UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Widervan de Deus Morais

O FORMALISMO GAUGE UNFIXING APRIMORADO NO MODELO SIGMA NÃO LINEAR

Juiz de Fora

2022

Widervan de Deus Morais

O FORMALISMO GAUGE UNFIXING APRIMORADO NO MODELO SIGMA NÃO LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física - PPGF da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Jorge Ananias Neto

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica

Morais, Widervan.
O FORMALISMO GAUGE UNFIXING APRIMORADO NO MODELO SIGMA NÃO LINEAR / Widervan de Deus Morais. – 2022.
35 f.

Orientador: Jorge Ananias Neto
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Física. Programa de Pós Graduação em Física, 2022.

1. Sistema Vinculado. 2. Gauge Unfixing Aprimorado. 3. Invariância de Gauge. I. Neto, Jorge Ananias.

Widervan de Deus Morais

"O formalismo Gauge Unfixing aprimorado no modelo Sigma Não linear"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 12 de abril de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Albert Carlos Rodrigues Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 07/04/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto**, **Professor(a)**, em 12/04/2022, às 16:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Mario Junior de Oliveira Neves**, **Usuário Externo**, em 12/04/2022, às 18:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes**, **Professor(a)**, em 12/04/2022, às 21:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Everton Murilo Carvalho de Abreu**, **Usuário Externo**, em 13/04/2022, às 14:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Dedico este trabalho a todas as pessoas que tornaram esta conquista possível. Em especial, minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho à todas as pessoas que um dia acreditaram em mim. Ao meus professores, em especial ao meu professor da graduação Ronaldo Thibes e ao meu orientador Jorge Ananias que me apoiaram, ajudaram e me inspiraram até este momento. Aos meus companheiros do grupo de pesquisa Cléber e Gabriella. Ao meu irmão, meus amigos e familiares que sempre estiveram ao meu lado.

RESUMO

Neste trabalho investigamos a estrutura canônica do Modelo Sigma Não linear (MSNL), que originalmente é um sistema de segunda classe utilizando o método *gauge unfixing* (GU) aprimorado. Tal investigação teve como objetivo analisar a eficiência e vantagens do GU aprimorado em comparação com o GU usual, mostrando ser uma boa alternativa para um método de conversão de vínculos. Ao aplicá-lo no MSNL, pudemos modificar diretamente as variáveis do espaço de fase original do sistema sem a necessidade de implementação de variáveis ou campos extras, a fim de torná-lo de primeira classe e consequentemente invariante de gauge. Ao final do processo obtivemos as novas respecivas variáveis de campo, lagrangiana e hamiltoniana invariantes de gauge. Ao se comparar com os parênteses de Dirac generalizados do mesmo modelo, pudemos obter os mesmos resultados, mostrando-se assim ser um método de estrutura consistente e uma melhor alternativa em comparação ao GU usual.

Palavras chave: Sistema vinculado. Gauge Unfixing aprimorado. Invariância de Gauge.

ABSTRACT

In this work we investigate the canonical structure of the O(N) Sigma Nonlinear Model (MSNL), which is originally a second class system using the improved gauge unfixing (GU) method. This investigation aimed to analyze the efficiency and advantages of the improved GU compared to the usual GU, showing it to be a good alternative for a constrained conversion method. By applying it to MSNL, we were able to directly modify the system's original phase space variables without the need to implement extra variables or fields, in order to make it first class and consequently gauge invariant. At the end of the process we obtained the new respective field variables, Lagrangian and Hamiltonian gauge invariant. When comparing with the generalized Dirac parentheses of the same model, we were able to obtain the same results, thus proving to be a method with a consistent structure and a better alternative compared to the usual GU.

Keywords: Constrained system. Improved Gauge unfixing. Gauge invariance.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PP	Parêntese de Poisson
PD	Parêntese de Dirac
GU	*Gauge Unfixing*

LISTA DE SÍMBOLOS

$[,]$	Comutador
$\approx$	Fracamente igual
$\{,\}_D$	Parêntese de Dirac
$\{,\}$	Parêntese de Poisson

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Gauge é uma das teorias na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com relação ao "quadro de referência"[1], no que diz respeito da escolha sendo arbitrária em qualquer instante de tempo. As variáveis físicas de importância são aquelas que independem da escolha do local de referência. As transformações que proporcionam essa característica tem um nome especial e são chamadas de "transformações de gauge". Variáveis físicas ou observáveis que possuem tais caracterísitcas são ditas invariantes de gauge da qual possuem aplicações em diversos ramos da física.

Uma das aplicações de nosso interesse é com relação à sistemas vinculados. Como vínculos de primeira classe são geradores de transformações de gauge, um estudo detalhado de tais sistemas possibilita uma compreensão mais ampla dos sistemas físicos, em contraste de sistemas originais de segunda classe. Desta forma uma abordagem de conversão de sistemas de segunda classe em primeira faz-se necessário para uma visão mais clara e coerente dos resultados, além de se revelar simetrias de gauge (ou de calibre) em sistemas que naturalmente não apresentam essa simetria, que são de pleno interesse para a comunidade científica.

A premissa básica por trás de tal conversão é de que o sistema de vínculos de segunda classe precisa ser convertido em uma nova versão pertencente à teoria de gauge. A motivação para isso é de que ocorre certas anomalias em algumas teorias. Como por exemplo, em teorias clássicas a invariância de gauge é perdida após o processo de quantização. Em termos de vínculos, quer dizer que os vínculos de primeira classe se tornam de segunda classe após a quantização [2]. Neste contexto, a conversão dos sistemas para teorias de gauge retomariam a invariância de gauge perdida.

Basicamente existem duas formas de transformar um sistema de vínculos de segunda classe em sistemas pertencentes a teoria de gauge. A primeira foi proposta por Fadeev e Shatashvili[3] que utiliza um espaço de fase amplo; o outro foi sugerido por Rajamaran-Mitra[4] e Harada-Mukaida[5], do qual são obtidas teorias de gauge dentro do espaço de fase, isto é, através das variáveis originais de segunda classe, sem a inserção de variáveis extras. Ambas as ideias são desenvolvidas num sistema vinculado de segunda classe do qual são utlizadas uma conversão de *Gauge-Unfixing* ou seja, convertidas em uma versão equivalente sendo invariante de gauge.

Para o caso do presente trabalho, os objetivo são analisar a estrutura canônica do modelo Sigma não linear (MSNL) através do método de Dirac para sistemas vinculados[6], revelar a sua simetria de gauge escondida através da aplicação do método *Gauge-Unfixing aprimorado*[7][8], discutir as consequências desse procedimento na teoria e comparar os resultados obtidos nos dois casos.

A dissertação está organizada da segunte forma: no capítulo 2 é feita uma breve revisão dos formalismos langrangiano e hamiltoniano, que constituem a base da mecânica analítica e da teoria quântica de campos. No capítulo 3, são apresentadas as propriedades dos sistemas hamiltonianos vinculados, o método de Dirac e sua aplicação ao modelo Sigma Não Linear. No capítulo 4, é apresentado o modelo *gauge unfixing*, dando ênfase ao método *gauge unfixing* aprimorado e aplicando-o ao modelo Sigma Não Linear. Já o capítulo 5 é dedicado à conclusão.

