UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juan Carlos Rios Suarez

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA CLASSES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DO TIPO KIRCHHOFF

Juiz de Fora

2022

Juan Carlos Rios Suarez

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA CLASSES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DO TIPO KIRCHHOFF

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rios Suarez, Juan Carlos.
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA CLASSES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DO TIPO KIRCHHOFF / Juan Carlos Rios Suarez. – 2022.
62 f.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. Equação tipo Kirchhoff. 2. Soluções positivas. 3. Multiplicidade de soluções. 4. Singularidade. 5. Métodos Variacionais I. Rodrigues Pereira, Fábio, orient. II. Título.

JUAN CARLOS RIOS SUARES

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA CLASSES DE PROBLEMAS CRÍTICOS DO TIPO KIRCHHOFF

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em 22 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 28/03/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Rodrigues Pereira**, **Professor(a)**, em 07/04/2022, às 09:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Augusto César dos Reis Costa**, **Usuário Externo**, em

12/04/2022, às 21:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando de Oliveira Faria**, **Professor(a)**, em 18/04/2022, às 11:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0723890** e o código CRC **AB044C61**.

Dedico este trabalho a minha mãe, Yolanda e minha irmã,
Milagros, que enchem minha vida de amor e alegria.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a minha mãe Yolanda, por todo o apoio, carinho e sempre acreditar em mim. A minha avó, a minha eterna gratidão por sua presença em todos os momentos da minha infância e adolescência, dando-me força, compreendendo-me e fortalecendo-me nas horas difíceis.

Dedico um agradecimento especial a meu orientador, professor Fábio Rodrigues Pereira, pela dedicação, paciência e, principalmente, pela disposição para me ajudar no que fosse preciso, sempre mantendo o bom humor mesmo nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos professores, Augusto César dos Reis Costa e Luiz Fernando de Oliveira Faria por aceitarem participar da minha banca examinadora.

Agradeço ao professor Eduard Toon por acreditar em meu potencial e me dar a oportunidade de cursar o mestrado.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível. Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

"A matemática não conhece raças ou fronteiras geográficas; para a matemática, o mundo cultural é um único país."

David Hilbert.

RESUMO

Este trabalho é baseado nos artigos [13] e [14].

No Capítulo 2, estudamos um problema do tipo Brézis-Nirenberg para a equação do tipo Kirchhoff em dimensão quatro

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2dx)\Delta u = \mu u^3 + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é um domínio limitado, $a, b \geq 0$ com $a+b > 0$ e $\mu, \lambda > 0$. Nós estudamos um resultado de não-existência e um resultado de existência de soluções positivas. Além disso, estudamos um resultado de compacidade global que foi usado para obter k pares de soluções distintas, em que $k \in \mathbb{Z}^+$. No Capítulo 3, estudamos a existência e unicidade de soluções positivas para uma classe de problemas do tipo Kirchhoff com singularidade

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2dx)\Delta u = f(x)u^{-\gamma} - \lambda u^p, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado, $0 < \gamma < 1$, $\lambda \geq 0$, $0 < p \leq 2^* - 1$ e $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ são parâmetros. A função $f \in L^s(\Omega)$, em que $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$, e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*]$. A principal ferramenta utilizada é o método variacional.

Palavras-chave: Equação tipo Kirchhoff, Soluções positivas, Multiplicidade de soluções, Singularidade, Métodos Variacionais.

ABSTRACT

This work is based on the articles [13] e [14].

In Chapter 2, we study a Brézis-Nirenberg type problem for Kirchhoff-type equation in dimension four

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \mu u^3 + \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ is a bounded domain, $a, b \geq 0$ with $a+b>0$ and $\mu, \lambda > 0$. We study a non-existence result and an existence result of positive solutions. Furthermore, we study a result of global compactness that was used to obtain k pairs of distinct solutions, where $k \in \mathbb{Z}^+$. In Chapter 3 we study the existence and uniqueness of positive solutions for a class of Kirchhoff-type problems with singularity

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = f(x)u^{-\gamma} - \lambda u^p, & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ is a bounded domain, $0 < \gamma < 1$, $\lambda \geq 0$, $0 < p \leq 2^* - 1$ e $a, b \geq 0$, $a+b>0$ are parameters. The function $f \in L^s(\Omega)$, where $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, with $f(x) > 0$ for almost every $x \in \Omega$, and $2^* = \frac{2N}{N-2}$ denotes the critical Sobolev exponent for the embedding $H_0^1(\Omega)$ into $L^q(\Omega)$ for every $q \in [1, 2^*]$. The main tool used is the variational method.

Keywords: Kirchhoff-type equation, Positive solutions, Multiplicity of solutions, Singularity, Variational methods.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

(PS)	Condição de Palais-Smale.
$(PS)_c$	Condição de Palais-Smale no nível c.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Subconjunto aberto não-vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
A^c	Complementar do conjunto A.
$\|A\|$	Medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.
$Im(T)$	Imagem do operador T.
$B_R(x_0)$	Bola centrada no ponto x_0 de raio R.
∇u	$= \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ é o gradiente de u.
Δu	$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano de u.
$supp(f)$	Suporte da função f.
$D^\alpha u$	$= \dfrac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,,\ \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a derivada de ordem $\|\alpha\|$ de u.
$\\|\cdot\\|_0$	Norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$\\|\cdot\\|_{C^1}$	Norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em Ω.
$C_o^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_o^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita $$\\|u\\|_{L^p} = \\|u\\|_p = \left(\int_\Omega \|u\|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $supess_{x\in\Omega}\|u(x)\| < \infty$ com norma $$\\|u\\|_{L^\infty} = \\|u\\|_\infty = \inf\{C > 0 : \|u(x)\| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaços de Sobolev.
$H^k(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ — Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\ dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{H_0^1} = \|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$H^{-1}(\Omega)$ — Espaço dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

$U \hookrightarrow V$ — Imersão contínua de U em V.

$U \overset{c}{\hookrightarrow} V$ — ou $U \hookrightarrow\hookrightarrow V$, é a imersão compacta de U em V.

$p^* = \dfrac{np}{n-p}$ — Expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Em particular, é quando $p = 2$, temos que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),\ 1 \leqslant s \leqslant 2^*$$

X' — Espaço dual topológico de X.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — Produto interno definido em X.

$\rightarrow$ — Convergência forte.

$\rightharpoonup$ — Convergência fraca.

q.t.p. — Quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$f = O(g)$ — quando $x \to x_0$, significa que existe uma constante C tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, para todo x suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ — quando $x \to x_0$, significa que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, aplicamos métodos variacionais para estudar a existência e unicidade de soluções dos chamados "Problemas do tipo Kirchhoff" que recentemente têm recebido considerável atenção.

Consideramos uma classe de problemas do tipo

$$\begin{cases} -M(\|u\|)\Delta u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas, onde M é denominada a *função de Kirchhoff*, e Δ é o operador laplaciano com condições de Dirichlet na fronteira. Além disso, $\|\cdot\|$ é a norma usual no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A equação (1.1) é conhecida como um problema do tipo Kirchhoff, pois está relacionada à versão estacionária da equação de Kirchhoff

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla_x u|^2 \, dx\right)\Delta_x u = f(x,t), \tag{1.2}$$

em que $M(s) = as + b$, com $a, b > 0$, a qual foi proposta por Kirchhoff [11] em 1883. Esta equação estende o problema clássico da onda de D'Alambert, porque ela descreve a vibração de uma corda elástica levando em consideração a mudança no comprimento da mesma durante o movimento.

A equação (1.2) só veio receber grande atenção após a publicação do artigo de J. Lions [16]. Em seu trabalho, Lions foi o primeiro a usar argumentos de Análise Funcional não-linear para atacar problemas não-locais do tipo Kirchhoff.

A classe de problemas do tipo (1.1), em particular os problemas que iremos trabalhar nessa dissertação são freqüentemente chamados de não locais devido à presença do termo $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u$, o que implica que a equação não é uma identidade pontual.

Devido ao fato de serem problemas não-locais, os problemas do tipo Kirchhoff são matematicamente mais difíceis de trabalhar, motivando assim, o seu estudo.

Dividimos a apresentação dessa dissertação da seguinte forma:

O **Capítulo 2**, intitulado *Resultados de Não Existência e Existência de soluções para um problema do tipo Kirchhoff em dimensão quatro*, considera a equação

$$\begin{cases} -(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado, $a, b \geq 0$ com $a + b > 0$ e $\mu, \lambda > 0$. O número $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, 2^*]$.

Quando $a = 1,\ b = 0$, a equação (1.3) se reduz a uma equação elíptica semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Lembre-se que o problema clássico de autovalor para o laplaciano, com condição de fronteira de Dirichlet, consiste em encontrar os valores de λ tais que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

admite soluções não triviais. Para esse problema, sabemos que existe uma sequência $\{\lambda_j\}$ de autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots$ tais que $\lambda_j \to \infty$, quando $j \to \infty$.

Em 1983, Brézis e Nirenberg em seu famoso artigo (veja [4]) consideraram a equação (1.4) com $\mu \equiv 1$. Utilizando os métodos variacionais, quando $N = 3$ e Ω é uma bola, eles obtiveram que a equação (1.4) tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1)$, em que λ_1 denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ com condição de Dirichlet na fronteira.

Além disso, os autores mostraram que, se $N \geq 4$, a equação (1.4) tem uma solução positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, no entando, não tem solução positiva se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ e Ω é um domínio estrelado.

Recentemente, quando $N = 3$, Daisuke Naimen em [20] estudou a equação (1.3) com $a = \mu = 1$ e obteve os seguintes resultados.

Teorema 1.0.1. *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante dada e $N = 3$, $a = \mu = 1$. Então vale as seguintes afirmações.*

(i) *Se $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$, a equação (1.3) não tem solução positiva para todo $b \geq 0$.*

(ii) *Se $\frac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$, existe uma constante $B_1 = B_1(\lambda) > 0$ tal que a equação (1.3) tem uma solução positiva para todo $0 \leq b < B_1$.*

(iii) *Se $\lambda = \lambda_1$, existe uma constante $B_2 = B_2(\lambda_1) > 0$ tal que a equação (1.3) tem uma solução positiva para todo $0 < b < B_2$ e não tem solução positiva para todo $b \geq 0$.*

(iv) *Se $\lambda > \lambda_1$, existe uma constante $B_3 = B_3(\lambda) > 0$ tal que a equação (1.3) tem uma solução positiva para todo $b \geq B_3$.*

Quando $N = 4$, Daisuke Naimen em [21] considera a equação (1.3) com $\mu > bS^2$, em que S é a melhor constante de Sobolev, isto é

$$S := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |u|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |u|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.5}$$

Quando $a > 0, b \geq 0$, Daisuke Naimen, usando o método variacional, obteve que a equação (1.3) tem uma solução positiva se, e somente se, $\mu > bS^2$. Muito recentemente, Huang, Liu e Wu em [10] estudaram a equação (1.3) com $\Omega = B_R$ e $N \geq 3$, em que B_R é uma bola. Eles obtiveram a existência de soluções radiais para a equação (1.3).

Neste capítulo, estudamos os resultados obtidos em [14], mais precisamente estudamos a equação (1.3) com $N = 4$, isto é

$$\begin{cases} -(a + b\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \mu u^3 + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ é um domínio limitado suave, $a, b \geq 0$ com $a + b > 0$ e $\mu, \lambda > 0$.

Neste caso, mostramos um resultado de não-existência, um resultado de existência de soluções positivas via minimização e um resultado de multiplicidade de soluções utilizando um teorema abstrato de obtenção de pontos críticos. Esses resultados foram abordados em [14].

Mais precisamente mostramos os seguintes resultados.

Teorema 1.0.2. *Suponha que $a, b > 0$, $0 < \mu < bS^2$, então a equação* (1.6) *não tem solução não nula (isto é, a única solução é a solução nula) para todo $0 < \lambda \leq a\lambda_1$.*

Teorema 1.0.3. *Suponha que $a \geq 0, b > 0, 0 < \mu < bS^2$, então a equação* (1.6) *tem uma solução positiva para todo $\lambda > a\lambda_1$.*

Teorema 1.0.4. *Suponha que $a \geq 0, b > 0, 0 < \mu < bS^2$, então para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\Lambda_k > 0$ tal que a equação* (1.6) *tem pelo menos k pares de soluções distintas para todo $\lambda > \Lambda_k$.*

No **Capítulo 3**, denominado *Existência e Unicidade de soluções para um problema do tipo Kirchhoff com singularidade*, consideramos o seguinte problema de Kirchhoff com singularidade e condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -(a + b\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)\Delta u = f(x)u^{-\gamma} - \lambda u^p, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado, $0 < \gamma < 1$, $\lambda \geq 0$, $0 < p \leq 2^* - 1$ e $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ são parâmetros, a função $f \in L^s(\Omega)$, com $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, e $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Aqui $2^* = \frac{2N}{N-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev para a imersão

$H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*]$. Os resultados estudados neste capítulo foram obtidos em [13].

Na equação (1.7), o termo $f(x)u^{-\gamma}$ é chamado de *termo singular*, pelo fato de ser indefinido quando a função u atinge o valor nulo. Além disso, o termo singular $f(x)u^{-\gamma}$ é chamado de *singularidade fraca* quando $\gamma < 1$.

Quando $a = 0$, $b > 0$, o problema (1.7) é chamado de *degenerado*, em outros casos é chamado não-degenerado. Nas últimas décadas, os problemas do tipo Kirchhoff foram extensamente investigados e muitos resultados clássicos foram obtidos sobre um domínio limitado ou ilimitado.

Recentemente, os seguintes problemas do tipo Kirchhoff com singularidade foram considerados

$$\begin{cases} -(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = f(x)u^{-\gamma} + \lambda u^p, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave, $0 < p \leq 5$ e $f \in C(\overline{\Omega})$ é não-negativa e não trivial. Em [17], Liu e Sun mostraram, usando o método de Nehari, que o problema (1.8) possui duas soluções positivas para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno quando $3 < p < 5$. Além disso, em [12], usando o método variacional combinado com um método de perturbação, Lei, Liao e Tang conseguiram obter a existência de duas soluções positivas para o problema (1.8) quando $\lambda = 1$, $p = 5$. Também, sob certas condições, para $p = 3$, a existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (1.8) foram obtidas em [22].

