Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Julio Cesar Lanazca Vargas

Um teorema de linking abstrato aplicado a uma equação assintoticamente linear

Juiz de Fora

2020

Julio Cesar Lanazca Vargas

Um teorema de linking abstrato aplicado a uma equação assintoticamente linear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lanazca Vargas, Julio Cesar.
Um teorema de linking abstrato aplicado
a uma equação assintoticamente linear / Julio Cesar Lanazca Vargas.
– 2020.
105 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Estrutura de linking. 2. Métodos variacionais. 3. Teoria espectral. I. Toon, Eduard orient. II. Título.

JULIO CESAR LANAZCA VARGAS

UM TEOREMA DE LINKING ABSTRATO APLICADO A UMA EQUAÇÃO ASSINTOTICAMENTE LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Aprovada em 02 de março de 2020

BANCA EXAMINADORA

Eduard Toon

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Fábio Rodrigues Pereira

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Universidade Federal de Juiz de Fora

Grey Ercole

Prof. Dr. Grey Ercole

Universidade Federal de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

Agradeço infinitamente à minha família, pelo apoio constante. Não poderia deixar de explicitar minha gratidão pela minha mãe: Aurea Vargas, pelo amor, exemplo de luta e perseverança. Às minhas irmãs: Blanca, Mercedes e Nátaly, pelo amor infinito. Ao meu sobrinho Fabián, que com sua chegada, encheu de felicidade nossas vidas.

Poderia escrever mil vezes obrigado, mas mesmo assim, não seria suficiente para mostrar minha gratidão à Dona Jurema Bento. Muito obrigado, Dona Jurema! À Patrícia Souza, pelos inúmeros cafés da manhã. À Irene Alves, à Priscila Alves e à Yulianna Sanchez. Agradeço a vocês pela amizade.

Agradeço ao meu orientador Eduard Toon, pela paciência e dedicação, que conduziu-me à realização deste trabalho. Meus agradecimentos aos professores Grigori Chapiro, pela amizade e pelos seus ensinamentos e ao professor Olímpio Miyagaki, pela sua humildade, ensinamentos e conselhos. Sou grato a todos os professores da UFJF, em particular, os professores e professoras: Flaviana Ribeiro, Alexei Deriglazov, Willian França, Laura Senos, Mateus Guimarães, Lonardo Rabelo, Joana Santos da Cruz, Hugo Fernandez. Obrigado pelos seus ensinamentos.

Agradeço aos professores Fábio Rodrigues e Grey Ercole, por aceitarem compor a banca examinadora da minha defesa.

Segundo Mario Quintana, no mundo há duas espécies de chatos: os chatos propriamente ditos e os amigos, que são os nossos chatos prediletos. Então, minha gratidão e carinho para eles e elas: Mariana Lourival, Edineia Brum, Edyenis Frango, Danilo Santana; pelos momentos compartilhados na salinha do mestrado. Sarah, Eli, Giovanna, Wilian ¨Wallace¨, Rodrigo, Marcelo, Mariane, Jéssica, Iris, Sebastián, Alejandra, Yvonne, Rosmery, Manuel... Agradeço a vocês pela sua amizade neste tempo todo. Muito obrigado à Mariana Campanha pelo seu carinho, pela sua grande ajuda e pelas aulas de jiu-jitsu. Obrigado ao Pablo Rojas, por ter-me ajudado nos gráficos do meu trabalho.

Finalizando esses agradecimentos, agradeço a todos os funcionários do departamento de Matemática de UFJF. Em particular, à Paula pela disponibilidade e atenção. Estendo meus agradecimentos à PROPP e à FAPEMIG, pelo auxílio financeiro durante o mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um teorema de linking abstrato para sequências de Cerami, porém sem usar a condição de Cerami. Este teorema será usado para obter solução não trivial para problemas indefinidos. Aplicaremos o teorema mencionado para obter uma solução não trivial, para a equação de Schrödinger,

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u), \text{ em que } g(x,s) = h(x)f(s),$$

na qual, a não linearidade f é assintoticamente linear e V é um potencial muito geral. Aplicando este resultado, será obtido um ponto crítico de um funcional associado ao problema. Este ponto crítico será uma solução fraca do problema. A teoria espectral será uma ferramenta fundamental para obter uma estrutura de linking do funcional associado ao problema mencionado.

Palavras-chave: estrutura de linking, métodos variacionais, teoria espectral, equação de Schrödinger, assintoticamente linear.

ABSTRACT

In this work, we present an abstract linking theorem for Cerami sequences, but without using the Cerami condition. This theorem will be used to obtain nontrivial solution to indefinite problems. We will apply the mentioned theorem to obtain a nontrivial solution for the Schrödinger equation,

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u), \text{ where } g(x,s) = h(x)f(s),$$

wherein the nonlinearity f is asymptotically linear and V is a very general potential. By applying this result, a critical point of a functional associated with the problem will be obtained. This critical point will be a weak solution to the problem. Spectral theory will be a fundamental tool for obtaining a linking structure to the functional associated with the mentioned problem.

Keywords: linking structure, variational methods, spectral theory, Schrödinger equation, asymptotically linear.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	subconjunto aberto e limitado.
$\partial\Omega$	fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	é o fecho de Ω.
A^c	o complementar do conjunto A.
$\|\Omega\|$	é a medida de Lebesgue de um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$
B_r	bola fechada de radio r, centrada no ponto 0.
$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}_r = (B_r \cap E_1) \oplus (B_r \cap E_2)$.
∇u	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
supp f	suporte da função *f*.
$D^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
$C(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\\|.\\|_0$	norma definida em $C(\overline{\Omega})$.
$C^1(\Omega)$	espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em Ω.
$C^1(\overline{\Omega})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\\|.\\|_{C^1}$	norma definida em $C^1(\overline{\Omega})$.
$C_0^1(\overline{\Omega})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$(C)_c$	sequência de Cerami no nível c.
q.t.p.	quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$L^\infty(\Omega)$ espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ onde $\sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty$ com norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev.

$H^k(\Omega)$ espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$, com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$L^p(\Omega)$ espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty.$$

$E_1 \hookrightarrow E_2$ imersão contínua entre os espaços E_1 e E_2.

$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

$E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$ imersão compacta entre os espaços E_1 e E_2.

E' espaço dual de E.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ produto interno definido em E.

$u_n \to u$ convergência forte.

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca.

$f = o(g)$ em x_0 denota $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$u_n = o_n(1)$, denota $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, será feito um estudo detalhado do artigo [32] de L. Maia e M. Soares, em que os objetivos principais são: apresentar um teorema de linking abstrato, e aplicá-lo para encontrar uma solução não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ para uma equação de Schrödinger.

No primeiro caso, L. Maia e M. Soares, inspiradas pelo trabalho de V. Benci e P.H. Rabinowitz [4], conseguem provar um novo teorema de linking para sequências de Cerami, o qual é uma versão mais geral do que principal resultado, provado por V. Benci e P.H. Rabinowitz (conferir [4], Teorema 2.9). Para obter este resultado, é provado um Lema de Deformação, porém adaptado para sequências de Cerami. O teorema abstrato é enunciado a seguir:

Teorema (Teorema de linking para sequências de Cerami.)

Seja E um espaço de Hilbert, com produto interno $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$, E_1 um subespaço fechado de E e $E_2 = E_1^{\perp}$. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisfazendo

(I_1) $I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, em que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$ e o operador $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$, em que $L_i : E_i \longrightarrow E_i$ é um operador linear, limitado e autoadjunto, para $i = 1, 2$.

(I_2) B é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.

(I_3) Existem variedades de Hilbert $S, Q \subseteq E$, tais que Q é limitado com fronteira ∂Q e existem constantes $\alpha > \omega$ e um vetor $v \in E_2$, tais que

(i) $S \subseteq v + E_1$ e $I(u) \geqslant \alpha$, para todo $u \in S$.

(ii) $I(u) \leqslant \omega$, para todo $u \in \partial Q$.

(iii) S e ∂Q são linking. (Ver Definição 2.1)

(I_4) Se $I(u_n)$ é limitada e $(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|, \to 0$, quando $n \to +\infty$, então (u_n) é limitada.

Então, I possui um valor crítico $c \geqslant \alpha$.

Note que, do item (I_2), obtemos que $B'(u)$ leva sequências fracamente convergentes em sequências forteme nte convergentes, o que nos fornece um tipo de compacidade para o funcional $I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$. Além disso, do item (I_4), vemos que a sequência de Cerami não precisa satisfazer a condição de Cerami. As, para obter um ponto crítico não trivial, apenas precisamos que a sequência seja limitada. Então podemos dizer que este item é uma versão fraca da condição de Cerami $(C)_c$.(Veja Definição 2.11, 2.12 e 2.13)

Juntas, as hipóteses (I_2) e (I_4), nos dão as primeiras condições para garantir a existência de um valor crítico c. De outro lado, graças aos itens (I_1) e (I_3) obtemos uma geometria de linking geral, que permite decompor o espaço de Hilbert em dois subespaços de dimensão infinita. Então, todas estas hipóteses juntas nos permitem obter um ponto crítico não trivial, para o funcional I. Na aplicação à Equação de Schrödinger, a forma de construir uma estrutura de linking é baseada num estudo das propriedades espectrais do operador de Schrödinger.

Na literatura, é possível encontrar um artigo de G. Li e C. Wang [29], que apresentou um argumento semelhante, introduzindo um novo tipo de Lema de Deformação, sem precisar da condição $(C)_c$ de Cerami, porém, no resultado abstrato, eles exigiram que um dos espaços na decomposição seja de dimensão finita, enquanto que no resultado aqui apresentado ambos os subespaços na decomposição podem ser de dimensão infinita. Também, é importante destacar que G. Li e A. Szulkin em [28] conseguiram uma sequência $(C)_c$ para o caso assintoticamente linear, porém, para obter uma solução não trivial, eles precisaram incluir condição de monoticidade da não linearidade, em um problema auxiliar, resolvido em [40].

Relacionado ao segundo objetivo do trabalho, P. Rabinowitz, em [37], estuda a equação de Schrödinger não linear

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{p-1}\psi,$$

em que $x \in \mathbb{R}^N$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.
Procurando por soluções para a equação anterior que sejam da forma $\psi(x,t) = \exp(-iEt/\hbar)u(x)$ obtém-se a seguinte equação diferencial parcial elíptica

$$-\Delta u + b(x)u = f(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

sob certas condições para b e f. Entre as condições para f pede-se que $t^{-1}zf(x,tz)$ seja crescente para todo $t > 0$ e $z \neq 0$. Isto permite restringir o problema à variedade de Nehari, definida por:

$$\mathcal{N} := \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}; I'(u)u = 0\right\},$$

em que I é o funcional energia associado ao problema dado em (1.1). P. Rabinowitz em [37] prova que o nível min-max do Passo da Montanha coincide com o ínfimo do funcional I, restrito à variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Além disso, este valor é um valor crítico para o funcional I.
Posteriormente ao trabalho de P. Rabinowitz mencionado, L. Maia e R. Lehrer em [27] estudam a equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito,

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

para $N \geqslant 3$ e $\lambda > 0$. Entre as condições para a não linearidade, as autoras consideram que $\dfrac{f(s)}{s}$, para $s > 0$ seja crescente. A equação estudada pelas autoras não pode ser resolvida usando variedades de Nehari, como foi feito por P. Rabinowitz, pois no trabalho de D. Costa e H. Tehrani [14] (cf. Proposição 2.2), os autores provaram que, se $\dfrac{f(s)}{s}$ para $s \geqslant 0$ é crescente e $f(s)$ é assintoticamente linear no infinito, o caminho $\gamma(t) := I(tu)$ não intersecta à variedade de Nehari para um único $t > 0$. Para contornar este problema e encontrar uma solução (positiva), as autoras em [27] trabalham sobre a variedade de Pohozaev.

Com o intuito de estender resultados para uma equação mais geral de Schrödinger, L. Maia e M. Soares estudaram em [32]

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u), x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tag{1.2}$$

em que V é um potencial muito geral, que torna o problema fortemente indefinido. Também, o fato de trabalhar com termos não lineares, que não satisfazem alguma condição de monoticidade, implica que não possam ser aplicadas projeções nas mencionadas variedades de Nehari (por exemplo, ver [34], [39]). Para isto, será, explorada a teoria espectral de operadores autoadjuntos, para conseguir a geometria de uma estrutura de linking e aplicar o resultado abstrato, para assim obter um valor crítico de um funcional associado à equação não linear. Dessa maneira, obteremos uma solução para o problema. A abordagem de construir uma estrutura de linking por meio de um estudo aprofundado das propriedades espectrais do operador de Schrödinger é uma novidade metodológica. Essa ideia melhora extremamente as referências atuais, pois destaca a relação fundamental entre o comportamento assintótico do termo não linear e as características do espectro.

Para conseguir nosso objetivo, usaremos métodos variacionais, isto é, associaremos ao problema (1.2) o funcional energia

$$\begin{aligned} I : H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx \end{aligned}$$

em que $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, e $F(s) \geqslant 0$. Então, centraremos nosso esforço em encontrar um ponto crítico para o funcional I e, com isso, obteremos uma solução fraca para o problema (1.2). Sob as condições do problema, provaremos que o funcional I satisfaz as condições geométricas e a condição de compacidade do teorema abstrato, e consequentemente obteremos um valor crítico $c > 0$, para o funcional I.

Assim, aplicaremos o teorema abstrato (Teorema 2.14) o que nos dará $c > 0$, um valor crítico do funcional I. Logo, existirá u, tal que $I(u) = c > 0$. O trabalho [13] de D. Costa e H. Tehrani, é também uma boa referência a ser citada, pois a mesma função V é apresentada por eles. Mais especificamente, eles precisam das hipóteses (V_1) e (V_2) do

Capítulo 5, isto implica que ou 0 é um ponto isolado de $\sigma(A)$ ou está num intervalo do espectro. Contudo, eles não trabalham com um problema assintoticamente linear como é nosso caso, mas assumem a conhecida condição de Ambrosetti- Rabinowitz e precisam de uma não linearidade não decrescente. Além disso, no lugar de usar um teorema de linking abstrato, eles usam um método de aproximações para resolver o problema proposto.

No início deste trabalho foi necessário um estudo prévio de vários resultados e definições, dentre eles: Espaços de Sobolev, Teoria Espectral e resultados de Medida e integração. Estes resultados são apresentados nos Apêndices do trabalho.

O presente trabalho está estruturado como segue :
No Capítulo 2, são apresentadas algumas definições relacionadas às variedades linking e dados alguns exemplos destes conjuntos. Além disso, são apresentadas definições, tais como uniformemente diferenciável e fracamente contínuo, necessárias para a prova do Lema 2.10, que será usado no Capítulo 3, para provar o Lema de Deformação. Ainda neste capítulo, são definidas sequências e condições de Cerami e, em seguida, é apresentado o Teorema de linking abstrato.

No capítulo 3 é enunciado e provado o Lema 3.1, Lema de Deformação. Este lema é muito importante na prova do Teorema de linking abstrato, inspirado por Benci e Rabinowitz, em [4].

No Capítulo 4 é provado o teorema principal, Teorema 2.14. Nele precisa-se provar que o nível min-max $c := \inf_{h\in\Lambda} \sup_{u\in\overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big) \geqslant \alpha$, é um valor crítico de um funcional I. Isso garante que se $\alpha > 0$, o ponto crítico associado ao valor crítico c, é não nulo.

Por fim, no Capítulo 5, o teorema de linking abstrato é aplicado à equação de Schrödinger com o objetivo de conseguir uma solução não trivial para um problema do tipo (1.2) . Neste capítulo, o trabalho será provar que o funcional associado ao problema, satisfaz todas as hipóteses do teorema abstrato, para $\alpha > 0$. Com isto, podemos obter um valor crítico de I e, consequentemente, obter uma solução fraca não trivial do problema.

2 A NOÇÃO DE LINKING E ALGUMAS DEFINIÇÕES

Nesta seção, apresentamos a noção de linking e provamos uma nova versão do Teorema de linking de abstrato, baseado em [4], porém com sequências de Cerami (Teorema 2.14). Ao longo desta seção, E sempre denotará um espaço de Hilbert, salvo menção contrária. Além disso, $E = E_1 \oplus E_2$, em que E_1 e E_2, serão subespaços de E. Se $u \in E$, escreveremos $u = u_1 + u_2$, com $u_i \in E_i$, para $i = 1, 2$. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} P_i :& E \longrightarrow E_i \\ & u \longmapsto P_i(u) := P_i u = u_i, \end{aligned}$$

como sendo a projeção sobre E_i, para $i = 1, 2$. Além disso, denotaremos as aplicações do espaço $[0, 1] \times E$ sobre o espaço E, por

$$\begin{aligned} h : & [0, 1] \times E \longrightarrow E \\ & (t\,, u) \longmapsto h(t, u) = h_t(u) \end{aligned}$$

Também denotaremos por B_r à bola fechada em E, centrada em zero, de raio r. Além disso, definimos a bola $\mathfrak{B}_r = (B_r \cap E_1) \oplus (B_r \cap E_2)$.

Definimos Σ como a classe de aplicações

$$\Sigma = \Big\{\phi \in C([0, 1] \times E, E) : \; P_2\phi_t(u) = u_2 - W_t(u), \, \forall\, t \in [0, 1] \text{ e } \phi_0(u) = u\Big\} \tag{2.1}$$

em que $W_t : E \longrightarrow E_2$ é um operador compacto (ver Definição C.3).

Definição 2.1. (*Ver [4], Seção 1, p.243*)
Sejam S, Q variedades de Hilbert (ver Definição C.2) em E, em que ∂Q é a fronteira de Q. Dizemos que S e ∂Q são ***linking*** se, sempre que $\phi \in \Sigma$ e $\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$, para todo $t \in [0, 1]$, temos $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$, para todo $t \in [0, 1]$.

Observação 2.2. (*Ver [4], Seção 1, p.243*) Uma compreensão geométrica para esta definição, é que S e ∂Q são linking se toda variedade de Hilbert, modelada em Q e compartilhando a mesma fronteira com Q, intersecta S.

2.1 Exemplos de variedades que são linking.

A seguir, apresentaremos dois lemas, os quais nos dão exemplos de variedades que são linking. O primeiro lema nos dá uma condição necessária para que duas variedades de Hilbert particulares sejam linking (ver Figura 1). Aqui, $\overset{\circ}{B}_R$ denotará o interior da bola fechada B_R.

.

Lema 2.3. *(Ver [4], Lema 1.1, p.243)*
Sejam $Q = \overset{\circ}{B}_R \cap E_2$, $q \in Q$, *e* $S = q + E_1$. *Então* S *e* ∂Q *são linking.*

Demonstração:

Da Definição 2.1, de linking, tomemos $\phi \in \Sigma$, tal que

$$\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset, \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Assim, para que S e ∂Q sejam linking, devemos provar que

$$\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset, \text{para todo } t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Primeiramente, provaremos a seguinte equivalência:

$$\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists\, q_t \in Q, \text{ tal que } P_2\phi_t(q_t) = q,$$

para todo $t \in [0,1]$ e q é tal que $S = q + E_1$, como no lema acima.
Com efeito,
$\Rightarrow$] Seja $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$.
Então, para cada $t \in [0,1]$, existe $a_t \in \phi_t(Q)$ e $a_t \in S = q + E_1$. Isto implica que existem $q_t \in Q$ e $e_1 \in E_1$, tais que

$$\phi_t(q_t) = a_t = q + e_1.$$

Logo, avaliando no operador projeção P_2, temos

$$P_2\phi_t(q_t) = P_2 a_t = P_2(q + e_1) = q.$$

Assim, se $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$, então, existe $q_t \in Q$, tal que $P_2\phi_t(q_t) = q$, para todo $t \in [0,1]$.

$\Leftarrow$] Seja $q_t \in Q$, tal que $P_2\phi_t(q_t) = q$, para todo $t \in [0,1]$.
Então, existe $\hat{e}_1 \in E_1$, tal que $\phi_t(q_t) = q + \hat{e}_1$, isto acarreta que

$$\phi_t(q_t) \in q + E_1 = S.$$

Além disso, como $q_t \in Q$, então $\phi_t(q_t) \in \phi_t(Q)$, donde $\phi_t(q_t) \in \phi_t(Q) \cap S$, isto é $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$. Logo, a equivalência fica provada.

Ou seja, da equivalência provada acima, para conseguir (2.3), apenas precisamos provar que existe $q_t \in Q$, tal que $P_2\phi_t(q_t) = q$, para todo $t \in [0,1]$.
Para conseguir isto, tomemos $u \in E_2$, e definamos, para todo $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \psi_t : E_2 &\longrightarrow E_2 \\ u &\longmapsto \psi_t(u) := P_2\phi_t(u) = u - W_t(u), \end{aligned} \tag{2.4}$$

de onde vemos que (2.4) tem a forma apropriada para aplicar a teoria de grau de Leray-Schauder (ver Apêndice D).
Das definições da teoria de grau de Leray-Schauder, dadas na Seção D.1, consideremos a terna admissível (ψ_t, Q, q). Assim, para usar as propriedades da teoria de grau de Leray-Schauder do Teorema D. 5, precisamos verificar que

- $Q = \overset{\circ}{B}_R \cap E_2$ é aberto e limitado (evidente).

- $q \notin \psi_t(\partial Q)$.
  Suponhamos que exista $q \in \psi_t(\partial Q)$, de modo que existe $\hat{q}_t \in \partial Q$. Considerando a definição de ψ_t, temos
  $$q = \psi_t(\hat{q}_t) = P_2\phi_t(\hat{q}_t),$$
  donde segue que existe $\hat{e}_1 \in E_1$, tal que
  $$\phi_t(\hat{q}_t) = q + \hat{e}_1 \in q + E_1 = S. \tag{2.5}$$
  Além, disso, como $\hat{q}_t \in \partial Q$, então $\phi_t(\hat{q}_t) \in \phi_t(\partial Q)$. Com isto, e da expressão (2.5), finalmente obtemos $\phi_t(\partial Q) \cap S \neq \emptyset$, o que é uma contradição com a expressão (2.2). Portanto, $q \notin \psi_t(\partial Q)$.

Pelas propriedades (P_2), (P_3), da invariância homotópica, da teoria de grau de Leray-Schauder (ver Apêndice D), obtemos $\deg(\psi_t, Q, q) = \deg(\psi_0, Q, q)$. Como $\phi \in \Sigma$, segue que $\phi_0(u) = u$. Assim, da igualdade (2.4) obtemos $\psi_0(u) = u$, isto é $\psi_0 = Id$.
Da propriedade (P_1), da normalização, obtemos $\deg(\psi_0, Q, q) = 1$, pois $\psi_0 = Id$. Pela propriedade (P_2), temos que existe um $q_t \in Q$, tal que $P_2\phi_t(q_t) = \psi_t(q_t) = q$, para todo $t \in [0,1]$, como queríamos provar. Assim, obtemos que S e ∂Q são linking. □

.

Observação 2.4. O lema seguinte descreve um tipo de linking diferente (ver Figura 2). Este resultado, será de grande importância, para garantir a existência de um valor crítico para um certo funcional, como veremos posteriormente.

.

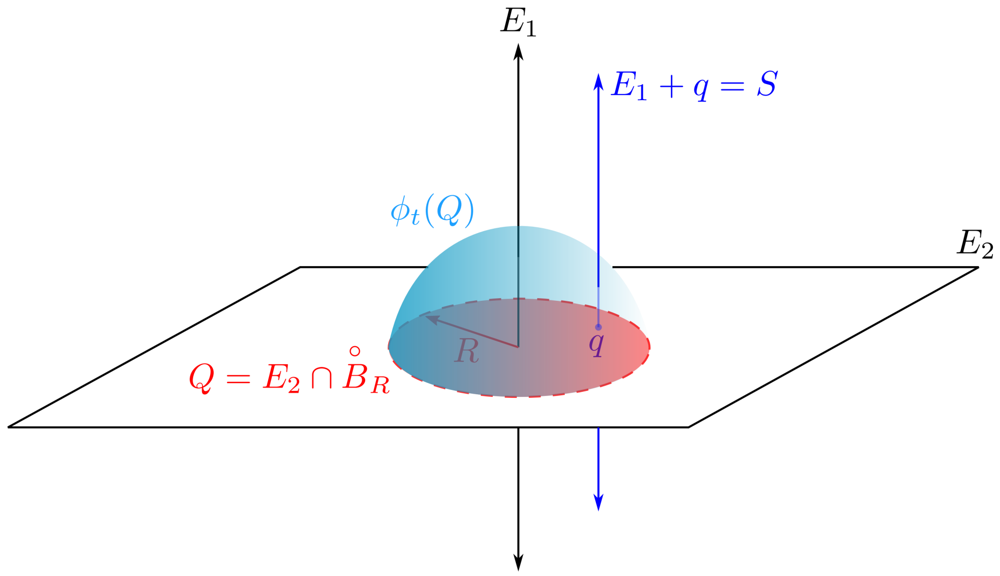

Figura 1 – Variedades linking do Lema 2.3

Fonte: O próprio autor.

Lema 2.5. *(Ver [4], Lema 1.2, p.244)*
Sejam $e \in \partial B_1 \cap E_1$ *e* $r_1 > \rho > 0$. *Se* $Q = \Big\{re, \ \ r \in [0, r_1]\Big\} \oplus \Big(B_{r_2} \cap E_2\Big)$ *e* $S = \partial B_\rho \cap E_1$, *então* S *e* ∂Q *são linking.*

Demonstração: Seja $\phi \in \Sigma$, isto é $\phi_t : E \longrightarrow E$, tal que $P_2\phi_t(u) = u_2 - W_t(u)$, em que $\phi_0(u) = u$ e W_t é um operador compacto, para todo $t \in [0, 1]$. Agora suponhamos que

$$\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset, \quad \forall\, t \in [0, 1]. \tag{2.6}$$

Assim, para verificar que S e ∂Q são linking, vamos provar que

$$\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Tomando $t \in [0, 1]$, fixo e arbitrário, temos a seguinte equivalência:

$$\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists\, q_t \in Q, \text{ tal que } P_2\phi_t(q_t) = 0 \quad \text{e} \quad \|P_1\phi_t(q_t)\| = \|\phi_t(q_t)\| = \rho. \tag{2.7}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \exists\, a_t \in \phi_t(Q) \cap S = \phi_t(Q) \cap (\partial B_\rho \cap E_1) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, a_t \in \phi_t(Q) \text{ e } \exists\, q_t \in Q, \text{tal que } \phi_t(q_t) = a_t,\ \|a_t\| = \rho, \text{ com } a_t \in E_1 \\ &\Longleftrightarrow \exists\, q_t \in Q, \text{ tal que } \phi_t(q_t) = a_t, \text{ para algum } a_t \in E_1, \text{com } \|a_t\| = \rho \\ &\Longleftrightarrow \exists\, q_t \in Q, \text{ tal que } P_2\phi_t(q_t) = P_2 a_t = 0 \quad \text{e} \quad \|P_1\phi_t(q_t)\| = \rho. \end{aligned}$$

Como t foi tomado fixo e arbitrário, temos que a equivalência se cumpre para todo $t \in [0, 1]$.

Por outro lado, sejam $r \in \mathbb{R}$ e $u \in E_2$, então definimos

$$\begin{aligned} \psi_t : Q &\longrightarrow \mathbb{R} \times E_2 \\ (re+u) &\longmapsto \psi_t(re+u) := \Big(\big\| P_1\phi_t(re+u) \big\| - \rho \, , P_2\phi_t(re+u) \Big) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Com o mesmo raciocínio usado no lema anterior, tomando $\mathring{Q}$ o interior de Q, em que $\partial\mathring{Q} = \partial Q$, provaremos que $deg(\psi_t, \mathring{Q}, 0)$ está bem definido. Isto é, provaremos que

- $\mathring{Q}$ é aberto e limitado (evidente).
- $0 = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) \notin \psi_t(\partial Q)$, para todo $t \in [0,1]$.

Com o intuito de provar o último item, provemos a seguinte equivalência, para cada $t \in [0,1]$

$$\phi_t(\partial Q) \cap S \neq \emptyset \iff 0 = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) \in \psi_t(\partial Q).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \phi_t(\partial Q) \cap S \neq \emptyset &\iff \exists\, a_t \in \phi_t(\partial Q) \quad \text{e} \quad a_t \in S = \partial B_\rho \cap E_1 \\ &\iff \exists\, q_t \in \partial Q, \text{ tal que } \ \phi_t(q_t) = a_t \in E_1 \quad \text{e} \quad \|a_t\| = \rho \\ &\iff \exists\, q_t \in \partial Q, \text{ tal que } P_2\phi_t(q_t) = P_2 a_t = 0_{E_2} \text{ e } \ \big\| P_1\phi_t(q_t) \big\| = \|P_1 a_t\| = \rho \\ &\overset{(*)}{\iff} \exists\, r \in \mathbb{R} \text{ e } u \in E_2, \text{ tais que } q_t = u + re, \text{ com } \psi_t(re+u) = 0 = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) \\ &\iff 0 = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) \in \psi_t(\partial Q). \end{aligned}$$

Note que em $(*)$, a existência de r e u, é garantida pela definição de Q. Além disso, da definição de ψ_t, dada em (2.8), para esses r e u, temos

$$\psi_t(q_t) = \psi_t(u+re) = \Big(\big\| P_1\phi_t(re+u) \big\| - \rho \, , P_2\phi_t(re+u) \Big) = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) = 0,$$

assim, a equivalência fica provada. Agora, provaremos o segundo item e assim obter que $deg(\psi_t, \mathring{Q}, 0)$ está bem definido.

