

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**Métrica Bianchi I em uma teoria com derivadas superiores e matéria relativística**

*Simpliciano Castardelli dos Reis*

7 DE JUNHO DE 2021

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Métrica Bianchi I em uma teoria com derivadas superiores e matéria relativística**

**Autor: Simpliciano Castardelli dos Reis**

**Orientador: Prof.Dr. Ilya Lvovich Shapiro**

*Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.*

7 DE JUNHO DE 2021

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Castardelli dos Reis, Simpliciano .

Métrica Bianchi I em uma teoria com derivadas superiores e matéria relativística /Simpliciano Castardelli dos Reis. -- 2020. 124 f.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

1. Métrica Bianchi I. 2. Anisotropias. 3. Gás Relativístico Reduzido. 4. Teoria de Gravitação com Derivadas Superiores. 5. Análise não Linear e Ondas Gravitacionais. I. Lvovich Shapiro, Ilya, orient II. Título.

**Simpliciano Castardelli dos Reis**

**"Métrica Bianchi I em uma teoria com derivadas superiores e matéria relativística".**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em 18 de agosto de 2020.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Júlio Cesar Fabris  
Universidade Federal do Espírito Santo



---

Prof. Dr. Nelson Pinto Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas



---

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

## Agradecimentos

---

- Agradeço ao meu orientador, o professor Ilya Lvovich Shapiro, pela atenção, conselhos e orientação à minha pesquisa;
- Agradeço à CAPES, CNPQ e FAPEMIG pelo apoio, direto ou indiretamente, ao meu projeto de doutorado e minha pesquisa;
- Agradeço aos meus pais, Simpliciano Alves dos Reis (*in memoriam*), do qual eu aprendi o amor pelo conhecimento, e Cleuza Castardelli dos Reis, que me ensinou na sua simplicidade a humildade, obediência e respeito. Não posso deixar de prestar agradecimentos aos meus irmãos e irmãs: Cassiana Castardelli dos Reis, Raquel Reis, Marta Reis Tavares, José Hemetério dos Reis (Juca), Davi Reis, Isabel Azevedo, Moises Reis, Rute Reis Santiago, Paulo Roberto dos Reis, Jacob Reis (*in memoriam*), Marcos Reis e Sara Reis Bertocco e aos respectivos cunhados, cunhadas, sobrinhos e sobrinhas;
- Agradeço a Fernanda Magna Ribeiro (*in memoriam*) por seu companherismo, dedicação e amor. Estendo meus agradecimentos a sua família: João, Benilda, Rodrigo e André;
- Agradeço aos meus amigos da pós-graduação Filipe Salles, Fabricio Mattos e Eduardo Reis, pela ajuda, esclarecimentos e apoio que me prestaram ao longo dos meus estudos;
- Agradeço a três amigos que tenho por irmãos: Diego Gouvêa Pinto, Thiago Morales de Abreu (meu primo de terceiro grau) e Michael Sporck Gotti;

- Agradeço á minha psicóloga, Márcia Elisa Chaves Ribeiro, por ter me ajudado com seus conselhos, tratamento e dedicação a me tornarem uma pessoa um pouco melhor;
- Agradeço a Roberta Evangelista pela sua amizade, carinho e compreensão;
- Agradeço ao Sr. Domingos Lopes pela sua dedicação, atenção, disponibilidade e eficiência na pós-graduação em Física;
- Agradeço à direção, professores, funcionários e alunos da Escola Estadual Professora Francisca Pereira Rodrigues no município de Piraúba, Minas Gerais, por terem me proporcionado a experiência de lecionar, a receptividade e o carinho recebido, além de uma parte desta tese ter sido elaborada nesta escola;
- Agradeço a John Ono Lennon, James Paul McCartney, George Harrison e Richard Starkey;
- Por fim, meus sinceros agradecimentos a todos que tenham direto ou indiretamente me ajudado.

*“The long and widding road.”*

Lennon/McCartney, “Lei it Be”, 8 de maio de 1970



---

## Resumo

---

Na primeira parte desta tese são apresentados resultados sobre uma métrica anisotrópica do tipo Bianchi I em um modelo cosmológico com matéria relativística descrita pelo gás relativístico reduzido (RRG), o qual interpola entre os regimes de radiação e poeira dependendo do parâmetro de aquecimento. Propomos uma nova dedução da equação de estado do RRG e mostramos que ocorre o processo de isotropização, no qual as soluções assintoticamente tendem a de um universo isotrópico com poeira.

Na segunda parte, traçamos as similaridades de Bianchi I com ondas gravitacionais e exploramos a relação entre estabilidade linear e não linear em uma teoria métrica de gravitação com derivadas superiores, na qual há um fantasma massivo e não físico. Para condições suficientemente pequenas, teoremas matemáticos garantem que uma vez que haja estabilidade a nível linear, então é garantida estabilidade perturbativamente. Por meio de cálculos numéricos para as equações dinâmicas sem quaisquer aproximações, conseguimos mostrar que há uma equivalência qualitativa entre as soluções nos regimes linear e não linear.

**Palavras chaves:** Métrica Bianchi I, anisotropias, matéria relativística, teorias de gravitação com derivadas superiores, estabilidade, análise não linear.

---

## Abstract

---

In the first part of this thesis, results are presented about an anisotropic metric of the type Bianchi I in a cosmological model with described relativistic matter by Reduced Relativistic Gas (RRG) which interpolates between radiation and dust regimes depending on the warmness parameter. We propose a new deduction of the RRG state equation and show that there is the isotropization process in which the solutions are asymptotic to the isotropic universe with dust.

In the second part, we trace the similarities of Bianchi I with gravitational waves and we explore the relation between linear and nonlinear stability in a higher derivative gravity theory in which there is a massive and nonphysical ghost. For small enough initial conditions, mathematical theorems ensure that once there is stability at the linear level, then there is perturbative stability. Through numerical calculations for dynamic equations without any approximations, we were able to show that there is a qualitative equivalence between the solutions in the linear and nonlinear levels.

**Keywords :** Bianchi I metric, anisotropies, relativistic matter, higher derivative gravity, stability, nonlinear analysis.

---

## Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de publicações</b>	<b>xi</b>
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Introdução à Relatividade Geral</b>	<b>8</b>
1.1 Elementos de geometria diferencial . . . . .	8
1.1.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	9
1.1.2 Vetores tangentes, 1-formas e tensores . . . . .	9
1.1.3 Produto exterior, formas diferenciais e p-formas . . . . .	14
1.1.4 Derivada exterior . . . . .	16
1.1.5 Derivada de Lie . . . . .	18
1.1.6 Derivada covariante . . . . .	20
1.1.7 Tensor de curvatura de Riemann . . . . .	23
1.1.8 O tensor métrico e geodésicas . . . . .	25
1.2 Equações de campo de Einstein . . . . .	30

<b>2</b>	<b>Isometrias em variedades diferenciáveis</b>	<b>37</b>
2.1	Isometrias . . . . .	37
2.2	Variedades homogêneas quadridimensionais . . . . .	40
2.3	Variedades espacialmente homogêneas . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Bianchi I em relatividade geral</b>	<b>47</b>
3.1	Cosmologia do tipo Bianchi I . . . . .	47
3.2	Soluções de vácuo . . . . .	52
3.3	Soluções de constante cosmológica . . . . .	54
3.4	Soluções de poeira . . . . .	56
3.5	Soluções de radiação . . . . .	57
3.6	Considerações finais: a importância de Bianchi I em cosmologia . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Cosmologia do tipo Bianchi I com o gás relativístico reduzido</b>	<b>61</b>
4.1	Equação de estado do RRG . . . . .	61
4.2	Equações para cosmologia do tipo Bianchi I com RRG e aproximações . . .	64
4.3	Soluções numéricas . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Análise não linear de estabilidade em gravitação com derivadas superiores com a métrica do tipo Bianchi I</b>	<b>73</b>
5.1	Equações dinâmicas . . . . .	73
5.2	Expansão em série assintótica para perturbação singular . . . . .	79
5.3	Soluções numéricas para os regimes linear e não linear . . . . .	84
	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>

---

## Lista de Figuras

---

4.1	Gráficos dos fatores de escala para $b = 10$ e $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , comparando a solução do RRG com as de vácuo, radiação e poeira. . . . .	68
4.2	Gráficos de $\Omega_{ani}(\tau)$ para $b = 10$ e $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , comparando a solução do RRG com as de Kasner (vácuo), radiação e poeira. . . . .	68
4.3	Gráficos de $\beta_+$ correspondendo aos parâmetros $b = 10$ e $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , e condição inicial $\beta_+ = 10$ . . . . .	69
4.4	Gráficos de $\beta_+$ correspondendo aos parâmetros $b = 10$ e $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , e condição inicial $\beta_- = 15$ . . . . .	69
4.5	Gráfico do fator de escala para um valor moderado do parâmetro de aquecimento. Os valores são: $b = 0.5$ , $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ . . . . .	70
4.6	Gráfico de $\Omega_{ani}(\tau)$ . Os valores são: $b = 0.5$ , $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ . . . . .	70
4.7	Gráficos de $\beta_+$ para $b = 0.5$ , $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ com condição inicial $\beta_+ = 10$ . . .	71
4.8	Gráficos de $\beta_-$ para $b = 0.5$ , $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ com condição inicial $\beta_- = 15$ . . .	71
5.1	Gráficos para $a_1 = +1$ e $a_2 = 1$ no caso de fundo dominado por constante cosmológica. Inicialmente há expansão depois seguida por contração, pois na parametrização de Misner $\sigma$ esta relacionado ao volume e valores negativos deste significam contração. Para as anisotropias, pode-se observar instabilidade típica para um fantasma taquiônico [23, 79]. . . . .	86

5.2	Para $a_1 = +1$ e $a_2 = 1$ no fundo dominado por poeira. A instabilidade do fantasma taquiônico é qualitativamente a mesma do caso de fundo dominado por constante cosmológica da Fig. 5.1, confirmando a correspondência qualitativa entre o modelo de Bianchi I como onda gravitacional de frequência igual a zero. . . . .	87
5.3	Para o caso de $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$ , os gráficos das soluções numéricas de $\sigma(\tau)$ e das anisotropias são comparados, respectivamente, à solução isotrópica de radiação em Relatividade Geral e as soluções do sistema linearizado das anisotropias em torno desta mesma solução isotrópica. . . . .	88
5.4	Os mesmos gráficos como na Fig. 5.3, porém com $a_1 = -1$ e $a_2 = 100$ . Qualitativamente, pode-se observar uma mudança devido a escolha maior para o coeficiente do termo $R^2$ da ação, a qual é típica da inflação de Starobinsky [74, 80]. . . . .	89
5.5	Mesmos gráficos, porém com $a_1 = -100$ e $a_2 = 1$ . Há isotropização caracteriza por um regime oscilatório e amortecido para as anisotropias devido a diminuição do coeficiente $a_1$ . . . . .	90
5.6	Gráficos da primeira derivada $\dot{\beta}_+$ com os valores de (a) $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$ , (b) $a_1 = -1$ e $a_2 = 100$ . Em (a), a primeira derivada das anisotropias é essencialmente a mesma para ambos os casos linear e não linear. Em (b), pode-se observar qualitativamente uma mudança devido a escolha maior para o coeficiente do termo $R^2$ da ação, a qual é típica da inflação de Starobinsky [74, 80]. . . . .	91
5.7	Gráfico da primeira derivada $\dot{\beta}_+$ com os valores de $a_1 = -100$ e $a_2 = 1$ . . . . .	92
5.8	Gráficos correspondentes aos valores $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$ com o fundo de universo dominado por poeira em Relatividade Geral. . . . .	93
5.9	Gráficos equivalente aos da Fig. 5.8, porém com $a_1 = -1$ e $a_2 = 100$ , ilustrando o efeito do aumento do coeficiente do termo $R^2$ na inflação de Starobinsky. O fundo é dominado por poeira. . . . .	94
5.10	Mesmo caso da Fig. 5.8, porém com $a_1 = -100$ e $a_2 = 1$ . . . . .	95

5.11 Gráficos para $a_1 = -1$ and $a_2 = 1$ para fundo isotrópico de constante cosmológica em Relatividade Geral . . . . .	96
5.12 Mesmo caso da Fig. 5.11, porém com os valores $a_1 = -1$ and $a_2 = 100$ . . .	97
5.13 Mesmo caso da Fig. 5.11, porém com os valores $a_1 = -100$ and $a_2 = 1$ ,. . .	98

---

## Lista de publicações

---

• S. C. d. Reis & I. L. Shapiro, *Cosmic anisotropy with Reduced Relativistic Gas*, Eur. Phys. J. C **78** (2018) no.2, 145, arXiv:1712.03066 [gr-qc].

• S. Castardelli dos Reis, G. Chapiro & I. L. Shapiro, *Beyond the linear analysis of stability in higher derivative gravity with the Bianchi-I metric*, Phys. Rev. D **100** (2019) no.6, 066004, arXiv:1903.01044 [gr-qc].





---

# Introdução

---

*“Je t’aime... moi non plus.”*

**Serge Gainsbourg, fevereiro de 1969**

O desenvolvimento da cosmologia física, seja desde as previsões teóricas às observações, tais como o desvio para o vermelho observado por Hubble nos anos 1920 à detecção da radiação cósmica de fundo nos anos 1960 e observações mais acuradas pela sonda Planck, atualmente a converteu de uma teoria escassa em dados observacionais à uma ciência com observações cada vez mais acuradas. A radiação cósmica de fundo em microondas revela que na época da reionização o universo era suficientemente homogêneo e isotrópico e que desvios destas propriedades podem ser modelados por perturbações. Além disso, o modelo do “Big Bang” também explica a formação de elementos leves e as abundâncias dos mesmos, tais como o hidrogênio, seu isótopo deutério, hélio, em um processo chamado nucleossíntese. Quanto aos problemas suscitados pelo “Big Bang” convencional, como, por exemplo, o problema do horizonte e da origem das perturbações cósmicas iniciais, os cenários inflacionários são uma alternativa para a solucionabilidade dos mesmos.

Entretanto, as propriedades de homogeneidade e isotropia constituem uma classe de

simetrias restritivas quando comparadas às possíveis condições que um modelo cosmológico mais natural poderia apresentar. Por exemplo, sabe-se que o universo atual é homogêneo e isotrópico em escalas maiores que 100 Mpc [1], então, inhomogeneidades e anisotropias abaixo desta escala poderiam contribuir significativamente na evolução do universo [2]? Não é do escopo desta tese a resposta desta pergunta. Por outro lado, seria o universo primordial isotrópico e homogêneo? Respostas a esta última indagação são possíveis de serem formuladas. Algumas propostas foram apresentadas, principalmente desde os anos 1960, embora a grande maioria delas abria mão somente da isotropia, mas não da homogeneidade. A razão disto é que as equações de campo de Einstein formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, logo, neste contexto, inhomogeneidades acarretam em dependência, além do tempo, de uma ou mais coordenadas espaciais, enquanto que apenas anisotropias convertem o sistema de equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinárias, embora ainda não linear.

Outro assunto de interesse nesta tese concerne às teorias métricas de gravitação com derivadas superiores. Sabe-se que a relatividade geral, baseada na ação de Einstein-Hilbert, não é renormalizável. A introdução de termos com derivadas superiores da métrica torna a teoria renormalizável, porém o preço a pagar é o aparecimento de fantasmas massivos e não físicos na teoria, comprometendo assim a unitariedade [3]. Termos com derivadas superiores da métrica também são necessários em teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo [4,5]. Quanto à unitariedade, não teceremos nenhuma discussão, pois teorias com derivadas superiores são tratadas nesta tese apenas no âmbito clássico.

O primeiro capítulo trata-se de uma introdução à relatividade geral. A parte concernente à geometria diferencial é importante para os dois capítulos subsequentes. No segundo capítulo são abordados os conceitos de simetria e isometria, culminando na classificação, conhecida como classificação de Bianchi, dos possíveis espaços homogêneos, anisotrópicos e tridimensionais. Desta classificação, constituindo-se de um total de nove possíveis espaços, a métrica do tipo Bianchi I é de importância fundamental aos demais capítulos. No terceiro capítulo, algumas soluções em relatividade geral com a métrica do tipo Bianchi I, a saber, vácuo, constante cosmológica, poeira e radiação são deduzidas. O principal interesse consiste em mostrar como o processo de isotropização ocorre com estes três flui-

dos perfeitos. Quanto ao processo de isotropização, outros mecanismos propostos para este também incluem a presença de fluidos isotrópicos perfeitos com equação de estado  $p = \omega \rho$ , onde  $p$  e  $\rho$  denotam, respectivamente, pressão e densidade de energia, e  $\omega$  é uma constante adimensional arbitrária [2, 6, 7]; tensor momento-energia anisotrópico e com viscosidade [8]; campo magnético primordial [9, 10]; desacoplamento de neutrinos com função distribuição anisotrópica e efetivamente atuando como um fluido com viscosidade [11] e efeitos quânticos de campos não gravitacionais no universo primordial [12, 13].

O quarto capítulo trata do gás relativístico reduzido, abreviado como RRG, sigla para “*Reduced Relativistic Gas*”, mostrando que partindo de uma métrica anisotrópica do tipo Bianchi I, para o RRG como fonte de matéria e energia também ocorre o processo de isotropização. Quanto à razão da proposta do RRG, deve-se notar que, em modelos cosmológicos relativísticos com fluidos perfeitos, a dinâmica do campo gravitacional, ditada pelas equações de campo de Einstein, requer também uma relação entre a pressão e a densidade de energia do fluido, chamada equação de estado, de tal forma que a dinâmica possa ser completamente especificada. Usualmente, a equação de estado é assumida como uma relação linear entre pressão e densidade de energia,  $p = \omega \rho$ , com  $\omega$  constante. O valor de  $\omega$  corresponde ao tipo de fluido. Por exemplo,  $\omega = -1$ ,  $\omega = 0$  e  $\omega = \frac{1}{3}$ , correspondem, respectivamente a, constante cosmológica, poeira (matéria não relativística) e radiação.

De acordo com dados observacionais recentes (vide [14, 15]), além de radiação e matéria bariônica, o universo atual é dominado por fontes de matéria-energia que interagem apenas com o campo gravitacional, denominadas como matéria escura e energia escura. Provavelmente, a matéria escura é um gás de partículas massivas fracamente interagentes, enquanto que o candidato mais provável para a energia escura seja uma constante cosmológica. As observações indicam que durante a maior parte de sua história o universo tenha sido isotrópico e portanto a isotropização deve ter ocorrido muito cedo. Uma vez que o universo era muito mais quente que hoje, a contribuição da constante cosmológica, em relação aos demais componentes de matéria e energia na época da possível isotropização, é muito pequena [16]. Ao mesmo tempo, embora não conhecida a massa e temperatura das partículas de matéria escura, esta é suposta como tendo sido muito quente no universo primordial e então tornado-se relativamente fria em um estágio mais tardio. Por-

tanto, torna-se útil estudar um mecanismo de isotropização para o caso de um universo constituído por matéria bariônica e matéria escura, as quais são quentes no universo primordial e não relativísticas no universo atual. A mais simples e apropriada descrição para partículas no universo primordial é a de um gás de partículas relativísticas massivas. Talvez, a representação mais útil e conveniente deste gás é o modelo do RRG, o qual provém uma descrição suficientemente aproximada para a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

A equação de estado do RRG foi originalmente proposta por A.D. Sakharov em 1966 em um famoso artigo, [17], a fim de interpolar a evolução do universo entre os estados de radiação e poeira. Neste mesmo trabalho, a equação de estado foi usada para uma primeira derivação do espectro da radiação cósmica de fundo em microondas, porém os detalhes da obtenção da equação de estado não foram especificados. Mais recentemente, o modelo do RRG foi redescoberto em [18,19]. Soluções analíticas para modelos cosmológicos isotrópicos com RRG e outros fluidos são conhecidas [20] e, uma vez que a equação de estado do RRG é muito próxima à da obtida usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann para partículas relativísticas [18], conseqüentemente, o RRG foi usado para uma obtenção simplificada para o parâmetro de aquecimento da matéria escura [19,21], descrição da troca de energia entre matéria e radiação, e uma estimativa para observáveis cosmológicos em um modelo com constante cosmológica variável [22]. Tecidas estas considerações, o quarto capítulo apresenta como resultado principal que o RRG, como fonte de matéria e energia para uma métrica do tipo Bianchi I, conduz à isotropização. Além disso, também aborda-se uma nova dedução da equação de estado do RRG, diferente da dedução apresentada em [18].

O quinto e último capítulo trata do estudo da relação entre estabilidade linear e não linear de soluções assintóticas em uma teoria métrica de gravitação com derivadas superiores. Como o espectro da teoria contém um fantasma massivo e não físico, o estado do vácuo não é estável. Assim, até mesmo no espaço de Minkowski, o processo de criação de fantasmas, com massa da ordem da massa de Planck, e grávitons, poderia ser possível, uma vez que não há violação da lei da conservação da energia devido à energia negativa do fantasma. Uma das soluções deste problema discutidas na literatura consiste em postular que haja um princípio físico de natureza desconhecida que impeça tal processo, seja no

espaço de Minkowski e também, quando concernente qualitativamente à estabilidade, em espaços de pequenas curvaturas, da concentração de grávitons com densidade de energia da ordem da de Planck [23, 24]. Em [23, 25, 26], são desenvolvidos certos argumentos favoráveis a este princípio. Em concordância com trabalhos anteriores sobre a evolução de ondas gravitacionais em um fundo de deSitter, [27–29], as ondas não apresentam amplitudes crescentes. A mesma situação foi analisada em [23], mostrando que também não há modos crescentes em outros fundos cosmológicos caso a frequência inicial da onda gravitacional em unidades naturais seja tipicamente de 0.5 da energia de Planck. Entretanto, para frequências da ordem de Planck, há modos crescentes para as ondas gravitacionais. Assim, [23] conclui que embora haja um fantasma no espectro da teoria, este não necessariamente seja criado, pois para baixas frequências das ondas gravitacionais, modos com energia positiva não são capazes de criá-lo. Porém, esta conclusão é certamente incompleta; primeiro, uma teoria com derivadas superiores para gravidade quântica deve ser válida em todas as frequências; segundo, do ponto de vista matemático, estabilidade linear garante estabilidade não linear perturbativamente; porém, do ponto de vista físico, instabilidades são esperadas no nível não linear [30].

Em [31] foi mostrado que em fundos cosmológicos com expansão suficientemente rápida, os modos crescentes das ondas gravitacionais, embora presentes, decaem após um intervalo de tempo e as perturbações métricas tornam-se estáveis. No entanto, este resultado ainda não constitui uma solução completa do problema da catástrofe dos grávitons e fantasmas, se assim pudermos denominá-lo, pois ainda resta saber como este problema é evitado em fundos com campos gravitacionais fracos.

Esboçada a situação da estabilidade a nível linear em teorias com derivadas superiores, o capítulo cinco aborda como a estabilidade muda quando se considera perturbações não lineares. Também são apresentados resultados não perturbativos. Todavia, a abordagem usada não é completamente equivalente às ondas gravitacionais, mas utilizando a métrica do tipo Bianchi I. Para a teoria com derivadas superiores apresentada no capítulo cinco, qualquer solução das equações de Einstein para o vácuo ou constante cosmológica também satisfazem às equações dinâmicas da teoria com derivadas superiores. Desse modo, as soluções cosmológicas de Kasner (Bianchi I para o vácuo), deSitter e anti-deSitter, também

são soluções particulares. Em particular, o caso de um modelo cosmológico com radiação também é uma solução particular das equações da teoria. Para trabalhos recentes quanto à estabilidade destas soluções particulares, vide [32–34].

A utilização de Bianchi I foi escolhida pois na aproximação linear esta compartilha de algumas similiaridades com ondas gravitacionais; entretanto, como a métrica de Bianchi I é homogênea, não há dependência das coordenadas espaciais, mas somente do tempo. Logo, quando comparada com uma onda gravitacional, a qual depende das coordenadas espaciais e por isso conduz a uma relação de dispersão envolvendo o vetor de onda e a frequência, Bianchi I seria qualitativamente equivalente a uma onda gravitacional, porém com vetor de onda igual a zero e, conseqüentemente, com frequência também igual a zero. Então, comparada às perturbações arbitrárias da métrica, assumimos duas restrições, a saber, pequenas amplitudes iniciais e frequências iguais a zero. Desse modo, todos os resultados apresentados no capítulo cinco estão fundamentados nestas duas restrições. Apresentamos também uma breve abordagem de como a estabilidade na aproximação linear define o comportamento do sistema não perturbativo. As equações lineares e não lineares são integradas numericamente, comparadas e definindo qualitativamente uma equivalência entre elas. Por fim, a última parte da tese consiste em uma conclusão dos resultados apresentados e perspectivas futuras para os mesmos.

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução à Relatividade Geral

---

*“Estava trabalhando quando me ocorreu a seguinte ideia: uma pessoa em queda livre não sente o próprio peso.”*

**Albert Einstein**

### 1.1 Elementos de geometria diferencial

Da relação entre a Relatividade Geral (RG) e geometria diferencial <sup>1</sup>, torna-se necessário apresentar alguns conceitos desta. Não é do escopo desta tese uma apresentação detalhada, mas somente uma breve introdução que seja o suficiente para os capítulos posteriores. A apresentação que se dá de alguns elementos de geometria diferencial é baseada em [35–37]. Salvo o contrário, seguimos a convenção de que tensores com índices latinos

---

<sup>1</sup>A RG é uma teoria de gravitação métrica com geometria pseudo-riemanniana (torção nula, metricidade satisfeita e conexão afim de Levi-Civita). Teoricamente, são possíveis outras teorias de gravitação mais gerais que a RG, baseadas em outras geometrias, como por exemplo, a teoria de Einstein-Cartan, caracterizada por torção não-nula



$a, b, c, \dots$ , com todos eles percorrendo os valores de 0 até  $n$ , a dimensão da variedade, referem-se a uma base geral; enquanto que índices gregos, percorrendo os mesmos valores, referem-se exclusivamente a uma base holonômica, Sec. (1.1.2); coordenadas da variedade são também denotadas por índices gregos. Seguimos a convenção de Einstein que índices idênticos e repetidos em uma fórmula significam somatório.

### 1.1.1 Variedades diferenciáveis

Uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  de dimensão  $n$  é um espaço localmente (em um ponto e sua vizinhança) homeomórfico <sup>2</sup> ao  $\mathbb{R}^n$ .

Um *gráfico* em  $\mathcal{M}$  consiste de um subconjunto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$  e um mapeamento um-para-um,  $\phi$ , de  $\mathcal{U}$  para um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ . Um gráfico designa um conjunto de números para um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , chamados coordenadas e representados como  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , onde  $x^\mu \in \mathbb{R}$ , com  $\mu = 1, \dots, n$ . Dois gráficos,  $(\mathcal{U}_1, \phi_1)$  e  $(\mathcal{U}_2, \phi_2)$ , são chamados *compatíveis*, se existe uma transformação invertível  $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x)$  com  $\det(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}) \neq 0$ . Um *Atlas* em  $\mathcal{M}$  é uma coleção de gráficos compatíveis. A razão dessa definição é que pode ocorrer que uma variedade não seja coberta por um único gráfico.

Uma curva  $\gamma(t)$  em  $\mathcal{M}$  é definida como um mapeamento diferenciável de um intervalo em  $\mathbb{R}$  para  $\mathcal{M}$ . Assim, para cada elemento pertence ao intervalo corresponde um ponto em  $\mathcal{M}$ .

### 1.1.2 Vetores tangentes, 1-formas e tensores

Vetores no espaço Euclidiano são elementos de um espaço vetorial (ou linear), o qual é definido por alguns axiomas bem conhecidos da álgebra linear. Entretanto, devido à definição de variedade estar sujeita a propriedades locais, torna-se necessário uma definição com a qual estas propriedades sejam explícitas. Portanto, a fim de se ter uma generalização consistente de vetores em  $\mathcal{M}$ , passaremos a indentificá-los com vetores tangentes. Antes

---

<sup>2</sup>Dois espaços topológicos são homeomórficos quando existe uma transformação invertível entre eles, significando que ambos tem a mesma topologia. No caso de variedades, homeomorfismos locais com o  $\mathbb{R}^n$  possibilitam a construção de um espaço métrico e aplicação da análise real; em termos mais diretos: a possibilidade de definir estruturas diferenciáveis.

da definição destes, primeiro definimos funções diferenciáveis.

Uma *função diferenciável*  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  em  $\mathcal{M}$  é um mapeamento de uma região de  $\mathcal{M}$  que faz corresponder a qualquer ponto desta região um elemento de  $\mathbb{R}$  e que pelo menos a primeira derivada em relação às coordenadas seja contínua.

Um *vetor tangente*,  $\mathbf{v}$ , em um ponto  $p \in \mathcal{M}$  é um operador que atua sobre funções diferenciáveis em  $\mathcal{M}$  tendo como resultado um número real, satisfazendo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(f + h) &= \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(h), \\ \mathbf{v}(fh) &= h \mathbf{v}(f) + f \mathbf{v}(h), \\ \mathbf{v}(\alpha f) &= \alpha \mathbf{v}(f),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $f$  e  $h$  são funções diferenciáveis em  $\mathcal{M}$  e  $\alpha$  é uma constante real. Usando os axiomas acima, tem-se como consequência que um vetor tangente é a derivada direcional ao longo de uma curva  $\gamma(t)$  em  $p$ , logo

$$\mathbf{v} = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1, \dots, n.\tag{1.2}$$

Os coeficientes reais  $v^\mu$  são chamados componentes do vetor  $\mathbf{v}$  no ponto  $p$  com respeito ao gráfico (sistema de coordenadas locais)  $(x^1, \dots, x^n)$ . As derivadas  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tornam-se a base de um espaço vetorial em  $p$ , chamado *espaço tangente* e denotado por  $T_p\mathcal{M}$ . A base  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  é chamada *base de coordenadas* ou *base holonômica*. Pode-se usar uma *base geral* para o espaço tangente, basta que esta base, denotada por  $\{\mathbf{e}_a\}$  com  $a = 1, \dots, n$ , seja constituída de  $n$  vetores linearmente independentes. Consequentemente, todo vetor do espaço tangente em  $p$  pode ser expresso com uma combinação linear desta base geral como

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a.\tag{1.3}$$

Assim, a base holonômica é um caso especial com  $\mathbf{e}_a = \delta_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Dada uma base geral, existe uma transformação linear entre esta e a base holonômica, dada por

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad a = 1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, n,\tag{1.4}$$

onde  $e_a^\mu$  são os coeficientes da matriz da transformação linear (não singular e com coeficientes sendo funções diferenciáveis em  $\mathcal{M}$ ). Para uma transformação linear e não singular

da base geral, expressa pela matriz  $\{A_{a'}^b\}$ ,  $a', b = 1, \dots, n$ , as componentes de um vetor  $\mathbf{v}$  são alteradas por

$$\mathbf{e}_{a'} = A_{a'}^b \mathbf{e}_b \rightarrow v^{a'} = A_{a'}^b v^b, \quad (1.5)$$

onde  $A_{a'}^b$  são os coeficientes da matriz inversa da transformação. Mais uma vez, a base holonômica torna-se um caso particular, no qual a matriz de transformação provém de uma transformação de coordenadas, dada por

$$A_{\mu'}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}. \quad (1.6)$$

No caso de uma base holonômica, as componentes de  $\mathbf{v}$  sofrem a transformação

$$v^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (1.7)$$

Em RG, alguns autores usam exclusivamente a base holonômica [38, 39], enquanto que outros utilizam-na e, quando conveniente, também a base geral [37, 40], que em quatro dimensões é tradicionalmente chamada de *tétrada*. Embora em algum momento seja necessário estabelecer as coordenadas da variedade e conseqüentemente estabelecer a relação entre as duas bases, o uso de uma base geral pode simplificar consideravelmente cálculos que na base holonômica seriam demasiadamente extensos. Além disso, trabalhando em uma base geral, propriedades, tais como simetrias, podem ser mais claramente expostas [41]; formalismos, como por exemplo, o de Newman-Penrose são implementados de forma mais simples [35, 41, 42].

O conjunto de todos os espaços tangentes em  $\mathcal{M}$  formam o fibrado tangente <sup>3</sup>, denotado por  $T(\mathcal{M})$ . Basicamente, este é também uma variedade diferenciável com coordenadas locais  $(x^\mu, v^\mu)$ ,  $x^\mu, v^\mu \in \mathbb{R}$  e dimensão  $2n$ . Um *campo vetorial* constitui uma possível

---

<sup>3</sup>Um fibrado é uma estrutura formada por um variedade base de dimensão  $n$ , um espaço vetorial de dimensão  $m$  associado a cada ponto da variedade e um grupo de Lie, chamado de grupo estrutural, com ação do grupo em elementos do espaço veorial. Além destes três constituintes fundamentais, também podem ser introduzidas quantidades, chamadas conexões, que atuam como uma estrutura diferencial no fibrado. Por exemplo, para o fibrado tangente, a variedade de base é a variedade  $\mathcal{M}$ , o espaço vetorial é o espaço tangente, ambos com dimensão igual a  $n$ , enquanto que o grupo estrutural é o grupo das matrizes de  $n \times n$  invertíveis, denotado por  $GL(n, \mathbb{R})$  quando a base do espaço tangente é a base holonômica, e no caso de, por exemplo, uma base geral ortonormal para o espaço tangente de uma variedade pseudo-riemanniana, o grupo estrutural é o grupo de Lorentz. Teorias de calibre podem ser formuladas na

seção do fibrado tangente, cuja definição é que as coordenadas  $v^\mu$  tornam-se funções diferenciáveis em  $\mathcal{M}$ :  $v^\mu = v^\mu(x)$ .

O *comutador* de dois vetores,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , é definido por

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}, \quad (1.8)$$

satisfazendo para vetores arbitrários  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  a identidade de Jacobi

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = 0. \quad (1.9)$$

O comutador para uma base holonômica é identicamente nulo, enquanto que para uma base geral ele não necessariamente é nulo. Os comutadores entre os elementos de uma base geral definem os coeficientes  $D^c_{ab}$  por

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = D^c_{ab} \mathbf{e}_c, \quad D^c_{ab} = -D^c_{ba}. \quad (1.10)$$

Vetores tangentes são frequentemente chamados de vetores contravariantes. Em paralelo, também há a nomenclatura de vetores covariantes para outros elementos munidos de estrutura vetorial local em  $\mathcal{M}$ . São para estes elementos que a definição de 1-formas é dada a seguir.

Uma *1-forma*,  $\boldsymbol{\omega}$ , é um funcional linear que mapeia vetores em elementos de  $\mathbb{R}$ , satisfazendo a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \alpha \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) + \beta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \\ (\alpha \boldsymbol{\omega} + \beta \boldsymbol{\rho})(\mathbf{u}) &= \alpha \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) + \beta \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais;  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , vetores tangentes;  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\rho}$ , 1-formas. Uma notação alternativa para 1-formas atuando em vetores tangentes é  $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} \rangle$ . Uma 1-forma arbitrária,  $\boldsymbol{\omega}$ , pode ser expressa em um ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_a \boldsymbol{\theta}^a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

---

linguagem dos fibrados, pois nestas o grupo estrutural torna-se o grupo de calibre, o espaço vetorial é o espaço da representação do grupo e a variedade de base continua sendo  $\mathcal{M}$ . Para detalhes técnicos e maior aprofundamento em fibrados, vide [43, 44]

onde  $\theta^a$  são  $n$  1-formas linearmente independentes, com  $a = 1, \dots, n$  e definidas por

$$\theta^a(\mathbf{e}_b) = \delta_b^a, \quad \forall a, b = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

e  $\omega_a$  são as componentes da 1-forma  $\omega$  em  $p \in \mathcal{M}$  com respeito a base geral  $\mathbf{e}_a$ . Logo, as 1-formas em  $p$  formam um espaço vetorial, chamado *espaço cotangente*, denotado por  $T^*_p\mathcal{M}$ . Das últimas definições, segue que a ação de uma 1-forma arbitrária  $\omega$  em um vetor tangente  $\mathbf{v}$  tem como resultado

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega_a v^a, \quad a = 1, \dots, n, \quad (1.14)$$

onde  $\omega_a$  e  $v^a$ , são, respectivamente, as componentes da 1-forma  $\omega$  e do vetor tangente  $\mathbf{v}$ . No caso particular de uma base holonômica, a base para as 1-formas é denotada por  $\{dx^\mu\}$ , com  $\mu = 1, \dots, n$ , e tem-se uma correspondente transformação linear e não-singular entre as bases de forma análoga a Eq. (1.4) [43,44].