2 FUNDAMENTOS BÁSICOS

2.1 FORMALISMOS LAGRANGIANO E HAMILTONIANO

Seja um sistema mecânico consistindo de uma coleção de n partículas pontuais discretas, algumas delas podendo estar conectadas para formar um corpo rígido. Para especificar o estado desse sistema num dado instante de tempo, são necessários os n vetores radiais. Como cada vetor consiste de três números, $3n$ quantidades precisam ser especificadas para descrever as posições de todas as partículas. Porém, se existirem condições de vínculo que relacionem algumas dessas coordenadas, então nem todas as $3n$ coordenadas são independentes. Em outras palavras, se houverem m equações de vínculo, então, $3n - m$ coordenadas são independentes e dizemos que o sistema possui $3n - m$ graus de liberdade.

Observe que se $s = 3n - m$ coordenadas são requeridas num dado caso, não precisamos escolher s coordenadas retangulares ou mesmo s coordenadas curvilíneas. Podemos escolher quaisquer s parâmetros independentes, desde que eles especifiquem completamente o estado do sistema. Estas s quantidades também não precisam ter dimensão de comprimento. Dependendo do problema que temos, pode-se mostrar que é mais conveniente escolhermos alguns parâmetros com dimensão de energia. Alguns com dimensão de comprimento ao quadrado, alguns adimensionais e assim por diante. Damos o nome de coordenadas generalizadas a qualquer conjunto de quantidades que especifique completamente o estado do sistema. As coordenadas generalizadas são comumente designadas por q_j ou simplesmente, $\dot{q}_j$ que chamaremos de velocidades generalizadas.

Neste novo sistema de coordenadas, as equações de movimento podem ser escritas numa forma mais geral da Lei de Movimento dos Sistemas Mecânicos, conhecida como Princípio de Hamilton ou Princípio da Ação Mínima.

Suponha agora que estamos lidando com um sistema cujo número de graus de liberdades são finitos. Podemos escrever sua dinâmica através da equação da ação

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{1}$$

onde L é uma função qualquer que depende das coordenadas generalizadas $q_i (i = 1, 2, ..., n)$, das velocidades generalizadas $\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i$ e do tempo t. Podemos escrever a lagrangiana a partir de uma relação em termos de suas coordenadas generalizadas que chamamos de hessiano

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \tag{2}$$

Note que se o determinante de (2) for diferente de zero, ou ainda, não identicamente a zero como função de q_i, $\dot{q}_i$ e t, dizemos que ela é regular[9]. Esta regularidade é uma propriedade da lagrangiana em si, e não do sistema que descrito por ela.

Podemos definir agora uma outra função a partir de (1). A mecânica clássica nos diz que as trajetórias clássicas para que q_i sejam pontos estacionários de $\mathcal{A}$, é se a variação desta função seja nula, ou seja, $\delta\mathcal{A} = 0$. Isto nos leva a equação de Euler-Lagrange (para $t_1 < t < t_2$)

$$L_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{3}$$

A função L_i é chamada de função de Euler derivativa de L com respeito a q_i. Podemos reescrever esta equação de tal forma que

$$L_i = V_i(q, \dot{q}, t) - W_{ij}(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_i = 0, \tag{4}$$

onde W_{ij} é o hessiano (2) e V_i é dado por

$$V_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i. \tag{5}$$

Observe que nos casos regulares onde $\det|W_{ij}| \neq 0$, todas as equações são de segunda ordem e independente uma das outras, mas nem sempre é assim. Iremos abordar este caso com mais detalhes posteriormente. Seja agora a diferencial total de (3), logo

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t}dt + \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

ou ainda reescrevendo, obtemos que

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \tag{7}$$

de maneira abreviada, podemos reescrevê-la na forma

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{8}$$

Que é chamado de *momento generalizado*. Podemos redefinir também de tal forma que

$$H = p_i\dot{q}^i - L. \tag{9}$$

Que é a *Hamiltoniana* ou também chamada de transformação de Legendre. Então temos que (7) se torna

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \dot{q}_i dp_i. \tag{10}$$

Isso nos mostra a dependência explícita da hamiltoniana com os argumentos (q, p, t) ao invés de $(q, \dot{q}, t)$. Em casos regulares, é também possível escrever as variáveis generalizadas de posição e momento em função uma da outra. Ou seja,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{13}$$

onde para (12) utilizamos a solução de euler lagrange onde $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$. Logo, podemos escrever como sendo

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{14}$$

As equações (11) e (14) são chamadas de *equações de Hamilton de movimento*. Eles são um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem com soluções únicas. A equação de Hamilton de movimento também pode ser obtida diretamente da ação ao variar $\mathcal{A}$ em função de q^i e p_i

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(p_i \dot{q}^i - H(q, p, t)\right). \tag{15}$$

2.1.1 PARÊNTESE DE POISSON

Seja uma função $\tilde{H}(q, p, t)$ definido no espaço de fase cujo sua evolução temporal seja dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{H}}{dt} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{16}$$

onde substituimos as equações (11) e (13) nos primeiros termos da equação. Prosseguindo, chegamos que

$$\frac{d\tilde{H}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \left\{\tilde{H}, H\right\}. \tag{17}$$

Que é a definição de parêntese de Poisson. Assim para duas variáveis quaisquer F e G pertencente ao espaço de fase, podemos escrever o seu parêntese de Poisson como sendo

$$\{F, G\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \tag{18}$$

Estes parênteses de Poisson possuem as seguintes propriedades:

i). Antissimetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$, com $\{A, A\} = \{B, B\} = 0$;

ii). Linearidade: $\{A + \alpha B, C\} = \{A, C\} + \alpha \{B, C\}$, onde α independe de q_i e p_i;

iii)."Regra de Leibniz": $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} = 0$;

iv).$\frac{\partial}{\partial \lambda} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial \lambda}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial \lambda} \right\}$, onde λ é um parâmetro que pode ser q_i, p_i, t ou outro qualquer.

Para os parênteses de Poisson fundamentais temos que:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{19}$$

Com o auxílio dessas propriedades é possível realizar qualquer cálculo de parêntese de Poisson entre duas variáveis dinâmicas sem a necessidade de recurso à definição.

2.2 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Os parênteses de Poisson tem um importante papel principalmente no que diz respeito a transição da teoria clássica para a teoria quântica. A chamada *quantização canônica* consiste essencialmente em associar um operador $\hat{A}$ a cada variável dinâmica $A(q, p, t)$, com o comutador de dois operadores correspondendo ao parêntese de Poisson clássico multiplicado por $i\hbar$. Assim, na mecânica quântica na representação de Heisenberg, um operador $\hat{A}$ satisfaz

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{A}, \hat{H} \right], \tag{20}$$

onde $\left[\hat{A}, \hat{H} \right] = \hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}$ é o comutador entre dois operadores. Observe que essa operação possui uma semelhança com (16). E não apenas isso, existe uma correspondência direta entre os formalismos da linguaguem de parêntese de Poisson com os comutadores entre dois operadores multiplicados por $i\hbar$, que é dada por

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{\left[\hat{A}, \hat{H} \right]}{i\hbar}. \tag{21}$$

Esta correspondência só é possível e consistente porque o comutador quântico tem exatamente as mesmas propriedades algébricas que o parêntese de Poisson clássico i), ii), iii) e iv) discutidos na seção anterior.

3 O MÉTODO DE DIRAC

A quantização de sistemas não-singulares é, em princípio, direta. Como visto anteriormente, podemos escrever a correspondente versão quântica dos parênteses de Poisson ao substitui-la pelos comutadores de seus correspondentes operadores dividos por $i\hbar$ como descrito em (21). Contudo esta quantização nem sempre é trivial[10].