Como de (2.6), temos que $\psi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$, para todo $t \in [0,1]$, então da equivalência acima, obtemos que $0 = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) \notin \phi_t(\partial Q)$, para todo $t \in [0,1]$. Além disso, pela propriedade (P_3), da invariância homotópica, segue que

$$d(\psi_t, Q, 0) = d(\psi_0, Q, 0) \tag{2.9}$$

Agora, devido a $\phi \in \Sigma$, obtemos $\phi_0(u) = u$, e com isso conseguimos

$$\begin{aligned} \psi_0(re+u) &= \Big(\big\| P_1\phi_0(re+u) \big\| - \rho \, , \ P_2\phi_0(re+u) \Big) = \Big(\big\| P_1(re+u) \big\| - \rho \, , \ P_2(re+u) \Big) \\ &= \Big(\|re\| - \rho \, , u \Big) = \Big(r - \rho \, , u \Big), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}\psi_0(re+u) = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2}) = 0 &\iff r-\rho = 0_{\mathbb{R}} \text{ e } u = 0_{E_2}\\ &\iff r=\rho\in(0,r_1) \text{ e } u = 0 \in E_2\\ &\iff re+u = \rho e + u \in Q,\end{aligned}$$

em que a última equivalência é consequência da definição de Q, na hipótese do lema. Então, pela propriedade (P_1), de normalização, $d(\psi_0, Q, 0) = 1$. Pelo obtido em (2.9), segue $d(\psi_t, Q, 0) = 1$ e, consequentemente, pela propriedade (P_2), existe $q_{t_0} \in Q$, tal que $\psi_t(q_{t_0}) = (0_{\mathbb{R}}, 0_{E_2})$, isto é $\|P_1\phi_t(q_{t_0})\| = \rho$ e $P_2\phi_t(q_{t_0}) = 0_{E_2}$. Pela equivalência dada na expressão (2.7), obtemos que $\phi_t(Q)\cap S \neq \emptyset$, para todo $t\in[0,1]$. Assim, S e ∂Q são linking. $\square$

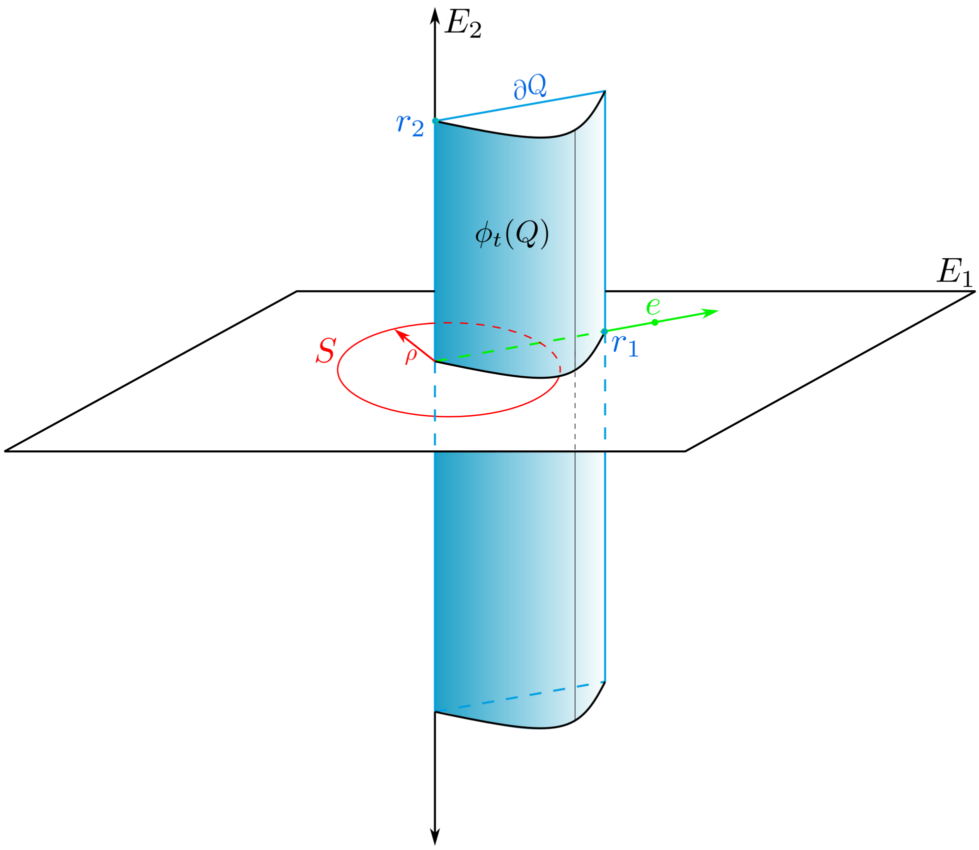

Figura 2 – Variedades linking do Lema 2.5

Fonte: O próprio autor.

.

Antes de enunciar o Teorema de linking abstrato, que será provado no Capítulo 4, daremos algumas definições e provaremos um lema. Este lema será usado na prova de um Lema de Deformação e do teorema antes mencionado.

.

Definição 2.6. (*Ver [36], Seção 1, p.1)*
Sejam E um espaço de Banach e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. I é chamado ***Fréchet diferenciável*** em $u \in E$, se existe uma aplicação linear contínua $F(u)$, em que

$$\begin{aligned} F(u) :& E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \longmapsto F(u)(v) := F(u)v \end{aligned}$$

satisfazendo: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$, tal que

$$\Big| I(u+v) - I(u) - F(u)v \Big| \leqslant \varepsilon \|v\|, \text{ para todo } v \in E, \text{ tal que } \|v\| < \delta.$$

Denotaremos a aplicação linear $F(u)$ por $I'(u)$. Note que $I'(u) \in E'$, em que E' é o espaço dual de E.

Definição 2.7. (*Ver [4], Observação (0.2), p.242)*
Seja E um espaço de Banach e $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que B é ***uniformemente diferenciável*** em subconjuntos limitados de E, se para quaisquer R, $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(R, \varepsilon) > 0$, independente de u, tal que

$$\Big| B(u+v) - B(u) - B'(u)v \Big| < \varepsilon \|v\|, \quad \forall u, u+v \in B_R, \text{ e } \|v\| < \delta.$$

Em que $B'(u)$ denota a derivada de Fréchet do funcional B, no ponto u.

Definição 2.8. (*Ver [4], Observação (0.2), p.242)*
Seja E um espaço de Banach e $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que B é ***fracamente contínuo***, se para toda sequência $(u_n) \subseteq E$, tal que $u_n \rightharpoonup u$, então $B(u_n) \longrightarrow B(u)$.

Definição 2.9. (*Ver [6], Definição 7.1, p.81*)
Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $T : E \longrightarrow F$, linear e limitado é chamado ***completamente contínuo***, se para toda sequência $(u_n) \subseteq E$, tal que $u_n \rightharpoonup u$, então $\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0$.

Lema 2.10. *(Ver [32], Lema 2.3, p.5)*
Seja $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E. Então $B' : E \longrightarrow E'$ é completamente contínuo.

Demonstração: Como E um espaço de Hilbert, E é um espaço de Banach, com a norma induzida pelo produto interno. Além disso, E' também é um espaço de Banach. (Ver Teorema C.10)
De acordo com a Definição 2.9, consideremos uma sequência arbitrária $(u_n) \subseteq E$, tal que

$u_n \rightharpoonup u$, em que u é algum elemento de E. Para provar que B' é completamente contínuo, devemos provar que

$$\|B'(u_n) - B'(u)\|_{E'} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Equivalentemente, provaremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|B'(u_n) - B'(u)\|_{E'} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geqslant n_0.$$

Como foi tomado $u_n \rightharpoonup u$, (u_n) é limitada, isto é, existe $R > 0$, tal que $u_n \in B_R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como a bola B_R é convexa, pelo Teorema C.8. temos que $u \in B_R$. Isto é,

$$u \in \overset{\circ}{B}_R \text{ e } u_n \in \overset{\circ}{B}_R. \tag{2.10}$$

Da convergência fraca tem-se também que $u_n + v \rightharpoonup u + v$, para todo $v \in E\backslash\{0\}$, fixo e arbitrário. Como B é fracamente contínuo, obtemos

$$B(u_n) \longrightarrow B(u) \quad \text{e} \quad B(u_n + v) \longrightarrow B(u + v).$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant n_1, n_2$, tem-se

$$\frac{\left|B(u_n) - B(u)\right|}{\|v\|} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad \frac{\left|B(u_n + v) - B(u + v)\right|}{\|v\|} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.11}$$

Da definição de norma de um operador, temos

$$\Big\| B'(u_n) - B'(u) \Big\|_{E'} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\right|}{\|v\|}. \tag{2.12}$$

Assim, no lado direito da equação (2.12), somando e subtraindo alguns termos adequadamente, e usando a desigualdade triangular em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\right| &= \Big|B'(u_n)v - B'(u)v\Big| \\
&= \Big|B'(u_n)v + B(u_n) - B(u_n + v) + B(u + v) - B(u) - B'(u)v \\
&\quad - B(u_n) + B(u) + B(u_n + v) - B(u + v)\Big| \\
&\leqslant \Big|B'(u_n)v + B(u_n) - B(u_n + v)\Big| + \Big|B(u + v) - B(u) - B'(u)v\Big| \\
&\quad + \Big|B(u_n) - B(u)\Big| + \Big|B(u_n + v) - B(u + v)\Big|
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Da expressão (2.10), tomemos $v \in E\backslash\{0\}$, com $\|v\| < \delta$, tal que $u + v \in \overset{\circ}{B}_R$ e $u_n + v \in \overset{\circ}{B}_R$. Como B é uniformemente diferenciável, podemos tomar $R > 0$ e $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{1}{2n}$, obtendo

$$\Big|B(u + v) - B(u) - B'(u)v\Big| \leqslant \frac{1}{2n}\|v\|. \tag{2.14}$$

e

$$\Big|B'(u_n)v + B(u_n) - B(u_n + v)\Big| \leqslant \frac{1}{2n}\|v\|. \tag{2.15}$$

Logo, substituindo as desigualdades (2.14) e (2.15) na expressão (2.13) e dividindo pela norma $\|v\|$, em que $v \neq 0$, resulta

$$\frac{\Big|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\Big|}{\|v\|} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\Big|B(u_n) - B(u)\Big|}{\|v\|} + \frac{\Big|B(u_n + v) - B(u + v)\Big|}{\|v\|}.$$

Das desigualdades (2.11), tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, obtemos da expressão anterior

$$\frac{\Big|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\Big|}{\|v\|} < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \, \forall n \geqslant n_0.$$

Então, tomando o limite quando $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Big|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\Big|}{\|v\|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequentemente, para todo n suficientemente grande,

$$\frac{\Big|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\Big|}{\|v\|} < \frac{3}{4}\varepsilon, \text{ em que } v \neq 0,$$

e, finalmente,

$$\Big\|B'(u_n) - B'(u)\Big\|_{E'} = \sup_{v \neq 0} \frac{\Big|\Big(B'(u_n) - B'(u)\Big)v\Big|}{\|v\|} \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon, \, \forall n \geqslant n_0.$$

Isto é, $B' : E \longrightarrow E'$ é completamente contínuo.

□

A seguir apresentaremos as definições de sequências de Cerami e de sequências de Cerami no nível c.

Definição 2.11. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subseteq E$, é uma ***sequência de Cerami***, ou de forma reduzida, ***sequência* (C)**, se ela satisfaz:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n) < \infty \quad \text{e} \quad \Big(1 + \|u_n\|\Big)\|I'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Definição 2.12. Dado $c \in \mathbb{R}$, uma sequência $(u_n) \subseteq E$, é dita ***sequência de Cerami no nível c***, ou em forma reduzida, ***sequência* $(\mathbf{C})_\mathbf{c}$**, se ela satisfaz:

$$I(u_n) \longrightarrow c, \quad \text{e} \quad \Big(1 + \|u_n\|\Big)\|I'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Definição 2.13. Dizemos que o funcional I, verifica a ***condição de Cerami***, quando toda sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em E. Isto é,

$$I(u_n) \longrightarrow c, \quad \Big(1 + \|u_n\|\Big)\|I'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e existem

$$(u_{n_j}) \subseteq (u_n) \text{ e } u_0 \in E, \text{ tais que } u_{n_j} \longrightarrow u_0 \text{ em } E.$$

Lembremos que $(u_n) \subseteq E$ é uma ***sequência de Palais-Smale no nível c***, ou de forma breve $(PS)_c$, se

$$I(u_n) \longrightarrow c, \quad \|I'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0.$$

E dizemos que o funcional I satisfaz a ***condição***$(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente em E.
Das definições anteriores, vemos que se um funcional I satisfaz a condição $(C)_c$, então o funcional também satisfaz a condição $(PS)_c$. O que nos diz que a condição $(C)_c$ é uma condição mais fraca que a condição $(PS)_c$.

2.2 Teorema de linking abstrato.

No teorema a seguir, definiremos o conjunto Γ, como sendo

$$\Gamma = \Big\{ h \in C\Big([0,1] \times E, E\Big), \text{ tal que } h \text{ satisfaz } (\Gamma_1), \ldots, (\Gamma_4) \Big\}, \text{ em que}$$

(Γ_1) $h_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, em que $U, K \in C\Big([0,1] \times E, E\Big)$, U_t é um homeomorfismo de E em E e K_t é um operador compacto, para cada $t \in [0,1]$;

(Γ_2) $U_0(u) = u$, $K_0(u) = 0$;

(Γ_3) $P_i(U_t(u)) = U_t(P_i(u))$, para $i = 1, 2$;

(Γ_4) h_t leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Além disso, para $h \in \Gamma$, denotaremos por $h_t^j(u)$ a $j-$ ésima composição de h_t com ele mesmo, isto é $h_t^1(u) = h_t(u)$, $h_t^2(u) = h_t(h_t(u))$ e $h_t^j(u) = h_t(h_t^{j-1}(u))$, para $j > 1$.

Agora estamos em condições de enunciar o teorema de linking para sequências de Cerami da introdução (Ver [32], Teorema 2.4, p.5).

Teorema 2.14. (**Teorema de linking abstrato**)

Seja E um espaço de Hilbert, com produto interno $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$, E_1 um subespaço fechado de E e $E_2 = E_1^{\perp}$. Seja $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, satisfazendo

(I_1) *$I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, em que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$ e $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$, em que $L_i : E_i \longrightarrow E_i$ é um operador linear, limitado e autoadjunto, para $i = 1, 2$.*

(I_2) *B é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.*

(I_3) *Existem variedades de Hilbert $S, Q \subseteq E$, tais que Q é limitada com fronteira ∂Q e existem constantes $\alpha > \omega$ e um vetor $v \in E_2$, tais que*

(i) $S \subseteq v + E_1$ e $I(u) \geqslant \alpha$, para todo $u \in S$.

(ii) $I(u) \leqslant \omega$, para todo $u \in \partial Q$.

(iii) S e ∂Q são linking.

(I_4) *Denotemos*

$$c := \inf_{h\in\Lambda}\sup_{u\in\overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big), \quad \text{em que } \overline{Q} \text{ é o fecho de } Q \tag{2.16}$$

e

$$\Lambda = \left\{ h \in C\Big([0,1]\times E, E\Big), \text{tal que} \quad \begin{array}{l} \bullet\ h = h^{(1)} \circ h^{(2)} \circ ... \circ h^{(m)}, \\ \quad \text{em que } h^{(1)}, ..., h^{(m)} \in \Gamma, m \in \mathbb{N}. \\ \bullet\ h_t(\partial Q) \subseteq I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}, \beta \in \Big(0, \dfrac{\alpha-\omega}{2}\Big) \end{array} \right\}, \tag{2.17}$$

em que $I^{\lambda} = \Big\{u \in E : I(u) \leqslant \lambda\Big\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h^{(1)}, \cdots, h^{(m)}$, são m elementos (diferentes ou não) de Γ.
Se para uma sequência (u_n), existe uma constante $b > 0$ tal que $(u_n) \subseteq I^{-1}([c-b, c+b])$ e $\Big(1 + \|u_n\|\Big)\|I'(u_n)\| \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$; então a sequência (u_n) é limitada em E.

Então, $c \geqslant \alpha$ e c é um valor crítico de I.

3 UM LEMA DE DEFORMAÇÃO QUANTITATIVO E PROVAS DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Inspirado por [4], é adequado definir uma variante do Lema da Deformação quantitativo (Ver [32], Lema 3.1, p.6) para sequências de Cerami, sem a condição de Cerami, o que é necessário para provar o Teorema 2.14. Em seguida, enunciaremos e provaremos tal lema.

3.1 Lema de Deformação.

Lema 3.1. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisfazendo as condições $(I_1)-(I_2)$ do Teorema 2.14. Para quaisquer $R \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ e $\varepsilon \in \left(0\,,\frac{1}{10}\right)$; se $s := (R+2)^2$, então existem $k \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \Gamma$ tais que:*

(i) $I(\eta_t^{ks}(u)) \leqslant I(u) + \rho$, *para todo* $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$ *e todo* $t \in [0, 1]$.

(ii) *Se* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\Big(1 + \|w\|\Big)\|I'(w)\|_{E'} \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$, *para todo* $w \in \mathfrak{B}_{R+1} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$, *então* $I(\eta_1^{ks}(u)) \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2}$, *sempre que* $u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$.

Antes de começar a demonstração, tenhamos em conta as seguintes considerações:

- Como $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, então temos que I é diferenciável no sentido de Fréchet e $I' : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é contínuo. Pelo fato de I ser Fréchet diferenciável, temos que $I'(u)$ é linear e limitado, isto é $I'(u) \in E'$, em que E' é espaço dual de E. O teorema de Representação de Riesz (ver [25], Teorema 3.8-1, p.188), nos garante que o espaço E é isomorfo ao seu dual E' ($E \backsimeq E'$). Assim, todo elemento de E, pode ser representado por um elemento de E', e vice-versa.

- Também, da hipótese do Teorema 2.14, temos que E_1 é um subespaço fechado de E, com $E_2 = E_1^{\perp}$; então $E = E_1 \oplus E_2$ (Ver, [25] Teorema 3.3-4, p.146) e com isto, podemos escrever cada elemento u de E, de forma única, com elementos de E_1 e E_2. Isto é, dado $u \in E$, escreveremos $u = u_1 + u_2$, em que $u_i \in E_i$, para $i = 1, 2$.

- Por último, como E_1 é fechado, então $E_2 = E_1^{\perp}$ é fechado. Tendo como hipótese que E é completo, pois é um espaço de Hilbert, e tendo E_i fechado, então E_i é completo, para $i = 1, 2$. Daí, podemos definir a norma (Ver [24], Seção 4, p. 171), para $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, como sendo

$$\|u\|^2 = \|u_1\|_{E_1}^2 + \|u_2\|_{E_2}^2, \tag{3.1}$$

em que $\|.\|_{E_i}$ são normas nos espaços E_i, que são também espaços de Banach, com a norma de E, restrita ao subespaço E_i, para $i = 1, 2$. No que segue, denotaremos simplesmente

$$\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2,$$

desde que não haja confusão. Com isto temos que se $u \in \mathfrak{B}_R$, então $\|u\| \leqslant R$, consequentemente $\|u_i\| \leqslant R$, para $i = 1, 2$; em que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$.

Demonstração: Primeiro, escolhemos $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que

$$\begin{aligned}
&\chi(s) = 1, && \text{se} \quad s \leq R+1,\\
&\chi(s) = 0, && \text{se} \quad s \geq R+2,\\
&\chi'(s) < 0, && \text{se} \quad s \in (R+1, R+2),\\
&\chi(s) \leqslant (R+2-s)^2, && \text{se} \quad s \in \left[R + \frac{3}{2}, R+2\right].
\end{aligned}$$

Das considerações acima, podemos tomar $I'(u)$ como um elemento de E e podemos definir, para $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, o seguinte operador

$$\begin{aligned}
V_i : E &\longrightarrow E_i\\
u &\longmapsto V_i(u) := \chi(\|u_i\|) P_i I'(u),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $P_i : E \longrightarrow E_i$ é o perador projeção do espaço E no espaço E_i, para $i = 1, 2$. Definimos também

$$\begin{aligned}
V : E &\longrightarrow E\\
u &\longmapsto V(u) := V_1(u) + V_2(u).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Se tomamos $u \in \mathfrak{B}_{R+1} = (B_{R+1} \cap E_1) \oplus (B_{R+1} \cap E_2)$, então $\|u_i\| \leqslant R+1$, para $i = 1, 2$. Assim, da definição de χ, obtemos que $\chi(\|u_i\|) = 1$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+1}$, e para $i = 1, 2$; em que $u = u_1 + u_2$. Logo,

$$\begin{aligned}
V(u) &= V_1(u) + V_2(u) = \chi(\|u_1\|)\, P_1 I'(u) + \chi(\|u_1\|)\, P_2 I'(u)\\
&= P_1 I'(u) + P_2 I'(u) = I_1'(u) + I_2'(u) = I'(u), \quad \text{em que } \; I_i'(u) \in E_i, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$V(u) = I'(u), \;\; \text{para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+1}. \tag{3.4}$$

Além disso, usando as hipóteses (I_1) e (I_2) do Teorema 2.14, podemos conseguir uma constante $M = M(R) > 0$, tal que $\|I'(u)\|_{E'} \leqslant M$, para u na bola fechada $\mathfrak{B}_{R+2}$. Tal fato será provado na afirmação seguinte.

Afirmação 3.2. *Se o funcional I cumpre (I_1) e (I_2) do Teorema 2.14, então existe uma constante $M = M(R) > 0$, tal que $\|I'(u)\|_{E'} \leq M$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$.*

Demonstração: Da condição (I_1), temos que $I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, em que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$. Então, derivando o operador I, temos

$$I'(u)v = \frac{1}{2}\langle Lu, v\rangle + \frac{1}{2}\langle u, Lv\rangle + B'(u)v, \text{ para todo } v \in E.$$

Como L_i é linear, autoadjunto e limitado, para cada $i = 1, 2$ e devido a $L = L_1 + L_2$, temos que L é linear, autoadjunto e limitado, donde podemos escrever a expressão anterior como

$$I'(u)v = \langle Lu, v\rangle + B'(u)v, \text{ para todo } v \in E.$$

Então, provar que $\|I'(u)\|_{E'} \leqslant M$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$ e algum $M > 0$, é equivalente a provar que

$$\|Lu + B'(u)\|_{E'} \leqslant M, \text{ para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2}. \tag{3.5}$$

Para conseguir (3.5), primeiro provaremos $\|Lu\|_{E'} \leqslant M_1$ e depois $\|B'(u)\|_{E'} \leqslant M_2$, para M_1, $M_2 > 0$. Logo, fazendo uso da desigualdade triangular, conseguiremos a desigualdade desejada. No que segue, a fim de não carregar a notação, escreveremos $\|\cdot\|$, no lugar de $\|\cdot\|_{E'}$, sempre que não houver confusão.

- $\|Lu\| \leqslant M_1$.

Sendo L limitado, existe constante $\overline{M_1} > 0$, tal que $\|Lu\| \leqslant \overline{M_1}\|u\|$ para todo $u \in E$. Tomando $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$, temos $\|u\| \leqslant R + 2$. Logo $\|Lu\| \leqslant \overline{M_1}(R + 2)$, isto é, existe uma constante $M_1 = M_1(R)$ que depende de R, tal que

$$\|Lu\| \leqslant M_1, \text{ para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2.} \tag{3.6}$$

- $\|B'(u)\| \leqslant M_2$.

Provaremos que $B' : E \longrightarrow E'$ é limitado em $\mathfrak{B}_{R+2}$.
Se $B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$ for compacto e devido a $B'(\mathfrak{B}_{R+2}) \subseteq B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$, teremos que B' é limitado em $\mathfrak{B}_{R+2}$, como queremos provar. Então, centraremos nossa atenção em provar que $B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$ é compacto. Com efeito, seja $(y_n) \subseteq B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right) \subseteq B'(E)$ uma sequência arbitrária, então existe uma sequência $(x_n) \subseteq \overline{\mathfrak{B}_{R+2}} \subseteq E$, tal que $B'(x_n) = y_n$. Donde temos que (x_n) é uma sequência limitada em E, espaço de Hilbert, o qual é reflexivo. Pelo Teorema C.6, existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subseteq (x_n) \subseteq \mathfrak{B}_{R+2}$, e existe $x \in E$, tais que a subsequência converge fracamente em E, para x, ou seja,

$$x_{n_k} \rightharpoonup x, \text{ em } E. \tag{3.7}$$

Consequentemente, de (3.7), $x \in \overline{\mathfrak{B}_{R+2}}^{\sigma(E,E')}$ na topologia fraca. Como $(x_{n_k}) \subseteq \mathfrak{B}_{R+2}$ e $\mathfrak{B}_{R+2}$ é convexo, pelo Teorema C.8, temos que o fecho de $\mathfrak{B}_{R+2}$ na topologia fraca, coincide com o fecho de $\mathfrak{B}_{R+2}$ na topologia da norma. Isto é, $x \in \overline{\mathfrak{B}_{R+2}}$. Além disso, devido à hipótese (I_2), B é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável. Assim, pelo Lema 2.10, obtemos que B' é completamente contínuo. Logo

$$B'(x_{n_k}) \longrightarrow B'(x), \text{ com } B'(x) \in B'(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}). \tag{3.8}$$

Portanto, dada uma sequência $(y_n) \subseteq B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$, temos, por (3.8), que existe uma subsequência $(y_{n_k}) = (B'(x_{n_k}))$ de $(y_n) = (B'(x_n))$, convergente em $B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$. Então, pela caraterização de conjuntos compactos, dada no Teorema C.7, temos que $B'\left(\overline{\mathfrak{B}_{R+2}}\right)$ é compacto em E'.
Como foi provado que B' é limitado em $\mathfrak{B}_{R+2}$, temos que existe $\overline{M_2} > 0$, tal que

$$\|B'(u)\| \leqslant \overline{M_2}\|u\|, \text{ para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio usado para conseguir a expressão (3.6), podemos obter $M_2 = M_2(R) > 0$, tal que

$$\|B'(u)\| \leqslant M_2, \text{ para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2}. \tag{3.9}$$

Assim, das desigualdades (3.6), (3.9) e da desigualdade triangular, obtemos

$$\|Lu + B'(u)\| \leqslant \|Lu\| + \|B'(u)\| \leqslant M_1 + M_2.$$

Definindo $M = M_1 + M_2$, obtemos (3.5) e, consequentemente,

$$\|I'(u)\|_{E'} \leqslant M, \text{ para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2}.$$

□

As mesmas hipóteses para o funcional I, na afirmação anterior, nos garantem que $I(u)$ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E (ver Definição 2.7).

Afirmação 3.3. *Se o funcional I cumpre (I_1) e (I_2) do Teorema 2.14, então $I(u)$ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.*

Demonstração: Da hipótese (I_2) temos que B é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E. Além disso, pela hipótese (I_1), L é linear, autoadjunto e limitado. Estas informações nos garantam que $\langle L\,\cdot\,, \cdot\,\rangle$ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E. Com efeito, pois podemos definir

$$\begin{aligned} \phi_L :& E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \longmapsto \phi_L(u) := \langle Lu, u\rangle. \end{aligned}$$

Derivando o funcional e lembrando que L é autoadjunto, temos

$$\phi_L'(u)v = \langle Lu, v\rangle + \langle u, Lv\rangle = 2\langle Lu, v\rangle, \text{ para todo } v \in E.$$

Assim, como L é limitado, temos

$$\begin{aligned}\Big|\phi_L(u+v)-\phi_L(u)-\phi_L'(u)v\Big| &= \Big|\langle L(u+v),u+v\rangle-\langle Lu,u\rangle-2\langle Lu,v\rangle\Big|\\ &= \Big|\langle Lu,u\rangle+\langle Lu,v\rangle+\langle Lv,u\rangle+\langle Lv,v\rangle\\ &\quad -\langle Lu,u\rangle-2\langle Lu,v\rangle\Big|\\ &= \Big|\langle Lv,v\rangle\Big| \leqslant \|Lv\|\|v\| \leqslant C\|v\|\|v\| = C\|v\|^2. \end{aligned}\tag{3.10}$$

Além disso, como $\|v\| = \|u+v-u\| \leqslant \|u+v\|+\|v\|$ e tomando $u, u+v \in \mathfrak{B}_R$, obtemos $\|v\| \leqslant R+R = 2R$. Portanto, da expressão (3.10) e dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, R) > 0$, tal que

$$\Big|\phi_L(u+v)-\phi_L(u)-\phi_L'(u)v\Big| < \varepsilon\|v\|, \text{ em que } \delta = \frac{1}{C}\min\Big\{\varepsilon, 2R\Big\}.$$

Isto prova que $\langle L\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E e, consequentemente, $I(u) = \frac{1}{2}\langle L(u),u\rangle + B(u)$ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E. $\square$

Com a constante M conseguida na Afirmação 3.2, definimos

$$\bar{\varepsilon} := \frac{1}{Ms}\min\left\{\rho, \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \tag{3.11}$$

e pelo provado na Afirmação 3.3, existe $\delta = \delta(R, \bar{\varepsilon})$, para $\bar{\varepsilon}$ como acima, tal que

$$\Big|I(u+v)-I(u)-I'(u)v\Big| \leqslant \bar{\varepsilon}\|v\|, \quad \text{para } u, u+v \in \mathfrak{B}_{R+2} \quad \text{e} \quad \|v\| \leqslant \delta. \tag{3.12}$$

Sem perda de generalidade, na equação (3.12), podemos assumir $\delta \leqslant 1$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{k} < \textit{mín}\left\{\frac{\delta}{2M}, \frac{1}{8(R+2)\Big(1+\underset{s\in\mathbb{R}}{\textit{máx}}\{\chi'(s)\}\Big)\Big(\|L_1\|+\|L_2\|\Big)}\right\}. \tag{3.13}$$

Agora, tomando k obtida na desigualdade (3.13), $t \in [0,1]$ e da definição de V, dada na expressão (3.3), podemos definir o operador

$$\eta_t(u) := u - \frac{t}{k}V(u) \tag{3.14}$$

e fazer a seguinte afirmação.

Afirmação 3.4. $\eta \in \Gamma$.

Assumimos a Afirmação 3.4, que será provada posteriormente. Para provar os itens (i) e (ii) do Lema 3.1, é necessário verificar que $\mathfrak{B}_{R+2}$ é um conjunto invariante para η_t, isto é, provaremos que $\eta_t(\mathfrak{B}_{R+2}) \subseteq \mathfrak{B}_{R+2}$. Com isto, podemos escrever $\eta_t : \mathfrak{B}_{R+2} \longrightarrow \mathfrak{B}_{R+2}$.

Afirmação 3.5. $\mathfrak{B}_{R+2}$ *é um conjunto invariante para* η_t.

Demonstração: Dado $u = u_1 + u_2 \in \mathfrak{B}_{R+2}$, provaremos que $\eta_t(u) \in \mathfrak{B}_{R+2}$.
Pelas definições de η_t, dada em (3.14) e de V_i, dada em (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\Big\| P_i\eta_t(u) - u_i \Big\| &= \Big\| P_i\Big(u - \frac{t}{k}V(u)\Big) - u_i \Big\| = \Big\| u_i - \frac{t}{k}V_i(u) - u_i \Big\| \\
&= \frac{t}{k}\Big\| V_i(u) \Big\| \\
&\leqslant \frac{1}{k}\Big\| V_i(u) \Big\| \\
&= \frac{1}{k}\Big\| \chi(\|u_i\|)P_iI'(u) \Big\| = \frac{1}{k}\chi(\|u_i\|)\Big\| I_i'(u) \Big\|.
\end{aligned}$$

Da hipótese $E_1 \subseteq E$ é fechado e $E_2 = E_1^{\perp}$. Logo, temos que $E = E_1 \oplus E_2$ e $\|u\| = \|u_1\| + \|u_2\|$, para todo $u \in E$. Em particular, para $I'(u) \in E' \backsimeq E$, temos $\|I'(u_i)\| \leqslant \|I'(u_1)\| + \|I'(u_2)\| = \|I'(u)\|$ e como da Afirmação 3.2, $\|I'(u)\| \leqslant M$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$, obtemos

$$\Big\| P_i\eta_t(u) - u_i \Big\| \leqslant \frac{1}{k}\chi(\|u_i\|)M, \quad \text{para todo } \ u = u_1 + u_2 \in \mathfrak{B}_{R+2}. \tag{3.15}$$

Note que:

- Se $u_i \in B_{R+\frac{3}{2}}$, temos $\|u_i\| \leqslant R + \frac{3}{2}$.

