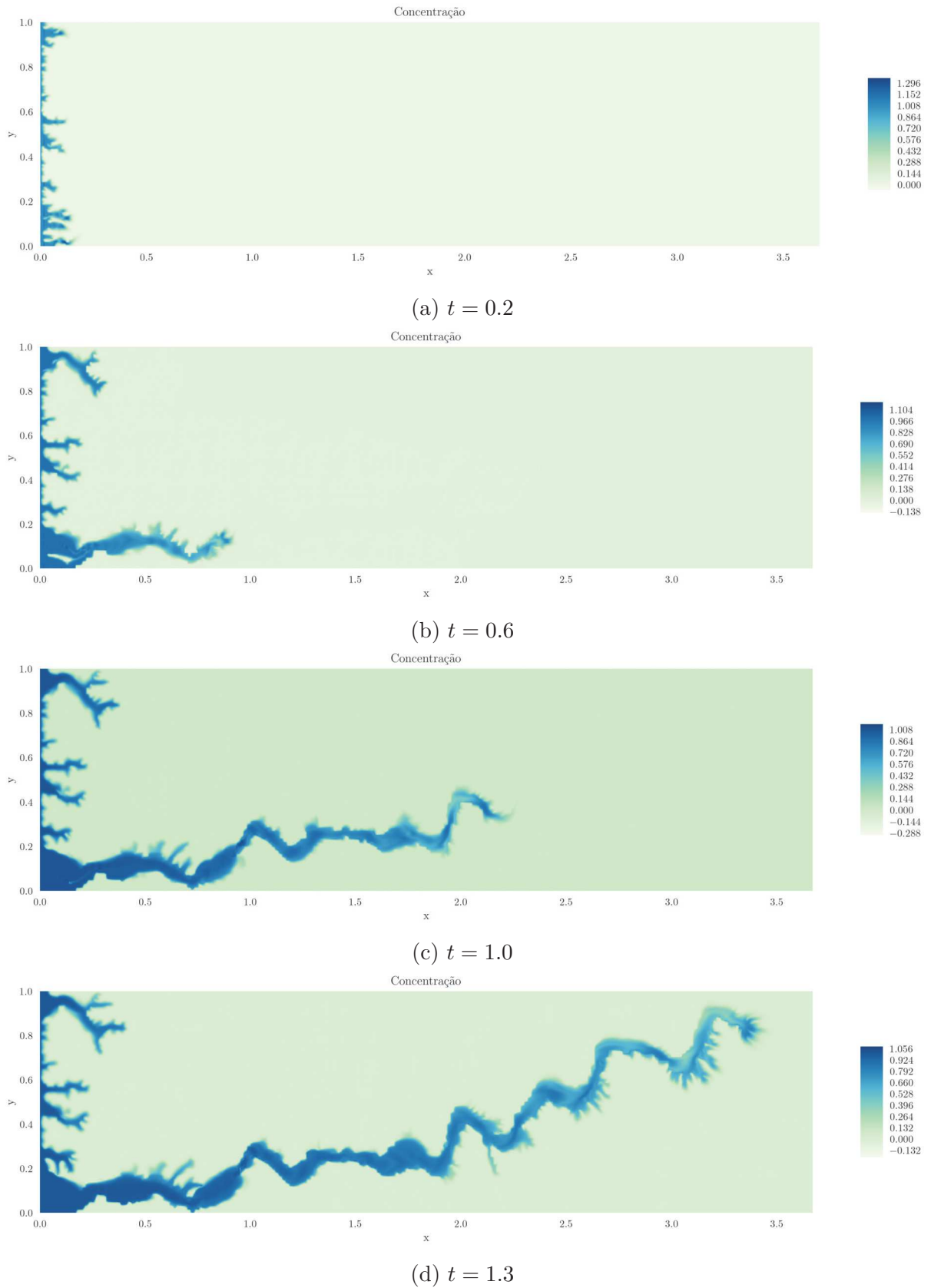


Figura 5.13 – Diferentes instantes de tempo t escolhendo o espaço $[\mathbb{Q}_3]^2 \times \mathbb{Q}_3 - p_3$ com multiplicadores descontínuos.

5.3.5 Experimentos em células de Hele-Shaw

A injeção de um fluido com viscosidade diferente do fluido residente no reservatório produz comumente padrões complexos de concentração ao longo do deslocamento mesmo na presença de um meio homogêneo, ou seja, uma permeabilidade constante ao longo do domínio. Neste contexto, propomos a reprodução do experimento de laboratório realizado por Malhotra, Sharma e Lehman[2], relacionado à simulação de uma geometria bidimensional retangular onde o fluido escoa na direção de maior comprimento, chamado de célula de *Hele-Shaw*, simulando uma camada infinitesimal onde a injeção é feita no canto esquerdo e a extração no canto direito de um aparato. O aparato utilizado para realização do experimento em laboratório é ilustrado na Figura 5.14 em diferentes vistas do protótipo que compreende um canal com 84cm de comprimento e 5cm de altura.