Considere um sistema discreto descrita por uma lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sem dependência temporal explícita e que possui uma hessiana correspondente dada por (2). Anteriormente foi discutida a possibilidade dos casos onde o determinante desta hessiana era diferente de zero resultado em sistemas regulares. Agora consideremos o caso onde esta hessiana é, de fato zero, ou seja

$$det\mathbf{W} = 0. \tag{22}$$

Isso implica que as equações definidoras dos momentos canônicos não podem ser todas resolvidas para as velocidades em função dos momentos pois não constituem um conjunto de equações independentes. Para este caso, dizemos que a hessiana dos sistema é *singular*. Como consequência, surgem relações entre coordenadas e momentos do tipo

$$\phi_m(p, q) = 0, \qquad m = 1, ..., M \tag{23}$$

As relações (23) são chamada de *vínculos primários*[6] e elas são decorrentes unicamente da Lagragiana do sistema. A hamiltoniana do sistema continua sendo definida da forma usual $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ e a equação (17) permanece válida, mostrando que mesmo na presença de vínculos a hamiltoniana é somente função dos q's e p's. No entanto, faz-se necessário a adição de mais um termo que contemple qualquer combinação linear dos ϕ's. Desta forma, a nova hamiltoniana se torna

$$H_p = H + \lambda_m \phi_m, \tag{24}$$

que é chamada de Hamiltoniana primária e os coeficientes λ_m são os chamados *multiplicadores de Lagrange*. Utilizando o princípio de mínima ação nas equações de Hamilton do sistema com vínculos primários, chegamos nas seguintes relações

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &\approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{25}$$

sendo assim, as equações (25) representam as equações de movimento de Hamilton com vínculos de primeira ordem incorporados.

Um problema surge, no entanto, com o surgimento de vínculos em alguns tipos de sistemas. A correspondência (21) não é mais válida em seu domínio completo e não necessariamente os parênteses de Poisson são equivalentes diretos aos seus correspondentes comutadores dentro do contexto quântico. Tais sistemas com estas características são chamados de sistemas vinculados e foi necessário introduzir uma generalização ao parêntese de Poisson para que este problema fosse resolvido.

3.1 PARÊNTESES DE DIRAC

A generalização dos parênteses de Poisson (18) para um sistema que possui vínculos foi formulado por Dirac[6]. Como visto antes, podemos definir uma nova hamiltoniana primária dada por (24), que é a soma da hamiltoniana canônica somada com os vínculos que o sistema apresenta multiplicado pelos multiplicadores de Lagrange.

Aqui introduzimos o conceito de *igualdade fraca* que é dado pelo símbolo "≈", que basicamente diz respeito a uma quantidade que não é necessariamente válida em todo o seu domínio, na contramão do que ocorre na *igualdade forte* com símbolo "=". Com isso sempre que um sistema for vinculado e estivermos abordando os parênteses de Poisson deste sistema, utilizamos o símbolo de igualdade fraca.

A evolução temporal de uma dada variável dinâmica pode ser escrita da seguinte maneira

$$\dot{F} \approx \{F, H_p\} = \{F, H + \lambda_m \phi_m\}\,, \tag{26}$$

onde H é a Hamiltoniana canônica, λ_m é o multiplicador de Lagrange e ϕ_m os vínculos primários do sistema.

Para este novo caso de um sistema vinculado, podemos escrever os parênteses de Poisson (18) como sendo

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H_p\} = \frac{\partial H_p}{\partial p_i} = \frac{\partial (H + \lambda_m \phi_m)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H_p\} = -\frac{\partial H_p}{\partial q_i} = -\frac{\partial (H + \lambda_m \phi_m)}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{27}$$

Ao calcularmos a evolução temporal (26), encontramos como resultado o multiplicador de Lagrange em termos da velocidade

$$\lambda_m \approx \dot{q}_m, \tag{28}$$

do qual ainda permanece indeterminado. O vínculo primário pertencente a teoria deve ser invariante sobre uma evolução temporal, logo usando (26), obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &\approx \{\phi_m, H + \lambda_n \phi_n\} \\ &\approx \{\phi_m, H\} + \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0, \end{aligned} \tag{29}$$

Note que em (29), pode ocorrer de se determinar o multiplicador de Lagrange ou a encontrar novos vínculos. Se for este último o caso, o processo deve ser continuado até que todos os vínculos do sistema sejam obtidos, ou ainda que se encontre o valor do multiplicador de Lagrange. Se novos vínculos forem determinados através deste processo, dizemos que eles são secundários pois não surgem diretamente da lagrangiana do sistema.

Determinado todos os vínculos do sistema, podemos construir uma matriz de parêntese de Poisson com todos estes vínculos

$$\{\phi_a, \phi_b\} \approx C_{ab}. \tag{30}$$

Esta é uma matriz anti-simétrica de dimensão par que possui uma inversa C^{-1}_{ab}, onde

$$C^{ab} C^{-1}_{cd} = \delta^a_d = C^{-1}_{dc} C^{ba}. \tag{31}$$

Note que a matriz de parêntese de Poisson em (30) será dependente das coordenadas do espaço e seu produto em (31) irá envolver integração sobre este espaço intermediário[11]. Com isso podemos definir a generalização do parêntese de Poisson da seguinte maneira:

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \phi^a\} C^{-1}_{ab} \left\{\phi^b, G\right\}. \tag{32}$$

Que é o *parêntese de Dirac* entre duas variáveis dinâmicas. Observe que este parêntese de Dirac possui todas propriedades do parêntese de Poisson e comutadores *i*), *ii*), *iii*), *iv*) discutidos anteriormente, além de seus vínculos valerem fortemente iguais a zero prevalecendo a igualdade. Desta forma, agora a passagem do formalismo clássico para o formalismo quântico (21) vale integramente para todos os sistemas inclusive os que apresentam vínculos.

3.2 O MODELO SIGMA NÃO LINEAR

O modelo sigma não linear (MSNL) possui bastante interesse físico em seus aspectos fenomenológicos. Por exemplo, no espaço euclidiano, ele descreve o spin (anti)ferromagnético clássico em seus pontos críticos [12], enquanto que no espaço de Minkowski, ele delimita um longo limite de comprimento de onda de antiferromagéticos quânticos [13].

O modelo é descrito num espaço-tempo de dimensão $3 + 1$. Sua densidade lagrangiana é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi^a)(\partial^\mu \phi^a), \tag{33}$$

onde ϕ^a são os múltiplos de N campos escalares reais, $a = 1, ..., N$ que são os índices internos que correspondem à simetria $O(N)$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$ são os índices do espaço tempo.