Diferentemente do que ocorre no problema do Capítulo 2, aqui o funcional energia associado ao problema (1.7) não é diferenciável, portanto é necessário adaptar técnicas de minimização para obter um resultado de existência de soluções. Além disso, o mais interessante é que podemos provar a unicidade de soluções para o problema (1.7), usando algumas técnicas de Análise.

O resultado principal do capítulo 3, devido a [13], é descrito como segue.

Teorema 1.0.5. *Suponha que $a, b \geq 0$, $a + b > 0$, $\lambda \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < p \leq 2^* - 1$, e $f \in L^s(\Omega)$, em que $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então o problema* (1.7) *possui uma única solução positiva. Além disso, essa solução é um minimizador global.*

O resultado que estudamos no Teorema 1.0.5 vale não somente para o caso degenerado, mas também vale para o caso não-degenerado, visto que com a técnica utilizada pelos autores é possível obter soluções para o caso $a = 0$ e $b > 0$. Além disso, em [12], [15] e [17], o problema (1.8) foi considerado apenas em dimensão $N = 3$. No entanto, neste capítulo mostramos a existência e unicidade de soluções para o problema (1.7) em dimensões maiores, isto é, para $N \geq 3$.

Quando $a = 1$, $b = 0$, o problema (1.7) se reduz à uma equação semilinear clássica e o Teorema 1.0.5 continua sendo verdadeiro. Além disso, quando $\lambda = 0$, o Teorema 1.0.5 é o resultado correspondente de [22] e a condição $f \in L^s(\Omega)$ é mais geral que a condição que $f \in L^\infty(\Omega)$ em [22].

No **Apêndice A**, enunciamos os principais resultados da Teoria da Medida e Análise Funcional que foram usados ao longo de nosso trabalho.

No **Apêndice B**, recordarmos a definição de Espaço de Sobolev, as Imersões de Sobolev e demonstramos alguns resultados, os quais utilizamos nos Capítulos 2 e 3.

Por fim, o **Apêndice C** contém a definição de funcional diferenciável, e mostramos que o funcional energia do Capítulo 2 é diferenciável.

2 RESULTADOS DE NÃO-EXISTÊNCIA E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DO TIPO KIRCHHOFF EM DIMENSÃO QUATRO

Neste capítulo, vamos a estudar um resultado do tipo Brézis-Nirenberg para a equação do tipo Kirchhoff em dimensão quatro. O estudo aqui baseia-se no artigo "The Brezis-Nirenberg result for the Kirchhoff-type equation in dimension four" publicado pelos autores J.F. Liao, X.F. Ke, J. Liu e C.L. Tang [14]. Mais precisamente, estudamos um resultado de não-existência e um resultado de existência de soluções positivas. Finalmente, estudamos um resultado de compacidade global que foi usado para obter k pares de soluções distintas, em que $k \in \mathbb{Z}^+$.

A seguinte equação não-local do tipo Kirchhoff envolvendo o expoente crítico

$$\begin{cases} -(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ é um domínio limitado, $a, b \geq 0$ com $a + b > 0$ e $\mu, \lambda > 0$, é uma extensão para o conhecido problema de Brézis-Nirenberg que é tratado quando $a = 1, b = 0$ e $\mu = 1$. O número $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, 2^*]$, em que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Sobolev equipado com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e o espaço $L^p(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) dx.$$

Neste capítulo, consideramos a equação (2.1) com $N = 4$, isto é

$$\begin{cases} -(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \mu u^3 + \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

É natural perguntar se a equação (2.2) tem a existência de soluções positivas com $0 < \mu < bS^2$. Neste presente trabalho, damos uma resposta positiva, obtendo um resultado de existência de soluções positivas e um resultado de multiplicidade de soluções para a equação (2.2) com $0 < \mu < bS^2$ utilizando um resultado de condição de compacidade global de Palais-Smale.

Mais precisamente mostraremos os seguintes resultados.

Teorema 2.0.1. *Suponha que $a, b > 0$, $0 < \mu < bS^2$, então a equação* (2.2) *não tem solução não nula (isto é, a única solução é a solução nula) para todo $0 < \lambda \leq a\lambda_1$.*

Teorema 2.0.2. *Suponha que $a \geq 0, b > 0, 0 < \mu < bS^2$, então a equação* (2.2) *tem uma solução positiva para todo $\lambda > a\lambda_1$.*

Teorema 2.0.3. *Suponha que $a \geq 0, b > 0, 0 < \mu < bS^2$, então para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\Lambda_k > 0$ tal que a equação* (2.2) *tem pelo menos k pares de soluções distintas para todo $\lambda > \Lambda_k$.*

Antes de demonstrar nossos resultados principais, vamos definir alguns conceitos e resultados que serão necessários.

Primeiro definimos o funcional energia correspondente à equação (2.2) dado por

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\int_\Omega |u|^4 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

É claro que I está bem definida e $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (Ver Apêndice C).

Definição 2.0.1. *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca da equação* (2.2) *se para qualquer $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vale*

$$(a + b\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u, \nabla \varphi) dx - \mu \int_\Omega u^3 \varphi dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx = 0. \tag{2.4}$$

Note que existe uma correspondência entre a solução fraca da equação (2.2) e os pontos críticos de I em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, soluções fracas de (2.2) são pontos críticos do funcional I e vice-versa.

Definição 2.0.2. *Seja $c \in \mathbb{R}$, $\{u_n\}$ é chamada de sequência $(PS)_c$ (ou de Palais-Smale no nível c) de I em $H_0^1(\Omega)$, se $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Além disso, dizemos que o funcional I satisfaz $(PS)_c$ em $H_0^1(\Omega)$, se toda sequência $(PS)_c$ de I possui uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$. Se o funcional I satisfaz $(PS)_c$ em todos os números $c \in \mathbb{R}$, dizemos que I satisfaz (PS).*

Definição 2.0.3. *Seja X um espaço normado. Uma sequência minimizante para uma função $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é uma sequência $\{u_k\}$ tal que $\varphi(u_k) \to \inf \varphi$, quando $k \to \infty$. Uma função $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente se $u_k \to u$ implica que $\varliminf \varphi(u_k) \geq \varphi(u)$.*

Proposição 2.0.1. *Seja M um espaço métrico completo e $\Phi : M \to (-\infty, \infty]$ uma função semicontínua inferiormente, limitada inferiormente e não identicamente $+\infty$. Sejam $\varepsilon > 0$ dado e $u \in M$ tal que*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon.$$

Então existe $v \in M$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi(v) &\leq \Phi(u), \\ d(u,v) &\leq 1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

e, para cada $w \neq v$ em M,

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \varepsilon d(v,w). \tag{2.6}$$

Demonstração. Ver [18]. □

Observação 2.0.1. *Usando a distância equivalente λd com $\lambda > 0$, as conclusões* (2.5) *e* (2.6) *da proposição anterior podem ser substituído por*

$$\begin{aligned} &d(u,v) \leq 1/\lambda, \quad e \\ &\Phi(w) > \Phi(v) - \varepsilon\lambda d(v,w). \end{aligned}$$

Proposição 2.0.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente e diferenciável em X. Então, para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $u \in X$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon \tag{2.7}$$

existe $v \in X$ tal que

$$\begin{aligned} &\varphi(v) \leq \varphi(u), \\ &|u - v| \leq \varepsilon^{1/2}, \\ &|\varphi'(v)| \leq \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Tomemos $M = X$, $\Phi = \varphi$ e, para $\varepsilon > 0$ dado, escolhemos $\lambda = \varepsilon^{-1/2}$. Como φ é diferenciável, em particular é semicontínua inferiormente. Então se u satisfaz (2.7), pela Proposição 2.0.1 e obervação 2.0.1, existe $v \in X$ tal que

$$\begin{aligned} &\varphi(v) \leq \varphi(u), \\ &|u - v| \leq \frac{1}{\lambda} = \varepsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

e para todo $w \neq v$ em X temos

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon\lambda|v - w| = \varphi(v) - \varepsilon^{1/2}|v - w|. \tag{2.8}$$

Assim, tomando $w = v + th$ com $t > 0$, $h \in X$, $|h| = 1$, em (2.8) obtemos

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{1/2}t.$$

Dividindo ambos os membros por $t \neq 0$ e fazendo $t \to 0$ temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(v + th) - \varphi(v)}{t} \geq \lim_{t\to 0} -\frac{\varepsilon^{1/2}t}{t},$$

daí

$$-\varepsilon^{1/2} \leq \langle \varphi'(v), h \rangle, \tag{2.9}$$

para todo $h \in X$ com $|h| = 1$. Note que $-h \in X$ com $|-h| = 1$ e substituindo h por $-h$ em (2.9) temos

$$\langle \varphi'(v), h \rangle \leq \varepsilon^{1/2}.$$

Então

$$|\langle \varphi'(v), h \rangle| \leq \varepsilon^{1/2},$$

e lembrando a norma da transformação lineal $\varphi'(v)$, obtemos

$$|\varphi'(v)| \leq \varepsilon^{1/2},$$

o que completa a demonstração. □

Corolário 2.0.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente e diferenciável em X. Então para cada sequêmcia minimizante $\{u_k\}$ de φ, existe uma sequêmcia minimizante $\{v_k\}$ de φ tais que*

$$\begin{aligned}
&\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k),\\
&|u_k - v_k| \to 0 \textit{ se } k \to \infty,\\
&|\varphi'(v_k)| \to 0 \textit{ se } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência minimizante de φ, isto é, $\varphi(u_k) \to \inf_X \varphi$, quando $k \to \infty$.

$$\begin{aligned}
&\text{Se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \text{ tome } \varepsilon_k = \varphi(u_k) - \inf_X \varphi, \text{ e}\\
&\text{se } \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0 \text{ tome } \varepsilon_k = 1/k.
\end{aligned}$$

Então pela Proposição 2.0.2, para $\varepsilon_k = \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0$ e $u_k \in X$ tal que $\varphi(u_k) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon_k$ existe $v_k \in X$ tal que

$$\begin{aligned}
&\varphi(v) \leq \varphi(u),\\
&|u_k - v_k| \leq (\varphi(u_k) - \inf_X \varphi)^{1/2},
\end{aligned}$$

então, levando em conta que $\varphi(u_k) \to \inf_X \varphi$ e passando o limite à última desigualdade, quando $k \to \infty$, obtemos $|u_k - v_k| \to 0$. Além disso

$$|\varphi'(v_k)| \leq (\varphi(u_k) - \inf_X \varphi)^{1/2}$$

e por o mesmo fato dito acima temos $|\varphi'(v_k)| \to 0$.

Para o caso $\varepsilon_k = 1/k$ a análise é similar. □

Lema 2.0.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente e diferenciável em X. Se φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_X \varphi$, então φ tem um mínimo em X.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.0.1, existe uma sequência minimizante $\{v_k\}$ tal que $\varphi'(v_k) \to 0$, quando $k \to \infty$. Como φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_X \varphi$, podemos tomar a mesma sequência acima, isto é, $\{v_k\} \subset X$ em que $\varphi(v_k) \to c$, $\varphi'(v_k) \to 0$, quando $k \to \infty$, o que implica que c é um valor crítico de φ, logo φ tem um mínimo em X, pois, $c = \inf_X \varphi$. □

A seguir vamos demonstrar a condição de compacidade para o funcional I, ou seja, mostraremos que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (ou condição (PS)).

Proposição 2.0.3. *Suponha que $a \geq 0$, $b > 0$ e $0 < \mu < bS^2$. Então o funcional I definida em (2.3) satisfaz a condição (PS) em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Para todo $c \in \mathbb{R}$, suponha que $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_c$ de I, isto é

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0, \tag{2.10}$$

quando $n \to \infty$.

Como $N = 4$, segue que $2^* = \dfrac{2(4)}{4-2} = 4$ e consequentemente $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, 4]$. Em particular $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que $\|u\|_2 \leq C\|u\|$. Portanto, como $\lambda > 0$, segue que

$$-\frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 \geq -k\|u\|^2, \tag{2.11}$$

em que $k = \dfrac{\lambda C^2}{2}$. Além disso, pela equação (1.5) temos

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_4^2},$$

e é claro que $S^2 \leq \dfrac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4}$, $\forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Assim, como $\mu > 0$, obtemos

$$-\frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 \geq -\frac{\mu}{4S^2}\|u\|^4, \ \forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{2.12}$$

Agora, como $0 < \mu < bS^2$ segue-se que, $\dfrac{b}{4} - \dfrac{\mu}{4S^2} > 0$.

Note que, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, podemos escrever o funcional como se segue

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\int_\Omega |u|^4 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx \\ &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Além disso, por (2.11) e (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4S^2}\|u\|^4 - k\|u\|^2, \end{aligned}$$

em que k é uma constante positiva.

Assim,

$$I(u) \geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \left(\frac{b}{4} - \frac{\mu}{4S^2}\right)\|u\|^4 - k\|u\|^2, \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.13}$$

e isto implica que o funcional I é coercivo e limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$, pois, o polinômio de quarto grau do lado direito da (2.13) é coercivo e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Agora, substituindo em (2.13), u pela sequência $(PS)_c$, $\{u_n\}$, obtemos

$$I(u_n) \geq \frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \left(\frac{b}{4} - \frac{\mu}{4S^2}\right)\|u_n\|^4 - k\|u_n\|^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição de seqüência (PS), existe $C > 0$ tal que $|I(u_n)| \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}$, logo

$$\frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \left(\frac{b}{4} - \frac{\mu}{4S^2}\right)\|u_n\|^4 - k\|u_n\|^2 \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Assim, a estimativa (2.14) garante que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois, se $\{u_n\}$ não fosse limitada, ou seja, se $\|u_n\| \to \infty$, o lado esquerdo de (2.14) tenderia a ∞, o que é absurdo, pois, a soma dessas parcelas é menor do que C.