A transformação linear e não singular de uma base geral  $\{\theta^a\}$  do espaço cotangente em  $p$  é expressa por

$$\theta^{a'} = A^{a'}_b \theta^b, \quad a', b = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

onde  $A^{a'}_b$  são os coeficientes da matriz da transformação linear. Como consequência, as componentes de uma 1-forma arbitrária  $\omega$  são alteradas. A relação entre as componentes da base  $\{\theta^{a'}\}$  e  $\{\theta^a\}$  é

$$\omega_{a'} = A_{a'}^b \omega_b, \quad (1.16)$$

que no caso holonômico torna-se

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\nu. \quad (1.17)$$

Semelhantemente ao caso do fibrado tangente, o conjunto de todos os espaços cotangentes de  $\mathcal{M}$  formam o fibrado cotangente, denotado por  $T^*(\mathcal{M})$ , o qual também pode ser visto como uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$  e coordenadas  $(x^\mu, \omega_a)$ . Desse modo, um campo de 1-formas em  $\mathcal{M}$  é uma seção do fibrado cotangente; significando que passa-se a ter  $\omega_a = \omega_a(x)$ .

Por meio do produto tensorial entre os espaços tangente e cotangente, define-se tensores. Por exemplo, o produto tensorial de uma 1-forma  $\omega$  e um vetor tangente  $\mathbf{u}$ , denotado por  $\omega \otimes \mathbf{u}$ , é definido pela ação deste em outros dois elementos arbitrários (uma 1-forma  $\rho$  e um vetor tangente  $\mathbf{v}$ ), como

$$(\omega \otimes \mathbf{u})(\rho, \mathbf{v}) = \omega_a v^a \rho_b u^b, \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Define-se, então, que um *tensor* do tipo  $(r, s)$  é um funcional multilinear em um ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  que mapeia um conjunto de  $r$  1-formas e  $s$  vetores em um número real. Seja  $\mathbf{T}$  um tensor do tipo  $(r, s)$  em  $p$ , pode-se mostrar [36, 43] que ele é um elemento do espaço formado pelo produto tensorial de  $r$  espaços tangentes com  $s$  espaços cotangentes, podendo ser expresso por

$$T = T^{a_1, \dots, a_s}_{b_1, \dots, b_r} \mathbf{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{a_s} \otimes \boldsymbol{\theta}^{b_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\theta}^{b_r}, \quad (1.19)$$

onde  $T^{a_1, \dots, a_s}_{b_1, \dots, b_r}$  são as componentes de  $\mathbf{T}$  em  $p$  com relação as bases gerais  $\{\mathbf{e}_a\}$  e  $\{\boldsymbol{\theta}^a\}$ , dos espaços tangente e cotangente, respectivamente. O último termo, contendo produtos tensoriais, forma a base de um espaço vetorial em  $p$ . O conjunto de todos destes espaços em  $\mathcal{M}$  também formam um fibrado, chamado fibrado tensorial, enquanto que uma seção deste forma um campo tensorial.

Quando as bases gerais dos espaços tangentes e cotangentes se alteram por meio de uma transformação linear Eqs. (1.5) e (1.15), é fácil ver que as componentes de um tensor  $T$  do tipo  $(r, s)$  alteram-se, sendo dadas por

$$T^{a'_1, \dots, a'_s}_{b'_1, \dots, b'_r} = A^{a'_1}_{c_1} \dots A^{a'_s}_{c_s} A_{b'_1}^{d_1} \dots A_{b'_r}^{d_r} T^{c_1, \dots, c_s}_{d_1, \dots, d_r}. \quad (1.20)$$

onde todos os índices assumem valores de 1 até  $n$ .

Vetores tangentes e 1-formas (também chamadas de vetores cotangentes) são casos particulares de tensores. Nas próximas seções, veremos que propriedades de uma variedade, por exemplo, curvatura e distâncias, são caracterizadas por tensores.

### 1.1.3 Produto exterior, formas diferenciais e p-formas

Após a definição de 1-formas, torna-se conveniente passar à definição de produto exterior, formas diferenciais e p-formas. Entretanto, primeiro faremos uma convenção.

Para todo objeto matemático dotado de estrutura de espaço linear (ou vetorial) local (definida em um ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$ ), satisfeitas certas circunstâncias [43, 44], tais como continuidade e diferenciabilidade, pode-se definir um fibrado e seções. Conseqüentemente, teremos um campo. A convenção que será adotada é que para todo objeto matemático local na variedade e passível de generalização para fibrado e campo, não será feita distinção entre as propriedades de local e fibrado.

A definição de 1-formas pode imediatamente ser generalizada para o caso de formas diferenciais. Uma *forma diferencial* do tipo  $(r, 0)$  é simplesmente um tensor do tipo  $(r, 0)$ . Portanto, uma forma diferencial é um tensor com índices apenas covariantes. Da definição de tensores dada pela Eq. (1.19), uma forma diferencial arbitrária  $\omega$  pode então ser expressa por

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_r} \theta^{a_1} \otimes \dots \otimes \theta^{a_r}, \quad (1.21)$$

enquanto que em uma base holonômica, por

$$\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r}. \quad (1.22)$$

Uma forma diferencial pode ser simétrica/antisimétrica quanto a troca de dois ou mais índices de suas componentes. Para o caso de um forma diferencial totalmente antisimétrica, cabe uma definição, dada a seguir.

Uma *p-forma* é uma forma diferencial do tipo  $(p, 0)$  totalmente antisimétrica. Assim, para uma  $p$ -forma arbitrária com componentes  $\omega_{a_1 \dots a_p}$ , qualquer troca dos índices acarretará em  $\omega_{a_1 \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p} = -\omega_{a_1 \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_p}$ . Por exemplo, dada uma 2-forma  $\omega$ , ela é expressa por

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ab} \theta^a \otimes \theta^b = \omega_{ab} (\theta^a \otimes \theta^b - \theta^b \otimes \theta^a) = \omega_{ab} \theta^{[a} \otimes \theta^{b]}. \quad (1.23)$$

O último resultado serve de motivação para a definição de produto exterior (também chamado produto externo). Seja  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  um conjunto de  $m$  1-formas, define-se o *produto exterior* como uma operação algébrica, denotada por  $\wedge$ , tal que  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m$  seja: 1) linear em cada 1-forma e, 2) nulo se pelo menos duas das 1-formas do conjunto sejam idênticas.

Logo, qualquer p-forma arbitrária  $\omega$  pode ser expressa por

$$\omega = \omega_{a_1, \dots, a_p} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}. \quad (1.24)$$

onde  $\omega_{a_1, \dots, a_p}$  são as componentes da p-forma e todos índices assumem valores de 1 até  $n$ .

Pelas definições de produto exterior e p-formas (1.24), pode-se facilmente notar que as p-formas formam um espaço linear de dimensão  $C_{n,p}$ , onde  $C_{n,p}$  denota o número de combinações, e portanto, necessariamente  $p \leq n$ . Dito de outro modo, o número máximo de índices que as componentes de uma p-forma pode ter está necessariamente sujeito à restrição  $p \leq n$ .

#### 1.1.4 Derivada exterior

Tendo já esboçado alguns elementos da teoria de variedades diferenciáveis e estruturas definidas nestas, torna-se pertinente discutir a diferenciação de tensores em  $\mathcal{M}$ . Em termos bastantes simples, a diferenciação mede como uma quantidade muda de um ponto a outro. No caso do espaço Euclidiano na base canônica, objetos tensoriais serão expressos em uma base que não depende das coordenadas; com isso, a base permanece constante quando diferenciada. Entretanto, no caso de uma variedade, tal resultado não necessariamente ocorre. A diferença entre tensores, cada qual definido em dois pontos diferentes da variedade, terá uma contribuição proveniente da mudança da base. Em termos mais técnicos, a fim de poder tomar derivadas de tensores em variedades, torna-se necessário introduzir uma estrutura a mais na variedade, a saber, a conexão afim. A derivada covariante torna-se a generalização do conceito familiar de derivada de um tensor no espaço Euclidiano. Porém, também há outros tipos de diferenciação; podemos citar a derivada exterior e a derivada de Lie. Nesta seção é introduzida a derivada exterior.

Sejam  $\omega$  e  $\rho$ , respectivamente, uma p-forma e uma q-forma;  $f$  uma função em  $\mathcal{M}$ . A *derivada exterior*, denotada simplesmente pela letra  $d$ , é uma operação que mapeia uma



p-forma em uma  $(p + 1)$ -forma, definida por

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & d(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\rho}) = d\boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{\rho}, \\
 (ii) \quad & d(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = d\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + (-1)^p \boldsymbol{\omega} \wedge d\boldsymbol{\rho}, \\
 (iii) \quad & df = \partial_\mu f dx^\mu, \\
 (iv) \quad & d(df) = 0,
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde  $\partial_\mu$  é uma notação alternativa para  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Portanto, dada uma p-forma arbitrária  $\boldsymbol{\omega}$  na base holonômica

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{1.26}$$

como resultado da derivada temos

$$\boldsymbol{\omega} = \partial_\nu (\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \tag{1.27}$$

Para o caso de uma função (0-forma), a definição (iv) em (1.25) pode ser expressa como  $d(df) = \partial_\mu \partial_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$ , a qual é identicamente nula devido as propriedades do produto exterior. Na segunda aplicação da derivada exterior na Eq. (1.27), teremos derivadas de segunda ordem das componentes da p-forma, e portanto

$$d(d\boldsymbol{\omega}) = 0, \tag{1.28}$$

que é válido para uma p-forma arbitrária. Alguns célebres teoremas seguem da definição e propriedades da derivada exterior. Dois destes são os teoremas de Poincaré e Frobenius. O primeiro pode ser enunciado do seguinte modo: se  $\boldsymbol{\omega}$  é uma p-forma, com  $p \geq 1$ , e se  $d\boldsymbol{\omega} = 0$ , então existe uma  $(p - 1)$ -forma  $\boldsymbol{\rho}$  tal que  $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\rho}$ . O segundo concerne a respeito da classificação de um conjunto de 1-formas linearmente independentes, tendo várias aplicações, tais como classificação de quantidades invariantes em um sistema de equações diferenciais. Para o enunciado, demonstração e algumas aplicações do teorema de Frobenius, assim como a demonstração do teorema de Poincaré e algumas de suas aplicações, tais como em eletromagnetismo, vide [44].

Pelas definições de produto externo e derivada exterior em (1.25), pode-se mostrar que a derivada exterior de p-formas é independente das coordenadas usadas [36]. Além disso, a deriva exterior também configura-se como uma generalização dos conceitos familiares de divergência e rotacional em uma variedade tridimensional [44].

### 1.1.5 Derivada de Lie

Como citado na subseção (1.1.4), outro tipo de estrutura de diferenciação em variedades é a derivada de Lie. Para introduzi-lá, considere que em cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , um vetor  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ , pode ser encarado como o vetor tangente a uma curva  $\gamma(\lambda)$ , onde  $\lambda$  parametriza a curva, e para  $\lambda = 0$  tem-se  $\gamma(0) = p$ . Logo, introduzindo as coordenadas  $y^\mu(\lambda)$  para a curva  $\gamma(\lambda)$ , tem-se que a equação para a curva é a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dy^\mu}{d\lambda} = v^\mu(y(\lambda)), \quad (1.29)$$

com valores iniciais  $y^\mu(0) = x^\mu$ . Desse modo, para todo ponto inicial com coordenadas  $x^\mu$ , tem-se uma família de curvas, chamadas curvas integrais do vetor  $\mathbf{v}$ . À esta família de curvas dá-se o nome de congruência; dependendo do tipo do vetor, tem-se uma congruência do tipo tempo, luz ou espaço.

Dada uma congruência, pode-se então definir um mapeamento  $\Phi_\lambda$  atuando em um ponto  $p$  com coordenadas  $x^\mu$  e tendo como imagem outro ponto com coordenadas  $y^\mu(\lambda)$ . Para valores suficientemente pequenos do parâmetro  $\lambda$ , tem-se em primeira ordem

$$y^\mu(\lambda) = x^\mu + \lambda v^\mu(x). \quad (1.30)$$

Assim, para está ordem de aproximação o mapa  $\Phi_\lambda$  é possivelmente passivo de ser invertível. Portanto, pode-se definir o mapeamento  $\Phi_\lambda^* \mathbf{T}$  de um tensor arbitrário  $\mathbf{T}$ , chamado de transporte de Lie. A *derivada de Lie* de um tensor arbitrário  $\mathbf{T}$  é definida por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{T} = \left[ \frac{d}{d\lambda} (\Phi_\lambda^* \mathbf{T}) \right]_{\lambda=0}. \quad (1.31)$$

A fim de esclarecer melhor a definição da derivada de Lie, considera-se a seguir os exemplos da aplicação desta em uma função arbitrária  $f$  em  $\mathcal{M}$  e um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$ . Para a função, temos que o mapa  $\Phi_\lambda^*$  tem como resultado  $\Phi_\lambda^* f = f(y(x, \lambda))$ . É fácil notar

que em  $\lambda = 0$  valem

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right)_{\lambda=0} &= \delta_\nu^\mu, \\ \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right)_{\lambda=0} &= \delta_\nu^\mu, \\ \left( \frac{dy^\mu}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} &= v^\mu(x), \\ \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} &= -v^\mu(x). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Portanto, tem-se

$$\frac{d}{d\lambda}(\Phi_\lambda^* f) = \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \frac{dy^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \frac{dy^\mu}{d\lambda}. \quad (1.33)$$

Usando a definição da derivada de Lie dada em (1.31) e as relações (1.32), ambas calculadas em  $\lambda = 0$ , a deriva de Lie da função  $f$  ao longo de uma curva integral de  $\mathbf{v}$  é

$$\mathcal{L}_\mathbf{v} f = v^\mu \partial_\mu f = \mathbf{v}(f), \quad (1.34)$$

onde o último resultado segue da definição de vetor tangente como  $\mathbf{v} = v^\mu \partial_\mu$  e é automaticamente passível de generalização para um base qualquer do espaço tangente.

Procedendo de maneira similar, calculemos a imagem do mapa  $\Phi_\lambda^*$  no vetor arbitrário  $\mathbf{u}$ , dada por

$$\Phi_\lambda^* \mathbf{u} = u^\mu(y(x, \lambda)) \frac{\partial}{\partial y^\mu} = u^\mu(y(x, \lambda)) \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.35)$$

Então, a derivada de Lie de  $\mathbf{u}$  é dada por

$$\mathcal{L}_\mathbf{v} \mathbf{u} = \left[ \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\rho} \frac{dy^\rho}{d\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} + u^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \right]_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.36)$$

Usando as relações (1.32), tem-se que as componentes de  $\mathcal{L}_\mathbf{v} \mathbf{u}$  são

$$(\mathcal{L}_\mathbf{v} \mathbf{u})^\mu = v^\nu \partial_\nu u^\mu - u^\nu \partial_\nu v^\mu. \quad (1.37)$$

A derivada de Lie do vetor  $\mathbf{u}$  com respeito ao vetor  $\mathbf{v}$  coincide com a expressão do comutador, dada em (1.8), entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Como discutido, o comutador dos vetores da base holonômica é identicamente nulo. Logo, no caso em que o comutador entre dois vetores

quaisquer seja nulo, as famílias de curvas integrais de ambos os vetores formam uma sub-variabilidade bidimensional de  $\mathcal{M}$ , com coordenadas dadas pelos parâmetros das curvas de ambos os vetores.

Semelhantermente aos exemplos de derivadas de Lie de uma função e um vetor, pode-se mostrar, usando as relações (1.32), a definição (1.19) e a lei de transformação de um tensor (1.20), que a derivada de Lie de um tensor arbitrário  $\mathbf{T}$  do tipo  $(r, s)$ , é dada por

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{T})^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = v^\alpha \partial_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - T^{\alpha \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\alpha v^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\alpha v^{\mu_r} + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\alpha \nu_2 \dots \nu_s} \partial_{\nu_1} v^\alpha + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \alpha} \partial_{\nu_s} v^\alpha. \quad (1.38)$$

Da definição de p-formas dada em (1.24) e da derivada exterior, pode-se também mostrar que para uma p-forma arbitrária  $\sigma$ , tem-se a identidade

$$d(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \sigma) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(d\sigma). \quad (1.39)$$

A identidade (1.39) pode também ser verificada calculando-se os lados direito e esquerdo separadamente, verificando-se a igualdade entre eles.

### 1.1.6 Derivada covariante

Até agora, dois tipos de derivadas foram introduzidas, a saber, a derivada exterior e a de Lie. Ambas configuram-se como uma generalização da derivadas de tensores no espaço plano. Apesar dessa generalização, suas definições dependem de tensores particulares, ou seja, no caso da derivada exterior, esta atua apenas em p-formas, enquanto que na derivada de Lie é necessário especificar um vetor. Além disso, nenhuma das duas requer a introdução de novas estruturas. Em vista dessas particularidades das derivadas exterior e de Lie, introduz-se a seguir um novo tipo de derivada, a saber, a derivada covariante.

Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vetores tangentes,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes reais e  $f$ ,  $g$  funções em  $\mathcal{M}$ . A *derivada covariante* de um vetor  $\mathbf{v}$  na direção de um vetor  $\mathbf{u}$ , denotada por  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ , é definida satisfazendo a

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nabla_{f\mathbf{u}+g\mathbf{v}} \mathbf{w} = f \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} + g \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w}, \\ (ii) \quad & \nabla_{\mathbf{u}} (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \beta \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w}, \\ (iii) \quad & \nabla_{\mathbf{u}} (f \mathbf{v}) = \mathbf{u}(f) \mathbf{v} + f \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

onde a notação  $\mathbf{u}(f)$  significa  $\mathbf{u}(f) = u^a \mathbf{e}_a(f)$ , que quando expressa na base holonômica torna-se  $\mathbf{e}_a(f) = e_a^\mu \partial_\mu f$ . A derivada covariante pode então ser expressa por

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^a \nabla_a v^b \mathbf{e}_b, \quad (1.41)$$

onde  $\nabla_a$  é uma notação alternativa para a derivada covariante na direção do vetor  $\mathbf{e}_a$  da base geral. Outra notação frequentemente usada é  $\nabla_a v^b = v^b{}_{;a}$ . A derivada covariante dos próprios vetores da base introduzem uma estrutura a mais na variedade: a conexão afim. Esta é definida por

$$\nabla_{\mathbf{e}_b} \mathbf{e}_a = \omega^c{}_{ab} \mathbf{e}_c. \quad (1.42)$$

Usando a propriedade (iii) de (1.40), chamada regra de Leibniz, em conjunto com a relação (1.13), a derivada covariante de um elemento  $\boldsymbol{\theta}^a$  de uma base geral do espaço tangente é

$$\nabla_{\mathbf{e}_b} \boldsymbol{\theta}^a = -\omega^a{}_{cb} \boldsymbol{\theta}^c. \quad (1.43)$$

Os coeficientes  $\omega^a{}_{bc}$  são chamados de coeficientes de conexão. Para uma base holonômica, reservaremos a notação  $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$  para os coeficientes de conexão. Com as últimas definições, pode-se calcular, por exemplo, que a derivada covariante de um tensor arbitrário  $\mathbf{S}$  do tipo  $(1, 1)$  é dada por

$$\nabla_a \mathbf{S} = \nabla_a S^b{}_c \mathbf{e}_b \otimes \boldsymbol{\theta}^c, \quad \nabla_a S^b{}_c = \mathbf{e}_a(S^b{}_c) + \omega^b{}_{da} S^d{}_c - \omega^d{}_{dca} S^b{}_d. \quad (1.44)$$

Das propriedades da derivada covariante, Eq. (1.40), a expressão (1.44) pode ser generalizada para tensores de qualquer tipo [35].

Os coeficientes de conexão podem ser relacionados com o comutador dos vetores de base do espaço tangente, dados na Eq. (1.8), por meio da definição de uma nova estrutura na variedade: o tensor de torção. Para isso, define-se o *tensor de torção* como

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \nabla_a \mathbf{e}_b - \nabla_b \mathbf{e}_a + [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b], \quad (1.45)$$

cujas as componentes são dadas por

$$T^a{}_{bc} = 2\omega^c{}_{[ab]} + D^c{}_{ab}. \quad (1.46)$$

Para o caso de uma variedade com torção nula, que é o caso da RG, tem-se então

$$2\omega_{[ab]}^c = -D^c_{ab}. \quad (1.47)$$

Em uma base holonômica teremos  $\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = 0$ , ou seja, uma conexão simétrica, pois os coeficientes  $D^c_{ab}$ , definidos pelo comutador em (1.10), são idênticamente nulos. Uma vez que as bases gerais podem ser expressas como uma combinação linear das bases holonômicas, Eq. (1.4), os coeficientes de conexão podem ser imediatamente relacionados nestas respectivas bases por meio das definições da derivada covariante (1.40). Neste caso, os coeficientes de conexão da base geral quando expressos na base holonômica são conhecidos como coeficientes de rotação de Ricci [35, 38, 41].

Seja  $\{\theta^a\}$  uma base geral do espaço cotangente. Podemos expressar cada um dos elementos desta base como uma combinação linear da base holonômica como  $\theta^a = \theta^a_\mu dx^\mu$ ; então, segue que a derivada exterior de  $\theta^a$  pode ser escrita como

$$d\theta^a = \partial_\mu \theta^a_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \theta^a_{\nu;\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \omega^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c. \quad (1.48)$$

Definindo a *conexões 1-formas* como

$$\omega^a_b = \omega^a_{bc} \theta^c, \quad (1.49)$$

a *torção 1-forma* como

$$\mathbf{T}^a = \frac{1}{2} T^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c \quad (1.50)$$

e usando a Eq. (1.48), tem-se a relação

$$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = \mathbf{T}^a. \quad (1.51)$$

A relação (1.51) é chamada de *primeira equação de estrutura de Cartan*. Tal relação é conveniente para o cálculo da parte antisimétrica dos coeficientes da conexão afim em uma base geral uma vez conhecida a parte antisimétrica da torção. Evidentemente, no caso de uma variedade com torção nula, como em RG, ocorrem mais simplificações no cálculo da conexão. Assim como em RG, será adotado desde agora que a torção é nula.

No caso de torção nula, pode-se imediatamente relacionar a derivada de Lie com a derivada covariante, bastando substituir as derivadas parciais por covariantes na expressão

da derivada de Lie para um tensor arbitrário na Eq. (1.38). Por exemplo, para a derivada de Lie de um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$  em relação a um vetor  $\mathbf{v}$ , a expressão (1.37) é alterada para

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})^\mu = v^\nu \nabla_\nu u^\mu - u^\nu \nabla_\nu v^\mu. \quad (1.52)$$

Ainda resta mais uma estrutura a ser definida na variedade diferenciável, a qual introduz o conceito de curvatura.

### 1.1.7 Tensor de curvatura de Riemann

O *tensor de curvatura de Riemann* é definido por

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c) = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a - \nabla_{[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b]}) \mathbf{e}_c. \quad (1.53)$$

Usando a definição dos coeficientes da conexão afim dados na Eq. (1.42), o tensor de Riemann expresso por componentes em uma base geral é dado por

$$R^a{}_{bcd} = \mathbf{e}_c(\omega^a{}_{bd}) - \mathbf{e}_d(\omega^a{}_{bc}) + \omega^f{}_{bd} \omega^a{}_{fc} - \omega^f{}_{bc} \omega^a{}_{fd} - D^f{}_{cd} \omega^a{}_{bf}, \quad (1.54)$$

o qual em uma base holonômica tem o último termo identicamente nulo. Da expressão para as componentes do tensor de Riemann, Eq. (1.54), são obtidas as propriedades

$$\begin{aligned} (i) \quad R^a{}_{bcd} &= -R^a{}_{bdc}, \\ (ii) \quad R^a{}_{[bcd]} &= 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Definindo-se a *curvatura 2-forma* por

$$\boldsymbol{\Omega}^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} \boldsymbol{\theta}^c \wedge \boldsymbol{\theta}^d, \quad (1.56)$$

a Eq. (1.54) pode ser expressa pela relação

$$d\boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b = \boldsymbol{\Omega}^a{}_b. \quad (1.57)$$

A relação (1.57) é chamada *segunda equação de estrutura de Cartan*. Assim, conhecida as conexões 1-formas, pode-se imediatamente calcular as componentes do tensor de Riemann.

Aplicando duas vezes a derivada exterior à segunda equação de estrutura de Cartan, Eq. (1.57), e devido à propriedade (1.28), obtemos a identidade

$$d\Omega^a_b - \Omega^a_c \wedge \omega^c_b + \omega^a_c \wedge \Omega^c_b = 0, \quad (1.58)$$

cujas as componentes satisfazem

$$R^a_{b[cd;f]} = 0. \quad (1.59)$$

As identidades (1.58), com componetes dadas por (1.59), são chamadas *identidades de Bianchi*.

Além da definição do tensor de Riemann, outro tensor é essencial no estudo de variedades diferenciáveis e em teorias métricas de gravitação (o que inclui RG), a saber, o tensor de Ricci.

Define-se o *tensor de Ricci* pela aplicação da curvatura 2-formas em dois vetores da base geral do espaço tangente pela expressão dada por

$$\Omega^c_a(\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_b) = \frac{1}{2} R^c_{adf} \theta^d \wedge \theta^f (\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_b), \quad (1.60)$$

cujas componentes são dadas por

$$R_{ab} = R^c_{acb}. \quad (1.61)$$

Um interpretação geométrica do tensor de Riemann pode ser encontrada, por exemplo, em [40, 43]. Basicamente, o tensor de Riemann está relacionado a possível não comutatividade da derivada covariante; assim, no transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada, este não necessariamente coincidirá consigo mesmo no retorno ao ponto inicial da curva. Quanto ao tensor de Ricci, nas mesmas referências citadas para a interpretação geométrica do tensor de Riemann, pode-se mostrar que em um certo sistema de coordenadas, chamado sistema de coordenadas normais, o tensor de Ricci configura-se como um acréscimo ao elemento de volume em segunda ordem nestas coordenadas.

Embora a definição de variedade diferencial seja a de um espaço localmente homeomórfico ao Euclidiano e, portanto, implicitamente sendo um espaço métrico ( possibilitando assim introduzir quantidades diferenciáveis em um ponto), até agora nenhuma estrutura foi definida tal que esta seja uma generalização, ou ao menos análoga, aos conceitos familiares de



distância entre dois pontos, volume e área no espaço Euclidiano. Aliás, todas as definições até então não dependem necessariamente de tal generalização ou analogia. Em vista disso, define-se uma nova estrutura que cumpra o papel da generalização do conceito de distância entre dois pontos da variedade, a saber, o tensor métrico ou, simplesmente, métrica, como frequentemente abreviado.

### 1.1.8 O tensor métrico e geodésicas

Em (1.1.3) foi definida uma operação chamada produto externo no espaço das formas diferenciais. Passaremos agora à definição de uma operação análoga, denominada produto interno e atuando no espaço dos vetores tangentes. Sejam  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  vetores pertencentes ao espaço tangente,  $f$  e  $h$  funções em  $\mathcal{M}$ . O *produto interno*, denotado por  $\cdot$ , é definido satisfazendo as propriedades

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ (ii) \quad & (f\mathbf{u} + h\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = f\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + h\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \\ (iii) \quad & (f\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = f\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Usando as propriedades definidoras do produto interno (1.62) e a expansão de um vetor tangente em uma base geral dada pela Eq. (1.3), então o produto interno entre dois vetores tangentes  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  pode ser expresso por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^a v^b \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \tag{1.63}$$

Ao produto interno entre os elementos da base de vetores do espaço tangente, reserva-se a notação

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{ab}, \tag{1.64}$$

onde os coeficientes  $g_{ab}$  também são as componentes de um tensor simétrico. Desse modo, defini-se o *tensor métrico* como um tensor simétrico do tipo  $(0, 2)$  expresso por

$$\mathbf{g} = g_{ab} \boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{\theta}^b. \tag{1.65}$$

o tensor métrico pode ser transformado e representado por uma matriz simétrica e diagonal  $n \times n$  em um ponto  $p$  da variedade  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensional. Desse modo, as componentes da

métrica podem ser todas positivas ou algumas delas negativas. À esta propriedade dá-se a denominação de assinatura da métrica. Por exemplo, no caso de uma variedade de quatro dimensões, pode-se ter todas as quatro componentes da matriz diagonalizada sendo positivas; neste caso, a variedade contém uma métrica dita *riemanniana*. De um ponto de vista estritamente matemático, outras possibilidades são permitidas. No entanto, a que contém mais interesse físico em teorias métricas de gravitação são os casos equivalentes de três componentes negativas e um positiva, ou, o oposto, com uma componente negativa apenas e as três demais positivas. Os dois casos são resumidamente representados pela notação  $(1, -1, -1, -1)$  ou  $(-1, 1, 1, 1)$ . Em ambas as duas possibilidades, a variedade contém uma métrica dita *pseudo-riemanniana* ou *lorentziana*. A escolha de qual assinatura seguir é uma questão de convêniência. Nesta tese, escolhe-se a assinatura  $(1, -1, -1, -1)$ . Especificada então a assinatura escolhida, o produto interno de um vetor  $\mathbf{v}$  consigo mesmo, denominado norma do vetor <sup>4</sup>, é classificado pelas três possibilidades

$$\begin{aligned}
 (i) \text{ tipo tempo se } \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= g_{ab} v^a v^b \geq 0, \\
 (ii) \text{ tipo luz se } \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0, \\
 (iii) \text{ tipo espaço se } \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Com a introdução do tensor métrico, pode-se então construir um isomorfismo entre vetores pertencentes ao espaço tangente e 1-formas pertencentes ao espaço cotangente. Dessa forma, as componentes de um vetor tangente  $v^a$  estão relacionadas com as componentes  $v_a$  de uma 1-forma por

$$v_a = g_{ab} v^b \quad \text{ou} \quad v^a = g^{ab} v_b, \tag{1.67}$$

onde  $g^{ab}$  são as componentes da matriz inversa à  $g_{ab}$ . O isomorfismo (1.67) pode ser imediatamente aplicado a qualquer tensor, correspondendo ao procedimento de “abaixar”

---

<sup>4</sup>Basicamente, a norma de um vetor seria o equivalente ao comprimento de um vetor no espaço euclidiano. Da definição de produto interno, podemos também definir o conceito de norma. Porém, a fim de não se fazer desta tese um trabalho repleto de fundamentações matemáticas rigorosamente demonstradas e dado o propósito expresso pelo título do capítulo, não abordaremos o conceito de norma. Para mais, vide [43, 44]

e “levantar” índices. Em uma base holonômica, o tensor métrico é costumamente expresso por

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (1.68)$$

que quando aplicado a elementos diferenciais, representados por  $dx^\mu \partial_\mu$ , em um ponto  $p$  de uma curva  $\gamma(t)$  em  $\mathcal{M}$ , pode ser definido com o conceito de distância ao longo da curva dada.

Caso se trabalhe em uma base holonômica, conseqüentemente as componentes da métrica são denotadas por  $g_{\mu\nu}$ . Entretanto, em uma base geral  $\{\mathbf{e}_a\}$ , as componentes da métrica necessariamente dependem da escolha da base. Uma escolha conveniente é a chamada *base ortonormal*, também conhecida em quatro dimensões por *tetradas ortonormais*. Desta escolha de base tem-se  $g_{ab} = \eta_{ab}$ , com  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , chamada métrica de Minkowski. Feita a escolha da base geral (frequentemente associada a pressupostas simetrias da variedade [41]), a forma tomada pelas componentes da métrica tornam-na uma classe de métricas ligadas por algum grupo de simetrias. Por exemplo, no caso de uma base geral ortonormal, as componentes da métrica são invariantes perante transformações de Lorentz locais, significando que os parâmetros do grupo de Lorentz tornam-se funções das coordenadas; desse modo, representações não tensoriais do grupo de Lorentz, como por exemplo, a representação spinorial, podem ser imediatamente definidas em um espaço-tempo não necessariamente plano. Além da base ortonormal, também há outras escolhas convenientes, como por exemplo, a base de tetradas do tipo luz, caracterizada em quatro dimensões pela propriedade que os quatro vetores da base são do tipo-luz. Como aplicações desta base geral, pode-se citar o formalismo de Newman-Penrose [41, 42] (útil na descrição de radiação gravitacional e formulação equivalente da classificação de Petrov [35]) e estudos de métricas com simetria axial, tais como a de Kerr [45].

Embora tenha-se feito a convenção que apenas variedades com torção nula serão consideradas nesta tese, nenhuma condição foi estabelecida quanto à derivada covariante da métrica. Caso ela seja arbitrária, e conseqüentemente expressa por um tensor do tipo  $(0, 3)$ , os coeficientes da conexão (1.49) também serão arbitrários. Quando a derivada covariante da métrica satisfaz a  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , tem-se a chamada condição de *metricidade*. A geometria diferencial em variedades diferenciáveis tem como caso geral a arbitrariedade

da derivada covariante e da conexão, além também da possibilidade de torção não nula. Desse modo, pode-se estabelecer teorias de gravitação geométricas com todas estas últimas características [46] ou uma parte delas.

A geometria diferencial para os casos de torção nula e satisfeita a condição de metricidade é chamada *geometria riemanniana*. Como consequência, a conexão não é mais uma estrutura independente. Da definição de derivada covariante, Eq. (1.40) e metricidade, pode-se deduzir

$$\nabla_a g_{bc} = 0 = \mathbf{e}_a g_{bc} - 2\omega_{(bc)a}, \quad (1.69)$$

onde  $\omega_{abc} = g_{ad}\omega^d{}_{bc}$ . No caso de torção nula, usando a Eq. (1.47) junto de (1.69), a conexão é dada por

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_c(g_{ab}) + \mathbf{e}_b(g_{ac}) - \mathbf{e}_a(g_{bc}) + D_{cab} + D_{bac} - D_{abc}), \quad (1.70)$$

onde  $D_{abc} = g_{ad}D^d{}_{bc}$  e  $D^c{}_{ab}$  provém do comutador de base geral (1.10). Para o caso de uma base holonômica, imediatamente segue que  $D^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$  e a conexão  $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ , chamada de conexão de Levi-Civita, com os coeficientes também denominados de símbolos de Christoffel, torna-se simétrica no par de índices  $\alpha$  e  $\beta$ , enquanto que termos, tais como  $\mathbf{e}_c(g_{ab})$ , tornam-se  $\partial_\mu g_{\alpha\beta}$ . Por outro lado, para o caso de uma base geral com métrica constante, como nos exemplos da base ortonormal e na base de tetradas do tipo luz, só restam em (1.70) os termos envolvendo  $D_{abc}$ ; além disso, os coeficientes da conexão  $\omega_{abc}$  serão antisimétricos no par de índices  $a$  e  $b$ , como consequência de as componentes da métrica em (1.70) serem constantes.