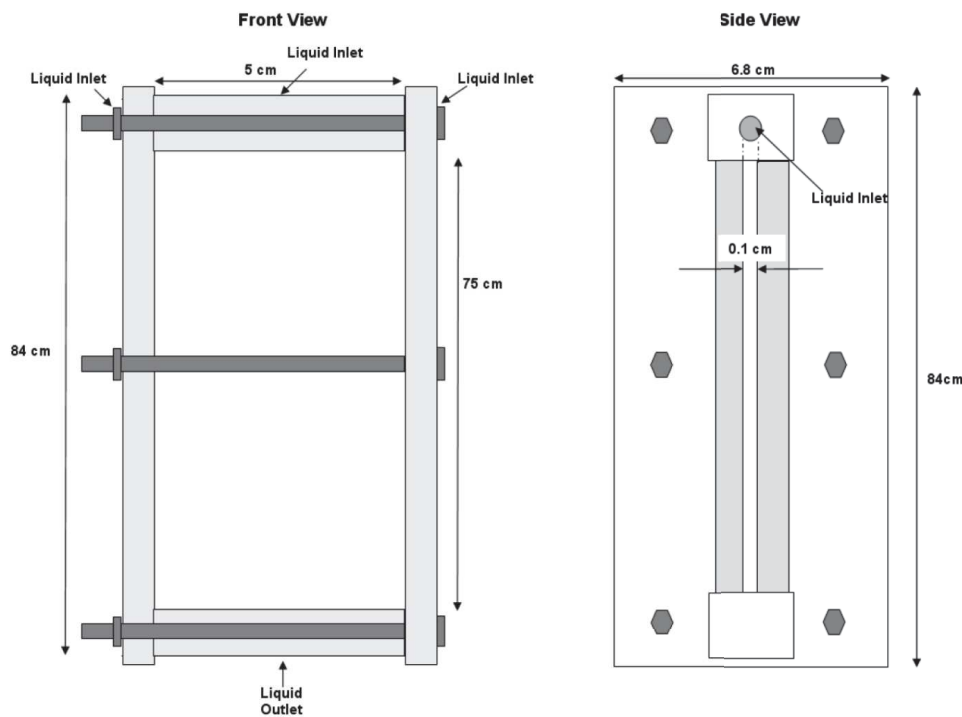


Figura 5.14 – Esquema do experimento de laboratório a ser reproduzido. (Figura extraída de Malhotra, Sharma e Lehman[2])

Nesse trabalho experimental, Malhotra, Sharma e Lehman[2] injetam água com corante em soluções de glicerol buscando quantificar o crescimento da chamada zona de mistura, onde ocorre o surgimento de “dedos”. No exemplo reproduzido computacionalmente neste trabalho, a água tingida é injetada na célula a uma taxa de 4.69 ml/min , onde reside uma solução 79% composta por glicerol com uma razão de mobilidade $M = 50$ e um número Péclet $P_e = 10234$, dando origem aos perfis apresentados no lado esquerdo da Figura 5.15. Neste contexto, são adotados os mesmos dados experimentais em uma malha de 1500×100 elementos com ordem polinomial $k = 1$, com um passo de tempo $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, $\mathbb{G} = \mathbb{I}$, $\alpha_{mol} = 1.53 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, $\alpha_l = \alpha_{mol}$, $\alpha_t = 1.53 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ e $\phi = 1.0$.

Ressaltamos ainda que o modelo a reproduzir esse experimento despreza a densidade do fluido e a força gravitacional, variáveis que, mesmo que pouco relevantes para o problema, num experimento real geram pequenas interferências na solução, fato que para reprodução de pequenas instabilidades decorrentes da mobilidade adversa pode contribuir com a divergência entre o modelo e a realidade.

Adotando o método híbrido com espaços de Raviart-Thomas e multiplicadores de Lagrange descontínuos comparamos os resultados nos instantes $t = 22, 48, 63, 68, 80, 90$ segundos como pode ser visto na Figura 5.15.