Agora, passando a uma subsequência, se for necessário, denotando ainda por $\{u_n\}$ e sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ u_n \to u, & \text{fortemente em } L^s, \ 1 \leq s < 4, \\ u_n(x) \to u(x), q.t.p. & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

quando $n \to \infty$.

Agora precisamos provar que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$, isto é, mostraremos que $\{u_n\}$ converge forte a u no espaço $H_0^1(\Omega)$. Como é usual, pondo $w_n = u_n - u$, apenas precisamos provar que $\|w_n\| \to 0$, quando $n \to \infty$.

De fato, como $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, $w_n = u_n - u$ é também limitada em $H_0^1(\Omega)$, então $\|w_n\| \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N}$, com $k > 0$. Assim, a sequência de números reais $\{\|w_n\|\}$ é uma sequência limitada, logo possui uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade (passando a uma subsequência, se for necessário, denotando ainda por $\{\|w_n\|\}$), temos

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\| = l.$$

De (2.15) temos $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, ou seja, $\|u_n - u\|_2 \to 0$, quando $n \to \infty$. Além disso,

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leq \|u_n - u\|_2,$$

portanto $\|u_n\|_2 \to \|u\|_2$, quando $n \to \infty$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 dx = \int_\Omega |u|^2 dx. \tag{2.16}$$

Agora, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, nós temos que $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Assim, tomando $\varphi = u$ tem-se $\langle u_n, u\rangle \to \langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e lembrando que, $w_n = u_n - u$, obtemos

$$\|w_n\|^2 = \langle w_n, w_n\rangle = \langle u_n - u, u_n - u\rangle = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle,$$

e consequentemente

$$\|w_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + o(1),$$

onde $o(1) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Logo,

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o(1). \tag{2.17}$$

Além disso,

$$(\|u_n\|^2)^2 = (\|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o(1))^2,$$

ou seja,

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u\|^2 + (2\|w_n\|^2 + 2\|u\|^2 + 1)o(1).$$

Agora, como $\{w_n\}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$, segue que $(2\|w_n\|^2 + 2\|u\|^2 + 1)$ é limitada, e como $o(1) \to 0$, quando $n \to \infty$, tem-se

$$(2\|w_n\|^2 + 2\|u\|^2 + 1)o(1) \to 0.$$

Assim,

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u\|^2 + o(1). \tag{2.18}$$

Por outro lado, como $u_n(x) \to u(x)$, $q.t.p.$ em Ω, podemos usar o Lema de Brézis-Lieb (ver Apêndice A, Lema.0.8) e obtemos

$$\|u_n\|_4^4 = \|u_n - u\|_4^4 + \|u\|_4^4 + o(1),$$

e portanto,

$$\int_\Omega |u_n|^4 dx = \int_\Omega |w_n|^4 dx + \int_\Omega |u|^4 dx + o(1). \tag{2.19}$$

Afirmação: Existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 u_n u dx = \int_\Omega |u|^4 dx. \tag{2.20}$$

Com efeito, como $u_n \to u$ em $L^3(\Omega)$, de acordo com o Lema.0.1 do Apêndice A, existem uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e $g \in L^3(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} &u_n(x) \to u(x),\ q.t.p. \text{ em } \Omega, \text{ e} \\ &|u_n(x)|, |u(x)| \leq g(x),\ q.t.p. \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Assim, para qualquer $\varphi \in C_c(\Omega)$ (a coleção de todas as funções contínuas em Ω cujo suporte é compacto), obtemos

$$\begin{aligned} &|u_n(x)|^2 u_n(x)\varphi(x) \to |u(x)|^2 u(x)\varphi(x),\ q.t.p. \text{ em } \Omega, \\ &||u_n(x)|^2 u_n(x)\varphi(x)| = |u_n^3(x)\varphi(x)| \leq Mg^3(x),\ q.t.p. \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

em que $M = max_{x\in\Omega}|\varphi(x)|$. Consequentemente, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 u_n \varphi dx = \int_\Omega |u|^2 u\varphi dx. \tag{2.21}$$

Agora, observe que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^4(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|_4 \leq C\|u_n\| \leq k$, com $k > 0$. Além disso,

$$\||u_n|^2 u_n\|_{\frac{4}{3}} = \left(\int_\Omega ||u_n|^2 u_n|^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\int_\Omega |(u_n)^3|^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\int_\Omega |u_n|^4 dx\right)^{\frac{3}{4}} = \|u_n\|_4^3 < k^3 := C.$$

Assim, $\{|u_n|^2 u_n\}$ é limitada em $L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.

Note que o espaço dual de $L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ é $L^4(\Omega)$ (pois $\frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4} = 1$) e como $C_c(\Omega)$ é denso (ou fortemente denso) em $L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$ (ver Teorema.0.11 do Apêndice A) e $\{|u_n|^2 u_n\}$ é limitado em $L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$, pelo Teorema.0.10 do Apêndice A, segue-se de (2.21) que

$$|u_n|^2 u_n \rightharpoonup |u|^2 u \ \text{ em } L^{\frac{4}{3}}(\Omega),$$

ou seja, segue-se da definição de convergência fraca, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^2 u_n \phi dx = \int_\Omega |u|^2 u\phi dx, \tag{2.22}$$

para qualquer $\phi \in L^4(\Omega)$.

Particularmente, escolhendo $\phi = u$ em (2.22), obtemos (2.20). Portanto, nossa afirmação é verdadeira.

Por outro lado, note que a derivada do funcional

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\int_\Omega |u|^4 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx,$$

é

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = a\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx - \mu\int_\Omega |u|^2 u\varphi dx - \lambda\int_\Omega u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, lembrando que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, obtemos $\langle u_n, u\rangle \to \langle u, u\rangle = \|u\|^2$. Além disso, como a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, segue que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, e consequentemente $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$, logo $\langle u_n, u\rangle_2 \to \langle u, u\rangle_2 = \|u\|_2^2$. Com esses resultados e (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n), u\rangle &= a\int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx + b\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx - \mu \int_\Omega |u_n|^2 u_n u dx - \lambda \int_\Omega u_n u dx \\ &= a\|u\|^2 + b\|u_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + o(1).\end{aligned}$$

Agora, por (2.17) tem-se

$$\langle I'(u_n), u\rangle = a\|u\|^2 + b(\|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o(1))\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + o(1).$$

Consequentemente , como $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) (veja (2.10)) e $\|w_n\| \to l$, quando $n \to \infty$, temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n), u\rangle = a\|u\|^2 + bl^2\|u\|^2 + b\|u\|^4 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx. \tag{2.23}$$

Por outro lado, usando novamente que $\{u_n\}$ é uma sequência (PS) e utilizando u como função teste, obtemos

$$o(1) = \langle I'(u_n), u_n\rangle = a\|u_n\|^2 + b\|u_n\|^4 - \mu\int_\Omega |u_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx. \tag{2.24}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2 + a\|w_n\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^4 + 2b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx \\ &= a(\|u\|^2 + \|w_n\|^2) + b(\|u\|^4 + \|w_n\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u\|^2) - \mu\left(\int_\Omega |u|^4 dx + \int_\Omega |w_n|^4 dx\right) - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim por (2.17), (2.18) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2 + a\|w_n\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^4 + 2b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx \\ &= a(\|u_n\|^2 + o(1)) + b(\|u_n\|^4 + o(1)) - \mu\left(\int_\Omega |u_n|^4 dx + o(1)\right) - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx \\ &= a\|u_n\|^2 + b\|u_n\|^4 - \mu\int_\Omega |u_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + (a + b - \mu)o(1).\end{aligned}$$

Logo, por (2.24), tem-se

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2 + a\|w_n\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^4 + 2b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx \\ &= o(1) + \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + o(1) = \lambda\left(\int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 dx\right) + o(1).\end{aligned}$$

Portanto, usando (2.15), segue que

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2 + a\|w_n\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^4 + 2b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx \\ &-\mu\int_\Omega |w_n|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx = o(1).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Agora, por (2.25), obtemos

$$\begin{aligned}&a\|w_n\|^2 + b\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx \\ &= -(a\|u\|^2 + b\|u\|^4) - b\|w_n\|^2\|u\|^2 + \mu\int_\Omega |u|^4 dx + \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + o(1).\end{aligned}$$

Usando (2.23), tem-se

$$
\begin{aligned}
&a\|w_n\|^2 + b\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx \\
&= bl^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |u|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u|^2 dx - b\|w_n\|^2\|u\|^2 + \mu\int_\Omega |u|^4 dx + \lambda\int_\Omega |u|^2 dx + o(1) \\
&= b\|u\|^2(l^2 - \|w_n\|^2) + o(1).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, como $\lim_{n\to\infty}\|w_n\| = l$, temos

$$
a\|w_n\|^2 + b\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2\|u\|^2 - \mu\int_\Omega |w_n|^4 dx = o(1). \tag{2.26}
$$

Finalmente, como $\|u\|_4^4 \leq S^{-2}\|u\|$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$
\int_\Omega |w_n|^4 dx \leq S^{-2}\|w_n\|^4. \tag{2.27}
$$

Então, passando limite quando $n \to \infty$ em (2.26), obtemos

$$
al^2 + bl^4 + bl^2\|u\|^2 = \mu \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |w_n|^4 dx,
$$

e consequentemente por (2.27), tem-se

$$
al^2 + bl^4 + bl^2\|u\|^2 = \mu \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |w_n|^4 dx \leq \mu S^{-2}\lim_{n\to\infty}\|w_n\|^4 = \mu S^{-2} l^4.
$$

Note que $al^2 + bl^4 \leq al^2 + bl^4 + bl^4\|u\|^2$, logo

$$
al^2 + bl^4 \leq \mu S^{-2} l^4. \tag{2.28}
$$

Como $a \geq 0, b > 0$ e $0 < \mu < bS^2$, segue-se de (2.28) que $l = 0$, pois se for $l \neq 0$, então $l^2 > 0$ e de (2.28) temos $a + bl^2 \leq \mu S^{-2} l^2$, logo

$$
aS^2 + bS^2 l^2 \leq \mu l^2. \tag{2.29}
$$

Agora, como $\mu < bS^2$, temos $l^2\mu < bS^2 l^2$ e por (2.29), obtemos

$$
aS^2 + l^2\mu < aS^2 + bS^2 l^2 \leq \mu l^2
$$

e portanto $aS^2 < 0$ e assim, $a < 0$, o que é uma contradição. Logo, $l = 0$ e consequentemente $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Isto completa a prova da Proposição 2.0.3. $\square$

Agora demonstramos os principais resultados do capítulo.

Teorema 2.0.4. *Suponha que $a, b > 0$, $0 < \mu < bS^2$, então a equação* (2.2) *não tem solução não nula (isto é, a única solução é a solução nula) para todo* $0 < \lambda \leq a\lambda_1$.

Demonstração. Por contradição, suponha que exista $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ uma solução não nula da equação (2.2). Então u_0 satisfaz a equação (2.4), isto é

$$(a + b\|u_0\|^2)\int_\Omega (\nabla u_0, \nabla\varphi)dx - \mu\int_\Omega u_0^3\varphi dx - \lambda\int_\Omega u_0\varphi dx = 0,\ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, usando $\varphi = u_0$, obtemos

$$\begin{aligned}&(a + b\|u_0\|^2)\int_\Omega (\nabla u_0, \nabla u_0)dx - \mu\int_\Omega u_0^3 u_0 dx - \lambda\int_\Omega u_0 u_0 dx\\ &= a\|u_0\|^2 + b\|u_0\|^4 - \mu\int_\Omega |u_0|^4 dx - \lambda\int_\Omega |u_0|^2 dx = 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$0 = a\|u_0\|^2 + b\|u_0\|^4 - \mu\|u_0\|_4^4 - \lambda\|u_0\|_2^2. \tag{2.30}$$

De (1.5), temos $S^2 \leq \dfrac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4}$, $\forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ então, substituindo $u = u_0$, segue que

$$-\mu\|u_0\|_4^4 \geq -\frac{\mu}{S^2}\|u_0\|^4. \tag{2.31}$$

Como $0 < \mu < bS^2$, então $\dfrac{bS^2 - \mu}{S^2} > 0$. Da mesma forma, como $0 < \lambda \leq a\lambda_1$, temos $\dfrac{a\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \geq 0$.

Além disso, da desigualdade de Poincaré, $\|u\|_2^2 \leq \dfrac{1}{\lambda_1}\|u\|^2$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$-\lambda\|u_0\|_2^2 \geq -\frac{\lambda}{\lambda_1}\|u_0\|^2. \tag{2.32}$$

Usando (2.30), (2.31) e (2.32), tem-se

$$\begin{aligned}0 &= a\|u_0\|^2 + b\|u_0\|^4 - \mu\|u_0\|_4^4 - \lambda\|u_0\|_2^2\\ &\geq a\|u_0\|^2 + b\|u_0\|^4 - \frac{\mu}{S^2}\|u_0\|^4 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u_0\|^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$0 \geq \left(\frac{a\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right)\|u_0\|^2 + \left(\frac{bS^2 - \mu}{S^2}\right)\|u_0\|^4. \tag{2.33}$$

Como $\dfrac{a\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \geq 0$ e $\dfrac{bS^2 - \mu}{S^2} > 0$, a desigualdade (2.33) implica que $\|u_0\| = 0$, e consequentemente $u_0 \equiv 0$, o que contradiz o fato que u_0 é não nula. Isto completa a demostração do Teorema. □

Teorema 2.0.5. *Suponha que $a \geq 0,\ b > 0,\ 0 < \mu < bS^2$, então a equação* (2.2) *tem uma solução positiva para todo $\lambda > a\lambda_1$.*

Demonstração. De (2.13) sabemos que o funcional I é limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$, então

$$\tilde{m} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$$

está bem definido.

Afirmamos que para todo $\lambda > a\lambda_1$ se cumpre $\tilde{m} < 0$.

