UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcos Henrique Silva Almeida

Curvas algébricas planas invariantes por sistemas de equações diferenciais polinomiais: um estudo do grau-gênero das curvas invariantes.

Juiz de Fora
2022

Marcos Henrique Silva Almeida

Curvas algébricas planas invariantes por sistemas de equações diferenciais polinomiais: um estudo do grau-gênero das curvas invariantes.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra - Geometria Algébrica.

Orientadora: Profª. Drª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Coorientadora: Profª. Drª. Flaviana Andrea Ribeiro

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Almeida, Marcos Henrique Silva.

Curvas algébricas planas invariantes por sistemas de equações diferenciais polinomiais : um estudo do grau-gênero das curvas invariantes. / Marcos Henrique Silva Almeida. – 2022.

100 f. : il.

Orientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Coorientadora: Flaviana Andrea Ribeiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. Curvas algébricas. 2. Folheações Algébricas. 3. Superfícies de Riemann. 4. Geometria Algébrica I. da Cruz, Joana Darc Antonia Santos, orient. II. Ribeiro, Flaviana Andrea, coorient. III. Título.

Marcos Henrique Silva Almeida

Curvas algébricas planas invariantes por sistemas de equações diferenciais polinomiais: um estudo do grau-gênero das curvas invariantes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra

Aprovada em 12 de maio de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Flaviana Andréa Ribeiro - Coorientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rogério Santos Mol

Universidade Federal de Minas Gerais

Juiz de Fora, 12/05/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Beatriz Casulari da Motta Ribeiro**, **Professor(a)**, em 16/05/2022, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Flaviana Andrea Ribeiro**, **Professor(a)**, em 17/05/2022, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0780587** e o código CRC **17C97229**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço a minha mãe, Maria Quitéria Silva Amaro, pelo imenso apoio e por sempre acreditar em mim.

Agradeço de forma incondicional a minha Vó Conceição e minha tia Bu (Ana Maria) por tudo que fazem por mim com relação ao meus estudos e minha vida como um todo. E minhas tias: Zana (Rosana), Tina (Ana Cristina) e Paty (Ana Lúcia).

Agradeço a minha primeira orientadora, Beatriz Casulari da Motta Ribeiro, por despertar em mim a imensa paixão pela Álgebra.

Agradeço as minhas atuais orientadoras, Joana e Flaviana, por continuarem estimulando essa paixão pela Álgebra e despertarem em mim uma nova paixão: Geometria Algébrica.

Agradeço a todos meus colegas da graduação e do mestrado. De forma especial aos meus colegas que viraram amigos (família): Kaio Cruz e Silva, Rodrigo Pinto Leal, Tamires Loureiro e Julia Maria Carvalho Santos.

Agradeço a minha família em Juiz de Fora (que carinhosamente chamamos de família gay), Diego Azevedo Lopes, Jonathan Luís Hipolito Ferreira e Douglas Luiz J. Ribeiro, que foram o meu porto seguro no meio de tantas incertezas e medos.

Agradeço a todos os meus familiares. Em especial: minha irmã Maria Fernanda ao qual me esforço cada dia para ser um referencial à ela.

Agradeço à Secretária do Programa de Mestrado Acadêmico em Matemática da UFJF, Paula Mara dos Reis, por toda paciência e competência.

Por fim, agradeço a UFJF e a CAPES pela bolsa de estudo durante toda a pós-graduação.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar um estudo que determina uma cota superior para o grau de curvas algébricas projetivas planas que são invariantes por um sistema de equações diferenciais polinomiais em duas variáveis. No texto, fazemos um breve estudo da teoria de Geometria Algébrica e de Superfícies de Riemann. Também apresentamos uma prova do Teorema de Normalização de curvas algébricas projetivas planas singulares. O trabalho é divido em duas partes: na primeira, consideramos curvas suaves e, na segunda, curvas singulares. Ao final, apresentamos uma cota superior para o grau de uma curva algébrica plana projetiva nodal que é invariante por um sistema de equações diferenciais polinomiais.

Palavras-chave: Curvas Algébricas. Gênero de Curvas. Campos Polinomiais. Superfícies de Riemann.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present a study that determines an upper bound for the degree of algebraic projective curves that are invariant by a system of plane polynomial differential systems. In the text we make a brief study of the theory of Algebraic Geometry and Riemann Surfaces. We also present a proof of the Normalization Theorem of singular plane projective algebraic curves. The work is divided into two parts, in the first we consider smooth curves and, in the second, singular curves. Finally, we give an upper bound for the degree of a nodal algebraic plane projective curve which is invariant by a system of polynomial differential equations.

Keywords: Algebraic Curves. Genus of Curves. Polinomial's Field. Riemann Surfaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O matemática Henri Poincaré ao estudar soluções algébricas para equações diferenciais racionais no plano complexo, em 1981, publicou três artigos sobre o tema. Poincaré descobriu que se limitarmos o grau máximo de uma possível solução de uma equação racional no plano complexo, então qualquer outa solução (se existir) pode ser encontrada apenas por operações algébricas. Desta forma, surge o seguinte questionamento: "*É possível limitar o grau de uma solução algébrica de uma equação diferencial polinomial em termos de seu grau?*". É de conhecimento geral que a resposta para a questão de Poincaré é não.

No entanto, em 1991, Cerveau e Lins Neto mostraram em (13) que quando as singularidades de uma curva invariante por um campo vetorial são todas do tipo nodal então o grau da curva é no máximo o grau do campo mais dois. Em 1994, Carnicer em (11) encontrou a mesma cota para o grau de uma curva invariante que Cerveau e Lins Neto, quando a curva invariante não contém nenhuma singularidade dicrítica do campo vetorial. Já em 1997, Campillo e Carnicer, em (9) exibiram limites em termos da resolução de singularidades da curva invariante.

Nessa dissertação, apresentaremos o trabalho de Alexei Tsygvuntsev (36) que obteve resultados análogos aos de Cerveau e Lins Neto e Carnicer usando uma técnica bem diferente. Ela baseia-se na relação entre a teoria de curvas algébricas projetivas e a teoria de Superfícies de Riemann. Mais especificamente, associamos a cada curva algébrica projetiva singular invariante por um sistema de equações diferenciais polinomiais, ou seja, da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,\, y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,\, y), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios de mesmo grau com coeficientes complexos, por uma superfície de Riemann e uma 1-forma diferencial meromorfa. Esta ideia é apresentada no artigo (36).

Dada uma curva algébrica projetiva nodal de grau n e invariante pelo sistema (1.1), mostraremos que o grau da curva é no máximo duas vezes o grau dos polinômios P e Q mais dois. O texto está dividido em sete capítulos, os quais descrevemos a seguir.

O Capítulo 2 contém as principais definições e resultados de Geometria Algébrica que serão usados no decorrer de todo texto. No Capítulo 3 introduzimos os conceitos de campos vetoriais polinomiais e de 1-formas polinomiais. Além disso, relacionamos estes dois conceitos. O Capítulo 4, com intuito de apresentar novas ferramentas que serão usadas para o estudo de curvas algébricas, trabalhamos com as superfícies de Riemann. O Capítulo 5, através do estudo de polígonos de Newton e expansões de Puiseux, traz o conceito de Normalização de curvas algébricas projetivas planas singulares. No Capítulo 6 apresentamos a Fórmula de Noether que relaciona o grau e o gênero de curvas algébricas projetivas suaves e de curvas singulares. Por fim, no Capítulo 7 apresentamos o resultado principal, o Teorema (7.30), que fornece uma cota superior para o grau da curva algébrica projetiva plana invariante, $C = \mathcal{Z}(F)$, pelo sistema (1.1) em termos do grau do sistema e do inteiro N, onde $N \geq I_P(F, \partial F/\partial x_2)$, para todo p ponto singular da curva C. Em particular, no Corolário (7.31), mostramos que o grau de uma curva nodal invariante pelo sistema (1.1) admite uma cota superior igual a duas vezes o grau do sistema mais 2. Observe que a cota $2m + 2$ é maior que a cota $m + 2$ obtidas por Cerveau e Lins Neto em (13), no entanto, ainda se apresenta como uma cota ótima.

2 GEOMETRIA ALGÉBRICA

Neste capítulo vamos apresentar os principais conceitos e resultados de Geometria Algébrica que serão a base de todo o trabalho. Descreveremos as principais características do espaço afim n-dimensional $\mathbb{A}^n$ e dos espaços projetivos $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$. Descreveremos em seguida os nossos principais objetos de estudos: as curvas algébricas planas afins e projetivas. Ao fim do capítulo, apresentamos um breve resumo sobre $\mathbb{K}$-derivações e espaço tangente.

Em todo o texto, $\mathbb{K}$ denotará um corpo algebricamente fechado.

2.1 O ESPAÇO AFIM

Vamos denotar o n-ésimo espaço afim sobre $\mathbb{K}$ por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$, quando não houver confusão. O anel de polinômios nas variáveis $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n$, com coeficientes em $\mathbb{K}$, será denotado por $\mathbb{K}[x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n]$. Para duas e três variáveis, costumamos usar as notações $\mathbb{K}[x,y]$ e $\mathbb{K}[x,y,z]$, respectivamente.

Definição 2.1. Dado $S \subset \mathbb{K}[x_1,\, x_2,\, \dots, x_n]$, vamos denotar por

$$\mathcal{Z}(S) := \{x \in \mathbb{A}^n; f(x) = 0,\, \forall f \in S\},$$

o conjunto de zeros de S.

Definição 2.2. Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é fechado se $X = \mathcal{Z}(S)$, para algum $S \subset \mathbb{K}[x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n]$. Um subconjunto de $\mathbb{A}^n$ é dito aberto se é o complementar de um conjunto fechado.

Os subconjuntos abertos de $\mathbb{A}^n$ formam uma topologia, chamada de *topologia de Zariski*.

Definição 2.3. Seja A um anel comutativo com unidade e $S \subset A$ um subconjunto. Definimos o ideal de A gerado por S, denotado por $\langle S \rangle$, como sendo o conjunto de todas as combinações A-lineares finitas:

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n;\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in A \,\mathrm{e}\, s_i \in S\}\,.$$

Observação 2.4.

(1) $\langle S \rangle$ é o menor ideal de A que contém S.

(2) $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(\langle S \rangle)$, para $S \subset A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Definição 2.5. Seja A um anel comutativo com unidade. Dizemos que A é um anel Noetheriano se qualquer ideal I de A é finitamente gerado, isto é, se existem a_1, a_2, $\ldots$, $a_k \in A$ tais que $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.

Exemplo 2.6. Se $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\mathbb{K}$ é um anel Noetheriano.

Exemplo 2.7. Um anel A é dito principal, se todo ideal de A é principal, ou seja, é gerado por um único elemento. Todo anel principal é um anel Noetheriano.

Definição 2.8. Seja I um ideal de um anel comutativo A. O radical de I é o ideal

$$\sqrt{I} := \{x \in A;\ x^n \in I \text{ para algum } n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}.$$

Teorema 2.9 (Teorema da base de Hilbert)**.** *Se A é um anel Noetheriano, então $A[x]$ é um anel Noetheriano.*

Demonstração. Ver em (15), Teorema 1.3. □

Em particular, $\mathbb{K}[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$ é Noetheriano e segue diretamente da Definição 2.2 e da Observação 2.4 que todo fechado $X \subset \mathbb{A}^n$ pode ser descrito como o conjunto de zeros de um número finito de polinômios.

Definição 2.10. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto qualquer. Definimos o ideal de X como sendo:

$$I(X) := \{f \in \mathbb{K}[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n];\ f(x) = 0,\ \forall x \in X\}.$$

É fácil ver que $I(X)$, como definido acima, é um ideal de $\mathbb{K}[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$.

Teorema 2.11 (Teorema dos zeros de Hilbert)**.** *Para cada ideal $J \subset \mathbb{K}[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$, temos $I(Z(J)) = \sqrt{J}$*

Demonstração. Ver em (35), Proposição A.9. □

Definição 2.12. Em um espaço topológico, um subconjunto X é dito irredutível se uma das afirmações equivalentes abaixo é válida:

(i) X não é união de dois fechados próprios.

(ii) Quaisquer dois abertos não vazios de X se intersectam.

(iii) Todo aberto não vazio de X é denso em X.

Proposição 2.13. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$, não vazio, se escreve de forma única, a menos da ordem, como união finita*

$$X = W_1 \cup \ldots \cup W_r,$$

onde W_i é um fechado irredutível de X para cada i e $W_i \not\subseteq W_j$ se $i \neq j$.

Demonstração. Ver em (15), Proposição 1.11. □

Observação 2.14. Os W_i's são fechados em X e não são necessariamente fechados em $\mathbb{A}^n$.

Definição 2.15. Uma variedade algébrica afim é um fechado irredutível de $\mathbb{A}^n$.

Definição 2.16. Seja A um anel comutativo com unidade. Um ideal P de A é dito ideal primo, se $P \subsetneq A$ e se $xy \in P$ implica que $x \in P$ ou $y \in P$.

Proposição 2.17. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Então X é irredutível se, e somente se, $I(X)$ é um ideal primo. Em particular, X é irredutível se, e somente se, $\overline{X}$ é irredutível.*

Demonstração. Ver em (15), Proposição 1.12. □

2.2 O PLANO PROJETIVO

A ideia da geometria projetiva é acrescentar pontos no infinito. O intuito de tal ação é por exemplo fazer com que duas retas quaisquer se intersectem, o que nem sempre é possível no plano afim.

Definição 2.18. O espaço projetivo unidimensional ou a reta projetiva é o conjunto definido por:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} := \frac{\mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\sim},$$

onde $(x_0, x_1) \sim (y_0, y_1)$ se, e somente se, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$, $i = \{0,\ 1\}$.

O ponto de $\mathbb{P}^1$ correspondente à $(x_0, x_1) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é denotado por $(x_0 : x_1)$. Dizemos que x_0 e x_1 são coordenadas homogêneas ou coordenadas projetivas do ponto.

Os pontos do conjunto

$$\{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1;\ x_0 \neq 0\} = \{(1 : x);\ x \in \mathbb{A}^1\}$$

são chamados pontos finitos de $\mathbb{P}^1$. Tal conjunto está em bijeção com $\mathbb{A}^1$. O ponto $(0 : 1)$ é chamado ponto no infinito e, com estas definições, temos naturalmente a identificação $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{(0 : 1)\}$. Podemos considerar, de modo análogo, o caso $x_1 \neq 0$.

Definição 2.19. O espaço projetivo de dimensão 2 é dado por:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} := \frac{\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{\sim},$$

onde $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$ se, e somente se, $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$, para $i \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

O ponto de $\mathbb{P}^2$ correspondente à $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é denotado por $(x_0 : x_1 : x_2)$. Dizemos que x_0, x_1, x_2 são coordenadas homogêneas ou coordenadas projetivas do ponto.

Fixado $i = 0$, chamamos os pontos do conjunto

$$U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2;\ x_0 \neq 0\} = \{(1 : x : y);\ (x, y) \in \mathbb{A}^2\}$$

de pontos finitos de $\mathbb{P}^2$, e os pontos do conjunto

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2;\ x_0 = 0\} = \{(0 : x_1 : x_2);\ (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2\}$$

de pontos no infinito. Note que o conjunto U_0 pode ser identificado com $\mathbb{A}^2$ e o conjunto dos pontos infinitos pode ser identificado com $\mathbb{P}^1$. Desta forma, temos a identificação $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1$. As mesmas definições e identificações podem ser feitas fixando $i = 1$ ou $i = 2$.

Definição 2.20. Dizemos que um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_0,\, x_1,\, x_2]$ se anula no ponto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ se $F(\lambda x_0,\, \lambda x_1,\, \lambda x_2) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Definição 2.21. Um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_0,\, x_1, x_2]$ é dito homogêneo de grau $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, se $F(\lambda x_0,\, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^r F(x_0, x_1, x_2)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Os polinômios homogêneos de grau r em $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ são então da forma

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{r_0+r_1+r_2=r} c_{r_0r_1r_2} x_0^{r_0} x_1^{r_1} x_2^{r_2}.$$

Todo polinômio $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ pode ser escrito como uma soma de polinômios homogêneos, ou seja,

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d,$$

onde os F_i's são polinômios homogêneos de grau i nas variáveis x_0, x_1, x_2, para todo $i \in \{0,\, 1,\, \ldots, d\}$. Os polinômios F_i são chamados *componentes homogêneas* de F.

Existem dois processos importantes quando estudamos polinômios: a *homogenização* e a *desomogenização*. Vamos agora explicitar esses processos.

Considere $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ um polinômio de grau d não homogêneo. O processo de *homogenização*, consiste em acrescentar uma nova variável e para obtermos um polinômio homogêneo em três variáveis.

Definição 2.22. Se $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ é escrito na forma

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d,$$

onde f_i é um polinômio homogêneo de grau i, então o polinômio homogêneo

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_2^d f_0(x_0, x_1) + x_2^{d-1} f_1(x_0, x_1) + \cdots + x_2 f_{d-1}(x_0, x_1) + f_d(x_0, x_1)$$

é chamado uma homogenização do polinômio f.

Definição 2.23. Consideremos $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo. O polinômio

$$f(x_0, x_1) = F(x_0, x_1, 1) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$$

é chamado *desomogenização* de F com respeito a x_2.

As desomogenizações de um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ com respeito às variáveis x_0 e x_1 são definidas de maneira análoga.

Definição 2.24. Seja $S \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. O conjunto de zeros de S em $\mathbb{P}^2$ é

$$\mathcal{Z}(S) = \{x \in \mathbb{P}^2;\ F(x) = 0,\ \forall F \in S\}.$$

Definição 2.25. Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^2$ é dito fechado projetivo se $X = \mathcal{Z}(S)$ para algum subconjunto $S \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$.

Um subconjunto de $\mathbb{P}^2$ é dito aberto projetivo quando é o complementar de um conjunto fechado projetivo.

Definição 2.26. Seja $X \subset \mathbb{P}^2$ um subconjunto. Definimos o ideal de X como

$$I(X) = \{F \in \mathbb{K}[x_0,\ x_1,\ x_2]; F(x) = 0,\ \forall x \in X\}.$$

É fácil mostrar que $I(X)$ é um *ideal homogêneo*, ou seja, $F \in I(X)$ se, e somente se, todas as componentes homogêneas de F estão em $I(X)$.

Os abertos de $\mathbb{P}^2$ formam uma topologia, chamada *topologia de Zariski*. Além disso, tal como no caso afim, consegue-se mostrar que todo $X \subset \mathbb{P}^2$ se escreve de maneira única como

$$X = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, com W_i's fechados irredutíveis em X tais que $W_i \not\subseteq W_j$ sempre que $i \neq j$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Os conjuntos W_i's são chamados *componentes irredutíveis* de X.

Definição 2.27. Um fechado projetivo irredutível é chamado de variedade algébrica projetiva.

Observação 2.28. Existe uma diferença básica entre os casos afim e o projetivo. Considere o ideal $I = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. O conjunto de zeros de I em $\mathbb{A}^2$ é $\mathcal{Z}(I) = \{(0, 0, 0)\}$. Já em $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$, pois $(0, 0, 0)$ não define um ponto em $\mathbb{P}^2$.

Teorema 2.29 (Teorema dos zeros projetivos)**.** *Existe bijeção revertendo as inclusões:*

$$\left\{ \textit{ Subconjuntos fechados em } \mathbb{P}^2 \right\} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideais radicais homogêneos} \\ \textit{em } \mathbb{K}[x_0,\, x_1,\, x_2] \textit{ diferentes de} \\ \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \end{array} \right\}$$

$$X \quad \longmapsto \quad I_{\mathbb{P}}(X)$$

$$\mathcal{Z}(J) \quad \longleftarrow\!\shortmid \quad J$$

Demonstração. Ver em (15), Teorema 2.1. □

2.3 CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS AFINS

Definição 2.30. Uma curva algébrica plana afim é a classe de equivalência de um polinômio não constantes $f \in \mathbb{K}[x, y]$, onde

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } f = \lambda g,$$

com $f,\, g \in \mathbb{K}[x, y]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definição 2.31. O traço de uma curva algébrica plana afim é o conjunto dos zeros, em $\mathbb{A}^2$, de qualquer polinômio na classe de equivalência da curva.

Nesse contexto, dizemos que a equação de uma curva algébrica plana afim é $f(x, y) = 0$, onde f é qualquer polinômio representante da classe de equivalência.

Observação 2.32. O traço de uma curva algébrica plana afim é um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^2$.

Definição 2.33. O grau de uma curva algébrica plana afim C é o grau de qualquer polinômio representante da classe de C e será denotado por $\text{gr}(C)$.

Definição 2.34. Uma curva algébrica plana afim definida por $f \in \mathbb{K}[x, y]$ é dita irredutível se f é irredutível em $\mathbb{K}[x, y]$.

Definição 2.35. As componentes irredutíveis de uma curva algébrica plana afim C definida pelo polinômio $f \in \mathbb{K}[x, y]$ são as curvas definidas pelos fatores irredutíveis de f.

Suponha $f(x, y) = f_1^{n_1}(x, y) \dots f_m^{n_m}(x, y)$, onde os f_i's são fatores irredutíveis de f e cada n_i é um número inteiro positivo. A multiplicidade da componente f_i da curva algébrica plana afim dada por f é o expoente n_i. Quando $n_i \geq 2$ dizemos que f_i é uma componente múltipla de f ou da curva C.