Após definido o tensor métrico, pode-se então considerar mais um objeto tensorial de grande importância no estudo de teorias métricas de gravitação. Da definição do tensor de Ricci dada na Eq. (1.60), define-se o *escalar de Ricci*, denominado simplesmente por  $R$ , como sendo o traço do tensor de nome homônimo, a saber

$$R = R^a{}_a = g^{ab}R_{ab}. \quad (1.71)$$

No espaço euclidiano é bem conhecido que a curva com a menor distância possível entre dois pontos corresponde a uma linha reta. Como generalização, em variedades

diferenciáveis também pode-se definir a curva com a menor distância entre dois pontos. Por simplicidade, as próximas definições são dadas em uma base holonômica, lembrando que no caso de equações tensoriais, estas são inteiramente passíveis de serem expressas em qualquer base, holonômica ou não. A curva  $\gamma(\lambda)$ , parametrizada por  $\lambda$  e com  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ , é chamada *geodésica* tal que o intervalo entre dois pontos,  $x^\mu(\lambda_1)$  e  $x^\mu(\lambda_2)$ , expresso por

$$s = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda)) dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.72)$$

seja mínimo. A fim de obter a equação para a curva geodésica, teremos

$$\delta s = \delta \int ds, \quad (1.73)$$

onde  $\delta s$  denota a variação do intervalo frente a variações arbitrárias  $\delta x^\mu$  da curva geodésica, com  $\delta x^\mu = 0$  nos pontos da variedade correspondentes, respectivamente, a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Do cálculo variacional, a variação de um funcional (tal como é o intervalo em (1.72)) corresponde às equações de Euler-Lagrange, as quais para o funcional (1.72) conduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em  $\lambda$ , dado por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (1.74)$$

Do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais, a solução do sistema é garantida no intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$  conhecidos  $x^\mu$  e o vetor tangente à geodésica,  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , em algum ponto do intervalo. Além disso, o parâmetro da curva geodésica em princípio é arbitrário. A norma do vetor tangente à geodésica satisfaz um dos possíveis casos expressos em (1.66). Desse modo, caso o vetor tangente seja dos tipos tempo ou espaço, uma escolha conveniente para o parâmetro da geodésica é o próprio intervalo  $s$ , pois é fácil ver que para tal escolha a norma do vetor tangente é automaticamente igual a mais ou menos a unidade para os casos do tipo tempo e espaço, respectivamente. Todavia, para um vetor tangente do tipo luz, definido em (1.66) como tendo norma nula, o parâmetro da geodésica não pode ser escolhido como o próprio intervalo.

Uma definição equivalente da equação da geodésica também pode ser enunciada como: uma curva  $\gamma(\lambda)$ , com vetor tangente  $\mathbf{u}$  e componentes  $u^\mu(x(\lambda)) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , é chamada geodésica se o vetor tangente  $\mathbf{u}$  é paralelamente transportado ao longo de  $\gamma(\lambda)$ . A propri-

idade de ser paralelamente transportado ao longo da curva é expressa pela equação

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0, \quad (1.75)$$

em componentes dada por

$$u^b \nabla_b u^a = 0. \quad (1.76)$$

Entretanto, a curva geodésica, como a aquela cujo vetor tangente é paralelamente transportado, torna-se apenas equivalente à primeira definição, expressa em (1.73) e (1.74), no caso de uma variedade sem torção e metricidade satisfeita ( $\nabla_a g_{bc} = 0$ ). Não satisfeita esta condição, deve-se tratar com precaução o conceito de geodésica [46].

No esquema de apresentação de elementos de geometria diferencial feitos nesta seção, os tópicos de integração (e uma consequente generalização dos teoremas de Stokes e Gauss-Ostrogradski), subvariedades e simetrias seriam apropriados. Quantos aos dois primeiros, livros textos introdutórios, tais como [45] são, como primeira leitura, recomendados; para um enfoque mais sistemático, porém voltado para físicos, tem-se [37, 40, 43, 44]. Simetrias são abordadas posteriormente nesta tese.

## 1.2 Equações de campo de Einstein

Em conjunto com os elementos de geometria diferencial, podemos condiderar alguns fundamentos físicos para a RG. Primeiro, a RG é uma teoria métrica de gravitação com geometria pseudo-riemanniana e, consequentemente, satisfazendo as propriedades de metricidade, Eq. (1.69), torção nula, Eq. (1.47) e conexão afim de Levi-Civita, Eq. (1.70). Do princípio da equivalência, define-se que uma partícula pontual e livre da influência de quaisquer outros campos, mas somente interagindo com o campo gravitacional, tem por trajetória a curva geodésica dada pela Eq. (1.74). Além disso, conhecido o tensor métrico, a condição necessária para que este seja identificado como um campo gravitacional é que o tensor de Riemann não tenha todas as suas componentes iguais a zero, pois uma vez que isso ocorra, o espaço-tempo é plano e, consequentemente, passível de haver um transformação de coordenadas que tornem a métrica globalmente igual à de Minkowski.

Dito de outra forma, as forças de maré serão caracterizadas pela equação do desvio da geodésica [39], nas quais explicitamente entram as componentes do tensor de Riemann.

Embora, pelo princípio da equivalência, a dinâmica de uma partícula pontual em um dado campo gravitacional seja imediatamente conhecida pela solução das equações diferenciais satisfeitas pela geodésica em (1.74) [39], ainda resta saber qual a própria dinâmica do campo gravitacional. Uma situação análoga ocorre na eletrodinâmica, uma vez que conhecido o campo eletromagnético, pode-se conhecer a dinâmica de cargas pontuais pela equação da força de Lorentz [38]. Ocorre que, conhecidas as distribuições de cargas e correntes, a dinâmica do campo eletromagnético é inteiramente especificada pelo sistema de equações diferenciais parciais de Maxwell (abreviadamente, equações de Maxwell) e condições iniciais e de contorno para estas [38]. Assim também se espera em RG: conhecidas as distribuições de matéria e energia, conhece-se a dinâmica do campo gravitacional.

Sabe-se que a dinâmica do campo gravitacional na gravitação newtoniana é expressa pela equação de Poisson, dada por

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \tag{1.77}$$

onde  $\Delta$  denota o operador laplaciano, o qual em coordenadas cartesianas é dado por  $\Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ .  $G$  é uma constante, chamada de constante de Newton, enquanto que  $\rho$  é a densidade de matéria. O campo  $\phi$ , chamado de potencial newtoniano, está relacionado ao campo gravitacional por  $g_i = -\partial_i \phi$  em coordenadas cartesianas, onde  $g_i$  é o vetor aceleração gravitacional. No esquema teórico da relatividade especial, torna-se claro que a dinâmica do campo gravitacional newtoniano não é covariante no sentido de invariância perante transformações de Lorentz. Logo, torna-se necessário encontrar equações dinâmicas que no limite não relativístico são equivalentes à Eq. (1.77).

Da equação da geodésica, dada em (1.74), tem-se que na RG as componentes da métrica cumprem um papel análogo ao potencial newtoniano, enquanto que a conexão afim desempenha o análogo à aceleração experimentada por uma partícula pontual na gravitação newtoniana. Portanto, como analogia e generalização relativística da Eq. (1.77), em princípio as equações dinâmicas do campo gravitacional em RG devem envolver as componentes da métrica. Além disso, espera-se que elas contenham no máximo segundas

derivadas espaço-temporais e, devido a universalidade da interação gravitacional, acoplamento com matéria e energia.

Matéria e energia podem ser convenientemente descritas pelo *tensor momento-energia*, com componentes  $T_{ab}$  e simétrico. Em [39, 40], por exemplo, são apresentados possíveis descrições da matéria-energia de um sistema por meio do tensor momento-energia em um espaço-tempo curvo; seja desde um conjunto de partículas pontuais a um meio contínuo, comumente na forma de um fluido, mas também podendo ser um meio com propriedades elásticas [47], estas referências primeiro abordam como construir o tensor momento-energia. Uma definição alternativa do tensor momento-energia é dada na Eq. (1.85).

As equações dinâmicas do campo gravitacional em RG devem ser equações tensoriais covariantes, portanto, invariantes perante transformações de coordenadas. Podemos citar dois modos para obtê-las. O primeiro (vide, por exemplo, [37, 39, 40]), constituindo-se de um argumento com características heurísticas, parte analisando inicialmente o lado direito da equação de Poisson, Eq. (1.77), e inferindo que a generalização deste deve ser proporcional ao tensor momento-energia. Pela lei de conservação local do tensor momento-energia no espaço plano, expressa por

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.78)$$

a qual é alterada no espaço curvo, com acoplamento mínimo e para uma base geral do espaço tangente, para a expressão

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (1.79)$$

então, o lado esquerdo da equação de Poisson deve ser alterado para um tensor simétrico  $G_{ab}$  que satisfaça a

$$\nabla^a G_{ab} = 0, \quad (1.80)$$

e que dependa apenas da métrica e no máximo de segundas derivadas espaço-temporais desta. Objetos tensoriais com esta propriedade são, por exemplo, o tensor de Ricci e a própria métrica, ambos tensores do tipo  $(0, 2)$ , além do escalar de Ricci e o determinante da métrica. Por simplicidade, assume-se inicialmente que  $G_{ab}$  possa ser expresso como

$$G_{ab} = \alpha_1 R_{ab} + \alpha_2 R g_{ab} + \alpha_3 g_{ab}, \quad (1.81)$$



onde  $\alpha_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são constantes a serem determinadas. Substituindo (1.81) em (1.80) e usando as identidades de Bianchi, Eq. (1.59), pode-se obter  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1$ . Com  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  permanecendo arbitrárias <sup>5</sup>. Portanto, as equações

$$\begin{aligned} G_{ab} + \Lambda g_{ab} &= \kappa T_{ab}, \\ \text{com } G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

são candidatas a serem as equações dinâmicas para o campo gravitacional. A constante  $\alpha_1$  foi absorvida por redefinições das constantes  $\alpha_2$ , a qual passa a ser denotada por  $\Lambda$ , e na de proporcionalidade com o tensor momento-energia, denotada por  $\kappa$ . A fim de satisfazer o limite não-relativístico [38, 39], a constante  $\kappa$  deve ser igual a  $\frac{8\pi G}{c^4}$ , onde  $G$  é a constante de Newton e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Para a constante  $\Lambda$ , permanecendo arbitrária e denominada de *constante cosmológica*, espera-se um valor desprezível para a compatibilidade com o limite não relativístico, sendo, em princípio, somente considerável em escalas cosmológicas. As equações (1.82) e o tensor  $G_{ab}$  são chamados, respectivamente, de *equações de campo de Einstein* e *tensor de Einstein*.

O segundo modo de obter as equações de campo de Einstein é postulando uma ação com as propriedades de localidade e contendo no máximo segundas derivadas espaço-temporais das componentes da métrica. Uma escolha simples é a *ação de Einstein-Hilbert* [38], dada por

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^n x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (1.83)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica,  $R$  o escalar de Ricci,  $\Lambda$  a constante cosmológica e  $n$  o número de dimensões e a integração é feita sob uma região da variedade. Escolhida uma ação para o campo gravitacional, a ação total será formada pela adição da ação de quaisquer outros campos à ação de Einstein-Hilbert. Por simplicidade,  $S_m$  denota tal ação, coletivamente chamada de *ação da matéria* <sup>6</sup>. Portanto, a dinâmica do campo gravitacional

---

<sup>5</sup>Uma vez que assume-se metricidade, então  $\nabla^a g_{ab}$  é identicamente nulo. Portanto,  $\alpha_3$  torna-se arbitrária.

<sup>6</sup> $S_m$  pode indicar a ação do campo eletromagnético, sistemas de partículas, um meio contínuo, etc. No caso de acoplamento mínimo, que significa que a gravitação é inteira e satisfatoriamente descrita por uma teoria métrica, basta substituir, na expressão da ação  $S_m$  no espaço plano, quantidades covariantes. Por exemplo, todas as derivadas dos campos devem ser alteradas para derivadas covariantes.

pode ser implementada através da ação total

$$S = S_{EH} + S_m. \quad (1.84)$$

Para variações  $\delta g_{ab}$  das componentes da métrica, nulas na fronteira da região de integração, que tornam  $\delta S = 0$ , pode-se obter as equações de Einstein, (1.82), desde que defina-se

$$T^{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{ab}}. \quad (1.85)$$

A definição (1.85) é chamada de definição dinâmica do tensor momento-energia [38].

Assumindo que a dinâmica do campo gravitacional em RG é dada pelas equações de Einstein (1.82), passa-se agora a analisar o número de quantidades independentes, ou graus de liberdade, da dinâmica gravitacional em conjunto com a distribuição de matéria-energia e o problema do valor inicial. Nas referências [36,37,48] tal análise é feita com mais detalhes, enquanto que nesta tese segue-se de perto a abordagem de [38]. Por simplicidade, consideraremos  $\Lambda = 0$  e toda a análise é feita para um espaço quadridimensional, mas podendo ser facilmente extendida a um espaço-tempo de dimensão  $n$  com  $n-1$  coordenadas do tipo espaço. Além disso, consideraremos a matéria e energia descritas por um fluido perfeito com tensor momento-energia dado por

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b - p g_{ab}, \quad (1.86)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são, respectivamente, a densidade de energia do fluido (necessariamente contendo a energia de repouso, podendo ser acrescentada da energia interna do fluido) e a pressão. Densidade de energia e pressão são relacionadas através de uma equação de estado, a qual consiste de uma relação funcional entre as duas:  $p = p(\rho)$ . Enquanto que  $u_a$  são as componentes da quadrivelocidade do fluido perfeito, satisfazendo a

$$u^a u_a = g_{ab} u^a u^b = 1. \quad (1.87)$$

Substituindo o tensor momento-energia do fluido perfeito, Eq. (1.86), na Eq. (1.79), obtém-se as equações dinâmicas do fluido, as quais serão uma generalização relativística das equações da continuidade e de Euler em mecânica dos fluidos [39], contendo apenas derivadas de primeira ordem no tempo para as componentes da quadrivelocidade. Portanto,

a parte correspondente ao fluido, na dinâmica do sistema fluido e gravitação, contribui com quatro quantidades independentes: três componentes da quadrivelocidade, devido à relação (1.87), e a pressão ou densidade de energia, devido a equação de estado.

Para a parte gravitacional em quatro dimensões, em princípio há dez quantidades independentes, a saber, as componentes da métrica, uma vez que o tensor métrico é simétrico. Entretanto, por meio de transformação de coordenadas (ou também chamada escolha de calibre) em quatro dimensões, o número de quantidades independentes para a parte gravitacional passa a ser de seis quantidades. Este último resultado é consonante com a propriedade (1.80) satisfeita pelo tensor de Einstein, que reduz o sistema de dez equações de Einstein para um sistema com seis equações independentes. Portanto, a dinâmica do sistema gravitação e fluido tem dez quantidades independentes, o que faz desse sistema um sistema de equações determinado, uma vez que as equações de Einstein, (1.82), são um conjunto de dez equações.

As equações de Einstein são equações diferenciais parciais em segunda ordem no tempo. Logo, para o problema do valor inicial, é necessário especificar um certo número de funções e suas respectivas derivadas temporais em um certo instante do tempo, ou, equivalentemente, especifica-lás em uma hipersuperfície do tipo espaço [37], porém, por simplicidade, vamos adotar o caso simples de hipersuperfície do tipo espaço dada por  $t = \text{constante}$ , em algum sistema de coordenadas. É possível mostrar que as equações de Einstein contém apenas segundas derivadas temporais das componentes espaciais da métrica <sup>7</sup>, denotadas por  $g_{ij}$ , onde  $i, j = 1, 2, 3$ , totalizando seis componentes, enquanto que não há segundas derivadas temporais das componentes temporais e mistas, respectivamente,  $g_{00}$  e  $g_{0i}$ , [38]. As derivadas segundas (em relação ao tempo) das componentes espaciais aparecem também apenas nas componentes espaciais do tensor de Einstein, enquanto que para as componentes temporal e mistas, há apenas derivadas primeiras de  $g_{ij}$ . Assim, não há em todo o sistema das equações de Einstein derivadas primeiras em relação ao tempo das compo-

---

<sup>7</sup>A escolha de uma hipersuperfície do tipo espaço, a qual terá três dimensões em uma variedade quadridimensional, significa que o vetor normal a esta é do tipo tempo, enquanto que seus vetores tangentes são do tipo espaço. Feita a escolha da hipersuperfície, pode-se expressar as componentes de qualquer tensor na direção do vetor normal e dos vetores tangentes. Componentes expressas nas direções dos vetores tangentes à hipersuperfície são chamadas componentes espaciais.

mentes  $g_{00}$  e  $g_{0i}$ . Portanto, para a solução do problema do valor inicial, torna-se necessário especificar apenas  $g_{ij}$  e  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$  em um instante inicial, pois as componentes temporais e mistas do tensor de Einstein agem como restrições algébricas envolvendo  $g_{00}$ ,  $g_{0i}$ ,  $g_{ij}$  e  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$ . Logo, apenas seis das dez componentes independentes da métrica e suas derivadas primeiras em relação ao tempo devem ser dadas inicialmente. Entretanto, devido a invariância perante transformações de coordenadas, restam das seis componentes para o problema do valor inicial, apenas duas.

Portanto, para a solução do problema do valor inicial, são necessárias oito funções: quatro para o campo gravitacional e quatro para o fluido, uma vez que as equações dinâmicas deste só contém derivadas primeiras em relação ao tempo para as quatro quantidades independentes que o caracterizam.

No caso do vácuo (com  $T_{ab} = 0$ ), restam apenas quatro funções iniciais a serem dadas: duas das seis componentes de  $g_{ij}$  e  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$ . Assim, segue deste último caso, que a dinâmica do campo gravitacional livre é especificada por apenas duas das dez componentes independentes da métrica. Cabe observar ainda que não é necessário nenhuma simplificação das equações de Einstein, tal como ondas gravitacionais, para se chegar a este resultado, pois o mesmo é uma propriedade inerente às equações. A importância de se saber o número de funções iniciais para a dinâmica gravitacional será importante em capítulos posteriores, pois o conhecimento de tal número está relacionado com o problema de singularidades, por exemplo, em modelos cosmológicos [38, 49].

Obter soluções gerais das equações de Einstein torna-se uma tarefa impraticável devido à não linearidade intrínseca destas. Assim, frequentemente são assumidas simetrias satisfeitas pela métrica. Por exemplo, no caso de simetria esférica, podemos citar a solução de Schwarzschild e variantes desta; no caso de isotropia e homogeneidade, podemos citar os modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître [38]. Para uma compilação de algumas soluções exatas das equações de Einstein, vide [35].

---

### Isometrias em variedades diferenciáveis

---

*“Tudo certo como dois e dois são cinco.”*

Caetano Veloso, Roberto Carlos, “Como dois e dois”, 1971

## 2.1 Isometrias

Neste capítulo, expomos o conceito de isometrias em variedades diferenciáveis, em particular, homogeneidades e anisotropias. Para variedades diferenciáveis, considera-se, como dado na Sec. (1.1.5), um vetor, aqui representado por  $\xi$ , tangente em um ponto à curva cujas equações são determinadas por (1.29). Pode-se considerar então uma transformação infinitesimal, como dada na Eq. (1.30). Como visto, a derivada de Lie caracteriza como um tensor arbitrário é alterado por tal transformação (1.38). Para os propósitos desta tese, o tensor de interesse é o tensor métrico. Portanto, uma simetria do tensor métrico é definida por

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{g} = 0. \tag{2.1}$$

Tal simetria é chamada *isometria* da métrica. Para isometrias, o vetor  $\xi$  é chamado de *vetor de Killing*. Uma vez que o tensor métrico é um tensor do tipo  $(0, 2)$  e usando a expressão da derivada de Lie de um tensor arbitrário, Eq. (1.38), tem-se então em uma base holonômica que a Eq. (2.1) em componentes é dada por

$$\xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} \partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\mu} \partial_\beta \xi^\mu = 0. \quad (2.2)$$

Por exemplo, se uma métrica é dita estática, significa que em algum sistema de coordenadas há um vetor de Killing do tipo-tempo dado por  $\xi = \partial_t$ , cujo resultado em (2.2) é

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

logo, a métrica não depende da coordenada do tipo-tempo.

Ainda em uma base holonômica, no caso de uma variedade sem torção e com metricidade, pode-se facilmente mostrar que (2.2) é equivalente à

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (2.4)$$

chamadas *equações de Killing*. Vetores de Killing também definem simetrias satisfeitas pelo tensor momento-energia  $T^{\mu\nu}$ , pois é fácil mostrar que dada a lei de conservação local  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  e as equações de Killing (2.4), então a quantidade  $\xi_\mu T^{\mu\nu}$  também é localmente conservada.

Pode-se mostrar [39] que ao tomar sucessivas derivadas covariantes das relações (2.4), os resultados sempre serão expressos em termos de curvaturas (tensores de Riemann e Ricci),  $\xi_\mu$  e  $\nabla_\mu \xi_\nu$ . Logo, na vizinhança de um ponto  $p$ , uma expansão de Taylor de  $\xi^\mu$  dependerá apenas dessas quantidades calculadas em  $p$ . Das relações (2.4), ainda é possível notar que no caso de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  serem dois vetores de Killing, então a combinação  $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2$ , com  $a_1$  e  $a_2$  constantes, também é um vetor de Killing, além de  $[\xi_1, \xi_2]$  também ser um vetor de Killing, com o comutador exatamente igual ao definido em (1.8). Logo, os vetores de Killing formam uma estrutura linear (espaço vetorial).

Em uma variedade de dimensão  $n$ , para se estabelecer uma isometria são necessários especificar as  $n$  componentes do vetor de Killing  $\xi^\mu$  e suas primeiras  $n^2$  derivadas covariantes  $\nabla_\mu \xi_\nu$ , as quais satisfazem às relações (2.4), sendo então reduzidas a  $\frac{n(n-1)}{2}$  derivadas

independentes. Logo, o número máximo de vetores de Killing independentes que uma variedade de dimensão  $n$  pode ter é de  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Variedades cujo o número de vetores de Killing é máximo, são chamadas variedades *simétricas máximas*. Como exemplo de tais variedades, podemos citar o espaço de Minkowski quadridimensional, cujos os vetores de Killing constituem um total de dez vetores: quatro de translações espaço-temporais, três de “*boost*” e três de rotações espaciais [39].

Entretanto, uma variedade não necessariamente contém o número máximo de vetores de Killing. Denotaremos os vetores de Killing por  $\xi_A$ , com  $A = 1, \dots, r$ , onde  $r$  é o número de vetores de Killing. Pode-se mostrar que isometrias formam um grupo de Lie, o qual será denotado por  $G$ , com os vetores de Killing atuando como os geradores da álgebra de Lie do grupo [43], satisfazendo a

$$[\xi_A, \xi_B] = C^D{}_{AB} \xi_D. \quad (2.5)$$

onde  $C^D{}_{AB}$  são constantes chamadas *constantes de estrutura*. Define-se a *órbita* de um ponto  $p$  como o conjunto de pontos que podem ser conectados ao ponto  $p$  pela ação do grupo  $G$  em  $\mathcal{M}$ , a qual, na presente discussão, é representada pela transformação ao longo da congruência de  $\xi$ . Uma órbita é um subconjunto da variedade  $\mathcal{M}$ , caracterizando uma região de  $\mathcal{M}$  dita *homogênea* à  $p$ . Um grupo cujas as órbitas sejam conjuntos iguais à própria variedade  $\mathcal{M}$  é dito *transitivo*, caso o contrário, *intransitivo*. Se cada um dos pontos da órbita de  $p$  são obtidos por uma única ação do grupo, então o grupo é dito *simplesmente transitivo* na órbita de  $p$ ; se pelo menos duas ações do grupo em  $p$  levam a um mesmo ponto, então o grupo é dito *multiplicamente transitivo* na órbita de  $p$ . Um grupo pode ser simplesmente transitivo em algumas órbitas e multiplicamente transitivo em outras. Uma variedade é dita *isotrópica* em um ponto  $p$  se o resultado da ação do grupo em  $p$  leva ao próprio  $p$ . Em [39] é provado que uma variedade que seja isotrópica em todos os seus pontos é necessariamente homogênea em todos estes (o grupo de isometrias é simplesmente transitivo) e uma variedade simétrica máxima, enquanto que uma variedade homogênea em um conjunto de órbitas não é necessariamente isotrópica.

Passa-se agora à definição de bases gerais invariantes . Para isso, sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vetores arbitrários. Tem-se que  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é um escalar. Da definição de isometria em (2.1)

e da propriedade da derivada de Lie para um escalar, Eq. (1.34),

$$\begin{aligned}\xi_A [\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &= \mathcal{L}_{\xi_A}[\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \mathcal{L}_{\xi_A}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathcal{L}_{\xi_A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathcal{L}_{\xi_A}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{g}([\xi_A, \mathbf{u}], \mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, [\xi_A, \mathbf{v}]).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Quando os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois dos vetores de uma base geral, com  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_a$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_b$  e se os vetores da base geral são invariantes, tais que  $\mathcal{L}_{\xi_A}\mathbf{e}_a = [\xi_A, \mathbf{e}_a] = 0$ , com  $A = 1, \dots, r$  e  $a = 1, \dots, n$ , então nesta base

$$\xi \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \xi g_{ab} = 0. \quad (2.7)$$

Portanto, em uma base geral invariante as derivadas das componentes da métrica na direção de  $\xi_A$  são zero.

Quando o grupo  $G$  é transitivo em toda uma variedade quadridimensional, e portanto, tem-se no mínimo  $r = 4$ , tal variedade é chamada homogênea no espaço e no tempo e as componentes da métrica quando expressas na base geral são independentes de todas as quatro coordenadas de  $\mathcal{M}$ . Quando  $r$  é no mínimo  $r = 3$  e o grupo é transitivo em todas as órbitas, estas serão hipersuperfícies tridimensionais da variedade  $\mathcal{M}$ , e neste caso as componentes da métrica dependem de apenas uma das coordenadas de  $\mathcal{M}$ . Dependendo do tipo dos vetores tangentes à hipersuperfície, pode-se ter hipersuperfícies dos tipos tempo, espaço e luz. Um caso de interesse ocorre quando a hipersuperfície é do tipo espaço; neste caso a variedade  $\mathcal{M}$  é dita *espacialmente homogênea*. Outro caso de interesse ocorre quando  $r = 2$ , sendo as componentes da métrica dependentes de apenas duas coordenadas. Os casos citados de variedades transitivas em suas órbitas são frequentemente denotados por  $G_r$ , com  $r = 4, 3, 2, 1$  [52].

## 2.2 Variedades homogêneas quadridimensionais

Dada uma isometria representada por um grupo transitivo  $G_r$ , pode-se estabelecer a relação entre os coeficientes  $D^a_{bc}$  de uma base geral, como definidos em (1.10), e as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo  $G_r$ . Para uma variedade quadridimensional com o grupo de isometrias  $G_4$ , e portanto homogênea no espaço e tempo, os vetores de



Killing podem ser denotadas por  $\xi_a$ . Assim, uma base invariante é construída por meio das relações

$$[\xi_a, \mathbf{e}_b] = 0. \quad (2.8)$$

Dados os valores assumidos por  $\mathbf{e}_a$  em um ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$ , as Eqs. (2.8) formam um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Para determinar a relação entre  $D^a{}_{bc}$  e as constantes de estrutura  $C^a{}_{bc}$  da álgebra de Lie do grupo  $G_4$ , uma escolha conveniente para o valores iniciais dos vetores  $\mathbf{e}_a$  da base geral no ponto  $p$  é

$$\mathbf{e}_a(p) = \xi_a(p). \quad (2.9)$$

Uma vez que há quatro vetores de Killing linearmente independentes, pode-se expressar os vetores da base geral em uma base composta pelos vetores de Killing como

$$\mathbf{e}_a = A_a{}^b \xi_b, \quad (2.10)$$

onde  $A_a{}^b$  é a matriz da transformação entre as bases. Devido às condições (2.9), tal matriz satisfaz no ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  à condição

$$A_a{}^b(p) = \delta_b^a. \quad (2.11)$$

Substituindo a relação (2.10) na condição de invariância da base, dada pela Eq. (2.9), e usando (2.10), no ponto  $p$  tem-se

$$(\xi_a A_b{}^c)(p) = -C^c{}_{ab}. \quad (2.12)$$

É possível estabelecer agora a relação entre coeficientes da base geral  $D^a{}_{bc}$  e as constantes de estrutura  $C^a{}_{bc}$ . Para isso, os vetores da base geral expressos na base formada pelos vetores de Killing geradores da álgebra de Lie de  $G_4$  são substituídos no comutador da base geral, o qual reproduziremos por conveniência, dados em (2.10). Logo,

$$D^c{}_{ab} \mathbf{e}_c = [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = [A_a{}^d \xi_d, A_b{}^f \xi_f]. \quad (2.13)$$

Substituindo as relações (2.11) e (2.12), então no ponto  $p$ , teremos

$$D^a{}_{bc}(p) = -C^a{}_{bc}. \quad (2.14)$$

Uma vez que os coeficientes  $D^a{}_{bc}$  são constantes na variedade quadridimensionalmente homogênea, então é estabelecida a relação destes com as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo  $G_4$  em (2.14) para todo ponto da variedade. Uma vez conhecida tal relação, as curvaturas (tensores de Riemann, Ricci e escalar de Ricci) podem ser imediatamente calculadas por meio das equações de estrutura de Cartan, como obtidas no Cap. (1) em (1.51) e (1.57). Deve-se frisar que para a variedade quadridimensionalmente homogênea, os vetores da base geral, como escolhidos nesta seção, acarretam às componentes do tensor métrico tornarem-se constantes. Entretanto, da relação entre os vetores da base geral e a holônomica, a saber,  $\mathbf{e}_a = e^\mu{}_a(x) \partial_\mu$ , a “matriz” de transformação  $e^\mu{}_a$  não é necessariamente trivial (igual à identidade). O caso de  $G_r$ , com  $r = 4$ , pode ser imediatamente generalizado para uma variedade de dimensão  $n$  como  $r = n$ .

## 2.3 Variedades espacialmente homogêneas

Passa-se agora a discutir o caso de uma variedade quadridimensional isométrica por um grupo de Lie simplesmente transitivo  $G_3$ , cujas as órbitas são hipersuperfícies tridimensionais homogêneas, denotadas por  $H_3$ . Embora o tipo das hipersuperfícies seja arbitrário, podendo ser dos tipos tempo, espaço e luz, aborda-se o caso do tipo espaço, com o vetor normal do tipo-tempo. Desse modo, as componentes do tensor métrico dependem somente de uma coordenada do tipo-tempo, a qual será denotada por  $x^0 = t$ , e assim, a cada valor desta coordenada corresponde uma destas hipersuperfícies tridimensionais homogêneas, denotadas agora por  $H_3(t)$ . Conseqüentemente, a variedade  $\mathcal{M}$  será foliada nesta família de hipersuperfícies  $H_3(t)$  e a topologia de  $\mathcal{M}$  dada por  $\mathbb{R} \times H_3(t)$ . As constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo  $G_3$  serão denotadas por  $C^c{}_{ab}$ , porém define-se que  $a, b, c = 1, 2, 3$ .

Define-se uma base geral do espaço tangente da variedade quadridimensional  $\mathcal{M}$ , invariante pela isometria  $G_3$ , como constituída pelos vetores  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a$ , com  $\mathbf{e}_0$  do tipo tempo e com componentes independentes das coordenadas espaciais e normal às hipersuperfícies  $H_3(t)$ , enquanto que os demais três vetores são do tipo espaço, tangentes à  $H_3(t)$  e depen-

dem apenas das coordenadas espaciais em  $H_3(t)$ . Por definição,

$$[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a] = 0. \quad (2.15)$$

Procedendo de forma inteiramente igual à construção da base invariante por  $G_4$  na Sec. (2.2), mas com a diferença que no presente caso há três vetores para a base invariante, obtém-se

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = -C^c{}_{ab} \mathbf{e}_c, \quad (2.16)$$

com  $a, b, c = 1, 2, 3$ . Juntamente à base invariante, também há um base invariante para o espaço cotangente, denotada por  $\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\theta}^a$ , com  $\boldsymbol{\theta}^0$  independente das coordenadas espaciais e as demais 1-formas  $\boldsymbol{\theta}^a$  dependentes apenas das coordenadas espaciais. Como consequência das relações (2.16) e a primeira equação de estrutura de Cartan dada pela Eq. (1.51), as 1-formas constituintes da base satisfazem a

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta}^0 &= 0, \\ d\boldsymbol{\theta}^a &= C^a{}_{bc} \boldsymbol{\theta}^b \wedge \boldsymbol{\theta}^c, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $d$  é a derivada exterior e  $a, b, c = 1, 2, 3$ . Portanto, o tensor métrico pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{00}(t) \boldsymbol{\theta}^0(t) \otimes \boldsymbol{\theta}^0(t) + 2g_{0a} \boldsymbol{\theta}^0(t) \otimes \boldsymbol{\theta}^a(x^1, x^2, x^3) + \\ &g_{ab}(t) \boldsymbol{\theta}^a(x^1, x^2, x^3) \otimes \boldsymbol{\theta}^b(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pode-se escolher o referencial sincrônio [38], caracterizado pelas componentes mistas espaço-temporais nulas, ou seja,  $g_{0a} = 0$ . Uma vez que  $d\boldsymbol{\theta}^0 = 0$ , sem perda de generalidade é escolhido  $\boldsymbol{\theta}^0 = dt$  e  $g_{00}(t) = 1$ .

Devido à relação (2.16) entre os coeficientes do comutador dos vetores da base geral e as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo de isometria  $G_3$ , o cálculo das curvaturas (aqui coletivamente entendidas como as componentes dos tensores de Riemann e Ricci, e o escalar de Ricci) por meio da segunda equação de estrutura de Cartan, não dependem das coordenadas espaciais, mas somente do tempo e apenas quando envolvam explicitamente as componentes espaciais  $g_{ab}(t)$  do tensor métrico. Consequentemente, a dinâmica do campo gravitacional espacialmente homogêneo e anisotópico, proveniente das

equações de campo de Einstein, é dada por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem no tempo envolvendo as componentes puramente espaciais do tensor métrico. Sem perda de generalidade, assumimos que  $g_{ab}(t) = \eta_{ab}(t)$ , o que equivale à uma base geral ortonormal e onde  $\eta_{ab}(t)$  tem a mesma forma de métrica de Minkowski, porém os elementos diagonais não são constantes, mas funções desconhecidas do tempo.

A dependência das coordenadas espaciais das 1-formas  $\theta^a$ , ou equivalentemente da métrica, é reduzida à classificação das álgebras de Lie tridimensionais e reais, expressas pelos comutadores

$$[\xi_a, \xi_b] = C^c{}_{ab} \xi_c. \quad (2.19)$$

Isto significa que conhecendo as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo, pode-se buscar uma representação dos vetores de Killing na forma  $\xi_a = \xi^\mu{}_a(x^1, x^2, x^3) \partial_\mu$ , tal que satisfaça à Eq. (2.19).