De fato, considere $u_t = t\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ com $t \neq 0$, em que φ_1 é a autofunção correspondente ao autovalor λ_1, ou seja, $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$. Assim, segue que

$$\int_\Omega -\Delta\varphi_1\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 dx.$$

Agora, pela identidade de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 dx,$$

logo

$$\frac{1}{\lambda_1}\|\varphi_1\|^2 = \|\varphi_1\|_2^2. \tag{2.34}$$

Então, substituindo a função u_t em (2.3), temos

$$\begin{aligned} I(u_t) &= \frac{at^2}{2}\|\varphi_1\|^2 + \frac{bt^4}{4}\|\varphi_1\|^4 - \frac{\mu t^4}{4}\int_\Omega |\varphi_1|^4 dx - \frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega |\varphi_1|^2 dx \\ &= \left(\frac{a}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|\varphi_1\|_2^2\right)t^2 + \left(\frac{b}{4}\|\varphi_1\|^4 - \frac{\mu}{4}\|\varphi_1\|_4^4\right)t^4. \end{aligned}$$

Assim, por (2.34) segue que

$$I(u_t) = \left(\frac{a\lambda_1 - \lambda}{2\lambda_1}\right)t^2\|\varphi_1\|^2 + \left(\frac{b}{4}\|\varphi_1\|^4 - \frac{\mu}{4}\|\varphi_1\|_4^4\right)t^4.$$

Como $\lambda > a\lambda_1$, temos $\dfrac{a\lambda_1 - \lambda}{2\lambda_1} < 0$, o que implica que $I(u_t) < 0$ para $|t|$ suficientemente pequeno, pois $t^4 < t^2$ para $|t|$ suficientemente pequeno e diferente de zero. Assim, $\tilde{m} \leq I(u_t) < 0$ para $|t| \neq 0$ suficientemente pequeno e portanto, a nossa afirmação é verdadeira.

De acordo à Proposição 2.0.3, o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$, em que $c = \tilde{m}$, e pelo Lema 2.0.1, existe $u_* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_*) = \tilde{m} < 0$. Como $I(|u|) = I(u)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, segue que, $I(|u_*|) = I(u_*) = \tilde{m}$. Logo $|u_*|$ é também um minimizador para o funcional I, assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $u_* \geq 0$. Assim u_* é uma solução não-nula e não negativa da equação (2.2). Pelo princípio do máximo forte temos $u_* > 0$ em Ω. Portanto, u_* é uma solução minimizadora global positiva da equação (2.2) com $I(u_*) = \tilde{m} < 0$. Isto completa a demonstração do teorema. □

A fim de obter um resultado de multiplicidade de soluções, usaremos o seguinte Teorema abstrato cuja prova pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.0.6. *Seja X um espaço de Banach, e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma função par que satisfaz a condição (PS). Suponha que $\alpha < \beta$ e que $I(0) < \alpha$ ou $I(0) > \beta$. Se, além disso,* *(1) existe um subespaço m-dimensional E e $\rho > 0$ tal que* $\sup_{t \in E \cap \partial B_\rho(0)} I(t) \leq \beta$, *onde* $\partial B_\rho(0) = \{t \in X : \|t\| = \rho\}$,

(2) existe um subespaço linear j-dimensional F tal que $\inf_{t \in F^\perp} I(t) > \alpha$, *onde $F^\perp$ é um espaço complementar de F,*

(3) $m > j$,

então I tem pelo menos $m - j$ pares de pontos críticos distintos.

Teorema 2.0.7. *Suponha que $a \geq 0, b > 0, 0 < \mu < bS^2$, então para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $\Lambda_k > 0$ tal que a equação* (2.2) *tem pelo menos k pares de soluções distintas para todo $\lambda > \Lambda_k$.*

Demonstração. A fim de provar o Teorema 2.0.7, precisamos apenas mostrar que o funcional energia I satisfaz as condições do Teorema 2.0.6. Seja $\{\lambda_k\}$ (com $k \in \mathbb{Z}^+$) a sequência de autovalores do operador $-\Delta$ com a condição de fronteira de Dirichlet, ou seja, os autovalores formam uma sequência crescente $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$, em que $\lambda_k \to \infty$, quando $k \to \infty$. Sejam φ_k as correspondentes autofunções normalizadas dos autovalores λ_k.

1^o Caso: Primeiro vamos considerar o caso quando $a > 0$. Defina $E = span\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\}$, então $dimE = k$. Agora, seja $\Lambda_k = a\lambda_k > 0$ e suponha que $\lambda > \Lambda_k$. Da Proposição .1.2 do Apêndice B, temos que $\|u\|^2 \leq \lambda_k \|u\|_2^2$ para $u \in E$, daí

$$-\frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 \leq -\frac{\lambda}{2\lambda_k}\|u\|^2. \tag{2.35}$$

Conseqüentemente para qualquer $u \in E$, temos

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2.$$

De (2.35), segue que

$$I(u) \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 - \frac{\lambda}{2\lambda_k}\|u\|^2,$$

e como $\dfrac{\mu}{4}\|u\|_4^4 \geq 0$, obtemos

$$I(u) \leq \left(\frac{a\lambda_k - \lambda}{2\lambda_k}\right)\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4. \tag{2.36}$$

Como $\lambda > a\lambda_k$, temos $\dfrac{a\lambda_k - \lambda}{2\lambda_k} < 0$, então o lado direito de (2.36) pode ser positivo (para $\|u\|$ grande) ou negativo (para $\|u\|$ pequena). Chamando $A = \dfrac{a\lambda_k - \lambda}{2\lambda_k}$ e $B = \dfrac{b}{4}$, note que $A + B\|u\|^2 < 0$ (com $u \neq 0$) se $\|u\| < \sqrt{\dfrac{-A}{B}}$. Assim, tomando $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-A}{B}}$ e $u \in \partial B_\rho(0) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| = \rho\}$, temos que

$$A\|u\|^2 + B\|u\|^4 = \rho^2(A + B\rho^2) < 0.$$

Portanto, por (2.36) temos

$$I(u) \leq \rho^2(A + B\rho^2) < 0.$$

Logo, existe $\rho > 0$ tal que

$$\sup_{u \in E \cap \partial B_\rho(0)} I(u) \leq \beta < 0 = I(0),$$

em que $\partial B_\rho(0) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| = \rho\}$ e $\beta = \rho^2(A + B\rho^2)$. Agora, escolhendo $F = \emptyset$ segue que $dimF = 0$ e temos que o espaço complementar de F é $F^\perp = H_0^1(\Omega)$. Como I é coerciva e limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$ para $0 < \mu < bS^2$, temos

$$\inf_{u \in F^\perp} I(u) > -\infty.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 2.0.6, com $X = H_0^1(\Omega) = F^\perp$.

De fato, Como I é uma função par e de acordo à Proposição 2.0.3, temos que o funcional energia I satisfaz a condição (PS), e consequentemente satisfaz as hipóteses do Teorema 2.0.6. Portanto o funcional I possui $k - 0 = k$ pares de pontos críticos distintos.

2^o Caso: Agora, para o caso quando $a = 0$. Para todo $u \in E$, obtemos

$$I(u) = \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\|u\|_4^4 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2.$$

Usando (2.35) e o fato que $\dfrac{\mu}{4}\|u\|_4^4 > 0$ para $u \neq 0$, concluímos que

$$I(u) \leq \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2\lambda_k}\|u\|^2.$$

Como $\dfrac{\lambda}{2\lambda_k} > 0$, o lado direito da última desigualdade pode ser positivo ou negativo, então podemos fazer uma análise análoga ao caso em que $a > 0$. Logo I satisfaz as condições do Teorema 2.0.6 para todo $\lambda > 0$. Portanto, a equação (2.2) tem pelo menos k pares de soluções distintias para todo $\lambda > \Lambda_k$. Isto completa a demonstração do Teorema 2.0.7. $\square$

3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DO TIPO KIRCHHOFF COM SINGULARIDADE

Neste capítulo, estudamos o seguinte problema não-local do tipo Kirchhoff com singularidade e condição de valor de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = f(x)u^{-\gamma} - \lambda u^p, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado, $0 < \gamma < 1$, $\lambda \geq 0$, $0 < p \leq 2^* - 1$ e $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ são parâmetros. A função $f \in L^s(\Omega)$, em que $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$, e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*]$. Lembramos que o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está equipado com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e o espaço $L^r(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_r = \left(\int_\Omega |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

com $1 \leq r < \infty$.

O estudo da equação (3.1) foi motivado pelo trabalho "A uniqueness result for Kirchhoff type problems with singularity" devido aos autores J. F. Liao, X. F. Ke, C. Y. Lei e C. L. Tang [13].

Uma pergunta natural é se existem soluções para o problema (3.1) em questão. No presente capítulo damos uma resposta afirmativa. Além disso, seguindo as ideias de [13], em que os autores usaram algumas técnicas de análise, foi mostrado a unicidade de soluções para o problema (3.1).

Vale a pena observar que, até onde se sabe (segundo [13]), existe apenas um resultado de unicidade para o problema tipo Kirchhoff que foi obtido em [1].

O funcional energia correspondente ao problema (3.1) é definido por

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}dx, \tag{3.2}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Como sabemos, o funcional I não é Fréchet diferenciável devido ao termo singular, então não podemos aplicar a teoria do ponto crítico para obter a existência de soluções diretamente.

Definição 3.0.1. *Uma função u é chamada de solução fraca do problema* (3.1) *se $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u > 0$ em Ω e*

$$(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\int_\Omega (\nabla u, \nabla \phi)dx + \lambda \int_\Omega u^p \phi dx - \int_\Omega f(x)u^{-\gamma}\phi dx = 0, \tag{3.3}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

O resultado principal do capítulo é descrito como segue.

Teorema 3.0.1. *Suponha que $a, b \geq 0$, $a + b > 0$, $\lambda \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < p \leq 2^* - 1$, e $f \in L^s(\Omega)$, em que $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então o problema* (3.1) *possui uma única solução positiva. Além disso, essa solução é um minimizador global.*

3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Primeiro notemos que os números

$$s = \frac{2^*}{2^* + \gamma - 1} \quad \text{e} \quad q = \frac{2^*}{1-\gamma}$$

são conjugados, ou seja, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}dx \leq \|f\|_s \||u|^{1-\gamma}\|_q = \|f\|_s \|u\|_{2^*}^{1-\gamma}. \tag{3.4}$$

É claro que $2^* > 1$ para $N \geq 3$, e $\dfrac{1}{1-\gamma} > 0$ pois $0 < \gamma < 1$. Então, como $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{1-\gamma}\|u\|_{2^*}^{1-\gamma} \leq C\|u\|^{1-\gamma},$$

em que $C = \dfrac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma} > 0$ e k é a constante proveniente da imersão. Logo, em (3.4) obtemos

$$-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}dx \geq -C\|f\|_s\|u\|^{1-\gamma}. \tag{3.5}$$

Além disso, como $\lambda \geq 0$ e $0 < p \leq 2^* - 1$, temos

$$\frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \geq 0, \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Assim, por (3.5) e (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma}dx \\ &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - C\|f\|_s\|u\|^{1-\gamma}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $0 < \gamma < 1$, segue que $0 < 1-\gamma < 1$, então se $\|u\| \to \infty$, o lado direito de (3.7) tende a $+\infty$, assim o polinômio do quarto grau do lado direito de (3.7) é coercivo e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Isto implica que I é coercivo e limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$. Então

$$m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u), \tag{3.8}$$

está bem definido.

Agora, seja $t \in \mathbb{R}$, com $t \neq 0$, e considere $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ uma função positiva fixada, isto é, $u_0(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$. Então em (3.2), temos

$$\begin{aligned} I(tu_0) \ &= \frac{a}{2}|t|^2\|u_0\|^2 + \frac{b}{4}|t|^4\|u_0\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}|t|^{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx \\ &-\frac{1}{1-\gamma}|t|^{1-\gamma}\int_\Omega f(x)u_0^{1-\gamma}dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $0 < \gamma < 1$, $1 < p+1 \leq 2^*$ e $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$, note que

$$\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)u_0^{1-\gamma}dx > 0,$$

e que o polinômio em $|t|$ do lado direito de (3.9) tem como menor expoente, o número $1-\gamma$, pois, como $0 < \gamma < 1$, segue que $0 < 1-\gamma < 1$. Consequentemente, tomando $|t| \neq 0$ suficientemente pequeno, obtemos $I(tu_0) < 0$, pois $|t|^4 < |t|^2 < |t|^{1-\gamma}$ e $|t|^{p+1} < |t|^{1-\gamma}$. Assim, como $m = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq I(tu_0)$, nós temos que $m < 0$.

Antes de provar o Teorema 3.0.1, mostraremos o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Suponha que $0 < \gamma < 1$, $\lambda \geq 0$, $0 < p \leq 2^* - 1$, $a, b \geq 0$ com $a + b > 0$ e $f \in L^s(\Omega)$, em que $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Então I atinge o mínimo global em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $u_* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_*) = m < 0$.*

Demonstração. Como $m = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} I(u)$, dado $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, existe $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $m \leq I(u_n) < m + \dfrac{1}{n}$, ou seja, existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = m < 0. \tag{3.10}$$

Como

$$\begin{aligned} I(|u_n|) &= \frac{a}{2}\||u_n|\|^2 + \frac{b}{4}\||u_n|\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega ||u_n||^{p+1}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)||u_n||^{1-\gamma}dx \\ &= \frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx \\ &= I(u_n), \end{aligned}$$

então podemos supor que $u_n \geq 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Por (3.10), sabemos que $\{I(u_n)\}$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, logo, é limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $k > 0$ tal que $|I(u_n)| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente

$$\frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx \leq k.$$

Usando (3.5) e (3.6), fazendo $u = u_n$, obtemos

$$\frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|^4 - C\|f\|_s\|u_n\|^{1-\gamma} \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Assim, a estimativa (3.11) garante que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois se não fosse limitada, ou seja, se $\|u_n\| \to \infty$, o lado esquerdo de (3.11) tenderia a ∞, pois, $0 < 1-\gamma < 1$, o que é absurdo, pois a soma dessas parcelas é menor do que k.

Agora, passando a uma subsequência, se for necessário, denotado ainda por $\{u_n\}$ e sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, existe $u_* \geq 0$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_*, & \text{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ u_n \to u_*, & \text{fortemente em } L^q, \ 1 \leq q < 2^*, \\ u_n(x) \to u_*(x), q.t.p. & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

quando $n \to \infty$.