Ao longo de todo texto vamos designar pelo mesmo símbolo a curva algébrica plana afim, o seu traço ou qualquer uma de suas equações.

Sejam C uma curva plana afim definida pelo polinômio f e $p = (a, b) \in C$, ou seja, $f(p) = 0$. O ponto p é dito um *ponto simples, não singular ou liso* de f se

$$f_x(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0 \text{ ou } f_y(p) = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Neste caso, a reta de equação

$$f_x(p)(x - a) + f_y(p)(y - b) = 0$$

é chamada *reta tangente* de f em p. Um ponto p que não é simples é chamado de *ponto singular*. Uma curva que possui somente pontos simples é dita uma *curva não singular ou suave*.

Sejam f uma curva algébrica plana afim de grau n e $p = (0, 0)$. Escreva $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$, com f_i é um polinômio homogêneo de grau i em $\mathbb{K}[x, y]$ e

$$f_m = \prod L_i^{r_i} \neq 0, \tag{2.1}$$

onde os L_i's são retas distintas e os r_i's são números inteiros positivos.

Definimos m como sendo a *multiplicidade* de f em $p = (0, 0)$ e escrevemos $m = m_p(f)$. Se $m_p(f) = 2$, dizemos que p é um ponto duplo, se $m_p(f) = 3$, dizemos que p é um ponto triplo e se $m_p(f) = k$, com $k > 2$, dizemos que o ponto p é k-uplo

As retas L_i's que aparecem na equação (2.1) são chamadas retas tangentes a f no ponto p e o inteiro não negativo r_i é chamado de multiplicidade da reta tangente L_i. Dizemos ainda que L_i é uma *tangente simples* se $r_i = 1$, *tangente* *dupla* se $r_i = 2$ e uma *tangente k-upla* se $r_i = k$, $k > 2$. Se f tem m tangentes distintas em p, dizemos que p é um *ponto múltiplo ordinário* de f. Um *ponto duplo ordinário* é chamado de *nó*.

As definições anteriores podem ser estendidas a qualquer ponto $p = (a, b) \in \mathbb{A}^2$, basta considerarmos a mudança de coordenadas

$$T(x, y) = (x + a,\, y + b)$$

e considerarmos $f^T(x, y) = f \circ T\,(x, y)$.

Observação 2.36.

(1) $p \in f$ se, e somente se, $m_p(f) > 0$.

(2) $m_p(f) = 1$ se, e somente se, p é um ponto simples. Neste caso, $f_1 = 0$ é exatamente a equação da reta tangente a f em p.

2.4 CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS

Definição 2.37. Uma curva algébrica plana projetiva é a classe de equivalência de um polinômio homogêneo não constante $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, módulo a relação de equivalência que identifica dois polinômios F e $G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, se existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $F = \lambda G$.

Definição 2.38. O traço de uma curva algébrica plana projetiva definida pela classe de equivalência de um polinômio F é o conjunto dos zeros de F em $\mathbb{P}^2$.

Nesse contexto, $F = 0$ é chamada de equação da curva algébrica plana projetiva F.

Observação 2.39. O traço de uma curva algébrica plana projetiva é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}^2$.

Definição 2.40. O grau de uma curva algébrica plana projetiva C é o grau de qualquer um dos polinômios na classe de C e será denotado por $\mathrm{gr}(C)$.

Definição 2.41. Uma curva algébrica plana projetiva dada por $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ é dita irredutível se F é irredutível.

Definição 2.42. As componentes irredutíveis de uma curva algébrica plana projetiva definida pelo polinômio redutível $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ são as curvas definidas pelos fatores irredutíveis de F.

Seja

$$F(x, y, z) = F_1^{n_1}(x, y, z) \dots F_m^{n_m}(x, y, z),$$

onde os F_i's são fatores irredutíveis de F e cada n_i é um número inteiro positivo. A multiplicidade da componente F_i da curva F é o expoente n_i. Quando $n_i \geq 2$ dizemos que F_i é *uma componente múltipla de* F.

Como no caso afim, vamos nos referir sem fazer distinção à curva algébrica plana projetiva, ao seu traço ou a qualquer uma de suas equações.

Sejam C uma curva algébrica plana projetiva definida pelo polinômio F e $p = (a : b : c) \in C$. O ponto p é dito um *ponto simples* de C se

$$F_x(p) = \frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0 \quad \text{ou} \quad F_y(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0 \quad \text{ou} \quad F_z(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0.$$

Neste caso, a reta projetiva de equação

$$F_x(p)(x - a) + F_y(p)(y - b) + F_z(p)(z - c) = 0$$

é chamada *reta tangente* de F em p. Um ponto p que não é simples é chamado de *ponto singular*. Uma curva que possui somente pontos simples é chamada de *curva não singular ou suave*.

2.5 DERIVAÇÃO E ESPAÇO TANGENTE

Sejam V uma variedade algébrica afim e $I = I(V)$ o ideal dos polinômios que se anulam nos pontos de V. O anel

$$\mathbb{K}[V] = \frac{\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]}{I}$$

é chamado anel de coordenadas de V.

Como $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, podemos escrever I na forma $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$.

Fixemos $p \in V$ e consideremos uma reta L em $\mathbb{A}^n$ passando por p com vetor diretor $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Logo, a reta L é dada por $L = \{p + tv;\ t \in \mathbb{K}\}$.

Observe agora que

$$L \cap V = \{p + tv;\ f_i(p + tv) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, s\}.$$

Seja $f(t) = \text{mdc}\{f_1(p + tv), \ldots, f_s(p + tv)\}$. Como $p \in L \cap V$ e p é dado por $t = 0$, então $t = 0$ é raiz de $f(t)$.

Definição 2.43. A multiplicidade de interseção da reta L com V em p é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $f(t)$. Se $f(t)$ é identicamente nulo, então por convenção denotamos tal multiplicidade por $+\infty$.

É possível mostrar que a multiplicidade de interseção é independente da escolha das equações $f_1, \ldots, f_s$.

Definição 2.44. Dizemos que uma reta L é tangente a V em p se a multiplicidade de interseção de L com V em p for maior ou igual à 2.

A expansão em série de Taylor de cada f_j em p, $j = 1, \ldots, s$, é

$$f_j(p + tv) = f_j(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) t\, v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(p) t^2 v_i v_k + \cdots$$

Como $f_j(p) = 0$, obtemos

$$f_j(p + tv) = t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) v_i + t^2(\cdots).$$

Desta forma, $t = 0$ é raiz múltipla das equações $f_j(p + tv) = 0$, $j = 1, \ldots, s$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = 0,\ \forall j = 1, \ldots, s. \tag{2.2}$$

Portanto, uma reta L é tangente a V em p se, e somente se, um vetor v que dá a sua direção satisfaz as equações dadas em (2.2). Nesta situação dizemos também v é *um vetor tangente* a V em p.

Definição 2.45. Seja V uma variedade algébrica afim em $\mathbb{A}^n$. O espaço tangente a V em um ponto p, denotado por T_pV, é o espaço vetorial definido por

$$T_pV := \{v \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \mid v \text{ é vetor tangente à } V \text{ em } p\} \cup \{0\}.$$

Pode-se mostrar facilmente que o espaço tangente a V em p é uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$, mais especificamente, podemos considerar o espaço tangente como sendo

$$T_pV = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f_1(p) \cdot (x_i - p_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_s(p) \cdot (x_i - p_i)\right).$$

Definição 2.46. Sejam R um anel comutativo, A uma R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Uma R-derivação de A em M é uma aplicação R-linear

$$D : A \longrightarrow M,$$

tal que

$$D(ab) = aD(b) + bD(a), \forall a,\, b \in A.$$

Para toda R-derivação de A em M, $D(r) = 0$, $\forall r \in R$.

Definição 2.47. Sejam R um anel, A uma R-álgebra e M um A-módulo. Denotaremos o conjunto das R-derivações de A em M por $Der_R(A, M)$, isto é,

$$Der_R(A, M) = \{D : A \longrightarrow M;\ D \text{ é uma } R\text{-derivação}\}.$$

Exemplo 2.48. O anel $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ pode ser visto como uma $\mathbb{K}$-álgebra. Para isto consideramos a inclusão de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Desta forma a derivada parcial em relação a variável x_i, denotada por $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ou ∂_i, é uma $\mathbb{K}$-derivação de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Lema 2.49. *Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica, $p \in V$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um vetor tangente a V em p. A aplicação $D_v : \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, dada por $D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i$ é uma $\mathbb{K}$-derivação.*

Demonstração. Segue direto da definição de $\mathbb{K}$-derivação. □

Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica afim e $p \in V$. Consideraremos $\mathbb{K}$ como um $\mathbb{K}[V]$-módulo definindo, para $f = \overline{F} \in \mathbb{K}[V]$, onde $\overline{F}$ é a classe de equivalência de $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ em $K[V]$ e $a \in \mathbb{K}$,

$$fa = aF(p).$$

Proposição 2.50. *Sejam v um vetor tangente a V em p e $D_v = \sum v_j \partial_j$ como definido no Lema* 2.49*. A aplicação $D : \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}$ definida por $D(f) = D_v(F)(p)$, onde $f = \overline{F(x_1, \ldots, x_n)}$ e $F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é uma $\mathbb{K}$-derivação.*

Demonstração. Observe inicialmente que D está bem definida e que ela é $\mathbb{K}$-linear. Em seguida, se $f = \overline{F}$ e $g = \overline{G}$, então $fg = \overline{FG}$. Portanto,

$$\begin{aligned} D(fg) = D_v(FG)(p) = [FD_v(G)]\,(p) + [GD_v(F)]\,(p) &= \\ = F(p)D_v(G)(p) + G(p)D_v(F)(p) &= \\ = fD(g) + gD(f). & \end{aligned}$$

□

A proposição seguinte mostra que todo elemento de $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V], \mathbb{K})$ pode ser obtido a partir de um vetor tangente a V em p.

Proposição 2.51. *Seja $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V], \mathbb{K})$. Existe um vetor tangente $v \in T_pV$ tal que $D(f) = D_v(f)(p)$, para todo $f \in K[V]$.*

Demonstração. Ver em (2), Proposição 3.3. □

O Lema 2.49 e a Proposição 2.51 implicam que existe um isomorfismo entre o conjunto de vetores tangentes a V em p, $T_p(V)$, e o conjunto das $\mathbb{K}$-derivações $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V], \mathbb{K})$.

O isomorfismo mencionado anteriormente nos permite fazer a seguinte definição alternativa de espaço tangente

Definição 2.52. Sejam V uma variedade algébrica afim e $p \in V$. Definimos T_pV, o espaço tangente a V em p, como sendo o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dado por:

$$T_pV = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V], \mathbb{K}).$$

Exemplo 2.53. Para todo $p \in \mathbb{A}^n$, o espaço vetorial $T_p\mathbb{A}^n$ tem como base o conjunto

$$\beta := \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$$

onde $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

A proposição a seguir, cuja prova pode ser encontrada em (2), mostra o caráter local da definição de espaço tangente.

Proposição 2.54. *Se U for um aberto de uma variedade algébrica afim V contendo p, então $T_pU \simeq T_pV$.*

Assim somos motivados a fazer a seguinte definição.

Definição 2.55. Seja V uma variedade algébrica afim ou projetiva. O espaço tangente a V em p, denotado por T_pV, é definido como sendo T_pU onde U é qualquer aberto afim de V que contém p.

Exemplo 2.56. Para todo $p \in \mathbb{A}^n$ temos $T_p\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$, uma vez que $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$.

Exemplo 2.57. Seja V uma *hipersuperfície* de $\mathbb{A}^n$, ou seja, $I(V) = \langle f \rangle$ para algum $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $f \neq 0$. Suponha que $p = (0, \ldots, 0) \in V$. O espaço tangente a V em p é definido por

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i = 0.$$

Se $f_1 \not\equiv 0$, então T_pV é definido por uma equação linear em $\mathbb{A}^n$. Por outro lado, se $f_1 \equiv 0$, então $T_pV = \mathbb{A}^n$.

3 CAMPOS VETORIAIS E 1-FORMAS

Para estudarmos as curvas invariantes por sistemas de equações polinomiais, precisamos entender os conceitos de campos vetoriais e 1-formas, que serão apresentados neste capítulo. Também apresentaremos um método para relacionar as expressões locais de campo polinomial, 1-formas locais, 1-forma global e as expressões globais de campos vetoriais polinomiais.

3.1 CAMPOS VETORIAIS

Sejam $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o plano projetivo sobre $\mathbb{C}$ e $p = (x_0 : x_1 : x_2)$ um ponto em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Escrevemos $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; x_i \neq 0\}$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$.

Em U_0 temos a aplicação natural:

$$\phi_0 : \begin{cases} \quad U_0 & \longrightarrow \quad \mathbb{A}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0}\right) \end{cases} .$$

Usamos a notação $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$ e diremos que (x, y) são as coordenadas locais em U_0 e $(x_0 : x_1 : x_2)$ são as coordenadas globais.

Em U_1 temos a aplicação natural:

$$\phi_1 : \begin{cases} \quad U_0 & \longrightarrow \quad \mathbb{A}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto \left(\dfrac{x_0}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases} .$$

Usamos a notação $x = x_0/x_1$ e $y = x_2/x_1$ e diremos que (x, y) são as coordenadas locais em U_1.

Em U_2 temos a aplicação natural:

$$\phi_2 : \begin{cases} \quad U_2 & \longrightarrow \quad \mathbb{A}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto \left(\dfrac{x_0}{x_2}, \dfrac{x_1}{x_2}\right) \end{cases} .$$

Usamos a notação $x = x_0/x_2$ e $y = x_1/x_2$ e diremos que (x, y) são as coordenadas locais em U_2.

Ao longo do texto, um ponto $p \in U_i$, $i = 0, 1, 2$ e sua imagem $\phi_i(p)$, $i = 0, 1, 2$ poderão ser tratadas sem diferenciação apenas por p.

Definição 3.1. Um campo de vetores em uma variedade algébrica (afim ou projetiva) V é uma função χ que associa cada ponto $p \in V$ a um vetor tangente $\chi(p) \in T_pV$.

Agora, vamos descrever o espaço tangente a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ em um ponto p.

Segue do Exemplo 2.53 e da Proposição 2.54 as seguintes afirmações:

(i) se $p \in U_0$, então $T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong T_pU_0 = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right\rangle$ onde $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$,

(ii) se $p \in U_1$, então $T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong T_pU_1 = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right\rangle$ onde $x = \frac{x_0}{x_1}$ e $y = \frac{x_2}{x_1}$,

(iii) se $p \in U_2$, então $T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong T_pU_2 = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right\rangle$ onde $x = \frac{x_0}{x_2}$ e $y = \frac{x_1}{x_2}$.

Sendo assim, um campo de vetores χ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é dado localmente por um par de funções $a(x, y)$, $b(x, y)$ nas coordenadas locais (x, y), tais que

$$\chi(p) = a(p) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p .$$

Se $a(x, y)$ e $b(x, y)$ sãos polinomiais, dizemos que o *campo é polinomial.* Vamos trabalhar apenas com campos polinomiais e escreveremos

$$\chi = a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.1}$$

Diremos que a expressão (3.1) é uma *forma local do campo* χ, uma vez que ela descreve o campo em um dos abertos U_i, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Definição 3.2. Uma forma global de um campo vetorial χ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma expressão do tipo

$$\chi = F_0\frac{\partial}{\partial x_0} + F_1\frac{\partial}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{3.2}$$

onde F_0, F_1, F_2, quando não nulos, são polinômios de grau d.

O campo descrito por (3.2) tem expressões locais nos abertos U_0, U_1 e U_2.

No aberto U_0 a expressão local é

$$\chi\Big|_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.3}$$

onde $x = \dfrac{x_1}{x_0}$ e $y = \dfrac{x_2}{x_0}$ são as coordenadas locais em U_0 e $f_i(x, y) = F_i(1, x, y)$.

Em U_1 a expressão local é

$$\chi\Big|_{U_1} = (f_0 - xf_1)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_1)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.4}$$

onde $x = \dfrac{x_0}{x_1}$ e $y = \dfrac{x_2}{x_1}$ são as coordenadas locais em U_1 e $f_i(x, y) = F_i(x, 1, y)$.

Por fim, em U_2 a expressão local é

$$\chi\Big|_{U_2} = (f_0 - xf_2)\frac{\partial}{\partial x} + (f_1 - yf_2)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.5}$$

onde $x = \dfrac{x_0}{x_2}$ e $y = \dfrac{x_1}{x_2}$ são as coordenadas locais em U_2 e $f_i(x, y) = F_i(x, y, 1)$.

Definição 3.3. Uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é um campo de vetores de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$\chi = F_0\frac{\partial}{\partial x_0} + F_1\frac{\partial}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

módulo multiplicação por constantes não nulas, onde F_0, F_1 e F_2, ou tem o mesmo grau ou são nulos.

Definição 3.4. Um ponto $p \in U_i$, $i = 0,\ 1,\ 2$ é chamado de singularidade do campo χ quando p anula a expressão local de χ em U_i, para algum $i = 0,\ 1,\ 2$.

3.2 1-FORMAS

Definição 3.5. Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma aplicação ω que associa cada ponto $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a um funcional linear $\omega(p) : T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é dada localmente por um par de funções a_1, a_2 nas coordenadas locais $(x,\ y)$, isto é,

$$\omega(p) = a_1(p)d_px + a_2(p)d_py,$$

onde $\{d_px, d_py\}$ é a base dual de $\{(\partial/\partial x)|_p, (\partial/\partial y)|_p\}$.

Se a_1 e a_2 são polinômios, dizemos que a 1-forma é polinomial. As 1-formas trabalhadas daqui em diante serão polinomiais. Escreveremos simplesmente:

$$\omega = a_1dx + a_2dy. \tag{3.6}$$

Definição 3.6. Seja ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dada em U_0 por $\omega = a_1dx + a_2dy$ e $d = \max\{\mathrm{gr}(a_i);\text{ se } a_i \neq 0 \text{ e } i = 1,\, 2\}$. O grau de ω é dado por

$$s = \begin{cases} d, & \text{se} \quad -xa_{1d} - ya_{2d} \neq 0, \\ d-1, & \text{se} \quad -xa_{1d} - ya_{2d} = 0. \end{cases}$$

onde a_{1d} e a_{2d} são as componentes de grau d de a_1 e a_2, respectivamente.

Considere a 1-forma em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ como dada na Definição 3.6. A forma global de ω em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma expressão da forma

$$\Omega = A_0dx_0 + A_1dx_1 + A_2dx_2, \tag{3.7}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $s+1$, quando não nulos, e dados por:

$$A_0 = x_0^s\left(-x_1a_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) - x_2a_2\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)\right), \tag{3.8}$$

$$A_1 = x_0^{s+1}a_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right), \tag{3.9}$$

$$A_2 = x_0^{s+1}a_2\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right). \tag{3.10}$$

Observemos que $x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0$.

Por outro lado, dada uma 1-forma global em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\Omega = A_0dx_0 + A_1dx_1 + A_2dx_2,$$

com $x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0$, as suas expressões locais nos abertos U_0, U_1, U_2 são:

$$\Omega\Big|_{U_0} = a_1dx + a_2dy, \tag{3.11}$$

onde $a_1 = A_1(1,\, x,\, y)$ e $a_2 = A_2(1,\, x,\, y)$,

$$\Omega\Big|_{U_1} = b_0dx + b_2dy, \tag{3.12}$$

onde $b_0 = A_0(x,\, 1,\, y)$ e $b_2 = A_2(x,\, 1,\, y)$ e

$$\Omega\Big|_{U_2} = c_0 dx + c_1 dy \tag{3.13}$$

onde $c_0 = A_0(x,\, y,\, 1)$ e $c_1 = A_1(x,\, y,\, 1)$.

Seja ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ definida em U_0 por $\omega = a_1 dx + a_2 dy$. Para cada $p \in U_0$, $\omega(p) : T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear cujo núcleo é gerado por

$$\chi(p) = -b(p)\, \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + a(p)\, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \in T_p\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$

isto é, $N(\omega(p)) = \{\lambda\chi(p); \lambda \in \mathbb{C}\}$. Podemos então dizer que ω define em U_0 um campo de vetores descrito localmente como $\chi = -b\partial/\partial x + a\partial/\partial y$. O que nos leva a fazer a seguinte definição.

Definição 3.7. Uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é dada por uma 1-forma

$$\Omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + A_2 dx_2$$

onde A_0, A_1, A_2 são polinômios homogêneos de grau $d+1$, quando não nulos, satisfazendo a condição

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 = 0,$$

módulo múltiplos não nulos.

Dizemos que a folheação é induzida pela 1-forma Ω.

Além disso, se um campo de vetores χ de grau d pertence ao núcleo de Ω então diremos que χ e Ω induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Definição 3.8. Um ponto $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é dito uma singularidade da folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ induzida pela 1-forma $\Omega = A_0 dx_0 + A_1 dx_1 + A_2 dx_2$ quando $A_0(p) = 0$, $A_1(p) = 0$ e $A_2(p) = 0$.