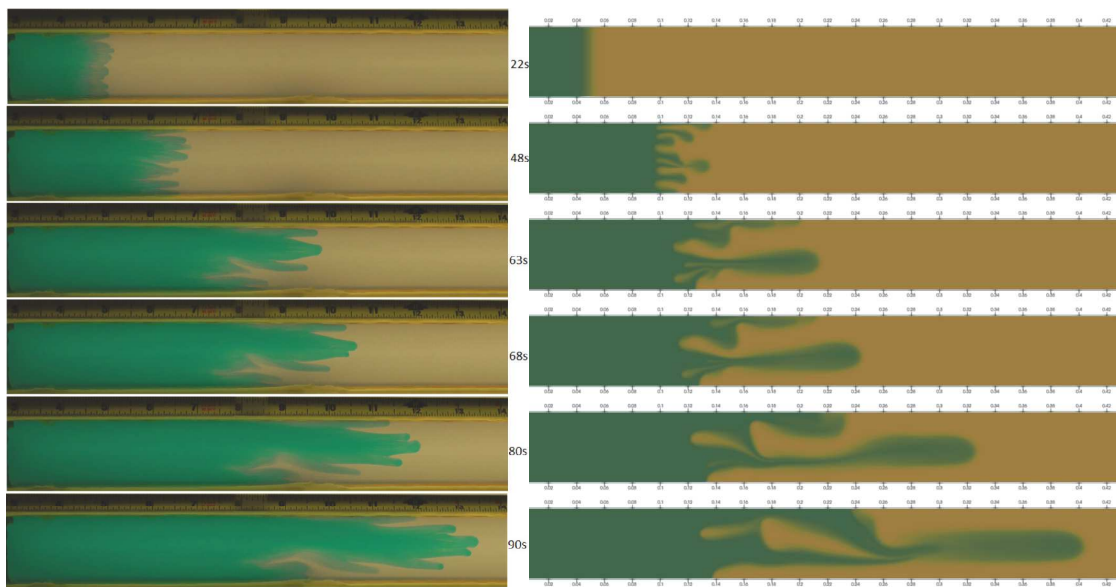


Figura 5.15 – Comparação entre a concentração observada no experimento em uma célula de Hele-Shaw [2] e a solução aproximada para uma malha de 1500×100 elementos, adotando $M = 50$, $P_e = 10234$ e o passo de tempo $\Delta t = 0.1s$.

A Figura 5.15 acima, apesar da similaridade, não consegue capturar de forma fiel os padrões fractais inerentes do problema. Evidenciando a instabilidade não capturada corretamente decorrente do refinamento da malha, abaixo apresentamos o resultado no instante final, $t = 90$, da simulação anterior para diferentes escolhas de malhas menos refinadas.

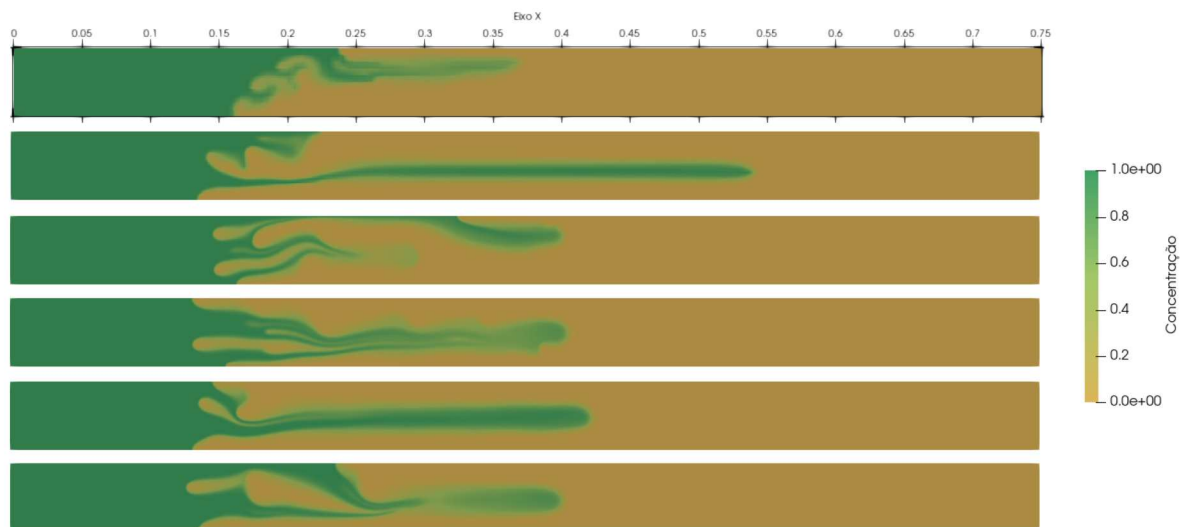


Figura 5.16 – Comparação entre os perfis de concentração obtidos em simulações do experimento apresentado na Figura 5.15 no instante $t = 90s$ adotando malhas com os seguintes números de elementos em cada malha: 150 x 10, 300 x 20, 600 x 40, 900 x 60, 1200 x 80 e 1500 x 100, dispostos aqui nessa ordem. Em todas as simulações adotou-se $\Delta t = 0.1s$

Os resultados numéricos mostram um bom desempenho do método proposto na captura tanto da formação de “dedos” quanto da propagação da frente de onda pela água tingida. Além disso, o esquema *upwind* empregado é capaz de estabilizar o regime dominado por convecção, causado pela redução da viscosidade do fluido residente adotado no experimento, com um número de Péclet da ordem de 10^4 .