Agora o nosso objetivo é mostrar que $u_n \to u_*$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$, isto é, mostraremos que $\{u_n\}$ converge forte a u_* no espaço $H_0^1(\Omega)$. Como é usual, pondo $w_n = u_n - u_*$, precisamos apenas provar que $\|w_n\| \to 0$, quando $n \to \infty$.

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx = \int_\Omega f(x)|u_*|^{1-\gamma}dx. \tag{3.13}$$

De fato, somente precisamos mostrar que $\left\{\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx, n \in \mathbb{N}\right\}$ é equi-absolutamente-contínua (Definição.0.4 do Apêndice A). Assim, lembrando que $\{u_n\}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$, pela imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{2^*} \leq k\|u_n\| \leq C, \tag{3.14}$$

em que $C > 0$ é uma constante.

Para todo $\varepsilon > 0$, pela continuidade absoluta da integral de $|f(x)|^s$ sobre Ω, com $s = \frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f(x)|^s dx < \varepsilon^s$ para todo $E \subset \Omega$ com $|E| < \delta$. Consequentemente, pela desigualdade de Hölder e (3.14), temos

$$\int_E f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx \leq \|u_n\|_{2^*}^{1-\gamma}\left(\int_E |f(x)|^s dx\right)^{1/s} < C^{1-\gamma}\varepsilon.$$

Assim, pelo Teorema de Vitali (Teorema.0.12 do Apêndice A), nossa afirmação (3.13) é verdadeira.

Agora, como $u_n \rightharpoonup u_*$ em $H_0^1(\Omega)$, nós temos que $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u_*, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$.

Então, tomando $\varphi = u_*$ tem-se $\langle u_n, u_*\rangle \to \langle u_*, u_*\rangle = \|u_*\|^2$, e lembrando que $w_n = u_n - u_*$, obtemos

$$\|w_n\|^2 = \langle w_n, w_n\rangle = \langle u_n - u_*, u_n - u_*\rangle = \|u_n\|^2 + \|u_*\|^2 - 2\langle u_n, u_*\rangle$$

e consequentemente

$$\|w_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_*\|^2 - 2\|u_*\|^2 + o(1),$$

em que $o(1) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Logo,

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u_*\|^2 + o(1). \tag{3.15}$$

Além disso,

$$(\|u_n\|^2)^2 = (\|w_n\|^2 + \|u_*\|^2 + o(1))^2,$$

ou seja,

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u_*\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u_*\|^2 + (2\|w_n\|^2 + 2\|u_*\|^2 + 1)o(1).$$

Agora, como $\{w_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, segue que $(2\|w_n\|^2+2\|u_*\|^2+1)$ é limitada, e como $o(1) \to 0$, quando $n \to \infty$, tem-se

$$(2\|w_n\|^2 + 2\|u_*\|^2 + 1)o(1) \to 0.$$

Portanto,

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u_*\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u_*\|^2 + o(1). \tag{3.16}$$

Por outro lado, como $u_n(x) \to u_*(x)$, $q.t.p.$ em Ω, podemos usar o Lema de Brézis-Lieb (Ver Apêndice A, Lema.0.8) e obtemos

$$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|u_n - u_*\|_{2^*}^{2^*} + \|u_*\|_{2^*}^{2^*} + o(1),$$

e portanto

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx = \int_\Omega |w_n|^{2^*} dx + \int_\Omega |u_*|^{2^*} dx + o(1), \tag{3.17}$$

em que $o(1) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Agora, por (3.10)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{2}\|u_n\|^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma} dx \right), \end{aligned}$$

e por (3.15) e (3.16), temos

$$
\begin{aligned}
m = \;& \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a}{2}(\|w_n\|^2+\|u_*\|^2+o(1))+\frac{b}{4}(\|w_n\|^4+\|u_*\|^4 \\
&+2\|w_n\|^2\|u_*\|^2+o(1))+\frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_n|^{1-\gamma}dx\Big).
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

<u>1^o Caso</u>: Para $0<p<2^*-1$.

Por (3.12) e (3.13), segue que

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{a}{2}\|u_*\|^2+\frac{b}{4}\|u_*\|^4+\frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_*|^{p+1}dx-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_*|^{1-\gamma}dx \\
&+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{1}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2\right) \\
&= I(u_*)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{1}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2\right) \\
&\geq I(u_*) \\
&\geq m.
\end{aligned}
$$

Portanto, $m\geq I(u_*)\geq m$, e consequentemente $I(u_*)=m$.

<u>2^o Caso</u>: Para $p=2^*-1$.

Em (3.17), em que $p+1=2^*$, temos

$$
\frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx=\frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |w_n|^{2^*}dx+\frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u_*|^{2^*}dx+o(1). \tag{3.19}
$$

Usando (3.13) e (3.19) em (3.18), segue-se

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{a}{2}\|u_*\|^2+\frac{b}{4}\|u_*\|^4+\frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u_*|^{2^*}dx-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_*|^{1-\gamma}dx \\
&+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{1}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2+\frac{\lambda}{2^*}\|w_n\|_{2^*}^{2^*}\right) \\
&= I(u_*)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{1}{2}\|w_n\|^2\|u_*\|^2+\frac{\lambda}{2^*}\|w_n\|_{2^*}^{2^*}\right) \\
&\geq I(u_*) \\
&\geq m,
\end{aligned}
$$

assim, $I(u_*)=m$. Isto completa a prova do Lema 3.1.1. □

3.2 PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL

Agora estamos prontos para provar o teorema principal.

Teorema 3.2.1. *Suponha que $a,b\geq 0$, $a+b>0$, $\lambda\geq 0$, $0<\gamma<1$, $0<p\leq 2^*-1$, e $f\in L^s(\Omega)$, em que $s=\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}$, com $f(x)>0$ para quase todo $x\in\Omega$. Então o problema* (3.1) *possui uma única solução positiva. Além disso, essa solução é um minimizador global.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, existe $u_* \in H_0^1(\Omega)$ que é o ponto de mínimo para o funcional I. Além disso, como $I(u_*) = m < 0$ e $I(|u_*|) = I(u_*)$, obtemos $u_* \not\equiv 0$ e $u_* \geq 0$. Agora, vamos dividir a prova em três etapas.

Primeiro mostraremos que $u_*(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Na segunda etapa, provaremos que u_* é uma solução fraca do problema (3.1), e na última etapa demonstraremos que u_* é a única solução do problema (3.1).

Etapa 1: $u_*(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

De fato, como $u_*(x) \geq 0$ para $x \in \Omega$, para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$, com $\phi \geq 0$ em Ω e $t > 0$, temos $I(u_*) \leq I(u_* + t\phi)$, pois $I(u_*) = m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{I(u_* + t\phi) - I(u_*)}{t} \\
&= \frac{1}{t}\Big(\frac{a}{2}\|u_* + t\phi\|^2 + \frac{b}{4}\|u_* + t\phi\|^4 + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_* + t\phi|^{p+1}dx - \frac{a}{2}\|u_*\|^2 - \frac{b}{4}\|u_*\|^4 \\
&- \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_* + t\phi|^{1-\gamma}dx - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_*|^{p+1}dx + \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_*|^{1-\gamma}dx\Big) \\
&= \frac{1}{t}\Big(\frac{a}{2}\|u_*\|^2 + ta\langle u_*, \phi\rangle + \frac{t^2a}{2}\|\phi\|^2 + \frac{b}{4}\|u_*\|^4 + bt^2\langle u_*, \phi\rangle^2 + \frac{bt^4}{4}\|\phi\|^4 \\
&+ bt\|u_*\|^2\langle u_*, \phi\rangle + \frac{bt^2}{2}\|u_*\|^2\|\phi\|^2 + bt^3\|\phi\|^2\langle u_*, \phi\rangle + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_* + t\phi|^{p+1}dx \\
&- \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_* + t\phi|^{1-\gamma}dx - \frac{a}{2}\|u_*\|^2 - \frac{b}{4}\|u_*\|^4 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega |u_*|^{p+1}dx \\
&+ \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)|u_*|^{1-\gamma}dx\Big).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\leq a\langle u_*, \phi\rangle + \frac{at}{2}\|\phi\|^2 + b\|u_*\|^2\langle u_*, \phi\rangle + \frac{bt}{2}\|u_*\|^2\|\phi\|^2 \\
&+bt\langle u_*, \phi\rangle^2 + bt^2\|\phi\|^2\langle u_*, \phi\rangle + \frac{bt^3}{4}\|\phi\|^4 \\
&+\frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{p+1} - u_*^{p+1}}{t}dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}dx.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Afirmamos que

$$
\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{p+1} - u_*^{p+1}}{t}dx = \int_\Omega u_*^p \phi dx. \tag{3.21}
$$

Com efeito, sejam $u_*, \phi \in L^{p+1}(\Omega)$ e $t \in [0, 1]$, e definimos

$$
\begin{aligned}
h : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto \frac{1}{p+1}(u_* + t\phi)^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ com $t\theta \in (0, t)$ tal que

$$
h(t) - h(0) = h'(t\theta)(t - 0),
$$

então
$$\frac{(u_*+t\phi)^{p+1}}{p+1}-\frac{u_*^{p+1}}{p+1}=\Big((u_*+\theta t\phi)^p\phi\Big)(t-0),$$
o que implica
$$\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right|=|u_*+\theta t\phi|^p|\phi|.$$

Assim, como $\theta\in(0,1)$ e $t\in[0,1]$, temos
$$\begin{aligned}\left|\frac{(u_*+t\phi)^{p+1}-u_*^{p+1}}{t}\right| &= (p+1)|u_*+\theta t\phi|^p|\phi|\\ &\leq (p+1)(|u_*|+|\phi|)^p|\phi|\\ &\leq (p+1)2^p(|u_*|^p+|\phi|^p)|\phi|\\ &= (p+1)2^p(|u_*|^p|\phi|+|\phi|^{p+1}) =: g\in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Assim, usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{p+1}\int_\Omega\frac{(u_*+t\phi)^{p+1}-u_*^{p+1}}{t}dx &= \frac{1}{p+1}\int_\Omega\lim_{t\to 0^+}\frac{(u_*+t\phi)^{p+1}-u_*^{p+1}}{t}dx\\ &= \int_\Omega u_*^p\phi dx,\end{aligned}$$
provando assim, a nossa afirmação.

Por outro lado, para qualquer $x\in\Omega$, denotemos
$$h(t)=f(x)\frac{(u_*(x)+t\phi(x))^{1-\gamma}-u_*^{1-\gamma}(x)}{(1-\gamma)t}.$$

Então
$$h'(t)=f(x)\frac{t\phi(x)(1-\gamma)(u_*(x)+t\phi(x))^{-\gamma}-\Big((u_*(x)+t\phi(x))^{1-\gamma}-u_*^{1-\gamma}(x)\Big)}{(1-\gamma)t^2},$$
ou seja,
$$h'(t)=f(x)\frac{u_*^{1-\gamma}(x)-(u_*(x)+\gamma t\phi(x))(u_*(x)+t\phi(x))^{-\gamma}}{(1-\gamma)t^2}. \tag{3.22}$$

Sendo $u_*\geq 0$ em quase todo $x\in\Omega$, vamos analisar o que acontece com (3.22) quando consideramos os pontos $x\in\Omega$ tais que $u_*=0$ e $u_*>0$.

1^0 Caso: Considere os pontos $x\in\Omega$ tais que $u_*(x)=0$.

Neste caso
$$h'(t)=f(x)\frac{-(\gamma t\phi(x))(t\phi(x))^{-\gamma}}{(1-\gamma)t^2}<0,\forall t>0.$$

Então h é não-crescente.

2^0 Caso: Considere os pontos $x \in \Omega$ tais que $u_*(x) > 0$.

Como $\dfrac{t\phi(x)}{u_*(x)} > -1$ e $0 < \gamma < 1$, podemos usar a Desigualdade Geral de Bernoulli (Ver Apêndice A, Teorema.0.1) e obtemos

$$\begin{aligned}\Big(u_*(x) + t\phi(x)\Big)^\gamma &= \left[u_*(x)\Big(1 + \frac{t\phi(x)}{u_*(x)}\Big)\right]^\gamma \\ &= u_*^\gamma(x)\Big(1 + \frac{t\phi(x)}{u_*(x)}\Big)^\gamma \\ &\leq u_*^\gamma(x)\Big(1 + \frac{\gamma t\phi(x)}{u_*(x)}\Big) \\ &= u_*^{\gamma-1}(x)\Big(u_* + \gamma t\phi(x)\Big),\end{aligned}$$

de onde segue

$$\frac{1}{u_*^{\gamma-1}(x)} \leq \Big(u_* + \gamma t\phi(x)\Big)\Big(u_*(x) + t\phi(x)\Big)^{-\gamma},$$

assim,

$$u_*^{1-\gamma}(x) - \Big(u_* + \gamma t\phi(x)\Big)\Big(u_*(x) + t\phi(x)\Big)^{-\gamma} \leq 0.$$

Consequentemente, em (3.22), temos

$$h'(t) = f(x)\frac{u_*^{1-\gamma}(x) - (u_*(x) + \gamma t\phi(x))(u_*(x) + t\phi(x))^{-\gamma}}{(1-\gamma)t^2} \leq 0,$$

o que implica que $h(t)$ é uma função não-crescente para $t > 0$. Além disso, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} h(t) &= \lim_{t\to 0^+} f(x)\frac{(u_*(x) + t\phi(x))^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}(x)}{(1-\gamma)t} \\ &= f(x)u_*^{-\gamma}(x)\phi(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, que pode ser $+\infty$ quando $u_*(x) = 0$ e $\phi(x) > 0$. Consequentemente, sendo $h(t)$ uma função não-crescente para $t > 0$, pelo teorema da convergência monótona, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}dx &= \int_\Omega \lim_{t\to 0^+} f(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{(1-\gamma)t}dx \\ &= \int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx,\end{aligned}$$

que possivelmente é igual a $+\infty$. Usando este fato e (3.21), fazendo $t \to 0^+$, segue-se de (3.20) que

$$0 \leq a\langle u_*, \phi\rangle + b\|u_*\|^2\langle u_*, \phi\rangle + \lambda\int_\Omega u_*^p\phi dx - \int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx \leq \Big(a + b\|u_*\|^2\Big)\langle u_*, \phi\rangle + \lambda\int_\Omega u_*^p\phi dx, \tag{3.23}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, com $\phi > 0$ em Ω.