3.3 RELAÇÕES ENTRE CAMPOS DE VETORES E 1-FORMAS

O campo de vetores em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dado globalmente por

$$\chi \ = F_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

com os $F_i's$ sendo polinômios homogêneos nulos ou de grau d, tem expressão local em U_0 dada por:

$$\chi\Big|_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

A expressão local em U_0 da 1-forma Ω que induz a mesma folheação que χ é

$$\omega = -(f_2 - yf_0)dx + (f_1 - xf_0)dy.$$

A expressão global da 1-forma acima é

$$\Omega = A_0dx_0 + A_1dx_1 + A_2dx_2,$$

onde

$$A_0 = x_1F_2 - x_2F_1,$$

$$A_1 = -x_0F_2 + x_2F_0,$$

$$A_2 = x_0F_1 - x_1F_0.$$

Logo, a 1-forma tem expressão global

$$\Omega = (x_1F_2 - x_2F_1)dx_0 + (-x_0F_2 + x_2F_0)dx_1 + (x_0F_1 - x_1F_0)dx_2.$$

Portanto, a 1-forma associada ao campo de vetores representado por

$$\chi = F_0\frac{\partial}{\partial x_0} + F_1\frac{\partial}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

é dada pelo determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Reciprocamente, dada uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d, induzida por uma 1-forma $\Omega = A_0dx_0 + A_1dx_1 + A_2dx_2$, podemos reverter o processo e encontrar F_0, F_1 e F_2 tais que o campo $\chi = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ induz a mesma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Isto é mostrado no seguinte resultado:

Proposição 3.9. *Se* A_0*,* A_1 *e* A_2 *são polinômios homogêneos nulos ou de grau* $d+1$ *satisfazendo* $x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0$*, então existem polinômios* F_0*,* F_1*,* F_2 *homogêneos nulos ou de grau* d *tais que*

$$\begin{aligned} A_0 &= x_1F_2 - x_2F_1 \\ A_1 &= x_2F_0 - x_0F_2 \\ A_2 &= x_0F_1 - x_1F_0. \end{aligned}$$

Demonstração. Como

$$x_0A_0 = -x_1A_1 - x_2A_2 \tag{3.14}$$

e os $A_i's$ possuem grau $d+1$, x_0^{d+1} não divide nenhum monômio de A_0 pois, caso contrário, x_0^{d+2} seria um monômio de $-x_1A_1 - x_2A_2$. Assim, todos os monômios de A_0 possuem fator x_1 ou x_2 e podemos escrever $A_0 = x_1F_2 - F_1x_2$, para polinômios F_1, F_2, ambos homogêneos de grau d. Substituindo A_0 na igualdade (3.14), e agrupando os temos em x_1 e x_2, obtemos:

$$x_1(x_0F_2 + A_1) = x_2(x_0F_1 - A_2). \tag{3.15}$$

Logo, $x_1 \mid (x_0F_1 - A_2)$ e $x_1 \mid (x_0F_2 + A_1)$. Desta forma, existem polinômios G_3 e G_4, ambos de grau d tais que

$$\begin{cases} x_0F_1 - A_2 &= x_1G_3, \\ x_0F_2 + A_1 &= x_2G_4. \end{cases} \tag{3.16}$$

Substituindo (3.16) em (3.15), obtemos $x_1x_2G_4 = x_2x_1G_3$. Portanto $G_3 = G_4$ e escrevendo $G_4 = G_3 = F_0$, segue que

$$\begin{cases} A_2 &= x_0F_1 - x_2F_0, \\ A_1 &= x_2F_0 - x_0F_2. \end{cases}$$

□

Observação 3.10. Dada uma forma local de um campo de vetores χ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, conseguimos determinar a forma global do campo de vetores χ através de suas 1-formas locais e globais. Através das seguintes associações:

$$\chi\Big|_{U_i} = a\partial x + b\partial y \Rightarrow \omega\Big|_{U_i} = bdx - ady \Rightarrow \Omega \Rightarrow \chi.$$

4 SUPERFÍCIES DE RIEMANN

O objetivo agora é definir uma superfície de Riemann e apresentar alguns resultados. Usaremos o fato de que uma curva algébrica plana projetiva suave é uma superfície de Riemann para definir seu gênero. O resultado principal deste capítulo é a Fórmula do Índice de Poincaré-Hopf, que vai nos auxiliar a estudar o grau de uma 1-forma meromorfa.

Definição 4.1. Uma superfície de Riemann é um espaço topológico Hausdorff conexo C munido de uma cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_\alpha$ e uma família de aplicações:

$$z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que cada z_α é um homeomorfismo de U_α em um subconjunto aberto $z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ e se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação:

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é biholomorfa.

Denominamos (U_α, z_α) de coordenada holomorfa local e $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ de cobertura com coordenadas holomorfas.

Uma superfície de Riemann C é dita uma superfície de Riemann compacta se C for um espaço topológico compacto.

Exemplo 4.2. A extensão dos números complexos $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é um espaço topológico Hausdorff, conexo e compacto. Considere em Σ a cobertura $\{U_0, U_1\}$, onde:

$$U_0 = \Sigma \setminus \{\infty\} \quad e \quad U_1 = \Sigma \setminus \{0\}$$

e as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcccl} g_0 & : & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcccl} g_1 & : & U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \begin{cases} 0 & ; \ z = \infty \\ 1/z & ; \ z \neq \infty \end{cases} \end{array}$$

Observemos que:

$$\begin{array}{rccc} g_1 \circ g_0^{-1}: & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}$$

é uma aplicação biholomorfa, e portanto, Σ é uma superfície de Riemann compacta.

Teorema 4.3 (Teorema da função implícita holomorfa)**.** *Suponha que $f(w,z)$ é uma função holomorfa em alguma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ e que*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) \neq 0.$$

Então existe uma função g holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, temos

$$f(w,z) = 0, \text{ se, e somente se, } z = g(w).$$

Demonstração. Ver em (21); Capítulo I, Teorema 9.6. □

O Teorema da função implícita holomorfa continua válido se trocarmos z por w.

Exemplo 4.4. Seja C uma curva plana algébrica irredutível e S o conjunto formado por todos os pontos singulares de C. É possível provar que C e $C \setminus S$ são subconjuntos conexos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (veja em (21), Capítulo II, Teorema 2.11). Além disso, usando o Teorema da função implícita holomorfa em cada ponto de $C \setminus S$, construímos cartas locais que satisfazem as exigências da Definição 4.1. Portanto, $C \setminus S$ é uma superfície de Riemann.

Qualquer função holomorfa de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$ em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$:

$$w = f(z); \text{ onde } w = u + \imath v \text{ e } z = x + \imath y \tag{4.1}$$

é também uma aplicação suave do conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ no conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, dada por:

$$(x, y) \longmapsto (u(x,\, y), v(x,\, y)). \tag{4.2}$$

Desta forma, podemos ver que uma superfície de Riemann compacta é também uma variedade 2-dimensional real, suave e compacta, ou seja, uma superfície suave e compacta. A aplicação suave (4.2) induzida pela função holomorfa (4.1) deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Então,

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 > 0.$$

Assim, conseguimos mostrar que toda superfície de Riemann compacta, do ponto de vista topológico, é uma variedade real 2-dimensional suave e orientável.

Além disso, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5. *Toda variedade compacta 2-dimensional, conexa e orientável é homeomorfa a um toro com g buracos.*

Demonstração. Ver em (28); Teorema 5.1. □

O número de buracos g, no Teorema 4.5, é chamado de *gênero* da variedade e é um invariante topológico (ver em (26); Apêndice C.2).

Definição 4.6. A característica de Euler de uma superfície compacta orientável e 2-dimensional de gênero g é definida por:

$$\chi = 2 - 2g.$$

Como g é um invariante topológico, segue que a característica de Euler é também um invariante topológico.

Definição 4.7. O gênero g de uma superfície de Riemann, é número de buracos g no Teorema 4.5. A característica de Euler de uma superfície de Riemann de gênero g é definida por:

$$\chi = 2 - 2g.$$

Definição 4.8. Sejam C uma superfície de Riemann e $\{(U_i, z_i)\}$ uma cobertura com coordenadas holomorfas. Uma função holomorfa (respectivamente, meromorfa) f sobre C é por definição uma família de aplicações $f_i : U_i \longrightarrow \Sigma$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $f_i = f_j$ em $U_i \cap U_j$ quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

(ii) para todo i, $f_i \circ z_i^{-1}$ são funções holomorfas em $z_i(U_i) \subset C$ (respectivamente, meromorfas).

Denotaremos a função f por $\{(U_i, z_i, f(z_i))\}_i$.

O conjunto de funções holomorfas sobre uma superfície de Riemann C, com as operações usuais de adição e multiplicação de funções e multiplicação por escalar, formam uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, a qual denotaremos por $\mathcal{O}(C)$.

Se C é uma superfície de Riemann compacta, então toda função holomorfa definida sobre C é constante.

Da mesma forma, o conjunto de funções meromorfas sobre uma superfície de Riemann C, com as definições usuais de adição e multiplicação de funções, forma o corpo de funções meromorfas sobre C, ao qual vamos denotar por $K(C)$.

Sejam C uma superfície de Riemann compacta, $f \in K(C)$ e $p \in C$. Considere um sistema de coordenadas locais z numa vizinhança do ponto p tal que $z(p) = 0$. Então numa vizinhança de p, podemos escrever

$$f(z) = z^n h(z), \tag{4.3}$$

onde $h(z)$ é uma função holomorfa, $h(0) \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$. O valor de n na expressão (4.3) independe da coordenada local z, satisfazendo $z(p) = 0$, ou seja, é unicamente determinados por f.

Definição 4.9. O número n tal que $f(z) = z^n h(z)$ é chamado de ordem ou multiplicidade de f no ponto p e será representado por $v_p(f)$. Quando $v_p(f) > 0$, p é dito *zero* de f e se $v_p(f) < 0$, p é dito *polo* de f. Além disso, o número $|v_p(f)|$ é dito a ordem ou a multiplicidade do zero ou do polo de f em cada uma dos casos.

Definição 4.10. Sejam C e C' duas superfícies de Riemann e $\{(U_i, z_i)\}_{i\in I}$ e $\{(U'_k, z'_k)\}_{k\in J}$ suas coberturas em coordenadas holomorfas, respectivamente. Então uma aplicação holomorfa $f : C \longrightarrow C'$ é por definição uma família de aplicações contínuas

$$f_i : U_i \longrightarrow C', \text{ para todo } i \in I,$$

tais que:

(i) $f_i = f_j$ em $U_i \cap U_j$, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

(ii) $z'_k \circ f_i \circ z_i^{-1}$ é uma função holomorfa em $z_i(f^{-1}(U'_k) \cap U_i)$, se $z_i(f^{-1}(U'_k) \cap U_i) \neq \emptyset$.

Definição 4.11. Seja C uma superfície de Riemann. Uma diferencial holomorfa (respectivamente, meromorfa) ω é por definição uma família $\{(U_i, z_i, \omega_i)\}$ tal que

(i) $\{(U_i, z_i)\}$ é um atlas holomorfo de C e $\omega_i = f_i(z_i)\,\mathrm{d}z_i$, onde $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ (respectivamente, $f_i \in K(U_i)$),

(ii) se $z_i = \varphi_{ij}(z_j)$ é a mudança de coordenadas em $U_i \cap U_j$, com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então
$$f_i(\varphi_{ij}(z_j))\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j} = f_j(z_j),$$
isto é, a representação local da diferencial muda de acordo com a regra da cadeia
$$f_i(\varphi_{ij}(z_j))\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j) = f_j(z_j)\mathrm{d}z_j.$$

Denotaremos o conjunto das diferenciais holomorfas em C por $\Omega^1(C)$ e o conjunto das diferenciais meromorfas em C por $K^1(C)$.

Definição 4.12. Sejam C uma superfície de Riemann e

$$f = \{(U_i, z_i, f_i(z_i))\} \in K(C).$$

A diferencial meromorfa

$$\mathrm{d}f = \left\{\left(U_i, z_i, \mathrm{d}f_i = \frac{\mathrm{d}f_i(z_i)}{\mathrm{d}z_i}\mathrm{d}z_i\right)\right\} \in K^1(C)$$

é dita diferencial da função meromorfa f e será denotada por $\mathrm{d}f$.

Suponha que C é uma superfície de Riemann. Considere

$$\omega = \{(U_i, z_i, f_i(z_i)\mathrm{d}z_i\} \in K^1(C);\ p \in U_i \cap U_j.$$

Então

$$v_p(f_i) = v_p\left(f_i(\varphi_{ij}(z_j))\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j}\right) = v_p(f_j).$$

Logo podemos definir

$$v_p(\omega) = v_p(f_i), \text{ se } p \in U_i.$$

Se $v_p(\omega) > 0$, então p é dito um *zero* de ω. Se $v_p(\omega) < 0$, então p é dito um *polo* de ω.

Teorema 4.13. *Seja C uma superfície de Riemann compacta. Se $f \in K(C)$ não é uma função constante, então*

$$\sum_{p \in C} v_p(f) = 0.$$

Em particular, temos que o número de zeros e de polos de f são iguais, contando as multiplicidades.

Demonstração. Ver em (21); Capítulo I, Teorema 4.9. □

Teorema 4.14 (Fórmula do índice de Poincaré-Hopf para diferenciais meromorfas)**.** *Seja C uma superfície de Riemann compacta de gênero g e $\omega \in K^1(C)$, então*

$$\mathrm{gr}(\omega) := \sum_{p \in C} v_p(\omega) = 2g - 2.$$

Demonstração. Ver em (21); Capítulo I, Teorema 6.5. □

5 O CONCEITO DE NORMALIZAÇÃO

Vamos apresentar um estudo sobre polígonos de Newton e expansões de Puiseux no anel de séries formais $\mathbb{C}\,[[x,\, y]]$ e no anel das séries convergentes $\mathbb{C}\,\{x,\, y\}$. Por meio das expansões de Puiseux, conseguimos componentes analíticas locais passando por um ponto singular. Desta forma, provamos que existem aplicações biholomorfas locais, definidas em abertos próximos aos pontos singulares em estudo. O Teorema da Normalização por meio destas aplicações locais nos mostra que dada uma curva algébrica projetiva irredutível(C), existe uma superfície de Riemann compacta($\tilde{C}$) e uma aplicação biholomorfa:

$$\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \longrightarrow C \setminus \mathrm{Sing}(C),$$

onde $\mathrm{Sing}(C)$ são os pontos singulares da curvas C e $\#\sigma^{-1}\mathrm{Sing}(C)$ é o número de expansões de Puiseux não conjugadas de C próximo aos seus pontos singulares.

5.1 RESULTANTE DE POLINÔMIOS

Teorema 5.1. *Seja D um domínio de fatoração única e*

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & a_0x^m + \cdots + a_m & (a_0 \neq 0) \\ g(x) & = & b_0x^n + \cdots + b_n & (b_0 \neq 0) \end{array}$$

polinômios em $D[x]$. Então f e g tem fator comum não trivial se, e somente se o determinante $\mathcal{R}(f, g) = 0$, onde

$$\mathcal{R}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Demonstração. Ver em (21), Teorema 2.2. □

Definição 5.2. O determinante $\mathcal{R}(f,g)$ é chamado de resultante de f e g.

Corolário 5.3. *Seja D um domínio de fatoração única e*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0) \\ g(x) &= b_0x^n + \cdots + b_n \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

polinômios em $D[x]$. Existem polinômios p, $q \in D[x]$, com $\mathrm{gr}(p) < n$, $\mathrm{gr}(q) < m$, tal que:

$$p(x)f(x) + q(x)g(x) = \mathcal{R}(f,g)$$

Demonstração. Ver em (21), Capítulo II, Corolário 2.4. □

Definição 5.4. Sejam D um domínio de fatoração única. Denominamos a resultante de $f \in D[x]$ e de sua derivada polinomial f' de discriminante de f, e denotamos por

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f,f').$$

Corolário 5.5. *Seja D um domínio de fatoração única. Uma condição necessária e suficiente para que $f \in D[x]$ tenha fatores múltiplos é que seu discriminante seja igual a zero.*

Demonstração. Basta aplicarmos o Teorema 5.1 em f e f'. □

Lema 5.6. *Seja C uma curva algébrica projetiva plana de grau n. Então é possível escolher um sistema de coordenadas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que C possui uma equação afim da seguinte forma*

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$$

onde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $\mathrm{gr}(a_j(x)) \leq j$ ou $a_j(x) = 0$.

Demonstração. Suponha que C seja definida por $F(x_0,x_1,x_2) = 0$. Considere α, $\lambda \in \mathbb{C}$ e façamos a seguinte mudança de variáveis em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0' + \alpha x_2', \\ x_1 &= x_1 + \lambda x_2', \\ x_2 &= x_2'. \end{aligned}$$

Seja $b(\alpha, \lambda)$ o coeficiente do termo ${x'_2}^n$ em $F(x'_0 + \alpha x'_2, x'_1 + \lambda x'_2, x'_2)$. Como $b(\alpha, \lambda) = F(\alpha, \lambda, 1)$, podemos escolher α e λ em $\mathbb{C}$ de forma que $b(\alpha, \lambda) \neq 0$. Então

$$F_1(x'_0, x'_1, x'_2) := \left(\frac{1}{b(\alpha, \lambda)}\right) F(x'_0, x'_1, x'_2)$$

é uma equação de C no sistema de coordenas (x'_0, x'_1, x'_2) e $f(x, y) = F_1(1, x, y)$ tem a forma descrita no enunciado.

□

Teorema 5.7. *Uma curva algébrica plana projetiva irredutível C tem no máximo um número finito de pontos singulares.*

Demonstração. Suponha que a equação afim de C em U_0 é:

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

onde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $\mathrm{gr}(a_j(x)) \leq j$ ou $a_j(x) = 0$. Considere f como um elemento em $\mathbb{C}[x][y]$. O discriminante de f com respeito à derivada parcial em relação a y, isto é,

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f,\, f_y), \text{ onde } f_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

é um polinômio em $\mathbb{C}[x]$. Vamos denotá-lo por $\mathcal{D}(f)(x)$. Como f é irredutível, temos que $\mathcal{D}(f)(x) \not\equiv 0$.

Se $\mathrm{Sing}(C)$ é o conjunto dos pontos singulares de C, então

$$\mathrm{Sing}(C) \cap \mathbb{C}^2 \subset \{(x,\, y) \in \mathbb{C}^2;\ f(x, y) = 0,\ f_y(x, y) = 0\}.$$

Pelo Teorema 5.1, a projeção de $\mathrm{Sing}(C) \cap \mathbb{C}^2$ na primeira coordenada é

$$D = \{x \in \mathbb{C};\ \mathcal{D}(f)(x) = 0\}.$$

Observemos que D é o conjunto das raízes de um polinômio não nulo e portanto possui um número finito de elementos.

Agora, para cada $x_0 \in \mathbb{C}$ que satisfaz $\mathcal{D}(f)(x) = 0$, existe um número finito de $y \in \mathbb{C}$ tais que $f(x, y) = 0$. E assim, temos que

$$\#(\mathrm{Sing}(C) \cap \mathbb{C}^2) < \infty.$$

Além disso, como C é uma curva algébrica irredutível e a reta no infinito $L_\infty = \mathcal{Z}(x_0)$ intersecta C em um número finito de pontos e segue que

$$\#\mathrm{Sing}(C) < \infty.$$

□

5.2 POLÍGONOS DE NEWTON E EXPANSÃO DE PUISEUX PARA SÉRIES FORMAIS

Considere no plano $\mathbb{R}^2$ um sistema de coordenadas α, β, onde α representa o eixo horizontal e β o eixo vertical, orientados de forma convencional. Seja

$$f(x,y) = \sum_{(\alpha,\,\beta)\in\mathbb{N}^2} A_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

um elemento do anel das séries formais $\mathbb{C}[[x,y]]$. Para cada par $(\alpha,\,\beta)$ com $A_{\alpha,\,\beta} \neq 0$ marcamos no plano o ponto de coordenadas $(\alpha,\,\beta)$. Desta forma, obtemos um conjunto discreto de pontos com coordenadas inteiras não-negativas

$$\Delta(f) = \{(\alpha,\,\beta);\; A_{\alpha,\,\beta} \neq 0\},$$

que chamaremos de diagrama de Newton de f. Somando a cada ponto de $\Delta(f)$ os pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas são números não-negativos, obtemos

$$\Delta'(f) = \Delta(f) + (\mathbb{R}^+)^2 = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Delta(f)} \{(\alpha,\beta) + (\mathbb{R}^+)^2\}.$$

Considere $\bar{\Delta}(f)$ como sendo o menor conjunto convexo que contém $\Delta'(f)$. A fronteira de $\bar{\Delta}(f)$ consiste de duas semirretas paralelas ao eixos e uma reta poligonal unindo as duas semirretas. Tal reta poligonal é chamada de *polígono de Newton* de f, ao qual denotaremos por $N(f)$.