Note que a equação (33) está sujeito ao vínculo primário

$$\phi^a \phi_a - 1 \approx 0. \tag{34}$$

Calculando o momentos conjugado a ϕ^a obtemos que

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_a)} = \frac{1}{2}\partial_0 \phi_a \approx 0. \tag{35}$$

Podemos agora juntamente com a transformação de legendre (9) escrever a densidade Hamiltoniana correspondente do sistema

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_a \pi_a - \frac{1}{2}\left(\partial_i \phi_a\right)\left(\partial_i \phi_a\right), \tag{36}$$

Impondo que o vínculo (35) não evolua no tempo, obtemos o seguinte vínculo secundário

$$\phi_a \pi_a \approx 0, \tag{37}$$

Com isto obtemos os dois vínculos da teoria. A partir delas podemos aplicar o método de quantização de Dirac no MSNL e obter os respectivos parênteses de Poisson generalizados da teoria, ou seja, os parênteses de Dirac. Primeiro, utilizamos a equação (30) para obtermos a matriz de vínculos e em seguida a sua inversa. Logo após, utilizamos a definição (32) e obtemos os parênteses de Dirac, onde para nosso caso pode-se mostrar que são

$$\begin{aligned} \{\phi_a(x), \phi_b(y)\}_D &= 0 \\ \{\phi_a(x), \pi_b(y)\}_D &= \left(\delta_{ab} - \phi_a \phi_b\right)\delta(x-y) \\ \{\pi_a(x), \pi_b(y)\}_D &= \left(\pi_a \phi_b - \pi_b \phi_a\right)\delta(x-y), \end{aligned} \tag{38}$$

Assim, obtemos os parênteses de Poisson generalizados da teoria do Modelo Sigma Não linear, e como visto anteriormente, uma relação direta entre estes parênteses de Poisson no contexto clássico para o contexto quântico como visto em (21) pode agora ser obtido sem perda de generalidade.

Existem também várias formas de se realizar uma análise de vínculos de uma teoria, e conhecer bem o objeto de estudo torna ainda mais fácil escolher convenientemente qual modelo aplicá-lo. Como dito anteriormente, o MSNL é um sistema vinculado de secunda classe onde a invariância de gauge é perdida. Com isso se torna necessário utilizar um modelo da qual seja possível recuperar essa invariância sem perder a generalidade. No seguinte capítulo iremos apresentar um desses métodos - consistente com os resultados obtidos no método de Dirac - que nos possibilita continuar utilizando os parênteses de Poisson para a realização da quantização canônica.

4 O GAUGE UNFIXING

4.1 O GAUGE UNFIXING USUAL

Ao contrário de alguns métodos como o de Batalin-Fradklin-Tyutin (BFT) [14][15], o método Gauge Unfixing (GU), criado por Mitra, Rajaraman e Vytheeswaran[16][17], não realiza aumento no espaço de fase enquanto extrai a teoria de gauge em um sistema vinculado de segunda ordem. Uma das vantagens é que não é necessário a adição de termos ou variáves para que a simetria de gauge seja obtida, fazendo com que seus resultados sejam obtidos naturalmente.

Em suma, no GU, deve-se considerar os vínculos de segunda classe do modelo em questão e escolher um subconjunto de vínculos para prosseguir com o formalismo. Em caso de vários vínculos, podemos considerar apenas um par dentre estes vínculos. Em caso de números ímpares, devemos combinar dois deles de modo que resulte num número par de vínculos. A forma desta combinação é livre desde que a propriedade dos parênteses de Poisson na teoria continue sendo zero [1].

Ao escolher o subconjunto de vínculos, um deles é escolhido como gerador de simetria enquanto o outro então é descartado, fazendo com que a hamiltoniana de segunda classe seja modificada pelo vínculo escolhido como gerador de simetria de modo que ela se torne então invariante de gauge. É importante lembrar que não existe uma regra fixa para a escolha deste gerador de simetrias, sendo interessante executar os cálculos para os dois casos e verificar o que fornece resultados mais convenientes.

Começamos o formalismo ao considerar um sistema dimensional finito com as coordenadas do espaço de fase q^i e o momento conjugado $p^i(i = 1, 2, ..., N)$. Este sistema contém dois vínculos de segunda classe,

$$T_1(q, p) \approx 0, \qquad T_2(q, p) \approx 0 \tag{39}$$

das quais definitem a superfíecie de vínculos $\sum_2$. Devido a natureza de segunda classe, a matriz de segunda ordem anti-simétrica ε cujos elementos ε_{ab} são os parênteses de Poisson entre os T's

$$\varepsilon_{ab}(q, p) = \{T_a, T_b\}, \qquad a, b = 1, 2 \tag{40}$$

são *inversíveis* em todos os lugares, até mesmo na superfície $\sum_2$. Como dito anteriormente, podemos escolher qualquer um dos vínculos como gerador de simetria de gauge. Por agora, escolhemos T_1 como nosso vínculo gerador e T_2 como fixador de vínculo de gauge. Utilizando (40) podemos redefinir

$$T_1 \longrightarrow \chi = \varepsilon_{12}^{-1} T_1, \qquad .T_2 \longrightarrow \psi = T_2 \tag{41}$$

Note que como parte do processo estamos descartando o vínculo ψ (ou seja, não considerando mais $\psi = 0$). Para obtermos a hamiltoniana invariante de gauge e outras quantidades físicas, iremos definir o operador projeção $\mathbb{P}$ como sendo a operação em qualquer função do espaço de fase A como sendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \tilde{A} \equiv: e^{-\psi\tilde{\chi}} : A \\
&= A - \psi \{\chi, A\} + \frac{1}{2!}\psi^2 \{\chi, \{\chi, A\}\} \\
&- \frac{1}{3!}\psi^3 \{\chi, \{\chi, \{\chi, A\}\}\} + ... - ...,
\end{aligned} \tag{42}$$

onde observe que ψ deve estar sempre fora do parêntese de Poisson pois este não atua em A. As quantidades invariantes de gauge serão dadas por $\mathbb{P}(A) = \tilde{A}$, desque que satisfaçam a condição tal que $\left\{\chi, \tilde{A}\right\} = 0$. Este último e o vínculo de primeira classe $\chi = 0$ descrevem uma nova teoria de gauge.

Por fim, a hamiltoniana de segunda classe que utilizamos no processo deve ser modificada com o objetivo de satisfazer uma álgebra de segunda classe descrita por $\left\{\tilde{H}, \tilde{A}\right\} = 0$ onde $\tilde{H}$ é escrito por uma série de potências derivada do operador projetor (42)

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(x) &= H(x) - \int d^3y T_2(y) \{\chi, H(x)\} \\
&+ \frac{1}{2!}\int d^3y d^3z T_2(y) T_2(z) \{\chi, \{\chi(z), H(x)\}\} - ... + ...
\end{aligned} \tag{43}$$

Após a obtenção de $\tilde{H}$ é possível encontrar, de forma indireta, o valor das variáveis invariantes de gauge ao assumirmos que elas obedecem a transformação do tipo $\tilde{F} = F + \lambda$, onde λ é o termo que corrige a ausência da simetria de gauge. Este procedimento pode dificultar a obtenção explicita das variáveis do espaço de fase que deveriam ser usadas no parêntese de Poisson para a obtenção de novas relações de comutação. Desta forma, surge o método do GU melhorado pois nele as variáveis de primeira classe são modificadas diretamente e de maneira explicita, como será visto na seção a seguir.