Para a classificação da álgebra de Lie (2.19), parte-se da propriedade satisfeita pelo comutador,

$$[[\xi_a, \xi_b], \xi_c] + [[\xi_b, \xi_c], \xi_a] + [[\xi_c, \xi_a], \xi_b] = 0, \quad (2.20)$$

da qual segue a identidade

$$C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} + C^e{}_{bc} C^d{}_{ea} + C^e{}_{ca} C^d{}_{eb} = 0. \quad (2.21)$$

Define-se a quantidade

$$C^c{}_{ab} = E_{abd} C^{dc}, \quad (2.22)$$

onde  $E_{abc} = E^{abc}$  é o símbolo totalmente antissimétrico, com  $E_{123} = 1$ . Com estas definições, a álgebra de Lie (2.19) e a identidade (2.21) tornam-se

$$E^{abc} \xi_b \xi_c = C^{ad} \xi_d, \quad (2.23)$$

$$E_{bcd} C^{cd} C^{ba} = 0. \quad (2.24)$$

A escolha dos vetores de Killing não é única, pois sujeitos a uma transformação linear

$$\xi'_a = A_a{}^b \xi_b, \quad (2.25)$$

onde  $A_a{}^b$  é uma matriz com coeficientes constantes,  $\eta_{ab}$  e  $C^{ab}$  transformam-se como tensores e a álgebra de Lie (2.19) ou (2.23) continuam satisfeitas. Portanto, a classificação da álgebra de Lie de nosso interesse é reduzida a determinação de todas as possíveis álgebras independentes. Para isso, a quantidade  $C^{ab}$  é decomposta em uma parte simétrica, representada por  $n^{ab} = n^{ba}$ , e uma parte antisimétrica,  $E^{abc} a_c$ , de tal modo que

$$C^{ab} = n^{ab} + E^{abc} a_c. \quad (2.26)$$

Substituindo a última expressão em (2.23), então

$$n^{ab} a_b = 0. \quad (2.27)$$

Por meio de uma transformação linear do tipo (2.25),  $n^{ab}$  pode assumir a forma diagonal, cujos elementos são os autovalores de  $n^{ab}$ , denotados por  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , e  $a_b = (a, 0, 0)$  [53]. Consequentemente, a relação (2.27) conduz a  $n_1 a = 0$ , e então  $n_1 = 0$  ou  $a = 0$ . Portanto, a álgebra de Lie (2.19) tem a forma

$$[\xi_1, \xi_2] = -a \xi_2 + n_3 \xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = n_1 \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = n_2 \xi_2 + a \xi_3. \quad (2.28)$$

As únicas transformações possíveis para a álgebra (2.28) são a mudança de sinal dos vetores  $\xi_a$  e multiplicação destes por uma constante arbitrária. Estas duas transformações permitem mudar o sinal de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e também tornar  $a$  positivo, assumindo que este seja diferente de zero. Portanto, as possíveis álgebras de Lie reais, e consequentemente os possíveis espaços homogêneos tridimensionais, são classificadas. À esta classificação dá-se o nome de *classificação de Bianchi* [54], tradicionalmente enumerada com algarismos romanos correspondentes as possibilidades assumidas pelos parâmetros  $a$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ .

Classificação de Bianchi				
Tipo	$a$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
III	1	0	1	-1
IV	1	0	0	1
V	1	0	0	0
VI	$a$	0	1	-1
VII	$a$	0	1	1
VIII	0	1	1	-1
IX	0	1	1	1

Como ilustração, Bianchi I é caracterizado pelo caso trivial de  $C^a_{bc} = 0$  para todos os valores de  $a, b, c = 1, 2, 3$ , enquanto Bianchi IX é caracterizado por ser a álgebra de  $SO(3, \mathbb{R})$ , ou seja,  $[\xi_a, \xi_b] = E_{abc} \xi_c$ . De forma explícita tem-se que o intervalo para Bianchi I em uma base holônomica em coordenadas cartesianas é

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad (2.29)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ . Para Bianchi IX, as 1-formas  $\theta^a$  são dadas por [55]

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\phi, \\ \theta^2 &= \cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\phi, \\ \theta^3 &= -(d\psi + \cos \theta d\phi), \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $\psi, \theta, \phi$  são os ângulos de Euler com  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , os quais atuam como coordenadas da base holônomica. Para a forma explícita das 1-formas e vetores da base geral dos demais tipos de Bianchi, vide [51].

## CAPÍTULO 3

---

### Bianchi I em relatividade geral

---

*“Non, je n'ai rien oublié.”*

Charles Aznavour, abril de 1971

### 3.1 Cosmologia do tipo Bianchi I

Tendo em vista que há nove espaços tridimensionais homogêneos e anisotrópicos, passa-se agora à discussão do modelo de Bianchi I em relatividade geral. Por simplicidade, será adotada a base holônomica. A métrica do tipo Bianchi I é expressa pelo intervalo dado em (2.29) e pode ser assumida diagonal <sup>1</sup>. Portanto, a métrica para o modelo de Bianchi I em coordenadas cartesianas é

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t) dx^2 - a_2^2(t) dy^2 - a_3^2(t) dz^2, \quad (3.1)$$

onde  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$  são funções desconhecidas. A substituição direta da métrica (3.1) nas equações de Einstein forma um sistema de três equações diferenciais ordinárias

---

<sup>1</sup>No caso de uma métrica não diagonal, as componentes não diagonais serão nulas devido às equações de campo de Einstein para o vácuo e distribuições isotrópicas de matéria e energia [38, 56, 57].

de segunda ordem e uma equação envolvendo apenas as primeiras derivadas temporais das funções  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$ . Entretanto, Misner em 1968, [11], introduziu uma parametrização conveniente para o caso dos espaços tridimensionalmente homogêneos e anisotrópicos, dada por

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a(t) e^{\beta_+(t)+\sqrt{3}\beta_-(t)}, \\ a_2(t) &= a(t) e^{\beta_+(t)-\sqrt{3}\beta_-(t)}, \\ a_3(t) &= a(t) e^{-2\beta_+(t)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da parametrização de Misner, tem-se que a raiz quadrada do determinante da métrica (3.1) é dada por  $\sqrt{-g} = a^3(t)$ , logo, as funções desconhecidas  $\beta_{\pm}(t)$  não contribuem para a expansão ou contração volumétrica. As funções  $\beta_{\pm}(t)$  serão a partir de agora sempre denotadas como anisotropias. Estas podem ser explicitamente relacionadas com  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$  por

$$\beta_+ = \frac{1}{6} \ln \left( \frac{a_1 a_2}{a_3^2} \right) \quad \beta_- = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left( \frac{a_1}{a_2} \right). \quad (3.3)$$

Nas referências [2, 8], dentro do formalismo covariante  $1+3$  de uma congruência gerada por um vetor do tipo-tempo  $u^\mu$ , o tensor  $\nabla_\mu u_\mu$  pode ser expresso em partes irreduzíveis chamadas *cisalhamento*, *vorticidade* e *expansão*. Em particular, em uma cosmologia do tipo Bianchi I as derivadas temporais das funções  $\beta_{\pm}$  são as componentes independentes de um tensor de traço nulo, o qual representa o *cisalhamento* <sup>2</sup>.

Para o tensor momento-energia, consideraremos que este seja o de um fluido perfeito, isotrópico e homogêneo, dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t)) u_\mu u_\nu + p(t) g_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde  $\rho(t)$ ,  $p(t)$  e  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  são, respectivamente, a densidade de energia, pressão e quadrivelocidade do fluido perfeito. Utilizando a parametrização (3.2), a equação de conservação  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  implica em

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.5)$$

---

<sup>2</sup>Além disso, para uma cosmologia Bianchi I,  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , cujas as curvas são geodésicas, e todas as componentes do tensor vorticidade são nulas, implicando que  $u^\mu$  é o vetor normal de superfícies tridimensionais do tipo espaço.



onde ponto denota derivada com relação ao tempo físico. Cabe notar que as anisotropias da métrica não afetam a Eq. (3.5), pois a pressão é isotrópica, o que à primeira vista, pode parecer incompatível que o fluido seja isotrópico, uma vez que Bianchi I é um modelo anisotrópico. No entanto, um fluido isotrópico não é necessariamente incompatível com uma métrica anisotrópica. A razão para esta contingência é que a descrição em termos de um fluido pode ser vista como uma abordagem efetiva na teoria cinética [58], pois nesta a dinâmica de uma sistema de muitas partículas é analisada por abordagens estatísticas. Desse modo, a velocidade, pressão, densidade de energia e outras quantidades inerentes do fluido configuram-se como médias estatísticas tomadas com uma função chamada função distribuição, a qual, sob algumas condições, satisfaz a equação de Boltzmann. Portanto, são as propriedades da função distribuição que implicam em homogeneidades (inogeneidades) e isotrópias (anisotrópias) das quantidades médias. Para um panorama de teoria cinética em gravitação, vide [47, 48, 59]. Podemos agora considerar as equações de Einstein, (1.82), para métrica Bianchi I com a parametrização (3.2).

Seguindo [8], pode-se mostrar que as componentes do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  assumem a forma

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3H^2 - 3(\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2), \\
G_{11} &= -3H^2 - 2\dot{H} - 3(\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) + \\
&\quad + \left(\frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt}\right)(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-), \\
G_{22} &= -3H^2 - 2\dot{H} - 3(\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) + \\
&\quad + \left(\frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt}\right)(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-), \\
G_{33} &= -3H^2 - 2\dot{H} - 3(\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) - \\
&\quad - 2\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt}\right)\beta_+.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Para o tensor isotrópico  $T_{\mu\nu}$ , as equações de Einstein, dadas por  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ , podem ser reescritas de tal modo que a pressão não entre explicitamente nas equações. Seguindo [8], define-se as novas quantidades

$$\begin{aligned}
G_+ &= \frac{1}{6}(G_{11} + G_{22} - 2G_{33}), \\
G_- &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(G_{11} - G_{22}),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

as quais implicam em uma significativa simplificação quando comparadas a (3.6). Calculando  $G_{\pm}$ , tem-se

$$G_{\pm} = \ddot{\beta}_{\pm} + 3H\dot{\beta}_{\pm}. \quad (3.8)$$

Substituindo na definição de  $G_{\pm}$  <sup>3</sup> o lado direito das equações de Einstein envolvendo o tensor momento-energia, obtém-se

$$\begin{aligned} G_+ &= \frac{8\pi G}{6} (T_{11} + T_{22} - 2T_{33}), \\ G_- &= \frac{8\pi G}{2\sqrt{3}} (T_{11} - T_{22}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Uma vez que o tensor momento-energia é assumido isotrópico, portanto  $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ , então

$$G_{\pm} = 0. \quad (3.10)$$

Finalmente, a componente 00 das equações de Einstein, as Eqs. (3.10) e (3.8) definem o sistema de equações

$$H^2 - (\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (3.11)$$

$$3H\dot{\beta}_{\pm} + \ddot{\beta}_{\pm} = 0. \quad (3.12)$$

Uma primeira integral de (3.12) é

$$\dot{\beta}_{\pm} = \gamma_{\pm} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (3.13)$$

onde  $\gamma_{\pm}$  são constantes de integração e  $a_0$  o valor inicial do fator de escala. Este último resultado implica que a Eq. (3.11) é transformada em uma equação para  $a(t)$  responsável pela expansão. Definindo as constantes  $\Gamma$  e  $\phi$ ,

$$\gamma_+ = \Gamma \cos \phi, \quad \gamma_- = \Gamma \sin \phi, \quad (3.14)$$

obtemos

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^6 + \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (3.15)$$

---

<sup>3</sup>Eqs. (3.8) também podem ser obtidas da variação da ação de Einstein-Hilbert, Eq. (1.83), com relação à  $\beta_{\pm}$  [60].

A dinâmica do fator de escala  $a(t)$  pode ser obtida da última equação dada a dependência da densidade de energia,  $\rho$ , do fator de escala. Para isso, consideramos que o fluido perfeito satisfaz a uma equação de estado que relaciona densidade de energia e pressão e dada por

$$p = \omega \rho, \quad (3.16)$$

onde  $\omega$  é uma constante adimensional. Substituindo a Eq. (3.16) em (3.5), temos

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}, \quad (3.17)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de energia inicial. Desse modo, para fluidos perfeitos com a equação de estado (3.16), a Eq. (3.15) torna-se

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^6 + \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+\omega)}. \quad (3.18)$$

Comparado ao modelo cosmológico isotrópico, temos uma nova contribuição dada pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (3.18). Este termo é proporcional à  $a^{-6}$ , portanto, potencialmente irrelevante no futuro para um universo em expansão e potencialmente relevante para o universo inicial. Este mesmo termo aparece em (3.15) e (3.18) de uma maneira funcionalmente similar à contribuição de um novo fluido em um universo plano e isotrópico com a equação de estado  $p = \rho$ . Tal similaridade pode ser obtida partindo da relação (3.17) e comparando-a com o primeiro termo do lado direito de (3.15). Logo, para este fluido em particular, obtém-se  $\omega = 1$ . Um fluido com estas características é chamado de *matéria rígida* (“*stiff matter*”), introduzido primeiramente por Zel’dovich [61].

A solução das Eqs. (3.13) pode ser expressa como

$$\beta_{\pm}(t) - \beta_{\pm}^0 = \gamma_{\pm} W(t), \quad W(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a^3(t')}. \quad (3.19)$$

Nesta expressão,  $t_0$  corresponde ao valor inicial do tempo e  $\beta_{\pm}^0$  são constantes de integração. Pode-se notar que ambos  $\beta_{\pm}$ , com exceção das constantes de integração, conduzem à mesma forma funcional. Uma vez que  $W(t)$  é obtido, os parâmetros  $\gamma_{\pm}$  determinam  $\beta_{\pm}$  e, conseqüentemente, as componentes do tensor métrico, dadas pelas Eqs. (3.2).

## 3.2 Soluções de vácuo

Pela Eq. (3.15), uma vez conhecido o valor de  $\omega$  na equação de estado, (3.16), a dinâmica do fator de escala é deterministicamente dada. Por simplicidade, iremos tratar dos casos de vácuo e fluidos perfeitos com  $\omega = 0$ ,  $\omega = -1$  e  $\omega = \frac{1}{3}$ , chamados, respectivamente, poeira, constante cosmológica e radiação.

Primeiro, consideremos o caso de vácuo. Neste, entende-se a ausência de qualquer conteúdo de matéria-energia. Assim, a Eq. (3.15) torna-se

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^6. \quad (3.20)$$

De imediato é possível notar que para um momento inicial  $t_0$ , para o qual  $a(t_0) = a_0$ , a constante  $\Gamma$  pode ser identificada como o valor inicial do parâmetro de Hubble, denotado por  $H_0$ . Da integração de (3.20) resulta no fator de escala dado por

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)^3 = 3\Gamma(t - t_0). \quad (3.21)$$

Assumindo  $a_0 = 1$ , as Eqs. (3.19) podem ser integradas, cujos os resultados são

$$\beta_{\pm}(t) = \beta_{\pm}^{(0)} + \frac{\gamma_{\pm}}{3\Gamma} \ln \left( \frac{t}{t_0} \right), \quad (3.22)$$

onde  $\beta_{\pm}^{(0)}$  e  $t_0$  são constantes de integração. Das relações angulares (3.14), as funções  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  e  $a_3(t)$  são expressas por

$$a_k(t) = (3\Gamma)^{1/3} t^{p_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Os parâmetros  $p_k$  são dados por

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{3} (1 + \cos \phi + \sqrt{3} \sin \phi), \\ p_2 &= \frac{1}{3} (1 + \cos \phi - \sqrt{3} \sin \phi) \\ p_3 &= \frac{1}{3} (1 - 2 \cos \phi), \end{aligned} \quad (3.24)$$

de tal forma que

$$ds^2 = dt^2 - (3\Gamma)^{2/3} [t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2]. \quad (3.25)$$

A constante multiplicativa  $\Gamma$ , com dimensão de inverso de tempo, pode ser absorvida pela redefinição do tempo. Por fim, tem-se a solução do tipo Bianchi I para o vácuo na forma padrão [38],

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (3.26)$$

onde os parâmetros  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  satisfazem pela suas definições às restrições algébricas

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (3.27)$$

Finalmente, por meio da parametrização de Misner, Eq. (3.2), o fator de escala é dado por

$$a(t) = [a_1(t) a_2(t) a_3(t)]^{1/3} = t^{\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3)} = t^{1/3}. \quad (3.28)$$

A solução de Bianchi I para vácuo é chamada *solução de Kasner*, obtida primeiramente por Kasner em 1921 [62]. Originalmente, a motivação para esta solução consistia na busca de possíveis soluções das equações de Einstein no vácuo para uma métrica do tipo Bianchi I e dependente de apenas uma coordenada. A princípio, não há restrição alguma quanto ao tipo da coordenada, podendo esta ser do tipo-tempo ou tipo-espaço. Para fins de cosmologia, deve-se de antemão escolher a coordenada como do tipo-tempo. Para outras possíveis soluções de Kasner com coordenadas do tipo-espaço, vide [38].

Cabe ainda ressaltar algumas propriedades da solução de Kasner. Primeiro, no caso de uma métrica isotrópica e plana, as equações de Einstein no vácuo invariavelmente conduzem a um universo estático e com uma métrica de Minkowski. Desse modo, a solução de Kasner mostra que uma cosmologia homogênea e anisotrópica para o vácuo acarreta em soluções não triviais (diferentes de Minkowski). Segundo, as anisotropias tem uma dependência logarítmica do tempo, Eq. (3.22), logo, para grandes valores do tempo, elas não tendem assintoticamente a zero. Ainda há singularidade na solução de Kasner, pois  $a(t) \sim t^{\frac{1}{3}}$ . No entanto, diferente do caso isotrópico, a singularidade inicial da solução de Kasner é caracterizada por um comportamento diferente, o qual pode ser inferido das relações (3.27) [38]. Os coeficientes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  não podem todos assumirem o mesmo valor, salvo os dois únicos casos em que dois deles são idênticos <sup>4</sup>,  $0, 0, 1$  e  $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ . Em

---

<sup>4</sup>Para  $p_1 = p_2 = 0$  e  $p_3 = 1$  a solução de Kasner é uma parametrização alternativa do espaço de Minkowski (transformação de coordenadas).

todos os outros casos, um dos coeficientes deve ser negativo e os dois demais positivos. Daí segue que quando  $t \rightarrow 0$ , o eixo correspondente ao coeficiente negativo, digamos,  $p_3$  e  $z$ , expande, enquanto os outros dois contraem. A este comportamento, coloquialmente é dado o nome de “*charuto*” ou, também, “*cigarro*”. Para  $t \rightarrow \infty$ , as distâncias ao longo dos eixos ( $x$  e  $y$ ) aumentam, enquanto no eixo  $z$  diminuem. A este comportamento da evolução da solução de Kasner, dá-se coloquialmente o nome de “*panqueca*”.

Quanto ao problema do valor inicial para as equações de Einstein, exposto na Sec. (1.2) e o qual requer duas condições iniciais no caso de vácuo, este é satisfeito pela solução de Kasner, pois o valor inicial para o fator de escala,  $a_0$ , é arbitrário, assim como os valores iniciais das anisotropias na Eq. (3.22), restando apenas as primeiras derivadas em relação ao tempo para o fator de escala (ou fator de Hubble) e as anisotropias. No entanto, estas três condições iniciais satisfazem à equação análoga à de Friedmann, Eq. (3.20), a qual resulta em uma restrição entre elas, portanto, totalizando duas condições iniciais apenas.

### 3.3 Soluções de constante cosmológica

Consireraremos agora o caso de um universo do tipo Bianchi I com constante cosmológica positiva, denotada por  $\Lambda$ . Neste caso, sabe-se bem que a constante cosmológica pode ser vista como um fluido perfeito, o qual satisfaz a equação de estado  $\rho = -p$ , com  $\rho = 3\Lambda/8\pi G$ , logo,  $\omega = -1$ . Substituindo este valor na Eq. (3.18),

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left( \frac{1}{a} \right)^6 + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.29)$$

assumido  $a_0 = 1$ . A integração de (3.29) leva a

$$a^3 = \Gamma \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left[ \sqrt{3\Lambda} (t - t_0) \right], \quad (3.30)$$

onde  $t_0$  pode ser identificada como a constante de integração a qual, por uma redefinição da variável temporal, pode desde então ser omitida. De posse do resultado (3.30), as equações para as anisotropias, Eqs. (3.19), também podem ser integradas, conduzindo assim a

$$\beta_{\pm} = \frac{\gamma_{\pm}}{3\Gamma} \ln \left[ \tanh(\sqrt{3\Gamma} t) \right], \quad (3.31)$$

onde as constantes de integração,  $\beta_{\pm}^0$ , podem também serem omitidas por uma redefinição das anisotropias. A função  $W(t)$ , como definida em (3.19), é identificado como sendo

$$W(t) = \ln \left[ \tanh(\sqrt{3\Gamma} t) \right]. \quad (3.32)$$

Portanto, munidos da forma explícita da dependência do fator de escala e das anisotropias com relação ao tempo, e usando as relações angulares, (3.14), o intervalo (tensor métrico) é

$$ds^2 = dt^2 - \left( \frac{3\Gamma^2}{\Lambda} \right)^{1/3} \left( \sinh \sqrt{3\Lambda} t \right)^{2/3} \left[ (\tanh \sqrt{3\Lambda} t)^{\cos \phi + \sqrt{3} \sin \phi} dx^2 + (\tanh \sqrt{3\Lambda} t)^{\cos \phi - \sqrt{3} \sin \phi} dy^2 + (\tanh \sqrt{3\Lambda} t)^{-\cos \phi} dz^2 \right]. \quad (3.33)$$

Para pequenos valores do tempo, expandindo as funções  $a(t)$  e  $W(t)$  em série de potências até primeira ordem  $\sqrt{3\Lambda} t$ ,

$$a(t) = \left[ \Gamma \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left( \sqrt{3\Lambda} t \right) \right]^{1/3} \approx (3\Gamma t)^{1/3},$$

$$\tanh(\sqrt{3\Lambda} t) \approx \sqrt{3\Lambda} t. \quad (3.34)$$

Portanto, para valores de tempo, tais que  $t \ll 1/\sqrt{3\Lambda}$ , a solução tende à de Kasner, Eqs. (3.21,3.22).

Para valores do tempo satisfazendo  $t \gg 1/\sqrt{3\Lambda}$ ,

$$a(t) = \left[ \Gamma \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left( \sqrt{3\Lambda} t \right) \right]^{1/3} \approx \left( \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \right)^{1/3} e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t},$$

$$\tanh(\sqrt{3\Lambda} t) \approx 1. \quad (3.35)$$

Destas últimas equações, torna-se claro que a solução assintoticamente tende à solução de DeSitter para uma cosmologia isotrópica e plana. Assim, verifica-se que para uma cosmologia do tipo Bianchi I com constante cosmológica positiva, há o fenômeno de isotropização, isto é, assintoticamente um universo inicialmente anisotrópico evolui para um universo isotrópico. Note que mesmo com constante cosmológica, para pequenos valores de tempo, a solução tende à de Kasner. Tal característica deve-se à contribuição das anisotropias para a dinâmica do fator de escala na Eq. (3.15) como sendo proporcional a  $a^{-6}$ . Enquanto que na Sec. (3.1), as potenciais consequências das anisotropias foram qualitativamente inferidas, temos agora, pelo menos no caso de constante cosmológica positiva, que elas realmente mostram-se verificadas.

Nos limites tomados nas Eqs. (3.34, 3.35), a quantidade  $(3\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$ , com dimensão de tempo, divide a evolução do universo em dois limites: anisotrópico e isotrópico. Para fins de ilustração, consideremos  $\Lambda \sim 10^{-122}$  em unidades de Planck, logo,  $(3\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$  é da ordem de  $10^9$  anos.

### 3.4 Soluções de poeira

Nesta seção é apresentada a cosmologia do tipo Bianchi I com matéria não relativística, coloquialmente chamada de *poeira*, e modelada como um fluido perfeito de pressão desprezível com  $\omega = 0$ . A solução de poeira em Bianchi I foi primeiramente obtida em [63].

A equação análoga à de Friedmann, (3.18), torna-se então

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left(\frac{1}{a}\right)^6 + \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{a}\right)^3, \quad (3.36)$$

onde assumimos  $a_0 = 1$  e  $\kappa = 8\pi\rho_0$ . Considerando que para  $t = 0$  corresponde  $a = 0$ , integrando (3.36) obtemos

$$a(t)^3 = \frac{12\Gamma^2}{\kappa} \frac{t}{t_I} \left(1 + \frac{t}{t_I}\right), \quad (3.37)$$

onde  $t_I = 4\Gamma/\kappa$  é uma constante com dimensão de tempo. As Eqs. (3.19) para as anisotropias, integradas tornam-se

$$\beta_{\pm}(t) = \frac{\gamma_{\pm}}{3\Gamma} \ln \left( \frac{t/t_I}{1 + t/t_I} \right). \quad (3.38)$$

Portanto, usando as relações (3.14), a métrica para Bianchi I com poeira pode ser expressa pelo intervalo

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{12\Gamma^2}{\kappa}\right)^{2/3} \left[ \left(\frac{t}{t_I}\right)^2 + \frac{t}{t_I} \right]^{2/3} \left[ \left(\frac{t/t_I}{1 + t/t_I}\right)^{\frac{1}{3}(\cos\phi + \sqrt{3}\sin\phi)} dx^2 + \left(\frac{t/t_I}{1 + t/t_I}\right)^{\frac{1}{3}(\cos\phi - \sqrt{3}\sin\phi)} dy^2 + \left(\frac{t/t_I}{1 + t/t_I}\right)^{-\frac{1}{3}\cos\phi} dz^2 \right]. \quad (3.39)$$

Para valores de tempo que satisfaçam a  $t \ll t_I$ , o fator de escala e as anisotropias tendem a

$$a(t) = \left[ \frac{12\Gamma^2}{\kappa} \frac{t}{t_I} \left(1 + \frac{t}{t_I}\right) \right]^{1/3} \approx (3\Gamma t)^{\frac{1}{3}},$$

$$\ln \left( \frac{t/t_I}{1 + t/t_I} \right) \approx \ln \left( \frac{t}{t_I} \right), \quad (3.40)$$



enquanto que para valores de tempos tais que  $t \gg t_I$ ,

$$\begin{aligned} a(t) &= \left[ \frac{12\Gamma^2}{\kappa} \frac{t}{t_I} \left( 1 + \frac{t}{t_I} \right) \right]^{1/3} \approx \frac{3\kappa}{4} t^{2/3}, \\ \ln \left( \frac{t/t_I}{1 + t/t_I} \right) &= \ln \left( \frac{1}{1 + \frac{t_I}{t}} \right) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

A quantidade  $t_I$  desempenha uma papel relevante na evolução de Bianchi I em poeira, pois, assim como na Sec. (3.3), para valores de tempos muito menores que  $t_I$ , a solução tende à de Kasner, enquanto que no caso contrário, a solução tende à de poeira da cosmologia isotrópica e plana. Desse modo, tal como no caso de um universo do tipo Bianchi I dominado por constante cosmológica, há o processo de isotropização.

### 3.5 Soluções de radiação

Resta o caso do fluido perfeito com  $\omega = 1/3$ , denominado radiação . Este último, apesar do nome que lhe é coloquialmente atribuído, pode também representar matéria ultra relativística. A solução de Bianchi I com radiação foi primeiramente obtida em [6,9]. Substituindo  $\omega = 1/3$  na Eq. (3.18), temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left( \frac{1}{a} \right)^6 + \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{a} \right)^4, \quad (3.42)$$

onde  $\kappa = 8\pi G \rho_0$ , com  $\rho_0$  configurando agora como a densidade inicial do fluido perfeito. Diferentemente dos demais casos das Secs. (3.2, 3.3, 3.4), a integração da Eq. (3.42) não fornece uma dependência explícita do fator de escala com relação ao tempo, mas somente uma relação paramétrica. Para a integração, consideremos a mudança de variável na Eq. (3.42),

$$a = \sqrt{\frac{3\Gamma^2}{\kappa}} \sinh \xi, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad (3.43)$$

implicando em

$$4 \left( \frac{\kappa}{3\Gamma^2} \right)^{3/2} \Gamma t = \sinh 2\xi - 2\xi. \quad (3.44)$$

De posse desta última relação e da mudança de variável, Eq. (3.43), as soluções das equações para as anisotropias, Eqs. (3.13), são expressas por

$$\beta_{\pm} = \frac{\gamma_{\pm}}{\Gamma} \ln (\tanh \xi). \quad (3.45)$$

De maneira análoga à constante cosmológica e poeira, podemos considerar o comportamento assintótico das soluções de radiação para pequenos e grandes valores de tempo. Diferentemente dos dois outros casos, ambos os dois limites devem ser tomados em  $\xi$ , o que não se constitui um problema, pois a relação (3.44) confere a equivalência dos limites em ambas as variáveis. Para  $\xi \ll 1$ , expandindo em potências de  $\xi$  a relação (3.44), tem-se que primeiro termo não nulo é de terceira ordem em  $\xi$  de tal modo que (3.44) é aproximada por

$$4\left(\frac{\kappa}{3\Gamma^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma t \approx \frac{4}{3}\xi^3, \quad (3.46)$$

implicando que para esta aproximação  $\xi$  pode ser expresso como função de  $t$ . Procedendo de forma equivalente para a Eq. (3.43), cujo primeiro termo não nulo em série de potências em  $\xi$  é linear, e substituindo (3.46) nesta, as aproximações para o fator de escala e anisotropias são

$$\begin{aligned} a(t) &\approx \sqrt{\frac{3\Gamma^2}{\kappa}}\xi = (3\Gamma t)^{\frac{1}{3}}, \\ \beta_{\pm} &\approx \frac{\gamma_{\pm}}{\Gamma} \ln \xi = \frac{\gamma_{\pm}}{3\Gamma} \ln \Gamma t. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Claramente, na aproximação de  $\xi \ll 1$ , as soluções tendem à de Kasner. De outro lado, quando  $\xi \gg 1$ ,

$$\begin{aligned} \sinh \xi &\approx \cosh \xi \approx \frac{1}{2}e^{\xi}, \\ \tanh \xi &\approx 1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Logo, as relações (3.43) e (3.44) são aproximadas por

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\Gamma^2}{\kappa}}e^{\xi}, \\ 4\left(\frac{\kappa}{3\Gamma^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma t &\approx \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\xi}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Consequentemente, o comportamento assintótico para o fator de escala e as anisotropias é

$$\begin{aligned} a(t) &\approx \left(\frac{4\kappa}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}, \\ \beta_{\pm} &= \frac{\gamma_{\pm}}{\Gamma} \ln(\tanh \xi) \approx \frac{\gamma_{\pm}}{\Gamma} \ln 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Portanto, no regime de  $\xi \gg 1$  efetivamente há isotropização e o fator de escala tem a mesma dependência do tempo que na cosmologia isotrópica e plana com radiação.

### 3.6 Considerações finais: a importância de Bianchi I em cosmologia

Neste capítulo apresentamos uma cosmologia do tipo Bianchi I. Foram considerados três casos de interesse: vácuo, poeira e radiação. No entanto, resta ainda frisar a importância de uma cosmologia tridimensionalmente homogênea, cujo o modelo mais simples é o de Bianchi I. Para ressaltar a importância desta cosmologia, convém apresentar o desenvolvimento desta área de pesquisa em cosmologia. Daí, o leitor poderá ter um panorama do desenvolvimento e a culminação dos resultados de interesse físico. Há duas grandes vertentes de pesquisa dos modelos de Bianchi I. O primeiro deles trata de possíveis implicações observacionais de uma cosmologia do tipo Bianchi I, enquanto que o segundo, da questão da singularidade inicial (Big Bang). Consideremos a primeira vertente.

A descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas (*CMB, Cosmic Microwave Background*) nos anos 1960, revelou que as observações indicavam uma distribuição de temperatura isotrópica. Isto sugere que na época da reionização o universo era isotrópico e que pequenos desvios anisotrópicos podem ser modelados como pequenas perturbações [1]. Entretanto, em épocas anteriores à reionização, o universo inicial ainda poderia ter sido anisotrópico. Logo, a possibilidade de modelos anisotrópicos estimulou a investigação de mecanismos físicos responsáveis pela isotropização. Como ilustrado neste capítulo, para épocas de relevância na evolução do universo, por exemplo, um universo dominado por radiação ou poeira, apresentam o processo de isotropização, e o tempo característico para tal depende da densidade inicial do conteúdo de matéria-energia,  $\rho_0$ , e de anisotropias,  $\Gamma$ . Em [6], referências a trabalhos sobre processos de isotropização são dadas e uma solução para um universo com fluido perfeito com a equação de estado (3.16) e campos magnéticos primordiais é deduzida. Além disso, [6] também sintetiza as possibilidades de uma cosmologia Bianchi I na formação de elementos primordiais, desvios na temperatura da radiação cósmica de fundo em microondas e o tempo para que as anisotropias tornem-se

pequenas. Deve-se notar que esta primeira vertente de pesquisas teve os trabalhos concentrados em um época anterior aos cenários de inflação cósmica. Para modelos cosmológicos anisotrópicos em inflação, vide [64] e as referências lá citadas.

A segunda vertente de pesquisas em modelos anisotrópicos concerne da investigação da singularidade inicial. Como já esboçado no Cap. (1), o problema do valor inicial em relatividade geral consiste, por exemplo, para o vácuo, na especificação de duas funções iniciais. Desse modo, modelos isotrópicos são uma extrapolação extremamente simples dentre modelos mais gerais, pois, por exemplo, no vácuo estes não requerem a especificação de duas funções iniciais, mas apenas uma. Além disso, já era de conhecimento que em modelos anisotrópicos ainda há a presença de uma singularidade inicial, como por exemplo na solução de Kasner. Em 1963 Lifshitz e Khalatnikov abordaram em detalhes a questão da singularidade inicial em modelos anisotrópicos que requerem pelo menos duas condições iniciais [49]. Ainda nos anos 1960, os teoremas de singularidade de Hawking-Penrose, vide [36] e as referências aos trabalhos originais lá citadas, mostraram que, satisfeitas algumas condições, singularidades são inevitáveis em relatividade geral. Entretanto, os teoremas de Hawking-Penrose não especificam como a singularidade inicial é alcançada. Daí surge a proposta *BKL* (*Belinsky-Khalatnikov-Lifshitz*), a qual propôs que próximo da singularidade em um modelo do tipo Bianchi IX <sup>5</sup> para o vácuo tem-se uma sucessão de regimes com a métrica aproximadamente igual à de Kasner, e em cada regime ocorre mudança nos valores dos parâmetros  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ . Desse modo, retrocedendo-se, temos um regime oscilatório, com expansão/contração permutando em diferentes eixos enquanto o volume decresce [56,57]. Este mesmo regime oscilatório também foi observado por Misner em [55].

---

<sup>5</sup>Bianchi IX, Bianchi V e Bianchi I no limite isotrópico reduzem-se, respectivamente, aos modelos isotrópicos fechado, aberto e plano, ou seja, com a métrica  $ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1-k r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  em coordenadas esféricas, e  $k = 1, -1, 0$ .

---

### Cosmologia do tipo Bianchi I com o gás relativístico reduzido

---

*“Resolveu as equações que não sabia.”*

Raul Seixas e Paulo Coelho, “Loteria da Babilônia”, 1973

#### 4.1 Equação de estado do RRG

Passamos à dedução da equação de estado do RRG de uma maneira diferente de como deduzida em [18]. O modelo descreve um gás ideal não degenerado composto de partículas massivas, relativísticas e idênticas. A principal simplificação, comparada ao modelo de Jüttner <sup>1</sup> [65] (vide também os livros [59, 66]), é que todas as partículas do RRG possuem valores idênticos de energia cinética. Tal pressuposto provê uma razoável simplificação em aplicações, tais como em cosmologia para soluções exatas e pequenas perturbações [17]. Embora o pressuposto de valores idênticos de energia cinética para todas as partículas do gás possa parecer um demasiadamente simples, a diferença com a equação de estado do modelo de Jüttner e do RRG não excede mais do que 2.5% [18]. Uma vez que o modelo de

---

<sup>1</sup>Nome dado à distribuição de Maxwell-Boltzmann para um gás relativístico e ideal.

Jüttner e, em geral, um gás ideal de partículas idênticas, é certamente uma aproximação semi-realística, o RRG é perfeitamente justificável e útil para aplicações cosmológicas. A derivação da equação de estado em [18] é muito simples e pode-se dizer que é feita em um nível de livros introdutórios de física. A derivação apresentada nesta tese assenta-se em técnicas um pouco mais formais e implementadas em uma métrica plana e de Minkowski, o que, em princípio, permite estabelecer analiticamente a diferença com o modelo de Jüttner.