Vamos orientar os polígonos de Newton da seguinte forma: da esquerda para a direita e de cima para baixo. Então, se os vértices de um polígono de Newton $N(f)$ são $P_i = (\alpha_i,\,\beta_i)$, $i = 0,\,\ldots,\,k$, então $\alpha_{i-1} < \alpha_i$ e $\beta_{i-1} > \beta_i$, $i = 1,\,\ldots,\,k$. Neste caso dizemos que $N(f)$ se inicia em P_0 e termina no ponto P_k. A *altura* $h(N(f))$ e a *largura* $w(N(f))$ são, respectivamente, a ordenada máxima e a abscissa máxima dos pontos de $N(f)$. Além disso, se Γ_i é um lado de $N(f)$ com início em $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$ e fim em (α_i, β_i), definimos a altura $h(\Gamma_i) = \beta_i - \beta_{i-1}$ e largura $w(\Gamma_i) = \alpha_i - \alpha_{i-1}$.

Observação 5.8. Se x não divide $f(x,y)$ então $h(N(f))$ é igual a menor potência de y em $f(0,y)$. Além disso, se y não divide $f(x,y)$ então $w(N(f))$ é igual a menor potência de y em $f(x,0)$.

Dada $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ gostaríamos de encontrar um tipo de série em x, $y(x)$, de modo que $f(x,y(x)) = 0$.

Para isso, teremos que trabalhar com séries em potências fracionárias de x.

Seja $n > 1$ um número inteiro, escolha t_n uma variável livre sobre $\mathbb{C}$, e considere o $\mathbb{C}$-monomorfismo de corpos

$$\phi_{1,n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}((x)) & \longrightarrow & \mathbb{C}((t_n)), \\ x & \longmapsto & t_n^n \end{array}$$

onde $\mathbb{C}((x))$ é o corpo de frações do anel $\mathbb{C}[[x]]$. Identificando os elementos de $\mathbb{C}((x))$ com suas imagens pela $\phi_{1,n}$, temos que $x = t_n^n$. Desta forma, podemos escrever $x^{1/n}$ no lugar de t_n e denotaremos por $x^{i/n}$ a i-ésima potência de $x^{1/n}$, obtendo assim a identificação $\mathbb{C}((x^{1/n})) = \mathbb{C}((t_n))$.

Suponha que n' é um inteiro positivo tal que $n' = nd$, $d \in \mathbb{Z}$. Temos o seguinte $\mathbb{C}$-monomorfismo de corpos

$$\phi_{n,n'} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}((x^{1/n})) & \longrightarrow & \mathbb{C}((x^{1/n'})) \\ \sum a_i x^{i/n} & \longmapsto & \sum a_i x^{di/dn} \end{array}.$$

Assim, identificamos cada elemento em $\mathbb{C}((x^{1/n}))$ com suas imagens por $\phi_{n,n'}$ e vamos denotar por $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ a união de todos os elementos de $\mathbb{C}((x^{1/n}))$ após cada identificação. Desta forma, $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ é o conjunto de todas as séries formais de Laurent

$$\sum_{i\geq r} a_i x^{i/n},$$

com r, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Tomemos

$$s = \sum_{i\geq r} a_i x^{i/n}$$

uma série de potências fracionárias. Defina a ordem de x em s como sendo

$$o_x(s) = \begin{cases} \infty & , \text{ se } s = 0 \\ \dfrac{\min\{i;\, a_i \neq 0\}}{n} & , \text{ se } s \neq 0. \end{cases}$$

As séries de potências fracionárias s com $o_x(s) > 0$ são chamada *séries de Puiseux.*

Após reduções simultâneas de todos os expoentes que aparecem em s, podemos assumir que n e $\text{mdc}\{i;\, a_i \neq 0\}$ não tem fatores em comum. Então dizemos que n é a *ordem polidrômica* de s, ao qual vamos denotar por $\nu(s)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $s = \sum_{i \geq r} a_i x^{i/n} \in C((x^{1/n}))$, definimos

$$\sigma_\varepsilon(s) = \sum_{i \geq r} \varepsilon^i a_i x^{i/n},$$

onde $\varepsilon^n = 1$. Cada uma das série $\sigma_\varepsilon(s)$ é dita *conjugada* de s.

Agora, considere $s \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ uma série de Puiseux. Substituindo y por s nos elementos $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, a série resultante $f(x, s)$ é um elemento de $\mathbb{C}[[x^{1/n}]]$. Tal substituição induz um morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\mathbb{C}[[x, y]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x^{1/n}]].$$

Uma série de Puiseux s é dita uma *y-raiz* de f se $f(x, s) = 0$.

De acordo com a definição, as séries da forma $x^\alpha u$, onde $\alpha \in \mathbb{N}$ e u é um invertível, não possui y- raízes. Observemos que estas são as séries cujo polígono de Newton tem altura zero. Além disso, se $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$, então suas y-raízes são raízes ordinárias como um polinômio.

Os próximos lemas darão a relação entre y-raízes e fatores lineares de uma série f.

Lema 5.9. *Uma série de Puiseux $s \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ é uma y-raiz de $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ se e somente se $y - s$ divide f em $\mathbb{C}[[x^{1/n}, y]]$.*

Demonstração. Considere o automorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]] \\ x^{1/n} & \longmapsto & x^{1/n} \\ y & \longmapsto & y + s. \end{array}$$

Sejam $s \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ uma y-raiz de f e

$$g(x,y) = \Psi(f(x,y)) = f(x, y+s).$$

Então, $g(x,0) = f(x,s) = 0$, ou seja,

$$g(x,y) = y\, g_1(x,y) \text{ em } \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]].$$

Compondo g com a inversa de Ψ temos

$$f(x,y) = \Psi^{-1}(g(x,y)) = (y-s)g_1(x, y-s) \text{ em } \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]].$$

A recíproca é óbvia. $\square$

Observação 5.10. Se $s \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$, denotamos por $s = s^1, \ldots, s^\nu$ as ν diferentes conjugações de s. Segue do Lema 5.9, que se s é uma y-raiz de f, então suas conjugadas também são. Além disso, se $g_s = \prod_{i=1}^{\nu}(y - s^i)$, é possível mostrar que $g_s \in \mathbb{C}[[x]][y]$, é uma série irredutível em $\mathbb{C}[[x,y]]$ e $\nu(s) := \nu = h(N(g_s))$ (ver (12), Seção 1.2).

Lema 5.11. *Uma série de Puiseux $s \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ é uma y-raiz de f se e somente se g_s divide f em $\mathbb{C}[[x,y]]$.*

Demonstração. Suponha que $f(x,s) = 0$. Vamos provar por indução em ν que $g_s | f$ em $\mathbb{C}[[x,y]]$. Para $\nu = 1$ o resultado é garantido pelo Lema 5.9. Suponha agora que $f = (y - s^1) \ldots (y - s^i) f_i$, onde $f_i \in \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]]$ e $i < \nu$. Então s^{i+1} é uma y-raiz de f_i. Pelo Lema 5.9, obtemos uma nova igualdade

$$f = (y - s^1) \ldots (y - s^{i+1}) f_{i+1}.$$

Indutivamente chegamos a igualdade

$$f = (y - s^1) \ldots (y - s^\nu) f_\nu = g_s f_\nu.$$

Em seguida basta observar que como f, $g_\nu \in \mathbb{C}[[x^{1/n}, y]]$, então f_ν também pertence. A recíproca é óbvia. $\square$

Dada uma série de potências formal

$$f(x,y) = \sum_{\alpha,\,\beta\geq 0} A_{\alpha,\beta} x^{\alpha} y^{\beta},$$

para determinar uma y-raiz não nula de f utiliza-se um processo indutivo. Começamos testando soluções da forma

$$s = ax^{m/n} + \cdots \,, \tag{5.1}$$

onde m, n são inteiros positivos, $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$ e $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. A parte de menor expoente de $f(x, s(x))$ é também a parte de menor expoente de

$$\sum_{\alpha,\,\beta\geq 0} A_{\alpha,\,\beta} a^{\beta} x^{\alpha+\beta m/n}. \tag{5.2}$$

Reescrevendo a série (5.2) na forma

$$\sum_{k} \left(\sum_{n\alpha+m\beta=k} A_{\alpha,\,\beta} a^{\beta} \right) x^{k/n},$$

vemos que os pares (α,β) que dão origem a um termo de expoente k/n em (5.2) são os pontos de $\Delta(f)$ que estão sobre a reta $n\alpha + m\beta = k$.

Consideremos todas as retas $n\alpha + m\beta = k$, $k \in \mathbb{Z}$, que tem interseção não vazia com $\Delta(f)$. Tome a reta ℓ mais perto da origem, ou seja, com k mínimo. Neste caso, os termos de menor expoente em (5.2) são

$$\sum_{(\alpha,\,\beta)\in\ell\cap\Delta(f)} A_{\alpha,\,\beta} a^{\beta} x^{\alpha+\beta m/n}.$$

A partir deste ponto temos dois casos a considerar.

Caso 1: Não existe lado de $N(f)$ com inclinação $-n/m$. Então existe um único ponto (α_0, β_0) em $\Delta(f) \cap \ell$ e $f(x, s(x))$ tem um único termo de expoente minimal, digamos

$$A_{\alpha_0,\,\beta_0} a^{\beta_0} x^{(n\alpha_0+m\beta_0)/n}.$$

Portanto, ele não pode ser anulado pelos outros termos. Isto quer dizer que $f(x, s(x)) \neq 0$ e portanto não existe y-raiz de $f(x,y)$ com termo inicial de expoente m/n.

Caso 2: Existe um lado de $N(f)$, digamos Γ, com inclinação $-n/m$ (e, portanto, sobre ℓ). O termo de menor expoente em $f(x, s(x))$ é

$$\left(\sum_{(\alpha,\,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\,\beta}a^{\beta}\right) x^{\frac{(n\alpha_0+m\beta_0)}{n}},$$

onde $(\alpha_0, \beta_0) \in \Gamma$. Suponha que o primeiro e o último termo de Γ são $(\alpha_1,\, \beta_1)$ e $(\alpha_0,\, \beta_0)$, respectivamente. Então a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$a^{\beta_0}\left(\sum_{(\alpha,\,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\,\beta}a^{\beta-\beta_0}\right) x^{\frac{(n\alpha_0+m\beta_0)}{n}} = a^{\beta_0}F_{\Gamma}(a)x^{\frac{(n\alpha_0+m\beta_0)}{n}},$$

onde

$$F_{\Gamma}(z) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\beta}z^{\beta-\beta_0} \in \mathbb{C}\,[z]$$

é um polinômio com termo constante não nulo e expoente igual a $h(\Gamma) = \beta_1 - \beta_0$.

As análises anteriores nos ajudam a entender o algoritmo que será usado para determinar uma y-raiz de f.

Seja $f(x, y) = \sum_{\alpha,\,\beta\geq 0} A_{\alpha,\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$. Suponha que seu polígono de Newton $N(f)$ tem altura positiva, pois caso contrário não possui y-raízes. Com o algoritmo de Newton-Puiseux, que descrevemos abaixo, podemos determinar todas as y-raízes de f.

Passo 1: Se $h(N(f)) > 0$, então $N(f)$ ou termina acima do eixo α ou tem pelo menos um lado em α. Inicia-se determinando uma y-raiz $s = s^{(0)}$ de f executando um dos passos abaixo.

Caso 1.1: se $N(f)$ termina acima do eixo x, faça $s^{(0)} = 0$ e pare o algoritmo.

Caso 1.2: escolha um lado Γ de $N(f)$, caso exista, e uma raiz $a \neq 0$ de $F_{\Gamma}(z)$. Suponha que Γ tem equação $n\alpha + m\beta = k$, $\text{mdc}(n, m) = 1$. Faça

$$\begin{aligned} x &= x_1^n \\ y &= x_1^m(a + y_1). \end{aligned}$$

Então, temos que

$$f = \sum_{n\alpha+m\beta\geq k} A_{\alpha,\,\beta}x^{\alpha}y^{\beta} = x_1^k\left(\sum_{n\alpha+m\beta\geq k} A_{\alpha,\,\beta}x_1^{n\alpha+m\beta-k}(a + y_1)^{\beta}\right).$$

Defina $f_1 = x_1^{-k} f \in \mathbb{C}[[x_1, y_1]]$. Tome, como y-raiz de f,

$$s^{(0)} = x^{m/n}(a + s^{(1)})$$

onde $s^{(1)}$ é um elemento de $\mathbb{C}\langle\langle x_1 \rangle\rangle$ a ser determinado.

Agora repetimos o processo considerando x_1, y_1 e f_1. Assim teremos

$$\begin{aligned} s^{(0)} = x^{m/n} \Big(a + x_1^{m_1/n_1}(a_1 + \cdots + x_i^{m_i/n_i}(a_i + s^{(i+1)}) \ldots) = \\ = x^{m/n} \Big(a + x^{m_1/nn_1}(a_1 + \cdots + x^{m_i/n \ldots n_i}(a_i + s^{(i+1)}) \ldots) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pela nossa construção, se $s^{(i)} = 0$, para algum $i \geq 0$, então $s^{(m)} = 0, \forall m,\ m > i$.

É possível mostrar que as séries obtidas pelo algoritmo são y-raízes de f e que são séries de Puiseux (ver (12)).

Como na Observação 5.10, para cada série de Puiseux s de f escreveremos $g_s = \prod_{k=1}^{\nu(s)} (y - s^k)$, onde s^k, $k = 1, \ldots, \nu(s)$, são as séries conjugadas de s. Feito isso temos o seguinte resultado:

Teorema 5.12. *Se $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, então existem séries de Puiseux $s_1, \ldots, s_m$, $m > 0$, tais que f se decompõe, de maneira única a menos da ordem, na forma*

$$f = u\, x^r\, g_{s_1} g_{s_2} \ldots g_{s_m},$$

onde $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, u é um elemento invertível em $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Observação 5.13. No Teorema 5.12 vale a igualdade

$$h(N(f)) = \nu(s_1) + \cdots + \nu(s_m). \tag{5.4}$$

Definição 5.14. Seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Dizemos que uma série $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ é regular de ordem n em y se $\operatorname{ord}_y(f(0, y)) = n$. Isto equivale a dizer que seu polígono de Newton tem altura n e começa no eixo β.

Definição 5.15. Um polinômio

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i \in \mathbb{C}[[x]][y]$$

é chamado uma polinômio de Weierstrass formal em y de grau n se $a_n(x) = 1$ e $a_i(0) = 0$, para $i < n$.

Teorema 5.16 (Teorema da preparação de Weierstrass formal)**.** *Se uma série $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ é regular de ordem n em y, então existe um único polinômio de Weierstrass g em y tal que $f = ug$, onde $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ é invertível. Além do mais, $\mathrm{gr}(g) = n$.*

Demonstração. Usando o Teorema 5.12, temos que f pode ser esrito na forma

$$f = u\, x^r\, g_{s_1} g_{s_2} \dots g_{s_m}.$$

Da regularidade de f concluímos que $r = 0$. Fazendo $g = g_{s_1} g_{s_2} \dots g_{s_m}$, obtemos a existência da decomposição.

Se $n = 0$, então f é invertível e trivialmente segue a unicidade da decomposição. Supondo que $n > 0$, então $m \geq 1$. Se $f = u_1 g_1$, então g_{s_1} tem que dividir g_1. Sendo assim, a unicidade sai por indução em n.

Por último, temos que

$$\mathrm{gr}(g) = \mathrm{ord}_y(g(0,y)) = \mathrm{ord}_y(f(0,y)) = n.$$

□

5.3 SÉRIES DE PUISEUX E O ANEL DAS SÉRIES CONVERGENTES

Considere s uma série de potências fracionárias e suponha que $o_x(s) \geq 0$, então temos que s é escrito na forma

$$s(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i/n}.$$

Dizemos que s é uma *série de potências fracionárias convergente* se e somente se a série de potências

$$s(t^n) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$$

tem raio de convergência não nulo.

Teorema 5.17. *Se $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, ou seja, f é uma série convergente, então todas as y-raízes de f são convergentes.*

Demonstração. Ver em (12), Teorema 1.7.2. □

De forma inteiramente análoga ao caso de séries formais, se s é uma série de Puiseux, escrevemos $g_s = \prod_{s'}(y - s')$, $s' \in \{$ conjugados de $s\}$. Além disso, se s é uma série convergente, então claramente g_s também é convergente. Já que g_s é irredutível em $\mathbb{C}[[x, y]]$, ele também é irredutível em $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Teorema 5.18. *Se $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, então existem séries de Puiseux convergentes $s_1, \ldots, s_m$, $m > 0$, tais que f se decompõe, de maneira única a menos da ordem, na forma*

$$f = u\, x^r\, g_{s_1} g_{s_2} \ldots g_{s_m},$$

onde $r \in \mathbb{Z}$, $r \leq 0$, u é um elemento invertível em $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Demonstração. Ver em (12), Teorema 1.8.3. □

Definição 5.19. Os polinômios de Weierstrass formais cujo os coeficientes são convergentes são chamados de polinômios de Weierstrass.

Observação 5.20. A relação dada em (5.4) continua sendo válida na decomposição dada no Teorema 5.18. Além disse, se f for regular de ordem n, então teremos que

$$n = \nu(s_1) + \cdots + \nu(s_m). \tag{5.5}$$

Teorema 5.21 (Teorema da preparação de Weierstrass para séries convergente)**.** *Se $f \in \mathbb{C}\{x,\, y\}$ é regular de ordem n em y, existe um único polinômio de Weierstrass g em y tal que $f = ug$, onde u é invertível em $\mathbb{C}\{x,\, y\}$ e $\mathrm{gr}(g) = n$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 5.16 e do Teorema 5.18. □

Para estudar localmente uma curva plana C consideraremos um polinômio f que a define como um elemento do anel das séries convergentes $C\{x, y\}$.

5.4 ESTRUTURA LOCAL DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS

Seja C uma curva algébrica plana projetiva irredutível C. Vamos estudar como C se comporta na vizinhança de um ponto $p \in C$. Para facilitar as contas, escolhemos um sistema de coordenadas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de forma que $p = (1 : 0 : 0)$. Pelo Lema 5.6 podemos supor que C possui uma equação em U_0 da seguinte forma:

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

onde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathrm{gr}(a_j(x)) \leq j$ ou $a_j(x) = 0$.

Considere f como um elemento em $\mathbb{C}\{x\}[y]$. Então, pelo Teorema 5.18, podemos fatorar f em produto de fatores irredutíveis:

$$f = f_1 f_2 \cdots f_s, \text{ com } f_i \in \mathbb{C}\{x\}[y], \, \forall i \in \{1, 2, \ldots, f_s.$$

O discriminante de f em $\mathbb{C}[x][y]$ e em $\mathbb{C}\{x\}[y]$ são iguais. Como f é irredutível em $\mathbb{C}[x][y]$, então, pelo Corolário 5.5, o discriminante de f em $\mathbb{C}\{x\}[y]$ satisfaz $\mathcal{D}(f) \neq 0$. Portanto, a fatoração de f em $\mathbb{C}\{x\}[y]$ não contém fatores múltiplos.

Definição 5.22.

(1) Suponha que $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$, $f(0,0) = 0$, $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, então

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\, |x| < \rho,\, |y| < \varepsilon,\, f(x,y) = 0\}$$

é chamado de curva analítica local na vizinhança de $p = (0,0)$.

Se f é irredutível em $\mathbb{C}\{x,y\}$, então V é chamado uma curva analítica local irredutível.

(2) Suponha que $f = f_1^{m_1} \ldots f_s^{m_s}$, onde os f_j's são todos irredutíveis em $\mathbb{C}\{x,y\}$. Então, escrevemos

$$V = m_1 V_1 + \cdots + m_s V_s,$$

onde

$$V_j = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\, |x| < \rho,\, |y| < \varepsilon,\, f_j(x,y) = 0\},$$

para todo $j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, s\}$, $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos.

Cada curva V_j é dita uma componente analítica local irredutível de V.

Observação 5.23. Se $f = f_1 f_2 \cdots f_s$ e $f(0,y) = y^n$, então $f_j(0,y) \not\equiv 0$, $\forall j \in \{1,\ldots,l\}$. Logo, pelo Teorema da Preparação de Weierstrass (ver Teorema 5.21), podemos escrever $f_j = u_j w_j$, onde u_j é invertível em $\mathbb{C}\{x,y\}$ e w_j é um polinômio de Weierstrass, para cada $i = 1,\ldots,s$. Então podemos definir V_j por

$$V_j = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x| < \rho,\ |y| < \varepsilon,\ w_j(x,y) = 0\}.$$

Assim, podemos considerar cada f_j como sendo um polinômio de Weierstrass.

Observação 5.24. Seja $s_i(x) = \sum\limits_{k\geq 0} a_{ki} x^{k/n_i}$ uma expansão de Puiseux de f_i, para cada $i = 1,\ldots,s$. Pelo Teorema 5.17, temos que $s_i(x)$ converge, para cada i. Logo, podemos supor que existe uma vizinhança Δ_i de 0 tal que $\sum\limits_{k\geq 0} a_{ki} x^k$ converge. Portanto, podemos definir as seguintes aplicações holomorfas:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & \Delta_i & \to & \mathbb{C}^2, \\ & t & \mapsto & (t^{n_i}, \sum\limits_{k\geq 0} a_{ki} t^k). \end{array}$$

A função φ_i é dita uma parametrização de V_i.