4.2 O GAUGE UNFIXING APRIMORADO

Como dito anteriormente uma das vantagens do GU usual e GU aprimorado com relação a outros métodos como o BFT, é a não necessidade de inclusão de variáveis extras, a fim de se obter os campos invariantes de gauge. Entretanto diferem num aspecto importante. Enquanto no primeiro nós corrigimos a variância de calibre diretamente na hamiltoniana, no segundo a modificação é feita nas variáveis do espaço de fase[7][8] como pode ser visto a seguir. Seja uma variável original do espaço de fase dada por

$$F = (\phi_i, \pi_i), \tag{44}$$

a qual pode representar tanto uma partícula quanto um campo. Como atuaremos apenas nas variáveis do espaço de fase, nossa estratégia agora é construir uma função invariante de gauge $\tilde{A}(\tilde{F})$ a partir da função original de segunda classe $A(F)$. Assim

$$\tilde{F} = (\tilde{\phi}_i, \tilde{\pi}_i). \tag{45}$$

Nós determinamos assim nossa função de primeira classe $\tilde{F}$ em termos das variáveis originais do espaço de fase ao impor a condição variacional

$$\delta\tilde{F} = \epsilon\left\{\tilde{F}, T\right\} = 0, \tag{46}$$

onde $\tilde{F}$ já é invariante de gauge, $\tilde{T}$ é o vínculo de segunda classe escolhido como gerador de simetria de gauge e ϵ é um parâmetro infinitesimal. Qualquer função de $\tilde{F}$ será invariante de gauge desde que

$$\left\{\tilde{A}(\tilde{F}, \tilde{T})\right\} = \left\{\tilde{F}, \tilde{T}\right\}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\tilde{F}} = 0, \tag{47}$$

onde

$$\left\{\tilde{F}, \tilde{T}\right\}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\tilde{F}} \equiv \left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{T}\right\}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\tilde{\phi}_i} + \left\{\tilde{\pi}_i, \tilde{T}\right\}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial\tilde{\pi}_i}. \tag{48}$$

Portanto, podemos obter uma função invariante de gauge ao substituir

$$A(F) \Longrightarrow A(\tilde{F}) = \tilde{A}(\tilde{F}). \tag{49}$$

As variáveis invariantes de gauge $\tilde{F}$ assim como no GU usual são construídas por meio de uma série de potências de T_2

$$\tilde{F} = F + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_2^n = F + c_1 T_2 + c_2 T_2^2 + \ldots\,. \tag{50}$$

que obedece uma importante condição de contorno

$$\tilde{F}(T_2 = 0) = F. \tag{51}$$

Esta condição acima juntamente com a relação (49) mostram que quando consideramos o vínculo descartado T_2 igual a zero, chegamos novamente no sistema original de segunda classe. Além disso, as relações (49) e (51) garantem a equivalência entre nosso modelo de primeira classe e o sistema inicial de segunda classe.

Os coeficientes c_n na relação (50) são determinadas pela condição variacional descrita em (46). A equação geral para c_n é

$$\delta\tilde{F} = \delta F + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\delta c_n T_2^n + n c_n T_2^{(n-1)}\delta T_2\right) = 0 \tag{52}$$

onde

$$\delta F = \epsilon\left\{F, \tilde{T}\right\} \tag{53}$$

$$\delta c_n = \epsilon\left\{c_n, \tilde{T}\right\} \tag{54}$$

$$\delta T_2 = \epsilon\left\{T_2, \tilde{T}\right\} = -\epsilon \tag{55}$$

onde consideramos que na equação (55) temos que $\left\{\tilde{T}, T_2\right\} = 1$. Assim para o termo linear com $n = 1$ obtemos que

$$\delta F + c_1\delta T_2 = 0 \longrightarrow \delta F - c_1\epsilon = 0 \longrightarrow c_1 = \frac{\delta F}{\epsilon}. \tag{56}$$

Já para o termo quadrático ($n = 2$) temos

$$\delta c_1 + 2c_2\delta T_2 = 0 \longrightarrow \delta c_1 - 2c_2\epsilon = 0 \longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}\frac{\delta c_1}{\epsilon}. \tag{57}$$

Com isso podemos construir uma relação geral para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} &\delta c_n + (n+1)c_{(n+1)}\delta T_2 = 0 \longrightarrow \delta c_n - (n+1)c_{(n+1)} \\ &c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\frac{\delta c_n}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{58}$$

onde substituimos n por $n+1$ na última expressão.

Utilizando as expressões (56), (57) e (58) na série de potêcias de $\tilde{F}$ em (50), chegamos na forma

$$\begin{aligned} &\tilde{F} = F + T_2\frac{\delta F}{\epsilon} + \frac{1}{2!}T_2^2\frac{\delta\delta F}{\epsilon^2} + \frac{1}{3!}T_2^3\frac{\delta\delta\delta F}{\epsilon^3} + \dots . \\ &e^{T_2\frac{\delta}{\epsilon}} : F \end{aligned} \tag{59}$$

onde escrevemos em termos do operador projeção em F e, novamente, convencionamos que o T_2 venha antes de $\frac{\delta}{\epsilon}$.

Agora, se calcularmos o parêntese de Poisson entre duas variáveis invariantes de gauge definido por (59) e então tirarmos o limite para $T_2 \to 0$, chegaremos que

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{F}, \tilde{G}\right\}_{T_2=0} &= \{F, G\} + \left\{F, \tilde{T}\right\}\{T_2, G\} - \{F, T_2\}\left\{\tilde{T}, G\right\} \\ &= \{F, G\} + \{F, T_i\}\,\epsilon^{ij}\,\{T_j, G\}\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Se assumirmos que $\{T_i, T_j\} \equiv \Delta_{ij} = \epsilon_{ij}$ sendo também que $T_1 \equiv \tilde{T}$, nós podemos escrever que

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{F}, \tilde{G}\right\}_{T_2=0} &= \{F, G\} + \{F, T_i\}\,\Delta^{ij}\,\{T_j, G\} \\ &= \{F, G\}_D\,, \end{aligned} \tag{61}$$

onde $\Delta^{ij} \equiv \epsilon^{ij}$ é o inverso de $\Delta_{ij} \equiv \epsilon_{ij}$ e $\{F, G\}_D$ é o parêntese de Dirac definido no capítulo anterior. Com isso podemos observar que quando mudamos as variáveis impondo $T_2 = 0$, nós retornamos ao sistema original de segunda classe, onde podemos redefini-las como igualdades fortes, além de que os parênteses de Poisson se transformam nos parênteses de Dirac. Este resultado importante também demonstra uma consistência interessante entre as duas teorias.

4.3 O GU NO MODELO SIGMA NÃO LINEAR

Como visto nos capítulos anteriores, a densidade lagrangiana do modelo sigma não linear é dado pela equação (33)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi^a)(\partial^\mu \phi^a) \tag{62}$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $a = 1, ..., N$. Utilizando a transformada de Legendre, obtemos a densidade hamiltoninana canônica do sistema

$$\mathcal{H} = \pi^a \pi_a + \frac{1}{4}(\partial_1 \phi^a)(\partial_1 \phi_a). \tag{63}$$

A partir do formalismo de Dirac para sistemas vinculados, chegamos que os vinculos de segunda classe são

$$T_1 = (\phi^a \phi_a - 1) \approx 0, \tag{64}$$

$$T_2 = \phi^a \pi_a \approx 0, \tag{65}$$

cuja sua algebra de vínculos é

$$\{T_1(x), T_2(y)\} = 2\phi_a \phi_a \delta^{(3)}(x - y), \tag{66}$$

que demonstra claramente que o parêntese de Poisson entre os dois vínculos não é zero e consequentemente o sistema não possui invariância de gauge. Como visto anteriormente, existe duas possibilidades para a realização do método do GU, o caso 1 em que escolhemos o vínculo T_1 como gerador de simetria de gauge e consequentemente T_2 como vínculo descartado, gerando então um determinado resultado, e o caso 2 onde escolhemos o vínculo T_2 como gerador de simetria de gauge e T_1 como sendo o vínculo descartado. Iremos analisar cada um dos casos separadamente a seguir.