Seja $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta$, assim $e_1 > 0$ em Ω e $\|e_1\| = 1$. Particularmente, tomando $\phi = e_1$ em (3.23), obtemos

$$\int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}e_1dx \leq \Big(a + b\|u_*\|^2\Big)\langle u_*, e_1\rangle + \lambda\int_\Omega u_*^p e_1 dx. \tag{3.24}$$

Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\langle u_*, e_1\rangle = \int_\Omega (\nabla u_*, \nabla e_1)dx &\leq \int_\Omega |\nabla u_*|\ |\nabla e_1|dx\\ &\leq \|\nabla u_*\|_2\|\nabla e_1\|_2\\ &= \|u_*\|\|e_1\|\\ &= \|u_*\| < \infty.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_\Omega u_*^p e_1 dx \leq \|u_*^p\|_2\|e_1\|_2,$$

e como $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$ e em $L^{2p}(\Omega)$, existe $k > 0$ tal que

$$\int_\Omega u_*^p e_1 dx \leq \|u_*^p\|_2\|e_1\|_2 = \|u_*\|_{2p}^p\|e_1\|_2 \leq k\|u_*\|^p\|e_1\| = k\|u_*\|^p < \infty.$$

Consequentemente, por (3.24), temos

$$\int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}e_1dx < \infty. \tag{3.25}$$

Assim, como $f(x) > 0$ para quase todo $x \in \Omega$ e $e_1 > 0, \forall x \in \Omega$, a estimativa (3.25) garante que $u_* > 0$ para quase todo $x \in \Omega$, pois, se fosse $u_* = 0$, o lado esquerdo de (3.25) seria $+\infty$, o que é absurdo, pois, por (3.25) sabemos que essa integral é finita.

Etapa 2: u_* é uma solução fraca do problema (3.1).

Afirmamos que a desigualdade (3.23) é verdadeira para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Com efeito, da definição de u_*, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $u_* + tu_* \in H_0^1(\Omega)$ para todo $|t| \leq \delta$. Defina $\varphi : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) := I(u_* + tu_*)$.

Note que

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= I\left[(1+t)u_*\right]\\ &= \frac{a(1+t)^2}{2}\|u_*\|^2 + \frac{b(1+t)^4}{4}\|u_*\|^4 + \frac{\lambda(1+t)^{p+1}}{p+1}\int_\Omega u_*^{p+1}dx\\ &- \frac{(1+t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_\Omega f(x)u_*^{1-\gamma}dx,\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = (1+t)a\|u_*\|^2 + b(1+t)^3\|u_*\|^4 + \lambda(1+t)^p\int_\Omega u_*^{p+1}dx\\ - (1+t)^{-\gamma}\int_\Omega f(x)u_*^{1-\gamma}dx.\end{aligned}$$

Além disso, φ atinge seu mínimo em $t=0$, pois, $\varphi(0)=I(u_*)=m$, o que implica que

$$\varphi'(0)=a\|u_*\|^2+b\|u_*\|^4+\lambda\int_\Omega u_*^{p+1}dx-\int_\Omega f(x)u_*^{1-\gamma}dx=0. \tag{3.26}$$

Agora, sejam $\phi\in H_0^1(\Omega)$ e $\varepsilon>0$, e definamos $\Psi\in H_0^1(\Omega)$ por $\Psi:=(u_*+\varepsilon\phi)^+$, em que $(u_*+\varepsilon\phi)^+=max\{u_*+\varepsilon\phi,0\}$. Claramente, $\Psi\geq 0$.

Seja $\Omega_1=\{x\in\Omega : u_*+\varepsilon\phi\leq 0\}$, consequentemente, temos que $\Omega_1^c=\{x\in\Omega : u_*+\varepsilon\phi>0\}$. Então substituindo ϕ por Ψ em (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla\Psi)dx+\lambda\int_\Omega u_*^p\Psi dx-\int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}\Psi dx\\
&=\int_{\Omega_1}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla 0)dx+\lambda\int_{\Omega_1}u_*^p0dx-\int_{\Omega_1}f(x)u_*^{-\gamma}0dx\\
&+\int_{\Omega_1^c}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla(u_*+\varepsilon\phi))dx+\lambda\int_{\Omega_1^c}u_*^p(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&-\int_{\Omega_1^c}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&=\int_{\Omega_1^c}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla(u_*+\varepsilon\phi))dx+\lambda\int_{\Omega_1^c}u_*^p(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&-\int_{\Omega_1^c}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $\Omega_1^c=\Omega-\Omega_1$, portanto

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Big(\int_\Omega-\int_{\Omega_1}\Big)\Big[\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla(u_*+\varepsilon\phi))+\lambda u_*^p(u_*+\varepsilon\phi)-f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)\Big]dx\\
&=\int_\Omega\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)\Big((\nabla u_*,\nabla u_*)+\varepsilon(\nabla u_*,\nabla\phi)\Big)dx+\lambda\int_\Omega u_*^p(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&-\int_\Omega f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx-\int_{\Omega_1}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)\Big((\nabla u_*,\nabla u_*)+\varepsilon(\nabla u_*,\nabla\phi)\Big)dx\\
&-\lambda\int_{\Omega_1}u_*^p(u_*+\varepsilon\phi)dx+\int_{\Omega_1}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&=\varepsilon\int_\Omega\Big[\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi-f(x)u_*^{-\gamma}\phi\Big]dx+a\|u_*\|^2+b\|u_*\|^4\\
&+\lambda\int_\Omega u_*^{p+1}dx-\int_\Omega f(x)u_*^{1-\gamma}dx-\varepsilon\int_{\Omega_1}\Big[\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi\Big]dx\\
&+\int_{\Omega_1}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx-\Big(\int_{\Omega_1}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla u_*)dx+\lambda\int_{\Omega_1}u_*^{p+1}dx\Big).
\end{aligned}$$

Usando (3.26), tem-se

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varepsilon\int_\Omega\Big[\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi-f(x)u_*^{-\gamma}\phi\Big]dx\\
&-\varepsilon\int_{\Omega_1}\Big[\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi\Big]dx+\int_{\Omega_1}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx\\
&-\Big(\int_{\Omega_1}\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla u_*)dx+\lambda\int_{\Omega_1}u_*^{p+1}dx\Big).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Observe que $\int_{\Omega_1}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*+\varepsilon\phi)dx\leq 0$, pois, $u_*+\varepsilon\phi\leq 0$ em Ω_1. Além disso, como $\lambda\geq 0$, $p>0$ e $u_*>0$ para quase todo $x\in\Omega$, tem-se

$$\Big(a+b\|u_*\|^2\Big)(\nabla u_*,\nabla u_*)\geq 0 \quad\text{e}\quad u_*^{p+1}\geq 0,$$

portanto
$$\int_{\Omega_1}\left(a+b\|u_*\|^2\right)(\nabla u_*,\nabla u_*)dx+\lambda\int_{\Omega_1}u_*^{p+1}dx\geq 0.$$

Consequentemente, por (3.27) e pelo o que foi feito acima, obtemos

$$\begin{aligned}0\leq \varepsilon&\int_{\Omega}\left[\left(a+b\|u_*\|^2\right)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi-f(x)u_*^{-\gamma}\phi\right]dx\\ -\varepsilon&\int_{\Omega_1}\left[\left(a+b\|u_*\|^2\right)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi\right]dx.\end{aligned}$$

Como $|\Omega_1|\to 0$, quando $\varepsilon\to 0^+$, dividindo por $\varepsilon>0$ a última desigualdade e fazendo $\varepsilon\to 0^+$, temos

$$0\leq\int_{\Omega}\left[\left(a+b\|u_*\|^2\right)(\nabla u_*,\nabla\phi)+\lambda u_*^p\phi-f(x)u_*^{-\gamma}\phi\right]dx,$$

de onde segue

$$\left(a+b\|u_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla u_*,\nabla\phi)dx+\lambda\int_{\Omega}u_*^p\phi dx-\int_{\Omega}f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx\geq 0, \tag{3.28}$$

para todo $\phi\in H_0^1(\Omega)$. Portanto, esta desigualdade também é válida para $-\phi$. Então nossa afirmação está provada. Note que substituindo ϕ por $-\phi$ em (3.28), tem-se

$$\left(a+b\|u_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla u_*,\nabla(-\phi))dx+\lambda\int_{\Omega}u_*^p(-\phi)dx-\int_{\Omega}f(x)u_*^{-\gamma}(-\phi)dx\geq 0,$$

o que implica

$$\left(a+b\|u_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla u_*,\nabla\phi)dx+\lambda\int_{\Omega}u_*^p\phi dx-\int_{\Omega}f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx\leq 0. \tag{3.29}$$

De (3.28) e (3.29), temos

$$\left(a+b\|u_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla u_*,\nabla\phi)dx+\lambda\int_{\Omega}u_*^p\phi dx-\int_{\Omega}f(x)u_*^{-\gamma}\phi dx=0,\forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

Assim, u_* é uma solução fraca para o problema (3.1). Além disso, de acordo com o Lema 3.1.1, temos que $I(u_*)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)}I(u)$. Portanto, a solução u_* é um mínimo global para o funcional I.

Etapa 3: u_* é a única solução do problema (3.1).

De fato, suponha que v_* é outra solução do problema (3.1). Então é claro que $u_*-v_*\in H_0^1(\Omega)$. Assim, como u_* e v_* são soluções do problema (3.1), segue de (3.3) usando $\phi=u_*-v_*$ como função teste, que

$$\left(a+b\|u_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla u_*,\nabla(u_*-v_*))dx+\lambda\int_{\Omega}u_*^p(u_*-v_*)dx-\int_{\Omega}f(x)u_*^{-\gamma}(u_*-v_*)dx=0 \tag{3.30}$$

e

$$\left(a+b\|v_*\|^2\right)\int_{\Omega}(\nabla v_*,\nabla(u_*-v_*))dx+\lambda\int_{\Omega}v_*^p(u_*-v_*)dx-\int_{\Omega}f(x)v_*^{-\gamma}(u_*-v_*)dx=0. \tag{3.31}$$

Subtraindo (3.30) de (3.31), obtemos

$$a\int_\Omega\Big[(\nabla u_*,\nabla u_*-\nabla v_*)-(\nabla v_*,\nabla u_*-\nabla v_*)\Big]dx+\lambda\int_\Omega\Big[u_*^p(u_*-v_*)-v_*^p(u_*-v_*)\Big]dx$$
$$+\,b\Big(\|u_*\|^2\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla(u_*-v_*))dx-\|v_*\|^2\int_\Omega(\nabla v_*,\nabla(u_*-v_*))dx\Big)$$
$$-\int_\Omega f(x)\Big[u_*^{-\gamma}(u_*-v_*)-v_*^{-\gamma}(u_*-v_*)\Big]dx=0,$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned}&a\|u_*-v_*\|^2+b\Big[\|u_*\|^4-\|u_*\|^2\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla v_*)dx-\|v_*\|^2\int_\Omega(\nabla v_*,\nabla u_*)dx\\&+\|v_*\|^4\Big]+\lambda\int_\Omega(u_*-v_*)(u_*^p-v_*^p)dx-\int_\Omega f(x)(u_*^{-\gamma}-v_*^{-\gamma})(u_*-v_*)dx=0.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Denotamos

$$J(u_*,v_*)=\|u_*\|^4-\|u_*\|^2\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla v_*)dx-\|v_*\|^2\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla v_*)dx+\|v_*\|^4.\tag{3.33}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla v_*)dx&\le\int_\Omega|\nabla u_*|\;|\nabla v_*|dx\\&\le\|\nabla u_*\|_2\|\nabla v_*\|_2\\&=\|u_*\|\|v_*\|.\end{aligned}$$

Portanto, em (3.33), temos

$$\begin{aligned}J(u_*,v_*)\;&\ge\|u_*\|^4-\|u_*\|^3\|v_*\|-\|v_*\|^3\|u_*\|+\|v_*\|^4\\&=\Big(\|u_*\|^3-\|v_*\|^3\Big)\Big(\|u_*\|-\|v_*\|\Big)\\&=\Big(\|u_*\|-\|v_*\|\Big)^2\Big(\|u_*\|^2+\|u_*\|\|v_*\|+\|v_*\|^2\Big)\\&\ge 0.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Como $0<\gamma<1$ e $p>0$, pela Proposição.0.1 do Apêndice A, obtemos as seguintes desigualdades

$$(m^{-\gamma}-n^{-\gamma})(m-n)\le 0,\quad (m^p-n^p)(m-n)\ge 0,\ \forall m,n>0.$$

Assim,

$$\int_\Omega f(x)(u_*^{-\gamma}-v_*^{-\gamma})(u_*-v_*)dx\le 0,\qquad\int_\Omega(u_*-v_*)(u_*^p-v_*^p)dx\ge 0.\tag{3.35}$$

1^0 Caso: Se $a>0$.

Usando (3.33), (3.34), (3.35) e $b\ge 0$, segue de (3.32) que

$$\begin{aligned}a\|u_*-v_*\|^2=&-b\Big[\|u_*\|^4-\|u_*\|^2\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla v_*)dx-\|v_*\|^2\int_\Omega(\nabla v_*,\nabla u_*)dx+\|v_*\|^4\Big]\\&-\lambda\int_\Omega(u_*-v_*)(u_*^p-v_*^p)dx+\int_\Omega f(x)(u_*^{-\gamma}-v_*^{-\gamma})(u_*-v_*)dx\\&\le 0.\end{aligned}$$

Portanto, $a\|u_*-v_*\|^2\le 0$, o que implica que $\|u_*-v_*\|^2=0$, e consequentemente $u_*=v_*$.

<u>2^0 Caso</u>: Se $a = 0$.