Da definição de χ, temos que $\chi(\|u_i\|) \leqslant 1$, então $\frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) \leqslant \frac{M}{k}$. Além disso, de (3.13), temos $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2M}$, e como $\delta \leqslant 1$, podemos obter a seguinte desigualdade

$$\frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) < M\frac{\delta}{2M} = \frac{1}{2}\,\delta \leqslant \frac{1}{2}.$$

Além disso, como $\|u_i\| \leqslant R + \frac{3}{2}$, temos $\frac{1}{2} \leqslant R + 2 - \|u_i\|$. Substituindo esta expressão na desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) < R + 2 - \|u_i\| \tag{3.16}$$

- Se u_i é tal que $R + \frac{3}{2} \leqslant \|u_i\| \leqslant R + 2$.

Temos, da primeira das duas desigualdades, que $R + 2 - \|u_i\| \leqslant \frac{1}{2}$. E com isto obtemos, $0 \leqslant R + 2 - \|u_i\| < 1$. Logo,

$$R + 2 - \|u_i\| \geqslant \Big(R + 2 - \|u_i\|\Big)^2. \tag{3.17}$$

Pela definição de χ, temos que para $\|u_i\| \in \left[R+\frac{3}{2}, R+2\right]$, que

$$\Big(R+2-\|u_i\|\Big)^2 \geqslant \chi(\|u_i\|).$$

Além disso, pela desigualdade (3.13) sabemos que $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2M} < \frac{\delta}{M}$, e como $\delta \leqslant 1$, conseguimos da expressão anterior

$$\Big(R+2-\|u_i\|\Big)^2 \geq \chi(\|u_i\|) \geqslant \delta.\, \chi(\|u_i\|) > \frac{M}{k}\chi(\|u_i\|).$$

Devido à expressão (3.17), concluímos que

$$\frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) < R+2-\|u_i\|. \tag{3.18}$$

Usando as expressões obtidas em (3.16) e (3.18), conseguimos a desigualdade

$$\frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) < R+2-\|u_i\|, \quad \text{para } \|u_i\| \leqslant R+2. \tag{3.19}$$

Agora, usando uma consequência da desigualdade triangular e de (3.15), temos

$$\Big\|P_i\eta_t(u)\Big\| - \Big\|u_i\Big\| \leqslant \Big\|P_i\eta_t(u) - u_i\Big\| \leqslant \frac{M}{k}\chi(\|u_i\|).$$

Da desigualdade (3.19), segue

$$\Big\|P_i\eta_t(u)\Big\| \leqslant \frac{M}{k}\chi(\|u_i\|) + \|u_i\| < R+2, \ \ \text{para } i=1,2. \tag{3.20}$$

Graças à última desigualdade, temos que $\eta_t(u) \notin E\backslash\mathfrak{B}_{R+2}$, pois se isso acontecer, como $\eta_t(u) = P_1\eta_t(u) + P_2\eta_t(u)$, teríamos que $\Big\|P_i\eta_t(u)\Big\| \geqslant R+2$, para algum $i=1,2$. O que é uma contradição com (3.20).

Agora vejamos que $\eta_t(u)$ pertence a $\mathfrak{B}_{R+2}$. Como $\partial\mathfrak{B}_{R+2}$ é fechado, então a distância de $\eta_t(u)$ à $\partial\mathfrak{B}_{R+2}$ satisfaz

$$\begin{aligned} dist\Big(\eta_t(u), \partial\mathfrak{B}_{R+2}\Big) &= \min\Big\{\|\eta_t(u) - b\|, \quad b \in \partial\mathfrak{B}_{R+2}\Big\} \\ &= \min_{i=1,2}\Big\{R+2-\|P_i\eta_t(u)\|\Big\} > 0, \end{aligned}$$

em que a desigualdade estrita segue de (3.20). Portanto, $\mathfrak{B}_{R+2}$ é invariante para η_t.

$\square$

Para concluir a prova do Lema 3.1, primeiro provaremos o item (i) e, depois, o item (ii); o qual dividiremos em três casos. Por fim, provaremos a Afirmação 3.4.

Prova do item *(i)*

Consideremos as definições de η_t e de $V = V_1 + V_2$, em que V_i foi dado em (3.2). Da definição de χ, da Afirmação 3.2 e da desigualdade (3.13); para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Big\|\eta_t(u) - u\Big\| &= \Big\| -\frac{t}{k}V(u)\Big\| = \frac{t}{k}\Big\|V(u)\Big\| \leqslant \frac{1}{k}\Big(\Big\|V_1(u)\Big\| + \Big\|V_2(u)\Big\|\Big) \\
&= \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u_1\|)P_1I'(u)\Big\| + \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u_2\|)P_2I'(u)\Big\| \\
&= \frac{1}{k}\Big|\chi(\|u_i\|)\Big|\,\Big\|P_1I'(u)\Big\| + \frac{1}{k}\Big|\chi(\|u_i\|)\Big|\,\Big\|P_2I'(u)\Big\| \\
&\leqslant \frac{1}{k}\Big\|I_1'(u)\Big\| + \frac{1}{k}\Big\|I_2'(u)\Big\| \\
&= \frac{1}{k}\Big\|I'(u)\Big\| \leqslant \frac{1}{k}M < \frac{\delta}{2} < \delta.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|\eta_t(u) - u\| < \delta, \quad \forall\, u \in \mathfrak{B}_{R+2} \tag{3.21}$$

Agora, fixando $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$, tomando $v = -\dfrac{t}{k}V(u)$ e lembrando que $\mathfrak{B}_{R+2}$ é invariante por η_t , segue

$$u + v = u - \frac{t}{k}V(u) = \eta_t(u) \in \mathfrak{B}_{R+2}.$$

Com isto, podemos escrever

$$I(u+v) = I\Big(u - \frac{t}{k}V(u)\Big) = I\Big(\eta_t(u)\Big). \tag{3.22}$$

Além disso, por (3.21), $\|v\| = \|\eta_t(u) - u\| < \delta$. Para estes valores de v e $u+v$, substituindo a expressão (3.22) na desigualdade (3.12), obtemos

$$\Big|I(\eta_t(u)) - I(u) - I'(u)(-\frac{t}{k}V(u))\Big| \leqslant \bar{\varepsilon}\,\Big\|-\frac{t}{k}V(u)\Big\|\,,$$

donde

$$I\Big(\eta_t(u)\Big) \leqslant I(u) - \frac{t}{k}I'(u)V(u) + \bar{\varepsilon}\,\frac{t}{k}\Big\|V(u)\Big\|. \tag{3.23}$$

Como $E_2 = E_1^{\perp}$, temos $P_1I'(u) \perp P_2I'(u)$ e da definição de V, temos

$$\begin{aligned}
I'(u)V(u) &= I'(u)\Big(V_1(u) + V_2(u)\Big) = I'(u)\Big(\chi(\|u_1\|)P_1I'(u) + \chi(\|u_2\|)P_2I'(u)\Big) \\
&= \chi(\|u_1\|)I'(u)P_1I'(u) + \chi(\|u_2\|)I'(u)P_2I'(u) \\
&= \chi(\|u_1\|)\Big[P_1I'(u) + P_2I'(u)\Big]P_1I'(u) \\
&\quad + \chi(\|u_2\|)\Big[P_1I'(u) + P_2I'(u)\Big]P_2I'(u) \\
&= \chi(\|u_1\|)\Big\|P_1I'(u)\Big\|^2 + \chi(\|u_2\|)\Big\|P_2I'(u)\Big\|^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

em que $P_1I'(u)P_2I'(u) = 0$, pois $P_1I'(u) \perp P_2I'(u)$, donde obtemos

$$-\frac{t}{k}I'(u)V(u) \leqslant 0.$$

Logo, substituindo este resultado, junto com $\bar{\varepsilon}$ dado em (3.11), na expressão (3.23) e lembrando que $0 \leqslant t \leqslant 1$, segue

$$I\Big(\eta_t(u)\Big) \leqslant I(u) + \bar{\varepsilon}\frac{t}{k}\Big\|V(u)\Big\| \leqslant I(u) + \left(\frac{\rho}{Ms}\right)\frac{1}{k}M = I(u) + \frac{\rho}{ks},\ \forall u \in \mathfrak{B}_{R+2}. \quad (3.24)$$

Pela Afirmação 3.5, temos que $\eta_t(u) \in \mathfrak{B}_{R+2}$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+2}$. Isto nos permite iterar o funcional I e usando (3.24) temos

$$I\Big(\eta_t^2(u)\Big) = I\Big(\eta_t\Big(\eta_t(u)\Big)\Big) \leqslant I(\eta_t(u)) + \frac{\rho}{ks} \leqslant I(u) + \frac{\rho}{ks} + \frac{\rho}{ks} = I(u) + 2\frac{\rho}{ks}.$$

Iterando ks vezes, obtemos

$$I(\eta_t^{ks}(u)) \leqslant I(u) + \rho, \quad \text{para todo } u \in \mathfrak{B}_{R+2} \text{ e } t \in [0,1].$$

Assim, o item (i) está provado. Uma interpretação geométrica do resultado deste item, é dada na figura 3.

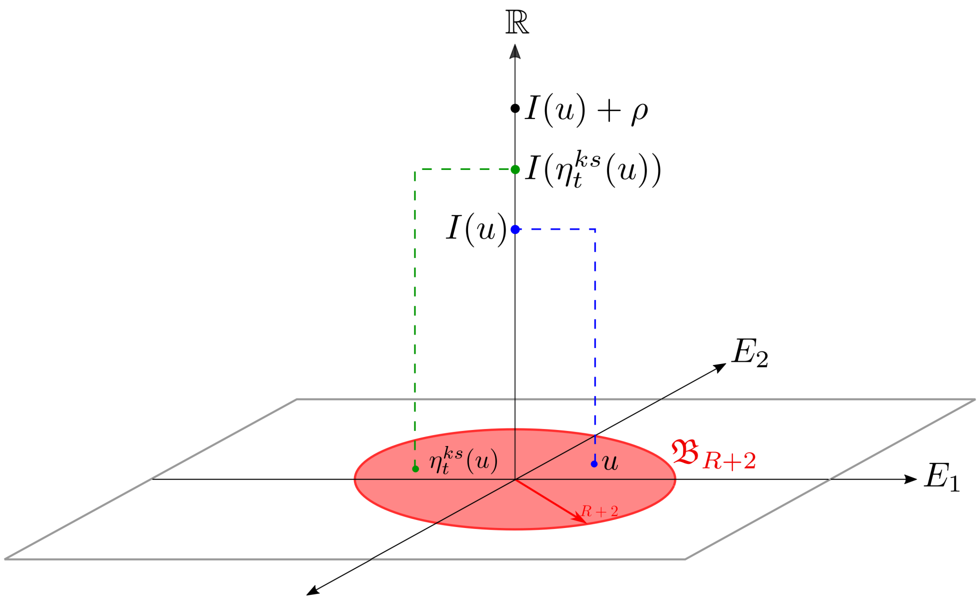

Figura 3 – Interpretação geométrica do item (i) do Lema 3.1

Fonte: O próprio autor.

Prova do item *(ii)*

Para provar o item (ii), tomemos $u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$ e consideremos três casos.

Caso I: $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$, para $1 \leqslant j \leqslant ks$.

Vimos na igualdade (3.4), que $V(u) = I'(u)$, para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+1}$. Além disso, da Afirmação 3.4, $\eta \in \Gamma$. Então fixando j, tal que $1 \leqslant j \leqslant ks$, temos que $\eta_1^j(u) = \eta_1^1\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)$ e pela definição de η_1 em (3.14), obtemos a expressão

$$\eta_1^j(u) = \eta_1^1\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) = \eta_1^{j-1}(u) - \frac{1}{k}V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big). \tag{3.25}$$

Pela condição do Caso I, $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, então $V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) = I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)$. Logo, por (3.25) temos

$$\eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) = -\frac{1}{k}V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) = -\frac{1}{k}I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big).$$

Procedendo de maneira análoga, ao feito na igualdade (3.22), tomando $\bar{u} = \eta_1^{j-1}(u)$ e $\bar{v} = \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u)$, temos $\bar{u} + \bar{v} = \eta_1^j(u)$, logo substituindo $\bar{u}$ e $\bar{v}$ na desigualdade (3.23), para $t = 1$, obtemos

$$I\Big(\eta_1(\bar{u})\Big) - I(\bar{u}) \leqslant -\frac{1}{k}I'(\bar{u})V(\bar{u}) + \bar{\varepsilon}\frac{1}{k}\Big\|V(\bar{u})\Big\|, \text{ em que } I\Big(\eta_1(\bar{u})\Big) = I(\bar{u}+\bar{v}).$$

Como $I\Big(\eta_1(\bar{u})\Big) = I\Big(\eta_1(\eta_1^{j-1}(u))\Big) = I\Big(\eta_1^j(\bar{u})\Big)$ e $I(\bar{u}) = I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)$, podemos escrever a desigualdade anterior como

$$\begin{aligned}
I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) &\leqslant -\frac{1}{k}I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) + \bar{\varepsilon}\frac{1}{k}\Big\|V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\| \\
&\leqslant -\frac{1}{k}I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) + \bar{\varepsilon}\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\| \\
&\leqslant -\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \bar{\varepsilon}\frac{1}{k}M \\
&\leqslant -\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \frac{\varepsilon}{2Ms}\frac{1}{k}M \\
&= -\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}
\end{aligned}$$

Isto é,

$$I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \leqslant -\frac{1}{k}\Bigg\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Bigg\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}. \tag{3.26}$$

Logo, pela soma telescópica, para todo $1 \leqslant j \leqslant ks$, na desigualdade (3.26), resulta

$$\begin{aligned}
I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^0(u)\Big) = I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) - I(u) &= \sum_{j=1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big] \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) - I(u) \leqslant \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks}\right]. \tag{3.27}$$

Da hipótese do item *(ii)*, sabemos que para todo $u \in \mathfrak{B}_{R+1} \cap I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, temos $\big(1+\|u\|\big)\|I'(u)\| \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$. Assim, considerando $u \in \mathfrak{B}_{R+1}$, temos $\|u\| \leqslant R+1$ e então $\|u\|+1 \leqslant R+2$. Com isto temos

$$(R+2)\|I'(u)\| \geqslant (1+\|u\|)\|I'(u)\| \geqslant \sqrt{2\varepsilon},$$

donde

$$(R+2)^2\|I'(u)\|^2 \geqslant 2\varepsilon$$

Como da hipótese do Lema 3.1, $s = (R+2)^2$ e definindo $\varepsilon_s := \dfrac{\varepsilon}{s}$, temos

$$\|I'(u)\|^2 \geqslant 2\,\frac{\varepsilon}{s} = 2\,\varepsilon_s, \quad \text{para todo } \ u \in \mathfrak{B}_{R+1}. \tag{3.28}$$

Das hipóteses consideradas para o Caso I, temos $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, para $1 \leqslant j \leqslant ks$. Tomando $\eta_1^{j-1}(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, então a desigualdade (3.28) acarreta $\left\|I'\big(\eta_1^{j-1}(u)\big)\right\|^2 \geqslant 2\varepsilon_s$. Logo, substituindo esta expressão em (3.27), resulta

$$I\big(\eta_1^{ks}(u)\big) - I(u) \leqslant \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{2\varepsilon_s}{k} + \frac{\varepsilon}{2ks}\right] = \sum_{j=1}^{ks}\left[-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{ks}\right] = -\frac{3\varepsilon}{2ks}ks = -\frac{3}{2}\varepsilon. \tag{3.29}$$

Agora, tomando $u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big)$, temos $\|u\| \leqslant \dfrac{R}{2}$ e $I(u) - \dfrac{3}{2}\varepsilon \leqslant c - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Substituindo este resultado na desigualdade (3.29), obtemos

$$I\big(\eta_1^{ks}(u)\big) \leqslant I(u) - \frac{3}{2}\varepsilon \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é,

$$I\big(\eta_1^{ks}(u)\big) \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{sempre que} \quad u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big).$$

Caso II: $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, para $1 \leqslant j \leqslant ks$, e $\eta_1^j(u) \in I^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big)$, para $1 \leqslant j \leqslant m-1$, com $\eta_1^m(u) \notin I^{-1}\big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\big)$, para algum $m \in \{1, 2, \ldots, ks\}$

Da hipótese deste caso, temos $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, para $1 \leqslant j \leqslant ks$. Então da desigualdade (3.28), segue que $\left\|I'\big(\eta_1^{j-1}(u)\big)\right\|^2 \geqslant 2\varepsilon_s$. Substituindo este resultado na expressão (3.26), obtemos

$$I\big(\eta_1^j(u)\big) - I\big(\eta_1^{j-1}(u)\big) \leqslant -\frac{1}{k}\left\|I'(\eta_1^{j-1}(u))\right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks} \leqslant -\frac{2\varepsilon_s}{k} + \frac{\varepsilon_s}{2k} = -\frac{3\varepsilon_s}{2k},\ j = 1, 2, \ldots, ks.$$

Logo,

$$I\big(\eta_1^j(u)\big) < I\big(\eta_1^{j-1}(u)\big), \quad \text{para} \quad 1 \leqslant j \leqslant ks. \tag{3.30}$$

Também, da hipótese temos $\eta_1^m(u) \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, ou seja,

$$c+\varepsilon < I\Big(\eta_1^m(u)\Big) \text{ ou } I\Big(\eta_1^m(u)\Big) < c-\varepsilon.$$

Se $c+\varepsilon < I\Big(\eta_1^m(u)\Big)$ e considerando a desigualdade (3.30) para $j = m$, teríamos que $I\Big(\eta_1^m(u)\Big) < I\Big(\eta_1^{m-1}(u)\Big)$. Além disso, como $\eta_1^{m-1}(u) \in I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, então $I\Big(\eta_1^{m-1}(u)\Big) \leqslant c+\varepsilon$. Assim $I\Big(\eta_1^{m-1}(u)\Big) \leqslant c+\varepsilon < I(\eta_1^{m-1}(u))$, o que é uma contradição. Logo, a única possibilidade é que

$$I\Big(\eta_1^m(u)\Big) < c-\varepsilon \tag{3.31}$$

Usando novamente a soma telescópica

$$I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^m(u)\Big) = \sum_{j=m+1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big],$$

donde

$$I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) = I\Big(\eta_1^m(u)\Big) + \sum_{j=m+1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big]$$

e, pela desigualdade (3.31), resulta

$$I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) < c-\varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big]. \tag{3.32}$$

Fixando j, tal que $m+1 \leqslant j \leqslant ks$, obtemos, como em (3.26), que

$$I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \leqslant -\frac{1}{k}\Big\|I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big\|^2 + \frac{\varepsilon}{2ks} \leqslant \frac{\varepsilon}{2ks},$$

donde

$$I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2ks}. \tag{3.33}$$

Substituindo (3.33), em (3.32), obtemos, para $m+1 \leqslant j \leqslant ks$

$$\begin{aligned} I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) &< c-\varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^j(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big] \leqslant c-\varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}\Big(\frac{\varepsilon}{2ks}\Big) \\ &= c-\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2ks}(ks-m) = c - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon m}{2ks} \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pois } \varepsilon, m, k, s > 0. \end{aligned}$$

Caso III: $\eta_1^j(u) \in \mathfrak{B}_{R+1} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$, para todo $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$, mas para algum $m \in \{1, 2, ..., ks\}$, se tem que $\eta_1^m(u) \notin \mathfrak{B}_{R+1}$.

Como $u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}}$, então $\|u\| \leqslant \frac{R}{2}$, donde $\|u\| + \dfrac{R}{2} + 1 \leqslant R+1$. Também, como $\eta_1^m(u) \notin \mathfrak{B}_{R+1}$, temos $\|\eta_1^m(u)\| > R+1$.Assim

$$\|u\| + \frac{R}{2} + 1 < \Big\|\eta_1^m(u)\Big\|$$

Logo,

$$\frac{R+2}{2} < \left\| \eta_1^m(u) \right\| - \|u\| \tag{3.34}$$

Usando uma consequência da desigualdade triangular, a soma telescópica, de (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{R+2}{2} &< \left\| \eta_1^m(u) \right\| - \left\| u \right\| \leqslant \left\| \eta_1^m(u) - u \right\| \\
&= \left\| \eta_1^m(u) - \eta_1^0(u) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \left[\eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) \right] \right\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \left\| \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) \right\|
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{R+2}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left\| \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) \right\| \tag{3.35}$$

Pela definição de η_t, temos que $\eta_1(u) = u - \dfrac{1}{k} V(u)$ e pela Afirmação 3.4, $\eta \in \Gamma$, então podemos escrever a $j-$ésima composição, como $\eta_1^j(u) = \eta_1\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)$. Com isto, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \eta_1^j(u) - \eta_1^{j-1}(u) \right\| &= \left\| \eta_1\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) - \eta_1^{j-1}(u) \right\| \\
&= \left\| \eta_1^{j-1}(u) - \frac{1}{k} V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) - \eta_1^{j-1}(u) \right\| \\
&= \left\| -\frac{1}{k} V\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\| \\
&= \frac{1}{k} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\| .
\end{aligned}$$

Em que a última igualdade é obtida graças a (3.4) e ao fato que $\eta_1^{j-1}(u) \in \mathfrak{B}_{R+1}$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Logo, substituindo esta igualdade na expressão (3.35), pela desigualdade de Hölder para somas finitas, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{R+2}{2} &\leqslant \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\| = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\| .1 \\
&\leqslant \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{m} (1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{R+2}{2} \leqslant \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \tag{3.36}$$

Considerando $\varepsilon_s = \dfrac{\varepsilon}{2}$, de (3.26) temos

$$\left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\|^2 \leqslant k\Big[I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j}(u)\Big)\Big] + \frac{\varepsilon_s}{2}, \quad \forall\, j \in \{1,2,...,m\} \tag{3.37}$$

Assim, de (3.36) e (3.37), e usando novamente a soma telescópica, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{R+2}{2} &\leqslant \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[\sum_{j=1}^{m} \left\| I'\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) \right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[\sum_{j=1}^{m} \left(k\Big[I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j}(u)\Big)\Big] + \frac{\varepsilon_s}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[k\Big[I\Big(\eta_1^{0}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big)\Big] + m\frac{\varepsilon_s}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{m^{\frac{1}{2}}}{k}\left[k\Big[I(u) - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big)\Big] + m\frac{\varepsilon_s}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado a expressão anterior e tendo em conta que da hipótese, $s = (R+2)^2$ e $\varepsilon_s = \dfrac{\varepsilon}{s}$, obtemos

$$\frac{s}{4} \leqslant \frac{m}{k^2}\left(k\Big[I(u) - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big)\Big] + \frac{m\,\varepsilon}{2s}\right) = \frac{m}{k}\left(I(u) - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big) + \frac{m\,\varepsilon}{2ks}\right) \tag{3.38}$$

De acordo com a hipótese (ii), se $u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$, então $I(u) \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, isto é $I(u) \leqslant c+\varepsilon$. Além disso, como $m \in \{1,2,\ldots,ks\}$, então $m \leqslant ks$, isto é $\dfrac{m}{ks} \leqslant 1$. Usando este fato e a desigualdade (3.38) podemos escrever

$$\frac{s}{4} \leqslant \frac{m}{k}\left[c+\varepsilon - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big) + \frac{\varepsilon}{2}\right] = \frac{m}{k}\left[c + \frac{3}{2}\varepsilon - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big)\right] \tag{3.39}$$

Assim, multiplicando (3.39) por $\dfrac{k}{m}$ e como $m \leqslant ks$, temos $1 \leqslant \dfrac{ks}{m}$. Assim conseguimos

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{k}{m}\frac{s}{4} \leqslant c + \frac{3}{2}\varepsilon - I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big),$$

donde

$$I(\eta_1^{m}(u)) \leqslant c + \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}.$$

Como da hipótese, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{10}$, então $-\dfrac{1}{4} < -\dfrac{10}{4}\varepsilon$, e com isto obtemos

$$I(\eta_1^{m}(u)) \leqslant c + \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{10}{4}\varepsilon = c - \varepsilon.$$

Agora, com o mesmo raciocínio feito no Caso II, usando a desigualdade anterior, a soma telescópica e devido à igualdade (3.33) ser válida para $j \in \{m+1, m+2, \ldots, ks\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) &= I\Big(\eta_1^{m}(u)\Big) + \sum_{j=m+1}^{ks}\Big[I\Big(\eta_1^{j}(u)\Big) - I\Big(\eta_1^{j-1}(u)\Big)\Big]\\
&\leqslant c-\varepsilon + \sum_{j=m+1}^{ks}\left(\frac{\varepsilon}{2ks}\right)\\
&= c-\varepsilon + \Big[ks-(m+1)+1\Big]\frac{\varepsilon}{2ks}\\
&= c-\varepsilon + \left(\frac{ks-m}{ks}\right)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant c-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant c-\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Note que a última desigualdade é válida, pois como $m \in \mathbb{N}$, então $ks - m \leqslant ks$, donde obtemos $\dfrac{ks-m}{ks} \leqslant 1$. Logo,

$$
I\Big(\eta_1^{ks}(u)\Big) \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } u \in \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \cap I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big).
$$

Assim, o item *(ii)* está provado. (Ver Figura 4 para uma interpretação geométrica deste item).

Para finalizar a prova do Lema 3.1, provaremos a Afirmação 3.4. Para isto, temos que provar que $\eta \in \Gamma$, isto é, que $\eta \in C([0,1]\times E, E)$ e que η_t satisfaz:

(Γ_1) $\eta_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, em que $U, K \in C([0,1]\times E, E)$, tais que U_t é um homeomorfismo de E em E e K_t é compacto, para cada $t \in [0,1]$;

(Γ_2) $U_0(u) = u$, $K_0(u) = 0$;

(Γ_3) $P_i(U_t(u)) = U_t(P_i(u))$, para $i = 1, 2$;

(Γ_4) η_t leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Demonstração: (Da Afirmação 3.4)

Primeiramente, provaremos que $\eta \in C([0,1]\times E, E)$. Tomando a definição de η_t, dada em (3.14), temos

$$
\begin{aligned}
\eta : [0,1]\times E &\longrightarrow E\\
(t,u) &\longmapsto \eta(t,u) = \eta_t(u) = u - \frac{t}{k}V(u)
\end{aligned}
$$

Das igualdades (3.2) e (3.3), temos $V(u) = V_1(u) + V_2(u)$ e $V_i(u) = \chi(\|u_i\|)P_iI'(u)$. A continuidade de V depende da continuidade de V_i. Como $I \in C^1$, então I' é contínuo, e como P_i é contínuo, consequentemente, a composição $P_i \circ I'$ é um operador contínuo.

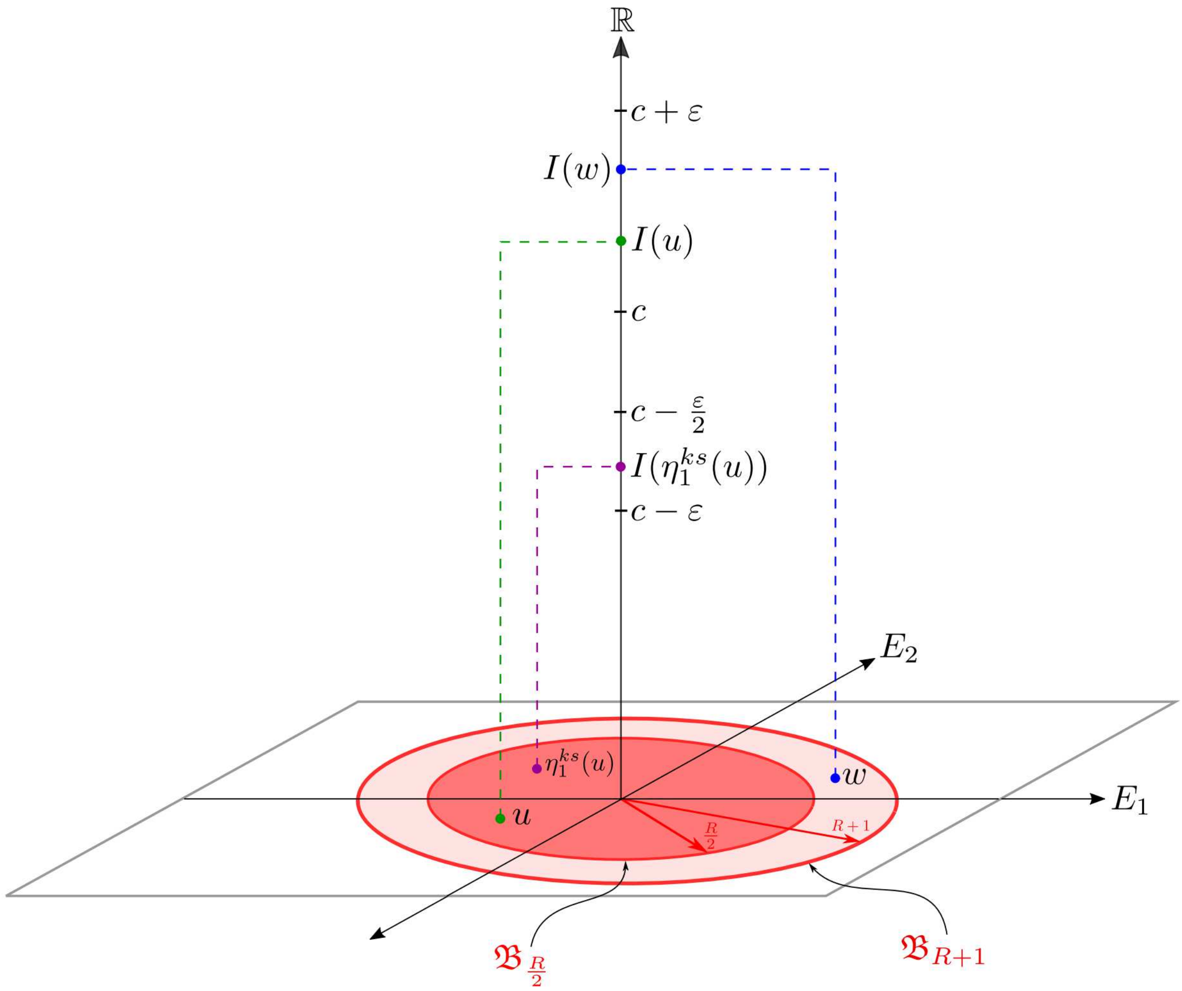

Figura 4 – Interpretação geométrica do item (ii) do Lema 3.1

Fonte: O próprio autor.

Também, como $\chi \in C^{\infty}$, então a composição das funções $\chi \circ \|.\|$ é contínua. Logo, como o produto de aplicações contínuas é contínua, segue que V_i é um operador contínuo e, portanto, V é um operador contínuo. Assim, obtemos $\eta \in C([0,1] \times E, E)$.