Pelo Teorema da Função Implícita, $V_i \setminus \{(0,0)\}$ pode ser considerada como uma superfície de Riemann com coordenada holomorfa local x. Assim, como $x = t^{n_i}$, obtemos que a aplicação:

$$\varphi_i : \Delta_i \setminus \{0\} \longrightarrow V \setminus \{(0,0)\}$$

é biholomorfa.(Ver em (21), Capítulo II, Lema 3.2).

5.5 NORMALIZAÇÃO

Nesta seção apresentaremos o conceito de Normalização de uma curva algébrica plana projetiva.

Definição 5.25. Sejam C uma curva algébrica plana projetiva irredutível e $\mathrm{Sing}(C)$ o conjunto de seus pontos singulares. Se existe uma superfície de Riemann compacta $\tilde{C}$ e uma aplicação holomorfa

$$\sigma : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $\sigma(\tilde{C}) = C$,

(2) $\sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C))$ é um conjunto finito,

(3) $\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \longrightarrow C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ é injetiva,

então dizemos que $(\tilde{C}, \sigma)$ é uma normalização de C.

A normalização é única a menos de isomorfismos. Ou seja, se $(\tilde{C}, \tilde{\sigma})$ e $(\tilde{C}', \tilde{\sigma}')$ são duas normalizações de C, então existe uma aplicação biholomorfa

$$\tau : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}',$$

de forma que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \tilde{C} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & & \tilde{C}' \arrow[dl, "\tilde{\sigma}'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada em (21), Teorema 3.3.

Teorema 5.26 (Teorema da normalização)**.** *Dada uma curva algébrica irredutível $C \subseteq \mathbb{P}^2$, existe uma superfície de Riemann compacta $\tilde{C}$ e uma aplicação holomorfa σ tal que $\sigma(\tilde{C}) = C$ e σ é injetiva sobre a imagem inversa do conjunto dos pontos suaves de C.*

Demonstração. Daremos aqui apenas um esboço da prova. Para a prova completa veja (21).

Suponha que C possui apenas um ponto singular q. Trocando C pela parte afim que contém q, podemos supor que $C \subset \mathbb{C}^2$. Além disso, podemos considerar que existem $m > 1$ componentes analíticas locais de C passando por esse ponto. Assim, existem m discos abertos Δ_j $(j = 1, \ldots, m)$ juntamente com aplicações locais φ_j $(j = 1, \ldots, m)$ tais que cada

$$\varphi_j : \Delta_j \setminus \{0\} \longrightarrow C \setminus \{q\}$$

são uma aplicações biholomorfas sobre o conjunto imagem.

Considere a união disjunta $(C \setminus \{q\}) \bigcup \Delta_1$ e a relação de equivalência para os pontos de $p \in \Delta_1$: $p \sim \varphi_1(p)$.

Então, considere

$$(C \setminus \{q\}) \bigcup_{\varphi_1} \Delta_1 = (C \setminus \{q\} \cup \Delta_1)/\sim .$$

Como $\varphi_1 : \Delta_1 \setminus \{0\} \longrightarrow C \setminus \{q\}$ é uma aplicação biholomorfa sobre o conjunto imagem, vemos que $(C \setminus \{q\}) \bigcup_{\varphi_1} \Delta_1$ pode ser dotado com coordenadas holomorfas para ser transformado numa superfície de Riemann.

Prosseguindo desta forma, obtemos a superfície de Riemann:

$$\tilde{C} = (C \setminus \{q\}) \bigcup_{\varphi_1} \Delta_1 \bigcup_{\varphi_2} \Delta_2 \cdots \bigcup_{\varphi_m} \Delta_m.$$

Se o conjunto de pontos singulares $\text{Sing}(C)$ contém mais de um ponto, digamos

$$\text{Sing}(C) = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\},$$

repetimos o processo acima para cada ponto q_i e consideramos a superfície

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= C \setminus \text{Sing}(C) & \textstyle\bigcup_{\varphi_{11}} \Delta_{11} \bigcup_{\varphi_{12}} \Delta_{12} \cdots \bigcup_{\varphi_{1m_1}} \Delta_{1m_1} \\ && \textstyle\bigcup_{\varphi_{21}} \Delta_{21} \bigcup_{\varphi_{22}} \Delta_{22} \cdots \bigcup_{\varphi_{2m_2}} \cdots \\ && \textstyle\cdots \bigcup_{\varphi_{l1}} \Delta_{l1} \bigcup_{\varphi_{l1}} \bigcup_{g_{l2}} \Delta_{l2} \cdots \bigcup_{\varphi_{lm_l}} \Delta_{lm_l}. \end{aligned}$$

A aplicação σ de $\tilde{C}$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é então dada por:

$$\sigma(p) = \begin{cases} p; & p \in C \setminus \text{Sing}(C) \\ \varphi_{rs_r}(p); & p \in \Delta_{rs_r}, \end{cases}$$

onde $1 \leq r \leq l$ e $1 \leq s_r \leq m_r$.

Portanto $\sigma : C \setminus \text{Sing}(C) \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é a normalização de C. $\square$

Pela construção descrita acima, para cada ponto $p \in \text{Sing}(C)$ temos que $\#(\sigma^{-1}(p))$ é o número de componentes locais analíticas de C numa vizinhança de p. Ou seja, é igual ao número de expansões de Puiseux não conjugadas de C próximos à p.

6 A FÓRMULA DO GRAU-GÊNERO DE NOETHER

Vamos apresentar a fórmula do grau-gênero de Noether para curvas algébricas projetivas. Primeiro apresentaremos a demonstração da fórmula para curvas curvas suaves e em seguida para curvas singulares. Em curvas suaves, obtemos que o gênero de uma curva projetiva de grau d é

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Para uma curva singular, obtemos

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta(p)$$

onde $\delta(p)$ é um número inteiro positivo. Esta fórmula é o principal auxílio para buscarmos um grau de uma curva, quando analisarmos a superfície de Riemann que se relaciona com a curva em estudo por meio da normalização.

6.1 COBERTURAS RAMIFICADAS

Seja C uma curva projetiva não-singular em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por um polinômio homogêneo $F(x_0, x_1, x_2)$ de grau $d > 1$. Fazendo uma mudança de coordenadas adequada, podemos assumir que $(0 : 0 : 1) \notin C$. Supondo isso a aplicação:

$$\phi : \begin{cases} C & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longrightarrow & (x_0 : x_1) \end{cases}$$

fica bem definida.

Definição 6.1. O índice de ramificação, $v_\phi(a : b : c)$, de ϕ no ponto $(a : b : c) \in C$ é a multiplicidade de $z = c$ como um zero do polinômio $g(z) = F(a, b, z)$. O ponto $(a : b : c)$ é chamado ponto de ramificação de ϕ se $v_\phi(a : b : c) > 1$.

Lema 6.2. *Sejam $C = \mathcal{Z}(F)$ uma curva não-singular de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que o ponto $(0 : 0 : 1) \notin C$ e $p = (a : b : c) \in C$. Valem as seguintes propriedades:*

(1) $v_\phi(a : b : c) > 1$ se e somente se

$$F(a, b, c) = 0 = \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c),$$

ou seja, $(a : b : c) \in C$ *e a reta tangente a* C *no ponto* $(a : b : c)$ *contém o ponto* $(0 : 0 : 1)$.

(2) $v_\phi(a : b : c) > 2$ *se e somente se*

$$F(a, b, c) = 0 = \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(a, b, c),$$

ou seja, $(a : b : c)$ *é um ponto de inflexão em* C *e a reta tangente a* C *no ponto* $(a : b : c)$ *contém o ponto* $(0 : 0 : 1)$.

Demonstração.

(1) Pela definição de índice de ramificação, temos

$$v_\phi(a : b : c) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{mult}_c(g(z)) > 1.$$

Pela definição de multiplicidade, segue que

$$g(c) = 0 \text{ e } g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(a : b : c) = 0 = F(a : b : c).$$

Portanto, obtemos que

$$v_\phi(a : b : c) > 1 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(a : b : c) = 0 = F(a : b : c).$$

(2) Segue diretamente da definição de índice de ramificação que

$$v_\phi(a : b : c) > 2 \Leftrightarrow \mathrm{mult}_c(g(z)) \geq 2.$$

Pela definição de multiplicidade, segue que

$$F(a : b : c) = \frac{\partial F}{\partial z}(a : b : c) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(a : b : c) = 0.$$

□

Lema 6.3. *O número de pontos na imagem inversa de algum ponto* $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ *por* ϕ *é exatamente*

$$d - \sum_{P \in \phi^{-1}(a:b)} (v_\phi(P) - 1).$$

Em particular, $\phi^{-1}(a : b)$ *contém* d *pontos se e somente se* $\phi^{-1}(a : b)$ *não contém pontos de ramificação de* ϕ.

Demonstração. Um ponto de C está em $\phi^{-1}(a : b)$ se e somente se é da forma $(a : b : c)$ e $F(a, b, c) = 0$. Como $(0 : 0 : 1) \notin C$, então $F(0, 0, 1) \neq 0$. Sem perda de generalidade suponha que $F(0, 0, 1) = 1$. Então, $F(a, b, z)$ é um polinômio mônico de grau d na variável z e pode ser escrito na forma

$$F(a, b, z) = \prod_{1 \leq i \leq r} (z - c_1)^{m_i}$$

onde $c_1, \ldots, c_r$ são números complexos distintos e $m_1, \ldots, m_r$ são inteiros positivos tais que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = d$. Segue que:

$$\phi^{-1}(a : b) = \{(a : b : c_i);\, 1 \leq i \leq r\}.$$

Além disso, o índice de ramificação de ϕ em $(a : b : c)$ é $v_\phi(a : b : c_i) = m_i$. Logo,

$$\begin{aligned} d - \sum_{P \in \phi^{-1}(a:b)} (v_\phi(P) - 1) &= d - \sum_{P \in \phi^{-1}(a:b)} v_\phi(P) + \#\{P; P \in \phi^{-1}(a : b)\} \\ &= d - \sum_{i=1}^{r} m_i + r = d - d + r = d \\ &= \#\phi^{-1}(a : b). \end{aligned}$$

□

Definição 6.4. Seja R o conjunto dos pontos de ramificação de ϕ. O conjunto imagem de R por ϕ, $\phi(R)$, é dito local de ramificação de ϕ e $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ é dita uma cobertura ramificada de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Proposição 6.5. *Sejam C uma curva projetiva plana suave de grau d tal que $(0 : 0 : 1) \notin C$ e $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ a cobertura ramificada de C sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

(1) ϕ tem no máximo $d(d - 1)$ pontos de ramificação.

(2) Se $v_\phi(a : b : c) \leq 2$ para todo $(a : b : c) \in C$ então C tem exatamente $d(d - 1)$ pontos de ramificação.

Demonstração. Suponha que C seja dada por

$$C = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\, F(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

onde $F(x_0, x_1, x_2)$ é um polinômio homogêneo com coeficientes em $\mathbb{C}$ de grau d. Como C é uma curva suave em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ então C é irredutível. De fato, suponhamos que existam polinômios Q_1, $Q_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, tais que

$$F(x_0, x_1, x_2) = Q_1(x_0, x_1, x_2)Q_2(x_0, x_1, x_2). \tag{6.1}$$

Assim, tome um ponto $(a : b : c)$ tal que $Q_1(a : b : c) = Q_2(a : b : c) = 0$. Então $(a : b : c) \in C$, pois

$$0 = F(a, b, c) = Q_1(a, b, c)Q_2(a, b, c).$$

Já que C é uma curva suave podemos supor que

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(a, b, c) \neq 0.$$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(a, b, c) = \frac{\partial Q_1}{\partial x_0}(a, b, c)Q_2(a, b, c) + \frac{\partial Q_2}{\partial x_0}(a, b, c)Q_1(a, b, c) = 0.$$

O que é uma contradição. Então F é um polinômio irredutível e C é uma curva irredutível.

Agora, como $(0 : 0 : 1) \notin C$, então o coeficiente $F(0, 0, 1)$ de x_2^d em $F(x_0, x_1, x_2)$ é não nulo e

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) \neq 0.$$

Logo, o grau do polinômio $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2)$ é $d - 1$ e

$$F(x_0, x_1, x_2) \nmid \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2).$$

A curva D, de grau $d - 1$, definida pelo polinômio $\partial F/\partial x_2(x_0, x_1, x_2)$ não tem componente comum com a curva C. Então pelo Teorema de Bezout, as curvas C e D se intersectam em no máximo $d(d - 1)$ pontos, o que prova o item *(1)*.

Suponhamos, agora que $v_\phi(a : b : c) \leq 2$ para todo $(a : b : c) \in C$. Observe que o conjunto R dos pontos de ramificação de ϕ é dado por $R = C \cap D$. Assim, pelo Teorema de Bezout, basta provarmos que se $(a : b : c)$ pertence a $R = C \cap D$, então $(a : b : c)$ é um ponto não-singular de D e a reta tangente à C e D em $(a : b : c)$ são distintas. Vamos provar por contradição. Suponha que o ponto $(a : b : c) \in R$, ou seja,

$$F(a,b,c) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x_2}(a,b,c).$$

Além disso, suponha que o vetor

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2}(a,b,c), \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b,c), \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2}(a,b,c)\right)$$

é nulo ou um múltiplo escalar do vetor

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial x_1}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial x_2}(a,b,c)\right).$$

Em ambas as situações temos que

$$F(a,b,c) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(a,b,c) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2}(a,b,c) = 0.$$

Logo, $v_\phi(a : b : c) > 2$. Isto é uma contradição, e assim obtemos o item *(2)*. $\square$

Lema 6.6. *Sejam C uma curva plana projetiva suave tal que $(0 : 0 : 1) \notin C$ e ϕ a cobertura ramificada de C sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Aplicando uma transformação projetiva adequada em C podemos assumir que*

$$v_\phi(a : b : c) \leq 2,$$

para todo $(a : b : c) \in C$.

Demonstração. Suponha que $C = \mathcal{Z}(F)$, onde $F(x_0, x_1, x_2)$ é um polinômio homogêneo de grau d. Se $d = 1$, então $v_\phi(a : b : c) = 1$, para todo$(a : b : c) \in C$. Se $d \leq 2$ então C possui no máximo $3d(d-2)$ pontos de inflexão (ver em (26), Apêndice C). Aplicando uma mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ adequada, podemos supor que $(0 : 0 : 1) \notin C$ e não pertence a qualquer reta tangente à C sobre seus pontos inflexão. Assim, pelo item (2) da Observação 6.2, segue o resultado.

$\square$

6.2 FÓRMULA DO GRAU-GÊNERO DE NOETHER PARA CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS SUAVES

Definição 6.7. O conjunto

$$\Delta = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$$

é chamado triângulo unitário em $\mathbb{R}^2$ com os vértices em $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$. Denotamos por

$$\Delta^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x > 0,\, y > 0,\, x + y < 1\}$$

o interior do triângulo unitário.

Definição 6.8. Seja C uma curva plana projetiva suave sobre $\mathbb{C}$. Uma triangulação em C é dada por:

(1) um conjunto finito $V \neq \emptyset$ de pontos de C, chamados de vértices.

(2) um conjunto finito $A \neq \emptyset$ de aplicações contínuas

$$a : [0,1] \longrightarrow C,$$

chamadas de arestas.

(3) um conjunto finito $F \neq \emptyset$ de aplicações contínuas

$$f : \Delta \longrightarrow C,$$

chamados de faces, satisfazendo:

(a) Os vértices são pontos extremantes das arestas, ou seja,

$$V = \{a(0);\, a \in A\} \cup \{a(1);\, a \in A\};$$

(b) se $a \in A$, então a restrição de a no intervalo aberto $(0,1)$ é um homeomorfismo sobre sua imagem em C e sua imagem não contém pontos em V ou na imagem de qualquer outra aresta.

(c) se $f \in F$, então a restrição de f sobre Δ° é um homeomorfismo sobre uma componente conexa K_f de $C \setminus \Gamma$, onde $\Gamma = \bigcup_{a \in A} a([0,1])$. Além disso, se

$$r : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

e

$$\sigma_i : [0,1] \longrightarrow \Delta,$$

para $1 \leq i \leq 3$, são dadas por

$$\begin{aligned} r(t) &= 1-t \\ \sigma_1(t) &= (t,0) \\ \sigma_2(t) &= (1-t,t) \\ \sigma_3(t) &= (0,1-t), \end{aligned}$$

então qualquer $f \circ \sigma_i$ ou $f \circ \sigma_i \circ r$ é uma aresta $a_f^i \in A$ para $1 \leq i \leq 3$;

(d) a aplicação

$$f \longrightarrow K_f$$

de F para o conjunto das componentes conexas de $C \setminus \Gamma$ é uma bijeção;

(e) para qualquer $a \in A$ existe exatamente uma face $f_a^+ \in F$ tal que $a = f_a^+ \circ \sigma_i$ para algum $i \in \{1,2,3\}$ e exatamente uma face $f_a^- \in F$ tal que $a = f_a^- \circ \sigma_i \circ r$ para algum $i \in \{1,2,3\}$.

Observação 6.9. Podemos assumir que os conjuntos A, V e F são finitos pois C é compacta.

Definição 6.10. O número de Euler χ de uma triangulação de uma curva plana complexa projetiva suave C, denotado por $\chi(C)$, é dado por:

$$\chi = \#V - \#A + \#F.$$

A característica de Euler da curva C definida como acima coincide com a característica de Euler de C vista como uma superfície de Riemann (Definição 4.6).

Exemplo 6.11. Uma reta projetiva complexa em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é homeomorfa a uma esfera e assim ela admite uma triangulação com três vértices, três arestas e duas faces (Ver (26), Exemplo 4.14 e Lema 4.1). Desta forma, como $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ pode ser visto como uma reta projetiva em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, temos que:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) &= \#V - \#A + \#F \\ &= 3 - 3 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Lema 6.12. *Seja $\{p_1, \ldots, p_r\} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ com $r \geq 3$. Então existe uma triangulação de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tendo $3r-6$ arestas, $2r-4$ faces e $p_1, \ldots, p_r$ como vértices.*

Demonstração. Veja em (26), Lema 4.21. □

Proposição 6.13. *Sejam C uma curva plana projetiva complexa suave que não contenha o ponto $(0:0:1)$ e $\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : x_1)$ a cobertura ramificada de C em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Suponha que (V, A, F) seja uma triangulação de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que o conjunto de vértices V contenha o local de ramificação $\phi(R)$ de ϕ. Então existe uma triangulação $(\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{F})$ de C tal que:*

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \phi^{-1}(V) \\ \tilde{A} &= \{\tilde{a} : [0,1] \longrightarrow C;\ \tilde{a} \text{ é contínua e } \phi \circ \tilde{a} \in A\} \\ \tilde{F} &= \left\{\tilde{f} : \Delta \longrightarrow C;\ \tilde{f} \text{ é contínua e } \phi \circ \tilde{f} \in F\right\}. \end{aligned}$$

Além disso, valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \#\tilde{V} &= d(\#V) - \sum_{p \in R} (v_\phi(p) - 1) \\ \#\tilde{A} &= d(\#A) \\ \#\tilde{F} &= d(\#F). \end{aligned}$$

Demonstração. Ver em (26), Proposição 4.22. □

Teorema 6.14. *Seja C uma curva plana projetiva complexa suave definida por um polinômio homogêneo de grau d. Se r é um número inteiro positivo, $r \geq d(d-1)$ e $r \geq 3$, então C admite uma triangulação com $rd - d(d-1)$ vértices, $3(r-2)d$ arestas e $2(r-2)d$ faces.*

Demonstração. Pelo Lema 6.6, podemos supor, sem perda de generalidade, que o ponto $(0:0:1) \notin C$. Portanto, a cobertura ramificada

$$\phi : \begin{cases} C & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x : y) \end{cases}$$

fica bem definida. Além disso, podemos supor que o índice de ramificação $v_\phi(a:b:c)$ de ϕ sobre qualquer $(a:b:c) \in C$ satisfaz

$$v_\phi(a:b:c) \leq 2.$$

Assim, pela Proposição 6.5, ϕ tem exatamente $d(d-1)$ pontos de ramificação, ou seja, $\#R = d(d-1)$. Agora, pelo Lema 6.12, podemos escolher uma triangulação $(V,\, A,\, F)$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que $V \supseteq \phi(R)$ e $\#V = r$, $\#A = 3r-6$ e $\#F = 2r-4$.