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Este capítulo dedica-se a fazer as considerações finais deste trabalho, mas tão importante quanto isso destina parte de seu espaço para explorar temas a serem estudados futuramente. Buscamos apresentar os próximos passos de forma clara, de modo a encorajar o leitor a explorar ainda mais o conteúdo exposto.

Inicialmente comentamos a eficácia dos métodos diante dos problemas propostos, seja em estudos munidos de soluções exatas ou não. Após a introdução do universo do problema, dos conceitos e das definições necessárias para o entendimento da física que foi estudada e das vantagens do uso de métodos mistos híbridos no tratamento desses tipos de problemas, apresentados em ordem no Capítulo 1 e no Capítulo 2, validamos os métodos estudados para a resolução do problema de Darcy (2.6) no Capítulo 3, utilizando as duas formulações combinadas com escolhas de multiplicadores contínuos ou descontínuos, explorando técnicas para redução do custo computacional. Em sequência, no Capítulo 4, estudamos estabilizações *upwind* para efeitos convectivos em métodos de elementos finitos mistos híbridos, bem como uma discretização para o termo transiente por meio de um esquema de diferenças finitas de segunda ordem inspirado no método de Crank-Nicolson, demonstrando robustez quanto à estabilização de efeitos convectivos e eficácia na discretização temporal. Por fim, no Capítulo 5, o acoplamento do problema Darcy-transporte é discutido junto a uma proposta de formulação compatível a ambos os subproblemas, com a estratégia de resolução empregada sobre a proposta sendo descrita em detalhes. Estudos de convergência do erro são realizados para confirmar a qualidade da proposta e em seguida diferentes campos de permeabilidade são empregados para que o modelo seja testado em casos sem a existência de uma solução exata. Simulações em regimes com mobilidade adversa são consideradas a fim de analisar a capacidade dos métodos de reproduzir padrões fractais altamente ramificados.

Apesar da robustez observada para o método de Raviart-Thomas, algumas vantagens podem ser observadas no método estabilizado. Uma delas é a possibilidade de avanço nos estudos de técnicas para redução da ordem do polinômio interpolador sobre o esqueleto da malha como apresentado no Capítulo 3. O método estabilizado também indicou maior capacidade em capturar padrões oscilatórios, principalmente quando há a formação dos chamados “dedos viscosos” (*fingering*). O emprego do método com multiplicadores descontínuos mostrou-se capaz de recuperar perfis com convergência mais rápida entre as quatro abordagens, se comparada a ordem do polinômio onde ocorre uma visível concordância do perfil entre os métodos. Essa observação indica que esse método pode vir a ser uma boa opção para um estudo que se dedique a capturar pequenas ramificações da frente de onda, onde há a interface soluto-solvente.

As formulações propostas neste trabalho são capazes de gerar resultados com perfis

de acordo com o esperado para o problema. Porém aqui observamos a deficiência diante da captura de oscilações inerentes à física do problema. Oscilações dessa forma não devem ser tratadas de modo a serem removidas do problema, mas sim capturadas para que o modelo seja capaz de reproduzir de forma fidedigna a realidade do processo estudado. Esse problema nos motiva a seguir os estudos na presença de mobilidade adversa. A seguir são apresentados alguns possíveis trabalhos que podem proceder deste.

Nos dedicamos no fim deste Capítulo a comentar algumas possíveis extensões a serem investigadas e/ou desenvolvidas:

- *Extensão para problemas tridimensionais*

Uma extensão natural quando se pensa em simulações realistas é o tratamento de problemas em 3 dimensões. Algumas soluções exatas apresentadas neste trabalho são generalizadas e o estudo pode ser expandido para mais uma dimensão. A própria base dados do *SPE-10*¹ fornece um domínio tridimensional munido de um campo de permeabilidades que pode servir como um *benchmark* em futuras simulações;

- *Análise dos Métodos Propostos*

Não é do nosso conhecimento a análise para as formulações propostas nos Capítulos 4 e 5. Sendo a prova de convergência das mesmas uma peça importante para se atestar a qualidade do método;

- *Estudo dos coeficientes dos termos de resíduos de mínimos quadrados para o problema do transporte*

A proposta de estabilização por termos de resíduos de mínimos quadrados para o problema do transporte feita neste trabalho deve ser estudada mais a fundo para que escolhas apropriadas possam ser feitas para os valores de δ_2^T e δ_3^T ;

- *Combinação das diferentes formulações*

O uso de formulações compatíveis em problemas acoplados pode desprezar bons resultados ao não observar um universo de soluções dado pela combinação de diferentes abordagens, neste trabalho denominado como formulações cruzadas;