A seguir provaremos o item (Γ_1), o qual será dividido em três casos:

$(\Gamma_{1.1})$ η_t pode ser escrito como $\eta_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$.

$(\Gamma_{1.2})$ $K_t : E \longrightarrow E$ é um operador compacto, para todo $t \in [0,1]$.

$(\Gamma_{1.3})$ $U_t : E \longrightarrow E$ é um homeomorfismo, para todo $t \in [0,1]$.

Prova de $\Gamma_{1.1}$: Provaremos que $\eta_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, em que U_t é um homeomorfismo e K_t é um operador compacto.

Denotamos a identidade de E em E, por

$$\begin{aligned}\mathcal{I}d : &E \longrightarrow E\\ &u \longmapsto \mathcal{I}d(u) = u\end{aligned}$$

Por definição, $I(u) = \frac{1}{2}\langle L(u), u\rangle + B(u)$, em que $L = L_1 + L_2$, com L_i autoadjunto, para $i = 1, 2$. Assim,

$$I'(u)v = \frac{1}{2}\langle L(u), v\rangle + \frac{1}{2}\langle u, L(v)\rangle + B'(u)v$$

e como L_i é autoadjunto, temos

$$I'(u)v = \frac{1}{2}\langle L(u), v\rangle + \frac{1}{2}\langle L(u), v\rangle + B'(u)v = \langle L(u), v\rangle + B'(u)v$$

que denotamos por

$$I'(u)v := L(u)v + B'(u)v.$$

Assim, temos o funcional

$$I'(u) = L(u) + B'(u), \tag{3.40}$$

e devido à hipótese (I_1), $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$, em que $L_i : E_1 \longrightarrow E_i$, para $i = 1, 2$. Donde podemos escrever a i-ésima projeção de $I'(u)$ como

$$P_iI'(u) = L_i(u_i) + P_iB'(u) \tag{3.41}$$

Da definição de V_i, e da igualdade (3.41), temos

$$P_iV(u) = V_i(u) = \chi(\|u_i\|)P_iI'(u) = \chi(\|u_i\|)\Big[L_i(u_i) + P_iB'(u)\Big]$$

Usando esta expressão e a definição de η_t, dada em (3.14), podemos expressar a i-ésima coordenada de η_t como

$$\begin{aligned}P_i\eta_t(u) = P_i\left(u - \frac{t}{k}V(u)\right) &= P_i(u) - \frac{t}{k}P_i(V(u))\\ &= P_i(u) - \frac{t}{k}\Big\{\chi(\|u_i\|)\Big[L_i(u_i) + P_iB'(u)\Big]\Big\}\\ &= u_i - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i(u_i) - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)P_iB'(u)\\ &= \mathcal{I}d(u_i) - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i(u_i) - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)P_iB'(u)\\ &= \left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i\right)(u_i) - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)P_iB'(u)\end{aligned}$$

o que nos motiva definir

$$U_t(u) := \sum_{i=1,2}\left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i\right)(u_i) \tag{3.42}$$

e

$$K_t(u) := -\frac{t}{k}\sum_{i=1,2}\chi(\|u_i\|)P_iB'(u). \tag{3.43}$$

Prova de $\Gamma_{1.2}$: Provaremos que $K_t : E \longrightarrow E$ é um operador compacto, para todo $t \in [0,1]$.
Seja $t \in [0,1]$ fixo e arbitrário e K_t definido em (3.43). Provaremos que

$$\begin{aligned} K_t :& E \longrightarrow E \\ u \longmapsto & K_t(u) = -\frac{t}{k} \sum_{i=1,2} \chi(\|u_i\|) P_i B'(u), \end{aligned}$$

é um um operador compacto. Isto é equivalente, pelo Teorema C.4. do apêndice, a provar que, dada uma sequência limitada $(x_n) \subseteq E$, a imagem dela, $K_t(x_n) \subseteq E$, possui uma subsequência que converge em E.
Então, seja $(x_n) \subseteq E$ uma sequência limitada. Como E é um espaço de Hilbert, então E é reflexivo. Assim, pelo Teorema C.6., existe $(z_n) \subseteq (x_n)$ subsequência de (x_n), tal que

$$z_n \rightharpoonup z, \quad \text{para algum } z \in E. \tag{3.44}$$

Como B' é completamente contínuo, pelo Lema 2.10 obtemos a seguinte convergência em E'

$$B'(z_n) \longrightarrow B'(z),$$

donde, pelo fato de P_i ser um operador contínuo, temos

$$P_i B'(z_n) \longrightarrow P_i B'(z). \tag{3.45}$$

Sendo P_i linear e contínuo, e como $z_n \rightharpoonup z$, então $P_i(z_n) \rightharpoonup P_i(z)$, isto é, $z_{ni} \rightharpoonup z_i$, em que z_{ni} denota a i-ésima coordenada de z_n, para $i = 1,2$. Também, pelo fato de $z_{ni} \rightharpoonup z_i$, temos que a sequência $(\|z_{ni}\|)$ é limitada, isto é, existe $C > 0$, tal que $\|z_{ni}\| \leqslant C$, daí $\left\| \frac{z_{ni}}{C} \right\| \leqslant 1$, e multiplicando por $R+1$ ambos lados desta desigualdade, conseguimos

$$\left\| \frac{(R+1)}{C} z_{ni} \right\| \leqslant R + 1. \tag{3.46}$$

Sem perda de generalidade, escrevendo a sequência dada em (3.46) ainda como (z_{ni}), obtemos

$$\|z_{ni}\| \leqslant R + 1.$$

Então, da definição de χ, temos $\chi(\|z_{ni}\|) = 1$, obtendo que a sequência

$$\chi(\|z_{ni}\|) \longrightarrow \chi(\|z_i\|) = 1.$$

Com estas considerações e pelo fato da convergência em (3.45), temos

$$-\frac{t}{k}\chi(\|z_{ni}\|) P_i B'(z_n) \longrightarrow -\frac{t}{k}\chi(\|z_i\|) P_i B'(z), \quad i = 1,2,$$

donde somando para $i = 1,2$ segue da última expressão que

$$\sum_{i=1,2} \left(\frac{-t}{k}\right) \chi(\|z_{ni}\|) P_i B'(z_n) \longrightarrow \sum_{i=1,2} \left(\frac{-t}{k}\right) \chi(\|z_{ni}\|) P_i B'(z),$$

que por definição de K_t, temos

$$K_t(z_n) \longrightarrow K_t(z).$$

Assim, existe uma subsequência $\big(K_t(z_n)\big) \subseteq \big(K_t(x_n)\big)$ convergente em E. Como $t \in [0,1]$ foi tomado arbitrariamente, segue que K_t é compacto para todo $t \in [0,1]$.

A prova de $(\Gamma_{1.3})$, em que U_t é um homeomorfismo, será feita posteriormente.

Continuando com a demonstração da Afirmação 3.4, agora provaremos (Γ_2), (Γ_3) e (Γ_4).

Prova de Γ_2 : Na definição de $U_t(u)$ e de $K_t(u)$, tomando $t = 0$, temos

$$U_0(u) = \sum_{i=1,2} (\mathcal{I}d - 0)(u_i) = \mathcal{I}d(u_1) + \mathcal{I}d(u_2) = u_1 + u_2 = u$$
$$K_0(u) = 0$$

Assim,

$$U_0(u) = u \quad \text{e} \quad K_0(u) = 0.$$

Prova de Γ_3 : Pela definição de $U_t(u)$, temos

$$U_t(u) = U_t(u_1 + u_2) = \left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u_1\|)L_1\right)(u_1) + \left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u_2\|)L_2\right)(u_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} P_iU_t(u) &= \left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i\right)(u_i) \\ &= \left(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|P_i(u)\|)L_i\right)P_i(u) \\ &= U_tP_i(u), \quad \text{para } i = 1,2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$P_iU_t(u) = U_tP_i(u), \quad \text{para } i = 1,2.$$

Prova de Γ_4 : Provaremos que η_t leva conjuntos limitados, em conjuntos limitados. Seja $A \subseteq E$ subconjunto limitado de E. Então, para todo $u \in A$, existe $r > 0$, tal que $\|u\| \leqslant r$. Além disso, com um raciocínio análogo ao feito na Afirmação 3.2, tomando $u \in B_r$, temos que existe $M = M(r) > 0$, tal que $\|I'(u)\| \leqslant M$, para todo $u \in B_r$. Assim, pela definição de η_t e a definição de V, temos

$$\begin{aligned} \big\|\eta_t(u)\big\| &= \left\|u - \frac{t}{k}V(u)\right\| \leqslant \|u\| + \frac{t}{k}\big\|V(u)\big\| \\ &\leqslant r + \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u_1\|)P_1I'(u) + \chi(\|u_2\|)P_2I'(u)\Big\| \\ &\leqslant r + \frac{1}{k}\Big(\|P_1I'(u)\|_{E_1} + \|P_2I'(u)\|_{E_2}\Big) \\ &\leqslant r + \frac{1}{k}\big\|I'(u)\big\| \leqslant r + M, \ \text{pois } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\Big\|\eta_t(u)\Big\| \leqslant r + M, \text{ para todo } u \in A.$$

Isto é, η_t leva conjuntos limitados, em conjuntos limitados.

Para concluir a prova de (Γ_1), agora provaremos que U_t é um homeomorfismo, para todo $t \in [0,1]$.

Prova de $\Gamma_{1.3}$: $U_t : E \longrightarrow E$ é um homeomorfismo.
Seja t fixo arbitrário e U_t definido em (3.42). Provaremos que

$$\begin{aligned} U_t :& E \longrightarrow E \\ u \longmapsto& U_t(u) = \sum_{i=1,2}\Big(\mathcal{I}d - \frac{t}{k}\chi(\|u\|)L_i\Big)(u_i), \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.
Como $U_t(u) = P_1U_t(u) + P_2U_t(u)$, basta provar que $P_i(U_t(u))$ é um homeomorfismo, para cada $i = 1,2$. Pelo item (Γ_3), temos $U_t(P_i(E)) = P_i(U_t(E)) \subseteq E_i$, isto é, $P_i \circ U_t$ tem a imagem contida em E_i. Além disso, $U_t(P_i(E)) = U_t(E_i)$, daí $P_i \circ U_t$ tem domínio E_i. Então, nosso trabalho vai se reduzir a provar que

$$\begin{aligned} P_i \circ U_t :& E_i \longrightarrow E_i \\ u_i \longmapsto& P_i \circ U_t(u_i) = P_iU_t(u_i) = u_i - \frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i(u_i). \end{aligned} \tag{3.47}$$

é um homeomorfismo. Isto é, provaremos que

a) $P_i \circ U_t$ é um operador contínuo.

b) $P_i \circ U_t$ é um operado bijetor.

c) $(P_i \circ U_t)^{-1}$ é um operador contínuo.

Com efeito,

a) $P_i \circ U_t$ **é um operador contínuo:**

Na expressão (3.47), sendo u_i contínuo (operador identidade em E_i), para provar a continuidade de $P_i \circ U_t$, analisaremos apenas a continuidade de $\frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i(u_i)$.
Seja $t \in [0,1]$ fixo e arbitrário e sejam u, $v \in E_i$. Para $\|u\|$ e $\|v\|$ dados, consideraremos os seguintes casos:

$\mathbf{a_1}$) Se $\|u\|$, $\|v\| \geqslant R + 2$.

Pela definição de χ, temos que $\chi(\|u\|) = \chi(\|v\|) = 0$, logo

$$\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u) - \chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| = 0 \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|.$$

Donde temos que $\dfrac{t}{k}\chi(\|u\|)L_i(u)$ é Lipschitz e, portanto, é contínuo.

a₂) Se $\|v\| \leqslant R+2$ e $\|u\| > \|v\|$

Somando e subtraindo $\chi(\|u\|)L_i(v)$, na expressão $\dfrac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\|$ e usando a desigualdade triangular, além disso, pelo fato de ser $t \leqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| &\leqslant \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|u\|)L_i(v)\Big\| \\ &\quad+\frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(v)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| \\ &= \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u\|)\Big(L_i(u)-L_i(v)\Big)\Big\| \\ &\quad+\frac{1}{k}\Big\|\Big(\chi(\|u\|)-\chi(\|v\|)\Big)L_i(v)\Big\|\end{aligned}$$

E aplicando a linearidade de L_i, no lado direito da expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| &\leqslant \frac{1}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u-v)\Big\| \\ &\quad+\frac{1}{k}\Big\|\Big(\chi(\|u\|)-\chi(\|v\|)\Big)L_i(v)\Big\| \\ &= \frac{1}{k}\Big|\chi(\|u\|)\Big|\Big\|L_i(u-v)\Big\| \\ &\quad+\frac{1}{k}\Big|\chi(\|u\|)-\chi(\|v\|)\Big|\,\|L_i(v)\|\,.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| \leqslant \frac{1}{k}\Big|\chi(\|u\|)\Big|\Big\|L_i(u-v)\Big\|+\frac{1}{k}\Big|\chi(\|u\|)-\chi(\|v\|)\Big|\Big\|L_i(v)\Big\| \tag{3.48}$$

Da definição de χ, temos $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe s pertencente ao intervalo $(\|v\|,\|u\|) \subseteq \mathbb{R}$, tal que

$$\Big|\chi(\|u\|)-\chi(\|v\|)\Big| = |\chi'(s)|\Big(\|u\|-\|v\|\Big). \tag{3.49}$$

Também temos, pela definição de χ, que $|\chi(\|u\|)| \leqslant 1$. Além disso, pela desigualdade triangular, temos $\|u\|-\|v\| \leqslant \|u-v\|$. Considerando a hipótese do Lema 3.1, $R \in \mathbb{N}$, logo $1 \leqslant R+2$. Com estas considerações e pela igualdade (3.49), substituindo na desigualdade (3.48), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| &\leqslant \frac{1}{k}\|L_i\|\|u-v\|+\frac{1}{k}|\chi'(s)|\|u-v\|\|L_i\|\|v\| \\ &\leqslant \frac{1}{k}\|L_i\|\|u-v\|(R+2) \\ &\quad+\frac{1}{k}\underset{s\in\mathbb{R}}{máx}\Big\{|\chi'(s)|\Big\}\|u-v\|\|L_i\|(R+2) \\ &= \frac{1}{k}(R+2)\|L_i\|\|u-v\|\left(1+\underset{s\in\mathbb{R}}{máx}\Big\{|\chi'(s)|\Big\}\right)\end{aligned}$$

Com isto obtemos,

$$\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| \leqslant \frac{1}{k}(R+2)\|L_i\|\|u-v\|\left(1+\max_{s\in\mathbb{R}}\{|\chi'(s)|\}\right) \quad (3.50)$$

Por outro lado, $\|L_i\|\leqslant \|L_1\|+\|L_2\|$, donde

$$\frac{1}{\|L_1\|+\|L_2\|} \leqslant \frac{1}{\|L_i\|}, \text{ para } i=1,2.$$

Agora, usando este resultado na expressão (3.13), na qual foi definido k, resulta que

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{8(R+2)\left(1+\max_{s\in\mathbb{R}}\{\chi'(s)\}\right)\left(\|L_1\|+\|L_2\|\right)} \leqslant \frac{1}{8(R+2)\left(1+\max_{s\in\mathbb{R}}\{\chi'(s)\}\right)\|L_i\|} \quad (3.51)$$

Substituindo a desigualdade (3.51) na expressão (3.50), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u)-\chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| &< \frac{(R+2)\|L_i\|\|u-v\|\left(1+\max_{s\in\mathbb{R}}\{|\chi'(s)|\}\right)}{8(R+2)\left(1+\max_{s\in\mathbb{R}}\{\chi'(s)\}\right)\|L_i\|}\\ &= \frac{1}{8}\|u-v\| \leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Com o mesmo raciocínio usado na conclusão do item ($\mathbf{a_1}$), conseguimos a continuidade de $\frac{t}{k}\chi(\|u_i\|)L_i(u_i)$.
Assim, obtemos que $P_i\circ U_t$ é contínuo. Como t foi tomado arbitrariamente, segue que $P_i\circ U_t$ é contínuo, para todo $t\in[0,1]$.

b) $P_i\circ U_t$ **é um operador bijetor:**

Primeiramente provaremos a sobrejetividade de $P_i\circ U_t$ e em seguida a injetividade.

$\mathbf{b_1}$) $P_i\circ U_t$ é sobrejetor:

Com efeito, seja $\omega\in E_i$ fixo e arbitrário. Definimos para cada ω o seguinte operador

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\omega :&E_i \longrightarrow E_i\\ &u \longmapsto \mathcal{L}_\omega(u) = \frac{t}{k}\chi(\|u\|)L_i(u)+\omega\end{aligned} \quad (3.53)$$

Da definição do operador $\mathcal{L}_\omega$ e pela desigualdade (3.52), temos que $\mathcal{L}_\omega$ é uma contração em E_i. De fato

$$\Big\|\mathcal{L}_\omega(u)-\mathcal{L}_\omega(v)\Big\| = \Big\|\frac{t}{k}\chi(\|u\|)L_i(u)+\omega-\frac{t}{k}\chi(\|v\|)L_i(v)-\omega\Big\| \leqslant \frac{1}{2}\Big\|u-v\Big\|$$

Como $E_i\subseteq E$ é fechado e E é um espaço de Hilbert, então E_i é completo. Além disso, como $\mathcal{L}_\omega$ é uma contração, então pelo Teorema C.9 (teorema do ponto fixo para contrações), existe um único ponto fixo $u_\omega \in E_i$ de $\mathcal{L}_\omega$. Logo, $u_\omega \in E_i$ é o único elemento de E_i, tal que $\mathcal{L}_\omega(u_\omega) = u_\omega$, o que implica que

$$\mathcal{L}_\omega(u_\omega) = \frac{t}{k}\chi(\|u_\omega\|)L_i(u_\omega) + \omega = u_\omega$$

daí temos

$$\omega = u_\omega - \frac{t}{k}\chi(\|u_\omega\|)L_i(u_\omega) \tag{3.54}$$

Logo, avaliando u_ω na definição de $P_i \circ U_t$ e usando a igualdade (3.54), temos

$$P_i(U_t(u_\omega)) = u_\omega - \frac{t}{k}\chi(\|u_\omega\|)L_i(u_\omega) = \omega. \tag{3.55}$$

Como ω foi tomado arbitrário, temos que para todo $\omega \in E_i$, existe $u_\omega \in E_i$, tal que $P_i(U_t(u_\omega)) = \omega$. Logo, $P_i \circ U_t$ é sobrejetor.

b$_2$) $P_i \circ U_t$ é injetor:
Sejam $x, y \in E_i$, tais que $P_i(U_t(x)) = P_i(U_t(y))$. Denotemos por $w = P_i(U_t(x)) = P_i(U_t(y))$, donde $w \in E_i$. Da igualdade (3.55), existe $u_\omega \in E_i$, tal que $P_i(U_t(u_\omega)) = \omega$. Além disso, pelo teorema do ponto fixo, aquele u_ω é único, donde $\omega = x = y$, donde obtemos que o operador é injetor.

c) $(P_i \circ U_t)^{-1}$ **é um operador contínuo:**
Na seguinte desigualdade, usaremos a definição de $P_i \circ U_t$ e a desigualdade triangular. Sejam $u, v \in E_i$, pela desigualdade (3.52), obtemos

$$\begin{aligned}\Big\|P_i\big(U_t(u)\big) - P_i\big(U_t(v)\big)\Big\| &= \left\|\left(u - \frac{t}{k}\chi(\|u\|)L_i(u)\right) - \left(v - \frac{t}{k}\chi(\|v\|)L_i(v)\right)\right\| \\ &= \left\|(u-v) - \frac{t}{k}\Big[\chi(\|u\|)L_i(u) - \chi(\|v\|)L_i(v)\Big]\right\| \\ &\geqslant \Big\|u - v\Big\| - \frac{t}{k}\Big\|\chi(\|u\|)L_i(u) - \chi(\|v\|)L_i(v)\Big\| \\ &\geqslant \Big\|u - v\Big\| - \frac{1}{2}\Big\|u - v\Big\| = \frac{1}{2}\Big\|u - v\Big\|. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Denotemos $P_i \circ U_t = \Pi$, em que Π^{-1} é tal que $\Pi(\Pi^{-1}(u)) = \Pi^{-1}(\Pi(u)) = u$, para todo $u \in E_i$. Como Π é sobrejetora, para todo $\bar{u}, \bar{v} \in E_i$, existem $u, v \in E_i$, tais que $\Pi(u) = \bar{u}$ e $\Pi(v) = \bar{v}$. Então, da desigualdade (3.56), temos

$$\Big\|\Pi^{-1}(\Pi(u)) - \Pi^{-1}(\Pi(v))\Big\| \leqslant 2\,\|\Pi(u) - \Pi(v)\|$$

Logo,

$$\Big\|\Pi^{-1}(\bar{u}) - \Pi^{-1}(\bar{v})\Big\| \leqslant 2\|\bar{u} - \bar{v}\|, \text{ para todo } \bar{u}, \bar{v} \in E_i.$$

Donde $\Pi^{-1} = (P_i \circ U_t)^{-1}$, é Lipschitz, e portanto, contínuo.

Com isto, temos que $P_i \circ U_t$ é contínua, bijetora e com inversa contínua. Logo, $P_i \circ U_t$ é um homeomorfismo. Assim, η satisfaz (Γ_1). $\square$

O lema seguinte nos dará informação significativa sobre o nível c.

Lema 3.6. *Se o funcional I do Lema 3.1, satisfaz (I_3) do Teorema 2.14, então $c \geqslant \alpha$.*

Demonstração: Para demonstrar o lema, será suficiente provar que

$$h_1(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset, \text{ para todo } h \in \Lambda. \tag{3.57}$$

Com efeito, suponhamos provado (3.57), então existe $y \in h_1(\overline{Q}) \cap S$. Isto é, $y \in h_1(\overline{Q})$ e $y \in S$. Como $y \in h_1(\overline{Q})$, temos

$$\sup_{u \in \overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big) \geqslant I(y). \tag{3.58}$$

Também, como $y \in S$

$$I(y) \geqslant \inf_{w \in S} I(w). \tag{3.59}$$

Pela condição (I_3)–(i), do Teorema 2.14, temos $I(u) \geqslant \alpha$ para todo $u \in S$, isto é , α é limite inferior de $I(u)$, para todo $u \in S$ e, portanto,

$$\inf_{w \in S} I(w) \geqslant \alpha. \tag{3.60}$$

Das desigualdades (3.58), (3.59) e (3.60), obtemos

$$\sup_{u \in \overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big) \geqslant I(y) \geqslant \inf_{w \in S} I(w) \geqslant \alpha \tag{3.61}$$

Então, como a desigualdade (3.61) se cumpre para todo $h \in \Lambda$, temos que α é um limite inferior de $\sup\limits_{u \in \overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big)$, para todo $h \in \Lambda$. Com isto, da definição de c, dada em (2.16), temos que c é o maior dos limites inferiores, consequentemente

$$c = \inf_{h \in \Lambda} \sup_{u \in \overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big) \geqslant \alpha.$$

A prova de (3.57), segue da afirmação mais forte, dada a seguir.

Afirmação 3.7. *$h_t(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset$, para todo $h \in \Lambda$ e $t \in [0,1]$.*

Demonstração: Como de (I_3)–(i), temos que $S \subseteq v + E_1$, em que $v \in E_2$, tomando $y \in h_t(\overline{Q}) \cap S$, obtemos

$$y \in h_t(\overline{Q}) \text{ e } y \in S \subseteq v + E_1.$$

Isto é, para cada $t \in [0,1]$, existe $u \in \overline{Q}$, tal que $h_t(u) = y$ e $y = e_1 + v$, com $e_1 \in E_1$ e $v \in E_2$, donde

$$P_1 h_t(u) = P_1(e_1 + v) = e_1 \in S - v$$

e

$$P_2 h_t(u) = P_2(e_1 + v) = v.$$

Então, vemos que provar a Afirmação 3.7 é equivalente provar que para cada $t \in [0,1]$, existe $u \in \overline{Q}$, tal que

p_1) $P_1 h_t(u) \in S - v$

p_2) $P_2 h_t(u) = v$

Para poder resolver (p_1)–(p_2), vamos convertê-lo em outro problema equivalente no qual as hipóteses da geometria do linking poderão ser aplicadas. Para conseguir isto, primeiro provaremos uma equivalência mais geral para o item (p_2). Isto será provado na seguinte

Afirmação 3.8. *Sejam $h \in \Lambda, u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$ e v como no item (p_2). Os itens a seguir, são equivalentes:*

a) $P_2 h_t(u) = P_2 Z_t(u)$, *com* Z_t *compacto e* $P_2 Z_0(u) = v$.

b) $u_2 = P_2 Y_t(u)$, *com* Y_t *compacto e* $P_2 Y_0(u) = v$.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre $m \in \mathbb{N}$, para cada $h \in \Lambda$, com $h = h^{(1)} \circ h^{(2)} \circ \cdots \circ h^{(m)}$.

• **Para** $m = 1$

Tomemos $h \in \Lambda$, tal que $h = h^{(1)}$. Seja $u \in \overline{Q} \subseteq E$, tal que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$. Considerando as hipóteses do item (a), (Γ_1), (Γ_3) e pela linearidade de P_i obtemos

$$P_2 Z_t(u) = P_2 h_t(u) = P_2\Big(U_t(u) + K_t(u)\Big) = U_t P_2(u) + P_2 K_t(u) = U_t(u_2) + P_2 K_t(u).$$

Se, e somente se,

$$U_t(u_2) = -P_2\Big(K_t(u) - Z_t(u)\Big),$$

e isto é equivalente a

$$u_2 = U_t^{-1}\Big(- P_2\Big(K_t(u) - Z_t(u)\Big)\Big), \text{ pois } U_t \text{ é homeomorfimo.}$$

Definindo $P_2Y_t(u) := U_t^{-1}\Big(- P_2\Big(K_t(u) - Z_t(u)\Big)\Big)$, obtemos que $u_2 = P_2Y_t(u)$, em que Y_t é compacto, pois K_t e Z_t são compactos. Além disso, $P_2Y_0(u) = v$, pois

$$U_0^{-1}\Big(- P_2\Big(K_0(u) - Z_0(u)\Big)\Big) = U_0^{-1}\Big(- P_2\Big(0 - v\Big)\Big) = v.$$

- **Para** $m = n - 1$: (hipótese indutiva)

Suponhamos que para $h \in \Gamma$, tal que $h = h^{(1)} \circ h^{(2)} \circ \cdots \circ h^{(n-1)}$, os itens a seguir são equivalentes:

$a_1)$ $P_2h_t(u) = P_2Z_t(u)$, com Z_t compacto e $P_2Z_0(u) = v$.

$b_1)$ $u_2 = P_2Y_t(u)$, com Y_t compacto e $P_2Y_0(u) = v$.

- **Para** $m = n$:

Seja $h \in \Gamma$, tal que $h = h^{(1)} \circ h^{(2)} \circ \cdots \circ h^{(n)}$. Denotemos $\widehat{h} = h^{(2)} \circ h^{(3)} \circ \cdots \circ h^{(n)}$, logo, para cada $t \in [0, 1]$, podemos escrever $h_t = h_t^{(1)} \circ \widehat{h}_t$. Além disso, de (Γ_1) temos $h_t^{(1)} = U_t^{(1)} + K_t^{(1)}$. Novamente, por (Γ_3) e pela linearidade de P_2, obtemos

$$\begin{aligned} P_2Z_t(u) =& P_2h_t(u) = P_2\Big(h_t^{(1)} \circ \widehat{h}_t\Big)(u) = P_2\Big(\Big(U_t^{(1)} + K_t^{(1)}\Big) \circ \widehat{h}_t\Big)(u) \\ =& P_2\, U_t^{(1)}\widehat{h}_t(u) + P_2\, K_t^{(1)}\widehat{h}_t(u) = U_t^{(1)} P_2\, \widehat{h}_t(u) + P_2\, K_t^{(1)}\widehat{h}_t(u), \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$P_2\, \widehat{h}_t(u) = \Big(U_t^{(1)}\Big)^{-1}\Big(- P_2\, K_t^{(1)}\widehat{h}_t(u) + P_2Z_t(u)\Big), \text{ pois } U_t \text{ é homeomorfismo.}$$

Definindo $\Big(U_t^{(1)}\Big)^{-1}\Big(- P_2\, K_t^{(1)}\widehat{h}_t(u) + P_2Z_t(u)\Big) := P_2\widehat{Z_t}(u)$, temos que $\widehat{Z_t}$ é compacto, pois $K_t^{(1)}$ e Z_t são compactos. Além disso, como $K_0^{(1)} = 0$ e $P_2Z_0(u) = v$, temos $P_2\widehat{Z_0}(u) = v$. Assim, havemos obtido que $P_2Z_t(u) = P_2h_t(u)$ é equivalente a $P_2\, \widehat{h}_t(u) = P_2\widehat{Z_t}(u)$. Logo, como pela hipótese indutiva, $P_2\, \widehat{h}_t(u) = P_2\widehat{Z_t}(u)$ é equivalente a $u_2 = P_2Y_t(u)$, então podemos concluir que $P_2Z_t(u) = P_2h_t(u)$ é equivalente a $u_2 = P_2Y_t(u)$.

$\square$

Note que na Afirmação 3.8, tomando $Z_t(u) = v$, operador compacto constante, para todo $t \in [0, 1]$, se obtém o item (p_2).

Agora, continuando com a prova de (p_1)–(p_2), definamos

$$\phi_t(u) := P_1h_t(u) + u_2 - P_2Y_t(u) + v \tag{3.62}$$

e notemos que $\phi \in \Sigma$, em que Σ é a classe de aplicações definida em (2.1). Com efeito, *i)* $P_2\phi_t(u) = u_2 - \Big(P_2Y_t(u) - v\Big)$, com $P_2 \circ Y_t$ e v são compactos, pois Y_t é compacto e v é operador constante.

ii) $\phi_0(u) = P_1\, h_0(u) + u_2 - P_2\, Y_0(u) + v = P_1(u) + u_2 - v + v = u_1 + u_2 = u$

Além disso, da definição de ϕ_t, dada em (3.62), temos

$$P_1\phi_t(u) = P_1 h_t(u). \tag{3.63}$$

Pela Afirmação 3.8, $P_2h_t(u) = v$ é equivalente a $P_2Y_t(u) = u_2$. Daí, como $\phi \in \Sigma$, então da definição de Σ, dada (2.1), obtemos

$$P_2\phi_t(u) = u_2 - P_2Y_t(u) + v = v.$$

Consequentemente temos $P_2\phi_t(u) = v$ é equivalente a $P_2h_t(u) = v$. Com este resultado, pela igualdade (3.63) e pelo fato de $S \subseteq E_1 + v$; temos

$$\phi_t(u) \in S \Leftrightarrow h_t(u) \in S. \tag{3.64}$$

Com efeito, seja $\phi_t(u) \in S$, então

$$\phi_t(u) = P_1\phi_t(u) + P_2\phi_t(u) = P_1h_t(u) + P_2\phi_t(u)$$

e como $P_2\phi_t(u)$ é equivalente a $P_2h_t(u)$, temos que $\phi_t(u)$ é equivalente a

$$P_1h_t(u) + P_2h_t(u) = h_t(u), \text{ daí } h_t(u) \in S.$$

Finalmente, para obter a Afirmação 3.7, isto é, para obter $h_t(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset$, e concluir a prova do Lema 3.6, será suficiente provar que $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$. De fato, pois se $y \in \phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$, então existirá $a \in Q$, tal que $\phi_t(a) = y$, com $y \in S$. Daí, $y = \phi_t(a) \in S$, e pela equivalência dada em (3.64), isto implicará

$$h_t(a) \in S.$$

Além disso, como $a \in Q \subseteq \overline{Q}$, então

$$h_t(a) \in h_t(\overline{Q})$$

Assim, com estas considerações, obteríamos $h_t(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset$, como queremos provar.