Seguindo [38, 59], o número de partículas,  $N$ , é calculado sobre uma hipersuperfície tridimensional do tipo-espaço com vetor normal  $n^\mu$  e com elemento de área da hipersuperfície denotado por  $d\sigma$ . A expressão geral para um gás não-degenerado e composto de partículas idênticas é [59]

$$N = \int d\sigma d^4p n_\mu p^\mu f(x, p) \delta(p^2 - m^2), \quad (4.1)$$

onde  $p^2 = (p^0)^2 - \delta_{ij} p^i p^j$ ,  $m$  é a massa das partículas,  $f(x, p)$  é chamada função distribuição, a qual depende das coordenadas espaço-temporais e dos momenta, denotados, respectivamente, por  $x$  e  $p$ . Integrando sobre  $dp_0$  e usando propriedades da função delta, temos

$$N = \int d\sigma \frac{d^3p}{p^0} n_\mu p^\mu f(x, p). \quad (4.2)$$

Para o caso da hipersuperfície da variável temporal constante ( $x^0 = \text{constante}$ ) o vetor normal é  $n^\mu = \delta_0^\mu$  e  $d\sigma = d^3x$ . Consequentemente, a expressão para o número de partículas é

$$N = \int d^3x d^3p f(x, p). \quad (4.3)$$

A função distribuição para o RRG corresponde ao *ansatz*

$$f(x, p) = C \delta(E - E_0), \quad (4.4)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização,  $E = p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  e  $E_0$  é a energia constante compartilhadas por todas as partículas. Da expressão para a função distribuição em (4.3), ocorre que

$$N = C \int d^3x d\Omega dE E \sqrt{E^2 - m^2} \delta(E - E_0), \quad (4.5)$$

onde  $d\Omega$  é o elemento de ângulo sólido. Da última expressão, a constante  $C$  pode ser determinada, conduzindo à forma final da função distribuição,

$$f = \frac{n}{4\pi E_0 \sqrt{E_0^2 - m^2}} \delta(E - E_0), \quad (4.6)$$

onde  $n = N/V$  é a concentração de partículas do gás (número de partículas por unidade de volume). A partir do cálculo do tensor momento-energia em um referencial comóvel, podemos estabelecer a relação entre pressão e densidade de energia.

Uma vez que no referencial comóvel para cada partícula  $T^{00}$  é a densidade de energia, argumentos padrões mostram que o tensor momento-energia do gás pode ser expresso como uma soma sobre o espaço de fase das partículas, dado por

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_a \int ds \delta^4(x - x_a(s)) \frac{p_a^\mu(s) p_a^\nu(s)}{m_a}, \quad (4.7)$$

onde  $a$  toma valores de 1 até  $N$  (número de partículas) e  $s$  é a integral com relação ao tempo próprio das partículas. Das propriedades da função delta, podemos reescrever a última expressão como

$$T^{\mu\nu}(x) = \int d^4p p^\mu p^\nu f(x, p), \quad (4.8)$$

onde

$$f(x, p) = \sum_a \int ds \frac{\delta^4(p - p_a(s)) \delta^4(x - x_a(s))}{m_a}. \quad (4.9)$$

A expressão (4.8) inclui integração sobre os quadrimomenta. Uma vez que as partículas são consideradas livres, e portanto satisfazem à relação de dispersão,  $p^2 = m^2$  com  $p^0 \geq 0$ , então teremos que acrescentar em (4.8) o termo

$$d^3p dp^0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2). \quad (4.10)$$

Integrando sobre  $p^0$ , então o elemento invariante de integração no espaço dos momenta em quatro dimensões,  $d^4p$ , torna-se  $(m/p^0)d^3p$ , pois o vetor normal à hipersuperfície  $p_\mu p^\mu = m^2$  tem a mesma direção que  $p^\mu$  [59], logo

$$T^{\mu\nu}(x) = \int d^3p \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} f(x, p). \quad (4.11)$$

Apesar da função distribuição escolhida em (4.9) ser trivial, o resultado (4.11) é válido para qualquer função distribuição.

No referencial de um observador com quadrivelocidade  $u^\mu$ , um tensor arbitrário pode ser expresso em termos de projeções sobre  $u^\mu$ . Seguindo a Ref. [2], pode-se definir a densidade de energia,  $\rho$ , e pressão,  $p$ , como

$$\rho = u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}, \quad p = -\frac{1}{3} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde  $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$ . No caso de um referencial comóvel, no qual o observador tem quadrivelocidade  $u^\mu = \delta_0^\mu$  e a função distribuição é dada por (4.6), as expressões (4.12) tornam-se

$$\rho = nE_0 \quad \text{and} \quad p = \frac{n(E_0^2 - m^2)}{3E_0}. \quad (4.13)$$

Definindo a densidade de energia de repouso por  $\rho_d = nm$ , então, a pressão e densidade de energia estão relacionadas pela relação

$$p = \frac{\rho}{3} \left(1 - \frac{\rho_d^2}{\rho^2}\right), \quad (4.14)$$

a qual é a equação de estado do RRG [17, 18]. Pode-se facilmente notar que a equação de estado interpola entre radiação,  $p \sim \rho/3$ , para grandes valores de energia tais que  $\rho^2 \gg \rho_d^2$ , e poeira,  $p \sim 0$ , para valores de energia tais que  $\rho^2 \approx \rho_d^2$ .

## 4.2 Equações para cosmologia do tipo Bianchi I com RRG e aproximações

Nesta seção consideraremos as equações para uma cosmologia do tipo Bianchi I com apenas o RRG, caracterizado como um fluido perfeito, isotrópico e com a equação de estado (4.14). As considerações do presente capítulo são análogas às apresentadas na Sec. (3.1). A contribuição à equação análoga à de Friedmann, Eq. (3.15), por parte do RRG, provém da relação entre a densidade de energia e o fator de escala,  $a(t)$ , na parametrização de Misner, Eq. (3.2). A fim de obter tal relação, usamos a equação de estado do RRG na



lei de conservação, dada pela Eq. (3.5), e integrando-a temos o mesmo resultado do caso isotrópico em [18], a saber

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^8}, \quad (4.15)$$

onde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $a_0$  são constantes de integração.

Podemos distinguir entre dois regimes extremos em (4.15). Para o caso  $\rho_1 \ll \rho_2$ , o RRG tende a matéria ultra relativística (radiação), enquanto que para  $\rho_1 \gg \rho_2$ , encontra-se um comportamento típico de matéria não relativística (poeira).

Portanto, a Eq. (3.15) com RRG conduz a

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^6 + \frac{8\pi G}{3} \rho_1 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^{-2} + b^2}, \quad (4.16)$$

onde  $b = \rho_2/\rho_1$  é chamado *parâmetro de aquecimento* [19].

As equações para o fator de escala e as anisotropias, respectivamente, (4.16) e (3.19), podem ser expressas na forma de quadraturas. Entretanto, as integrais não são funções elementares, logo, soluções analíticas e completas para ambas as equações não são possíveis. Portanto, nesta seção vamos nos ater apenas às aproximações. Podemos identificar três aproximações em (4.16): vácuo, radiação e poeira. As duas últimas aproximações são obtidas dos limites da equação de estado do RRG da dependência do parâmetro  $b$ . A aproximação de vácuo é relevante para pequenos valores de  $a(t)$ , pois apenas os termos provenientes das anisotropias (*matéria rígida*) contribuem significativamente neste regime. Nesta aproximação despreza-se completamente a contribuição do RRG, restando apenas o primeiro termo do lado direito de (4.16), o qual implica à solução de Kasner da Sec. (3.2). De fato, é conhecido que na evolução de modelos homogêneos e anisotrópicos na vizinhança da singularidade, o conteúdo de matéria e energia de, pelo menos, um fluido perfeito, não é relevante para a dinâmica do campo gravitacional [49] (vide também [67]).

As demais duas aproximações, radiação e poeira, são obtidas tomando-se, respectivamente, os limites  $b^{-1} \rightarrow 0$  e  $b \rightarrow 0$ . Cabe frisar que a forma geral das soluções de (3.19) permanecem as mesmas, independentemente das aproximações tomadas para a densidade de energia. No caso da aproximação de radiação, podemos expandir até primeira ordem em  $b^{-1}$  na Eq. (4.16). Por simplicidade, considera-se  $a_0 = 1$ , e então temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Gamma^2}{a^6} + \frac{8\pi G \rho_1 b}{3a^4} \left(1 + \frac{a^2}{2b^2}\right). \quad (4.17)$$

Desprezando o termo  $a^2/b^2$ , temos o modelo de Bianchi I para radiação com densidade de energia inicial dada por  $\rho_2$ . Este é o resultado clássico de [6] e cuja solução também foi obtida na Sec. (3.6). Porém agora obtido como um limite da solução do RRG. Procedendo de forma análoga, o limite  $b \rightarrow 0$  conduz a Bianchi I com poeira e densidade de energia inicial  $\rho_2$ , cuja solução é o resultado clássico de [63], o qual foi abordado na Sec. (3.4).

### 4.3 Soluções numéricas

Dada a impossibilidade de expressar a solução do modelo de Bianchi I com RRG na forma de funções elementares, passamos à análise numérica do sistema de equações Eqs. (4.16) e (3.19) sem assumir quaisquer aproximações. O objetivo principal é verificar se há efetivamente isotropização, por isso consideremos apenas o RRG como contribuição de matéria-energia. Para a análise numérica, torna-se útil expressar as soluções em termos dos parâmetros de densidade de energia relativa,  $\Omega_{an}$  and  $\Omega_{RRG}$ , definidos por

$$\Omega_{an} = \frac{\Gamma^2}{H^2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^6, \quad \Omega_{RRG} = \frac{8\pi G \rho_1}{3H^2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \sqrt{b^2 + \left( \frac{a}{a_0} \right)^2} = 1 - \Omega_{an}. \quad (4.18)$$

Consideramos que em um instante inicial do tempo, escolhido em  $t = 0$ , temos  $a(0) = a_i = a_0 = 1$  e  $H(0) = H_i$ , onde o índice  $i$  denota o valor inicial das quantidades em questão. Portanto, no instante inicial de tempo, os valores para os parâmetros de densidade relativa são  $\Omega_{an}^{(i)}$  e  $\Omega_{RRG}^{(i)}$ , correspondendo a  $H = H_i$  e  $a = a_0$  em (4.18).

Além das definições anteriores, escolhemos uma variável adimensional de tempo, definida por  $\tau = H_i t$ , de tal modo que o sistema de equações dinâmicas torna-se

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Omega_{an}^{(i)}}{a^6} + \frac{\Omega_{RRG}^{(i)}}{a^4 \sqrt{1 + b^2}} \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \dot{\beta}_{\pm} = \frac{\sqrt{\Omega_{an}^{(i)}} \gamma_{\pm}}{\Gamma a^3}, \quad (4.19)$$

onde ponto denota derivada com relação a  $\tau$ .

O valor de  $\Omega_{an}(t)$  mensura a densidade relativa por parte das anisotropias, de tal modo que para valores de  $\Omega_{an}(t) \approx 1$  correspondem grandes contribuições por parte das anisotropias. Como antes,  $b$  é o parâmetro de aquecimento do RRG. Para o universo atual o valor de  $\Gamma$  é extremamente menor que o parâmetro de Hubble atual  $H_0$ , e conseqüentemente  $\Omega_{an}^0$  assume valores muito pequenos. O parâmetro de aquecimento  $b$  atual é limitado

aproximadamente a 0.001 para o fluido dominante de matéria escura [22]. Por outro lado, para o universo primordial, quando  $\Omega_{an}^0$  era potencialmente significativa, o parâmetro de aquecimento poderia ter assumido valores maiores. Desse modo, o modelo do RRG permite estabelecer como o parâmetro de aquecimento afeta o tempo de isotropização, tipicamente envolvido na transição de grandes valores de  $\Omega_{an}^{(i)}$  para valores menores em um período posterior.

As constantes  $\Gamma$  e  $\gamma_{\pm}$  na segunda equação em (4.19) podem ser expressas por meio do parâmetro angular em (3.14). Este ângulo torna-se relevante apenas na vizinhança da singularidade, quando a métrica pode ser aproximada pela solução de Kasner. Na análise numérica, o valor deste ângulo não apresenta relevância.

As soluções numéricas do sistema de equações diferenciais (4.19) foram implementadas no software *Mathematica* [68] para diferentes valores do parâmetro de aquecimento  $b$ . As condições iniciais escolhidas foram  $a = a_i = 1$ ,  $\beta_+ = 10$ ,  $\beta_- = 15$ ,  $\Omega_{an}^{(i)} = 0.99$  e  $\Omega_{RRG}^{(i)} = 0.01$  em  $\tau = 0$ . Além da solução numérica para o fator de escala, anisotropias e o parâmetro de densidade relativa para estas, em todos os gráficos foram juntamente traçadas estas mesmas quantidades para os casos dominantes de Kasner (vácuo), radiação e poeira, permitindo uma comparação deles com o RRG. Além disso, em cada caso dominante, foram escolhidas condições iniciais idênticas às do RRG. As Figs. 4.1 e 4.2 mostram que o comportamento do RRG tende ao de Kasner em estágios iniciais da evolução, e torna-se próximo ao de radiação durante algum intervalo de tempo para ambos o fator de escala e  $\Omega_{an}(\tau)$ . Nas figs. 4.3 and 4.4, pode-se observar efetivamente a isotropização, pois  $\beta_+$  e  $\beta_-$  tendem a constantes. Pode-se ainda notar que a isotropização ocorre mais rápido para caso de dominância exclusiva de poeira (Figs. 4.6-4.8), embora em todos estes gráficos o RRG claramente mostre o comportamento assintótico ao caso de poeira em razão de uma escolha menor para o parâmetro de aquecimento.

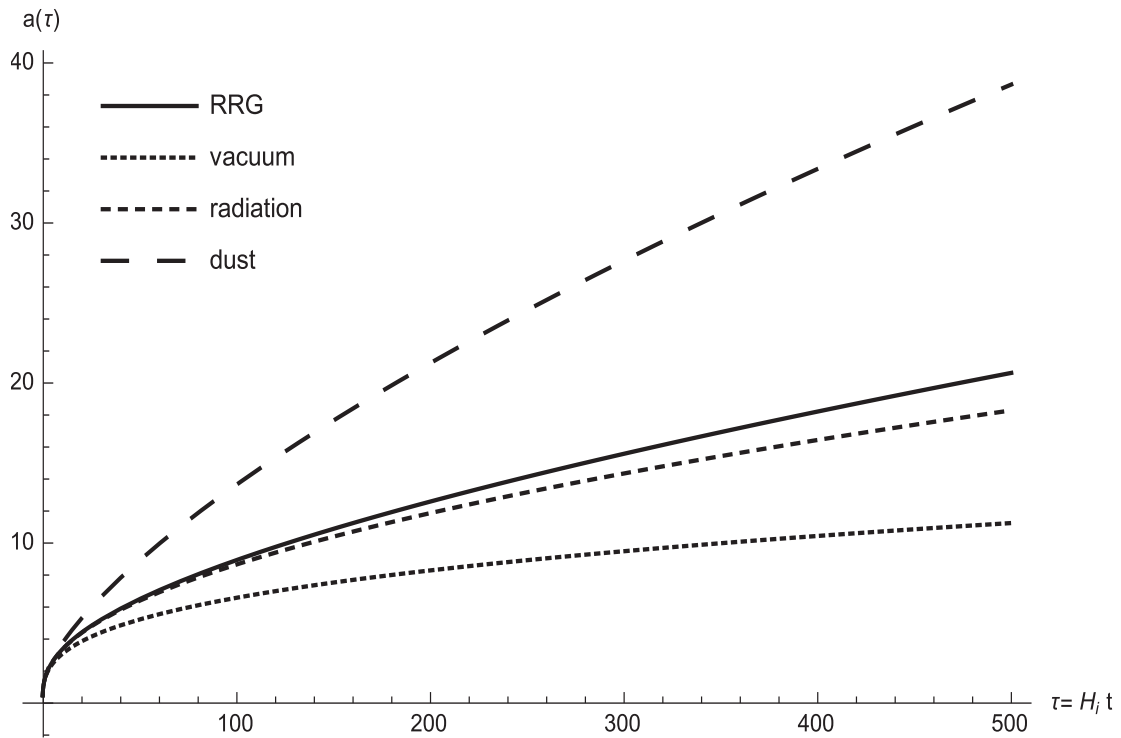


Figura 4.1: Gráficos dos fatores de escala para  $b = 10$  e  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , comparando a solução do RRG com as de vácuo, radiação e poeira.

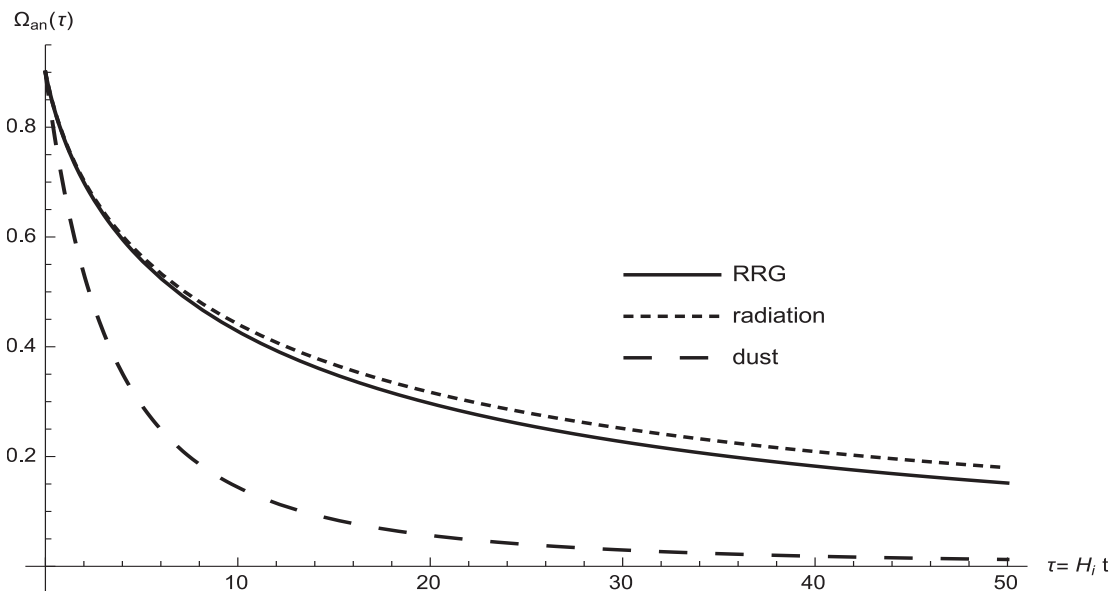


Figura 4.2: Gráficos de  $\Omega_{ani}(\tau)$  para  $b = 10$  e  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , comparando a solução do RRG com as de Kasner (vácuo), radiação e poeira.

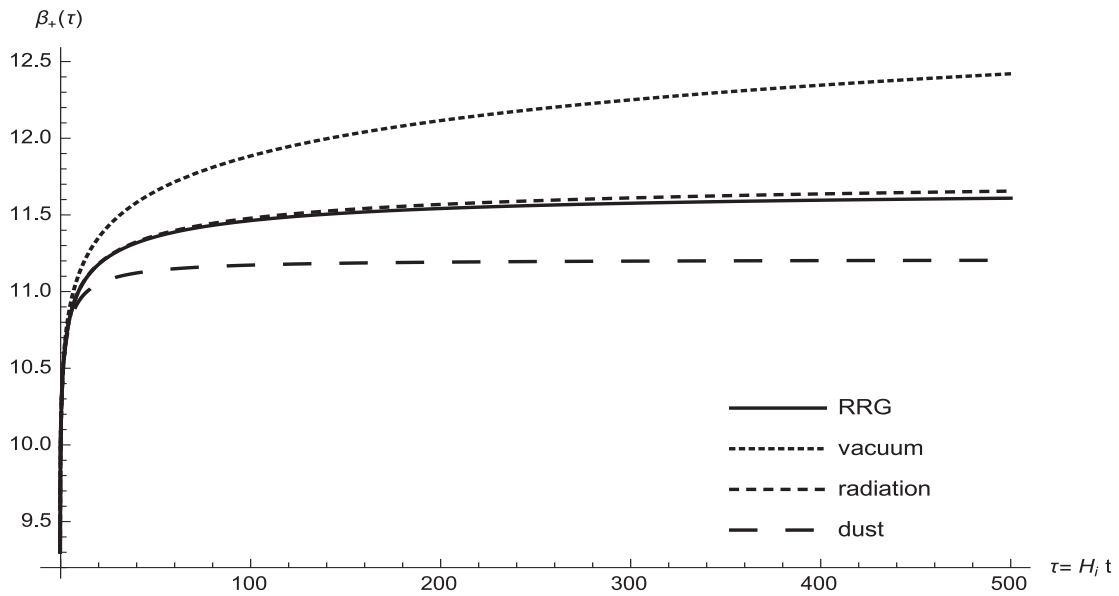


Figura 4.3: Gráficos de  $\beta_+$  correspondendo aos parâmetros  $b = 10$  e  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , e condição inicial  $\beta_+ = 10$ .

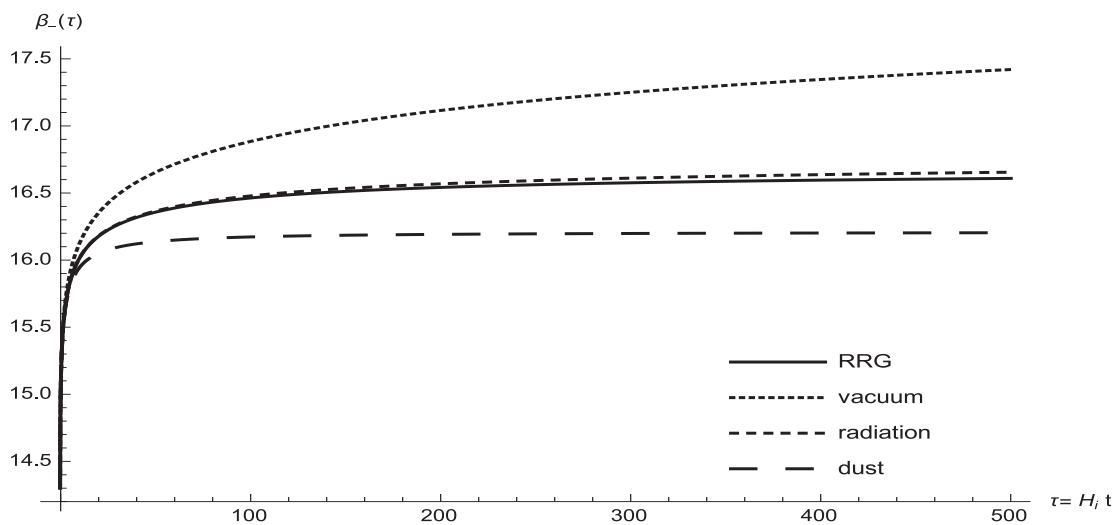


Figura 4.4: Gráficos de  $\beta_+$  correspondendo aos parâmetros  $b = 10$  e  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ , e condição inicial  $\beta_- = 15$ .

Para um valor menor do parâmetro de aquecimento,  $b = 0.5$ , pode-se observar nas Figs. 4.5 a 4.8 outro comportamento, quando os gráficos do caso do RRG tendem, como esperado, aos de poeira.

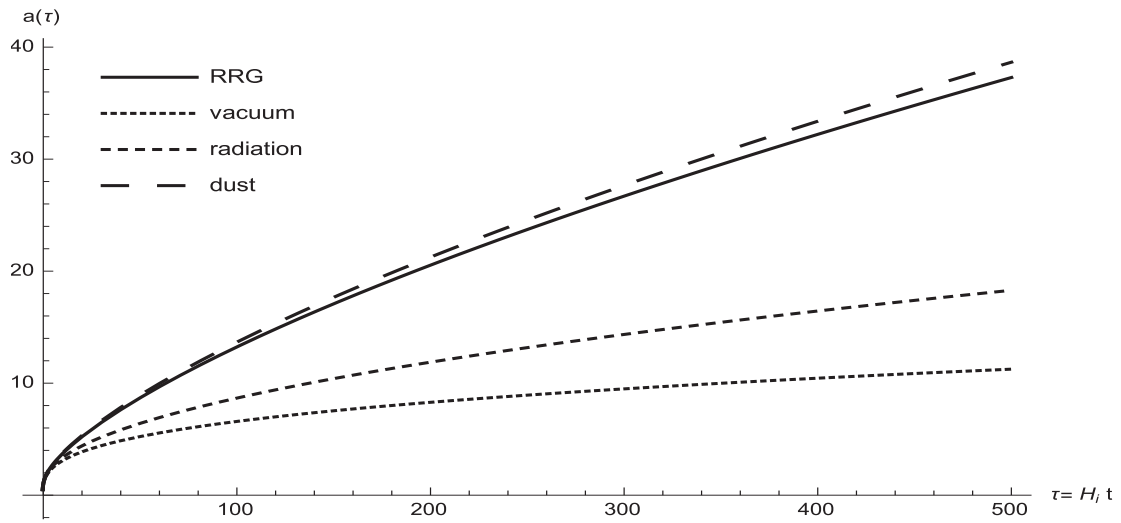


Figura 4.5: Gráfico do fator de escala para um valor moderado do parâmetro de aquecimento. Os valores são:  $b = 0.5$ ,  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ .

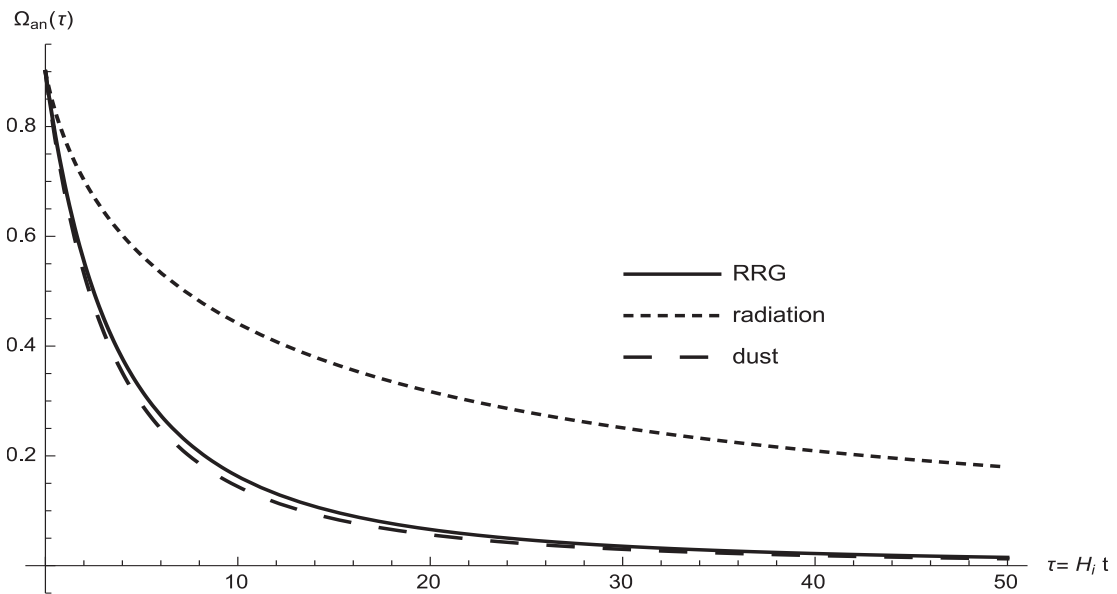


Figura 4.6: Gráfico de  $\Omega_{ani}(\tau)$ . Os valores são:  $b = 0.5$ ,  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$ .

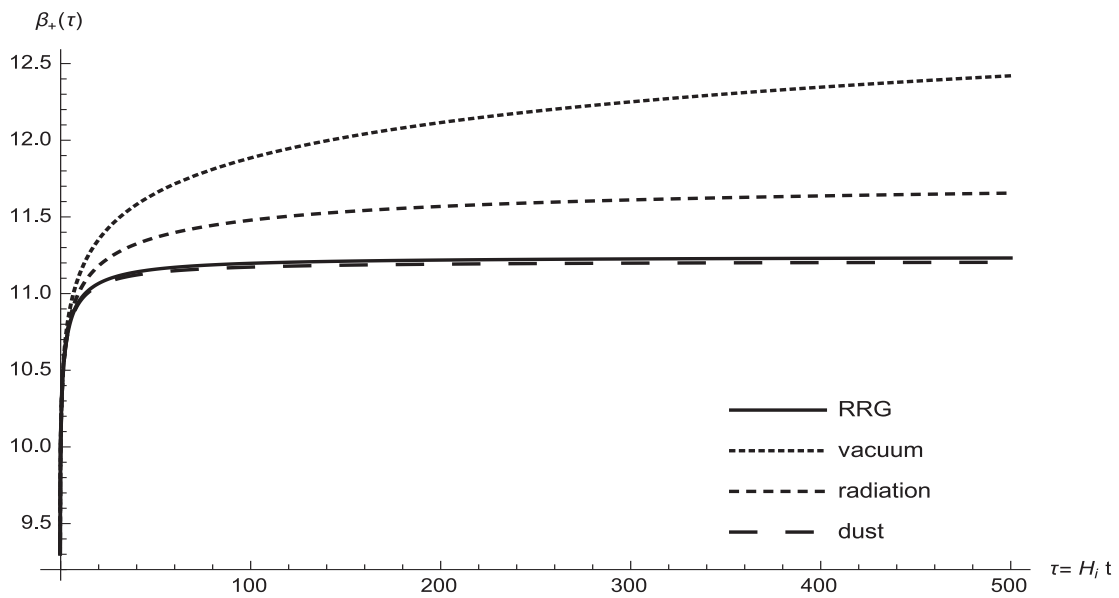


Figura 4.7: Gráficos de  $\beta_+$  para  $b = 0.5$ ,  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$  com condição inicial  $\beta_+ = 10$ .

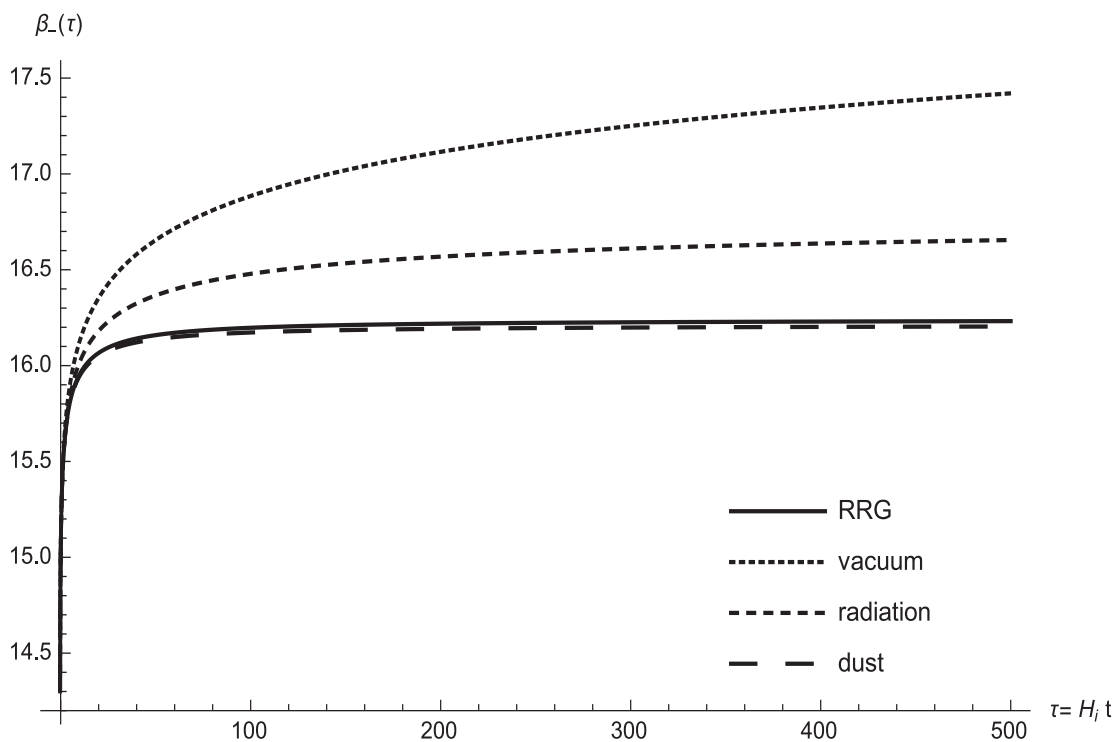


Figura 4.8: Gráficos de  $\beta_-$  para  $b = 0.5$ ,  $\Omega_{ani}^{(i)} = 0.99$  com condição inicial  $\beta_- = 15$ .

Como esperado, os gráficos apresentados mostram perfeitamente que no RRG há uma

interpolação entre os regimes de radiação e poeira. No intervalo de tempo considerado, o comportamento assintótico das anisotropias,  $\beta_{\pm}(\tau)$ , é constante e efetivamente significa que há isotropização das soluções. Quanto ao tempo para isotropização, este está relacionado com o parâmetro de aquecimento do modelo do RRG. Embora tenham sido apresentados dois possíveis valores para o parâmetro de aquecimento, outras escolhas mostraram qualitativamente o mesmo comportamento. Portanto, o modelo do RRG, além de outras aplicações, também atua como um fluido capaz de provêr um mecanismo para isotropização.



---

### Análise não linear de estabilidade em gravitação com derivadas superiores com a métrica do tipo Bianchi I

---

*“Eu sou apenas um rapaz latino-americano (...). A vida realmente é diferente, quer dizer, ao vivo é muito pior.”*

Belchior, “Apenas um Rapaz Latino-Americano”, Alucinação, junho de 1976

#### 5.1 Equações dinâmicas

Como descrito na introdução, teorias métricas de gravitação com derivadas superiores desempenham uma papel fundamental em gravitação quântica e teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo, no qual as correções aos efeitos quânticos dos campos não gravitacionais envolve termos com derivadas superiores com a ação clássica em unidades naturais dada por

$$S = \int d^4x \left( -\frac{M_P^2}{16\pi} R + a_1 C^2 + a_2 R^2 \right). \quad (5.1)$$

Onde  $M_P$  é a massa de Planck, enquanto os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  são constantes adimensionais arbitrárias.  $R$  e  $C^2$  são, respectivamente, o escalar de Ricci e a contração do tensor de Weyl,

$$C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{3}R^2,$$

o qual vamos nos referenciar como quadrado do tensor de Weyl. A variação da ação acima com a relação à métrica conduz às equações dinâmicas covariantes satisfazendo a propriedade que todas as soluções das equações de campo de Einstein no vácuo, comumente chamados espaços de Einstein, também serão soluções das equações dinâmicas provenientes da ação (5.1) (vide [32] para as equações dinâmicas e a propriedade referida). Entretanto, devido a presença de derivadas superiores, a teoria pontencialmente pode levar a instabilidades que não ocorrem em Relatividade Geral.

Consideremos a métrica de Bianchi I, (3.1), na parametrização de Misner, (3.2). Neste capítulo, continua-se a adotar a convenção que o(s) termo(s) anisotropia(s) refere-se às funções desconhecidas  $\beta_{\pm}$ . O caso trivial de  $\beta_{\pm} = 0$ , corresponde a uma métrica isotrópica. A parametrização de Misner permite a possibilidade de uma transformação conforme local, a saber

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma(\eta)} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

onde o tempo conforme  $\eta$  é definido pela relação  $dt = e^{\sigma(\eta)} d\eta$ . A métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é dada por (3.2) com  $\sigma(t) \equiv 0$ . Perante uma transformação conforme, a parte da ação (5.1) correspondente ao quadrado do tensor de Weyl é expressa apenas em termos da métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , enquanto que o escalar de Ricci transforma como

$$R = e^{-2\sigma} [\bar{R} - 6(\sigma')^2 - 6\sigma'']. \quad (5.3)$$

Devido à forma de  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , tem-se  $\sqrt{-\bar{g}} = 1$  e as expressões para  $\bar{R}$  e  $\bar{C}^2$  são

$$\begin{aligned} \bar{R} &= -6(\beta_+'^2 + \beta_-'^2), \\ \bar{C}^2 &= 12(\beta_+''^2 + \beta_-''^2) + 48(\beta_+'^2 + \beta_-'^2)^2 + 16[\beta_+'(3\beta_-'^2 - \beta_+'^2)]'. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nestas expressões aspas simples denotam derivada com relação ao tempo conforme.