Note que $b > 0$, pois, $a + b > 0$, e usando (3.35) e (3.32), temos

$$
\begin{aligned}
& b\Big[\|u_*\|^4 - \|u_*\|^2 \int_\Omega (\nabla u_*, \nabla v_*)dx - \|v_*\|^2 \int_\Omega (\nabla v_*, \nabla u_*)dx + \|v_*\|^4\Big] \\
& = -\lambda \int_\Omega (u_* - v_*)(u_*^p - v_*^p)dx + \int_\Omega f(x)(u_*^{-\gamma} - v_*^{-\gamma})(u_* - v_*)dx \\
& \leq 0,
\end{aligned}
$$

de onde segue que, $bJ(u_*, v_*) \leq 0$, e consequentemente $J(u_*, v_*) \leq 0$. Assim, usando esta última desigualdade e (3.34), concluímos que $J(u_*, v_*) = 0$. Além disso, obtemos

$$
0 \leq \Big(\|u_*\| - \|v_*\|\Big)^2 \Big(\|u_*\|^2 + \|u_*\|\|v_*\| + \|v_*\|^2\Big) \leq 0,
$$

e como $u_* > 0$ e $v_* > 0$, tem-se, $\|u_*\| = \|v_*\|$.

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\|u_* - v_*\|^2 & = \|u_*\|^2 - 2\langle u_*, v_*\rangle + \|v_*\|^2 \\
& = 2\Big(\|u_*\|^2 - \langle u_*, v_*\rangle\Big),
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

e como $J(u_*, v_*) = 0$, obtemos

$$
\|u_*\|^4 - \|u_*\|^2\langle u_*, v_*\rangle - \|v_*\|^2\langle u_*, v_*\rangle + \|v_*\|^4 = 0.
$$

Logo, como $\|u_*\| = \|v_*\|$, segue que

$$
2\|u_*\|^4 - 2\|u_*\|^2\langle u_*, v_*\rangle = 0,
$$

e consequentemente,

$$
2\|u_*\|^2\Big(\|u_*\|^2 - \langle u_*, v_*\rangle\Big) = 0.
$$

Como $u_* > 0$, segue que $\|u_*\|^2 - \langle u_*, v_*\rangle = 0$.

Logo, por (3.36), segue que $\|u_* - v_*\|^2 = 0$, e consequentemente $u_* = v_*$.

Assim, para todo $a \geq 0$, temos $u_* = v_*$. Portanto, u_* é a única solução positiva do problema (3.1). Isso completa a demonstração do Teorema 3.0.1.

$\square$

REFERÊNCIAS

1 Anello, G. *A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problem,* J. Math. Anal. Appl. 373 (2011) 248-251.

2 Badiale, M. and Serra, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners, Existence Results via the Variational Approach.* Springer-Verlag London, 2011.

3 Brezis, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

4 Brezis, H. and Nirenberg, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents.* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

5 Chang, Kung-Ching. *Methods in nonlinear analysis.* Springer Science & Business Media, 2006.

6 Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1988.

7 Folland, Gerald B. *Real analysis*: modern techniques and their applications. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

8 Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 2001.

9 Herman, J. ; Kucera, R. and Simsa, J. *Equations and Inequalities:* Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory. Springer Science & Business Media, 2000.

10 Huang, Y.S. ; Liua, Z. and Wu, Y.Z. *On finding solutions of a Kirchhoff type problem,* Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016) 3019-3033.

11 Kirchhoff, G. *Mechanik.* Teubner, Leipzig, 1883.

12 Lei, C.Y. ; Liao, J.F. and Tang, C.L. *Multiple positive solutions for Kirchhoff type of problems with singularity and critical exponents,* J. Math. Anal. Appl. 421 (2015) 521-538.

13 Liao, J.F. ; Ke, X.F. ; Lei, C.J. and Tang, C.L. *A uniqueness result for Kirchhoff type problems with singularity.* Applied Mathematics Letters, 59 (2016), 24-30.

14 Liao, J.F. ; Ke, X.F. ; Liu, J. and Tang, C.L. *The Brezis-Nirenberg result for the Kirchhoff-type equation in dimension four.* Applicable Analysis, 97.15 (2018) 2720-2726.

15 Liao, J.F. ; Zhang, P. ; Liu, J. and Tang, C. *Existence and multiplicity of positive solutions for a class of Kirchhoff type problems with singularity,* J. Math. Anal. Appl. 430 (2015) 1124-1148.

16 Lions, J-L. *On some questions in boundary value problems of mathematical physics,* Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Math. Stud., vol. 30, North-Holland, Amsterdam, (1978), 284-346.

17 Liu, X. and Sun, Y. *Multiple Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Singularity,* Commun. Pure Appl. Anal. 12 (2013) 721-733.

18 Mawhin, J. and Willem, M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* SpringerVerlag, New York/Berlin, 1989.

19 Medeiros, L.A. and Miranda, M.M. *Espaços de sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

20 Naimen, D. *On the Brezis-Nirenberg problem with a Kirchhoff type perturbation.* Adv. Nonlinear Stud. 15 (2015) 135-156.

21 Naimen, D. *The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four.* J. Differential Equations 257 (2014) 1168-1193.

22 Manuel A. del Pino. *A global estimate for the gradient in a singular elliptic boundary value problem.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 122(3-4), 341-352.

23 Rabinowitz, Paul H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* American Mathematical Society, 1988.

24 Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* 3th Ed., McGraw-Hill, New York/London etc. 1987.

25 Willem, Michel. *Minimax theorems.* Vol. 24. Springer Science & Business Media, 1997.

26 Yosida, Kosaku. *Functional analysis.* Repr. of the 6th ed. (1994).

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS

Neste apêndice enunciaremos as definições e resultados que foram utilizados no decorrer deste trabalho.

Teorema .0.1 (**Desigualdade Geral de Bernoulli**). *Se $x, p \in \mathbb{R}$, em que $x > -1$, $p > 0$ e $p \neq 1$, então*

$$(1+x)^p \leq 1 + px, \text{ com } 0 < p < 1.$$

Demonstração. [9]. □

Teorema .0.2 (**Desigualdade de Young**). *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ com } a, b \geq 0.$$

Demonstração. Ver [6]. □

Proposição .0.1. *Sejam $r, p \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r < 1$ e $p > 0$. Então para todo $m, n > 0$ se cumpre*

$$(m^{-r} - n^{-r})(m - n) \leq 0, \quad (m^p - n^p)(m - n) \geq 0.$$

Demonstração. Considere a função $\varphi(t) = t^p$ para $t \in (0, \infty)$. Note que $\varphi'(t) = pt^{p-1} > 0$ para $t \in (0, \infty)$. Assim, $\varphi(t)$ é estritamente crescente para $t \in (0, \infty)$.

Suponha, sem perda de generalidade que $m > n$, então $m - n > 0$ e $\varphi(m) > \varphi(n)$, ou seja, $m^p > n^p$, logo $(m^p - n^p)(m - n) > 0$.

Agora, se $m = n$, claramente temos que $(m^p - n^p)(m - n) = 0$.

Isto mostra que $(m^p - n^p)(m - n) \geq 0$ e a igualdade é válida quando $m = n$.

Por outro lado, considerando $g(t) = t^{-r}$ para $t \in (0, \infty)$, em que $-1 < -r < 0$, tem-se $g'(t) = -rt^{-r-1} < 0$ para $t \in (0, \infty)$. Assim, $g(t)$ é estritamente decrescente para $t \in (0, \infty)$. Então, fazendo uma análise semelhante ao que fizemos acima, obtemos $(m^{-r} - n^{-r})(m - n) \leq 0$ e a igualdade é válida quando $m = n$. □

Definição .0.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma* medida com sinal *em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ tais que*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$;

(ii) *ν assume pelo menos um dos valores $\pm\infty$;*

(iii) *se $\{E_j\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$, então $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$, onde a última soma converge absolutamente se $\nu(\bigcup_1^\infty E_j)$ é finito.*

Assim, toda medida é uma medida com sinal. Para ênfase, às vezes nos referimos a medidas como medidas positivas.

Observação .0.1. *Se μ é uma medida em $\mathcal{M}$ e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é uma função mensurável tal que pelo menos $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$ é finita (nesse caso chamaremos a f de função estendida $\mu-integrável$), então a função ν definida por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ é uma medida com sinal.*

Definição .0.2. *Suponha que ν é uma medida com sinal e μ é uma medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Dizemos que ν é* absolutamente contínua *em relação a μ e escrevemos*

$$\nu \ll \mu$$

se $\nu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ para o qual $\mu(E) = 0$.

Teorema .0.3. *Sejam ν uma medida finita com sinal e μ uma medida positiva em $(X, \mathcal{M})$. Então $\nu \ll \mu$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\nu(E)| < \varepsilon$ sempre que $\mu(E) < \delta$.*

Demonstração. Ver [7]. □

Se μ é uma medida e f é uma função $\mu - integrável$, a medida com sinal ν definida por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ é absolutamente contínua em relação a μ; e é finita se, e somente se, $f \in L^1(\mu)$.

Corolário .0.1. *Se $f \in L^1(\mu)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$ sempre que $\mu(E) < \delta$.*

Definição .0.3. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se f é uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$, definimos*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \text{ e}$$

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}.$$

Denotaremos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ como $L^p(X)$ ou simplesmente como L^p.

Observação .0.2. *Para $1 \leq p \leq \infty$ $L^p(X)$ é um espaço vetorial e $\| \ \|_p$ é uma norma.*

Teorema .0.4. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [7]. □

Observação .0.3. *No espaço $(X, \mathcal{M}, \mu)$, se $\mu(X) < \infty$, então $L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$, para $1 < p < q < \infty$.*

Teorema .0.5 (**O Lema de Fatou**)**.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\{f_n\}$ é qualquer sequência em L^+(espaço de todas as funções mensuráveis de X em $[0, \infty]$), então*

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Teorema .0.6 (**O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em L^1 tal que*

(a) $f_n \to f$ em q.t.p., e,

(b) existe uma função não-negativa $g \in L^1$ tal que para todo n tem-se $|f_n| \leq g$ em q.t.p.

Então $f \in L^1$ e $\displaystyle\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Demonstração. Ver [7]. □

Teorema .0.7 (**Desigualdade de Hölder**)**.** *Suponha que $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p, q \in [1, \infty]$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver [3]. □

Teorema .0.8 (**Lema de Brézis-Lieb**)**.** *Sejam Ω un subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Se*

a) $\{u_n\}$ é limitada em $L^p(\Omega)$,

b) $u_n \to u$ em q.t.p. em Ω, então

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

Demonstração. Ver [25]. □

Proposição .0.2. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência num espaço de Banach E. Então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{\|x_n\|\}$ é limitado e $\|x\| \leq lim\ inf \|x_n\|$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ e se $f_n \to f$ em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Ver [3]. □

Teorema .0.9. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [26]. □

Observação .0.4. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Lema .0.1. *Sejam Ω un subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Se $v_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, existem uma subsequência $\{w_n\}$ de $\{v_n\}$ e $g \in L^p(\Omega)$ tal que, quase em todas partes de Ω, $w_n(x) \to u(x)$ e $|u(x)|, |w_n(x)| \leq g(x)$.*

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema .0.10. *Uma sequência (x_n) de um espaço vetorial normado X converge fracamente a um elemento $x \in X$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$, *e*

ii) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$, *para todo $f \in D'$ onde D' é um subconjunto fortemente denso de X'.*

Demonstração. Ver [26]. □

Teorema .0.11. *Para $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [24]. □

Definição .0.4. *Seja $M = \{f(x)\}$ uma família de funções integráveis definidas num conjunto Ω. Se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que as relações*

$$E \subset \Omega, \ |E| < \delta,$$

impliquem que

$$\left| \int_E f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

para todas as funções da família M, então, dizemos que as funções da família M têm integrais equi-absolutamente-contínuas.

Teorema .0.12 (Teorema de Vitali). *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida positivo. Um conjunto $\Phi \subset L^1(X)$ chama-se uniformemente integrável se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E f d\mu < \varepsilon,$$

sempre que $f \in \Phi$ e $\mu(E) < \delta$, em que $E \subset \mathcal{M}$. Se

i) $\mu(X) < \infty$,

ii) $\{f_n\}$ *é uniformemente integrável,*

iii) $f_n(x) \to f(x), q.t.p.$ *quando* $n \to \infty$, *e*

iv) $|f(x)| < \infty, q.t.p.$,

então $f \in L^1(X)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção, apresentaremos os resultados mais usados sobre Espaços de Sobolev.

Definição .0.1. *Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado de multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e α é um multi-índice, definimos*

$$D_\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Sejam $p \in [1, +\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.

Definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq m \Big\}$$

cuja norma é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$

e para $p = \infty$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Chamamos os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ de espaços de Sobolev.

Teorema .0.1. *Para cada $m = 1, \ldots$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [6]. □

Observação .0.1. *Se $p = 2$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.*

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Definição .0.2. *Denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}}}.$$

Assim, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

.1 IMERSÕES DE SOBOLEV

Apresentaremos os teoremas de imersões dos espaços de Sobolev.

Definição .1.1 (Imersão Contínua). *Dizemos que o espaço normado* $(X, \|.\|_X)$ *está imerso continuamente no espaço* $(Y, \|.\|_Y)$ *e escrevemos* $X \hookrightarrow Y$ *quando,*

(i) X *for subespaço vetorial de* Y*,*

(ii) A aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ *tal que* $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X,$ *para todo* $x \in X$*.*

Definição .1.2 (Operador Linear Compacto). *Um operador linear* $T : X \to Y$ *é dito compacto, se toda sequência limitada* $(x_n) \subset X$ *é levada em uma sequência* $T(x_n)$ *que admite uma sequência convergente em* Y*.*

Definição .1.3 (Imersão Compacta). *Dizemos que o espaço normado* $(X, \|.\|_X)$ *está imerso compactamente no espaço* $(Y, \|.\|_Y)$ *e escrevemos* $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ *quando,*

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é um operador linear compacto.