Para conseguir $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$, utilizaremos a hipótese (I_3)–*(iii)*. Como, S e ∂Q são linking, e como $\phi \in \Sigma$, nos resta provar

$$\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$$

Suponhamos que

$$\phi_t(\partial Q) \cap S \neq \emptyset,$$

então existem $u \in \partial Q$ e $t \in [0,1]$, tais que $\phi_t(u) \in S$, e pela equivalência dada em (3.64), $h_t(u) \in S$. Além disso, como $h \in \Lambda$, então pela definição de Λ, em (2.17), obtemos

$$h_t(\partial Q) \subseteq I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}.$$

Logo, $h_t(u) \in I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$ e $h_t(u) \in S$, isto é

$$I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta} \cap S \neq \emptyset.$$

Porém, isto é um absurdo, pois se existir $a \in I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta} \cap S$, então $a \in S$ e pelo item (I_3)–(i),

$$I(a) \geqslant \alpha. \tag{3.65}$$

Também, da suposição, $a \in I^{\frac{\alpha+\omega}{2}-\beta}$, então pela definição de I^λ, dada em (2.17), temos

$$I(a) \leqslant \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta, \qquad \text{em que} \qquad \beta \in \Big(0, \frac{\alpha-\omega}{2}\Big).$$

Da última expressão se consegue que $\beta > 0$ e $\alpha > \omega$. Com isto temos

$$I(a) \leqslant \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta < \frac{\alpha+\omega}{2} < \frac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha,$$

o que é uma contradição com a expressão (3.65).
A contradição vem de supor que $\phi_t(\partial Q) \cap S \neq \emptyset$. Então obtemos $\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$, consequentemente, $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$ e pela equivalência dada em (3.64), obtemos finalmente a Afirmação 3.7.

$\square$

Da Afirmação 3.7, tomando $t = 1$, obtemos expressão (3.57), ou seja, provamos que $h_1(\overline{Q}) \cap S \neq \emptyset$, para todo $h \in \Lambda$. Logo, com as considerações dadas posteriormente à expressão (3.57), o Lema 3.7 fica demonstrado.

$\square$

Consequentemente, fica provado o Lema 3.1, Lema de Deformação.

$\square$

4 PROVA DO TEOREMA DE LINKING ABSTRATO

Agora, conhecendo os resultado prévios, estamos em condições de demonstrar o Teorema 2.14, Teorema de linking abstrato.

Demonstração: (Do Teorema de linking abstrato.)

Antes de começar com a prova do teorema, provaremos que a aplicação identidade de Γ, $h(u) = u$, pertence a Λ. Para isto, precisamos provar que h satisfaz (Γ_1)–(Γ_4) (Ver pág. 23). Com efeito, seja $h \in C\Big([0,1] \times E, E\Big)$, tal que $h(u) = u$, isto é $h_t(u) = u$, para todo $t \in [0,1]$. Fixando $t \in [0,1]$, temos

- $h_t(u) = h_t(u) + \Theta_t(u)$, em que $h_t(u) = u$ é um homeomorfismo e $\Theta_t(u) = 0$ é o operador compacto nulo.
- $h_0(u) = u$ e $\Theta_0(u) = 0$.
- $P_i h_t(u) = P_i(u) = u_i = h_t(u_i) = h_t P_i(u),$ para $i = 1, 2$.
- $h_t(u) = u$, leva conjuntos limitados, em conjuntos limitados.

Havendo provado que $h \in \Gamma$, escrevemos a aplicação identidade h, adequadamente como sendo $h = h \circ h \circ \cdots \circ h$. Devido ao item (I_3)–(ii), temos que $I(u) \leqslant \omega$, sobre ∂Q; então $I(h_t(u)) = I(u) \leqslant \omega$, sobre ∂Q. Além disso, para $\beta \in (0, \frac{\alpha-\omega}{2})$, então $0 < \frac{\alpha-\omega}{2} - \beta$, com isto obtemos

$$I(h_t(u)) \leqslant \omega < \omega + \left(\frac{\alpha - \omega}{2} - \beta\right) = \frac{\alpha + \omega}{2} - \beta, \text{ para todo } u \in \partial Q.$$

Da definição de I^λ, podemos escrever a expressão anterior como

$$h_t(\partial Q) \subseteq I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \beta}.$$

Assim obtemos que $h(u) = u$ está em Λ.
Também, de (I_3), Q é limitado, então $h_1(u)$ é limitado, para todo $u \in \overline{Q}$. Logo, de (I_2) e da definição de c, dada em (I_4), segue $c < \infty$. Além disso, pelo Lema 3.6, $c \geqslant \alpha$.

Agora, suponhamos que c não é valor crítico de I, então $I'(u) \neq 0,$ para todo $u \in I^{-1}(c)$. Como $\Big\|I'(u)\Big\| > 0$, para todo $u \in I^{-1}(c)$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\Big\|I'(u)\Big\| \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$, e como $\Big(1 + \|u\|\Big) \geqslant 1$, podemos afirmar que

$$\Big(1 + \|u\|\Big)\Big\|I'(u)\Big\| \geqslant \sqrt{2\varepsilon}, \text{ para todo } u \in I^{-1}\Big([c - \varepsilon, c + \varepsilon]\Big). \tag{4.1}$$

De fato, suponhamos que isso não aconteça, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existirá (ε_n) sequência positiva, tal que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, e $u_n \in I^{-1}\Big([c-\varepsilon_n, c+\varepsilon_n]\Big)$, em que

$$\Big(\,1+\|u_n\|\Big)\Big\|I'(u_n)\Big\| < \sqrt{2\varepsilon_n}. \tag{4.2}$$

Da condição (I_4) do Teorema 2.14, a sequência (u_n) é limitada em E, logo (u_n) admite uma subsequência fracamente convergente. Denotando esta subsequência, ainda por (u_n), temos

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ quando } n \to \infty, \text{ para algúm } u \in E. \tag{4.3}$$

Da condição (I_2), sabemos que $B : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável, então pelo Lema 2.10, $B' : E \longrightarrow E'$ é completamente contínuo. Assim, da expressão (4.3), da subsequência (u_n) podemos obter

$$B'(u_n) \longrightarrow B'(u). \tag{4.4}$$

Da suposição dada em (4.2), fazendo $\varepsilon_n \to 0$, e como $\Big(1+\|u_n\|\Big)$ é limitado em $\mathbb{R}$, temos que $\Big\|I'(u_n)\Big\| \to 0$, de onde segue-se que $I'(u_n) \to 0$. Vimos na igualdade (3.40), que a derivada do funcional I, no ponto u, é dado por $I'(u) = L(u) + B'(u)$. Logo, pela convergência dada em (4.4), obtemos

$$L(u_n) = I'(u_n) - B'(u_n), \text{ e com isto } L(u_n) \longrightarrow -B'(u), \text{ sempre que } n \to \infty.$$

Por outro lado, pela convergência fraca em (4.3), resulta $L(u_n) \rightharpoonup L(u)$, na subsequência, e pela unicidade do limite da sequência $(L(u_n))$, deduz-se que $L(u_n) \longrightarrow L(u)$ e $L(u) = -B'(u)$. Lembrando que $L(u) = I'(u) - B'(u)$, segue que $I'(u) = 0$.

Como estamos supondo que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ e $u_n \in I^{-1}\Big([c-\varepsilon_n, c+\varepsilon_n]\Big)$, daí resulta

$$I(u_n) \longrightarrow c. \tag{4.5}$$

Novamente, por (I_2), B é fracamente contínuo, e como $u_n \rightharpoonup u$, então $B(u_n) \longrightarrow B(u)$. Além disso, por (I_1), L_i é linear e limitado, para $i = 1, 2$. Daí, L é linear e limitado. Então $L(u)$, definido como sendo

$$\begin{aligned} L(u) :&E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &v \longmapsto L(u)v = \langle L(u), v\rangle, \end{aligned}$$

deduz-se que $L(u) \in E'$.
Pelo Teorema C.12, como $u_n \rightharpoonup u$ e $L(u_n) \longrightarrow L(u)$, obtemos $\Big\langle L(u_n), u_n\Big\rangle \longrightarrow \Big\langle L(u), u\Big\rangle$. Assim, da definição do funcional I, obtemos o limite

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\Big\langle L(u_n), u_n\Big\rangle + B(u_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\Big\langle L(u), u\Big\rangle + B(u) = I(u).$$

A última expressão e (4.5) acarretam $I(u) = c$. Ou seja, $I'(u) = 0$ e $I(u) = c$. Mas isto significa que c é um valor crítico de I, o que contradiz a suposição inicial. Assim, existe um $\varepsilon > 0$, satisfazendo (4.1) e podemos assumir ainda, que $\varepsilon < \frac{1}{10}$.
Ora, pela definição de ínfimo, para o ε escolhido, podemos escolher $h \in \Lambda$, com um correspondente β, tal que

$$c \leqslant \sup_{u \in \overline{Q}} I\Big(h_1(u)\Big) \leqslant c + \varepsilon \quad \text{ e } \quad h_t(\partial Q) \subseteq I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \beta}, \text{ com } \beta \in \Big(0, \frac{\alpha - \omega}{2}\Big). \tag{4.6}$$

Da desigualdade dada em (4.6) e da definição do supremo, resulta

$$I\Big(h_1(u)\Big) \leqslant c + \varepsilon, \text{ para todo } u \in \overline{Q}.$$

A expressão anterior nos dá duas possibilidades a analisar

$$I\Big(h_1(u)\Big) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \quad \text{ ou } \quad I\Big(h_1(u)\Big) < c - \varepsilon,$$

em que uma delas, contradiz a definição do supremo. Com efeito, como $h \in \Lambda$ e h_t leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, então $h_1(\overline{Q})$ é limitado. Logo, podemos encontrar $R \in \mathbb{N}$, tal que

$$h_1(\overline{Q}) \subseteq B_{\frac{R}{2}} \tag{4.7}$$

Pelo Lema 3.1, tomando $\rho = \frac{1}{2}\min\{\beta, \varepsilon\}$, existem $\eta \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{N}$, tais que η_t^{ks} satisfaz *(i)* e *(ii)* do lema mencionado, em que $s = (R + 2)^2$.

Seja $g_t(u) := \eta_t^{ks}\Big(h_t(u)\Big)$. Pelo Lema 3.1, para $R \in \mathbb{N}, \rho > 0$ e $\varepsilon < \frac{1}{10}$, escolhidos acima, obtemos

$$I\Big(\eta_t^{ks}\Big(h_t(u)\Big)\Big) \leqslant I\Big(h_t(u)\Big) + \rho, \text{ para todo } h_t(u) \in \mathfrak{B}_{R+2} \text{ e todo } t \in [0, 1]. \tag{4.8}$$

A desigualdade anterior também se cumpre para $h_t(u) \in h_t(\partial Q)$, pois por (4.7),

$$h_t(\partial Q) \subseteq h_t(\overline{Q}) \subseteq \mathfrak{B}_{\frac{R}{2}} \subseteq \mathfrak{B}_{R+2}.$$

Por (4.6), podemos escrever a desigualdade (4.8) como

$$I\Big(\eta_t^{ks}\Big(h_t(u)\Big)\Big) \leqslant \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta + \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, \beta\} \leqslant \frac{\alpha+\omega}{2} - \beta + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\omega}{2} - \frac{\beta}{2}$$

e como tínhamos denotado $g_t(u) = \eta_t^{ks}\Big(h_t(u)\Big)$, obtemos $g_t(\partial Q) \subseteq I^{\frac{\alpha+\omega}{2} - \frac{\beta}{2}}$ e portanto $g \in \Lambda$. Da definição de c, segue

$$c \leqslant \sup_{u \in \overline{Q}} I\Big(g_1(u)\Big). \tag{4.9}$$

Agora, analisando as possibilidades, temos

- Se $I\Big(h_1(u)\Big) \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.
  Então, $h_1(u) \in I^{-1}\Big([c-\varepsilon, c+\varepsilon]\Big)$, e pela inclusão dada em (4.7) e a afirmação que fizemos em (4.1), podemos aplicar o item *(ii)* do Lema 3.1, donde obtemos
  $$I\Big(\eta_1^{ks}\Big(h_1(u)\Big)\Big) \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2},$$
  isto é
  $$g_1(u) = \eta_1^{ks}\Big(h_1(u)\Big) \in I^{c-\frac{\varepsilon}{2}}.$$
  E o Teorema 2.14 fica provado.

- Se $I\Big(h_1(u)\Big) < c - \varepsilon$.
  Então $h_1(u) \in I^{c-\varepsilon}$, logo pelo item *(i)* do Lema 3.1 e pela escolha de $\rho = \frac{1}{2}\min\{\beta, \varepsilon\}$, segue
  $$I\Big(g_1(u)\Big) = I\Big(\eta_1^{ks}\Big(h_1(u)\Big)\Big) \leqslant I\Big(h_1(u)\Big) + \rho < c - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = c - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ isto é, } g_1(u) \in I^{c-\frac{\varepsilon}{2}}$$
  Assim, pela definição de supremo, temos $\sup\limits_{u\in\overline{Q}} I\Big(g_1(u)\Big) \leqslant c - \frac{\varepsilon}{2}$, o que contradiz a desigualdade (4.9).

$\square$

5 APLICAÇÃO À EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER, ASSINTOTICAMENTE LINEAR, EM $\mathbb{R}^N$

Nesta seção introduzimos uma aplicação para o teorema de ponto crítico abstrato, desenvolvido anteriormente. As notações usadas aqui, são encontradas no Apêndice C.

Consideremos o problema

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u), \qquad \text{em } \mathbb{R}^N, \ \text{para } N \geqslant 3, \tag{P}$$

em que $g(x,s) = h(x)f(s)$ e h satisfaz

(h_1) $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, $q = \dfrac{2^*}{2^* - p}$, para algum $p \in (2, 2^*)$ e $h > 0$ em quase todo ponto.

Além disso, f é assintoticamente linear, satisfazendo

(f_1) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$.

(f_2) Existe $a > 0$, tal que $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{a}{2}$, em que $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, e $F(s) \geqslant 0$.

(f_3) Denotando $Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 0$, para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos

$$\lim_{s\to+\infty} Q(s) = +\infty.$$

Também assumimos que a função potencial V satisfaz

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty > 0$.

(V_2) $\sup\Big[\sigma(A)\cap(-\infty,0)\Big] = \sigma^- < 0 < \sigma^+ = \inf\Big[\sigma(A)\cap(0,+\infty)\Big]$, em que $A := -\Delta + V(x)$ é um operador de $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\sigma(A)$ é o espectro do operador A.

Observação 5.1. Uma das principais diferenças da teoria espectral de equações elíticas em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com respeito ao estudo em domínios limitados, é o fato do espectro do operador conter pontos que não são autovalores. Podemos ver em [38], Teorema 3.8, que no caso em que a hipótese (V_1) fosse $V \equiv 0$, teríamos $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Observação 5.2. Um exemplo de um potencial V, satisfazendo a hipótese (V_2), é o caso quando V é periódico. Devido ao espectro $\sigma(A)$ do operador autoadjunto $A = -\Delta + V(x)$ em $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ser a união de intervalos fechados, é possível ter 0 em um intervalo de $\sigma(A)$, satisfazendo (V_2).(Para mais detalhes, ver [16], p. 68, Caso 2.)

Da hipótese (V_1), temos que V é limitada em $\mathbb{R}^N$, e

$$\lim_{|x|\to+\infty} \inf V(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \sup V(x) = \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty. \tag{5.1}$$

Definindo $X = \{x \in \mathbb{R}^N,\ \text{tal que } |x| \geqslant R\}$, temos na desigualdade dada em (B.3)

$$\inf_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \sup_{|x|\geqslant R} V(x)$$

e tomando limite, quando $R \to \infty$, resulta

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant R} V(x) \leqslant \lim_{R\to\infty} \sup_{|x|\geqslant R} V(x). \tag{5.2}$$

Como a função V é limitada, ela é limitada numa vizinhança de a. Considerando $a = \infty$, isto é, considerando valor de aderência em V, quando $|x| \to \infty$, temos

$$\lim_{|x|\to+\infty} \inf V(x) = \lim_{R\to\infty} \inf_{|x|\geqslant R} V(x) \quad \text{e} \quad \lim_{|x|\to+\infty} \sup V(x) = \lim_{R\to\infty} \sup_{|x|\geqslant R} V(x). \tag{5.3}$$

Para mais detalhes das igualdades dadas em (5.3), veja [30], Teorema 14, p. 216.

Das expressões (5.1), (5.2) e (5.3) obtemos

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant R} V(x) = \lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}_{|x|\geqslant R} V(x) = V_\infty. \tag{5.4}$$

Por outro lado, como $V \in L^\infty$, pela hipótese (V_2) do problema e pelo Teorema C.20, verifica-se que o operador $A = -\Delta + V(x)$ é autoadjunto. Então, podemos usar o item (ii) do Teorema C.21, para obter (ver Definição C.16)

$$\sigma_{ess}(A) = [V_\infty, +\infty) \tag{5.5}$$

Note que para usar o item (ii) do Teorema C.21, precisamos $\lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|\geqslant R} |V(x) - V_\infty| = 0$, o qual é garantido pela igualdade dada em (5.4).
Além disso, pelo fato do espectro discreto $\sigma_d(A)$ e o espectro essencial $\sigma_{ess}(A)$ serem complementares (ver Definição C.16), temos

$$\sigma_d(A) \cap (-\infty, V_\infty) = \sigma(A) \cap (-\infty, V_\infty). \tag{5.6}$$

Por outro lado, por definição, o complementar de $\sigma_{ess}(A) = [V_\infty, \infty)$ em $\mathbb{R}$ é

$$\sigma_d(A) \cup \rho(A) = (-\infty, V_\infty).$$

Logo, intersectando esta última expressão, primeiro com $\sigma_p(A)$ e em seguida com $\sigma(A)$, obtemos

$$\sigma_d(A) = (-\infty, V_\infty) \cap \sigma_p(A) \quad \text{e} \quad \sigma_d(A) = (-\infty, V_\infty) \cap \sigma(A)$$

Logo,

$$(-\infty, V_\infty) \cap \sigma_p(A) = (-\infty, V_\infty) \cap \sigma(A). \tag{5.7}$$

Além disso, a hipótese (V_2) nos diz que $0 \in (\sigma^-, \sigma^+)$, logo podemos concluir que 0 não é ponto de acumulação de $\sigma(A)$. Com efeito, tomando $\varepsilon = \min\left\{|\sigma^+|, |\sigma^-|\right\}$ temos que

$$\sigma(A) \cap (-\varepsilon, 0) = \emptyset,$$

pois se existir $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap (-\varepsilon, 0)$, então $\sup\left[\sigma(A) \cap (-\infty, 0)\right] = \sigma^- < \lambda_0$, o que é uma contradição. Também conseguimos uma contradição se consideramos $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap (0, \varepsilon)$. Portanto, 0 não é ponto de acumulação de $\sigma(A)$. Logo, ou 0 não está no espectro de A, ou 0 é um ponto isolado de $\sigma(A)$. Consequentemente, podemos dizer que

$$\text{ou } 0 \notin \sigma(A) \text{ ou } 0 \in \sigma_d(A). \tag{5.8}$$

Observação 5.3. Na Observação 5.2, no caso de o potencial V ser estritamente convexo, o autor garante existência e multiplicidade para o problema (P), em virtude do teorema do passo da montanha. Na ausência da convexidade, o autor exige que $g(x, u)$ seja ímpar em u, e usa uma generalização do teorema de linking para obter o resultado desejado. Casos em que 0 não está em um intervalo e $G(x, u) = \int_0^u g(x, t)dt$ não é convexa ou não vale a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, são difíceis, porque por uma lado não é possível aplicar o teorema do passo da montanha e, por outro lado, não se pode determinar a limitação das sequências (PS).(cf. [16], p.68-69)

Observação 5.4. As expressões (5.5), (5.7) e (5.8) nos permitem definir uma norma $\|\cdot\|$ (a qual será detalhada em breve) equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (Conferir [13], Lema 1.2, p.5.). Assim, $E = \left(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|\right)$, será o espaço de Hilbert usado na aplicação do Teorema 2.14.

Observação 5.5. Do item (V_2), temos $\sigma^- = \sup\left[\sigma(A) \cap (-\infty, 0)\right]$, isto implica que $\sigma(A) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, e como V_∞>0, da igualdade (5.6) obtemos $\sigma_d(A) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$. Isto é, o operador A tem autovalores negativos. Além disso, como a função V é limitada, ela é limitada localmente. Também sabemos que $\lim_{|x| \to +\infty} \inf V(x) = V_\infty$. Logo, usando o Teorema C.22, com $\varepsilon = V_\infty$, consegue-se verificar que o conjunto dos autovalores negativos é finito.

Um exemplo de uma função satisfazendo $(V_1) - (V_2)$, é dado pela função contínua $V(x)$, tal que

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & \text{se} \quad |x| < R, \\ \ \ V_\infty, & \text{se} \quad |x| > 2R. \end{cases}$$

em que $V_0 > \dfrac{\lambda_1(1)}{R^2} > 0$ é uma constante e $\lambda_1(1)$ é o primeiro autovalor do operador $\big(-\varDelta, H_0^1(B_1(0))\big)$.

Com efeito, seja ψ uma autofunção associada a $\lambda_1(R) = \dfrac{\lambda_1(1)}{R^2}$ (note que $\lambda_1(R)$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$, definido em $H_0^1\left(B_R(0)\right)$). Como ψ é autofunção, $\psi \neq 0$ em $B_R(0)$. Definindo $\psi = 0$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash B_R(0)$, temos

$$
\begin{aligned}
(A\psi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{B_R(0)} |\nabla\psi(x)|^2 + V(x)\psi(x)^2 dx \\
&= \Big(\lambda_1(R) - V_0\Big)\|\psi\|^2_{L^2(B_R(0))} \\
&= \left(\frac{\lambda_1(1)}{R^2} - V_0\right)\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&< -\varepsilon\|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

para algum $\varepsilon > 0$. Logo, o operador A é negativo e do Teorema C.19, podemos obter que o ínfimo do espectro do operador A é negativo.

Observação 5.6. Definimos $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} := h_\infty$. Da hipótese (h_1), temos $h(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, $h_\infty > 0$. Também, da mesma hipótese, h é limitada, isto é,

$$0 < h_\infty < +\infty.$$

Da hipótese (f_2), obtemos

$$\lim_{|s| \to +\infty} F(s) = \lim_{|s| \to +\infty} \frac{F(s)}{s^2} s^2 = +\infty.$$

Do mesmo item, usando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\frac{a}{2} = \lim_{|s| \to +\infty} \frac{(F(s))'}{(s^2)'} = \lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{2s},$$

isto é

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = a. \tag{5.9}$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, devido à hipótese (f_1), existe um $\delta > 0$, tal que,

$$\text{se } -\delta < s < \delta, \text{ então } \left|\frac{f(s)}{s}\right| < \varepsilon.$$

De maneira análoga, da hipótese (f_2), por (5.9), existe $M > 0$, com $M > \delta$, tal que, se

$$|s| > M, \text{ então } \left|\frac{f(s)}{s}\right| < a + \varepsilon.$$

Assim, destas últimas expressões e considerando que o conjunto $[\delta, M] \cup [-M, -\delta] \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, a função contínua $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right|$ atinge um máximo. Assim, obtemos que existe $k > 0$, tal que

$$|f(s)| \leqslant k|s|, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } a \leqslant k. \tag{5.10}$$

Lembramos que nós não faremos uso do comportamento de $\dfrac{f(s)}{s}$, no sentido de ser crescente ou não-decrescente. Estas condições, geralmente, são usadas para aplicar as propriedades de variedades de Nehari, as quais não podem ser usadas aqui, pois estamos considerando f assintoticamente linear.

Um exemplo de uma função contínua f, satisfazendo (f_1)–(f_3) (ver Proposição E.2), porém sem a condição de $\dfrac{f(s)}{s}$ ser crescente, é

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{s^7 - \frac{3}{2}s^5 + 2s^3}{1+s^6}, & \text{se} \quad |s| < 5, \\ \\ \dfrac{s^3}{1+s^2}, & \text{se} \quad |s| > 10. \end{cases}$$

Com efeito, $\dfrac{f(s)}{s}$ não é crescente, pois se definimos $\tilde{f}(s) = \dfrac{f(s)}{s}$, temos que $\tilde{f}(1) = \dfrac{3}{4} = 0,75$ e $\tilde{f}(2) = \dfrac{48}{65} = 0,73$.

Seja $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcional energia associado ao problema (P) dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx, \quad \text{para todo } u \in E. \tag{5.11}$$

Pela Observação 5.5, o conjunto de autovalores $\sigma_d(A) \cap (-\infty, 0)$ é finito. Logo, podemos denotar o conjunto destes autovalores, contando multiplicidades, por

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{j} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_j\}, \text{ para algum } j \in \mathbb{N}.$$

Além disso, denotemos por $\varphi_i \in E$ os autovetores associados a λ_i, para cada $i = 1, 2, ..., j$. Logo, definimos o espaço de dimensão finita

$$E^- := \text{span}\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{j}.$$

E também definimos

$$E^0 := \ker(A)$$

- Se $0 \notin \sigma(A)$, então $0 \in \rho(A)$ e daí, o operador $A - 0\mathcal{I} = A$ é injetor. Com isto, $E^0 = \ker(A) = \{0\}$. Logo, $\dim E^0 < \infty$.
- Se $0 \in \sigma(A)$, pela expressão (5.8), temos que $0 \in \sigma_d(A)$, então pela definição do espectro discreto, $\dim \ker(A - 0\mathcal{I}) = \dim \ker A < \infty$, isto é, $\dim E^0 < \infty$.

Consequentemente, E^0 também é de dimensão finita. Destes dois últimos subespaços, obtemos que a soma direta $E^- \oplus E^0$, é um subespaço de E, de dimensão finita. Logo, denotando

$$E^+ := \left(E^- \oplus E^0\right)^{\perp},$$

temos que E^+ é um subespaço de E. Como $V_\infty > 0$ e $\sigma(A) \cap (-\infty, V_\infty) = \sigma_d(A) \cap (-\infty, V_\infty)$, segue da construção de E^-, E^0 e E^+ que

$$\sigma(A\mid_{E^+}) \subseteq [V_\infty, +\infty) \subseteq [0, +\infty),$$

donde obtemos, pelo Teorema C.19, que o operador A, restrito ao espaço E^+ é positivo. Observamos que

$$E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0,$$

e que toda função $u \in E$, pode ser escrita de maneira única

$$u = u^+ + u^- + u^0, \text{ em que } u^+ \in E^+, u^- \in E^- \text{ e } u^0 \in E^0.$$

Com estas informações, podemos definir a norma $\|\cdot\|$ em E, equivalente à norma usual $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, induzida pelo operador A, comentada na Observação 5.4, por

$$\|u\|^2 := \langle Au^+, u^+\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} - \langle Au^-, u^-\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \|u^0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.$$

O correspondente produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E, é, então dado por

$$\langle u, v\rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\nabla u(x).\nabla v(x) + V(x)u(x)v(x)\Big]dx = \langle Au, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}, \text{ se } u, v \in E^+, \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\nabla u(x).\nabla v(x) + V(x)u(x)v(x)\Big]dx = -\langle Au, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}, \text{ se } u, v \in E^-, \\ \langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}, \qquad \text{se } u, v \in E^0, \\ 0, \qquad \text{se } u \in E^j, v \in E^k, j \neq k, \text{ para } j, k \in \{+, -, 0\}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Daqui em diante, o espaço de Hilbert usado nesta aplicação será $E = \big(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|\big)$ e o produto interno e a norma em $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, para não carregar a notação, serão denotados por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ e $\|\cdot\|_{L^2}$, respectivamente.

Da definição de norma e produto interno para E, e tomando $u^+ = u^+ + 0 + 0 \in E$, temos

$$\begin{aligned} \|u^+\|^2 = \langle Au^+, u^+\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\nabla u^+(x).\nabla u^+(x) + V(x)\,u^+(x)\,u^+(x)\Big]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big|\nabla u^+(x)\Big|^2 + V(x)\Big|u^+(x)\Big|^2\Big]dx. \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio, fazemos para $u^- + 0 + 0 \in E$,

$$\|u^-\|^2 = -\langle Au^-, u^-\rangle_{L^2} = -\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big|\nabla u^-(x)\Big|^2 + V(x)\Big|u^-(x)\Big|^2\Big]dx.$$

Daí, subtraindo estas últimas expressões, obtemos

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big| \nabla u^+(x) \Big|^2 + \Big| \nabla u^-(x) \Big|^2 + V(x) \Big| u^+(x) \Big|^2 + V(x) \Big| u^-(x) \Big|^2 \Big] dx.$$

Como E^+ e E^- são subespaços ortogonais de E, da definição de norma para subespaços ortogonais, dada em (3.1), obtém-se

$$\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big| \nabla u(x) \Big|^2 + V(x)|u(x)|^2 \Big] dx. \tag{5.13}$$

Assim, podemos reescrever o funcional energia, dado em (5.11), da seguinte forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big(\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 \Big) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u(x))\, dx, \tag{5.14}$$

para todo $u = u^+ + u^- + u^0 \in E$. Note que a ortogonalidade entre E^+, E^- e E^0 garante que u^+, u^- e u^0 são ortogonais em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto,

$$\langle u^j, u^k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \text{ para todo } j \neq k, \text{ com } j, k \in \{+, -, 0\}.$$

Agora, definamos

$$E_2 := E^- \oplus E^0 \quad \text{ e } \quad E_1 := E^+ = \Big(E_2 \Big)^{\perp}. \tag{5.15}$$

A fim de provar nosso resultado principal precisamos introduzir mais uma hipótese, a saber

(H_1) $\displaystyle \inf_{u_1 \in E_1,\, u_1 \neq 0} \frac{\|u_1\|^2}{\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \geqslant \sigma^+ > 0$, em que σ^+ foi definido no item (V_2).