- *Estabilizações upwind*

Outras estabilizações dos efeitos predominantemente convectivos podem apresentar melhores resultados junto a métodos de elementos finitos híbridos para o problema do transporte. A proposição de novas abordagens, bem como um estudo comparativo entre diferentes estratégias de estabilização dos efeitos convectivos é uma frente de estudo oriunda deste trabalho;

¹ <<https://www.spe.org/web/csp/datasets/set02.htm>>

- *Novas aproximações para o termo temporal*

A estratégia adotada para a discretização do termo temporal apresentou bons resultados quanto à redução do custo computacional. Aliado a isso, o fato do método não exigir uma condição inicial para o multiplicador faz com que a extensão dessa ideia para discretizações de mais alta ordem seja uma proposta interessante;

- *Adaptatividade-hp*

Uma frente bastante interessante, devido à redução do custo computacional aliada a uma maior precisão da solução, são as estratégias de h e p adaptatividade, que podem ser empregadas naturalmente pelos métodos híbridos de elementos finitos devido à sua construção descontínua.

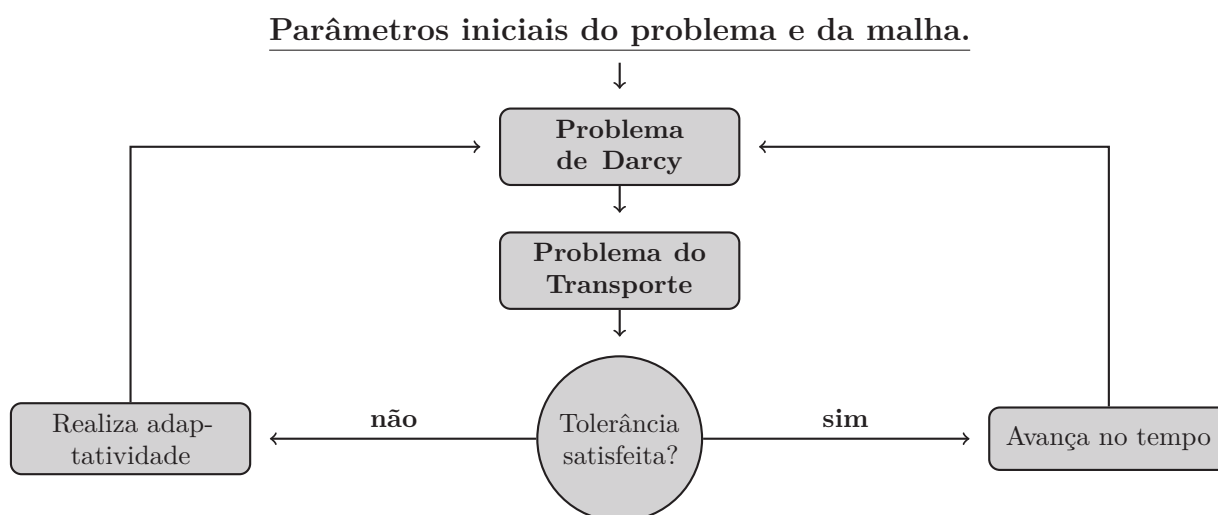


Figura 6.1 – Diagrama de transições do programa a se desenvolver para a execução do algoritmo proposto.

A aplicação de estratégias de hp-adaptatividade nos métodos propostos nesta dissertação traz a necessidade de criar estimadores de erros para localizar as regiões de menor precisão da solução e consequentemente definir estruturas de dados que permitam a adaptatividade de malha e/ou polinomial. O diagrama 6.1 acima exemplifica o funcionamento da adaptatividade;

- *Paralelização*

Utilizar paralelização para os métodos híbridos, buscando aumentar a eficiência computacional do código, principalmente em problemas tridimensionais e/ou que empregam interpolações de alta ordem.