Daí, pela Proposição 6.13, existe uma triangulação $(\tilde{V},\, \tilde{A},\, \tilde{F})$ de C tal que:

$$\begin{array}{rclcl} \#\tilde{A} & = & d(\#A) & = & 3(r-2)d, \\ \#\tilde{F} & = & d(\#F) & = & 2(r-2)d, \\ \#\tilde{V} & = & d(\#V) & - & \displaystyle\sum_{p \in R} \left(v_\phi(p) - 1\right). \end{array}$$

Como $\#R = d(d-1)$ e $v_\phi(p) = 2$, $\forall p \in R$, obtemos

$$\#\tilde{V} = rd - d(d-1).$$

$\square$

Teorema 6.15 (Fórmula do grau gênero para curvas suaves)**.** *O número de Euler χ e o gênero g de uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por um polinômio homogêneo de grau d são dados por*

$$\chi = d(3-d) \qquad e \qquad g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.14, uma curva projetiva suave C de grau d admite uma triangulação, com $\#V = rd - d(d-1)$, $\#A = 3(r-2)d$ e $\#F = 2(r-2)d$. Assim,

$$\begin{aligned} \chi &= \#V - \#A + \#F \\ &= rd - d(d-1) - 3(r-2)d + 2(r-2)d \\ &= -d^2 + 3d = d(3-d). \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{1}{2}(2-\chi) \\
&= \frac{1}{2}(2-d(3-d)) \\
&= \frac{1}{2}(d-1)(d-2)
\end{aligned}
$$

$\square$

6.3 FÓRMULA DO GRAU-GÊNERO DE NOETHER PARA CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS SINGULARES

Para uma curva projetiva suave de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, mostramos que a relação entre o gênero e o grau da curva é dado pela fórmula:

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Agora vamos determinar uma fórmula para o gênero de uma curva projetiva singular em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ em função de seu grau. Como uma curva projetiva redutível em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é a união finita de curvas irredutíveis, basta apresentarmos o estudo para curvas irredutíveis. Desta forma, considere

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\ F(x_0 : x_1 : x_2) = 0\}$$

uma curva irredutível em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que o grau de F é d.

Já mostramos pelo Teorema da Normalização que existe uma superfície de Riemann compacta e conexa $\tilde{C}$ e uma aplicação sobrejetiva contínua

$$\sigma : \tilde{C} \longrightarrow C,$$

cuja a restrição

$$\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \longrightarrow C \setminus \mathrm{Sing}(C)$$

é um homeomorfismo.

Definimos o gênero da curva C como sendo o gênero de $\tilde{C}$.

Suponha que as coordenadas projetivas foram escolhidas de forma que o ponto $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Defina

$$\phi : \begin{cases} C & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0 : x_1) \end{cases}$$

e considere a composta

$$\psi = \phi \circ \sigma : \tilde{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

como uma cobertura ramificada de $\tilde{C}$ para $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

O conjunto:

$$R = \sigma^{-1}\left\{(a : b : c) \in C;\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(a : b : c) = 0\right\}$$

é dito conjunto de pontos de ramificação de ψ, chamaremos a imagem $\psi(R)$ de local da ramificação de ψ.

Proposição 6.16. *Dada uma triangulação (V, A, F) de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que o local de ramificação $\psi(R)$ de ψ está contido no conjunto de vértices V, existe uma triangulação $(\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{F})$ de $\tilde{C}$ tal que*

$$\tilde{V} = \psi^{-1}(V),$$

$$\#\tilde{A} = d(\#A)$$

e

$$\#\tilde{F} = d(\#F).$$

Demonstração. Ver (26). □

Como feito anteriormente para curvas suaves, se $p = (a : b : c) \in C$ definimos $v_\phi(p)$ como sendo a multiplicidade de $z = c$ como uma raiz do polinômio $g(z) = F(a, b, z)$.

Lema 6.17. *Dada uma triangulação (V, A, F) de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que o local de ramificação $\psi(R)$ de ψ está contido no conjunto de vértices, existe uma triangulação $(\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{F})$ de $\tilde{C}$ tal que:*

$$\#\tilde{V} = d(\#V) - \sum_{p \in \sigma(R)} (v_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} (\#\sigma^{-1}(p) - 1).$$

Demonstração. A triangulação $(\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{F})$ é obtida usando a Proposição 6.16. Sendo assim resta apenas calcular $\#\tilde{V}$.

Pelo Lema 6.3, a imagem inversa sobre

$$\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

de algum ponto $q \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ contém exatamente

$$d - \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} (v_\phi(p) - 1)$$

pontos. Além disso, como $v_\phi(p) = 1$ se $p \notin \sigma(R)$ e $\phi^{-1}(V) \supseteq \sigma(R)$. Então

$$\#\phi^{-1}(V) = d\#V - \sum_{p \in \sigma(R)} (v_\phi(p) - 1)\,.$$

Como

$$\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \longrightarrow C \setminus \mathrm{Sing}(C)$$

é um homeomorfismo e $\phi^{-1}(V)$ contém os pontos singulares de C segue que

$$\begin{aligned}
\#\psi^{-1} &= \#\sigma^{-1}(\phi^{-1}(V)) \\
&= \#\sigma^{-1}(\phi^{-1}(V) \setminus \mathrm{Sing}(C)) + \#\sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \\
&= \#(\phi^{-1}(V) \setminus \mathrm{Sing}(C)) + \#\sigma^{-1}(\mathrm{Sing}(C)) \\
&= d\,\#V - \sum_{p \in \sigma(R)} (v_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \Big(\#\sigma^{-1}\{p\} - 1\Big)\,.
\end{aligned}$$

□

Denotemos por $I_p\,(F, G)$ o índice de interseção das curvas $C = \mathcal{Z}(F)$ e $D = \mathcal{Z}(G)$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ em um ponto p.

Lema 6.18. *Sejam C e D duas curvas projetivas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e p um ponto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Então $I_p(C, D) = 1$ se e somente se p é um ponto não-singular de C e de D e as retas tangentes de C e D no ponto p são distintas.*

Demonstração. Ver em (26), Proposição 3.22. □

Lema 6.19. *Seja $C = \mathcal{Z}(F)$ uma curva projetiva plana sobre $\mathbb{C}$. Considere um sistema de coordenadas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, tal que o ponto $(0:0:1)$ não pertence a C e a nenhuma das retas tangentes de C nos pontos $p \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ que são pontos de inflexão de C. Então se $p \in \sigma(R)$ e $p \notin \mathrm{Sing}(C)$ temos $v_\phi(p) = 2$ e*

$$I_p\left(P, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = 1.$$

Demonstração. Se $p \in \sigma(R)$ e $p \notin \mathrm{Sing}(C)$ temos pelo Lema 6.6 que $v_\phi(p) \leq 2$. Pela demonstração da Proposição 6.5 e com essas hipóteses

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(p) \neq 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial x_2}(p) = 0 = F(p) \Rightarrow v_\phi(p) = 2.$$

Agora pelo Lema 6.18 obtemos que

$$I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = 1.$$

□

Corolário 6.20. *Seja $C = \mathcal{Z}(F)$ uma curva algébrica plana projetiva. Considere o sistema de coordenadas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que o ponto $(0:0:1)$ não pertence a C e a nenhuma das retas tangentes a C nos pontos $p \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ que são pontos de inflexão de C. Então o número de Euler $\chi(\tilde{C})$ de $\tilde{C}$ é dado por:*

$$\chi(\tilde{C}) = d(3-d) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \left[I_p\left(G, \frac{\partial F}{\partial z}\right) - v_\phi(p) + \#\sigma^{-1}(p) \right]$$

Demonstração. Seja (V, A, F) uma triangulação de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Então

$$\#V - \#A + \#F = \chi(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = 2. \tag{6.2}$$

Considere $(\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{F})$ a triangulação de $\tilde{C}$ obtida via Proposição 6.16. Por definição, temos

$$\chi(\tilde{C}) = \#\tilde{V} - \#\tilde{A} + \#\tilde{F}.$$

Pelo Lema 6.17 e pelas hipóteses, obtemos

$$\chi(\tilde{C}) = d\left(\#V - \#A + \#F\right) - \sum_{p \in \sigma(R)} (v_\phi(p) - 1) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \left(\#\sigma^{-1}\{p\} - 1\right). \tag{6.3}$$

Pelo Lema 6.19, segue que

$$\sum_{p\in\sigma(R)\setminus \mathrm{Sing}(C)} (v_\phi(p)-1) = \sum_{p\in\sigma(R)\setminus \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(P,\, \frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Como $\sigma(R) = \mathcal{Z}(F)\cap\mathcal{Z}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ e $\mathrm{Sing}(C)\subseteq\sigma(R)$, segue do Teorema de Bézout que

$$\sum_{p\in\sigma(R)\setminus \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(F,\, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = d(d-1) - \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(x_2,\, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right). \tag{6.4}$$

Substituindo (6.2) e (6.4) em (6.3), obtemos que

$$\chi(\tilde{C}) = d(3-d) + \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)}\left(I_p\left(x_2,\, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) - v_\phi(p) + \#\sigma^{-1}\{p\}\right).$$

□

Definição 6.21. Seja p um ponto singular de uma curva irredutível C dada por

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2)\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\ F(x_0,x_1,x_2)=0\}.$$

Suponha que o sistema de coordenadas usado seja tal que $(0:0:1)$ não pertença a C ou qualquer uma das retas tangentes de C no pontos $p\in C\setminus\mathrm{Sing}(C)$ que são pontos de inflexão de C. Definimos

$$\delta(p) = \frac{1}{2}\left(I_p\left(F,\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) - v_\phi(p) + \#\sigma^{-1}(p)\right).$$

Observação 6.22. O número $\delta(p)$ na definição anterior é um inteiro positivo.

Demonstração. Ver em (5), Seção 9.2. □

Usando que o Corolário 6.20, a definição de $\delta(p)$ e que $\chi(\tilde{C}) = 2-2g$, obtemos a Fórmula de Noether:

Teorema 6.23 (Fórmula de Noether)**.** *O gênero g de uma curva projetiva irredutível C de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é*

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{p\in\mathrm{Sing}(C)}\delta(p).$$

7 CURVAS ALGÉBRICAS INVARIANTES DE SISTEMAS DIFERENCIAIS POLINOMIAIS

Vamos apresentar um estudo sobre o sistema de equações diferenciais complexas;

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,\, y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,\, y) \end{cases} \tag{7.1}$$

onde $P,\, Q \in \mathbb{C}[x,\, y]$ são polinômios de grau m, onde m é um número natural.

Usando o Teorema da Normalização e considerando a diferencial meromorfa

$$\omega = \frac{dx}{P}$$

estudaremos o gênero de uma curva algébrica projetiva C invariante pelo sistema. Observe que sobre a curva C tem-se que

$$\omega = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}.$$

Por fim, apresentaremos uma cota superior para o grau de uma curva algébrica projetiva nodal invariante pelo sistema.

7.1 DIVISOR DE DARBOUX E PONTOS NO INFINITO

Considere o sistema de equações diferenciais complexas dado em (7.1). Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ não tem fatores em comum.

Associamos ao sistema de equações diferenciais (7.1) o campo vetorial em $\mathbb{C}^2$ dado por

$$\tilde{\chi} = P(x,\, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,\, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{7.2}$$

O campo $\tilde{\chi}$ é dito *campo de vetores associado* ao sistema de equações diferenciais (7.1).

Definição 7.1. Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Dizemos que uma função

$$\theta : V \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

é uma solução do sistema (7.1) se para todo $t \in V$ tivermos que

$$\theta'(t) = (P(\theta(t)), Q(\theta(t))).$$

Definição 7.2. Uma curva afim C dada por

$$C = \mathcal{Z}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\},$$

onde $f(x, y)$ é um polinômio com coeficientes complexos, é dita uma curva invariante por (7.1) se para qualquer solução do sistema da forma

$$\theta : B(0, r) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

com $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, que satisfaz $f(\theta(0)) = 0$ tivermos que $f(\theta(t)) = 0$, para todo $t \in B(0, r)$.

Definição 7.3. Sejam $U \subset \mathbb{C}^2$ um conjunto aberto e $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. Dizemos que F é uma integral primeira para o sistema de equações diferenciais (7.1) se F é constante ao longo das soluções de (7.1) contidas em U. Isto é, se θ é uma solução, então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $F(\theta(t)) = c$.

Proposição 7.4. *Uma função holomorfa $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma integral primeira do sistema (7.1)em U se, e somente se, $\tilde{\chi}(F) = 0$ em U.*

Demonstração. Sejam $p \in U$ e $\theta(t)$ uma solução do sistema (7.1) definida em um aberto I contendo 0, tal que $\theta(0) = p$. Se F é uma integral primeira de $\tilde{\chi}$ temos que $F(\theta(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$ e para todo $t \in I$ tal que $\theta(t) \in U$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left[F(\theta(t))\right] \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t))\right)\theta'(t) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)\right)(P(\theta(t), Q(\theta(t)))) \\
&= P(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)) + Q(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)).
\end{aligned}$$

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$\tilde{\chi}(F)(p) = P(p)\frac{\partial F}{\partial x}(p) + Q(p)\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0.$$

Como existe uma solução do sistema (7.1) passando por cada ponto p de U, concluímos que

$$\tilde{\chi}(F)(p) = 0, \, \forall p \in U.$$

Logo, $\tilde{\chi}(F) = 0$ em U. Reciprocamente, se $\tilde{\chi}(F) = 0$ em U, então para toda solução $\theta : I \longrightarrow U$ temos que,

$$\frac{d}{dt}\left[F(\theta(t))\right] = P(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial x}(\theta(t)) + Q(\theta(t))\frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)) = \tilde{\chi}(F)(\theta(t)) = 0, \, \forall t \in U$$

Portanto, $F(\theta(t)) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$ e para todo $t \in I$. □

Proposição 7.5. *Seja $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio irredutível. A curva $C = \mathcal{Z}(f)$ é uma curva algébrica invariante pelo sistema (7.1) se, e somente se, existe um polinômio $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, de grau $m - 1$, tal que*

$$\tilde{\chi}(f) = P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Demonstração. Suponha que C seja um curva algébrica invariante por (7.1). Sejam $p \in \mathbb{C}^2$ e $\theta : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ uma solução do sistema de equações diferenciais (7.1) passando por p. Então, $f(\theta(t)) = 0$, para todo $t \in B(0, r)$. Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\left[f(\theta(t))\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t)\right)\theta'(t) = 0, \qquad \forall t \in B(0, r)$$

Como $\theta'(t) = (P(\theta(t)), Q(\theta(t)))$, temos que:

$$P(\theta(t))\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)) + Q(\theta(t))\frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t)) = 0, \, \forall t \in B(0, r).$$

Portanto, o polinômio

$$P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{7.3}$$

se anula em todos os pontos da curva C. Como por hipótese o polinômio f é irredutível, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert,

$$I(\mathcal{Z}(f)) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle \, .$$

Logo, como o polinômio (7.3) pertence à $I(\mathcal{Z}(f))$, existe $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$\tilde{\chi}(f) = P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Comparando os graus do lado esquerdo e direito da igualdade anterior vê-se que o grau de K é $m-1$.

Reciprocamente, suponha que exista $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que

$$\tilde{\chi}(f) = P(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Considere $\theta : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ uma solução do campo $\tilde{\chi}$, tal que $f(\theta(0)) = 0$. Então, em $B(0,r)$, temos que

$$\frac{d}{dt}\left[f(\theta(t))\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\theta(t))\right)\theta'(t) = K(\theta(t))f(\theta(t)).$$

Portanto, $f(\theta(t)) = ae^{g(t)}$, para algum $a \in \mathbb{C}$ e alguma função $g(t)$. Assim, como $f(\theta(0)) = 0$, obtemos que $a = 0$. Portanto, $f(\theta(t)) = 0$, $\forall t \in B(0,r)$. $\square$

Definição 7.6. Um polinômio $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ é chamado integral algébrica parcial do sistema (7.1) se existe um polinômio $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{7.4}$$

O polinômio $K(x,y)$ na equação (7.4) é chamado de *cofator*.

Lema 7.7. *Seja $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ uma integral algébrica parcial do sistema (7.1) com cofator $K(x,y)$.*

(1) Se $K(x,y) \equiv 0$ então f é uma integral primeira do sistema (7.1).

(2) Se $f(x,y)$ é redutível e $f = f_1^{m_1}\dots f_l^{m_l}$, onde $f_k \in \mathbb{C}[x,y]$ é irredutível se $k = 1,\dots,l$ e $f_i \neq f_j$ se $i \neq j$, então os polinômios f_k são integrais parciais do sistema (7.1).

Demonstração.

(1) Suponha que $K(x,y) \equiv 0$ na equação (7.4). Desta forma temos

$$P(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{7.5}$$

Se $\theta(t) = (x(t), y(t))$ é uma solução de (7.1), temos que

$$P(x,y) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{dy}{dt}. \tag{7.6}$$

Assim, substituindo (7.6) em (7.5) e aplicando a regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left[f(x(t), y(t))\right] = 0.$$

Logo, f é constante ao longo de $\theta(t)$.

(2) Considere $f = f_1 f_2$, com $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x,y]$. Como f satisfaz o sistema (7.1), temos:

$$P(x,y)\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + Q(x,y)\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = K f_1 f_2.$$

A igualdade acima pode ser reescrita na forma:

$$f_1\left(P(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + f_2\left(P(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = K f_1 f_2.$$

Como $\operatorname{mdc}(f_1, f_2) = 1$, concluímos que existem polinômios $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_2$ tais que:

$$P(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial y} = \tilde{K}_2 f_2$$

e

$$P(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial y} = \tilde{K}_1 f_1.$$

O caso geral é obtido por indução no número de polinômios irredutíveis presentes na decomposição de $f(x,y)$.

□

Para o que nos propomos a trabalhar neste capítulo, estudar as curvas invariantes pelo sistema (7.1) ou, equivalentemente, as integrais parciais algébricas de (7.2), precisaremos trabalhar em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Portanto, será necessário conhecermos o sistema (7.1) ou o campo vetorial (7.2) nos abertos U_0, U_1 e U_2 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Para esta análise, vamos considerar que (x,y) são as coordenadas de U_0 e que campo $\tilde{\chi}$ é a expressão local em U_0 de um campo vetorial χ definido em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, ou seja, $\tilde{\chi} = \chi\big|_{U_0}$

No que segue vamos considerar que $P(x,y) = \sum_{i=0}^{m} P_i$, $Q(x,y) = \sum_{i=0}^{m} Q_i$, onde P_i, Q_i são polinômios homogêneos de grau i, para cada $i \in \{0, \dots, m\}$, e que

$$R_{m+1} := x\, Q_m(x,y) - y\, P_m(x,y) \neq 0. \tag{7.7}$$

Além disso, vamos supor que x, y são as coordenadas locais do aberto U_0 de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Usando as relações entre campos vetoriais e 1-formas apresentadas na Seção 3.3, concluímos que o campo χ, que é a forma global do campo (7.2), é

$$\chi = x_0^m\, P\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0^m\, Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{7.8}$$

Por (3.4) obtemos que a forma local de χ em U_1, com coordenadas locais $u = x_0/x_1$ e $v = x_2/x_1$, é

$$\chi\Big|_{U_1} = -u^{m+1} P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \left\{u^m\, Q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - v\, u^m P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right\} \frac{\partial}{\partial v}. \tag{7.9}$$

Note que em $U_0 \cap U_1$ temos $u = 1/x$ e $v = y/x$.

Agora usando (3.5), concluímos que forma local de χ em U_2, com coordenadas locais $w = x_0/x_2$ e $z = x_1/x_2$, é

$$\chi\Big|_{U_2} = -w^{m+1} Q\left(\frac{z}{w}, \frac{1}{w}\right) \frac{\partial}{\partial w} + \left\{w^m P\left(\frac{z}{w}, \frac{1}{w}\right) - z\, w^m Q\left(\frac{z}{w}, \frac{1}{w}\right)\right\} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Observação 7.8. As definições e os resultados apresentados anteriormente para $\tilde{\chi}$ são válidas também para as formas locais $\chi\Big|_{U_1}$ e $\chi\Big|_{U_2}$.

Quando consideramos campos vetoriais em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a Definição 7.6 toma a seguinte forma:

Definição 7.9. Uma curva projetiva $C = \mathcal{Z}(F)$, onde $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, é dita invariante por um campo vetorial

$$\chi = F_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde F_0, F_1, F_2 são polinômios nulos ou homogêneos de grau m em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, se existe um polinômio $K(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que

$$\chi(F) = F_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + F_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = KF. \tag{7.10}$$

É fácil ver que se $f(x,y)$ é uma integral algébrica parcial de $\chi\big|_{U_0}$, de grau n, com cofator K, então a curva projetiva plana C definida por

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n\, f\,(x_1/x_0, x_2/x_0) = 0$$

é invariante pelo campo χ com cofator $\tilde{K} = x_0^{m-1} K\,(x_1/x_0, x_2/x_0)\,.$

Considere a expressão local do campo vetorial (7.2) em U_1 dada em (7.9). Denotaremos por:

$$\begin{aligned} A(u,v) &= -u^{m+1} P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right), \\ B(u,v) &= u^m \left\{ Q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - vP\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\chi\big|_{U_1} = A(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + B(u,v)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Seja $C = \mathcal{Z}(f(x,y))$ uma curva invariante pelo sistema (7.1), com cofator $K(x,y)$. Então a curva $\tilde{C}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n\, f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

é invariante pelo campo χ com cofator $\tilde{K} = x_0^{m-1} K\,(x_1/x_0, x_2/x_0)\,.$ O nosso próximo passo será descrever o polinômio que define $\tilde{C} \cap U_1$ e mostrar que ela é invariante por $\chi\big|_{U_1}$. Vale notar que $C = \tilde{C} \cap U_0$.