Notamos que tal hipótese não é artificial. Ela pode ser obtida, por exemplo, utilizando-se a família espectral do operador A, veja por exemplo [5], página 394, Teorema 1.1', para mais detalhes.

Observemos que,

$$\begin{aligned} \|h^{\frac{1}{2}} u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |h^{\frac{1}{2}}(x) u_1(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)||u_1(x)|^2 dx \\ &\leqslant h_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x)|^2 dx = h_\infty \|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{\|h^{\frac{1}{2}} u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \geqslant \frac{1}{h_\infty \|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}.$$

Logo, podemos definir

$$a_0 := \inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\|u_1\|^2}{\|h^{\frac{1}{2}} u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \geqslant \frac{1}{h_\infty} \left(\inf_{u_1 \in E_1, u_1 \neq 0} \frac{\|u_1\|^2}{\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \right) \geqslant \frac{1}{h_\infty} \sigma^+ > 0. \tag{5.16}$$

Assim, a constante positiva $a_0 > 0$, limita inferiormente ao conjunto

$$\left\{ \frac{\|u_1\|^2}{\|h^{\frac{1}{2}} u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}, \text{ para todo } u_1 \in E_1, u_1 \neq 0 \right\}.$$

Daí,

$$\|u_1\|^2 \geqslant a_0 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_1^2(x)\, dx, \text{ para todo } u_1 \in E_1. \tag{5.17}$$

Sob todas as hipóteses e notações prévias, é possível enunciar o resultado principal desta seção.

Teorema 5.7. *Assumamos V satisfazendo $(V_1)-(V_2)$, h satisfazendo (h_1), f satisfazendo $(f_1)-(f_3)$ e a hipótese (H_1), com $a > a_0$, em que a e a_0 estão definidas em (f_2) e (5.16), respectivamente. Então, o problema (P) tem uma solução fraca não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Para provar o teorema acima, será necessário verificar que o funcional I, definido em (5.11), satisfaz as hipóteses $(I_1)-(I_4)$ do Teorema 2.14. Depois de conferir que as hipóteses sejam cumpridas, será possível garantir o resultado deste teorema.

Primeiro, observemos que devido às hipóteses assumidas para h e f, temos que o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. (veja Proposição E.3). Além disso,

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla v + V(x)\, u\, v \Big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\, f(u)\, v\, dx, \text{ para todo } v \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}). \tag{5.18}$$

A seguir, provaremos que o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz as hipóteses (I_1), (I_2), (I_3) e (I_4).

•) I satisfaz (I_1):

Seja $u \in E = E_1 \oplus E_2$, em que $u = u_1 + u_2$ e $u_i \in E_i$, definido em (5.15), para $i = 1, 2$. Definimos o operador identidade em E_1 como

$$\begin{aligned} I_1 : & E_1 \longrightarrow E_1 \\ & u_1 \longmapsto I_1(u_1) = u_1. \end{aligned}$$

Como $u \in E$, também podemos escrever $u = u^+ + u^- + u^0$ e pela definição de E_2, obtemos $u_2 = u^- + u^0$. Com isto podemos definir o operador projeção de E_2 em $E^- \subseteq E_2$, como

$$\begin{aligned} P^- : & E_2 \longrightarrow E_2 \\ & u_2 \longmapsto P^-(u_2) = u^-. \end{aligned}$$

Logo, uma vez que $u^- = u_2 - u^0$, temos

$$\begin{aligned}\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 = \|u_1\|^2 - \|u_2 - u^0\|^2 &= \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle - \Big\langle u_2 - u^0, u_2 - u^0\Big\rangle \\ &= \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle - \Big\langle u^-, u_2 - u^0\Big\rangle = \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle - \Big\langle u^-, u_2\Big\rangle + \Big\langle u^-, u^0\Big\rangle \\ &= \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle - \Big\langle P^-(u_2), u_2\Big\rangle \\ &= \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle + \Big\langle - P^-(u_2), u_2\Big\rangle. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Denotando $L_1 := I_1$ e $L_2 := -P^-$, temos que operador $L_i : E_i \longrightarrow E_i$ é linear, limitado e autoadjunto, para $i = 1, 2$. Além disso, devido à ortogonalidade entre E_1 e E_2 e definindo $Lu = L(u_1 + u_2) = L_1u_1 + L_2u_2$, temos por (5.19),

$$\begin{aligned}\Big\langle Lu, u\Big\rangle = \Big\langle L_1u_1 + L_2u_2, u_1 + u_2\Big\rangle &= \Big\langle L_1u_1, u_1\Big\rangle + \Big\langle L_2u_2, u_2\Big\rangle \\ &= \Big\langle I_1(u_1), u_1\Big\rangle + \Big\langle - P^-(u_2), u_2\Big\rangle = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2.\end{aligned}$$

Da última expressão, obtemos

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big\langle Lu, u\Big\rangle + B(u),$$

em que

$$B(u) = -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx, \tag{5.20}$$

e, com isto, (I_1) está provado.

•) ***I* satisfaz (I_2):**

A prova que o funcional I satisfaz o item (I_2), será feita provando o seguinte lema.

Lema 5.8. *Assumindo que I cumpre as hipóteses (h_1) e (f_1)–(f_2), então B, dado em (5.20), é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados.*

Demonstração: Faremos a prova do lema em duas partes. Primeiro provaremos que B é fracamente contínuo e, em seguida, provaremos que é uniformemente diferenciável.

i) ***O operador B é fracamente contínuo.***

Seja $(u_n) \subseteq E$ uma sequência fracamente convergente, isto é $u_n \rightharpoonup u$, para algum $u \in E$. Pela Definição 2.8, precisamos provar que $B(u_n) \longrightarrow B(u)$.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em E, pela compacidade das imersões de Sobolev (ver Apêndice A.15), a menos de subsequência, temos que $u_n \to u$ converge fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, para

$q \in [2, 2^*)$. Assim, $u_n(x) \to u(x)$, converge q.t.p. em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sempre que $n \to \infty$. Além disso, como F é contínua

$$F(u_n(x)) \longrightarrow F(u(x)), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{5.21}$$

Afirmação: $|F(u_n)|^{\frac{2^*}{p}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$

De fato, do item (ii), da Proposição E.1, para $2 < p < 2^*$ e $\varepsilon > 0$ dado, temos que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$|F(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|F(u_n(x))\right|^{\frac{2^*}{p}} &\leqslant \left[\frac{\varepsilon}{2}|u_n(x)|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|u_n(x)|^p\right]^{\frac{2^*}{p}} \leqslant \left[2\max\left\{\frac{\varepsilon}{2}|u_n(x)|^2, \frac{C_\varepsilon}{p}|u_n(x)|^p\right\}\right]^{\frac{2^*}{p}} \\
&= 2^{\frac{2^*}{p}}\left[\max\left\{\frac{\varepsilon}{2}|u_n(x)|^2, \frac{C_\varepsilon}{p}|u_n(x)|^p\right\}\right]^{\frac{2^*}{p}} \\
&\leqslant 2^{\frac{2^*}{p}}\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}|u_n(x)|^2\right)^{\frac{2^*}{p}} + \left(\frac{C_\varepsilon}{p}|u_n(x)|^p\right)^{\frac{2^*}{p}}\right] \\
&= \varepsilon^{\frac{2^*}{p}}\left|u_n(x)\right|^{2\frac{2^*}{p}} + \left(2\frac{C_\varepsilon}{p}\right)^{\frac{2^*}{p}}\left|u_n(x)\right|^{2^*}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Integrando a desigualdade (5.22), segue

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|F(u_n(x))\right|^{\frac{2^*}{p}}dx \leqslant \varepsilon^{\frac{2^*}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_n(x)\right|^{2\frac{2^*}{p}}dx + \left(2\frac{C_\varepsilon}{p}\right)^{\frac{2^*}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_n(x)\right|^{2^*}dx. \tag{5.23}$$

Agora, pela Observação A.14, temos que,

$$E = H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N),$$

isto é, E está imerso continuamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 \leqslant s \leqslant 2^*$. Logo existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}} = \|u_n\|_{L^s} \leqslant C\|u_n\|_{H^1} < \infty, \text{ para todo } 2 \leqslant s \leqslant 2^*. \tag{5.24}$$

Da hipótese (h_1), $2 < p < 2^*$, de modo que $2 < 2\dfrac{2^*}{p} < 2^*$. Com isto, para $s = 2\dfrac{2^*}{p}$ e $s = 2^*$, na expressão (5.24), conseguimos $C_1, C_2 > 0$, e no lado direito da expressão (5.23) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|F(u_n(x))\right|^{\frac{2^*}{p}}dx \leqslant \varepsilon^{\frac{2^*}{p}}C_1^{2\frac{2^*}{p}}\|u_n\|_{H^1}^{2\frac{2^*}{p}} + \left(2\frac{C_\varepsilon}{p}\right)^{\frac{2^*}{p}}C_2^{2^*}\|u_n\|_{H^1}^{2^*} < \infty. \tag{5.25}$$

Consequentemente, obtemos, $|F(u_n)|^{\frac{2^*}{p}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, o que prova a afirmação.

Da afirmação anterior, segue que $|F(u_n)| \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Agora, definamos a sequência $\big(F(u_n(\cdot))\big) \subseteq L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Tal sequência é limitada em $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, devido a $(u_n) \subseteq E$ ser fracamente convergente, ela é limitada em $E = H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, existem constantes $K_1, K_2 > 0$, tais que

$$\|u_n\|_{H^1}^{2\frac{2^*}{p}} \leqslant K_1 \;\text{ e }\; \|u_n\|_{H^1}^{2^*} \leqslant K_2,$$

e de (5.25), se tem

$$\Big\|F(u_n)\Big\|_{L^{\frac{2^*}{p}}}^{\frac{2^*}{p}} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big|F(u_n(x))\Big|^{\frac{2^*}{p}} dx \leqslant \varepsilon^{\frac{2^*}{p}} {C_1}^{2\frac{2^*}{p}} K_1 + \Big(2\frac{C_\varepsilon}{p}\Big)^{\frac{2^*}{p}} {C_2}^{2^*} K_2,$$

isto é, $\big(F(u_n(\cdot))\big)$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$.

Com este resultado e a expressão (5.21), podemos dizer que existe $C > 0$, tal que $\Big\|F(u_n)\Big\|_{L^{\frac{2^*}{p}}} \leqslant C$ e $F(u_n(x)) \longrightarrow F(u(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então, pela observação (b), do Lema de Brezis-Lieb, dada no Lema A.16, temos

$$F(u_n) \rightharpoonup F(u), \text{ em } L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N). \tag{5.26}$$

Pela condição (h_1), $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $q = \dfrac{2^*}{2^* - p}$, donde , q e $\dfrac{2^*}{p}$ são expoentes conjugados. Assim, fixando $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, podemos definir o funcional linear

$$\begin{aligned} \varphi_h :& L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & T \longmapsto \varphi_h(T)) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)T(x)\, dx \end{aligned} \tag{5.27}$$

Então, usando este funcional na convergência dada em (5.26), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n(x))\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\, dx,\; n \to \infty.$$

Portanto, de (5.20), $B(u_n) \longrightarrow B(u)$, em que $u_n \rightharpoonup u$ em E.

$ii)$ ***B* é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados.**

Da Definição 2.7, precisamos provar que, dados $\varepsilon, R > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\Big|B(u+v) - B(u) - B'(u)v\Big| < \varepsilon\|v\|, \quad \forall\, u, u+v \in B_R \text{ e } \|v\| < \delta.$$

De (5.20), temos que a derivada de B, no ponto u em v, no sentido de Fréchet, é

$$B'(u)v = -\int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(u(x))\, v(x)\, dx \tag{5.28}$$

Agora, como $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$, definimos a função real $\psi(t) := F(u + tv)$ e obtemos $\psi'(t) = f(u+tv)v$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(x)$, com $0 < \theta(x) < 1$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta),$$

donde conseguimos, da definição de derivada de ψ,

$$F(u+v) - F(u) = f(z)v, \text{ em que } z = u + \theta v, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{5.29}$$

Multiplicando a última expressão por $h(x)$ e integrando sobre $\mathbb{R}^N$, conseguimos

$$\begin{aligned} B(u+v) - B(u) &= -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F\Big(u(x)+v(x)\Big)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big[F\Big(u(x)+v(x)\Big) - F(u(x))\Big]\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(z(x))v(x)\,dx \end{aligned} \tag{5.30}$$

Como $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, da Observação 5.6, $h_\infty > 0$. Além disso $h > 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ (devido a (h_1)). Daí, pelas igualdades (5.28) e (5.30), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} \Big|B(u+v) - B(u) - B'(u)v\Big| &= \Big| -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(z(x))v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(u(x))\,v(x)\,dx\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big[f(u(x)) - f(z(x))\Big]v(x)\,dx\Big| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} h(x)^{\frac{1}{2}}h(x)^{\frac{1}{2}}\Big|\Big[f(z(x)) - f(u(x))\Big]v(x)\Big|\,dx \\ &\leqslant h_\infty^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)^{\frac{1}{2}}\Big|f(z(x)) - f(u(x))\Big|\,\Big|v(x)\Big|\,dx. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Para conseguir nosso resultado, definindo $\xi := h(\cdot)^{\frac{1}{2}}\Big|f(z(\cdot)) - f(u(\cdot))\Big|$, provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação: $\xi(\cdot) = h(\cdot)^{\frac{1}{2}}\Big|f(z(\cdot)) - f(u(\cdot))\Big| \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, para provar isto, primeiro provaremos que

$$|f(u)|^2 \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N).$$

Da desigualdade (5.10) e como $2 < 2\dfrac{2^*}{p} < 2^*$, por (h_1), temos

$$|f(u)|^{2\frac{2^*}{p}} \leqslant k^{2\frac{2^*}{p}}|u|^{2\frac{2^*}{p}}. \tag{5.32}$$

Também, devido a $2 < 2\dfrac{2^*}{p} < 2^*$, temos a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Logo existe uma constante $k_1 > 0$, tal que $\|u\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}} \leqslant k_1\|u\| < \infty$. Logo,

$$\|u\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}} < \infty.$$

Integrando a expressão dada em (5.32) e usando a última desigualdade, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(u)|^{2\frac{2^*}{p}}\,dx \leqslant k^{2\frac{2^*}{p}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\frac{2^*}{p}}\,dx = k^{2\frac{2^*}{p}}\,\Big\|u\Big\|_{L^{2\frac{2^*}{p}}}^{2\frac{2^*}{p}} < \infty,$$

isto é, $|f(u)|^{2\frac{2^*}{p}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, donde obtemos $|f(u)|^2 \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\Big|f(z) - f(u)\Big|^2 \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N), \tag{5.33}$$

pois,

$$\left|f(z)-f(u)\right|^2 \leqslant \Big(|f(z)|+|f(u)|\Big)^2 = |f(z)|^2+|f(u)|^2+2|f(z)||f(u)|$$
$$\leqslant |f(z)|^2+|f(u)|^2+|f(z)|^2+|f(u)|^2 \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N).$$

Da hipótese (h_1), sabemos q e $\frac{2^*}{p}$ são expoentes conjugados, e como temos que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $\left|f(z)-f(u)\right|^2 \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder, a última igualdade na seguinte expressão, é finita

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\xi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[h^{\frac{1}{2}}(x)\left|f(z(x))-f(u(x))\right|\Big]^2 dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\left|f(z(x))-f(u(x))\right|^2 dx < \infty.$$

Assim, $\xi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, com isto, a afirmação fica provada.

Com esta afirmação, na expressão (5.31), podemos fazer uso novamente de desigualdade de Hölder, pois tanto $\xi = h^{\frac{1}{2}}|f(z)-f(u)|$ quanto v, pertencem a $L^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, considerando a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe $C_2 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left|B(u+v)-B(u)-B'(u)v\right| &\leqslant h_\infty^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)^{\frac{1}{2}}\left|f(z(x))-f(u(x))\right|\left|v(x)\right| dx \\ &\leqslant h_\infty^{\frac{1}{2}} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant h_\infty^{\frac{1}{2}} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} C_2 \|v\|. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Enfim, usando a desigualdade (5.34), para provar que B é uniformemente diferenciável

será suficiente provar que dados $\varepsilon, R > 0$, com $B_R \subseteq E$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{\varepsilon}{h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2}, \forall\, u+v \in B_R, \text{ com } \|v\| < \delta.$$

Usaremos o método de redução ao absurdo. Para isso, suponhamos que exista $\varepsilon_0 > 0$ e $B_{R_0} \subseteq E$, tais que para todo $\delta > 0$, seja possível obter $u_\delta + v_\delta \in B_{R_0}$, com $\|v_\delta\| < \delta$ e $\|\xi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} > \dfrac{\varepsilon_0}{h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2}$, em que

$$\xi_\delta = h(\cdot)^{\frac{1}{2}}\left|f(z_\delta(\cdot))-f(u_\delta(\cdot))\right| \quad \text{e} \quad z_\delta = u_\delta + \theta v_\delta.$$

Tomando $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n + v_n \in B_{R_0}$, tal que

$$\|v_n\| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|\xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} > \frac{\varepsilon_0}{h_\infty^{\frac{1}{2}} C_2}. \tag{5.35}$$

Portanto, $\|u_n\| - \|v_n\| \leqslant \|u_n + v_n\| < R_0$ e $v_n \longrightarrow 0$ em E, quando $n \to \infty$. Logo, $\|u_n\| < R_0$, isto é, (u_n) e (v_n) são limitadas em E. Como (u_n) é limitada em E, existe uma subsequência de (u_n) que converge fracamente em E. Denotando ainda esta subsequência por (u_n), escrevemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E, \text{ quando } n \to \infty.$$

Por definição, $z_n = u_n + \theta v_n$ e segue que (z_n), também é limitada, pois u_n e v_n são limitadas. Como $v_n \to 0$, $v_n \rightharpoonup 0$, logo

$$z_n \rightharpoonup u, \text{ em } E, \text{ quando } n \to \infty.$$

Donde obtemos, para as subsequências $(z_n), (u_n) \subseteq E$, que

$$z_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{e} \quad u_n(x) \longrightarrow u(x), \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \to \infty.$$

Da hipótese (f_1), f é contínua, e das convergências anteriores

$$\Big| f(z_n(x)) - f(u_n(x)) \Big|^2 \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, da expressão (5.33), temos que a sequência $\left(|f(z_n) - f(u_n)|^2 \right)$ está em $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e também é limitada em $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, uma vez que as sequências (z_n) e (u_n) são limitadas em E, pela imersão de $E \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e da desigualdade (5.10), segue que

$$\begin{aligned}
\Big\| |f(z_n) - f(u_n)|^2 \Big\|^{\frac{2^*}{p}}_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} &= \Big\| f(z_n) - f(u_n) \Big\|^{2\frac{2^*}{p}}_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leqslant C\Big(\Big\| f(z_n) \Big\|^{2\frac{2^*}{p}}_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} + \Big\| f(u_n) \Big\|^{2\frac{2^*}{p}}_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} \Big) \\
&\leqslant C\, k^{2\frac{2^*}{p}} \Big(\Big\| z_n \Big\|^{2\frac{2^*}{p}}_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} + \Big\| u_n \Big\|^{2\frac{2^*}{p}}_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} \Big) \\
&\leqslant 2\, C \Big(C_{2\frac{2^*}{p}}\, k\, R_0 \Big)^{2\frac{2^*}{p}},
\end{aligned}$$

em que $C_{2\frac{2^*}{p}} > 0$ é a constante dada pela imersão $E \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Daí, a sequência $\left(|f(z_n) - f(u_n)|^2 \right)$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Usando novamente o Lema de Brezis-Lieb (Proposição A.16) resulta

$$|f(z_n) - f(u_n)|^2 \rightharpoonup 0, \text{ em } L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N), \text{ quando } n \to \infty.$$

Procedendo de maneira análoga ao feito em (5.27), sendo $L^q(\mathbb{R}^N)$ o espaço dual de $L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$, pois q e $\dfrac{2^*}{p}$ são expoentes conjugados, da convergência fraca anterior temos

$$\|\xi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \Big| f(z_n(x)) - f(u_n(x)) \Big|^2 dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

o que é uma contradição, pois de (5.35), temos $\|\xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} > \dfrac{\varepsilon_0}{h_\infty^{\frac{1}{2}}\, C_2}$. Portanto, dados $\varepsilon, R > 0$, com $B_R \subseteq E$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, h_\infty^{\frac{1}{2}}\, C_2 \leqslant \varepsilon, \forall\, u + v \in B_R, \text{ com } \|v\| < \delta.$$

Finalmente, da desigualdade (5.34), decorre que B é uniformemente diferenciável. $\square$

$\bullet$) $\boldsymbol{I}$ **satisfaz** (I_3)**:**

Para provar (I_3), definimos Q e S, como sendo

$$Q = \Big\{re, r \in [0, r_1]\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap B_{r_2}\Big) \quad \text{e} \quad S = \partial B_\rho \cap E_1, \tag{5.36}$$

em que $0 < \rho < r_1 < r_2$ são constantes e $e \in E_1$ com $\|e\| = 1$, um "vetor adequado" a serem determinados, que serão definidos a seguir.

Sejam a definido na hipótese (f_2) e a_0 definido em (5.16). Como, por hipótese, $a > a_0$, então seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que para $a_\varepsilon := a - \varepsilon$, tenhamos $a > a_\varepsilon > a_0 > 0$. Pela definição de a_0, existe um $e_0 \in E_1$, com $e_0 \neq 0$, tal que

$$a_0 \leqslant \frac{\|e_0\|^2}{\Big\|h^{\frac{1}{2}} e_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \leqslant a_\varepsilon,$$

donde

$$a_0 \Big\|h^{\frac{1}{2}} e_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|e_0\|^2 \leqslant a_\varepsilon \Big\|h^{\frac{1}{2}} e_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Logo,

$$a_0 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) e_0^2(x)\, dx \leqslant \|e_0\|^2 \leqslant a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} h(x) e_0^2(x)\, dx.$$

Normalizando o vetor e_0, denotamos $e := \dfrac{e_0}{\|e_0\|} \in E_1$. Da desigualdade anterior, temos que o vetor e, definido em nossa estrutura Q, é tal que

$$1 = \|e\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\Big|\nabla e(x)\Big|^2 + V(x) e^2(x) \Big)\, dx \leqslant a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} h(x) e^2(x)\, dx. \tag{5.37}$$

Além disso, pelo Lema 2.5, S e ∂Q são linking, em que ∂Q pode ser escrito como $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, onde

$$Q_1 = \Big\{0\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap B_{r_2}\Big), Q_2 = \Big\{re, r \in [0, r_1]\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap \partial B_{r_2}\Big) \text{ e } Q_3 = \Big\{r_1 e\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap B_{r_2}\Big),$$

onde o vetor $e \in E_1$ foi escolhido acima e satisfaz (5.37).

O lema seguinte mostra que o funcional I satisfaz itens (i), (ii) e (iii) da hipótese (I_3) no Teorema 2.14, para algum $\alpha > 0$, $\omega = 0$ e $v \in E_2$.

Lema 5.9. *Assumamos que as hipóteses* (V_1)–(V_2), (h_1) *e* (f_1)–(f_2) *são satisfeitas para o funcional* I*. Para* Q *e* S *como em* (5.36) *e para* $r_1 > 0$ *suficientemente grande, tem-se:*

(a) $I(u) \geqslant \alpha > 0$, *para todo* $u \in S$ *e para algum* $\alpha > 0$.

(b) $I(u) \leqslant 0$, *para todo* $u \in \partial Q$.

Demonstração: Faremos primeiro a prova do item (a). Do fato da fronteira de Q ser escrita como $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, a prova do item (b) será feita considerando três casos.

$(\boldsymbol{a})$ Do item (ii) da Proposição E.1 e da Observação 5.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)||F(u(x))|\,dx \leqslant h_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{\varepsilon}{2}|u(x)|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|u(x)|^p\Big)dx.$$

Além disso, pela definição de $S \subseteq E_1$, para todo $u_1 \in S$ temos $\|u_1\| = \rho$. Então, escrevendo o funcional I como em (5.14) e pela desigualdade anterior, resulta

$$\begin{aligned} I(u_1) &= \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_1(x))\,dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\rho^2 - h_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{\varepsilon}{2}\,|u_1(x)|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}\,|u_1(x)|^p\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 - h_\infty \frac{\varepsilon}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - h_\infty \frac{C_\varepsilon}{p}\|u_1\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Agora, usando a Imersão de Sobolev dada na Observação A.14 e como $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existem constantes $C_2 > 0$ e $C_p > 0$, tais que

$$\|u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2^2\|u_1\|^2 = C_2^2\rho^2 \quad \text{e} \quad \|u_1\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_p^p\|u_1\|^p = C_p^p\rho^p.$$

Logo, destas últimas desigualdades e da expressão (5.38), obtemos

$$I(u_1) \geqslant \frac{1}{2}\rho^2 - h_\infty \frac{\varepsilon}{2} C_2^2\rho^2 - h_\infty \frac{C_\varepsilon}{p} C_p^p \rho^p = \rho^2\Big[\frac{1}{2}\Big(1 - \varepsilon\, h_\infty\, C_2^2\Big) - \frac{C_\varepsilon}{p}\, h_\infty\, C_p^p\, \rho^{p-2}\Big]. \tag{5.39}$$

Assim, fixados ε e ρ suficientemente pequenos, de (5.39), segue que $I(u_1) \geqslant \alpha > 0$, para algum $\alpha > 0$. Assim, está determinado $\rho > 0$.

$(\boldsymbol{b})$ Como dito anteriormente, faremos a prova considerando três casos, ou seja, mostraremos que $I|_{Q_i} \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$.

(b_1) Se $u \in Q_1 = \Big\{0\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap B_{r_2}\Big) \subseteq E_2$.
É fácil ver que

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big(-\|u\|^2\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \leqslant 0,\ \forall r_2 > 0,$$

pois $h(x), F(u(x)) \geqslant 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(b_2) Dada uma constante (ainda arbitrária $r_1 > 0$), consideremos o caso em que $u \in Q_2 = \Big\{re, r \in [0, r_1]\Big\} \oplus \Big(E_2 \cap \partial B_{r_2}\Big)$.
Então, $u = u_1 + u_2$, em que $u_1 = re$, com $0 \leqslant \|u_1\| = r \leqslant r_1$ e u_2 é tal que $\|u_2\| = r_2$, em que r_2 pode ser escolhido maior que $r_1 > 0$. Assim, $r_1^2 - r_2^2 < 0$. Logo,

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big(\|u_1\|^2 - r_2^2\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \leqslant \frac{1}{2}\Big(r_1^2 - r_2^2\Big) < 0.$$

(b_3) Se $u \in Q_3 = \{r_1 e\} \oplus \left(E_2 \cap B_{r_2}\right)$.
Então $u = r_1 e + u_2$, em que $0 \leqslant \|u_2\| \leqslant r_2$. Temos duas opções a considerar

(i) Se $r_1 \leqslant \|u_2\| \leqslant r_2$.
Então,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\left(r_1^2 - \|u_2\|^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(r_1^2 - r_1^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \leqslant - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \leqslant 0, \end{aligned}$$

onde $r_1 >$ ainda é arbitrário e r_2 escolhido maior que r_1.

(ii) Se $0 \leqslant \|u_2\| < r_1$.
Então, tomando $u_2 = r_1 v_2$, em que $v_2 \in \mathring{B}_1 \cap E_2$, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\left(r_1^2 - r_1^2\|v_2\|^2\right) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}r_1^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u(x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}r_1^2\left[1 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{r_1^2}\,h(x)F(u(x))\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}r_1^2\left[1 - \int_{\mathbb{R}^N} 2\,h(x)\frac{F\Big(r_1[e(x)+v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\,dx\right]. \end{aligned} \tag{5.40}$$

A expressão (5.40) nos permite definir uma sequência dominada por uma função no espaço $L^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, das hipóteses (f_2), (f_3) e de (5.10), temos

$$0 \leqslant F(s) < \frac{1}{2}f(s)s \leqslant \frac{1}{2}|f(s)||s| \leqslant k|s|^2,$$

para algum $k > 0$, com $k \geqslant a$, e para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, como $|h(x)| \leqslant h_\infty$ e denotando $s(x) = r_1\Big[e(x) + v_2(x)\Big]$, obtemos

$$\Big|h(x)F(s(x))\Big| \leqslant k\,h_\infty |s(x)|^2 = k\,h_\infty r_1^2\,|e(x) + v_2(x)|^2,$$

donde, considerando $r_1 = n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\left|h(x)\frac{F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2}\right| \leqslant k\,h_\infty\,|e(x)+v_2(x)|^2, \tag{5.41}$$

em que a função $k\,h_\infty\,|e(\cdot) + v_2(\cdot)|^2$ pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^N)$, pois as funções e e v_2 pertencem a $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, $e + v_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $s(x) = n\Big[e(x) + v_2(x)\Big]$, da hipótese (f_2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2\Big[e(x)+v_2(x)\Big]^2} = \frac{a}{2}, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

donde,

$$\lim_{n\to\infty} 2\,h(x)\,\frac{F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2} = a\,h(x)\,\Big[e(x)+v_2(x)\Big]^2, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{5.42}$$

As expressões (5.41) e (5.42) nos permitem usar o Teorema B.2,(Convergência Dominada) e voltando à notação r_1 no lugar de n, tal teorema implica

$$\lim_{r_1 \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} 2\, h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx = a \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[e(x) + v_2(x)\right]^2 dx,$$

para todo $v_2 \in \overset{\circ}{B}_1 \cap E_2$ fixado.

Com o intuito de provar que $I(u) < 0$ em Q_3, assumimos a seguinte afirmação, que será provada posteriormente.

Afirmação 5.10. *O limite*

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} 2\, h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx = a \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \Big[e(x) + v_2(x)\Big]^2 dx,$$

é uniforme, para $v_2 \in \overset{\circ}{B}_1 \cap E_2$.

Agora, seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $0 < \varepsilon < a$ e como $h(x)\Big[e(x)+v_2(x)\Big]^2 \geqslant 0$, no lado direito da Afirmação 5.10, temos

$$a \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big[e(x) + v_2(x)\Big]^2 dx > (a - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big[e(x) + v_2(x)\Big]^2 dx.$$

Assim, podemos escrever a estimativa acima como

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} 2h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx > (a - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(e(x) + v_2(x)\Big)^2 dx.$$

Logo, da convergência uniforme em $\overset{\circ}{B}_1 \cap E_2$, para $\varepsilon > 0$, existe $r_0 > 0$, tal que, para todo $r_1 \geqslant r_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx > (a - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(e(x) + v_2(x)\Big)^2 dx,$$

para todo $v_2 \in \overset{\circ}{B}_1 \cap E_2$. Como e e v_2 são ortogonais em $L^2(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(e(x) + v_2(x)\Big)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|e(x)|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} h(x)e(x)v_2(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v_2(x)|dx \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} h(x)e^2(x)dx,\end{aligned}$$

pois $0 \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)e(x)v_2(x)dx\right| \leqslant h_\infty \left|\int_{\mathbb{R}^N} e(x)v_2(x)dx\right| = 0$, devido á ortogonalidade. Com isto temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx > (a - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)e^2(x)\, dx.$$

Denotando $a_\varepsilon = a - \varepsilon$, da desigualdade anterior conseguimos

$$I(u) \leqslant \frac{1}{2}r_1^2 \left[1 - \int_{\mathbb{R}^N} 2h(x) \frac{F\Big(r_1[e(x) + v_2(x)]\Big)}{r_1^2}\, dx\right] < \frac{1}{2}r_1^2 \left[1 - a_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} h(x)e^2(x)\, dx\right] \leqslant 0,$$

em que primeira desigualdade é devida à expressão (5.40) e a última desigualdade segue de (5.37). Assim, $I(u) \leqslant 0$, em Q_3, para $r_1 > 0$ fixado, suficientemente grande. Consequentemente, o Lema 5.9 está provado. $\square$

A seguir, faremos a prova da Afirmação 5.10.