REFERÊNCIAS

- 1 EGGER, H.; SCHÖBERL, J. A hybrid mixed discontinuous Galerkin finite-element method for convection–diffusion problems. IMA Journal of Numerical Analysis, Oxford University Press, v. 30, n. 4, p. 1206–1234, 2010.
- 2 MALHOTRA, S.; SHARMA, M. M.; LEHMAN, E. R. Experimental study of the growth of mixing zone in miscible viscous fingering. Physics of Fluids, AIP Publishing, v. 27, n. 1, p. 014105, 2015.
- 3 SETTARI, A.; PRICE, H.; DUPONT, T. Development and application of variational methods for simulation of miscible displacement in porous media. Society of Petroleum Engineers Journal, OnePetro, v. 17, n. 03, p. 228–246, 1977.
- 4 HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. Annual review of fluid mechanics, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987.
- 5 LAKE, L. W. et al. Fundamentals of Enhanced Oil Recovery. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2014.
- 6 HANSPAL, N. et al. Numerical analysis of coupled Stokes/Darcy flows in industrial filtrations. Transport in porous media, Springer, v. 64, n. 1, p. 73–101, 2006.
- 7 NICOLAIDES, C. et al. Impact of viscous fingering and permeability heterogeneity on fluid mixing in porous media. Water Resources Research, Wiley Online Library, v. 51, n. 4, p. 2634–2647, 2015.
- 8 LEE, S.; WHEELER, M. F. Adaptive enriched Galerkin methods for miscible displacement problems with entropy residual stabilization. Journal of Computational Physics, Elsevier, v. 331, p. 19–37, 2017.
- 9 NÚÑEZ, Y. et al. Um método híbrido de elementos finitos aplicado a deslocamentos miscíveis em meios porosos heterogêneos. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Elsevier, v. 33, n. 1-2, p. 45–51, 2017.
- 10 IGREJA, I.; MIRANDA, G. de. Hybrid mixed methods applied to miscible displacements with adverse mobility ratio. In: SPRINGER. International Conference on Computational Science. [S.l.], 2020. p. 257–268.
- 11 SANDER, L.; RAMANLAL, P.; BEN-JACOB, E. Diffusion-limited aggregation as a deterministic growth process. Physical Review A, APS, v. 32, n. 5, p. 3160, 1985.
- 12 BETTELHEIM, E. et al. Singularities of the hele-shaw flow and shock waves in dispersive media. Physical review letters, APS, v. 95, n. 24, p. 244504, 2005.
- 13 HELE-SHAW, H. S. Flow of water. Nature, Nature Publishing Group, v. 58, n. 1509, p. 520–520, 1898.
- 14 SAFFMAN, P. Viscous fingering in hele-shaw cells. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, v. 173, p. 73–94, 1986.

- 15 RAVIART, P.-A.; THOMAS, J.-M. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In: Mathematical aspects of finite element methods. [S.l.]: Springer, 1977. p. 292–315.
- 16 BREZZI, F.; DOUGLAS, J.; MARINI, L. D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. Numerische Mathematik, Springer, v. 47, n. 2, p. 217–235, 1985.
- 17 BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. 1. ed. Springer, 1991. (Springer Series in Computational Mathematics). ISBN 0387975829,9780387975825. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=E12A5620B6DA970780070D0F46283BDC>>.
- 18 BADIA, S.; CODINA, R. Stabilized continuous and discontinuous Galerkin techniques for Darcy flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 199, n. 25-28, p. 1654–1667, 2010.
- 19 SAMII, A.; MICHOSKI, C.; DAWSON, C. A parallel and adaptive hybridized discontinuous Galerkin method for anisotropic nonhomogeneous diffusion. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 304, p. 118–139, 2016.
- 20 BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. Revue Française d'Automatique Informatique et Recherche Opérationnelle, Séries Rouge, v. 8, n. R-2, p. 129–151, 1974.
- 21 BABUŠKA, I. The finite element method with penalty. Mathematics of computation, v. 27, n. 122, p. 221–228, 1973.
- 22 ARNOLD, D. N.; BREZZI, F.; FORTIN, M. A stable finite element for the Stokes equations. Calcolo, Springer, v. 21, n. 4, p. 337–344, 1984.
- 23 ARBOGAST, T.; CORREA, M. R. Two families of h (div) mixed finite elements on quadrilaterals of minimal dimension. SIAM Journal on Numerical Analysis, SIAM, v. 54, n. 6, p. 3332–3356, 2016.
- 24 LOULA, A. F.; TOLEDO, E. M. Dual and primal mixed Petrov-Galerkin finite element methods in heat transfer problems. [S.l.], 1988.
- 25 MASUD, A.; HUGHES, T. J. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, v. 191, n. 39-40, p. 4341–4370, 2002.
- 26 CORREA, M.; LOULA, A. Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 197, n. 17-18, p. 1525–1540, 2008.
- 27 BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- 28 LOULA, A. et al. Métodos de elementos finitos aplicados a simulação de reservatórios de petróleo. Relatório Técnico, Projeto CENPES/LNCC, 1992.