Deve-se ressaltar que consideramos as anisotropias como uma parte truncada de uma onda gravitacional. Dito de outra forma, como uma onda com frequência igual a zero. As ondas gravitacionais de interesse têm como pressuposto que elas sejam criadas devido às flutuações quânticas [25], e se elas não apresentam crescimento devido à presença de fantasmas, suas amplitudes permanecem pequenas. Esta é a principal suposição que faremos. Logo, para comprova-lá, é necessário saber se esta suposição é violada pela dinâmica das ondas gravitacionais, ou no caso simplificado, das anisotropias. Devido a esta suposição, consideremos o caso de interesse físico quando as anisotropias na Eq. (3.2) são pequenas,  $|\beta_{\pm}| \ll 1$ . Portanto, podemos escrever as componentes espaciais da métrica como

$$g_{ik} = -\delta_{ik} + h_{ik}, \quad h_{ik} = -\text{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+). \quad (5.5)$$

De imediato, pode-se notar que o traço da última expressão é igual a zero,  $\delta^{ik}h_{ik} = 0$ , exatamente como no caso de ondas gravitacionais. Similiarmente, há apenas dois graus de liberdade, ou seja, as funções  $\beta_{\pm}$ . Veremos que outra similiaridade entre Bianchi I e ondas gravitacionais pode ser inferida a partir da ação em (5.1) expressa na parametrização de Misner. Entretanto, antes devemos observar uma limitação do modelo que estamos considerando.

Uma outra similaridade desejável seria a natureza transversa das ondas gravitacionais. Entretanto, no caso da métrica do tipo Bianchi I, esta similaridade não é satisfeita, uma vez que as perturbações em (5.5) são dependentes apenas do tempo e, conseqüentemente, não há um vetor de onda. Portanto, não há uma correspondência completa entre (5.5) e ondas gravitacionais, mas somente uma correspondência qualitativa entre os dois tipos de perturbações. Ao mesmo tempo, uma vez que instabilidades de Ostrogradsky, as quais são esperadas em teorias com derivadas superiores [69] (vide [70] para uma revisão recente), aparecem devido às derivadas superiores com relação ao tempo, podemos esperar que os resultados obtidos usando a métrica do tipo Bianchi I possam prover um panorama da situação geral concernente à estabilidade de perturbações da métrica em teorias com derivadas superiores. Além disso, de acordo com os resultados de [23], podemos esperar que as soluções clássicas e isotrópicas sejam estáveis na aproximação linear. A métrica do tipo Bianchi I tem como vantagem independente a possibilidade de testar estes resultados e, mais relevante ainda, não somente a nível linear.

Em termos das novas variáveis, desprezando termos superficiais e considerando que para Bianchi I todas as componentes da métrica dependem apenas do tempo, a Lagrangiana da ação (5.1) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{3M_P^2}{8\pi} e^{2\sigma} [\sigma'^2 - (\beta_+'^2 + \beta_-'^2)] + 12(3a_2 + 4a_1) (\beta_+'^2 + \beta_-'^2)^2 \\ & + 12a_1(\beta_+''^2 + \beta_-''^2) + 72a_2(\sigma'' + \sigma'^2) (\beta_+'^2 + \beta_-'^2) + 36a_2(\sigma'' + \sigma'^2)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

No limite da Relatividade Geral,  $a_{1,2} \rightarrow 0$ , temos na parte das anisotropias a Lagrangiana para as anisotropias, a qual denotamos por  $\mathcal{L}_{ani}$ , dada por

$$\mathcal{L}_{ani} = \frac{3M_P^2}{8\pi} e^{2\sigma} (\beta_+'^2 + \beta_-'^2). \quad (5.7)$$

Comparando com a Lagrangiana para ondas gravitacionais em Relatividade Geral [1]

$$\mathcal{L}_{gw} = \frac{M_P^2}{2\pi} e^{2\sigma} (h_+'^2 + h_X'^2 - \delta^{ij} \partial_i h_+ \partial_j h_+ - \delta^{ij} \partial_i h_X \partial_j h_X), \quad (5.8)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\partial_i$  denota derivada com relação as coordenadas espaciais e  $h_+$  e  $h_X$  são os modos transversos. Vemos que a Lagrangiana (5.7) corresponde à (5.8) quando  $\partial_i h_+$  e  $\partial_i h_X$  são ambos iguais a zero para  $i = 1, 2, 3$  e  $h_+ = \sqrt{3}/2 \beta_+$  e  $h_X = \sqrt{3}/2 \beta_-$ . Por isso assumimos que a correspondência entre Bianchi I e ondas gravitacionais permaneça além da ordem linear, considerando Bianchi I como a mais simples versão para um onda gravitacional.

Na Lagrangiana (5.6) podemos notar a presença de termos que são de segunda e quarta ordem em derivadas com relação ao tempo conforme. As equações dinâmicas podem ser obtidas sejam pela variação da ação (5.1) com relação a métrica  $g_{\mu\nu}$  ou pela variação da ação com a Lagrangiana (5.6) com relação ao fator conforme e as anisotropias [60]. A vantagem da última possibilidade é que expressando a ação como função explícita das componentes da métrica escolhida, a obtenção das equações dinâmicas pode ser consideravelmente mais simples em relação às equações covariantes. A presença de matéria distribuída isotropicamente, radiação ou constante cosmológica não afetam as equações para  $\beta_{\pm}$  [8, 72], mas somente a equação para  $\sigma$  através da inclusão do traço do tensor momento-energia. Consideramos apenas um fluido perfeito com a equação de estado linear  $p = \omega \rho$ , onde  $p$  e  $\rho$ , são, respectivamente, a pressão e densidade de energia do fluido.

Os valores assumidos por  $\omega$  são  $\frac{1}{3}$ , 0 e  $-1$  para radiação, poeira e constante cosmológica, respectivamente. Considerando as derivadas variacionais com relação a  $\sigma(\eta)$  e  $\beta_{\pm}(\eta)$  e adicionando a parte correspondente à matéria-energia, temos

$$72a_2 \left[ \sigma^{(4)} - 2\sigma'' (3\sigma'^2 + \beta_-'^2 + \beta_+'^2) - 4\sigma' (\beta_-'\beta_-'' + \beta_+''\beta_+'') + 2(\beta_-'\beta_-''' + \beta_+''\beta_+'''') + 2(\beta_-''^2 + \beta_+'''^2) \right] + \frac{3}{4\pi} e^{2\sigma} M_p^2 \eta_0^2 \left[ (\beta_-'^2 + \beta_+'^2 + \sigma'' + \sigma'^2) - \frac{1}{2} (1 - 3\omega) \Omega_0 e^{(1-3\omega)\sigma} \right] = 0 \quad (5.9)$$

e

$$24a_1 (8\beta_{\mp}'^2 \beta_{\pm}'' + 16\beta_{\pm}' \beta_{\mp}' \beta_{\mp}'' + 24\beta_{\mp}'^2 \beta_{\pm}'' - \beta_{\pm}^{(4)}) + 144a_2 \left[ \beta_{\pm}' (2\sigma' \sigma'' + 2\beta_{\mp}' \beta_{\mp}'' + \sigma''') + \beta_{\pm}'' (\sigma'^2 + 3\beta_{\pm}'^2 + \beta_{\mp}'^2 + \sigma'') \right] + \frac{3}{4\pi} e^{2\sigma} M_p^2 \eta_0^2 (\beta_{\pm}'' + 2\sigma' \beta_{\pm}') = 0. \quad (5.10)$$

Aspas simples denotam derivada com relação ao tempo conforme medido em unidades de  $\eta_0$ , o qual corresponde a algum valor de referência de tempo conforme. A Eq. (5.9) corresponde à variação com relação a  $\sigma$  com a contribuição do fluido perfeito, onde  $\Omega_0$  é a densidade de energia relativa do fluido. As Eqs. (5.10) descrevem a dinâmica não linear das anisotropias.

Podemos expressar as equações dinâmicas em função do tempo físico usando a relação  $dt = e^{\sigma(\eta)} d\eta$ . Os resultados são

$$72a_2 \left[ \sigma^{(4)} + 12\dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma} + 4\ddot{\sigma}^2 + \dot{\sigma} (6\dot{\beta}_+, \ddot{\beta}_+ + 6\dot{\beta}_-, \ddot{\beta}_- + 7\sigma^{(3)}) + 2(\ddot{\beta}_+^2 + \ddot{\beta}_-^2 + \dot{\beta}_+ \beta_+^{(3)} + \dot{\beta}_- \beta_-^{(3)}) \right] + \frac{3}{4\pi} \left( \frac{M_p}{H_0} \right)^2 \left[ 2\dot{\sigma}^2 + \dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 - \frac{1}{2} \Omega_0 e^{-3\sigma(1+\omega)} (1 - 3\omega) \right] = 0 \quad (5.11)$$

e

$$144a_2 \left\{ \ddot{\beta}_{\pm} (2\dot{\sigma}^2 + \ddot{\beta}_{\mp}^2 + 3\dot{\beta}_{\pm}^2 + \ddot{\sigma}) + \dot{\beta}_{\pm} \left[ 6\dot{\sigma}^3 + 3\dot{\sigma} (\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) + 7\dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 2\dot{\beta}_{\mp} \ddot{\beta}_{\mp} + \sigma^{(3)} \right] \right\} + 24a_1 \left\{ \dot{\beta}_{\pm} \left[ 6\dot{\sigma}^3 - 16\dot{\beta}_{\mp} \ddot{\beta}_{\mp} + \sigma^{(3)} + 7\dot{\sigma} \ddot{\sigma} - 24\dot{\sigma} (\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) \right] + 6\dot{\sigma} \beta_{\pm}^{(3)} + \beta_{\pm}^{(4)} + \ddot{\beta}_{\pm} (11\dot{\sigma}^2 - 8\dot{\beta}_{\mp}^2 - 24\dot{\beta}_{\pm}^2 + 4\ddot{\sigma}) \right\} + \frac{3}{4\pi} \left( \frac{M_p}{H_0} \right)^2 (\ddot{\beta}_{\pm} + 3\dot{\sigma} \dot{\beta}_{\pm}) = 0. \quad (5.12)$$

Pontos denotam derivas com relação ao tempo adimensional  $\tau = H_0 t$ , onde  $H_0$  é o parâmetro de Hubble medido em algum instante de tempo. O conjunto de Eqs. (5.9) e (5.10) ou (5.11) e (5.12) representam sistemas de três equações diferenciais ordinárias de quarta ordem.

Além das soluções de vácuo das equações de campo de Einstein (que incluem a solução de Kasner), as quais são soluções dos sistemas com derivadas superiores, não há muitas chances de encontrar outras soluções exatas <sup>1</sup>. De fato, nos concentramos a explorar a estabilidade de soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas de baixas energias, correspondendo as soluções  $\beta_{\pm} = 0$  e  $\sigma(t) = \sigma_0(t)$ , onde  $\sigma_0(t)$  corresponde à solução para o fator de escala em Relatividade Geral na presença de um fluido isotrópico e homogêneo, o qual será denotado por solução de fundo.

Um ponto importante a frisar é a escolha da solução de fundo  $\sigma_0(t)$ . Começemos com algumas observações preliminares. *Primeiro*, na ação (5.1) o termo  $a_1 C^2$  (o mais relevante para perturbações tensoriais e fantasmas massivos) não afeta a dinâmica do fator conforme, logo, para o caso de um fundo isotrópico, esta observação é válida para  $\sigma_0(t)$ , e por isso, a escolha de  $\sigma_0(t)$  não é afetada pelo termo do quadrado do tensor de Weyl. *Segundo*, trabalhos anteriores sobre estabilidade cosmológica na presença de fantasmas massivos consideraram soluções cosmológicas de baixas energias. Desta forma, o procedimento padrão consistiria em também ignorar o termo  $a_2 R^2$ , com curvatura muito menor quando comparado à de Planck, ou seja, considerar  $|a_2 R^2| \ll |M_P^2 R|$  na ação e nas equações dinâmicas. Portanto, o fundo  $\sigma_0(t)$  será uma solução cosmológica isotrópica em Relatividade Geral. Devemos frisar que estas duas observações podem ser assumidas *apenas* para o fundo  $\sigma_0(t)$ , pois para perturbações, tais como ondas gravitacionais, soluções que crescem indefinidamente (“*run away solutions*”) não necessariamente satisfazem à estas duas observações. O principal interesse neste capítulo é explorar, por meio do modelo de Bianchi I, os efeitos de não linearidades e como estas afetam a estabilidade do fundo isotrópico.

A *terceira* observação consiste em que podemos facilmente estender a região de baixa energia do fundo até à escala da inflação, bastando não ignorar o termo  $a_2 R^2$ . De acordo com o conjunto de dados observacionais e experimentais, este termo é o principal contribuinte no modelo de Starobinsky [74], o qual, do ponto de vista fenomenológico, é o mais

---

<sup>1</sup>Cabe menção a uma solução exata da teoria proveniente da ação (5.1). Esta é uma solução isotrópica e do tipo radiação, com  $a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}}$ . Esta solução já é conhecida desde de pelo menos [73], e sua estabilidade foi analisada em [32].

bem sucedido modelo de inflação. A fim de obter tal modelo, o valor de  $a_2$  deve ser escolhido em torno de  $5 \times 10^8$ . A solução inflacionária corresponde a um decrescimento lento do parâmetro de Hubble, com uma dependência do tempo aproximadamente linear em  $H(t)$ . No entanto, uma vez que nosso principal interesse é a dinâmica de ondas gravitacionais com frequências iniciais de magnitudes muito maiores do que  $H$  (e ao mesmo tempo de magnitude muito menor que de frequências da ordem de Planck [23]), a aproximação de  $H$  constante constitui uma aproximação razoável. Portanto, assumimos o parâmetro de Hubble como constante e passamos a considerá-lo como proveniente de uma constante cosmológica. Feitas estas observações, as principais características do nosso modelo podem ser exploradas por meio das três mais simples escolhas para  $\sigma_0(t)$ : os casos dominantes de constante cosmológica, radiação e poeira.

Ressaltamos que a principal vantagem da métrica do tipo Bianchi I é que as Eqs. (5.9) e (5.10), ou, (5.11) e (5.12), são relativamente simples e passíveis de uma análise numérica, mesmo a nível não perturbativo. Logo, torna-se possível averiguar por cálculos diretos se os resultados matemáticos concernentes à relação geral entre estabilidade linear e comportamento assintótico não perturbativo, tal como assumidos em [23] and [31], são corretos.

## 5.2 Expansão em série assintótica para perturbação singular

Como um dos principais objetivos deste capítulo é comparar as soluções da aproximação linear para as anisotropias com as soluções numéricas e não perturbativas das mesmas, antes de prosseguir na obtenção de ambos os tipos de soluções, convém uma breve revisão dos teoremas gerais sobre a relação entre estabilidade linear (ou também em primeira ordem em uma série perturbativa) e o comportamento não perturbativo em sistemas de equações diferenciais ordinárias.

No caso de ordem zero, as funções  $\sigma$  e  $\beta_{\pm}$  são aproximadas por  $\sigma_0(t)$  e zero, pois as soluções de fundo são consideradas isotrópicas, por definição. Desse modo, buscamos uma solução geral do sistema de Eqs. (5.11) e (5.12) na forma de uma expansão em série

assintótica

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \sigma^0 + \epsilon\sigma^1 + \dots \\ \dot{\beta}_{\pm} &= 0 + \epsilon\beta_{\pm}^1 + \dots,\end{aligned}\tag{5.13}$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro adimensional e pequeno, o qual facilmente pode ser implementado nas perturbações em (5.5).

As Eqs. (5.11) e (5.12) podem ser reescritas na forma matematicamente padrão de um sistema autômato de doze equações diferenciais, de tal modo que

$$d_t \mathbf{y} = \frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y}),\tag{5.14}$$

onde o vetor  $\mathbf{y}$  inclui  $\sigma$ ,  $\beta_{\pm}$  e também as primeiras, segundas e terceiras derivadas com relação ao tempo destas funções. Substituindo no sistema de equações a expansão (5.13), obtemos as equações para a série de potências

$$d_t [\mathbf{y}^0 + \epsilon \mathbf{y}^1 + \dots] = \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) + \epsilon \nabla \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \mathbf{y}^1 + \dots,\tag{5.15}$$

onde  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{y}^0)$  é o Jacobiano da função  $\mathbf{f}$  calculado na solução de fundo  $\mathbf{y}^0$ . Para a resolução deste sistema de equações, igualamos termos de mesma ordem em  $\epsilon$ . Este procedimento é bem conhecido em teoria de perturbação singular [75].

A ordem zero em  $\epsilon$  corresponde à equação  $d_t \mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{y}^0)$ , a qual é suposta satisfeita pela solução de fundo em consideração. Então, a aproximação de primeira ordem em  $\epsilon$  corresponde à equação diferencial linear

$$d_t \mathbf{y}^1 = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \mathbf{y}^1.\tag{5.16}$$

Como dito no início desta seção, nosso propósito é comparar a solução da Eq. (5.16) com a da versão completa (5.15). Vamos assumir que para certas escolhas de condições iniciais (pequenos desvios da solução de fundo), o sistema linear, (5.16), não apresenta modos crescentes, mas somente aqueles que vão assintoticamente a zero ou modos oscilantes sem amplitudes crescentes no limite de  $t \rightarrow \infty$ . Então, com a hipótese de uma dependência suave do parâmetro  $\epsilon$ , a aproximação de primeira ordem,  $\mathbf{y}^0 + \epsilon \mathbf{y}^1$ , é da ordem de  $\epsilon$  e próxima da solução do sistema completo,  $d_t \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  [75].



Podemos, então, usar os resultados dos dois seguintes teoremas sobre pontos de equilíbrio classificados como nó atrator ou sorvedouro, os quais podem ser encontrados em livros de sistemas de equações diferenciais, tais como em [76]:

**Teorema 1.** Assumindo que o sistema  $d_t \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  contém um nó atrator em um ponto  $\tilde{\mathbf{y}}$ , ou seja, existe uma constante  $c > 0$ , tal que todos os autovalores  $\lambda_i$ , do Jacobiano  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}})$  satisfazem  $Re(\lambda_i) < -c$ , com  $i = 1, \dots, 12$ . Então, todas as soluções começando em alguma vizinhança do ponto  $\tilde{\mathbf{y}}$  convergem para  $\tilde{\mathbf{y}}$  exponencialmente.

**Teorema 2.** Se o sistema  $d_t \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  possui um equilíbrio estável em  $\tilde{\mathbf{y}}$ , então todos os autovalores  $\lambda_i$  do Jacobiano  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}})$  tem parte real negativa, tal que  $Re(\lambda_i) \leq 0$ .

Retornando às Eqs. (5.11) e (5.12), sabemos que na aproximação linear não há modos crescentes para frequências abaixo da escala de Planck [23,26]. Este resultado é certamente verdadeiro para modos de frequências iguais a zero, os quais correspondem ao modelo de Bianchi I. Portanto, podemos dizer que as condições do Teorema 2 são satisfeitas e, conseqüentemente, as condições do Teorema 1 também são satisfeitas. Logo, podemos esperar uma equivalência qualitativa entre a dinâmica das anisotropias na aproximação linear e dentro da consideração completamente não perturbativa. Na próxima seção, analisamos esta conclusão usando métodos numéricos. Por enquanto, concentraremos na discussão de como estes dois teoremas podem ser aplicados a fim de calcular as regiões nas quais pode-se esperar a validade da aproximação linear.

Primeiro, coloca-se o sistema não linear, formado pelas Eqs. (5.11) e (5.12), na forma de um sistema de primeira ordem, tal como em (5.14). Para isto, definimos as novas variáveis

$$\dot{\sigma} = H, \quad \dot{H} = Q_1, \quad \dot{Q}_1 = Q_2, \quad \dot{\beta}_{\pm} = x_{\pm}, \quad \dot{x}_{\pm} = y_{\pm}, \quad \dot{y}_{\pm} = z_{\pm} \quad (5.17)$$

Então as equações do sistema de primeira ordem incluem, além das Eqs. (5.17), mais três equações, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 = & -a_2 \left[ 12H^2 Q_1 + 4Q_1^2 + H(6x_+ y_+ + 6x_- y_- + 7Q_2) + 2(y_+^2 + y_-^2 + x_+ z_+ + x_- z_-) \right] \\ & - \frac{M_p^2}{96\pi H_0^2} \left[ 2H^2 + Q_1 + x_+^2 + x_-^2 - \frac{1}{2} \Omega_0 e^{-3\sigma(1+\omega)} (1 - 3\omega) \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

e

$$\begin{aligned}
z_{\pm} = & 6 a_2 \left\{ x_{\pm} \left[ 6 H^3 + 3 H (x_+^2 + x_-^2) + 7 H Q_1 + 2 x_{\mp} y_{\mp} + Q_2 \right] + y_{\pm} (2 H^2 + x_{\mp}^2 + 3 x_{\pm}^2 + Q_1) \right\} \\
& - a_1 \left\{ x_{\pm} [6 H^3 - 16 x_{\mp} y_{\mp} + Q_2 + 7 H Q_1 - 24 H (x_+^2 + x_-^2)] + 6 H z_{\pm} \right. \\
& \left. + y_{\pm} (11 H^2 - 8 x_{\mp}^2 - 24 x_{\pm}^2 + 4 Q_1) \right\} + \frac{3 M_p^2}{4 \pi H_0^2} (y_{\pm} + 3 H x_{\pm}). \tag{5.19}
\end{aligned}$$

As equações do sistema linearizado consistem em

$$\dot{\beta}_{\pm} = x_{\pm}, \quad \dot{x}_{\pm} = y_{\pm}, \quad \dot{y}_{\pm} = z_{\pm}, \tag{5.20}$$

e

$$\begin{aligned}
z_{\pm} = & 6 a_2 \left\{ x_{\pm} [6 \dot{\sigma}_0^3 + 7 \dot{\sigma}_0 \ddot{\sigma}_0 + \sigma_0^{(3)}] + y_{\pm} (2 \dot{\sigma}_0^2 + \ddot{\sigma}_0) \right\} - a_1 \left\{ x_{\pm} [6 \dot{\sigma}_0^3 + \sigma_0^{(3)} + 7 \dot{\sigma}_0 \ddot{\sigma}_0] \right. \\
& \left. + 6 \dot{\sigma}_0 z_{\pm} + y_{\pm} (11 \dot{\sigma}_0^2 + 4 \ddot{\sigma}_0) \right\} + \frac{3}{4 \pi H_0^2} M_p^2 (y_{\pm} + 3 \dot{\sigma}_0 x_{\pm}). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Para estimar o raio da região onde o procedimento de linearização é válido para um sistema de equações diferenciais escrito na forma (5.14), é necessário apresentar detalhes das provas dos dois teoremas citados. Em ambos os casos, as provas são baseadas na expansão de Taylor em torno do ponto de equilíbrio  $\mathbf{y}_0$  na forma

$$d_t \mathbf{y} = d_t(\mathbf{y}_0 + \delta \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0) + \mathbf{J} \delta \mathbf{y} + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{y})^T \mathbf{H} \delta \mathbf{y} + O((\delta \mathbf{y})^3), \tag{5.22}$$

onde  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{H}$  são, respectivamente, os operadores Jacobiano e Hessiano da função  $\mathbf{f}$  calculados na solução de fundo  $\mathbf{y}_0$ . Como na aproximação de ordem zero tem-se  $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$  por definição, então a Eq. (5.22) pode ser escrita para as perturbações como

$$d_t(\delta \mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{y}_0) \delta \mathbf{y} + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{y})^T \mathbf{H}(\mathbf{y}_0) \delta \mathbf{y} + O((\delta \mathbf{y})^3). \tag{5.23}$$

Os teoremas citados são válidos em uma região onde termos de ordens superiores são desprezíveis (ou possivelmente nulos sob alguma transformação de coordenadas) em uma pequena vizinhança de  $\mathbf{y}_0$ . A aproximação linear não é válida quando os termos linear e quadrático são de mesma ordem. Uma estimativa para a região onde a aproximação linear é válida é

$$|\delta \mathbf{y}| < R, \quad \text{onde} \quad R = \mathcal{O}\left(\frac{\|\mathbf{J}(\mathbf{y}_0)\|}{\|\mathbf{H}(\mathbf{y}_0)\|}\right), \tag{5.24}$$

onde a norma Euclidiana  $|\cdot|$  é usada para vetores e a norma de operadores  $\|\cdot\|$  segue a definição padrão e pode ser calculada usando a representação de Riesz [77],

$$\|\mathbf{J}\| = \max_{|y|=1} |\mathbf{J}(\mathbf{y}_0)y|, \quad \|\mathbf{H}\| = \max_{|y|=1; |z|=1} |\mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{y}_0)\mathbf{z}|. \quad (5.25)$$

Pode-se notar que não é possível aplicar esta fórmula ao modelo linearizado, pois neste caso a matriz Hessiana é singular. Esta situação é natural, pois os critérios em (5.25) são usados a fim de comparar os casos linear e não linear.

Para o cálculo do raio dado em 5.24 para o sistema (5.19), foi necessário calcular as normas dos operadores Jacobiano e Hessiano na solução de ordem zero (solução de fundo). As simulações numéricas baseadas nas Eqs. (5.24) com (5.25) foram implementadas para os modelos de radiação e poeira, usando unidades adimensionais com  $M_P = 1$ . Os resultados obtidos foram aproximadamente os mesmos com  $a_1 = \pm 1$  and  $a_2 = 5 \times 10^8$ . Em ambos os modelos, foi encontrado o raio  $R = (1/3) \cdot 10^{-9}$ . Um consequência interessante é que o sinal de  $a_1$  não altera o raio de validade da aproximação linear, embora o sinal deste mesmo parâmetro seja de importância crítica para a estabilidade assintótica, como se mostra na próxima seção.

Após a submissão no arXiv da primeira versão do artigo que deu origem aos temas apresentados neste capítulo, uma investigação similar também foi apresentada em [78]. Os resultados da análise numérica deste trabalho são referentes ao caso não linear e são qualitativamente os mesmos obtidos nesta tese; também são similares aos obtidos em [33], embora este último não tenha feito um paralelo entre o estudo da dinâmica das anisotropias e o problema de fantasmas massivos em gravitação com derivadas superiores. Ao mesmo tempo, os resultados de [78] incluem soluções crescentes para condições iniciais relativamente grandes para a primeira derivada das anisotropias. A princípio, este resultado pode indicar uma contradição do modelo de Bianchi I como qualitativamente similar a uma onda gravitacional de frequência igual a zero. Entretanto, a análise apresentada nesta seção mostra-se correta, pois em [78] as condições iniciais escolhidas correspondem a um ponto fora da região satisfazendo a (5.24). Como discutido, fora desta região não devemos esperar uma correspondência entre os regimes linear e não linear.

### 5.3 Soluções numéricas para os regimes linear e não linear

Nesta seção são apresentadas as soluções numéricas do sistema de equações diferenciais formado pelas Eqs. (5.11) e (5.12), para ambos os casos linear e não linear. Para o caso linear, torna-se necessário o procedimento de linearização. Ressaltamos que nesta seção trabalhamos exclusivamente com o conjunto de Eqs. (5.11) e (5.12) em função do tempo físico adimensional como definido na Sec. (5.1).

Como explicado anteriormente, a linearização é feita em torno de soluções cosmológicas da Relatividade Geral para o caso de três fluidos isotópicos. Deste modo, por definição, as anisotropias são nulas e  $\sigma_0(\tau)$  corresponde às soluções cosmológicas da Relatividade Geral com um fluido perfeito e isotrópico. A nível linear as equações para as perturbações de  $\sigma(\tau)$  e das anisotropias desacoplam completamente. Logo, restringimos nossas considerações para as equações lineares correspondentes às anisotropias, as quais assumem a forma

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{\pm} \left[ (11a_1 - 12a_2)\dot{\sigma}_0^2 + 2(2a_1 - 3a_2)\ddot{\sigma}_0 - \frac{3}{4\pi} \left( \frac{M_p}{H_0} \right)^2 \right] + 3\dot{\beta}_{\pm} \left[ 8(a_1 - 6a_2)(6\dot{\sigma}_0^3 + 7\dot{\sigma}_0\ddot{\sigma}_0 + \sigma_0^{(3)}) \right. \\ \left. - \frac{3}{4\pi} \left( \frac{M_p}{H_0} \right)^2 \dot{\sigma}_0 \right] + 24a_1 \left[ \beta_{\pm}^{(4)} + 6\dot{\sigma}_0\beta_{\pm}^{(3)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

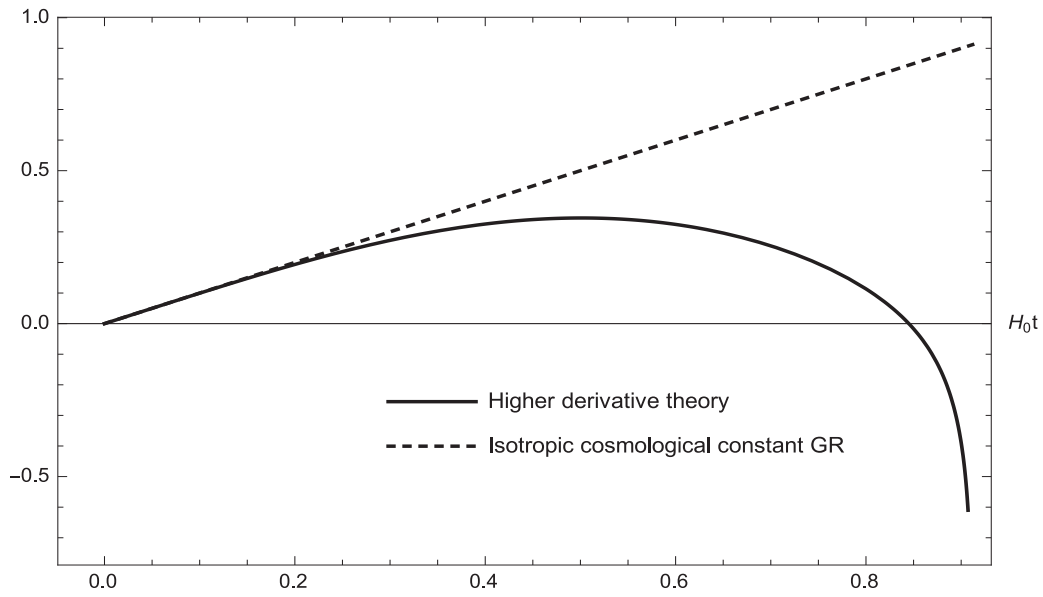
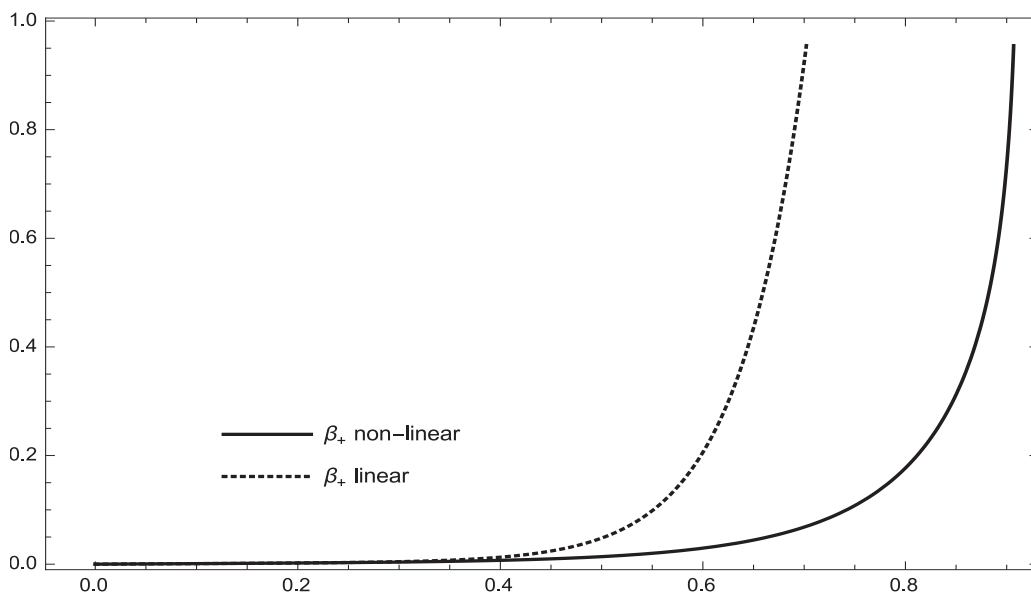
Denotamos também as funções que representam as perturbações lineares das anisotropias por  $\beta_{\pm}$ . Os parâmetros livres do sistema são o parâmetro de Hubble em algum instante de tempo denotado por  $H_0$ , os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ . A teoria com  $a_1 > 0$  apresenta instabilidades para as anisotropias, como já conhecido de trabalhos anteriores sobre soluções do tipo ondas gravitacionais [23] (para uma revisão detalhada, vide [79]). Entretanto, apresentamos os gráficos das soluções numéricas para  $a_1 > 0$  para os casos de fundo dominado por constante cosmológica, Fig. 5.1, e poeira, Fig. 5.2. Os resultados reforçam nossa análise e a dos trabalhos anteriores concernentes à possibilidade de  $a_1 > 0$ .

Os exemplos dos resultados da análise numérica são apresentados nas figuras. Qualitativamente, observamos comportamentos similares para outras escolhas de condições iniciais tentadas, as quais pertenciam à região de validade do regime linear. Os valo-

res dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  são especificados na descrição das figuras e também o fundo isotrópico escolhido. Para todos os casos, as condições iniciais escolhidas para  $\beta_{\pm}(\tau)$  e consideradas idênticas para os casos linear e não linear foram  $\beta_{\pm}(0) = 0$ ,  $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.01$ ,  $\ddot{\beta}_{\pm}(0) = -0.001$ ,  $\beta_{\pm}^{(3)}(0) = 0.0001$ . A escolha de  $\beta_{\pm}(0)$  é arbitrária, pois as equações lineares e não lineares apresentam apenas derivadas das anisotropias.