4.4 O CASO 1

Escolhendo o vínculo (64) como sendo gerador de simetria de gauge e (65) como sendo o vínculo descartado, podemos calcular as componentes da série. Assim, calculando a variação da variável de campo ϕ_a utilizamos a equação (53), assim

$$\delta\phi_a = \epsilon\left\{\phi_a, T_1\right\} = \epsilon\left\{\phi_a, \phi_b\phi_b - 1\right\} = 0. \tag{67}$$

Calculando a variação para o vínculo descartado T_2, obtemos

$$\delta T_2 = \epsilon\left\{T_2, T_1\right\} = \epsilon\left\{\phi_a\pi_a, \phi_b\phi_b - 1\right\} = -2\epsilon\phi_a\phi_a\delta^{(3)}(x-y). \tag{68}$$

Aplicando a condição variacional (52) para o termo de primeira ordem em T_2, chegamos que

$$\delta\phi_a(x) + \int d^3y c_1(x,y)\delta T_2(y) = 0. \tag{69}$$

Como $\delta\phi_a =$ mostrado na equação (67), temos como consequência que o coeficiente c_1 é nulo juntamente com todos os termos de correção superiores. Portanto, para este caso, utilizando a série de potências (59) obtemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_a &= \phi_a + \int d^3y c_1(x,y)T_2(y)\\ \tilde{\phi}_a &= \phi_a.\end{aligned} \tag{70}$$

Que é a nova variável invariante de gauge para o campo ϕ_a. Prosseguindo de forma análoga para o campo π_a temos que, calculando a variação da variável deste campo

$$\delta\pi_a = \epsilon\left\{\pi_a, T_1\right\} = \epsilon\left\{\pi_a, \phi_b\phi_b - 1\right\} = -2\epsilon\phi_a\delta^{(3)}(x-y). \tag{71}$$

Novamente aplicando a condição variacional (52) para o campo π_a, obtemos

$$\pi_a + \int d^3y c_1(x,y)\delta T_2(y) = 0 \longrightarrow c_1 = -\frac{\phi_a}{\phi_b\phi_b}\delta^{(3)}(x-y). \tag{72}$$

Para o termo quadrático, em T_2, temos

$$\int d^3y\delta c_1(x,y)T_2 + 2\int\int d^3yd^3zc_2(x,y,z)\delta T_2(y)T_2(z) = 0. \tag{73}$$

Para a realização deste cálculo, precisamos verificar primeiro a variação do coeficiente c_1, logo

$$\delta c_1 = \epsilon\left\{c_1, T_2\right\} = \epsilon\left\{\frac{\phi_a}{\phi_b\phi_b}, \phi_c\phi_c - 1\right\} = 0. \tag{74}$$

Com este resultado é possível dizer que os termos de correção para $c_n \geq 2$ são todos nulos. Assim, o campo invariante $\tilde{\pi}$ será

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_a &= \pi_a + \int d^3yc_1(x,y)T_2(y)\\ \tilde{\pi}_a &= \pi_a - \frac{\phi_a}{\phi_b\phi_b}\phi_c\pi_c.\end{aligned} \tag{75}$$

Portanto, os campos invariantes de gauge para este caso são

$$\tilde{\phi}_a = \phi_a, \tag{76}$$

$$\tilde{\pi}_a = \pi_a - \frac{\phi_a}{\phi_b\phi_b}\phi_c\pi_c = \pi_a - \frac{\phi_a}{\phi_b\phi_b}T_2 \tag{77}$$

para T_1 como gerador de simetria de gauge e T_2 como vínculo descartado. Para o último termo de (77), deixamos em termos do fator que corrige o sistema T_2, onde se fizermos que $T_2 = 0$, voltamos ao sistema original.

Observe que em (76) a nova variável é igual a ela mesma, logo ela é invariante de gauge. Além disso, se fizermos a variação deste novo vínculo como sendo $\delta\tilde{\pi}_a = 0$ notamos que ele se anula. Portanto, notamos que as novas variáveis de campo são de fato invariantes de gauge.

Podemos agora calcular os parênteses de Poisson entre estas novas variáveis, que resultam em

$$\left\{\tilde{\phi}_a(x), \tilde{\phi}_b(y)\right\} = 0 = \left\{\phi_a(x), \phi_b(y)\right\}_D, \tag{78}$$

$$\left\{\tilde{\phi}_a(x), \tilde{\pi}_b(y)\right\} = (\delta_{ab} - \phi_a\phi_b)\delta^{(3)}(x-y) = \left\{\phi_a(x), \pi_b(y)\right\}_D, \tag{79}$$

$$\left\{\tilde{\pi}_a(x), \tilde{\pi}_b(y)\right\} = (\pi_a\phi_b - \pi_b\phi_a)\delta^{(3)}(x-y) = \left\{\pi_a(x), \pi_b(y)\right\}_D. \tag{80}$$

Note que a álgebra dos PP das variáveis de primeira classe é idêntica à álgebra dos parênteses de Dirac das variáveis originais calculadas na seção anterior. Isso demonstra mais uma vez uma consistência do GU aprimorado.

Obtidas as novas variáveis, podemos calcular por construção a hamiltoniana e lagrangiana canônica invariante de gauge. Assim, substituindo as expressões (76) e (77) em (63) obtendo então que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \int dx \left\{ \tilde{\pi}^a \tilde{\pi}_a + \frac{1}{4}(\partial_1 \tilde{\phi}^a)(\partial_1 \tilde{\phi}_a) \right\}, \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \int dx \left\{ \pi^a \pi_a - \frac{(\phi_a \pi_a)^2}{\phi_b \phi_b} + \frac{1}{4}(\partial_1 \phi^a)(\partial_1 \phi_a) \right\}. \end{aligned} \tag{81}$$

Onde para esta última equação foi obtida uma expressão da hamiltoniana canônica considerando os vínculos fortemente iguais a zero. A partir de (81) é possível ver que,

$$\left\{ T_1, \tilde{\mathcal{H}} \right\} = \left\{ \phi_a \phi_a - 1, \pi^b \pi_b - \frac{(\phi_b \pi_b)^2}{\phi_c \phi_c} + \frac{1}{4}(\partial_1 \phi^b)(\partial_1 \phi_b) \right\} = 0 \tag{82}$$

como deveria ser por construção como visto em (46).

Já para a lagrangiana invariante de gauge, substituindo as novas variáveis de gauge (76) e (77) na equação (62), obtemos então que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \tilde{\phi}^a)(\partial^\mu \tilde{\phi}_a) = \frac{1}{4}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi_a. \tag{83}$$

que é lagrangiana original para o caso (62).

Podemos interpretar (82) de uma outra forma, como sendo que a evolução temporal do vículo T_1 com a nova hamiltoniana não irá gerar mais nenhum outro vínculo, ou seja, passa a ser um processo involutivo e consequentemente a nova hamiltiniana $\tilde{\mathcal{H}}$ é, portanto, invariante de calibre.