Demonstração: (Da Afirmação 5.10)
Definamos, para todo $n \in \mathbb{N}$, o funcional

$$\begin{aligned} J_n : B_1 \cap E_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v_2 &\longmapsto J_n(v_2), \end{aligned}$$

dado por

$$J_n(v_2) := \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2 \, dx.$$

Devido à hipótese (f_2), F é continua. Essa continuidade da função F garante a continuidade de J_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, da mesma hipótese, $F(s) \geqslant 0$, então

$$\left[a - \frac{2F(s)}{s^2} \right] \leqslant a, \ \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}. \tag{5.43}$$

Além disso, lembrando que e e v_2 são ortogonais em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e usando a desigualdade (5.43), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} J_n(v_2) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2 \, dx \\ &\leqslant a\, h_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2 \, dx = a\, h_\infty \left(\|e\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right). \end{aligned}$$

Como $\|e\| = 1$, $\|v_2\| \leqslant 1$ e considerando a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, para $e, v_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C_2 > 0$, e obtemos

$$J_n(v_2) \leqslant 2\, C_2^2\, a\, h_\infty, \ \text{ para todo } v_2 \in B_1 \cap E_2.$$

Por outro lado, da definição de E_2 dada em (5.15), sabemos que $\dim E_2 < \infty$, então $B_1 \cap E_2$ é compacto. Também temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, J_n é contínua em $B_1 \cap E_2$, então J_n atinge um valor máximo. Denotemos por u_n, o elemento de $B_1 \cap E_2$, que faz $J_n(u_n)$ ser um valor máximo. Agora, consideremos a sequência $(u_n) \subseteq B_1 \cap E_2$ destes elementos, onde vemos claramente que ela é limitada. Logo, usando novamente o fato de E_2 ser de dimensão finita, temos que a sequência (u_n) admite uma subsequência convergente. Denotando ainda esta subsequência por (u_n), escrevemos $u_n \to u$ na norma de E. Além disso, para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $0 \leqslant J_n(v_2) \leqslant J_n(u_n)$. Pela definição de J_n, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2\,dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+u_n(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2\,dx \end{aligned} \tag{5.44}$$

Agora, pela imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma constante $C_2 > 0$, tal que $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2\|u_n - u\|$. O que implica que se $u_n \to u$ em E, então $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $u_n \to u$ na norma de E, então pelo Teorema B.3, $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Da hipótese (f_2) e com um raciocínio análogo ao feito em (5.42), fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+u_n(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2 = 0, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{5.45}$$

Além disso, pelo segundo item do Teorema B.3, a menos de subsequências, existe ξ em $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ que domina $u_n(x)$. E tomando $\psi(x) = \xi(x)^2$, temos que existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$|u_n(x)|^2 \leqslant \psi(x), \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Da hipótese (h_1), $h > 0$. Além disso, pela última expressão e da desigualdade (5.43), conseguimos

$$0 \leqslant \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+u_n(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2 \leqslant a\, h_\infty \Big(e(x)+\xi(x)\Big)^2. \tag{5.46}$$

Isto é, a sequência do limite em (5.45) está dominada pela função $\Big(e(x)+\xi(x)\Big)^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, das expressões (5.45) e (5.46) podemos aplicar o Teorema B.2, da Convergência Dominada, para conseguir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+u_n(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+u_n(x)\Big)^2\,dx = 0.$$

Agora, aplicando o teorema do confronto na desigualdade (5.44), finalmente conseguimos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[a - \frac{2F\Big(n[e(x)+v_2(x)]\Big)}{n^2\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2} \right] h(x)\Big(e(x)+v_2(x)\Big)^2\,dx = 0$$

uniformemente, para todo $v_2 \in B_1 \cap E_2$ e a afirmação fica provada. □

•) *I* satisfaz (I_4):

Para verificarmos que o funcional I satisfaz este item, vamos principalmente provar que a sequência de Cerami do funcional I, definido em (5.11), é limitada em E.

Lema 5.11. *Assumamos que* (V_1)–(V_2), (h_1) *e* (f_1)–(f_3) *sejam satisfeitas para o funcional* I*. Seja* $(u_n) \subseteq E$ *uma sequência de Cerami relativa a* I*, sobre um nível arbitrário* $c \in \mathbb{R}$*. Então* (u_n) *é uma sequência limitada em* E*.*

Demonstração: Usaremos o método de redução ao absurdo. Para isso, suponhamos que $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to +\infty$. Definimos $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, donde claramente, $(v_n) \subseteq E$ é uma sequência limitada em E. Então, como $E = H_0^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ é reflexivo, (v_n) possui uma subsequência fracamente convergente, e denotando ainda a subsequência por (v_n), temos

$$v_n \rightharpoonup v, \text{ quando } n \to \infty, \text{ para algum } v \in E. \tag{5.47}$$

Como (v_n) é limitada em E, o limite fraco v em (5.47), ou é nulo ou é não nulo. Provaremos que para a sequência (v_n), nenhum desses dois casos pode ocorrer, o que nos dará uma contradição e, consequentemente, obteremos a prova de (u_n) ser limitada.

- **Suponhamos que** $v \neq 0$ e definamos

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ tal que } v(x) \neq 0\right\},$$

donde temos que $|\Omega| > 0$. Devido à convergência fraca, dada em (5.47), e à compacidade das imersões de Sobolev em domínios limitados (cf. Apêndice A. 15), tem-se que, a menos de subsequências, $v_n \to v$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Logo $v_n(x) \to v(x)$, q.t.p. em Ω. Além disso, da definição de v_n temos $u_n(x) = \|u_n\| v_n(x)$ e como supomos $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to +\infty$, deduzimos que

$$|u_n(x)| \to +\infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando esta última expressão e (f_3), obtemos

$$Q(u_n(x)) \to +\infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, pelas hipóteses (h_1) e (f_3), $h(x)Q(u_n(x)) > 0$, donde

$$h(x)Q(u_n(x)) \to +\infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Agora, estamos em condições de aplicar o Teorema B.1, Lema do Fatou, à sequência $h(x)Q(u_n(x))$, e assim obter

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega h(x)Q\left(u_n(x)\right)dx \geqslant \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} h(x)Q\left(u_n(x)\right)dx = +\infty. \tag{5.48}$$

Da hipótese do item (I_4), do fato de (u_n) ser uma sequência de Cerami no nível c e da Definição 2.12, temos

$$I(u_n) \longrightarrow c, \quad \Big(1 + \|u_n\|\Big)\|I'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Ainda, da última convergência, temos

$$|I'(u_n)\, u_n| \leqslant \|I'(u_n)\|_{E'}\, \|u_n\| \leqslant \|I'(u_n)\|_{E'}\Big(\|u_n\| + 1\Big) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

isto é,

$$I'(u_n)u_n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.49}$$

Assim, obtemos a convergência

$$I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n \longrightarrow c, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.50}$$

Como

$$g_n = o_n(1) \iff \lim_{n\to\infty}|g_n| = 0,$$

podemos escrever o limite dado em (5.50) por

$$c + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n. \tag{5.51}$$

Agora, da definição do funcional I e da expressão (5.18), tomando $u = u_n$ e $v = u_n$, temos

$$\begin{aligned} I(u_n) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2\Big)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\ I'(u_n)u_n =& \int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u_n|^2 + V(x)\,|u_n|^2\Big)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\,f(u_n)\,u_n\,dx. \end{aligned}$$

Subtraindo convenientemente as expressões anteriores e considerando a notação dada em (5.51), resulta

$$\begin{aligned} c + o_n(1) = I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n &= -\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\,f(u_n)\,u_n\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\frac{1}{2}f(u_n)\,u_n - F(u_n)\Big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)Q(u_n(x))\,dx \geqslant \int_{\Omega} h(x)Q(u_n(x))\,dx. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Assim, de (5.48) e (5.52) obtemos que $c \geqslant +\infty$, o que é uma contradição. Logo, $v = 0$. Mas, vejamos o que acontece quando $v = 0$.

- **Suponhamos que** $v = 0$. Como a sequência $(v_n) \subseteq E$, podemos decompô-la como

$$v_n = v_{+,n} + v_{-,n} + v_{0,n}, \text{ em que } v_{j,n} \in E^j, \text{ com } j = +, -, 0.$$

Pelo mesmo argumento usado em (5.47), temos que a menos de subsequências

$$v_n \rightharpoonup v = v^+ + v^- + v^0, \text{ em } E = E^+ + E^- + E^0.$$

Também, usando argumentos análogos aos usados posteriormente à expressão (5.47) (imersões compactas), obtemos

$$v_n \to v \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}). \tag{5.53}$$

Como $v = 0$, $v^+ = v^- = v^0 = 0$. Assim, de (5.53), $v_{j,n}(x) \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, para todo $j = +, -, 0$. Além disso, devido a E^0 ser de dimensão finita e pela convergência fraca $v_{0,n} \rightharpoonup 0$ em E^0, temos $v_{0,n} \to 0$ em E, isto é,

$$\|v_{0,n}\| \to \|v^0\| = 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.54}$$

Procedendo de maneira análoga ao feito para conseguir a convergência em (5.49) e lembrando que, devido à ortogonalidade dos espaços E^j, $\|u_n\| \geqslant \|u_{j,n}\|$, para $j = +, -, 0$, obtemos

$$|I'(u_n)\, u_{+,n}| \leqslant \|I'(u_n)\|_{E'}\, \|u_{+,n}\| \leqslant \|I'(u_n)\|_{E'}\Big(\|u_{+,n}\|+1\Big) \leqslant \|I'(u_n)\|_{E'}\Big(\|u_n\|+1\Big) \longrightarrow 0,$$

quando $n \to \infty$. Esse mesmo raciocínio nos leva a concluir um resultado análogo para $u_{-,n}$. Consequentemente conseguimos as convergências

$$I'(u_n)u_{+,n} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad I'(u_n)u_{-,n} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

e como $\|u_n\|^2 \to \infty$, também obtemos

$$\frac{I'(u_n)u_{+,n}}{\|u_n\|^2} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{I'(u_n)u_{-,n}}{\|u_n\|^2} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.55}$$

De (5.18), para $j = +, -$ temos

$$\frac{I'(u_n)\, u_{j,n}}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_{j,n} + V(x) u_n u_{j,n} - h(x) f(u_n) u_{j,n} dx.$$

Denotemos por D à diferença dos casos, quando $j = +$ e $j = -$, isto é:

$$D = \frac{I'(u_n)\, u_{+,n}}{\|u_n\|^2} - \frac{I'(u_n)\, u_{-,n}}{\|u_n\|^2}. \tag{5.56}$$

Lembrando da ortogonalidade de u_n, com $u_{j,n}$, para $j = +, -$, obtemos

$$\begin{aligned}
D =& \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla u_n \nabla u_{+,n} - \nabla u_n \nabla u_{-,n} + V(x)\, u_n \Big(u_{+,n} - u_{-,n}\Big)\right] dx \\
&- \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[h(x) f(u_n)\Big(u_{+,n} - u_{-,n}\Big)\right] dx \\
=& \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u_{+,n}|^2 - |\nabla u_{-,n}|^2 + V(x)\Big(|u_{+,n}|^2 - |u_{-,n}|^2\Big)\right] dx \\
&- \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(u_n)\Big(u_{+,n} - u_{-,n}\Big) dx \\
=& \frac{1}{\|u_n\|^2}\Big(\|u_{+,n}\|^2 + \|u_{-,n}\|^2\Big) - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x) f(u_n)\Big(u_{+,n} - u_{-,n}\Big) dx.
\end{aligned}$$

Como foi definido $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos $v_{j,n} := \dfrac{u_{j,n}}{\|u_n\|}$, para $j = +, -, 0$. Além disso, escrevemos $\dfrac{1}{\|u_n\|} = \dfrac{v_n}{u_n}$.
Logo,

$$
\begin{aligned}
D &= \left\|\frac{u_{+,n}}{\|u_n\|}\right\|^2 + \left\|\frac{u_{-,n}}{\|u_n\|}\right\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\, f(u_n)\, \frac{v_n}{u_n} \left(\frac{u_{+,n}}{\|u_n\|} - \frac{u_{-,n}}{\|u_n\|}\right) dx \\
&= \|v_{+,n}\|^2 + \|v_{-,n}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\, f(u_n)\, \frac{1}{u_n}\, v_n \Big(v_{+,n} - v_{-,n}\Big) dx \\
&= \|v_{+,n}\|^2 + \|v_{-,n}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[\frac{f(u_n)}{u_n} \left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right)\right] dx \qquad (5.57)
\end{aligned}
$$

Assim, como $1 = \|v_n\|^2 = \|v_{+,n}\|^2 + \|v_{-,n}\|^2 + \|v_{0,n}\|^2$, pelas convergências dadas em (5.55) e das expressões de D, dadas em (5.56) e (5.57), obtemos

$$
\begin{aligned}
o_n(1) &= \frac{I'(u_n)\, u_{+,n}}{\|u_n\|^2} - \frac{I'(u_n)\, u_{-,n}}{\|u_n\|^2} \\
&= \|v_{+,n}\|^2 + \|v_{-,n}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[\frac{f(u_n)}{u_n} \left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right)\right] dx \\
&= 1 - \|v_{0,n}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[\frac{f(u_n)}{u_n} \left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right)\right] dx,
\end{aligned}
$$

o que implica, usando (5.54), que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[\frac{f(u_n)}{u_n} \left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right)\right] dx \longrightarrow 1 - \|v^0\|^2 = 1, \text{ quando } n \to \infty. \qquad (5.58)
$$

Contudo, usando as desigualdades de Hölder e de Minkowski, verificarmos que o limite de expressão (5.58) é zero, o que nos dá um contradição. Com efeito, pela hipótese (h_1), temos $h \in L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, em que $q = \dfrac{2^*}{2^* - p}$. Definindo $q' = \dfrac{2^*}{p}$, segue que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Então, para fazer uso da desigualdade de Hölder, resta provar que

$$
\frac{f(u_n(\cdot))}{u_n(\cdot)} \left(v_{+,n}^2(\cdot) - v_{-,n}^2(\cdot)\right) \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).
$$

Para provar isto, tomemos em consideração a desigualdade

$$
\Big| |v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2 \Big|^{\frac{2^*}{p}} \leqslant \left(|v_{+,n}|^2 + |v_{-,n}|^2\right)^{\frac{2*}{p}} \leqslant 2^{\frac{2^*}{p}} \left(|v_{+,n}|^{2\frac{2*}{p}} + |v_{-,n}|^{2\frac{2*}{p}}\right).
$$

Além disso, a desigualdade (5.10), garante que $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right| \leqslant k$, para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{f(u_n)}{u_n}\left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right)\right|^{\frac{2^*}{p}} dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} k^{\frac{2^*}{p}} \left||v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right|^{\frac{2^*}{p}} dx \\
&\leqslant k^{\frac{2^*}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} 2^{\frac{2^*}{p}} \left(|v_{+,n}|^{2\frac{2*}{p}} + |v_{-,n}|^{2\frac{2*}{p}}\right) dx \\
&= (2k)^{\frac{2^*}{p}} \left(\|v_{+,n}\|^{2\frac{2*}{p}}_{L^{2\frac{2*}{p}}} + \|v_{-,n}\|^{2\frac{2*}{p}}_{L^{2\frac{2*}{p}}}\right) \\
&\leqslant (2k)^{\frac{2^*}{p}} C^{2\frac{2^*}{p}}_{2\frac{2^*}{p}} \left(\|v_{+,n}\|^{2\frac{2*}{p}} + \|v_{-,n}\|^{2\frac{2*}{p}}\right) < \infty,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{f(u_n(\cdot))}{u_n(\cdot)}\left(v^2_{+,n}(\cdot) - v^2_{-,n}(\cdot)\right) \in L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Note que $C_{2\frac{2^*}{p}} > 0$ é a constante da imersão contínua $E(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$, em que pela hipótese (h_1), se obteve $2 < 2\dfrac{2^*}{p} < 2^*$, e assim conseguimos aplicar a Observação A.14.

Agora, usando que $\left|\dfrac{f(s)}{s}\right| \leqslant k$, para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Minkowski, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{f(u_n)}{u_n}\left(|v_{+,n}|^2 - |v_{-,n}|^2\right) dx\right| &\leqslant k\,\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \left\|v^2_{+,n} - v^2_{-,n}\right\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&\leqslant k\,\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \left[\left\|v^2_{+,n}\right\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \left\|v^2_{-,n}\right\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right] \\
&= k\,\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \left[\|v_{+,n}\|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \|v_{-,n}\|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right] \\
&\leqslant k2\,\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \|v_n\|^2_{L^{2\frac{2^*}{p}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \to 0.
\end{aligned}$$

Assim, de (5.58) e da última convergência, temos uma contradição.

$\square$

Para concluir a prova de (I_4), fixemos $b > 0$ e tomemos a sequência (u_n), tal que

$$I(u_n) \subseteq [c-b, c+b] \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|\Big(1 + \|u_n\|\Big) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Suponhamos que (u_n) seja uma sequência não limitada em E. Então, tomemos uma subsequência $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$, tal que $\|u_{n_k}\| \to \infty$, quando $k \to \infty$. Isto significa que a sequência $I(u_{n_k}) \subseteq [c-b, c+b]$ é limitada em $\mathbb{R}$. Logo, a menos de subsequências, segue que

$$I(u_{n_k}) \longrightarrow d \in [c-b, c+b], \text{ quando } k \to \infty.$$

Da Definição 2.12, (u_{n_k}), a menos de subsequências, é uma sequência de Cerami no nível d. Então, pelo Lema 5.11, a menos de subsequências, (u_{n_k}) é limitada em E, o que é uma contradição, pois $\|u_{n_k}\| \to \infty$, quando $k \to \infty$. Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em E.

Agora estamos em condições de provar o Teorema 5.7, que garante a existência de uma solução fraca não trivial para o problema (P).

Demonstração do Teorema *5.7.* Provamos que o funcional I, associado ao problema (P) satisfaz as hipóteses (I_1), (I_2), (I_3) e (I_4) do Teorema 2.14. Então, este teorema nos garante que $c \geqslant \alpha > \omega = 0$, é valor crítico de I. Logo, existe $u \in E$, tal que $I(u) = c > 0$ e $I'(u) = 0$, em que $u \neq 0$, pois $I(u) > 0$. Devido a $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, segue que u é uma solução fraca não trivial do problema (P) em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. and FOURNIER, J. Sobolev Spaces. Second edition. Department of Mathematics The University of British Columbia,Vancouver, Canada, 2003.

[2] BARTSCH, T. and DING, Y. Deformation Theorems on Non-metrizable Vector Spaces and Applications to Critical Point Theory. Math. Nachr. 279, 1267-1288, 2006.

[3] BARTOLO, P., BENCI, V. and FORTUNATO, D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity., J. Nonl. Anal. TMA 7, pp. 981-1012, 1983.

[4] BENCI, V. and RABINOWITZ, P. H. Critical Point Theorems for Indefinite Functionals. Inventiones Math. 52, 241-273, 1979.

[5] BEREZIN, F. A. and SHUBIN, M. A. The Schrödinger Equation, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[6] BIEZUNER, R.J. Notas de aula: Análise Funcional

[7] BIEZUNER, R.J. Notas de aula: Equações Diferenciais parciais I/II

[8] BOTELHO, G. PELLEGRINO, D. Teixeira, E. Fundamentos de Análise Funcional, SBM, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2014.

[9] BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer, New York, 2011.

[10] CERAMI, G. Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà ilimitate. Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett. 122, 332-336, 1978.

[11] CLAPP, M. Minicurso de Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, 2018.

[12] COSTA, D. and MAGALHÃES, C. A unified approach to a class of strongly indefinite functionals, J. Differential Equations 125, no.2, 521–547, 1996.

[13] COSTA, D. and TEHRANI, H. Existence and multiplicity results for a class of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities. Adv. in Differential Equations 8, 1319-1340, 2003.

[14] COSTA, D. and TEHRANI, H. On a class of asymptotically linear elliptic problems in RN. Journal of Diferential Equations, 173(2):470-494, 2001.

[15] DIEUDONNE, J. Treatise on Analysis. Volume II. Academic Press. 1976.

[16] DING, Y. Varitional Methods for Strongly Indefinite Problems. World Scientific Publishing. 2007.

[17] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. Linear operators part: I. Geral theory. Interscience publishers,inc., New York, 1957.

[18] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. Linear operators part: II. Spectral theory. Self Adjoint Operators in Hilbert Space. Interscience publishers,inc., New York, 1963.

[19] EGOROV, Y. and KONDRATIEV, V. On Spectral Theory of Elliptic Operators. Vol 89. Birkhäuser Verlag, 1996.

[20] FIGUEREIDO, G., Uma Introdução à Teoria dos Pontos Críticos, Notas de Aula da UnB, 2016.

[21] FOLLAND, G. B. A guide to advanced Real Analysis. Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 2009.

[22] FONSECA, I and GANGBO, W. Degree theory in analysis and applications. Oxford University Press, New York, 1995.

[23] FRANÇA, W. O espaço dos operadores compactos. Dissertação do Mestrado, Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática. UFRJ, 2008.

[24] KOLMOGOROV, A.N and FOMIN, S.V. Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Funcional. Traducción al español. Segunda edición. Editorial Mir, URSS, 1975.

[25] KREYSZIGK, E. Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley and Sons. Inc., 1978.

[26] KRYSZEWSKI, W. and SZULKIN, A. Generalized Linking Theorem with an Application to Semilinear Schrödinger Equation. Adv. Differ. Equ. 3, 441-472, 1998.

[27] LEHRER, R and MAIA, L. Positive solutions of asymptotically linear equations via Pohozaev manifold. Journal of Functional Analysis, 266(1):213-246, 2014.

[28] LI, G. and SZULKIN, A. An asymptotically periodics Schrödinger equation with indefinite linear part, Commun. Contemp. Math.4, no. 4763-776, 2002.

[29] LI, G. and WANG, C. The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic problem of linking type without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 36,no. 2. 461-480, 2011.

[30] LIMA, E. Curso de Análise. v.1. 14 ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

[31] LIMA, E. Espaços Métricos, Projeto Euclides, 2a. Edição,1979.

[32] MAIA, L. and SOARES, M. An abstract linking theorem applied to indefinite problems via spectral properties, Advanced Nonlinear Studies, Volume 19, Issue 3, Pages 545–567, 2019.

[33] MEIER, L. Hilbert Manifold-definition. Bulletin of the Manifold Atlas-definition, 2014.

[34] PANKOV, A. Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with Application to Photonic Crystals. Milan Journal of Mathematics 73, 259-287, 2005.

[35] PEIXOTO, L. A construção do grau topológico e sua aplicação a um sistema diferencial não linear com condições de contorno. Dissertação do Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática. USP, 2014.

[36] RABINOWITZ, P. Conference Board of the Mathematical Sciences-Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations-American Mathematical Soc. 1986.

[37] RABINOWITZ, P. On a class of nonlinear Schrödinger equations. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP),43(2): 270-291, 1992.

[38] STUART, C. An Introduction to Elliptic Equations on $\mathbb{R}^N$. Trieste Notes, 1998.

[39] SZULKIN, A. e WETH, T. Ground state solutions for some indefinite variational problems. Journal of Functional Analysis. 257, 3802-3822, 2009.

[40] WILLEM, M. Minimax theorems. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.24, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1996.

APÊNDICE A – ESPAÇOS L^p E ESPAÇOS DE SOBOLEV

No Capítulo 5, o teorema de linking abstrato (Teorema 2.14), foi aplicado à Equação de Schrödinger, a qual foi definida no espaço $E = H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de Sobolev. Na presente seção, daremos algumas definições e resultados sobre este espaço, que serviram como ferramentas para a aplicação. Para isto, precisaremos antes enunciar e dar alguns resultados sobre o espaço L^p.

A.1 Espaços L^p

Definição A.1. *([9], Seção 4.2, p.91)*
Consideremos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e identificamos duas funções deste espaço se elas coincidem quase toda parte (isto é, se elas coincidem em, exceto em um subconjunto de medida nula do seu domínio), que de forma breve escreveremos q.t.p.. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p \in \mathbb{R}$, tal que $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, como

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ é mensurável e} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

em que a norma nesse espaço é definida por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

No caso $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ é mensurável e existe } C > 0 \text{ constante}, |f(x)| \leqslant C, q.t.p \text{ em } \Omega \right\},$$

com norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C > 0, |f(x)| \leqslant C, q.t.p. \text{ em } \Omega \right\}$$

Definição A.2. *([8], Seção 1, p.2)*
*Dizemos que um espaço vetorial normado é um **Espaço de Banach**, se ele for completo com a métrica induzida pela norma.*

Teorema A.3. *([8], Seção 1, p.11, 13)*
O espaço $L^p(\Omega)$, com a norma $\|\cdot\|_{L^p}$, é um espaço de Banach.

Proposição A.4. ***(Desigualdade de Hölder).***
Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sejam $p, q \in (1, +\infty)$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então $fg \in L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, é possível demonstrar a seguinte desigualdade.

Corolário A.5. ***(Desigualdade de Interpolação).***
Sejam $1 \leqslant p < s < r \leqslant \infty$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \cap L^r(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então $f \in L^s(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e cumpre-se

$$\|f\|_{L^s} \leqslant \|f\|_{L^p}^{1-\alpha} \|f\|_{L^r}^{\alpha},$$

em que $\alpha \in (0,1)$ satisfaz $\frac{1}{s} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{r}$, se $r < \infty$, ou $\alpha := 1 - \frac{p}{s}$, se $r = \infty$.

A.2 Espaço de Sobolev

Definição A.6. *([9], Seção 9.1, p.263)*
Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o ***Espaço de Sobolev*** *$W^{1,p}(\Omega)$, como sendo*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists\, g_i \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall\, i = 1, 2, ..., N. \right\}$$

O caso $p = 2$ é um caso especial. Denotamos tal espaço de Sobolev por $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

No espaço $W^{1,p}(\Omega)$ (se não existir confusão, escreveremos simplesmente $W^{1,p}$) definimos a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou algumas vezes, a norma equivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$, se $1 \leqslant p < \infty$.

No espaço $H^1(\Omega)$ está definido o produto escalar

$$\left\langle u, v \right\rangle_{H^1} = \left\langle u, v \right\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx,$$

em que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ e a norma associada é dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \int_\Omega \left| \nabla u(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $H^1(\Omega)$, com o produto escalar $\left\langle u, v \right\rangle_{H^1}$, é um espaço de Hilbert e com a norma $\|u\|_{H^1}$ é um espaço de Banach.

Antes de enunciar o próximo teorema, precisamos dar algumas definições

Definição A.7. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Chamaremos de* ***Suporte de uma função****, ao conjunto que denotaremos por $supp\, f$ e definiremos como*

$$supp\, f = \overline{\left\{ x \in \Omega; f(x) \neq 0 \right\}}$$

Definição A.8. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \in C^\infty$. Definimos o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, como*

$$C_0^\infty(\Omega) = \Big\{ f \in C^\infty, supp\, f \, \textit{é um subconjunto compacto} \Big\}.$$

Proposição A.9. *([7], Corolário 11.21, p.227)*
$W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ *em que* $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N) := \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}$, *com respeito à norma de* $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$.

Da proposição anterior, em particular, temos $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

A seguir, enunciaremos os teoremas de Imersão de Sobolev. Para isso, precisamos dar algumas definições (conferir [20], p.17).

A.3 Teoremas de Imersão de Sobolev

Definição A.10. *Sejam E_1, E_2 espaços normados, tais que $E_1 \subseteq E_2$. Dizemos que E_1 está* ***imerso continuamente*** *em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow E_2$, quando a aplicação*

$$\begin{aligned} i :& E_1 \longrightarrow E_2 \\ & x \longmapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua.

Definição A.11. *Sejam E_1, E_2 espaços normados, tais que $E_1 \subseteq E_2$. Dizemos que E_1 está* ***imerso compactamente*** *em E_2, e denotamos $E_1 \hookrightarrow\hookrightarrow E_2$, quando a aplicação*

$$\begin{aligned} i :& E_1 \longrightarrow E_2 \\ & x \longmapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é uma aplicação compacta.

A.3.1 Teorema de Imersão Contínua

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [7], Teorema 11.28, p.235.

Teorema A.12. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $1 \leqslant p < N$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Usando a desigualdade de interpolação em espaços L^p, dado no Corolário A.5, o teorema acima pode ser ligeiramente melhorado, obtendo o seguinte corolário.

Corolário A.13. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $1 \leqslant p < N$, então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } p \leqslant q \leqslant p^*.$$

Observação A.14. *Da Proposição A.9 e do Corolário A.13, tomando $p = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \text{para todo } 2 \leqslant q \leqslant 2^*.$$

Como consequência disto, dado $q \in [2, 2^*]$, existe uma constante positiva $C_q > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C_q \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}, \ \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \text{em que } 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ e } N \geqslant 3.$$

A.3.2 Teorema de Imersão Compacta

A Definição A.11 de imersão compacta, equivale a dizer que toda sequência limitada em $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ possui uma subsequência convergente em $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$.

Teorema A.15. *([20], p.18)*
Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, com fronteira suave. A imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta se:

- *$N \geqslant 3$ e $q \in [2, 2^*)$, em que $2^* = \frac{2N}{N-2}$,*
- *$N = 1, 2$ e $q \in [2, +\infty)$.*

A.4 Lema de Brézis-Lieb

O lema a seguir, é uma ferramenta importante no estudo da teoria de minimização.

Lema A.16. *([40], Lema 1.32, p.21)*
Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e $(u_n) \subseteq L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$. Se (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n \longrightarrow u$ q.t.p. em Ω, então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^p_{L^p} - \|u_n - u\|^p_{L^p} \right) = \|u\|^p_{L^p}.$$

Observação A.17. *Algumas consequências deste lema são:*

(a) *O lema mencionado é um generalização do Lema do Fatou.*

(b) *Sob as hipóteses do lema, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $L^p(\Omega)$. Contudo, a convergência fraca em $L^p(\Omega)$ não é suficiente para obter a conclusão, excepto quando $p = 2$ (para mais detalhes, veja [40], p.22).*

(c) *Em qualquer espaço de Hilbert*

$$\text{Se } u_n \rightharpoonup u, \ \text{então } \lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^p - \|u_n - u\|^p \right) = \|u\|^p.$$

APÊNDICE B – NOÇÕES DE TEORIA DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO

A seguir, são apresentadas noções da Teoria de Medida, que foram usadas no Capítulo 5. Em particular, entre outros resultados, se usou para provar que a sequência de Cerami, (do funcional energia I) é uma sequência limitada.