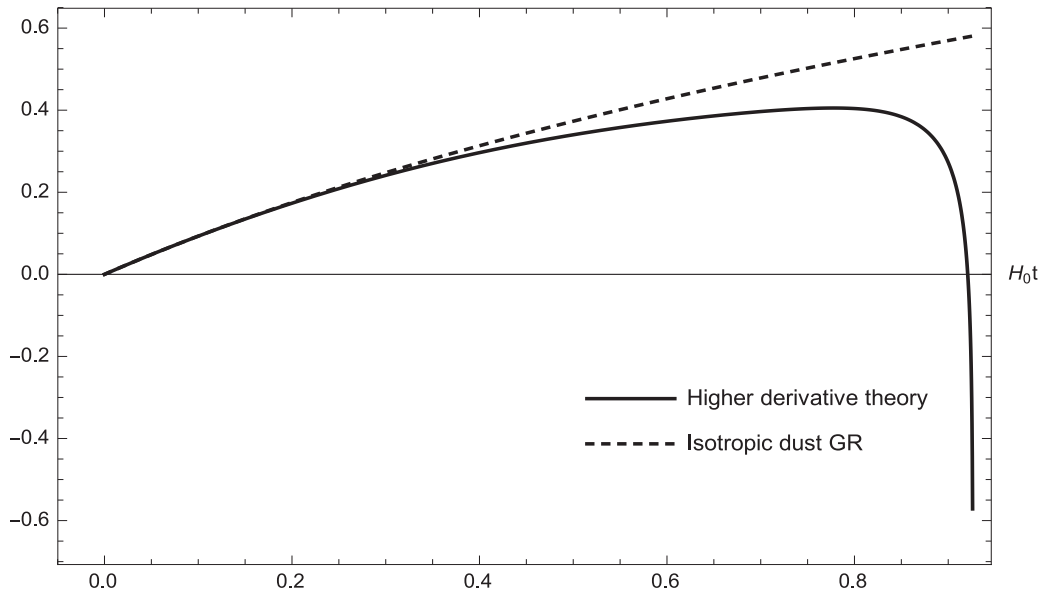
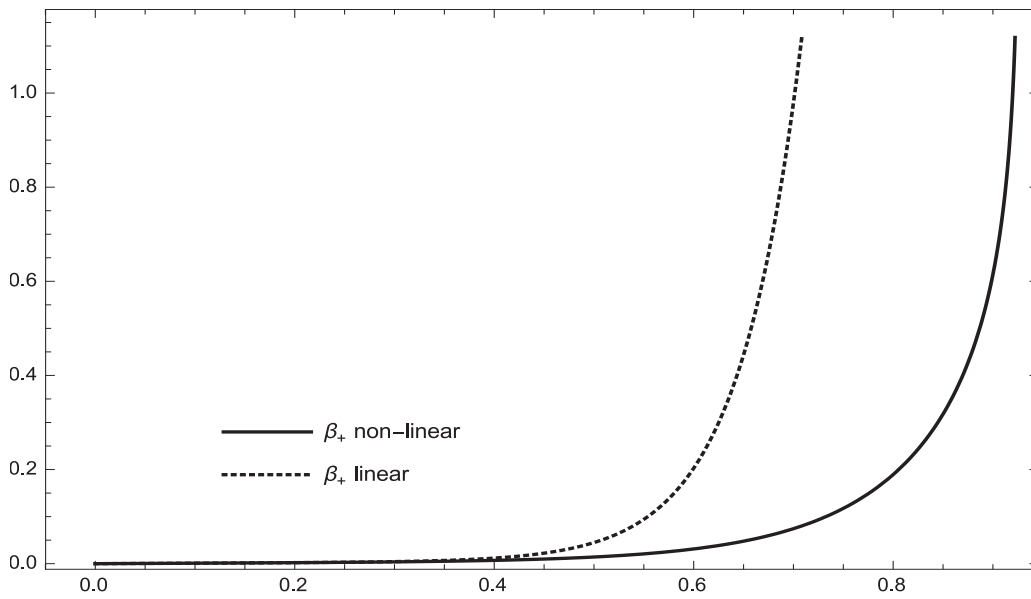
Para obter um tempo de compilação razoável, o valor do parâmetro de Hubble escolhido foi  $H_0 = 10^{-2} M_p$ . Embora valores menores para parâmetro de Hubble tenham sido tentados, o tempo de compilação estendeu-se e o número de passos para a integração numérica foi atingido para um valor de tempo muito menor ao intervalo de tempo definido. A razão para tal problema pode ser devido às muitas oscilações que a solução numérica pode apresentar, o que requer um grande número de passos. Dadas estas circunstâncias, optamos pelo valor  $H_0 = 10^{-2} M_p$ , a fim de que as soluções numéricas pudessem abranger os intervalos de tempos definidos e apresentar o comportamento assintótico esperado. Nas figuras são mostradas as soluções numéricas para  $\sigma(\tau)$  e as anisotropias. No último caso, apenas as soluções de  $\beta_+(\tau)$  são mostradas, pois as anisotropias  $\beta_{\pm}(\tau)$  satisfazem equações diferenciais funcionalmente idênticas em ambos os casos linear e não linear, podendo diferir apenas devido à escolha de condições iniciais, as quais não definem o comportamento assintótico. O tempo  $\tau$  é medido em unidades de  $1/H_0$ .

O caso de fundo dominado por radiação e com  $a_1 > 0$  é similar aos de constante cosmológica e poeira e por isso não é apresentado. Em todos os demais gráficos,  $a_1$  assume apenas valores negativos. Em todos os casos considerados, o sistema de equações não lineares tem como condições iniciais para  $\sigma_0(\tau) = \ln a_0(\tau)$  os valores assumidos no instante de tempo inicial pela solução isotrópica da Relatividade Geral correspondendo aos três fluidos perfeitos: radiação ( $a_0(\tau) \propto \tau^{\frac{1}{2}}$ ), poeira ( $a_0(\tau) \propto \tau^{\frac{2}{3}}$ ) ou constante cosmológica ( $a_0(\tau) \propto \tau$ ). O sistema linear para as anisotropias corresponde à linearização em torno de  $\sigma_0(\tau)$  de um universo isotrópico também dominado por um destes três fluidos perfeitos. As Figs. 5.3, 5.4, 5.5 correspondem ao caso de radiação, para o qual também apresentamos nas Figs. (5.6) e (5.7) os gráficos da primeira derivada,  $\dot{\beta}_+$ , a qual pode ser interpretada como uma medida da taxa de diminuição das anisotropias; as Figs. 5.8, 5.9 e 5.10, ao caso de poeira; as Figs. 5.11, 5.12 e 5.13, ao caso de constante cosmológica.

(a) soluções para  $\sigma$ 

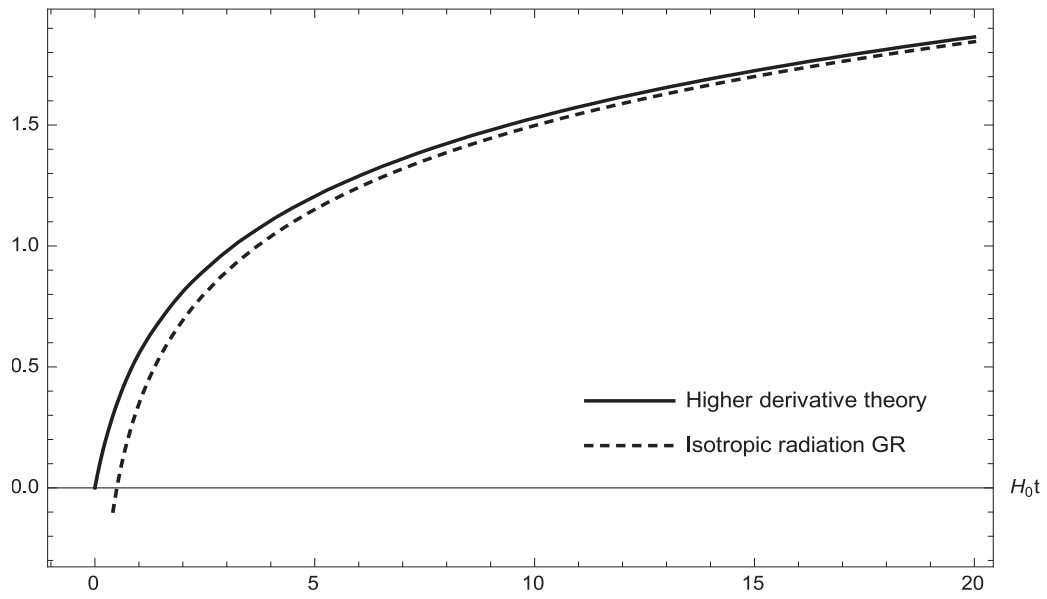
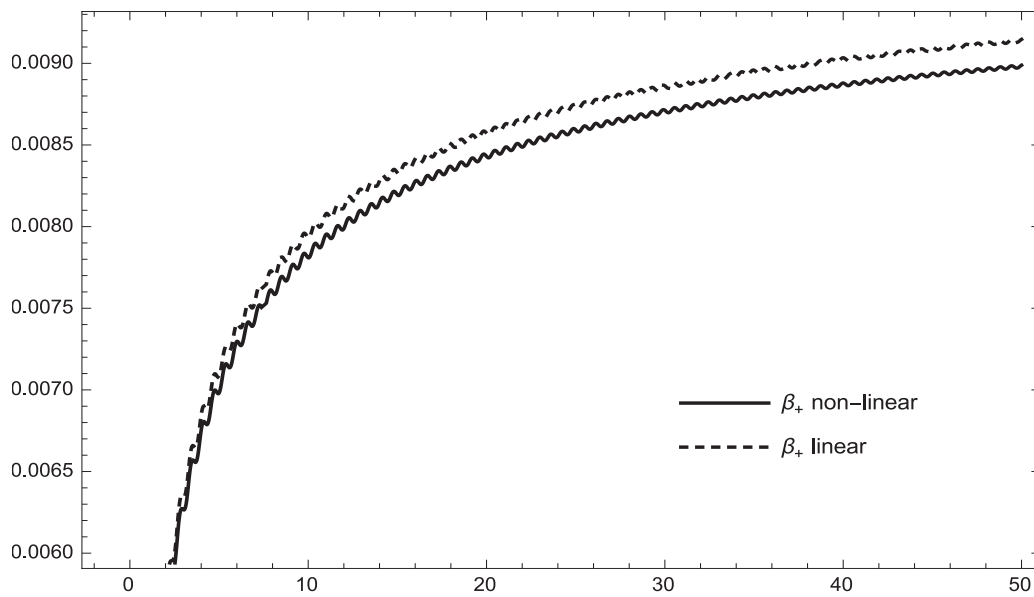
(b) anisotropias

Figura 5.1: Gráficos para  $a_1 = +1$  e  $a_2 = 1$  no caso de fundo dominado por constante cosmológica. Inicialmente há expansão depois seguida por contração, pois na parametrização de Misner  $\sigma$  esta relacionado ao volume e valores negativos deste significam contração. Para as anisotropias, pode-se observar instabilidade típica para um fantasma taquiônico [23, 79].

(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

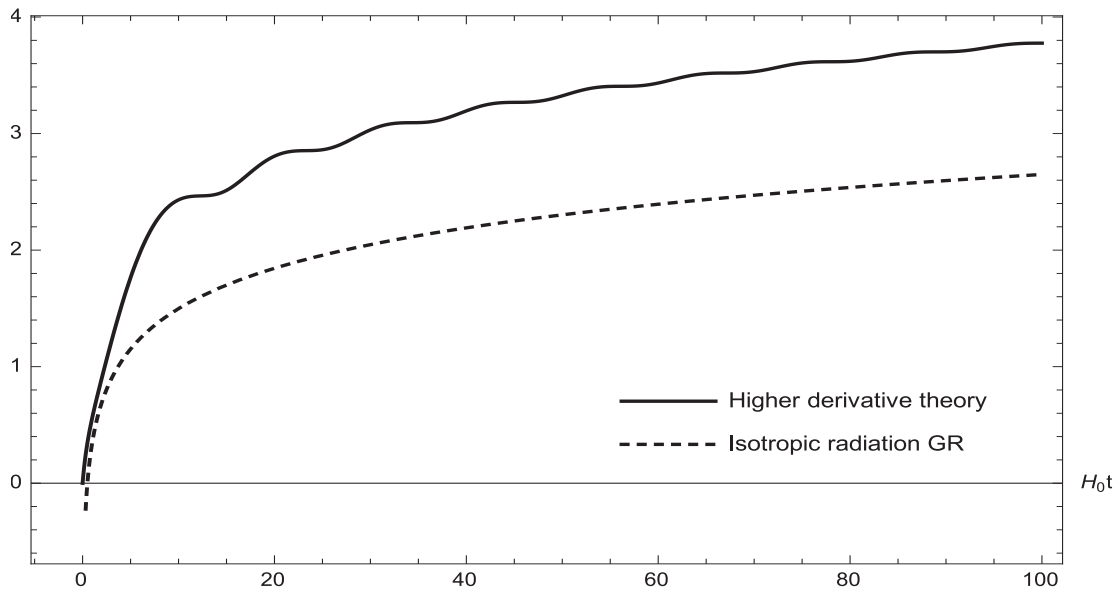
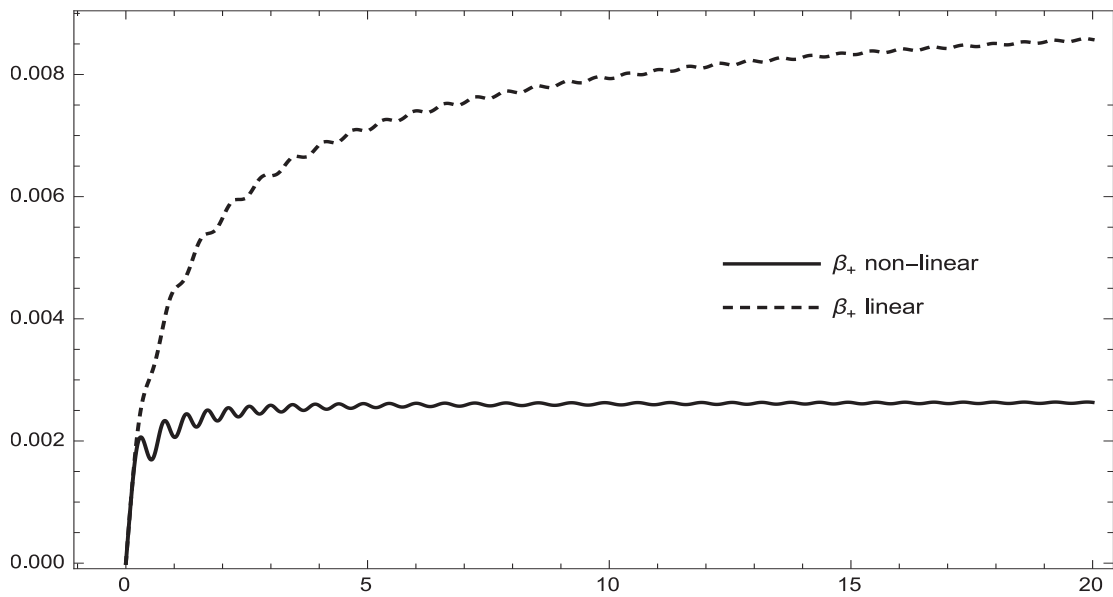
Figura 5.2: Para  $a_1 = +1$  e  $a_2 = 1$  no fundo dominado por poeira. A instabilidade do fantasma taquiônico é qualitativamente a mesma do caso de fundo dominado por constante cosmológica da Fig. 5.1, confirmando a correspondência qualitativa entre o modelo de Bianchi I como onda gravitacional de frequência igual a zero.

(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

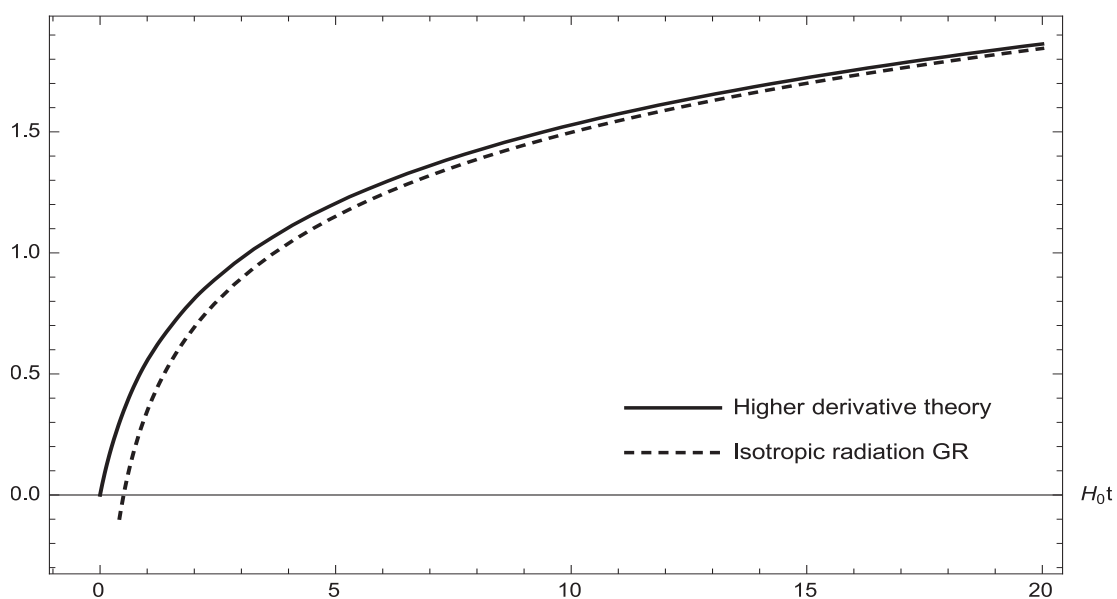
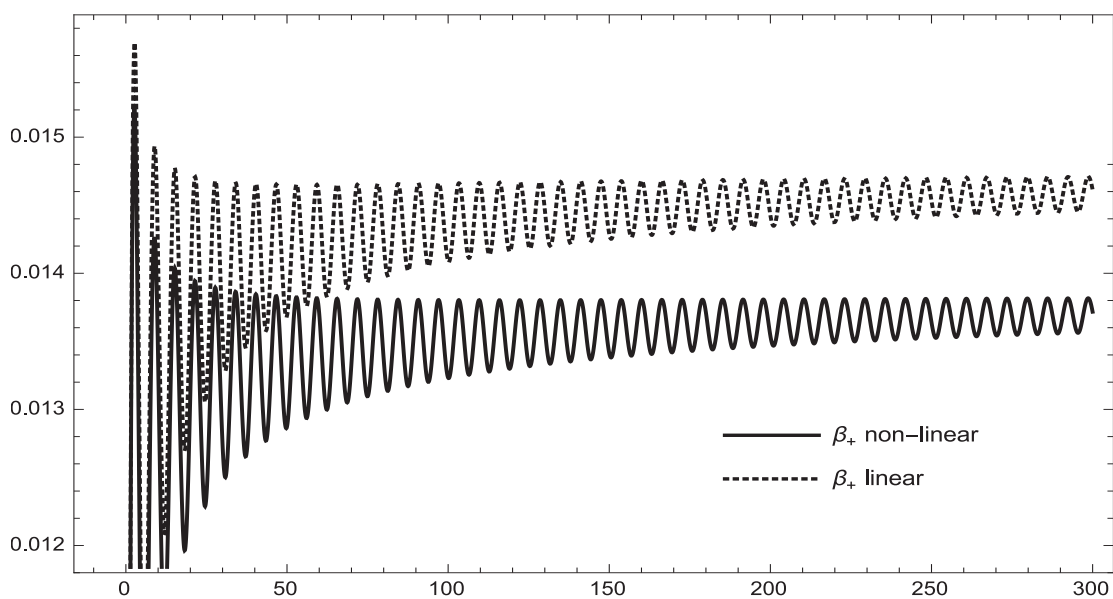
Figura 5.3: Para o caso de  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 1$ , os gráficos das soluções numéricas de  $\sigma(\tau)$  e das anisotropias são comparados, respectivamente, à solução isotrópica de radiação em Relatividade Geral e as soluções do sistema linearizado das anisotropias em torno desta mesma solução isotrópica.



(a) soluções para  $\sigma$ 

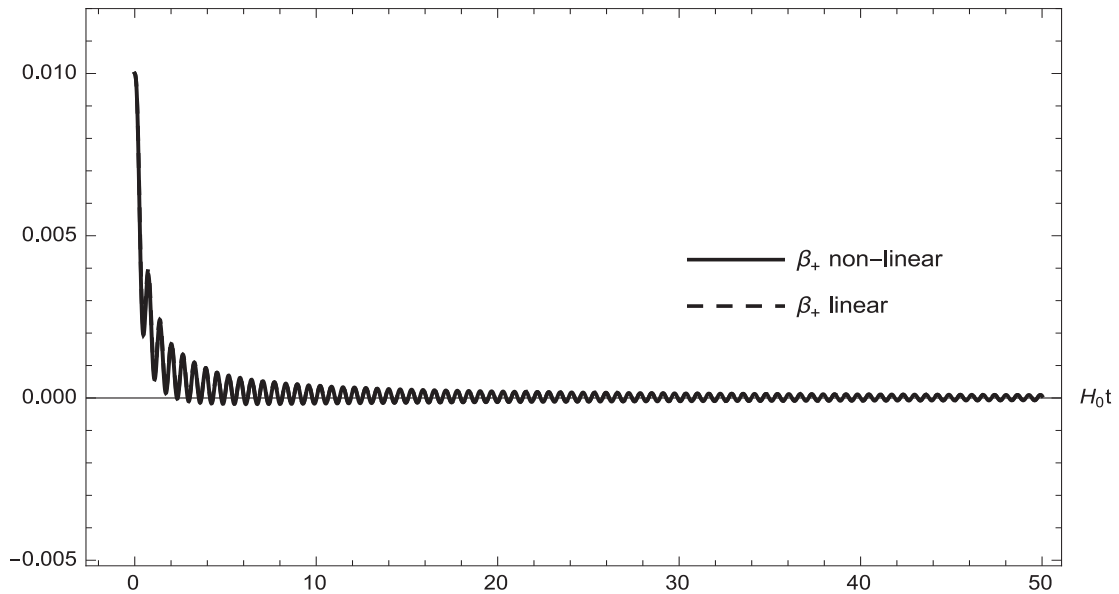
(b) anisotropias

Figura 5.4: Os mesmos gráficos como na Fig. 5.3, porém com  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 100$ . Qualitativamente, pode-se observar uma mudança devido a escolha maior para o coeficiente do termo  $R^2$  da ação, a qual é típica da inflação de Starobinsky [74, 80].

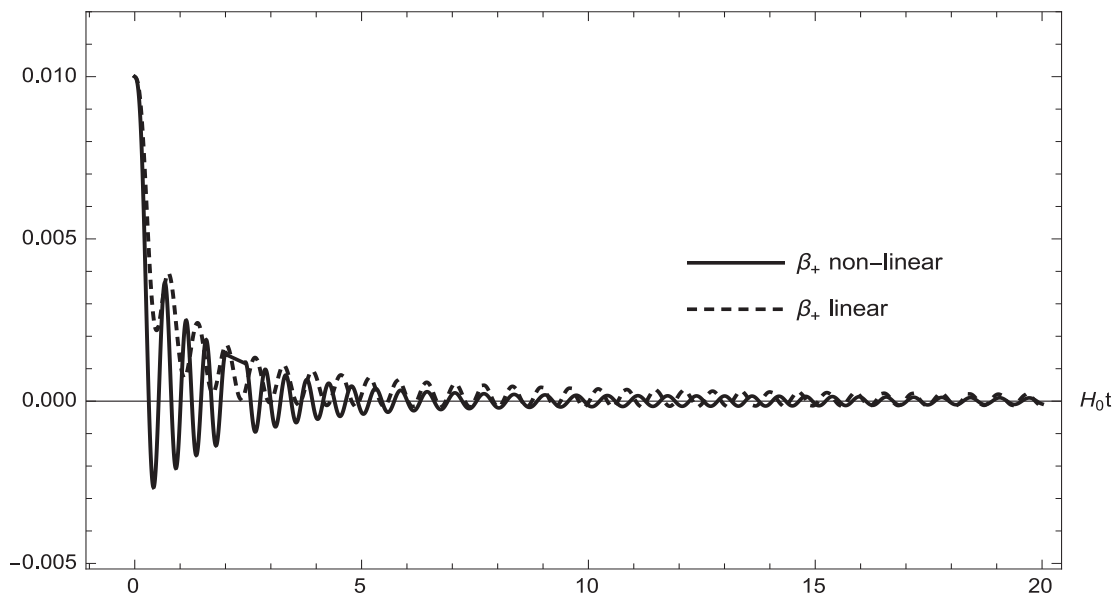
(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

Figura 5.5: Mesmos gráficos, porém com  $a_1 = -100$  e  $a_2 = 1$ . Há isotropização caracterizada por um regime oscilatório e amortecido para as anisotropias devido à diminuição do coeficiente  $a_1$ .



(a)



(b)

Figura 5.6: Gráficos da primeira derivada  $\dot{\beta}_+$  com os valores de (a)  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 1$ , (b)  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 100$ . Em (a), a primeira derivada das anisotropias é essencialmente a mesma para ambos os casos linear e não linear. Em (b), pode-se observar qualitativamente uma mudança devido a escolha maior para o coeficiente do termo  $R^2$  da ação, a qual é típica da inflação de Starobinsky [74, 80].

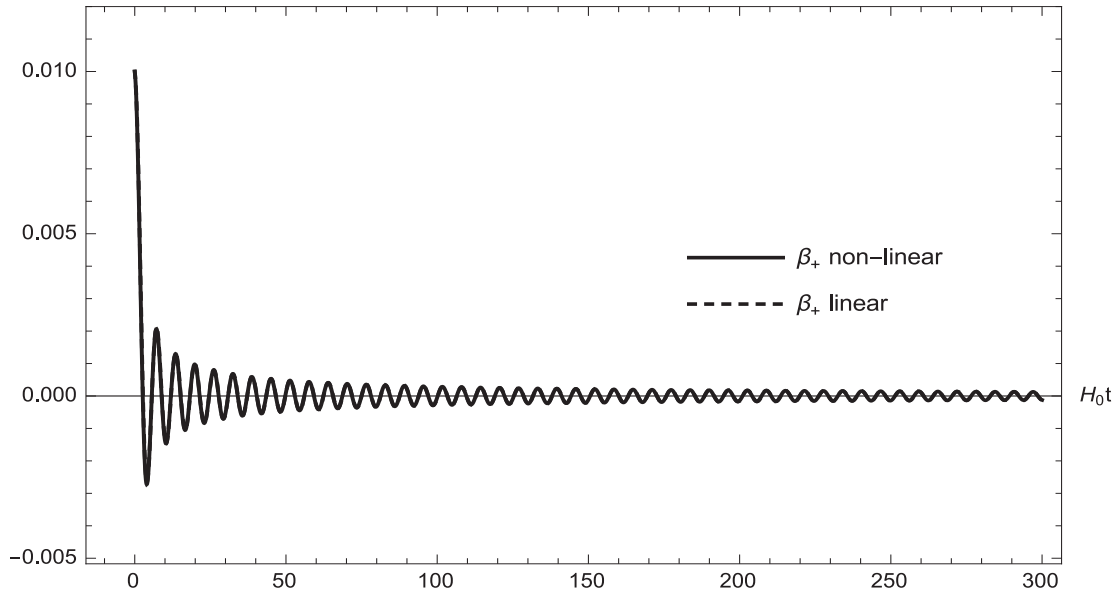
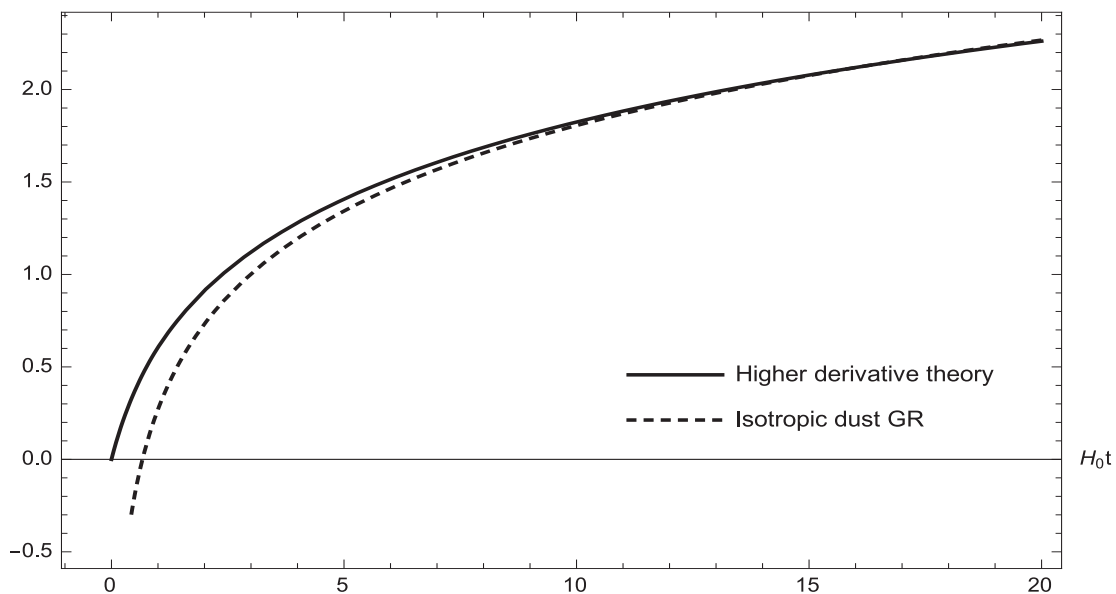
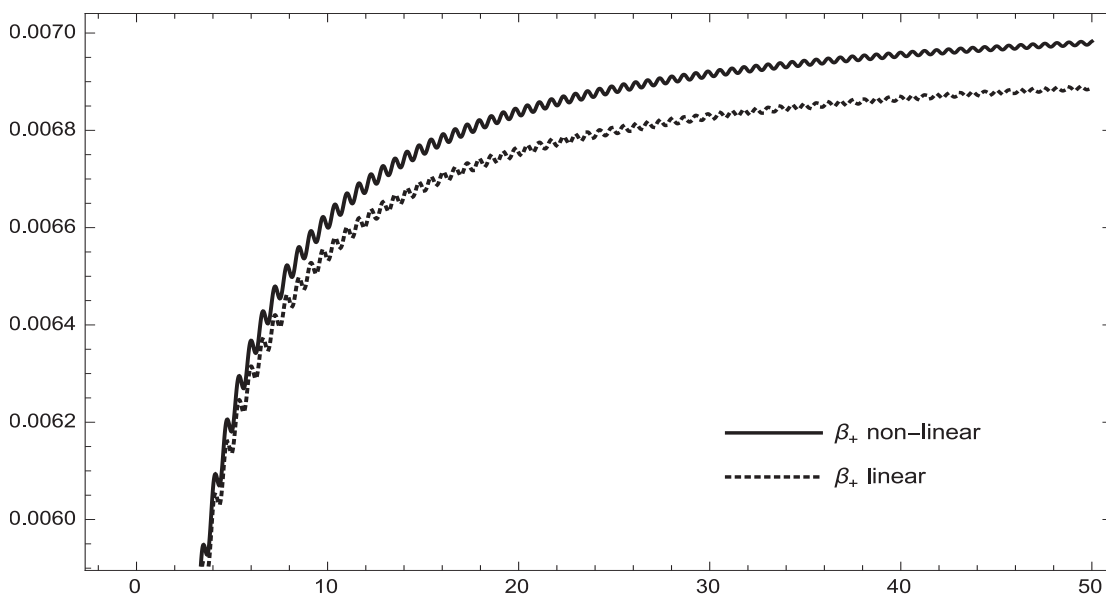


Figura 5.7: Gráfico da primeira derivada  $\dot{\beta}_+$  com os valores de  $a_1 = -100$  e  $a_2 = 1$ .

Assim como o gráfico da Fig. 5.6b, a primeira derivada também tende a zero e o valor de  $a_1 = -100$  mostra uma mudança consistindo em oscilações com amplitudes iniciais maiores do que no caso de  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 1$ . Tal mudança é esperada, pois valores maiores dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  dos termos com derivadas superiores da ação fazem com que estes termos tenham contribuições maiores no início.

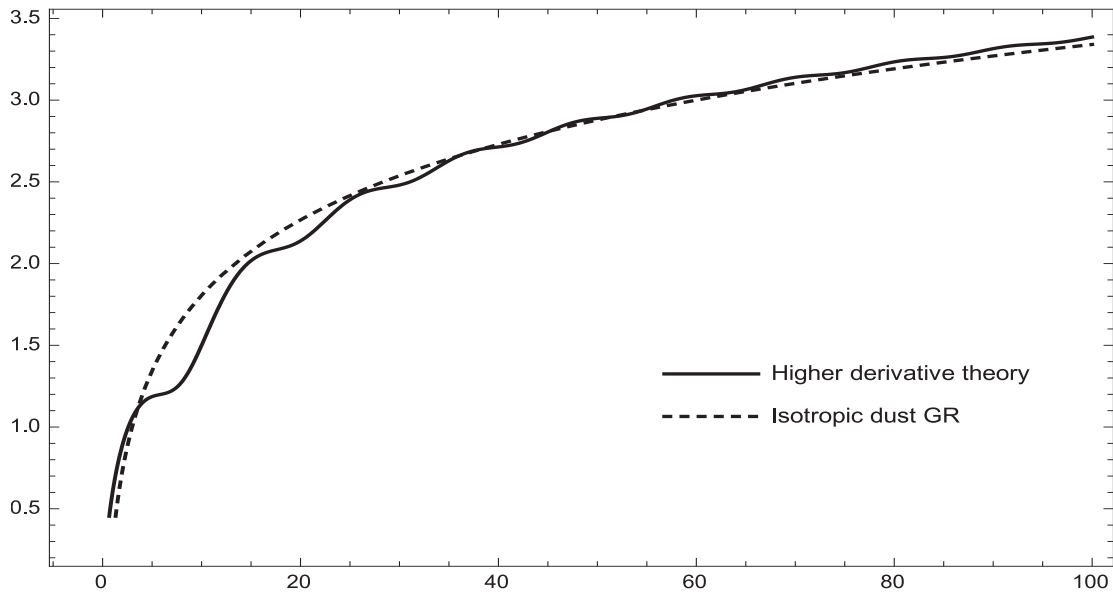
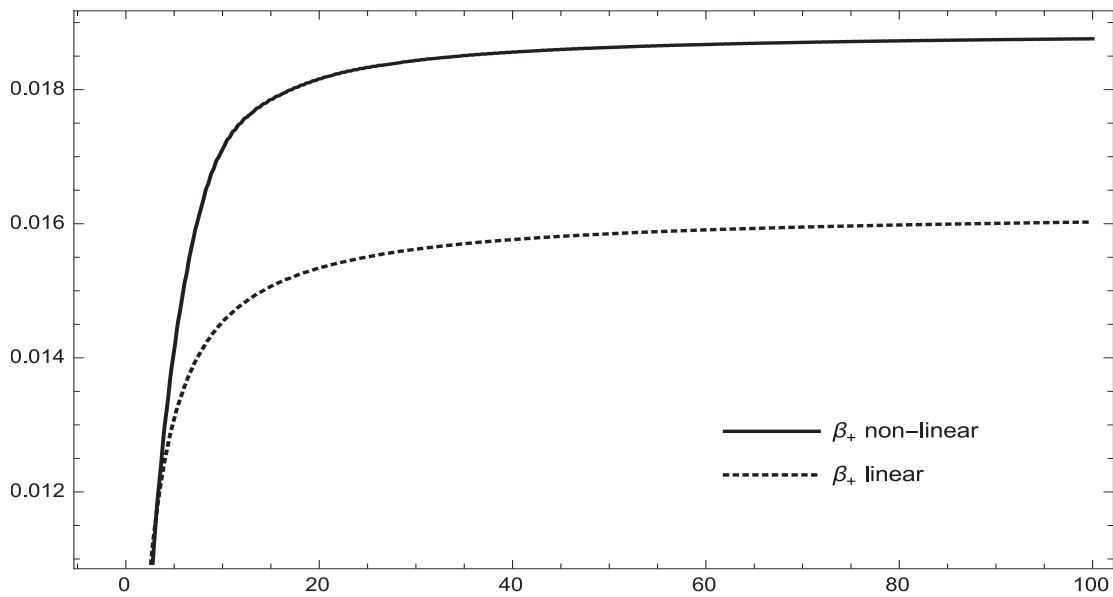
Porém, enquanto que os gráficos da primeira derivada nos casos linear e não linear são essencialmente os mesmos para ambos os valores  $a_1 = -1$  e  $a_1 = -100$ , a ponto de que parecem até mesmo coincidirem, os gráficos para os casos linear e não linear para  $a_2 = 100$  na Fig. (5.6) b mostram uma pequena mudança devido a escolha maior para o coeficiente do termo  $R^2$  da ação. Tal mudança sugere que  $a_2$  desempenha um papel relevante na comparação entre os regimes linear e não linear quanto à rapidez com a qual as anisotropias decrescem.