Escrevendo f na forma $f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x,y)$, onde cada $f_i(x,y)$ é um polinômio homogêneo de grau i, $i = 0,1,\ldots,n$, obtemos

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n\, f_0 + x_0^{n-1} f_1(x_1,x_2) + \cdots + x_0 f_{n-1}(x_1,x_2) + f_n(x_1,x_2).$$

Proposição 7.10. *Seguindo a notação anterior, temos que $\tilde{C} \cap U_1$ é uma curva definida por $g(u,v) = 0$ e é invariante por $\chi\big|_{U_1}$ com cofator $\tilde{K}(u,v)$, onde*

$$g(u,v) = u^n\, f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

e

$$\tilde{K}(u,v) = u^{m-1} K\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - u^m\, n\, P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right).$$

Demonstração. Inicialmente observamos que $\tilde{C} \cap U_1$ é dada por

$$g(u,v) = F(u,1,v) = u^n\, f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

onde $u = x_0/x_1$ e $v = x_2/x_1$.

$$\begin{aligned}
&\chi\Big|_{U_1}\left(u^n\, f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right) = \\
&A(u,v)\left\{nu^{n-1}\, f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + u^n\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{u^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{v}{u^2}\right)\right]\right\} + B(u,v)u^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y} = \\
&\quad - u^{m+1}P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\left\{nu^{n-1}\, f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + u^n\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{u^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{v}{u^2}\right)\right]\right\} + \\
&\qquad + u^m\left[Q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - v\, P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right] u^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y} = \\
&\qquad\qquad = \left[u^{m-1}K\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - nu^m P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right] u^n f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\chi\Big|_{U_1}(g) = \left[u^{m-1}K\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) - nu^m P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)\right] g.$$

□

Observação 7.11. Dizemos que a equação

$$g(u,v) = u^n f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = u^n\, f_0 + u^{n-1}f_1(1,v) + \cdots + uf_{n-1}(1,v) + f_n(1,v) = 0$$

representa a curva C próximo à reta no infinito $L_\infty = \mathcal{Z}(u)$. Da mesma forma, dizemos que o campo $\chi\Big|_{U_1}$ representa o campo vetorial de (7.1) próximo a reta no infinito $L_\infty = \mathcal{Z}(u)$.

Sejam $D_i = (x_i : y_i)$, $i = 1, \ldots, m+1$, as raízes em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ do polinômio homogêneo R_{m+1} definido em (7.7). Escolhendo um sistema de coordenadas adequado em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, se necessário, podemos supor que $x_i y_i \neq 0$, se $i = 1, \ldots, m+1$. Portanto, podemos supor, que as raízes da equação (7.7) são

$$D_i = (1 : z_i),\ z_i \in \mathbb{C} \text{ e } z_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, m+1.$$

Definição 7.12. $D = \sum_{i=1}^{m+1} D_i$ é chamado divisor de Darboux do sistema (7.1).

O suporte de D é o conjunto definido por $\mathrm{supp}(D) = \{D_1, \ldots, D_{m+1}\}$.

Observação 7.13. Cada ponto $D_i = (1 : z_i)$ corresponde ao ponto $(0 : 1 : z_i)$ de L_∞ via o isomorfismo $L_\infty \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dado por

$$(0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_1 : x_2).$$

De maneira análoga, cada ponto da forma $(0, v_i)$ corresponde ao ponto $(0 : 1 \; : \; v_i)$ de U_1, via o isomorfismo $U_1 \simeq \mathbb{C}^2$ definido por

$$(x_0 : 1 : x_2) \longmapsto (x_0, x_2).$$

Lema 7.14. *Um ponto $(0, v_0) \in U_1$ é um ponto singular de $\chi\big|_{U_1}$ se e somente $R_{m+1}(1, v_0) = 0$.*

Demonstração. Os pontos singulares de $\chi\big|_{U_0}$ perto da reta no infinito, ou seja, em $U_1 \cap L_\infty$ são os pontos da forma $(0, v_0)$ tais que $A(0, v_0) = B(0, v_0) = 0$. Já que

$$\begin{aligned} A(u, v) &= -u^{m+1}P_0(1, v) - u^m P_1(1, v) - \cdots - uP_m(1, v), \\ B(u, v) &= u^m Q_0(1, v) + \cdots + Q_m(1, v) - v(u^m P_0(1, v) + \cdots + P_m(1, v)), \end{aligned}$$

concluímos que $A(0, v_0) = B(0, v_0) = 0$ se e somente se

$$R_{m+1}(1, v_0) = Q_m(1, v_0) - vP_m(1, v_0) = 0.$$

□

Proposição 7.15. *Os pontos $D_i = (1 : z_i) \in D$, $i = 1, \ldots, m+1$ são os pontos singulares do sistema (7.1) no infinito.*

Demonstração. A forma local do campo χ em U_1 representa o campo vetorial (7.2) próximo ao infinito, ou seja, em $U_1 \cap L_\infty$. Além disso, a representação de cada D_i em coordenadas projetivas é $D_i = (0 : 1 : z_i)$. Logo, a representação de D_i em U_1 será $(0, z_i)$. Portanto, o resultado segue diretamente do lema anterior.

□

Vamos mostrar que o suporte do divisor de Darboux D contém todos os possíveis pontos no infinito de cada curva algébrica invariante pelo sistema (7.1). Temos que

$$L_\infty = \{(0 : x_i : y_i); (x_i : y_i) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

é a reta no infinito.

Denotaremos por I_f o conjunto de pontos no infinito de uma curva algébrica afim C definida por $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é uma integral algébrica parcial do sistema (7.1).

Observação 7.16. Escreva f na forma

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_n(x, y),$$

onde f_i é um polinômio homogêneo de grau i e seja

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^n f_0(x_1, x_2) + x_0^{n-1} f_1(x_1, x_2) + \cdots + f_n(x_1, x_2)$$

a homogeneização de f. Os pontos de C no infinito são da forma $(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e tais que $f_n(x_1, x_2) = 0$, ou seja,

$$I_f = \{(0 : x : y) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\ f_n(x, y) = 0\}.$$

Teorema 7.17. *Sejam $f \in \mathbb{C}[x, y]$ e $C = \mathcal{Z}(f(x, y))$ uma curva algébrica invariante pelo sistema (7.1) (ou equivalentemente, f é uma integral algébrica parcial do sistema (7.1)). Então,*

$$I_f \subset supp(D),$$

onde D é o divisor de Darboux do sistema (7.1).

Demonstração. Considerando os fatores homogêneos de maior grau em ambos os lados da igualdade (7.4) obtemos que

$$P_m \frac{\partial f_n}{\partial x} + Q_m \frac{\partial f_n}{\partial y} = k_{m-1} f_n. \tag{7.11}$$

Para termos $I_f \subset \mathrm{supp}(D)$, basta que valha a afirmação: $f_n(x_0, y_0) = 0$ então $(x_0, y_0) \in \mathrm{supp}(D)$. Isso por sua vez, equivale a $R_{m+1}(x_0, y_0) = 0$.

Podemos escrever a expansão de Taylor do polinômio $f_n(x, y)$ em torno do ponto (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = 0$ na forma:

$$\begin{aligned} f_n(x, y) = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial^r f_n}{\partial x^{r-j} \partial y^j}(x_0, y_0)(x - x_0)^{r-j}(y - y_0)^j + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial^n f_n}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0)(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j, \end{aligned} \tag{7.12}$$

onde $r = \mathrm{ord}_{f_n}(x_0, y_0)$ e $1 \leq r \leq n$.

Agora, façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x &= x_0 + x_1 \\ y &= y_0 + y_1. \end{cases}$$

Daí, a equação (7.12) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} f_n(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial^r f_n}{\partial x_1^{r-j} \partial y_1^j}(x_0, y_0) {x_1}^{r-j} {y_1}^j + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial^n f_n}{\partial {x_1}^{n-j} \partial {y_1}^j}(x_0, y_0) {x_1}^{n-j} {y_1}^j. \quad (7.13) \end{aligned}$$

Observemos que, para cada $i \in \{r, \ldots, n\}$, o termo

$$\frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial^i f_n}{\partial {x_1}^{i-j} \partial {y_1}^j}(x_0, y_0) {x_1}^{i-j} {y_1}^j$$

pode ser reescrito (ver em (24)) na forma

$$\frac{1}{n - i!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{n-i} f_n(x_1, y_1).$$

Assim sendo, escrevendo $F(x_1, y_1) := f_n(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ e

$$F_i(x_1, y_1) := \frac{1}{n - i!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_0 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{n-i} f_n(x_1, y_1),$$

obtemos

$$F(x_1, y_1) = \sum_{i=r}^{n} F_i(x_1, y_1), \text{ com } r \geq 1. \quad (7.14)$$

Segue diretamente da definição de F e da mudança de variáveis que $F_i(x_1, y_1)$ é um polinômio homogêneo de grau i para todo $i \in \{r, r + 1, \ldots, n\}$.

Como $r \geq 1$ temos que $F_r \not\equiv$ constante. Temos também que

$$
\begin{aligned}
x_0\frac{\partial F_r}{\partial x_1} + y_0\frac{\partial F_r}{\partial y_1} =& \\
&= x_0\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r} f_n(x_1,y_1)\right)+ \\
&+ y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r} f_n(x_1,y_1)\right)= \\
&= \frac{x_0}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r}\frac{\partial}{\partial x_1}f_n(x_1,y_1)+ \\
&+ \frac{y_0}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r}\frac{\partial}{\partial y_1}f_n(x_1,y_1)= \\
&= \frac{1}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r}\left[x_0\frac{\partial f_n(x_1,y_1)}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial f_n(x_1,y_1)}{\partial y_1}\right]= \\
&= \frac{1}{(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-r}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)f_n(x_1,y_1)= \\
&= \frac{n-r+1}{(n-r+1)(n-r)!}\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+y_0\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-(r-1)} f_n(x_1,y_1)= \\
&= (n-r+1)F_{r-1}(x_1,y_1)=0.
\end{aligned}
$$

Podemos reescrever a equação (7.11) em função de (x_1, y_1) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
P_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial f_n}{\partial x}(x_0+x_1,y_0+y_1)+Q_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial f_n}{\partial y}(x_0+x_1,y_0+y_1) = \\
= k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)f_n(x_0+x_1,y_0+y_1). \quad (7.15)
\end{aligned}
$$

Observe ainda que,

$$
\begin{aligned}
F(x_1,y_1) &= f_n(x_0+x_1,y_0+y_1) \\
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,y_1) &= \frac{\partial f_n}{\partial x}(x_0+x_1,y_0+y_1) \qquad (7.16)\\
\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1,y_1) &= \frac{\partial f_n}{\partial y}(x_0+x_1,y_0+y_1)
\end{aligned}
$$

Substituindo as relações (7.16) na equação (7.15), obtemos

$$P_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,y_1)+Q_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1,y_1)+ \\ -k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)F(x_1,y_1)=0. \quad (7.17)$$

Como f_n é um polinômio homogêneo de grau n em (x,y) vale a igualdade

$$x\frac{\partial f_n}{\partial x}+y\frac{\partial f_n}{\partial y}=nf_n. \quad (7.18)$$

Donde obtemos,

$$(x_0+x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,y_1)+(y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1,y_1)=nF(x_1,y_1),$$

ou ainda,

$$F(x_1,y_1)=\frac{1}{n}\left((x_0+x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}+(y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}\right). \quad (7.19)$$

Substituindo (7.19) em (7.17), obtemos:

$$P_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,y_1)+Q_m(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1,y_1)+ \\ -k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{1}{n}\left((x_0+x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,y_1)+(y_0+y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1,y_1)\right) \\ =0.$$

Assim,

$$\Big[P_m(x_0+x_1,y_0+y_1)-k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{1}{n}x_0+ \\ -k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{1}{n}x_1\Big]\frac{\partial F}{\partial x_1}+ \\ +\Big[Q_m(x_0+x_1,y_0+y_1)-k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{1}{n}y_0+ \\ -k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)\frac{1}{n}y_1\Big]\frac{\partial F}{\partial y_1}=0. \quad (7.20)$$

Considerando

$$N_1(x_1,y_1)=P_m(x_0+x_1,y_0+y_1)-P_m(x_0,y_0)-\frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)+ \\ +\frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0)-\frac{x_1}{n}k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)$$

e

$$N_2(x_1,y_1) = Q_m(x_0+x_1,y_0+y_1) - Q_m(x_0,y_0) - \frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1)+$$
$$+\frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) - \frac{y_1}{n}k_{m-1}(x_0+x_1,y_0+y_1),$$

podemos reescrever (7.20) como

$$\left([c_1+N_1(x_1,y_1)]\frac{\partial}{\partial x_1} + [c_2+N_2(x_1,y_1)]\frac{\partial}{\partial y_1}\right)(F_r+\cdots+F_n) = 0, \tag{7.21}$$

sendo $c_1 = P_m(x_0,y_0) - \frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0)$ e $c_2 = Q_m(x_0,y_0) - \frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0)$.

Temos que

$$N_1(0,0) = P_m(x_0+0,y_0+0) - P_m(x_0,y_0) - \frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0+0,y_0+0)+$$
$$+\frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) - \frac{0}{n}k_{m-1}(x_0+0,y_0+0) = 0$$

$$N_2(0,0) = Q_m(x_0+0,y_0+0) - Q_m(x_0,y_0) - \frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0+0,y_0+0)+$$
$$+\frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) - \frac{0}{n}k_{m-1}(x_0+0,y_0+0) = 0.$$

Agora, precisamos analisar dois casos. A saber:

CASO 1: $c_1 = c_2 = 0$. Pela equação (7.21), temos que

$$P_m(x_0,y_0) = \frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad Q_m(x_0,y_0) = \frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0).$$

Segue que

$$R_{m+1}(x_0,y_0) = x_0Q_m(x_0,y_0) - y_0P_m(x_0,y_0) =$$
$$x_0\frac{y_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) - y_0\frac{x_0}{n}k_{m-1}(x_0,y_0) = 0.$$

Portanto, $(x_0 : y_0) \in supp(D)$.

CASO 2: $(c_1,c_2) \neq (0,0)$

Da equação (7.21), concluímos que

$$c_1\frac{\partial F_r}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial F_r}{\partial y_1} = 0,$$

pois o grau de $c_1\dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} + c_2\dfrac{\partial F_r}{\partial y_1}$ é menor ou igual a $r-1$ e as demais parcelas (7.21) tem grau maior ou igual à r. Assim, temos que:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \cdot \left(\dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_r}{\partial y_1}\right) & = & 0 \\ \\ (c_1, c_2) \cdot \left(\dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_r}{\partial y_1}\right) & = & 0. \end{cases}$$

Como $\left(\dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_r}{\partial y_1}\right) \neq 0$, segue que os vetores (x_0, y_0) e (c_1, c_2) são colineares. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = c_1 y_0 - c_2 x_0 = & \\ & = y_0\left(P_m - \frac{x_0}{n}k_{m-1}\right) - x_0\left(Q_m - \frac{y_0}{n}k_{m-1}\right) = \\ & \qquad\qquad = y_0 P_m - x_0 Q_m = -R_m(x_0, y_0), \end{aligned}$$

ou seja, $(x_0 : y_0) \in supp(D)$. $\square$

Decorre diretamente do Teorema 7.17 o seguinte resultado:

Corolário 7.18. *Sejam $D = D_1 + D_2 + \cdots + D_{m+1}$ o divisor de Darboux do sistema (7.1) e $l_i = a_i x + b_i y$, a_i, $b_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ um conjunto de formas lineares tal que $l_i(D_i) = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Então existem inteiros não-negativos $n_1, \ldots, n_{m+1}$ tais que $\sum_{i=1}^{m+1} n_i = n$ e*

$$f_n(x, y) = \prod_{i=1}^{m+1} (l_i(x, y))^{n_i}.$$

Demonstração. Como f_n é homogêneo ele pode ser escrito na forma

$$f_n(x, y) = \prod_{i=1}^{n} s_i(x, y),$$

onde $s_i(x, y)$ são polinômios homogêneos de grau 1. Usando o Teorema (7.17) concluímos que $s_i(x, y)$ é igual a algum dos l_j's. Donde segue o resultado. $\square$

7.2 CURVAS SUAVES

Seja $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica projetiva. Suponha que C seja dada em U_0, por $f(x,y)=0$, onde o grau de f é n e que f é uma integral primeira parcial do sistema (7.1). Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x), \text{ com } a_i(x) \in \mathbb{C}[x],\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Podemos ainda supor, sem perda de generalidade que $(0:0:1) \notin C$. Considere a função holomorfa:

$$\phi : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ (x_0:x_1:x_2) & \longmapsto & (x_0:x_1). \end{array}$$

Como definido na Seção 6.1 (Definição 6.1), seja $v_\phi(p)$ o índice de ramificação de ϕ num ponto $p \in C$.

Definimos o *divisor de ramificação* de C por

$$R = \sum_{p \in C} (v_\phi(p) - 1)\, p.$$

Observe que $R \in \mathrm{Div}(C)$ e pode ser decomposto na forma $R = R_1 + R_2$, onde

$$R_1 = \sum_{p \in C \cap L_\infty} (v_\phi(p) - 1)\, p \quad \text{ e } \quad R_2 = \sum_{C \cap U_0} (v_\phi(p) - 1)\, p.$$

Lema 7.19. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica suave. Suponha que $C \cap U_0$, definida por $f(x,y)=0$, seja um curva invariante pelo sistema (7.1). Então $\mathrm{gr}(R_1) \leq n-1$, onde n é o grau de f.*

Demonstração. Seja $f = f_0 + \cdots + f_n$ a decomposição de f em componentes homogêneas. Pelo Corolário 7.18, sabemos que

$$f_n(x,y) = \prod_{i=1}^{m+1} (l_i(x,y))^{n_i}, \tag{7.22}$$

onde $\sum_{i=1}^{m+1} n_i = n$, $m+1 \leq n$, $m \geq 1$ e $l_i(x,y)$ são polinômios homogêneos lineares para todo $i \in \{1,2,\ldots,m+1\}$. Assim, temos que $\#\{p;\, p \in C \cap L_\infty\} \leq m+1$.

Se $F(x_0,x_1,x_2) = x_0^n\, f\,(x_1/x_0, x_2/x_0)$ e $p = (0:a:b) \in C \cap L_\infty$, então $C = \mathcal{Z}(F)$ e $F(0,a,z) = f_n(a,z)$. Portanto, segue da definição que $v_\phi(p)$ coincide com a multiplicidade de $z = b$ como raiz de $f_n(a, z)$. Assim, $(a : b) \in I_f \subseteq \operatorname{supp}(D)$, $l_i(a, b) = 0$ e da decomposição dada em (7.22) , obtemos:

$$\sum_{p \in C \cap L_\infty} v_\phi(p) = \sum_{i=1}^{m+1} n_i = n.$$

Portanto, como $m \geq 1$, concluímos que

$$\operatorname{gr}(R_1) = \sum_{p \in C \cap L_\infty} (v_\phi(p) - 1) = \sum_{p \in C \cap L_\infty} v_\phi(p) - (\#\{p;\, p \in C \cap L_\infty\}) = n - m - 1 \leq n - 1.$$

$\square$

Lema 7.20. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica suave. Suponha que $C \cap U_0$, definida por $f(x, y) = 0$, seja uma curva invariante pelo sistema (7.1) de grau n. Então,* $\operatorname{gr}(R_2) = n^2 - n - \operatorname{gr}(R_1)$.

Demonstração. Se g é o gênero da curva C, então, pelo Teorema 6.15, temos

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Pela fórmula de Riemann-Hurwitz (ver em (21), Teorema 8.5) temos

$$g = \frac{\operatorname{gr}(R)}{2} - n + 1.$$

Logo,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{\operatorname{gr}(R) - 2n + 2}{2}.$$

Portanto, $\operatorname{gr}(R) = n^2 - n$.

Por outro lado, temos

$$\operatorname{gr}(R) = \sum_{p \in C} (v_\phi(p) - 1) = \operatorname{gr}(R_1) + \operatorname{gr}(R_2).$$

Logo, $\operatorname{gr}(R_2) = n^2 - n - \operatorname{gr}(R_1)$. $\square$

Agora vamos analisar o divisor R_2. Se $p = (x_0, y_0) \in \operatorname{supp}(R_2)$, então $\partial f / \partial y(x_0, y_0) = 0$, pois é um ponto de ramificação. Além disso, vale a relação

$$P(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + Q(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{7.23}$$

Lema 7.21. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica suave. Suponha que $C \cap U_0$, definida por $f(x,y) = 0$, seja uma curva invariante pelo sistema (7.1). Então*

$$\mathrm{gr}(R_2) \leq mn,$$

onde m é o grau do sistema (7.1) e n é o grau de f.

Demonstração. Temos que $C = \mathcal{Z}(F)$, onde

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^n\, f\left(x_1/x_0, x_2/x_0\right).$$

Vamos primeiramente provar que

$$v_\phi(p) - 1 = I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \ \forall p \in \mathrm{supp}(R_2) \tag{7.24}$$

onde $I_p\left(f, \partial f/\partial y\right)$ denota o índice de interseção das curvas definidas por $f(x,y) = 0$ e $\partial f/\partial y(x,y) = 0$.