B.1 Lema de Fatou

O resultado a seguir é um caso particular do Lema do Fatou.

Teorema B.1. *([21], Lema 2.11, p.32)*
Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um conjunto Lebesgue-mensurável e (f_n) uma sequência de funções não negativas definidas sobre Ω. Então,

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) dx.$$

B.2 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema B.2. *([21], Teorema 2.12, p.32)*
Consideremos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência em $L^1(\Omega)$, tal que

i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω.

ii) *Existe uma função não negativa* $g \in L^1(\Omega)$, *tal que* $|f_n| \leqslant g$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então,

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx.$$

B.3 Teorema de Vainberg

O teorema a seguir, é devido a Vainberg e representa a recíproca do Teorema da Convergência Dominada.

Teorema B.3. *([9], Teorema 4.9, p.94)*
Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue-mensurável, (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \ \text{quando } n \to \infty.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $\xi \in L^p(\mathbb{R}^N)$, tais que

- $f_{n_k}(x) \to f(x),\ q.t.p.\ em\ \Omega.$
- $|f_{n_k}(x)| \leqslant \xi(x), q.t.p.\ em\ \Omega,\ para\ todo\ k \in \mathbb{N}.$

Definição B.4. *([15], Capítulo XIII, seção 12, p.172)*
*Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Chamamos o **máximo em medida** de f em X ao maior dos limites inferiores dos $a \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) \leqslant a$, quase todo ponto, com respeito à medida μ ($\mu-$qtp), o qual denotaremos por $\operatorname{ess\,sup} f$ ou $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f(x)$, isto é, se existir tal $a \in \mathbb{R}$, definimos*

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f(x) &= \inf\Big\{a \in \mathbb{R},\ \mu\Big(\{x \in X : f(x) > a\}\Big) = 0\Big\}\\ &= \inf\Big\{a \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant a,\ \mu - qtp.\ \Big\}\end{aligned} \tag{B.1}$$

*e $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f(x) = +\infty$, caso contrário. Devido a esta notação, o máximo em medida de f é chamado de **supremo essencial** de f. Analogamente, se existir $b \in \mathbb{R}$, definimos o **mínimo em medida**, que denotaremos por $\operatorname{ess\,inf} f$ ou $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} f(x)$, como sendo*

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} f(x) &= \sup\Big\{b \in \mathbb{R},\ \mu\Big(\{x \in X : f(x) < b\}\Big) = 0\Big\}\\ &= \sup\Big\{b \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant b,\ \mu - qtp.\ \Big\}\end{aligned} \tag{B.2}$$

*e $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} f(x) = -\infty$, caso não exista tal $b \in \mathbb{R}$. Também, o mínimo em medida é chamado de **ínfimo essencial** de f.*

Das definições dadas, assumindo $\mu \neq 0$, pode-se obter facilmente

$$\inf_{x\in X} f(x) \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} f(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f(x) \leqslant \sup_{x\in X} f(x) \tag{B.3}$$

(Veja [15], Capítulo XIII, seção 12, p.173)

APÊNDICE C – ALGUNS RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

As definições e os teoremas a seguir, foram usados principalmente para definir as variedades de linking, dadas no Capítulo 2. Além disso, também são apresentados resultados da Teoria Espectral, que foram usados no Capítulo 5 .

C.1 Variedades de Hilbert

Nesta seção, daremos algumas definições prévias, para logo poder definir a variedade de Hilbert.(Para mais detalhes, veja [11], Capítulo 2, p.19)
Seja $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto de um espaço de Hilbert E e $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Dado $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$f^{-1}(c) = \{u \in \mathcal{O}, f(u) = c\}.$$

Definição C.1. *Dizemos que c é um* ***Valor regular de f****, se* $\nabla f(u) \neq 0$*, para todo* $u \in f^{-1}(c)$*. Dizemos que c é um* ***Valor crítico de f****, se não for um valor regular de* f*.*

Definição C.2. *Um subconjunto não vazio* $\mathcal{M}$ *de* E*, é* ***Subvariedade de classe*** C^k*, de* E*, se existir uma função* $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^k*, definida em um subconjunto aberto* $\mathcal{O}$ *de* E*, e um valor regular* c *de* f*, tais que*

$$\mathcal{M} = f^{-1}(c).$$

Além disso, se $\mathcal{M}$ *é um subconjunto fechado de* E*, dizemos que* $\mathcal{M}$ *é uma* ***Subvariedade de Hilbert de E.***

C.2 Algumas propriedades de operadores em espaços normados

Definição C.3. *([25] Definição 8.1-1, p.405)*
Sejam E, F *espaços de Banach e* $T : E \longrightarrow F$ *um operador linear. Dizemos que* T *é um* ***Operador Compacto*** *, se* T *é contínuo e* $\overline{T(A)}$ *é compacto, para qualquer* $A \subset E$ *limitado.*

Teorema C.4. *([25], Teorema 8.1-3, p.407)*

Sejam E *e* F *espaços normados e* $K : E \longrightarrow F$ *um operador linear.* K *é compacto, se e somente se, para toda* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ *limitada, a imagem* $K((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$*, possui uma subsequência convergente em* F*.*

Proposição C.5. *([23], Proposição 2.10, p.36) Sejam $T : E \longrightarrow F$ operador compacto e $U_1 : F \longrightarrow G$, $U_2 : G \longrightarrow E$ operadores lineares e limitados, então $T \circ U_2 : G \longrightarrow F$ e $U_1 \circ T : E \longrightarrow G$, são operadores compactos.*

Demonstração: Provaremos que $T \circ U_2$ é um operador compacto. O outro resultado é análogo. Com efeito, como o operador U_2 é contínuo, existe $\delta > 0$, tal que $U_2(B_G) \subseteq \delta B_E$, em que B_G e B_E são bolas em G e E, respectivamente. Logo, pela linearidade de T, obtemos

$$\overline{T(U_2(B_G))} \subseteq \overline{\delta T(B_E)}.$$

Como o operador T é compacto e a bola B_E é limitada, então $\overline{\delta T(B_E)}$ é compacto. Assim, temos que $\overline{T(U_2(B_G))}$ é um subconjunto fechado, contido num conjunto compacto, portanto $\overline{T(U_2(B_G))}$ é compacto (ver [17], Lema 7, p.17). Novamente, concluímos que $T \circ U_2$ é um operador compacto. $\square$

Teorema C.6. *([6], Teorema 5.25, p.65)*

Se E é um espaço reflexivo, então toda sequência limitada em E possui uma subsequência fracamente convergente.

Teorema C.7. *([31], Proposição 7, p.222) As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico E são equivalentes:*

1) *E é compacto.*
2) *Todo subconjunto infinito de E possui um ponto de acumulação.*
3) *Toda sequência em E possui uma subsequência convergente.*
4) *E é completo e totalmente limitado.*

Teorema C.8. *([8], Teorema 6.2.11, p.149)*
Sejam E um espaço normado e K um subconjunto convexo de E. Então, o fecho de K na topologia da norma coincide com o fecho de K na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.

Teorema C.9. *([8], Teorema 9.4.2, p. 262)*
Sejam E um espaço métrico completo e $\phi : E \longmapsto E$ uma contração, então existe um único ponto fixo $x_0 \in M$, isto é, existe um único $x_0 \in M$, tal que $\phi(x_0) = x_0$.

Teorema C.10. *([25], Teorema 2.10-4, p.120)*
O espaço dual E' de um espaço normado E é um espaço de Banach (mesmo que E não seja um espaço de Banach)

Antes de enunciar um teorema de convergência, daremos a seguinte definição.

Definição C.11. *([8], Definição 6.2.1, p.143) Seja E um espaço normado e E' o seu espaço dual, a **topologia fraca** no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\phi \in E'$. Quando uma sequência (x_n) em E converge para $x \in E$ na topologia fraca escrevemos $x_n \rightharpoonup x$.*

Teorema C.12. *([9], Proposição 3.5.(iv), p.58)*
Seja (x_n) uma sequência em E. Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e $f_n \longrightarrow f$ forte em E', então $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

C.3 Teoria Espectral

Nesta seção daremos algumas definições e teoremas da Teoria Espectral. Isto nos permitirá definir o resolvente e o espectro (no caso real) de um operador L, e com isto caracterizaremos o espectro de um operador autoadjunto.

Definição C.13. *([38], Definição 3.1, p.30)*
*Sejam H um espaço de Hilbert e $L : D(L) \subseteq H \longrightarrow H$ um operador linear, em que o domínio $D(L)$, é um subespaço denso de H. Dizemos que $L^* : D(L^*) \subseteq H \longrightarrow H$ é o **operador adjunto** do operador L como segue:*
Dado $v \in D(L^*)$ se, e somente se, $v \in H$ e existe $w \in H$, tal que $\langle Lu, v \rangle = \langle u, w \rangle$, para todo $u \in D(L)$, e $L^*v = w$, para todo $v \in D(L^*)$.

Na definição anterior, w é o (único, devido à densidade de $D(L)$ em H) elemento associado com v na definição de $D(L^*)$.

Definição C.14. *O operador $L : D(L) \subseteq H \longrightarrow H$ é dito **autoadjunto** se $L = L^*$, isto é, se $D(L) = D(L^*)$ e $L^*v = Lv$, para todo $v \in D(L^*)$.*

Teorema C.15. *([25], Teorema 9.1-3, p.463)*
O espectro $\sigma(L)$ de um operador autoadjunto linear e limitado $L : H \longrightarrow H$, em que H é um espaço de Hilbert complexo, é real.

C.3.1 Espectro de um operador autoadjunto

Dadas as definições e teoremas prévios, definiremos o resolvente e consequentemente, o espectro de um operador autoadjunto em $\mathbb{R}$.

Definição C.16. *([38], Definição 3.3, p.32)*
Sejam H um espaço de Hilbert e $L : D(L) \subseteq H \longrightarrow H$ operador autoadjunto.
*O **resolvente do operador** L é o conjunto*

$$\rho(L) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R},\ L - \lambda\mathcal{I} : D(L) \longrightarrow H,\ \text{\textit{é um isomorfismo}}\Big\},$$

*cujos elementos são chamados **valores regulares** de L.*

*O **espectro do operador** L é definido como sendo o complementar do resolvente de L, isto é,*

$$\sigma(L) = \mathbb{R} \backslash \rho(L).$$

*O **espectro pontual** de L é definido por*

$$\sigma_p(L) = \Big\{\lambda \in \sigma(L),\ \ker(L - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\}\Big\}$$

*sendo seus elementos chamados **autovalores** de L.*

*O **espectro discreto** de L é definido por*

$$\sigma_d(L) = \Big\{\lambda \in \sigma_p(L),\ 0 < \dim\ker(L - \lambda\mathcal{I}) < \infty \ \text{\textit{e}}\ \lambda \ \text{\textit{é ponto isolado de}}\ \sigma(L)\Big\}$$

*O **espectro essencial** de L é o complementar do $\sigma_d(L)$ em $\sigma(L)$, e é denotado por*

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma(L) \backslash \sigma_d(L)$$

Observação C.17.

- *Notemos que $\sigma(L)$, $\sigma_{ess}(L) \subseteq \mathbb{R}$ são fechados, para todo L autoadjunto. (Cf. [25], Teorema 7.3-2, p 376 e [38], p 32.)*
- *Os elementos de $\sigma_d(L)$ são autovalores, que são pontos isolados de $\sigma(L)$ de multiplicidade finita.*
- *Os elementos de $\sigma_{ess}(L)$ são todos os pontos de acumulação de $\sigma(L)$ ou todos os autovalores de multiplicidade infinita.*

Definição C.18. *Seja H espaço de Hilbert. Um operador $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ é* ***positivo****, se $\langle Au, u\rangle_H > 0$, para todo $u \in H\backslash\{0\}$.*

Teorema C.19. *([18], Teorema 2, p.906) Um operador A é positivo se, e somente se, o espectro $\sigma(A)$ está contido no eixo real não-negativo.*

Teorema C.20. *([38], Teorema 3.6, p.34)*
Para todo $V \in L^\infty$, o operador $A : D(A) \subseteq L^2 \longrightarrow L^2$, dado por $Au = -\Delta u + V(x)u$, é autoadjunto.

Teorema C.21. *([38], Teorema 3.15, p.44)*
Sejam $V \in L^\infty$, $l = \lim\limits_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{|x|\geqslant R} V(x)$ e $A = -\Delta + V(x)$. Então,

(i) $\sigma_{ess}(A) \subseteq [l, +\infty)$

(ii) *Se* $\lim\limits_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{|x|\geqslant R} |V(x) - l| = 0$, *então* $\sigma_{ess}(A) = [l, +\infty)$,

Teorema C.22. *([19], Teorema 30, p.150)*
Se a função $V : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é mensurável, localmente limitada e tal que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \inf V(x) = V_\infty$, então o operador $A = -\Delta + V(x)$ é semi-limitado inferiormente e tem o espectro discreto $\sigma_d(A) \subseteq (-\infty, V_\infty)$, de modo que para todo $\varepsilon > 0$, o espectro de A em $(-\infty, V_\infty - \varepsilon)$, consiste de um número finito de autovalores de multiplicidade finita.

APÊNDICE D – TEORIA DO GRAU DE LERAY-SCHAUDER

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados da a teoria do grau de Leray-Schauder que foram usados para provar (no Capítulo 2) que certas variedades são linking. Os resultados desta seção estão baseados em [22], Capítulo 7.1, página 172.

D.1 Teoria do grau de Leray-Schauder.

Definição D.1. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de um espaço de Banach E. Se*

$$\begin{aligned} \varphi : &\overline{\Omega} \longrightarrow E \\ &x \longmapsto \varphi(x) = x - T(x), \end{aligned}$$

*em que $T : \overline{\Omega} \to E$ é uma aplicação compacta e $a \in E \backslash \phi(\partial\Omega)$, então dizemos que (φ, Ω, a) é uma **terna admissível** para o grau de Leray-Schauder*

Definição D.2. *Sejam E, F espaços de Banach. Dizemos que $T : M \subseteq E \longrightarrow F$ é uma **aplicação de posto finito,** se T é contínua e $T(M)$ está contido num subespaço de F de dimensão finita.*

Definição D.3. *Seja uma terna admissível (φ, Ω, a), em que $\varphi(x) = x - T(x)$. Seja $\hat{T} : \overline{\Omega} \longrightarrow E$, aplicação de posto finito tal que para todo $x \in \overline{\Omega}$,*

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(a, \varphi(\partial\Omega)),$$

*em que $\rho(a, \varphi(\partial\Omega)) := \inf\limits_{w \in \phi(\partial\Omega))} \rho(a, w)$. Seja $\widehat{S} \subseteq E$ subespaço de dimensão finita, contendo $\widehat{T}(\overline{\Omega})$ e a. Definimos o **grau de Leray-Schauder** da terna (φ, Ω, a) por*

$$\deg(\varphi, \Omega, a) = \deg_B(\widehat{\varphi}, \widehat{\Omega}, a),$$

em que $\widehat{\varphi} = (I - \widehat{T})\Big|_{\overline{\Omega}}$, $\widehat{\Omega} = \Omega \cap \widehat{S}$ e $\deg_B(\widehat{\varphi}, \widehat{\Omega}, a)$ é o grau de Brouwer (conferir [22], capítulo 3, p.48)

D.2 Propriedades do grau de Leray-Schauder.

A seguir, daremos uma definição e enunciaremos algumas propriedades da teoria do grau de Leray-Schauder.

Definição D.4. *Sejam $M \subseteq E$ e $H : M \times [0, 1] \longrightarrow E$. Dizemos que H é uma **homotopia de aplicações compactas** em M, se*

- *$H(\cdot,t)$ é compacto em M, para todo $t \in [0,1]$.*
- *Para todo $\varepsilon > 0$ e para todo subconjunto $B \subseteq M$ limitado, existe $\delta > 0$, tal que $\|H(x,t) - H(x,s)\|_E < \varepsilon$, sempre que $x \in B$ e $|t-s| < \delta$.*

Teorema D.5. *Nas seguintes propriedades, consideramos Ω aberto e limitado de E, em que E um espaço de Banach.*

(P_1) ***Normalização:***
Seja $I : E \longrightarrow E$ a aplicação identidade e seja $\Omega \subseteq E$ um conjunto aberto e limitado, então para todo $a \in \Omega$,

$$\deg(I, \Omega, a) = 1.$$

(P_2) ***Existência de solução:***
Seja (φ, Ω, a) uma terma admissível. Se $\deg(\varphi, \Omega, a) \neq 0$, então

$$\textit{existe } x \in \Omega, \ \textit{tal que } \varphi(x) = a.$$

(P_3) ***Invariância Homotópica***
Suponhamos que $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow E$ é uma homotopia de aplicações compactas em $\overline{\Omega}$. Seja $\varphi_t := I - H(\cdot,t)$, para $t \in [0,1]$ com $a \notin \varphi_t(\partial\Omega)$, para todo $t \in [0,1]$. Então,

$$\deg(\varphi_t, \Omega, a) \ \textit{independe de } t.$$

APÊNDICE E – ALGUNS RESULTADOS E ESTIMATIVAS

Nesta seção, demonstraremos duas desigualdades que foram usadas no Capítulo 5.

Proposição E.1. *Supondo* (f_1) *e* (f_2) *satisfeitas, dado* $\varepsilon > 0$ *e* $2 < p < 2^*$*, existe uma constante* $C_\varepsilon > 0$*, tal que*

i) $|f(s)| \leqslant \varepsilon|s| + C_\varepsilon |s|^{p-1}$.

ii) $|F(s)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \dfrac{C_\varepsilon}{p}|s|^p$.

Demonstração: A prova do item (i) será feita usando um raciocínio parecido com a prova feita para obter a desigualdade dada em (5.10). O item (ii), será provado a partir do primeiro item.

Prova de (i): Da hipótese (f_1), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ que depende de ε, tal que

$$|f(s)| < \varepsilon|s|, \text{ para todo } |s| < \delta_\varepsilon. \tag{E.1}$$

Da hipótese (f_2), para $\varepsilon > 0$ (como acima), existe $M_\varepsilon > 1$, tal que $\left|\dfrac{f(s)}{s} - a\right| < \varepsilon$, para todo $|s| > M_\varepsilon$. Logo,

$$|f(s)| < (a+\varepsilon)|s|, \text{ para todo } |s| > M_\varepsilon.$$

Como $p > 2$, então $p - 1 > 1$. Além disso, como $|s| > M_\varepsilon > 1$, temos $|s| < |s|^{p-1}$ e substituindo na expressão anterior, obtemos

$$|f(s)| < (a+\varepsilon)|s| < (a+\varepsilon)|s|^{p-1}, \text{ para todo } |s| > M_\varepsilon. \tag{E.2}$$

Portanto, de (E.1) e (E.2), se $|s| < \delta_\varepsilon$ ou se $|s| > M_\varepsilon$, segue

$$|f(s)| < \varepsilon|s| + (a+\varepsilon)|s|^{p-1}.$$

Como a função $\dfrac{|f(s)|}{|s|^{p-1}}$ é contínua em $[\delta_\varepsilon, M_\varepsilon]$, atinge um máximo $\widetilde{M}_\varepsilon$ no compacto $[\delta_\varepsilon, M_\varepsilon]$. Assim obtemos,

$$|f(s)| < \widetilde{M}_\varepsilon |s|^{p-1}, \text{ para todo } s \in [\delta_\varepsilon, M_\varepsilon].$$

Logo, tomando $C_\varepsilon = \max\left\{\widetilde{M}_\varepsilon, (a+\varepsilon)\right\}$, concluímos

$$|f(s)| < \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^{p-1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Prova de (ii): Integrando a expressão obtida no item (i) e usando a hipótese (f_2), temos

$$|F(s)| \leqslant \int_0^s |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p}|s|^p, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

□

A seguir, provaremos que a função f dada como exemplo no Capítulo 5, satisfaz as condições (f_1)–(f_3) da hipótese do problema (P), porém $\dfrac{f(s)}{s}$ não é crescente.

Proposição E.2. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como*

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{s^7 - \frac{3}{2}s^5 + 2s^3}{1+s^6}, & se \quad |s| < 5, \\[2em] \dfrac{s^3}{1+s^2}, & se \quad |s| > 10. \end{cases}$$

Então, f satisfaz as hipóteses (f_1)–(f_3). Além disso, $\dfrac{f(s)}{s}$ não é crescente.

Demonstração: A seguir, serão provados os itens (f_1)–(f_3). A prova de $\dfrac{f(s)}{s}$ não ser crescente, foi dada no exemplo no Capítulo 5 .

(f_1) Temos que f é uma função racional, onde seus termos são funções polinomiais, portanto $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Logo, considerando f, quando $|s| < 5$, temos

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{s^7 - \frac{3}{2}s^5 + 2s^3}{s\,(1+s^6)} = 0.$$

(f_2) Primeiro, vamos calcular $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, considerando o caso $|s| > 10$.

$$F(s) = \int_0^s \frac{t^3}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left(s^2 - \ln\left(s^2+1\right)\right),$$

logo tomando limite e aplicando L'Hôpital na segunda igualdade, temos

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{2s^2}\Big(s^2 - \ln\left(s^2+1\right)\Big) = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln(s^2+1)}{s^2}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Assim, existe $a = \dfrac{1}{2} > 0$.

(f_3) Da hipótese do problema, $Q(s)$ é definido como

$$Q(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s^3}{1+s^2}\right)s - \frac{1}{2}\Big(s^2 - \ln\left(s^2+1\right)\Big),$$

Logo, tomando limite

$$\begin{aligned} \lim_{s \to +\infty} Q(s) &= \lim_{s \to +\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{s^4}{1+s^2}\right) - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right)\right] \\ &= \lim_{s \to +\infty} \left[\frac{-s^2}{2(1+s^2)} + \frac{1}{2}\ln(s^2+1)\right] = +\infty. \end{aligned}$$

$\square$

E.1 Regularidade do funcional energia I

Seja I o funcional associado ao problema (P), definido em (5.11) como

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+V(x)u^2\Big)dx-\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u)dx,$$

o qual, segundo a expressão (5.14), também pode ser escrito como

$$I(u)=\frac{1}{2}\Big(\|u^+\|^2-\|u^-\|^2\Big)-\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u(x))\,dx.$$

Da Proposição E.1 temos uma estimativa para $F(u)$. Além disso, pela imersão de Sobolev, existem constantes $C_2, C_p>0$, tais que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u)dx &\leqslant h_\infty\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx\leqslant h_\infty\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\frac{C_\varepsilon}{p}|u|^p\Big)dx\\
&\leqslant h_\infty\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx+h_\infty\frac{C_\varepsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^pdx\\
&=h_\infty\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}+\frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\\
&\leqslant h_\infty\frac{\varepsilon}{2}C_2\|u\|^2+\frac{C_\varepsilon}{p}C_p\|u\|^p.\end{aligned}$$

Logo, temos que o funcional I, está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Proposição E.3. *O funcional $I:H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\longrightarrow\mathbb{R}$, dado por*

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+V(x)u^2\Big)dx-\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u)dx,$$

para todo $u\in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$

Demonstração: Para isto, consideremos $I(u)=\frac{1}{2}I_1(u)+\frac{1}{2}I_2(u)-I_3(u)$, em que

$$I_1(u)=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx,\quad I_2(u)=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2dx\quad\text{e}\quad I_3(u)=\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u)dx.$$

Agora, resta provar que $I_j\in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$, para $j=1,2,3$. Para isto, achemos a derivada de I_j' no sentido de Gâteaux.

- $I_1\in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$: Com efeito, primeiro calculemos a derivada de Gâteaux $I_1'(u)v$, para cada $u,v\in(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$. Isto é,

$$\begin{aligned}I_1(u+tv)-I_1(u)&=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(u+tv)|^2dx-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(u+tv)\nabla(u+tv)dx-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u\nabla u+2t\nabla u\nabla v+t^2\nabla v\nabla v\Big)dx-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+2t\nabla u\nabla v+t^2|\nabla v|^2\Big)dx-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx\\
&=2t\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla vdx+t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_1'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+tv)-I_1(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\Big(2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + t\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx\Big) = 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx.$$

Agora mostraremos que o operador I_1' é contínuo. Então, tomemos uma sequência $(u_n) \subseteq H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Assim, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, com $\|v\| \leqslant 1$, e considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}\Big|\Big(I_1'(u_n) - I_1'(u)\Big)v\Big| &= 2\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u_n \nabla v - \nabla u \nabla v\Big)dx\Big| \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\nabla u_n \nabla v - \nabla u \nabla v\Big|dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\nabla u_n - \nabla u\Big|\Big|\nabla v\Big|dx \leqslant 2\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\nabla u_n - \nabla u\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\nabla v\Big|dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2\|u_n - u\|\|v\| \leqslant 2\|u_n - u\|.\end{aligned}$$

Logo, denotando por $\|\cdot\|_{-}$ à norma no espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, temos

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{-} = \sup_{\|v\|\leqslant 1}\Big|\Big(I_1'(u_n) - I_1'(u)\Big)v\Big| \leqslant 2\|u_n - u\|$$

E com isto temos que $I_1 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$.

- $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$: Como o mesmo raciocínio usado para achar $I_1'(u)v$, obtemos

$$I_2'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv)-I_2(u)}{t} = 2\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\,v dx.$$

Também, tomando uma sequência $(u_n) \subseteq H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Assim, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, com $\|v\| \leqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}\Big|\Big(I_2'(u_n) - I_2'(u)\Big)v\Big| &\leqslant 2\,V_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|\,|v| dx \\ &\leqslant 2\,V_\infty\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n - u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\|u_n - u\|\,\|v\| \\ &\leqslant C\|u_n - u\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{-} = \sup_{\|v\|\leqslant 1}\Big|\Big(I_2'(u_n) - I_2'(u)\Big)v\Big| \leqslant 2\|u_n - u\|.$$

Assim, $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$.

- $I_3 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$: Com efeito, primeiro calculemos a derivada de Gâteaux $I_3'(u)v$, para isto, seja $t \in \mathbb{R}$, tal que $0 < |t| < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e para cada $u, v \in (H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} l : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto l(s) := h(x)F(u+stv),\end{aligned}$$

donde temos que

$$l'(s) = h(x)f(u + stv)tv, \quad l(1) = h(x)F(u + tv) \quad \text{e} \quad l(0) = h(x)f(u).$$

Como l é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$, tal que

$$l(1) - l(0) = h'(\theta),$$

isto é

$$|h(x)F(u + tv) - h(x)F(u)| = |h(x)f(u + \theta tv)||tv|,$$

logo,

$$\left|\frac{h(x)F(u + tv) - h(x)F(u)}{t}\right| = |h(x)f(u + \theta tv)||v| \tag{E.3}$$

Pela desigualdade (5.10), temos que $\Big|f(u)\Big| \leqslant k|u|$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, donde obtemos,

$$\begin{aligned} |h(x)f(u + \theta tv)||v| &\leqslant h_\infty|v|\, k\, |u + \theta tv| \\ &\leqslant h_\infty k|u||v| + h_\infty k\theta t|v|^2 \\ &= k_1|u||v| + k_2|v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Além disso, tomando uma sequência $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$, tal que $|t_n| \to 0$, temos

$$h(x)\, f(u(x) + \theta\, t_n\, v(x))\, v(x) \to h(x)f(u(x))v(x), \;\; \text{pontualmente}.$$

Pelo Teorema B.2, da Convergência Dominada, e da igualdade (E.3), segue

$$\begin{aligned} I_3'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u + tv) - I_3(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u + tv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx}{t}\right] \\ = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{h(x)(F(u + tv) - F(u))}{t}dx &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(u + \theta tv)vdx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(u)\, vdx. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que I_3' é contínuo. Para provar isto, como no caso anterior, tomemos uma sequência $(u_n) \subseteq H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Da Observação A.14, das imersões de Sobolev, obtemos que $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, para $2 \leqslant q \leqslant 2^*$, $N \geqslant 3$. Então, pelo Teorema B.3 de Vainberg, existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e uma função $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, tais que

$$u_{n_j}(x) \longrightarrow u(x), \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad |u_{n_j}(x)| \leqslant \tilde{g}(x), \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Como f é contínua, temos

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Então, novamente, usando a desigualdade (5.10), existem $\tilde{k_1}, \tilde{k_2}$ constantes, tais que

$$\begin{aligned}\left|f(u_{n_j}) - f(u)\right|^2 &\leqslant 2^2\Big(\left|f(u_{n_j})\right|^2 + \left|f(u)\right|^2\Big)\\ &\leqslant 4\tilde{k_1}|u_{n_j}|^2 + 4\tilde{k_2}|u|^2\\ &\leqslant \tilde{k_3}|\tilde{g}(x)|^2 + \tilde{k_4}|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).\end{aligned}$$

Pelo teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|f(u_{n_j}) - f(u)\right|^2 dx = \left\||f(u_{n_j}) - f(u)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \longrightarrow 0.$$

Portanto, para $v \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, com $\|u\| \leqslant 1$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\Big(I_3'(u_{n_j}) - I_3'(u)\Big)v\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(u_{n_j})\,v\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)f(u)\,v\,dx\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(f(u_{n_j}) - f(u)\Big)vdx\right|\\ &\leqslant h_\infty\int_{\mathbb{R}^N}|f(u_{n_j}) - f(u)|\,|v|dx.\end{aligned}$$

Agora, da expressão anterior e usando a Proposição A.4, Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left|\Big(I_3'(u_{n_j}) - I_3'(u)\Big)v\right| &\leqslant h_\infty\int_{\mathbb{R}^N}|f(u_{n_j}) - f(u)|\,|v|dx\\ &\leqslant h_\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(u_{n_j}) - f(u)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= h_\infty\|f(u_{n_j}) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\,\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}. \end{aligned}\tag{E.4}$$

Logo, pela imersão de Sobolev, existe uma constante $C_2 > 0$, tal que $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leqslant C_2\|v\|$ e como $\|v\| \leqslant 1$, na desigualdade (E.4), temos

$$\left|\Big(I_3'(u_{n_j}) - I_3'(u)\Big)v\right| \leqslant h_\infty C_2\|f(u_{n_j}) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}$$

Assim,

$$\|I_3'(u_{n_j}) - I_3'(u)\|_- = \sup_{\|v\|\leqslant 1}\left|\Big(I_3'(u_{n_j}) - I_3'(u)\Big)v\right| \leqslant h_\infty C_2\|f(u_{n_j}) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} I_3'(u_{n_j}) = I_3'(u).$$

E com isto temos que $I_3 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$.

$\square$