- 29 FRANCA, L. P.; FREY, S. L.; HUGHES, T. J. Stabilized finite element methods: I. application to the advective-diffusive model. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 95, n. 2, p. 253–276, 1992.
- 30 JOHNSON, C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- 31 KELLY, D. et al. A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems. International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, v. 15, n. 11, p. 1705–1711, 1980.
- 32 HUGHES, T. J. Finite element methods for convection dominated flows, a multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion; proceedings of the winter annual meeting, new york, ny, december 2-7, 1979. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows., 1979.
- 33 CHRISTIE, I. et al. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, v. 10, n. 6, p. 1389–1396, 1976.
- 34 HEINRICH, J. et al. An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, n. 1, p. 131–143, 1977.
- 35 GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. D. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 68, n. 1, p. 83–95, 1988.
- 36 HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.
- 37 LIN, H.; ATLURI, S. Meshless local Petrov-Galerkin(mlpg) method for convection diffusion problems. CMES(Computer Modelling in Engineering & Sciences), v. 1, n. 2, p. 45–60, 2000.
- 38 EZ, Y. N. Métodos de elementos finitos híbridos aplicados a escoamentos miscíveis em meios porosos heterogêneos. Tese (Doutorado) — LNCC, 2014.
- 39 ARNOLD, D. N. et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM journal on numerical analysis, SIAM, v. 39, n. 5, p. 1749–1779, 2002.
- 40 BREZZI, F. et al. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. Journal of Scientific Computing, Springer, v. 22, n. 1-3, p. 119–145, 2005.
- 41 HUGHES, T. J.; MASUD, A.; WAN, J. A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 195, n. 25-28, p. 3347–3381, 2006.
- 42 COCKBURN, B. et al. A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems. SIAM Journal on Scientific Computing, SIAM, v. 31, n. 5, p. 3827–3846, 2009.

- 43 FARIA, C. O.; LOULA, A. F.; SANTOS, A. J. dos. Primal stabilized hybrid and dg finite element methods for the linear elasticity problem. Computers & Mathematics with Applications, Elsevier, v. 68, n. 4, p. 486–507, 2014.
- 44 JONES, R. E. A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. AIAA Journal, v. 2, n. 5, p. 821–826, 1964.
- 45 PIAN, T. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. AIAA journal, v. 2, n. 7, p. 1333–1336, 1964.
- 46 VEUBEKE, B. Fraeijs de. Displacement and equilibrium models in the finite element method. Stress analysis, John Wiley & Sons, p. chapter–9, 1965.
- 47 MOSE, R. et al. Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity? Water resources research, Wiley Online Library, v. 30, n. 11, p. 3001–3012, 1994.
- 48 COCKBURN, B.; GOPALAKRISHNAN, J.; LAZAROV, R. Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, SIAM, v. 47, n. 2, p. 1319–1365, 2009.
- 49 COCKBURN, B. et al. An analysis of the embedded discontinuous Galerkin method for second-order elliptic problems. SIAM journal on numerical analysis, SIAM, v. 47, n. 4, p. 2686–2707, 2009.
- 50 NGUYEN, N. C.; PERAIRE, J.; COCKBURN, B. An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection–diffusion equations. Journal of Computational Physics, Elsevier, v. 228, n. 9, p. 3232–3254, 2009.
- 51 CHEN, Y.; COCKBURN, B. Analysis of variable-degree hdg methods for convection–diffusion equations. part i: general nonconforming meshes. IMA Journal of Numerical Analysis, Oxford University Press, v. 32, n. 4, p. 1267–1293, 2012.
- 52 BRUNNER, F.; RADU, F. A.; KNABNER, P. Analysis of an upwind-mixed hybrid finite element method for transport problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, SIAM, v. 52, n. 1, p. 83–102, 2014.
- 53 OIKAWA, I. Hybridized discontinuous Galerkin method for convection–diffusion problems. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Springer, v. 31, n. 2, p. 335–354, 2014.
- 54 DAUTOV, R.; FEDOTOV, E. Hybridized schemes of the discontinuous Galerkin method for stationary convection–diffusion problems. Differential Equations, Springer, v. 52, n. 7, p. 906–925, 2016.
- 55 OHLBERGER, M. Convergence of a mixed finite element: finite volume method for the two phase flow in porous media. East West Journal of Numerical Mathematics, Citeseer, v. 5, p. 183–210, 1997.
- 56 FAN, X. et al. Numerical simulation of pollutant transport in fractured vuggy porous karstic aquifers. Journal of Applied Mathematics, Hindawi, v. 2011, 2011.