4.5 O CASO 2

Para este caso, escolheremos o vínculo (65) como sendo o vínculo gerador e (64) como o descartado. Prosseguindo de maneira análoga que o caso anterior, temos que calculando a variação da variável de campo ϕ_a

$$\delta \phi_a = \epsilon \left\{ \phi_a, T_2 \right\} = \epsilon \left\{ \phi_a, \phi_b \pi_b \right\} = \epsilon \phi_a \delta^{(3)}(x-y). \tag{84}$$

Já para a variável T_1, vem que

$$\delta T_1 = \epsilon \left\{ T_1, T_2 \right\} = \epsilon \left\{ \phi_a \phi_a - 1, \phi_b \pi_b \right\} = 2\epsilon \phi_b \phi_n \delta^{(3)}(x-y). \tag{85}$$

Novamente aplicando a condição variacional (52) para o termo de primeira ordem em T_1, temos

$$\begin{aligned}
&\delta\phi_a(x) + \int d^3y c_1(x,y)\delta T_1 = 0,\\
&\epsilon\phi_a\delta^{(3)}(x-y) + \int d^3y c_1(x,y) 2\epsilon\phi_b\phi_b\delta^{(3)}(x-y) = 0.
\end{aligned} \tag{86}$$

Portanto, para este caso o coeficiente será

$$c_1(x,y) = -\frac{\phi_a}{2\phi_b\phi_b}\delta^{(3)}(x-y). \tag{87}$$

Agora para calcularmos o termo quadrático, precisamos calcular a variação do coeficiente (87), assim

$$\delta c_1 = \epsilon\left\{c_1, T_2\right\} = \epsilon\left\{-\frac{\phi_a}{2\phi_b\phi_b}, \phi_c\pi_c\right\} = \frac{\phi_c}{8(\phi_b\phi_b)^2}\left(1 - \frac{2\phi_a\phi_c}{\phi_k\phi_k}\right)\delta^{(3)}(x-y). \tag{88}$$

Calculando agora o termo quadrático, temos

$$\begin{aligned}
&\int d^3y\delta c_1(x,y)T_1 + 2\int\int d^3y d^3z c_2(x,y,z)\delta T_1(y)T_1(z) = 0,\\
&-\int d^3y\epsilon\delta^{(3)}(x-y)\frac{\phi_c}{2\phi_b\phi_b}\left(1 - \frac{2\phi_a\phi_c}{\phi_k\phi_k}\right) + 4\int\int d^3y d^3z c_2(x,y)\epsilon\phi_d\phi_d\delta^{(3)}(x-y) = 0.
\end{aligned} \tag{89}$$

Portanto,

$$c_2(x,y) = \frac{\phi_c}{8\left(\phi_b\phi_b\right)^2}\left(1 - \frac{2\phi_a\phi_c}{\phi_k\phi_k}\right)\delta^{(3)}(x-y). \tag{90}$$

Com isso observamos que os coeficientes nunca vão se anular por sempre cairmos numa relação recorrente, nos fazendo assim construir uma nova variável invariante de gauge infinita com infinitos termos. Utilizando novamente (59) para o presente caso

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_a = \phi_a + \int d^3y c_1(x,y)T_1 + \int\int d^3y d^3z c_2(x,y,z)T_1^2(y) + ...\\
&\tilde{\phi}_a = \phi_a - \int d^3y\frac{\phi_a}{2\phi_b\phi_b}\delta^{(3)}(x-y)(\phi_c\phi_c - 1)T_1 + \int\int d^3y d^3z\frac{\phi_d}{8(\phi_d\phi_d)^2}\left(1 - \frac{2\phi_a\phi_c}{\phi_k\phi_k}\right)T_1^2\delta^{(3)}(x-y) + ...
\end{aligned} \tag{91}$$

ou ainda,

$$\tilde{\phi}_a = \phi_a - \frac{\phi_a}{2\phi_b\phi_b}T_1 - \frac{\phi_a}{8(\phi_b\phi_b)^2}T_1^2 + ... \tag{92}$$

note que a expressão acima se assemelha com a seguinte série binomial:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{(\frac{1}{2})x}{1} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})x^2}{2!} + ... \tag{93}$$

Logo, podemos reescrever (92) como sendo

$$\tilde{\phi}_a = \phi_a \left(1 - \frac{T_1}{\phi_b\phi_b}\right)^{1/2}, \tag{94}$$

ou ainda, reescrevendo com o vínculo T_1

$$\tilde{\phi}_a = \phi_a \left(1 - \frac{\phi_c\phi_c - 1}{\phi_b\phi_b}\right)^{1/2} = \phi_a \left(\phi_b\phi_b\right)^{-1/2}. \tag{95}$$

Prosseguindo de maneira análoga para o campo π_a, temos que calculando a variação deste

$$\delta\pi_a = \epsilon \left\{\pi_a, T_2\right\} = \epsilon \left\{\pi_a, \phi_b\pi_b\right\} = -\epsilon\pi_a\delta^{(3)}(x-y). \tag{96}$$

De novo, aplicando a condição variacional (52) para o termo de primeira ordem em T_1, obtemos

$$\delta\pi_a + \int d^3y c_1(x,y)\delta T_1(y) = 0. \tag{97}$$

Substituindo as equações (96) e (85) chegamos que

$$-\epsilon\pi_a\delta(x-y) + \int d^3y c_1(x,y) 2\epsilon\phi_b\phi_b\delta^{(3)}(x-y) = 0. \tag{98}$$

Resolvendo para o coeficiente $c_1(x,y)$ obtemos que

$$c_1(x,y) = \frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b}\delta^{(3)}(x-y). \tag{99}$$

Calculando a variação deste coeficiente, temos

$$\delta c_1(x,y) = \epsilon \left\{c_1, T_2\right\} = \epsilon \left\{\frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b}, \phi_c\pi_c\right\} = -\epsilon\delta^{(3)}(x-y)\left[\frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b} + \frac{\phi_b\phi_b\pi_a}{(\phi_c\phi_c)^2}\right]. \tag{100}$$

Com isso escrevendo o termo quadrático em T_1, e em seguida, substituindo (100) e (85) obtemos que

$$\begin{gathered}\int d^3y\delta c_1(x,y) + 2\int\int d^3y d^3z c_2(x,y,z)\delta T_1 = 0, \\ -\int d^3\epsilon\delta^{(3)}(x-y)\left[\frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b} + \frac{\phi_b\phi_b\pi_a}{(\phi_c\phi_c)^2}\right] + 2\int\int d^3y d^3z c_2(x,y,z)2\epsilon\phi_c\phi_c\delta^{(3)}(x-y) = 0.\end{gathered} \tag{101}$$

Assim, chegamos que

$$c_2(x,y,z) = \frac{3\pi_a}{8(\phi_b\phi_b)^2}. \tag{102}$$

Novamente assim como no caso anterior, os coeficientes da série nunca se anulam, fazendo com que possamos construir uma nova variável invariante de gauge infinita. Logo, utilizando (59) para este caso

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_a &= \pi_a + \int d^3y c_1(x,y) T_1(y) + \int\int d^3y d^3z c_2(x,y,z) T_1^2(y) + ... \\
\tilde{\pi}_a &= \pi_a + \int d^3y \frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b} T_1 \delta^{(3)}(x-y) + \int\int d^3y d^3z \frac{3\pi_a}{8(\phi_b\phi_b)^2} T_1^2 \delta(x-y) + ...
\end{aligned} \tag{103}$$

ou ainda,

$$\tilde{\pi}_a = \pi_a + \frac{\pi_a}{2\phi_b\phi_b} T_1 + \frac{3\pi_a}{8(\phi_b\phi_b)^2} T_1^2 + ... \tag{104}$$

Da mesma forma que o caso anterior, chegamos numa série infinita onde podemos utilizar a equação (93) para reescrevermos (104). Assim, obtemos então que

$$\tilde{\pi}_a = \pi_a \left(1 - \frac{T_1}{\phi_b\phi_b}\right)^{-1/2}, \tag{105}$$

ou ainda, substituindo os valores de T_1

$$\tilde{\pi}_a = \pi_a \left(1 - \frac{\phi_c\phi_c - 1}{\phi_b\phi_b}\right)^{-1/2} = \pi_a \left(\phi_b\phi_b\right)^{1/2}. \tag{106}$$

Portanto, os campos invariantes de gauge para este caso são

$$\tilde{\phi}_a = \phi_a \left(1 - \frac{\phi_b\phi_b - 1}{\phi_c\phi_c}\right)^{1/2} = \phi_a \left(1 - \frac{T_1}{\phi_c\phi_c}\right)^{1/2} = \phi_a \left(\phi_b\phi_b\right)^{-1/2}, \tag{107}$$

$$\tilde{\pi}_a = \pi_a \left(1 - \frac{\phi_b\phi_b - 1}{\phi_c\phi_c}\right)^{-1/2} = \pi_a \left(1 - \frac{T_1}{\phi_c\phi_c}\right)^{-1/2} = \pi_a \left(\phi_b\phi_b\right)^{1/2}. \tag{108}$$

agora para o presente caso sendo T_2 como gerador de simetria de gauge e T_1 como vínculo descartado. Asim como no caso anterior, o último termo foi reescrito em termos de T_1 para mostrar que este é o termo que corrige o sistema, e se fizermos $T_1 = 0$, voltamos ao sistema original.