Teorema .1.1 (Teorema das Imersões Contínuas). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave,* $m \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) Se $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q < \infty$;

(iii) Se $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$;

(iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha \leq m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver [19]. □

Observação .1.1. $C_B^j(\Omega)$ *é o espaço das funções* $u \in C^j(\Omega)$ *tais que* $D^\alpha u$*, para* $|\alpha| \leq j$ *é limitada em* Ω*, cuja norma é*

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|\,.$$

Teorema .1.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja* Ω *um domínio regular limitado,* $j \geq 0,\ m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então, as imersões abaixo são compactas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iii) Se $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$ *e* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver [19]. □

Teorema .1.3 (Identidades de Green). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam* $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. *Então valem as seguintes identidades:*

(i) ***Primeira Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds;$$

(ii) ***Segunda Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds,$$

em que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *é a derivada direcional na direção da normal unitária exterior* η.

Demonstração. Ver [6] □

Teorema .1.4 (Princípio do Máximo). *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $h \in L^{2^*}(\Omega)$, λ *um parâmetro real não-negativo e* $h \geq 0$ *em* Ω. *Então* $u \geq 0$ *em* Ω. *Além disso, se* $h > 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $u > 0$ *em* Ω.

Se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, *então a derivada normal exterior* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$, *para todo* $x \in \Omega$.

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema .1.5 (Princípio do Máximo Forte). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω *e suponha que existe um ponto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_\Omega u \left(\inf_\Omega u \right).$$

Então u *é constante.*

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema .1.6 (**Princípio do Máximo Fraco**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω. *Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema .1.7. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto, conexo e limitado, então existe uma constante positiva* C *(que depende de* n *e* Ω*) tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Seja $Q = (0, a)^n$ um cubo em $\mathbb{R}^n$ que contém $\overline{\Omega}$.

Dado $u \in W^{1,2}(\Omega)$, temos uma extensão $\bar{u}$ de u por zero no cubo Q. Logo, $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{L^2(L)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(L)}$.

Assim, para qualquer função $u \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$u\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_0^{x_n} u_{x_n}\,(x_1, \cdots, x_{n-1}, t)\, dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_0^{x_n} u_{x_n}\,(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)\, dt \right|^2 \\ &= \left(\int_0^{x_n} |u_{x_n}\,(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)\,||1|dt \right)^2, \end{aligned}$$

e consequentemente, pela desigualdade de Hölder, nós temos que

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \int_0^{x_n} 1^2 dt \\ &= |x_n| \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \\ &\leq a \int_0^a |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Usando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega a \int_0^a |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt dx \\ &\leq a^2 \int_\Omega |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dx \\ &\leq a^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \text{ para todo } u \in C_o^\infty(\Omega).$$

Assim, pela densidade de $C_o^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

□

Corolário .1.1. *As normas* $\|\cdot\|$ *de* $H_0^1(\Omega)$ *e* $\|\cdot\|_2$ *de* $L^2(\Omega)$ *são equivalentes.*

Demonstração. Ver [19]. $\square$

Definição .1.4. *Denotaremos por* λ_k *(satisfazendo* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$*) com* $k \in \mathbb{N}$*, os autovalores associados às autofunções* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$*, do problema com condição de Dirichlet abaixo:*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega. \end{cases} \tag{.1}$$

Proposição .1.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u, \text{ em } \Omega, \text{ com } u \in H_0^1(\Omega),$$

possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots$$

tais que

$$\lambda_j \to \infty,$$

e as autofunções $\{\varphi_j\}$ *constituem um sistema ortonormal completo para* $L^2(\Omega)$*, isto é,*

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$*. Em particular,*

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, \varphi_i \rangle_2^2.$$

Além disso, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ *vale*

$$\|\nabla v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, \varphi_i \rangle_2^2.$$

Proposição .1.2. *Seja* $\{\varphi_j\}$ *a sequência das autofunções autonormais em* $L^2(\Omega)$ *associadas aos autovalores* λ_j*. Definindo* $H_0^1 = W \oplus X$*, em que* $W = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ *e* $X = W^{\perp} = \overline{span\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots\}}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}}$*, temos a seguinte estimativa:*

$$\|u\|^2 \leq \lambda_k \|u\|_2^2, \ \forall u \in W.$$

Demonstração. Seja $u \in W$, então existem números reais α_i com $1 \leq i \leq k$, tais que $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i$.

Usando a integração por partes e o fato de φ_i ser autofunção associado ao autovalor λ_i do problema (.1) com $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_2 = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j dx = 0$ para $i \neq j$ (pois os φ_i são ortonormais em $L^2(\Omega)$), obtemos:

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega -\Delta u \ u dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (-\Delta \varphi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i \right) dx.$$

Agora, como $-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\lambda_i\varphi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\varphi_i\right) dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\alpha_i^2\varphi_i^2 dx \\
&\leq \lambda_k \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\varphi_i^2 dx = \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\varphi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\varphi_i\right) dx \\
&= \lambda_k \int_\Omega |u|^2 dx = \lambda_k \|u\|_2^2.
\end{aligned}
$$

□

APÊNDICE C – CÁLCULO DIFERENCIAL PARA FUNCIONAIS REAIS

Neste apêndice apresentamos uma breve revisão de definições e resultados importantes do cálculo diferencial para funcionais reais definidos num espaço de Banach. Além disso, mostraremos que o funcional com o qual trabalhamos no capítulo 2 é de classe C^1.

Definição .0.1. *Sejam X um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de X e $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Fréchet diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0. \tag{.1}$$

Assim, para uma função diferenciável I, temos

$$I(u+v) - I(u) - Av = o(\|v\|)$$

quando $\|v\| \to 0$ para algum $A \in X'$.

Definição .0.2. *Seja $I : U \to \mathbb{R}$ diferenciável em $u \in U$. O único elemento de X' tal que vale (.1) é chamada a diferencial Fréchet de I em u e é denotada por $I'(u)$ ou por $dI(u)$. Assim devemos ter*

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)v + o(\|v\|)$$

quando $\|v\| \to 0$.

Definição .0.3. *Seja $U \subset X$ um conjunto aberto. Se o funcional I é diferenciável em todo $u \in U$, dizemos que I é diferenciável em U. A aplicação $I' : U \to X'$ que leva $u \in U$ em $I'(u) \in X'$ é chamada derivada Fréchet de I. Se a derivada I' é contínua dizemos que I é de classe C^1 em U e escrevemos $I \in C^1(U)$.*

Proposição .0.1. *Suponha que I e J são Fréchet diferenciáveis em $u \in U \subset X$. Então valem as seguintes propiedades:*

(1) se a e b são números reais, $aI + bJ$ é Fréchet diferenciável em u e

$$(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u),$$

(2) o produto IJ é Fréchet diferenciável em u e

$$(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u).$$

Demonstração. Ver [2]. □

Proposição .0.2. *Sejam X um espaço de Hilbert e J um funcional dado por*

$$J(u) = \|u\|^2, \ \forall u \in X.$$

Se $J'(u)v = 2\langle u, v\rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno sobre X, então $J \in C^1(X)$.

De fato, como

$$J(u+v) - J(u) - J'(u)v = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle = \|v\|^2, \ \forall u, v \in X,$$

passando o limite, quando $\|v\| \to 0$, obtemos

$$J(u+v) - J(u) - J'(u)v = o(\|v\|).$$

Portanto, o funcional J é Fréchet diferenciável. Agora, sejam (u_n) uma sequência em X e $u \in X$ tal que $u_n \to u$ em X, quando $n \to \infty$. Então, para $v \in X$ com $\|v\| = 1$, temos

$$|(J'(u_n) - J'(u))v| = |2\langle u_n, v\rangle - 2\langle u, v\rangle| = 2|\langle u_n - u, v\rangle| \leq 2\|u_n - u\|\|v\|.$$

Daí

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{X'} \leq 2\|u_n - u\|,$$

donde segue que

$$J'(u_n) \to J'(u) \text{ em } X', \text{ quando } n \to \infty,$$

mostrando a continuidade de J'. Assim $J \in C^1(X)$.

Proposição .0.3. *Seja X um espaço de Hilbert. Pelo item* (2) *da Proposição 2.0.1 e o exemplo anterior temos que o funcional Φ dado por*

$$\Phi(u) = \|u\|^4 = \|u\|^2\|u\|^2,$$

é Fréchet diferenciável para todo $u \in X$.

Além disso, se $\Phi'(u)v = 4\|u\|^2\langle u, v\rangle$ então $\Phi \in C^1(X)$.

De fato, sejam $\{u_n\}$ uma sequência em X e $u \in X$ tal que $u_n \to u$ em X, quando $n \to \infty$. Então, para $v \in X$ com $\|v\| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))v| &= 4|\|u_n\|^2\langle u_n, v\rangle - \|u\|^2\langle u, v\rangle| \\
&= 4|\|u_n\|^2\langle u_n, v\rangle - \|u_n\|^2\langle u, v\rangle + \|u_n\|^2\langle u, v\rangle - \|u\|^2\langle u, v\rangle| \\
&= 4|\|u_n\|^2\langle u_n - u, v\rangle + (\|u_n\|^2 - \|u\|^2)\langle u, v\rangle|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))v| \leq 4\|u_n\|^2\|u_n - u\|\|v\| + 4(|\|u_n\| - \|u\|| \ |\|u_n\| + \|u\||)\|u\|\|v\|,$$

e lembre que $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\|$ para todo $a, b \in X$, então

$$\begin{aligned}
|(\Phi'(u_n) - \Phi'(u))v| &\leq 4\|u_n\|^2\|u_n - u\| + 4\|u_n - u\|(|\|u_n\| + \|u\||)\|u\| \\
&= 4\|u_n - u\| \left(\|u_n\|^2 + (\|u_n\| + \|u\|)\|u\|\right).
\end{aligned}$$

Daí

$$\|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\|_{X'} \leq 4C\|u_n - u\|,$$

em que $C = \|u_n\|^2 + (\|u_n\| + \|u\|)\|u\|$. Logo segue que

$$\Phi'(u_n) \to \Phi'(u) \text{ em } X', \text{ quando } n \to \infty,$$

mostrando a continuidade de Φ'. Assim $\Phi \in C^1(X)$.

Agora introducimos uma noção mais fraca de diferenciabilidade.

Definição .0.4. *Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X'$ tal que, para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av. \tag{.2}$$

Se I é Gâteaux diferenciável em u, existe um único funcional linear $A \in X'$ que satisfaz (.2) e é denotada por $I'_G(u)$.

Pela mesma definição de diferenciabilidade de Fréchet, é claro que se I é Fréchet diferenciável em u, então também é Gâteaux diferenciável em u e $I'(u) = I'_G(u)$. Mas a recíproca não é verdade. Além disso, se o funcional I é Gâteaux diferenciável em todo $u \in U \subset X$ em que U é um conjunto aberto, dizemos que I é Gâteaux diferenciável em U. A aplicação $I'_G : U \to X'$ que leva $u \in U$ em $I'_G(u) \in X'$ é chamada a derivada de Gâteaux de I.

Proposição .0.4. *Suponha que $U \subset X$ é um conjunto aberto, que I é Gâteaux diferenciável em U e que I'_G é contínua em $u \in U$. Então I é também Fréchet diferenciável em u e $I'(u) = I'_G(u)$.*

Demonstração. Ver [5]. □

Proposição .0.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (com $N \geq 3$) um domínio limitado com fronteira suave e P uma função definida por*

$$P(x,\xi) = \int_0^\xi h(x,t)dt,$$

tal que h satisfaz as seguintes condições:

(i) $h(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(ii) Existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$|h(x,\xi)| \leq a + b|\xi|^s, \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}, \text{ com } 1 < s < \frac{N+2}{N-2}.$$

Então o funcional $\Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(u) = \int_\Omega P(x,u)dx,$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [23]. □

Agora mostraremos que o funcional energia I do capítulo 2 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, onde I esta definido por

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\int_\Omega |u|^4 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{.3}$$

e seu derivada é

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= a\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \mu \int_\Omega |u|^2 u\varphi dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx \\ &= (a + b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \mu \int_\Omega |u|^2 u\varphi dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Observe que o funcional $f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4,$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, isto devido aos Exemplos .0.2 e .0.3.

Agora, seja o funcional $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(u) = \int_\Omega |u|^2 dx,$$

e considere

$$g'(u)v = 2\int_\Omega uv dx.$$

Mostremos que g é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} |g(u+v) - g(u) - g'(u)v| &= |\int_\Omega |u-v|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 dx - 2\int_\Omega uv dx| \\ &= |\int_\Omega v^2 dx| = \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, temos

$$|g(u+v) - g(u) - g'(u)v| = \|v\|_2^2 \leq C\|v\|^2, \text{ com } C > 0.$$

Logo, passando o limite, quando $\|v\| \to 0$, temos que g é Fréchet diferenciável.

A seguir mostraremos que g' é contínua.

Sejam $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to \infty$. Então, para $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = 1$, temos

$$|(g'(u_n) - g'(u))v| = 2|\int_\Omega (u_n - u)v dx| = 2|\langle u_n - u, v\rangle_2| \leq 2\|u_n - u\|_2\|v\|_2.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$|(g'(u_n) - g'(u))v| \leq 2K\|u_n - u\|\|v\|, \text{ com } K > 0.$$

Daí

$$\|g'(u_n) - g'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq 2K\|u_n - u\|,$$

donde segue que $g'(u_n) \to g'(u)$ em $(H_0^1(\Omega))'$, quando $n \to \infty$, mostrando a continuidade de g'. Assim $g \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Finalmente mostremos que o funcional $\Psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\Psi(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega |u|^4 dx,$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Definamos $g(x,t) = t^3$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in \mathbb{R}$ com $N = 4$. Então

$$|g(x,t)| = |t|^3 \leq \alpha + |t|^3, \text{ com } \alpha > 0.$$

Considere o funcional J_g dado por

$$J_g(u) = \int_\Omega H(x,u)dx, \text{ em que } H(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

Observe que,

$$J_g(u) = \int_\Omega \left(\int_0^u s^3 ds\right) dx = \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx.$$

Então pela Proposição .0.5, $\Psi(u) = J_g(u)$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.