- 57 MALTA, S. M.; LOULA, A. F. Numerical analysis of finite element methods for miscible displacements in porous media. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, Wiley Online Library, v. 14, n. 4, p. 519–548, 1998.
- 58 MALTA, S. M.; LOULA, A. F.; GARCIA, E. L. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 187, n. 1-2, p. 119–136, 2000.
- 59 YANG, J.; CHEN, Y. Superconvergence of a combined mixed finite element and discontinuous Galerkin approximation for an incompressible miscible displacement problem. Applied Mathematical Modelling, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 1106–1113, 2012.
- 60 NUNEZ, Y. R. et al. A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes. International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry, v. 6, n. 1, 2012.
- 61 ZHANG, J. et al. A combined discontinuous Galerkin finite element method for miscible displacement problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, v. 309, p. 44–55, 2017.
- 62 FABIEN, M. S.; KNEPLEY, M.; RIVIERE, B. A high order hybridizable discontinuous Galerkin method for incompressible miscible displacement in heterogeneous media. Results in Applied Mathematics, Elsevier, v. 8, p. 100089, 2020.
- 63 VASSILEV, D.; YOTOV, I. Coupling Stokes–Darcy flow with transport. SIAM Journal on Scientific Computing, SIAM, v. 31, n. 5, p. 3661–3684, 2009.
- 64 IGREJA, I. A new approach to solve the Stokes-Darcy-transport system applying stabilized finite element methods. In: SPRINGER. International Conference on Computational Science. [S.l.], 2019. p. 524–537.
- 65 CESMELIOGLU, A.; RHEBERGEN, S. A compatible embedded-hybridized discontinuous Galerkin method for the Stokes–Darcy-transport problem. 2020.
- 66 Darcy, H. P. G. Les Fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau, etc. [S.l.]: V. Dalmont, 1856.
- 67 HASSANIZADEH, M.; GRAY, W. G. General conservation equations for multi-phase systems: 1. averaging procedure. Advances in water resources, Elsevier, v. 2, p. 131–144, 1979.
- 68 HASSANIZADEH, M.; GRAY, W. G. General conservation equations for multi-phase systems: 2. mass, momenta, energy, and entropy equations. Advances in water resources, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 191–203, 1979.
- 69 DARLOW, B.; EWING, R. E.; WHEELER, M. Mixed finite element method for miscible displacement problems in porous media. Society of Petroleum Engineers Journal, OnePetro, v. 24, n. 04, p. 391–398, 1984.
- 70 PEACEMAN, D. W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. [S.l.]: Elsevier, 2000. v. 6.

- 71 BOFFI, D.; BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed finite element methods and applications. [S.l.]: Springer, 2013. v. 44.
- 72 IGREJA, I.; LOULA, A. F. Stabilized velocity and pressure mixed hybrid dgfm for the Stokes problem. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, v. 112, n. 7, p. 603–628, 2017.
- 73 ROCHA, B. M. et al. Stabilized hybrid discontinuous Galerkin finite element method for the cardiac monodomain equation. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, p. e3341, 2020.
- 74 GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA journal, v. 3, n. 2, p. 380–380, 1965.
- 75 CONTE, S. D.; BOOR, C. D. Elementary numerical analysis: an algorithmic approach. [S.l.]: SIAM, 2017.
- 76 VORST, H. A. Van der. Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. SIAM Journal on scientific and Statistical Computing, SIAM, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992.
- 77 SAAD, Y.; SCHULTZ, M. H. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM Journal on scientific and statistical computing, SIAM, v. 7, n. 3, p. 856–869, 1986.
- 78 DAVIS, T. A. Algorithm 832: Umfpack v4.3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. ACM Trans. Math. Softw., Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 30, n. 2, p. 196–199, jun. 2004. ISSN 0098-3500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/992200.992206>>.
- 79 BANGERTH, W.; HARTMANN, R.; KANSCHAT, G. deal.ii - a general-purpose object-oriented finite element library. ACM Trans. Math. Softw., v. 33, p. 24, 2007.
- 80 BREZZI, F.; FORTIN, M. A minimal stabilisation procedure for mixed finite element methods. Numerische Mathematik, Springer, v. 89, n. 3, p. 457–491, 2001.
- 81 OIKAWA, I. Analysis of a reduced-order hdg method for the Stokes equations. Journal of Scientific Computing, Springer, v. 67, n. 2, p. 475–492, 2016.
- 82 CRUMPTON, P.; SHAW, G.; WARE, A. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. Journal of Computational Physics, v. 116, n. 2, p. 343 – 358, 1995. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185710327>>.
- 83 ANTONIETTI, P. F.; HELTAI, L. Numerical validation of a class of mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 196, n. 45, p. 4505 – 4520, 2007. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782507002241>>.
- 84 REED, W. H.; HILL, T. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. [S.l.], 1973.

- 85 LESAINTE, P.; RAVIART, P.-A. On a finite element method for solving the neutron transport equation. Publications mathématiques et informatique de Rennes, n. S4, p. 1–40, 1974.
- 86 JOHNSON, C.; PITKÄRANTA, J. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. Mathematics of computation, v. 46, n. 173, p. 1–26, 1986.
- 87 CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. [S.l.], 1947. v. 43, n. 1, p. 50–67.
- 88 BANGERTH, W. et al. Differential equations analysis library. Technical Reference deal. II, 2012.
- 89 DEEGAN, C.; SCULL, B. Rep. inst. geol. sci. 1977.