Com isso observe que $\delta\tilde{\phi}_a = 0$ e $\delta\tilde{\pi}_a = 0$, portanto estas novas variáveis de campo também são invariantes de gauge. Assim como no caso anterior, ao calcularmos os parênteses de Poisson entre estas novas variáveis, sua álguebra também é idêntica a álgebra dos parênteses de Dirac, assim como escrito nas equações (78), (79) e (80), reforçando ainda mais a consisência do GU melhorado.

Novamente seguindo o caso anterior, calculamos hamiltoniana invariante de gauge para o caso atual ao substituir (107) e (108) em (63), assim

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} &= \int dx \left\{ \tilde{\pi}^a \tilde{\pi}_a + \frac{1}{4}(\partial_1 \tilde{\phi}^a)(\partial_1 \tilde{\phi}_a) \right\}, \\
\tilde{\mathcal{H}} &= \int dx \left\{ \pi^a \pi_a \phi^b \phi_b - \frac{1}{4} \left[\partial_1 \phi^a \left(\frac{1}{\phi^b \phi_b} \right)^{1/2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{109}
$$

Já para a lagrangiana, substituindo as novas variáveis de campo (107) e (108) na lagrangiana (62), obtemos a correspondente lagrangiana invariante de gauge para este caso

$$
\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \tilde{\phi}^a)(\partial^\mu \tilde{\phi}_a). \tag{110}
$$

A exemplo do caso anterior, a partir da expressão para a hamiltoniana invariante de gauge podemos concluir que

$$
\left\{ T_2, \tilde{\mathcal{H}} \right\} = \left\{ \phi_a \pi_a, \pi^b \pi_b \phi^c \phi_c - \frac{1}{4} \left[\partial_1 \phi^b \left(\frac{1}{\phi^c \phi_c} \right)^{1/2} \right] \right\} = 0. \tag{111}
$$

Ou seja, a evolução temporal deste vínculo T_2 com a nova hamiltoniana $\mathcal{H}$ é nula. Como consequencia, este processo não gera mais vínculos, nos mostrando que a nova hamiltoniana obtida também se tornou invariante de calibre.

5 CONCLUSÃO

Como discutido, diversos métodos de quantização estão disponíveis na literatura com as mais diversas abordagens. Algumas delas requerindo a adição de variáveis extras e exigindo um cuidado e atenção maiores em seu desenvolvimento e obtenção de seus resultados. Diferentes destes, os métodos abordados neste trabalho, em especial o *Gauge Unfixing* apresentam uma abordagem formidável de sistemas vinculados onde durante o processo, todos os resultados e suas simetrias surgem de forma natural e expontânea sem a necessidade de complicações como, por exemplo, a adição de termos à mão durante o seu processo.

Desta forma, neste trabalho foi apresentado o modelo sigma não linear que originalmente é um sistema de segunda classe e consequentemente sem simetria de Gauge. A partir dela obtivemos a simetria de gauge escondida através do *Gauge Unfixing* aprimorado convertendo o sistema para primeira classe. Durante o desenvolvimento ficou evidente a eficiência do método GU aprimorado, ao revelar que o cálculo de obtenção das novas variáveis invariantes de gauge e hamiltonianas canônicas ficaram menos longas, se comparado ao GU usual onde é aplicado o operador projeção diretamente na hamiltoniana canônica.

Por fim, a utilização deste método e a obtenção das teorias invariantes de gauge nos dois casos mostraram-se consistentes em seus resultados com relação ao seus respectivos sistemas originais. Além disso, estas teorias se revelaram equivalentes com outro método poderoso, que é o método de Dirac, resultando em seus respectivos parênteses de Poisson generalizados obtidos pelas duas vias sendo iguais. Em outras palavras a álgebra dos parênteses de Poisson com as novas variáveis obtidas via GU aprimorado é consistente com a álgebra obtida via parênteses de Dirac. Um ponto importante a ressaltar, é referente ao GU aprimorado nos dois casos, onde ficou nítida a presença do termo que corrige o sistema, descrito pelas equações (77), (107) e (108), uma vez que se estes termos forem nulos (T_2 e T_1 respectivamente), retornamos ao sistema original do modelo sigma não linear.

REFERÊNCIAS

1 Claudio Teitelboim Marc Henneaux. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991.

2 A. S. Vytheeswaran. Hidden symetries in second-class constrained systems: are new fields necessary? *Int. J. Mod. Phy. A*, 17(28):4095–4111, 2002.

3 L.S. Fadeev, L.D.and Shatashvili. Realization of the schwinger term in the gauss law and the possibility of correct quantization of a theory with anomalies. *Physics Letters B*, 167(2):225–228, 1986.

4 P. Mitra and R. Rajamaran. Gauge-invariant reformulation of theories with second-class constraints. *Annals of Physics*, 203(1):157–172, 1990.

5 K. Harada and H. Mukaida. Gauge invariance and systems with second-class constraints. *Z. Phys. C - Particles and Fields*, 48:151–157, 1990.

6 P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, 1964.

7 J.A Neto. An improved gauge unfixing formalism and the abelian pure chern-simons theory. *Braz. J. Phy.*, 37(3b), 2007.

8 P.R.F. Alves, C. N. Costa, E.M. Abreu, J.A. Neto, and A.C. Mendes. Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive carrol-field-jackiw model. *Euro Phys. Lett.*, 131(31004):157–172, 2020.

9 K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Springer-Verlag, 1982.

10 H. J. Rothe and K. D. Rothe. *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian System*. World Scientific, 2010.

11 A. Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 2008.

12 C. Domb and M. S. Green. Phase transitions and critical phenomena. *Academic, New York*, 1972.

13 F. D. M. Haldane. Nonlinear field theory of large-spin heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis néel state. *Phys. Lett.*, 93A(464), 1983.

14 I. A. Batalin and E.S. Fradklin. Operator quantization of dynamical dystems with irreducible first and second class constraints. *Phys. Lett. B*, 180:1–2, 1986.

15 I. A. Batalin and I.V. Tyutin. Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with abelian conversion of second class constraints. *Int. J. Mod. Phy. A*, 6, 1991.

16 Mitra P. and R Rajaraman. New results on systems with second-class constraints. *Annals of Physics, Elsevier*, 203:137–156, 1990.

17 A. S. Vytheeswaran. gauge invariances in the proca model. *International Journal of Modern Physics A, World Scientific*, 13:765–778, 1998.