Para os casos de poeira e constante cosmológica, o comportamento da primeira derivada das anisotropias é semelhante ao caso de radiação. Por isso, restringimos apenas a apresentar o caso de radiação para a primeira derivada.

(a) soluções para  $\sigma$ 

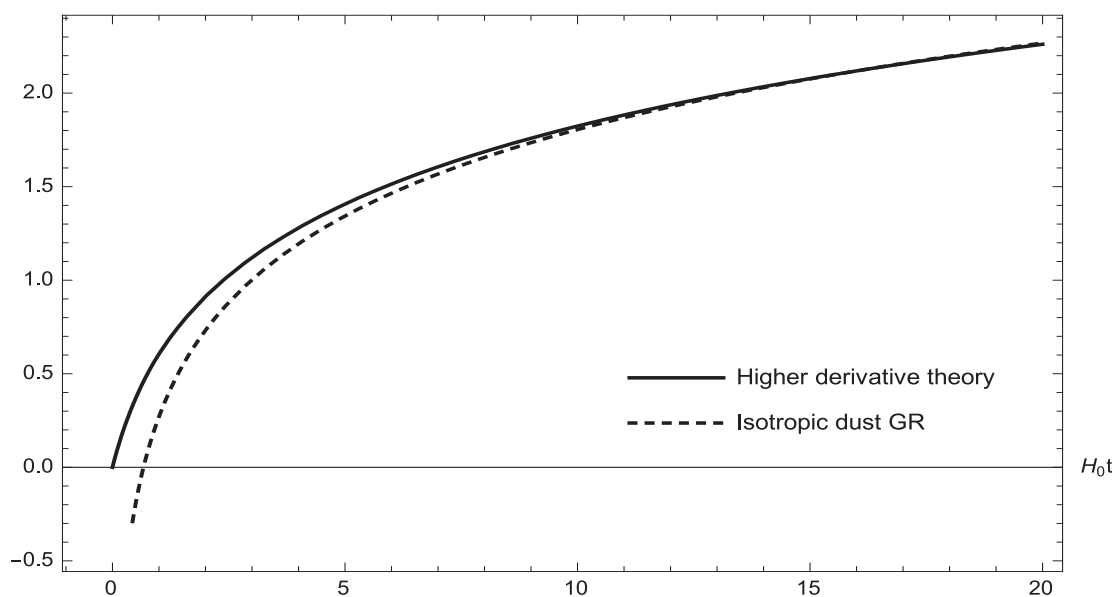
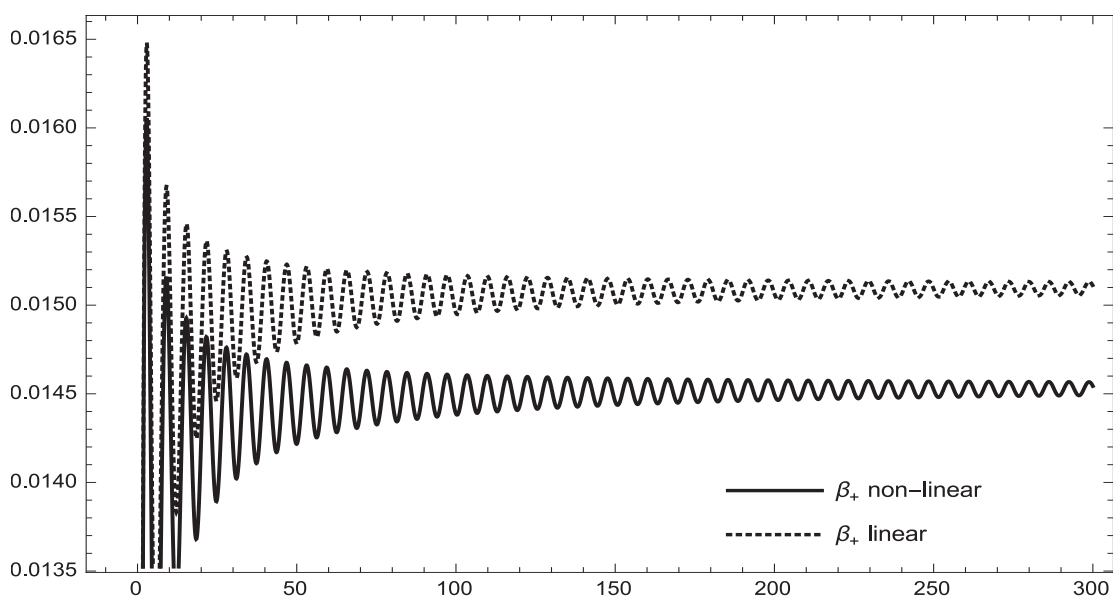
(b) anisotropias

Figura 5.8: Gráficos correspondentes aos valores  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 1$  com o fundo de universo dominado por poeira em Relatividade Geral.

(a) soluções para  $\sigma$ 

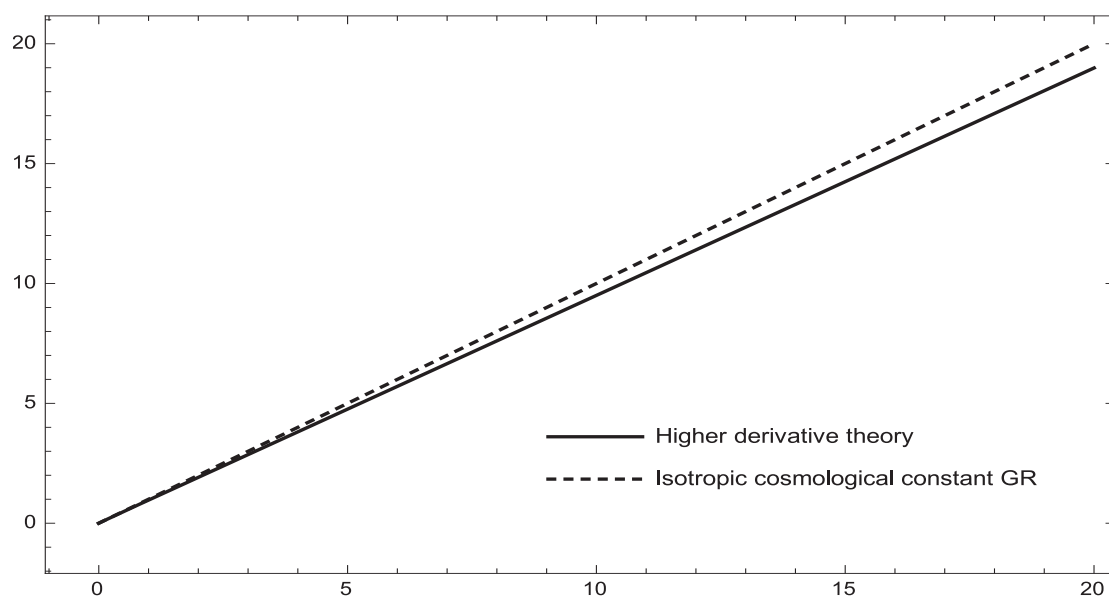
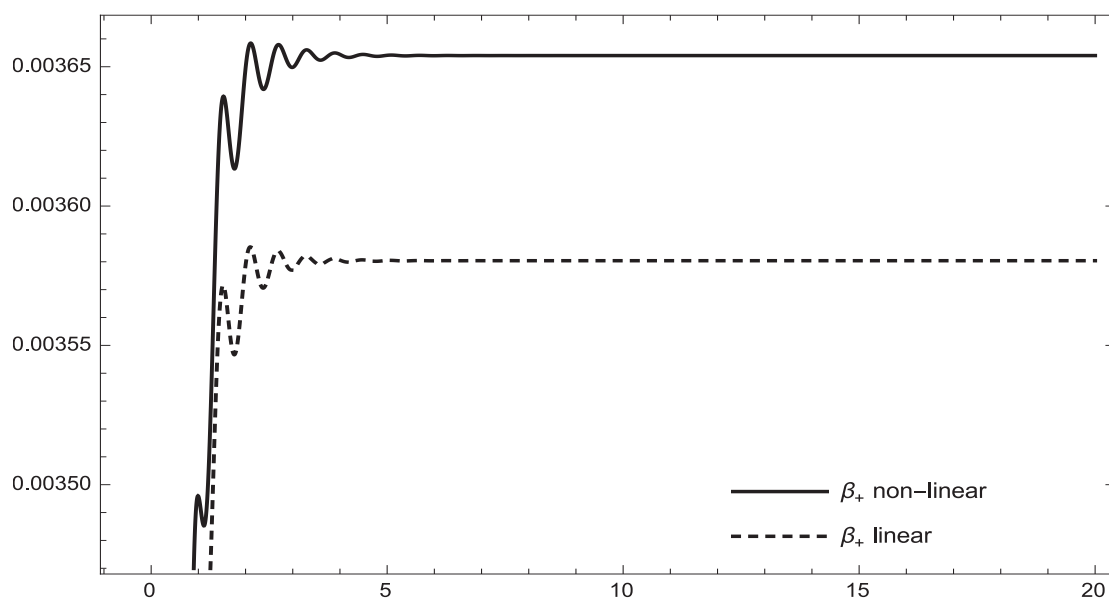
(b) anisotropias

Figura 5.9: Gráficos equivalente aos da Fig. 5.8, porém com  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 100$ , ilustrando o efeito do aumento do coeficiente do termo  $R^2$  na inflação de Starobinsky. O fundo é dominado por poeira.

(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

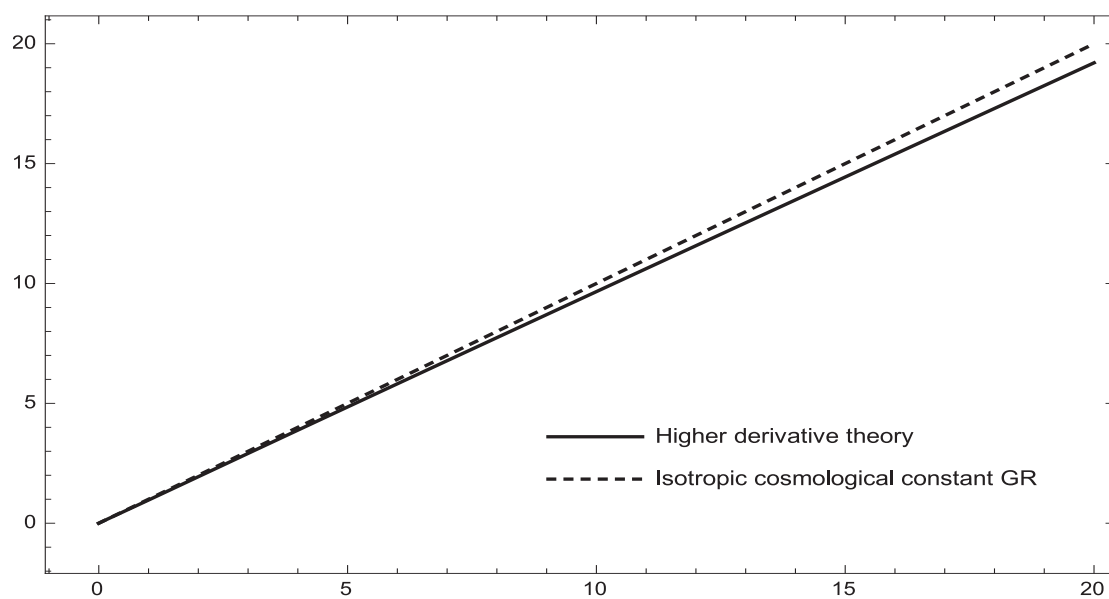
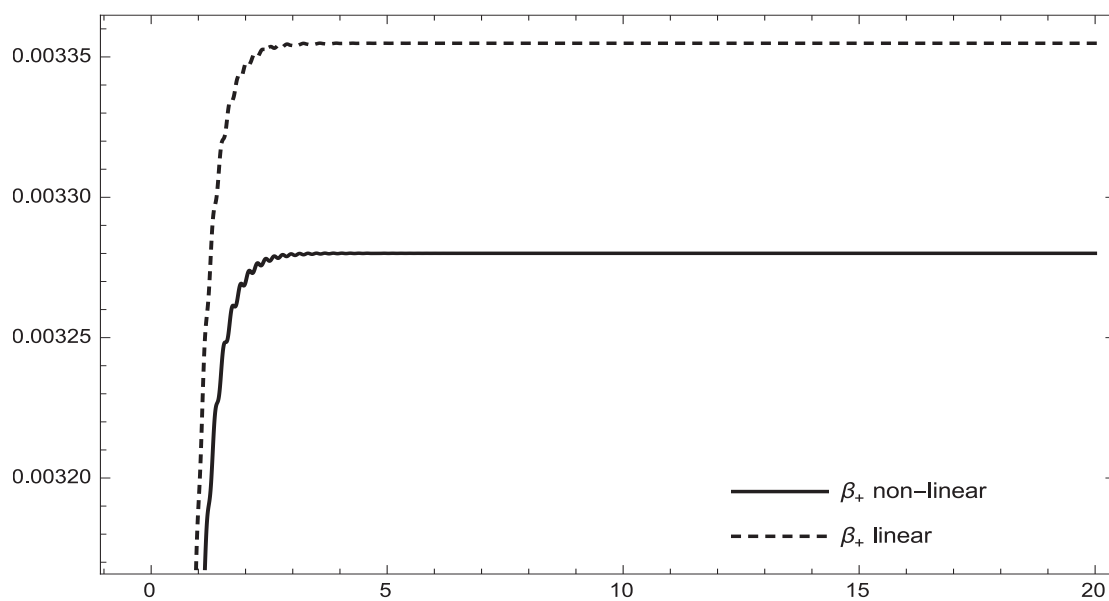
Figura 5.10: Mesmo caso da Fig. 5.8, porém com  $a_1 = -100$  e  $a_2 = 1$ .

(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

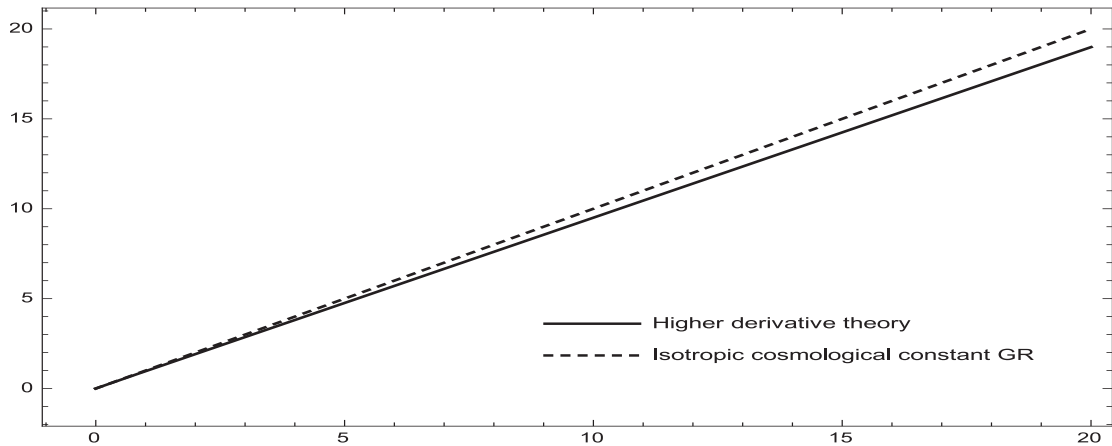
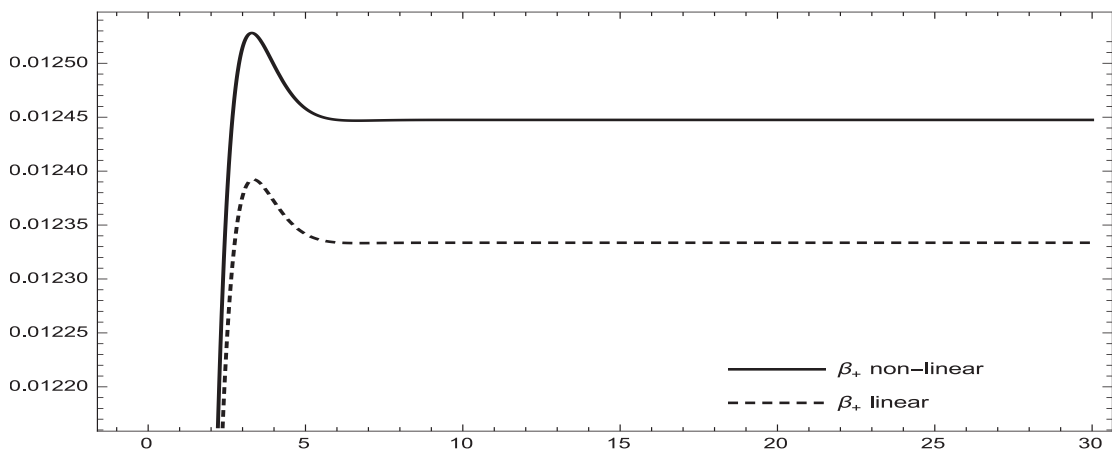
Figura 5.11: Gráficos para  $a_1 = -1$  and  $a_2 = 1$  para fundo isotrópico de constante cosmológica em Relatividade Geral



(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

Figura 5.12: Mesmo caso da Fig. 5.11, porém com os valores  $a_1 = -1$  and  $a_2 = 100$ .

(a) soluções para  $\sigma$ 

(b) anisotropias

Figura 5.13: Mesmo caso da Fig. 5.11, porém com os valores  $a_1 = -100$  and  $a_2 = 1$ .

Para os valores de  $a_1 = -100$ , pode-se notar que os gráficos mostram um comportamento do tipo oscilatório e amortecido para as anisotropias, principalmente para os casos de radiação e poeira. A razão de tal comportamento pode ser inferida da seguinte forma: as equações dinâmicas satisfeitas pelas anisotropias, sejam elas não lineares, Eq. (5.12), ou lineares, Eq. (5.26), contém apenas derivadas das anisotropias com as derivadas de terceira e quarta ordem com coeficientes envolvendo  $a_1$ . Desse modo, para pequenos valores de  $-a_1$  os termos de terceira e quarta derivadas não contribuem significativamente, enquanto que no caso oposto, sim. Esta situação é análoga à de um oscilador harmônico amortecido

quando a massa, a qual é o coeficiente do termo de maior derivada temporal (neste caso, a segunda) é pequena comparada ao coeficiente de amortecimento.

Concluimos este capítulo frisando que outras condições iniciais para as anisotropias foram testadas e os resultados mostraram-se qualitativamente os mesmos quando comparados às soluções apresentadas nesta seção. Portanto, dois resultados podem ser inferidos. Primeiro, há uma correspondência qualitativa entre o modelo de Bianchi linear e a dinâmica de ondas gravitacionais. Segundo, também há uma boa correspondência entre a dinâmica a nível linear e não linear (não perturbativo).

---

## Conclusões e perspectivas

---

*“Não adianta nem tentar me esquecer.”*

**Roberto Carlos, “Detalhes”, 1971**

*“And in the end the love you take is equal to the love you make.”*

**Lennon/McCartney, “The End”, Abbey Road, setembro de 1969**

Passamos agora às conclusões e perspectivas para os temas e resultados apresentados nesta tese. O grande tema norteador foi a questão de espaços homogêneos tridimensionais e anisotrópicos na evolução do universo primordial e na estabilidade não perturbativa de soluções clássicas em uma teoria com derivadas superiores da métrica. Como exemplo mais simples destes espaços, a métrica do tipo Bianchi I foi escolhida para a implementação matemática dos conceitos físicos envolvidos.

Usamos o modelo do RRG, cuja equação de estado interpola entre os regimes da evolução do universo dominados por radiação e matéria não relativística (bariônica e escura), aplicado à dinâmica de um universo primordial do tipo Bianchi I. Assim como nos regimes dominados apenas por radiação ou poeira, o caso de somente RRG também possui um singularidade inicial do tipo Kasner. Obtivemos os resultados originais:

- Para tempos suficientemente distantes da singularidade inicial, a teoria gravitacional baseada na ação de Einstein-Hilbert conduz a um mecanismo de isotropização com o RRG, semelhante a ambos os regimes de radiação e poeira e dependendo do valor do parâmetro do aquecimento;

- Além desse resultado, também foi possível apresentar uma nova dedução da equação de estado do RRG por meio de uma proposta de uma função distribuição para o mesmo. Recentemente, a função distribuição do RRG foi usada em [81];

Uma aplicação potencialmente interessante dos resultados da tese talvez seja ao estudo, ainda não suficientemente bem explorado, de perturbações cósmicas, sejam estas da densidade ou métricas, em um universo anisotrópico contendo RRG ou também incluindo interação com radiação [82]. Uma vez que este se constitui de um problema tecnicamente complicado, talvez seja útil uma descrição que possua os requisitos de simplicidade e tratar-se também de um modelo realístico para o conteúdo de matéria no universo primordial nas vizinhanças do intervalo de tempo de quando ocorre a isotropização; para o conteúdo de matéria, obedecendo a tais requisitos, o RRG pode ser conveniente como um modelo útil para a dinâmica das anisotropias no universo primordial. Além disso, o formalismo desenvolvido nesta tese pode ser útil para a descrição de uma fase Bianchi I entre duas fases de um universo do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) quando ocorre a transição da dominância de um fluido por outro, como proposto em [83,84]. Neste caso, o conteúdo de matéria inicialmente dominante é suposto quente e posteriormente dá lugar a predominância de um conteúdo frio. Portanto o RRG pode servir como o conteúdo de matéria para uma descrição suave e eficiente desta transição. Por fim, na transição entre os dois regimes, podem ser esperadas instabilidades, como propostas em [84] e o RRG poderia configurar como o conteúdo de matéria do fundo cosmológico.

Posteriormente, foi feita uma análise da dependência temporal das anisotropias para a métrica do tipo Bianchi I em uma teoria métrica de gravitação de quartas derivadas. Vimos que neste contexto, Bianchi I compartilha propriedades similares com ondas gravitacionais, mais especificamente, uma onda de frequência igual a zero. Devido a estas similaridades, foi possível analisar se há equivalência, ao menos qualitativa, entre perturbações de soluções clássicas e de baixas energias a nível linear e no regime não perturbativo. Obtivemos os

seguintes resultados originais:

- As equações dinâmicas gerais e as lineares foram numericamente integradas para alguns fundos cosmológicos e escolhas dos parâmetros livres  $a_1$  e  $a_2$  da teoria de interesse. Em todos os casos, para as condições iniciais escolhidas, foram observados que, qualitativamente, não há diferença entre os dois regimes (linear e não linear), concordando com os resultados matemáticos padrões concernentes à relação entre estes dois regimes e também com o esperado de considerações sobre ondas gravitacionais em [23, 31]. Logo, podemos inferir a ausência de instabilidades crescentes para ondas gravitacionais, mesmo no regime não perturbativo.

- Para os casos de soluções de fundo dominado por radiação e poeira, os resultados confirmam que para os valores  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 1$  as soluções numéricas para  $\sigma(\tau)$  assintoticamente tendem às soluções isotrópicas com os mesmos conteúdos de matéria. Para um valor maior de  $a_2$  ( $a_2 = 100$ ), foi notado um desvio entre o regime linear e o não perturbativo, o que deve ser esperado devido ao valor estimado de  $a_2 \approx 5 \times 10^8$  requerido para o modelo de inflação de Starobinsky [74, 80].

Uma primeira perspectiva em direção à mesma abordagem do paralelo entre Bianchi I e ondas gravitacionais é a inclusão de fundos cosmológicos com grandes curvaturas, para os quais os efeitos das altas derivadas sobre o fundo devem ser levados em conta, embora possamos de antemão inferir que grandes valores de  $a_2$  acarretam em grandes valores iniciais do parâmetro de Hubble,  $H_0$ , em primeira aproximação. Por fim, uma segunda perspectiva seria investigar se a mesma similaridade de Bianchi I e ondas gravitacionais também pode ser observada para métricas que dependam, além de uma coordenada do tipo-tempo, de uma ou mais coordenadas do tipo-espaco. Como exemplo, podemos citar a métrica de Lemaitre-Tolman-Bondi [53, 85], a qual depende de duas coordenadas sendo, respectivamente, dos tipo tempo e espaco. A principal vantagem dessa segunda perspectiva reside na possibilidade de estender a abordagem com frequência igual a zero à outra com termos que tragam similaridades com o vetor de onda do caso de ondas gravitacionais e, portanto, com frequência diferente de zero.

---

## Bibliografia

---

- [1] V. Mukhanov; *Physical Foundations of Cosmology*, (Cambridge University Press, Oxford - 2005).
- [2] G.F.R Ellis & M.A.H MacCallum, *Relativistic Cosmology*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2012).
- [3] K.S. Stelle, *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. **D16** (1977) 953.
- [4] N.D Birrell & P.C.W Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1984).
- [5] L. Parker & D. J. Toms, *Quantum field theory in curved spacetime: Quantized fields and gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2009)
- [6] K.C. Jacobs, *Bianchi Type I cosmological models*, Thesis.
- [7] G.F.R. Ellis & M.A.H. MacCallum, *A Class of homogeneous cosmological models*, Commun. Math. Phys. **12** (1969) 108.
- [8] O. Groen and S. Hervik, *Einstein's general theory of relativity: With modern applications in cosmology*, (Springer, New York, 2007).

- [9] K.C. Jacobs, *Cosmologies of Bianchi Type I with a Uniform Magnetic Field*, *Astrophys. J.* **155** (1969) 379.
- [10] K.S. Thorne, *Primordial Element Formation, Primordial Magnetic Fields, and the Isotropy of the Universe*, *Astrophys. J.* **148** (1967) 51.
- [11] C.W. Misner, *The Isotropy of the universe*, *Astrophys. J.* **151** (1968) 431.
- [12] V.N. Lukash, I. D. Novikov, A. A. Starobinsky & Y. B. Zeldovich, *Quantum Effects and Evolution of Cosmological Models*, *Nuovo Cim. B* **35** (1976) 293.
- [13] B. L. Hu & L. Parker, *Anisotropy Damping Through Quantum Effects in the Early Universe*, *Phys. Rev. D* **17**, 933 (1978) Erratum: [*Phys. Rev. D* **17**, 3292 (1978)].
- [14] A.G. Riess *et al.* [Supernova Search Team], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant* *Astron. J.* **116** (1998) 1009, arXiv: astro-ph/9805201.
- [15] L. Bergström; *Nonbaryonic dark matter: Observational evidence and detection methods*, *Rept. Prog. Phys.* **63** (2000) 793, arXiv: hep-ph/0002126.
- [16] S. A. Bludman, and M.A. Ruderman, *Induced Cosmological Constant Expected above the Phase Transition Restoring the Broken Symmetry*, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 255.
- [17] A.D. Sakharov, *The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49** no.1, 345 [*Sov. Phys. JETP* **22** (1966) 241].
- [18] G. de Berredo-Peixoto, I. L. Shapiro & F. Sobreira, *Simple cosmological model with relativistic gas*, *Mod. Phys. Lett. A* **20** (2005) 2723, arXiv: gr-qc/0412050.
- [19] J. C. Fabris, I. L. Shapiro & F. Sobreira, *DM particles: how warm they can be?* *JCAP* **0902** (2009) 001, arXiv:0806.1969.
- [20] L. G. Medeiros, *Cosmological analytic solutions with reduced relativistic gas*, *Mod. Phys. Lett. A* **27** (2012) 1250194, arXiv:1209.4930.



- [21] W. S. Hipolito-Ricaldi, R. F. vom Marttens, J. C. Fabris, I. L. Shapiro & L. Casarini, *On general features of warm dark matter with reduced relativistic gas*, arXiv:1706.08595.
- [22] J.C. Fabris, I.L. Shapiro & A.M. Velasquez-Toribio, *Testing dark matter warmness and quantity via the reduced relativistic gas model*, Phys. Rev. D **85** (2012) 023506, arXiv:1105.2275.
- [23] F. de O. Salles & I.L. Shapiro, *Do we have unitary and (super)renormalizable quantum gravity below the Planck scale?*, Phys. Rev. **D89**, 084054 (2014), **90**, 129903 (2014) [Erratum], arXiv:1401.4583.
- [24] G. Dvali, S. Folkerts and C. Germani, *Physics of Trans-Planckian Gravity*, Phys. Rev. **D84** (2011) 024039, arXiv:1006.0984. G. Dvali and C. Gomez, *Black holes quantum N-portrait*, Fortschr. Phys. **63** (2013) 742, arXiv:1112.3359.
- [25] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, F. de O. Salles & I.L. Shapiro, *Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections*, JCAP **02** (2012) 019, arXiv:1112.5202.
- [26] I.L. Shapiro, A.M. Pelinson & F. de O. Salles, *Gravitational waves and perspectives for quantum gravity*, Mod. Phys. Lett. **A29** (2014) 1430034, arXiv:1410.2581.
- [27] A.A. Starobinsky, *Evolution of Small Excitation of Isotropic Cosmological Models With One Loop Quantum Gravitation Corrections*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 460.
- [28] J.C.Fabris, A.M.Pelinson & I.L.Shapiro, *On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. **B597** (2001) 539.
- [29] S.W. Hawking, T. Hertog & H.S. Real, *Trace anomaly driven inflation*, Phys. Rev. **D63** (2001) 083504.
- [30] R.P. Woodard, *Avoiding dark energy with 1/r modifications of gravity*, Lect. Notes Phys. **720** (2007) 403, arXiv: astro-ph/0601672.

- [31] P. Peter, F.D.O. Salles & I.L. Shapiro, *On the ghost-induced instability on de Sitter background*, Phys. Rev. **D97** (2018) 064044, arXiv:1801.00063.
- [32] J.D. Barrow & S. Hervik, *On the evolution of universes in quadratic theories of gravity*, Phys. Rev. **D74** (2006) 124017, arXiv: gr-qc/0610013.
- [33] A. Toporensky & D. Müller, *On stability of the Kasner solution in quadratic gravity*, Gen. Rel. Grav. **49** (2017) 8, arXiv:1603.02851.
- [34] D. Muller, A. Ricciardone, A. A. Starobinsky & A. Toporensky, *Anisotropic cosmological solutions in  $R + R^2$  gravity*, Eur. Phys. J. **C78** (2018) 311, arXiv:1710.08753.
- [35] H.Stephani, D.MacCallum, D.Kramer, C.Hoenselaers & E.Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2003).
- [36] S.W Hawking & G.F.R Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1973).
- [37] R.M Wald, *General Relativity*, (Chicago University Press, Chicago - 1984).
- [38] L.D Landau & E.M Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, Volume II*, (Pergamon Press, Oxford - 1975).
- [39] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley and Sons, New York - 1972).
- [40] C.W Misner, K.S Thorne & J.A Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman, San Francisco - 1973).
- [41] S.Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, (UK: Clarendon, Oxford - 1985).
- [42] R.Penrose & W.Rindler, *Spinors and Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2011).
- [43] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, (UK: Hilger, Bristol - 1990).
- [44] B.F Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1980).

- [45] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, (Oxford University Press, Oxford - 1992).
- [46] T. Ortín, *Gravity and Strings*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2010).
- [47] B. DeWitt, *Bryce DeWitt’s Lectures on Gravitation*, (Springer - 2011).
- [48] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations*, (Oxford University Press, Oxford - 2009).
- [49] E. M. Lifshitz & I. M. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv. Phys. **12** (1963) 185.
- [50] Y. Choquet-Bruhat & C. DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics, Volume I*, (North Holland, Amsterdam - 1996).
- [51] M.P Ryan & L.C Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, (Princeton University Press, Princeton - 1975).
- [52] Editado por J. Wainwright & G.R.F Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1997).
- [53] J. Plebanski & A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, (Cambridge University Press, New York - 2006).
- [54] L. Bianchi, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Ital. Sci. Mem. di Mat. **11** (1898) 267  
*On the Three-Dimensional Spaces Which Admit a Continuous Group of Motions*, General Relativity and Gravitation **33** (2001) 2171
- [55] C.W. Misner, *Mixmaster universe*, Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 1071.
- [56] V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology*, Adv. Phys. **19** (1970) 525.
- [57] V.A. Belinsky, I.M. Khalatnikov. and E.M. Lifshitz, *A General Solution of the Einstein Equations with a Time Singularity*, Adv. Phys. **31** (1982) 639.

- [58] L.D Landau & E.M Lifshitz, *Physical Kinetics, Course of Theoretical Physics, Volume X*, (Pergamon Press - 1981).
- [59] R. Hakim, *Introduction to Relativistic Statistical Mechanics*, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, 2011).
- [60] W. F. Kao and U. L. Pen, *Generalized Friedmann-Robertson-Walker metric and redundancy in the generalized Einstein equations*, Phys. Rev. D **44** (1991) 3974.
- [61] Y. B. Zeldovich, *A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **160** (1972) 1.  
Y. B. Zeldovich, *The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations*, JETP **14** (1962) 1143.
- [62] E. Kasner, *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations*, Am. J. Math. **43** (1921) 217.
- [63] E. Schucking and O. Heckmann, *Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie*, Handbuch der Physik **53** (1959) 489.
- [64] T.S. Pereira, *Teoria inflacionária em universos anisotrópicos*, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 2008.
- [65] F. Jüttner, *Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie*, Ann. der Phys. **Bd 116** (1911) S. 145.
- [66] W. Pauli, *Theory of Relativity*, (Dover, 1981).
- [67] Y.B. Zeldovich and I.D. Novikov, *Relativistic Astrophysics. Vol. 2. The Structure And Evolution Of The Universe*, (Chicago University Press, 1983).
- [68] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2012).
- [69] M.V. Ostrogradsky, *Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres*, Mem. Acad. St. Petersburg, **6** (1850) 385.

- [70] R.P. Woodard, *Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability*, Scholarpedia **10** (2015) 32243, arXiv:1506.02210.
- [71] D.S. Gorbunov and V.A. Rubakov, *Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*, (World Scientific, 2011).
- [72] S. C. dos Reis and I.L. Shapiro, *Cosmic anisotropy with Reduced Relativistic Gas*, Eur. Phys. J. **C78** (2018) 145, arXiv:1712.03066.
- [73] T.V. Ruzmaikina & A.A. Ruzmaikin, *Quadratic corrections to the lagrangian density of the gravitational field and the singularity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57** (1970) 680 [Sov. Phys. JETP **30** (1970) 372].
- [74] A.A. Starobinsky, *A New type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. **B91** (1980) 99.
- [75] W.R. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, (Dover, New York, 2002).
- [76] M.W. Hirsch, R.L. Devaney and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, **60** (Academic press, 1974).
- [77] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. (New York: Wiley, 1978).
- [78] A. Salvio, *Metastability in Quadratic Gravity*, Phys. Rev. **D99** (2019) 103507. arXiv:1902.09557.
- [79] G. Cusin, F. de O. Salles and I.L. Shapiro, *Tensor instabilities at the end of the  $\Lambda$ CDM universe*. Phys. Rev. **D93** (2016) 044039 arXiv:1503.08059.
- [80] A.A. Starobinsky, *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially de-Sitter cosmology and the microwave background anisotropy*, Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.

- [81] G. Pordeus-da-Silva, R. C. Batista and L. G. Medeiros, *Theoretical foundations of the reduced relativistic gas in the cosmological perturbed context* JCAP **1906** (2019) 043. arXiv:1904.09904 .
- [82] J.C. Fabris, A.M. Velasquez-Toribio, W. Zimdahl, and I.L. Shapiro, *Interacting photon-baryon fluid, warm dark matter and the first acoustic peak*, Eur. Phys. J. **C74** (2014) 2968. arXiv:1312.1937.
- [83] G. L. Comer, P. Peter and N. Andersson, *Multi-fluid cosmology: An illustration of fundamental principles*, Phys. Rev. D **85**, 103006 (2012). arXiv:1111.5043.
- [84] G. L. Comer, P. Peter and N. Andersson, *Cosmological Two-stream Instability*, Phys. Lett. B **715**, 289 (2012). arXiv:1111.5607.
- [85] A. Krasiski, *Inhomogeneous cosmological models*, (Cambridge University Press, 1997).