Considere $p = (x_0, y_0)$ um ponto de ramificação de f. Como C é não singular e $v_\phi(p) > 1$, segue do item *(2)* da Observação 6.2 que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ e, pelo Teorema da função implícita, existe uma função holomorfa $x = g(y)$, definida num aberto I contendo y_0, tal que

$$x_0 = g(y_0) \text{ e } f\left(g(y), y\right) = 0, \ \forall y \in I. \tag{7.25}$$

De (7.25) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(y), y\right) g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(g(y), y\right) = 0, \ \forall y \in I,$$

ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(y), y\right) = -\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(y), y\right) g'(y), \ \forall y \in I. \tag{7.26}$$

De (7.26) concluímos que

$$\mathrm{ord}_{y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(y), y)\right) + \mathrm{ord}_{y_0}\left(g'(y)\right) = \mathrm{ord}_{y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y)\right).$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(y_0), y_0) \neq 0$, obtemos

$$\operatorname{ord}_{y_0}(g'(y)) = \operatorname{ord}_{y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y)\right).$$

Pela Proposição 15, Capítulo 6, Seção 2 de (37), temos que

$$I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \operatorname{ord}_{y_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y)\right).$$

Donde segue que:

$$v_\phi(p) - 1 = \operatorname{ord}_{y_0}(g(y)) - 1 = \operatorname{ord}_{y_0}(g'(y)) = I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Fazendo essa análise em U_0, concluímos que (7.24) vale para todo $p \in \operatorname{supp}(R_2)$.

Portanto,

$$gr(R_2) = \sum_{p \in \operatorname{supp}(R_2)} I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Por fim, usando a equação (7.23), temos

$$I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \leq I_p(f, Q) + I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = I_p\left(f, Q\frac{\partial f}{\partial y}\right) = I_p\left(f, P\frac{\partial f}{\partial x}\right) \leq I_p(f, P).$$

Além disso, pelo Teorema de Bézout

$$\sum_{p \in \operatorname{supp}(R_2)} I_p(f, P) \leq \sum_{p \in C} I_p(f, P) \leq mn.$$

Logo,

$$\operatorname{gr}(R_2) = \sum_{p \in \operatorname{supp}(R_2)} I_p\left(f, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \leq \sum_{p \in \operatorname{supp}(R_2)} I_p(f, P) \leq mn.$$

□

Teorema 7.22. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica suave. Suponha que $C \cap U_0$, definida por $f(x, y) = 0$, seja uma curva de grau n, invariante pelo sistema (7.1). Então,*

$$n \leq m + 1.$$

Demonstração. Pelo Lema (7.20) temos

$$\mathrm{gr}(R_2) + \mathrm{gr}(R_1) = n^2 - n. \tag{7.27}$$

Dos Lemas (7.19) e (7.21) obtemos

$$\mathrm{gr}(R_2) + \mathrm{gr}(R_1) \leq n - 1 + mn. \tag{7.28}$$

Suponha, por absurdo, que $n \geq m + 2$. Então

$$\mathrm{gr}(R_2) + \mathrm{gr}(R_1) = n^2 - n \geq (m+2)n - n = mn + n.$$

Isso contradiz (7.28). □

7.3 OS POLINÔMIOS DE WEIERSTRASS NO SISTEMA *(7.1)*

Seja $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ um ponto singular de uma curva irredutível $C \subseteq \mathbb{C}^2$.

Escolha um sistema de coordenadas tal que $p = (0,0)$. O Lema 5.6 nos garante que o polinômio $f(x,y)$ pode ser escrito como

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x),$$

onde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $\mathrm{gr}(a_j(x)) \leq j$ ou $a_j(x) = 0$.

Da Observação 5.23 podemos escrever f na forma

$$f(x,y) = u(x,y)f_1(x,y)f_2(x,y)\cdots f_l(x,y), \tag{7.29}$$

onde $u(x,y)$ é invertível em $\mathbb{C}\{x,y\}$ e

$$f_i(x,y) = y^{d_i} + c_{i1}(x)y^{d_i-1} + \cdots + c_{id_i}(x),\ i = 1,\ldots,l,$$

são polinômios de Weierstrass irredutíveis .

Pela Observação 5.24, para cada $i = 1,\ldots,l$, existe um disco aberto

$$\Delta_i = \{t \in \mathbb{C}; |t| < \rho_i\}$$

e uma função holomorfa

$$q_i : \begin{array}{ccc} \Delta_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ t & \longmapsto & (t^{d_i}, g_i(t)). \end{array} \tag{7.30}$$

tais que $f_i(t^{d_i}, g_i(t)) = 0$, para todo $t \in \Delta_i$. Vamos escrever as funções g_i's na forma

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} t^k, \text{ onde } a_{ik} \in \mathbb{C}.$$

Definição 7.23. Um ponto $p = (x_0, y_0)$ é dito um ponto singular do sistema (7.1) se $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Teorema 7.24. *Seja $C \subseteq \mathbb{C}^2$ uma curva algébrica. Suponha que C seja uma curva invariante pelo sistema (7.1), dada por $f(x,y) = 0$. Seja $p = (x_0, y_0)$ um ponto singular de C. Então p é um ponto singular do sistema (7.1).*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $p = (x_0, y_0)$ não é um ponto singular do sistema (7.1). Então existe uma única solução de (7.1) passando por este ponto. Tal solução é da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + P(x_0, y_0)\, t + \sum_{i=2}^{\infty} a_i\, t^i \\ y = y_0 + Q(x_0, y_0)\, t + \sum_{i=2}^{\infty} b_i\, t^i \end{cases} \tag{7.31}$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $t \in \Delta = \{t \in \mathbb{C}; |t| < \rho\}$ para algum $\rho \in \mathbb{R}$ (ver (38)).

Por outro lado, como p é um ponto singular de C e f é uma integral parcial do sistema (7.1), usando (7.29) e o Lema 7.7, concluímos que o sistema (7.1) tem pelo menos l soluções diferentes passando por p. Além disso, cada uma delas pode ser expressa como em (7.30). Logo, $l = 1$ e a solução (7.31) é uma parametrização local da curva C em torno do ponto singular p. Mas supomos que p não é um ponto singular de (7.1), isto é, $P(x_0, y_0) \neq 0$ ou $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Portanto, p é um ponto suave em C, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 7.25. *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica. Suponha que $C \cap U_0$ seja uma curva invariante pelo sistema (7.1). O número de pontos singulares de $C \cap U_0$ é no máximo m^2. Além disso, como $x\, Q_m(x,y) - y\, P_m(x,y) \not\equiv 0$, temos*

$$\#(\mathrm{Sing}(C)) \leq m^2 + m + 1.$$

Demonstração. Temos que todo $p \in \mathrm{Sing}(C \cap U_0)$ é um ponto singular de (7.1), ou seja, $P(p) = 0$ e $Q(p) = 0$, $\forall p \in \mathrm{Sing}(C \cap U_0)$. Logo, pelo Teorema de Bezout, $\#(\mathrm{Sing}(C \cap U_0)) \leq m^2$.

Se $p \in \text{Sing}(C \cap L_\infty)$, então pelo Lema 7.14, temos que $\#\text{Sing}(C \cap L_\infty) \leq m + 1$. Portanto, como

$$\#(\text{Sing}(C)) = \#(\text{Sing}(C \cap U_0)) + \#(\text{Sing}(C \cap L_\infty)),$$

segue o resultado. $\square$

7.4 O GÊNERO DE UMA CURVA INVARIANTE

Seja C uma curva algébrica projetiva. Suponha que $C \cap U_0$ seja uma curva de grau n, invariante pelo sistema (7.1), dada por $f(x, y) = 0$.

Pelo Teorema da Normalização (Teorema 5.26), existem uma superfície de Riemann compacta $\tilde{C}$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva $\sigma : \tilde{C} \to C$ tais que

$$\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(\text{Sing}(C)) \to C \setminus \text{Sing}(C)$$

é uma aplicação holomorfa bijetora. Consideremos a seguinte diferencial meromorfa em $C \cap U_0$

$$\omega = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}. \tag{7.32}$$

Seja ω o divisor associado à ω. Então, pelo Teorema 4.14, temos que

$$\text{gr}(w) = 2g - 2, \tag{7.33}$$

onde g é o gênero de C. Pela fórmula do grau-gênero de Noether para curvas não-singulares (Teorema 6.23), temos

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta(p), \tag{7.34}$$

onde

$$\delta(p) = \frac{1}{2}\left(I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) - v_\phi(p) + \#\sigma^{-1}(p)\right)$$

e $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^n f(x_1/x_0, x_2/x_0)$.

Por definição, a diferencial meromorfa ω não possui zeros em $C \cap U_0$. Suponhamos que $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ seja um ponto singular da curva C em U_0. Sem perda de generalidade, podemos supor que $p = (0,0)$. Podemos fatorar $f(x,y)$ em fatores irredutíveis em $\mathbb{C}\{x,y\}$, a saber

$$f = uf_1 f_2 \cdots f_r,$$

onde $u(0,0) \neq 0$ e os f_i's são polinômios de Weierstrass irredutíveis, como fizemos na Seção 7.3. Desta forma, temos que o número de expansões de Puiseux não conjugadas de C próximo ao ponto p é r, ou seja, $\#\sigma^{-1}(p) = r$ (Seção 5.5)

Então, a curva $C \cap U_0$ próximo de $(0,0)$ pode ser representada como

$$C \cap U_0 = C_1 + C_2 + \cdots + C_r,$$

onde cada C_i é definida numa vizinhança de p por

$$C_i = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ |x| < \rho,\ |y| < \varepsilon,\ f_i(x,y) = 0\},$$

sendo ρ e ε números reais positivos Além disso, pela Observação 5.24 a parametrização de Puiseux de C_i em torno do ponto $p = (0,0)$ é dada por:

$$x = t^{m_i} \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, t^k, \tag{7.35}$$

onde $a_{ik} \in \mathbb{C}$, para todo k, e $m_i = \mathrm{gr}(f_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Como $p = (0,0)$ é um ponto singular de $C \cap U_0$, segue do Teorema 7.24 que $P(0,0) = 0$. Logo, p é um polo de ω_i de ordem pelo menos 1. Portanto,

$$v_{(0,0)}\left(\omega\big|_{C\cap U_0}\right) = \sum_{i=1}^{r} v_{(0,0)}(\omega_i) \leq -r = -(\#\sigma^{-1}(0,0)) \tag{7.36}$$

e

$$\mathrm{gr}\left(\omega\big|_{C\cap\mathbb{C}^2}\right) = \sum_{p\in \mathrm{Sing}(C\cap U_0)} v_p(\omega) \leq -\sum_{p\in \mathrm{Sing}(C\cap U_0)} \#\sigma^{-1}(x). \tag{7.37}$$

Observação 7.26. Por definição ω não tem zeros em $C \cap U_0$. Os pontos singulares de $C \cap U_0$ são polos de ω em U_0. Por isso, usa-se os pontos singulares para dar uma cota superior para a ordem de ω.

Vamos estudar ω no infinito. Para isso, começamos relembrando que a equação de $C \cap U_1$ é

$$g(u,v) = u^n f\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = f_n(1,v) + uf_{n-1}(1,v) + \cdots + f_0 u^n = 0. \tag{7.38}$$

Suponhamos que a decomposição de f_n como produto de fatores lineares distintos seja

$$f_n(1, v) = c\prod_{i=1}^{q}(v - v_i)^{n_i}. \tag{7.39}$$

Em seguida, consideramos $f_n(1, v)$ escrito na forma $f_n(1, u) = L_1L_2L_3$, onde:

$$\begin{aligned} L_1(v) &\coloneqq \prod_{i=1}^{r}(v - v_{1i}), \text{ onde cada } v_{1i} \text{ é uma raiz simples de } f_n(1, v), \\ L_2(v) &\coloneqq \prod_{i=1}^{k}(v - v_{2i})^{\alpha_i}, \text{ onde } \alpha_i > 1 \text{ e } \partial g/\partial u(0, v_{2i}) \neq 0, \\ L_3(v) &\coloneqq \prod_{i=1}^{s}(v - v_{3i})^{\beta_i}, \text{ onde } \beta_i > 1 \text{ e } \partial g/\partial u(0, v_{3i}) = 0. \end{aligned}$$

Observação 7.27.

(i) Os pontos $(0, v_{1i})$, $i = 1, \ldots, r$, são pontos não singulares de C pois, como v_{1i} é uma raiz simples de $f_n(1, v)$, segue que

$$\partial g/\partial v(0, v_{1i}) = \partial f_n/\partial v(1, v_{1i}) \neq 0.$$

Na vizinhança de cada um destes pontos a curva C admite a seguinte parametrização:

$$u = t \quad \text{e} \quad v = v_{1i} + t^{l_i}\left(b_{0i} + b_{1i}t + \mathcal{O}(t)\right), \tag{7.40}$$

onde $t \in \mathbb{C}$ é um parâmetro local, $b_{0i} \neq 0$ e $l_i \in \mathbb{N}$.

(ii) Como $\partial g/\partial u(0, v_{2i}) \neq 0$, os pontos $(0, v_{2i})$, $i = 1, \ldots, k$, não são singularidades de C.

Uma parametrização de C próximo a $(0, v_{2i})$ é dada por

$$u = t^{\alpha_i}\left(e_{0i} + e_{1i}t + \mathcal{O}(t)\right) \quad \text{e} \quad v = v_{2i} + t, \tag{7.41}$$

onde $t \in \mathbb{C}$ é um parâmetro local, $e_{0i} \neq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

(iii) Os pontos $(0, v_{3i})$, $i = 1, \ldots, s$, são pontos singulares de C.

Neste caso, por (7.35), as componentes analíticas C_{ij} de C, $j = 1, \ldots, r_i$, numa vizinhança $(0, v_{3i})$ podem ser parametrizada por

$$u = t^{k_{ij}} \left(h_{0ij} + h_{1ij} t + \mathcal{O}(t) \right) \quad \text{e} \quad v = v_{3i} + t^{d_{ij}}, \tag{7.42}$$

onde $t \in \mathbb{C}$ é um parâmetro local, $h_{0ij} \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$ e para todo $j = 1, \ldots, r_i$, d_{ij} e k_{ij} são números inteiros positivos e $\sum_{j=1}^{r_i} k_{ij} \leq \beta_i$

Note ainda que

$$r + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i = n$$

e

$$C \cap L_\infty = V_1 \cup V_2 \cup V_3; \quad V_i \coloneqq \mathcal{Z}(L_i), \ i \in \{1,\, 2,\, 3\}.$$

Vamos usar a parametrização (7.40) em (7.32). Sabemos que $x = u^{-1}$, assim $dx = -u^{-2} du$. Assim, como $u = t$, temos que

$$du = dt,$$

$$dx = -t^{-2} dt,$$

$$P(x, y) = P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = u^{-m} \tilde{P}(u, v) = t^{-m} \tilde{P}(u, v).$$

Portanto,

$$\omega = \frac{-t^{-2} dt}{t^{-m} \tilde{P}(u, v)} = -t^{m-2} \frac{dt}{\tilde{P}(u, v)},$$

donde concluímos que

$$v_{(0, v_{1i})}(\omega) \leq m - 2.$$

Logo,

$$\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{V_1}\right) = \sum_{i=1}^{r} v_{(0, v_{1i})}(\omega) \leq r(m-2). \tag{7.43}$$

Agora usando a parametrização (7.41) em (7.32) e repetindo o processo, obtemos

$$\omega(t) = -t^{\alpha_i(m-1)-1} \frac{(e_{0i} + e_{1i} t + \mathcal{O}(t))^{m-2} [\alpha_i (e_{0i} + e_{1i} t + \mathcal{O}(t)) + t(e_{1i} + \mathcal{O}'(t)] dt}{\tilde{P}(u, v)}.$$

Logo,

$$v_{(0,v_{2i})}(\omega) \leq \alpha_i(m-1)-1.$$

Portanto,

$$\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{V_2}\right) = \sum_{i=1}^{k} v_{(0,v_{2i})}(\omega) \leq \sum_{i=1}^{k}[\alpha_i(m-1)-1] = [(m-1)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i]-k. \qquad (7.44)$$

Denotemos por ω_{ij} a restrição de ω à componente analítica C_{ij} de C próximo ao ponto $(0, v_{3i})$, onde $j = 1, \ldots, r_i$. Aplicando (7.42) em (7.32) e repetindo o processo, obtemos

$$\omega_{ij}(t) = t^{k_{ij}(m-1)-1}\frac{(h_{0ij}+h_{1ij}t+\mathcal{O}(t))^{m-2}[k_{ij}(h_{0ij}+h_{1ij}t+\mathcal{O}(t))+t(h_{1ij}+\mathcal{O}'(t))]dt}{\tilde{P}(u,v)}.$$

Sendo assim,

$$v_{(0,v_{3i})}(\omega_{ij}) \leq k_{ij}(m-1)-1.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{r_i} v_{(0,v_{3i})}(\omega_{ij}) \leq \sum_{j=1}^{r_i}[k_{ij}(m-1)-1] \leq (m-1)\beta_i - r_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{V_3}\right) = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{r_i} v_{(0,v_{3i})}(\omega_{ij})\right) &\leq \sum_{i=1}^{s}[\beta_i(m-1)-r_i] \leq (m-1)\sum_{i=1}^{s}\beta_i - \sum_{i=1}^{s} r_i \\ &\leq (m-1)\sum_{i=1}^{s}\beta_i - \sum_{p\in\operatorname{Sing}(C\cap L_\infty)}\#(\sigma^{-1}(p)) \qquad (7.45)\end{aligned}$$

Somando (7.43), (7.44) e (7.45) obtemos

$$\begin{aligned}&\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{C\cap L_\infty}\right) \leq \\ &\leq r(m-2) + (m-1)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i - k + (m-1)\sum_{i=1}^{s}\beta_i - \sum_{p\in\operatorname{Sing}(C\cap L_\infty)}\#(\sigma^{-1}(p)) = \\ &\qquad = n(m-1) - \sum_{p\in\operatorname{Sing}(C\cap L_\infty)}\#(\sigma^{-1}(p)) - k - r \qquad (7.46)\end{aligned}$$

Por fim, de (7.46) e de

$$\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{C\cap\mathbb{C}^2}\right) \leq -\sum_{p\in\operatorname{Sing}(C\cap\mathbb{C}^2)} \#(\sigma^{-1}(p)),$$

obtemos que

$$\begin{aligned} 2g-2=\operatorname{gr}(\omega) &= \operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{C\cap L_\infty}\right)+\operatorname{gr}\left(\omega\Big|_{C\cap U_0}\right) \\ &\leq n(m-1)-\sum_{p\in\operatorname{Sing}(C)} \#(\sigma^{-1}(p))-k-r. \end{aligned}$$

Desta forma, provamos o seguinte resultado.

Teorema 7.28. *Seja C é uma curva algébrica projetiva. Se $C\cap U_0=\mathcal{Z}(f(x,y))$ é uma curva invariante pelo sistema (7.1), então o gênero de C satisfaz*

$$2g-2\leq n(m-1)-\sum_{p\in\operatorname{Sing}(C)} \#(\sigma^{-1}(p)), \tag{7.47}$$

onde n é o grau de f.

7.5 CURVAS ALGÉBRICAS NODAIS INVARIANTES

Lema 7.29. *Seja $C\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica projetiva. Suponha que $C\cap U_0$ seja uma curva invariante pelo sistema (7.1) dada por $f(x,y)=0$. Então,*

$$\#\operatorname{Sing}(C)\leq\, m^2+\frac{n}{2},$$

onde m é grau do sistema (7.1) e $n=\operatorname{gr}(f)$.

Demonstração. Vamos mostrar que a curva C tem no máximo $n/2$ pontos singulares no infinito e assim, o resultado segue do Corolário 7.25, pois $\#\operatorname{Sing}(C\cap U_0)\leq m^2$.

Sabemos que $C\cap L_\infty$ tem no máximo n pontos, onde $n=\operatorname{gr}(f)$. Considere a decomposição de f em polinômios homogêneos

$$f(x,y)=f_0(x,y)+f_1(x,y)+\cdots+f_n(x,y).$$

Pela Observação 7.16, os pontos infinitos de C são da forma $(0:u:v)$ e satisfazem $f_n(1,v)$. Se decompusermos $f_n(1,v)$ obtemos

$$f_n(1,v)=(v-v_1)^{n_1}\cdots(v-v_k)^{n_k}$$

onde $n_i > 1$ para cada i.

Suponhamos que $k > \dfrac{n}{2}$. Assim, teríamos

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k \geq 2\,k > 2\left(\frac{n}{2}\right) = n$$

e temos nossa contradição, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. $\square$

Teorema 7.30. *Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica projetiva plana. Suponha que $C \cap U_0$ seja uma curva de grau n invariante pelo sistema (7.1) e que exista um número inteiro N tal que $I_p\left(F, \partial F/\partial x_2\right) \leq N$, $\forall p \in \mathrm{Sing}(C)$. Então*

$$n \leq \frac{4 + 2m + N + \left[(4 + 2m + N)^2 + 16Nm^2\right]^{\frac{1}{2}}}{4},$$

onde m é o grau do sistema (7.1) e n é o grau de f.

Demonstração. Das expressões (7.34) e (7.47), temos

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta(p)\right) - 2 \leq n(m-1) - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \#\sigma^{-1}(p).$$

Donde segue que

$$n(n-3) - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} v_\phi(p) \leq n(m-1).$$

E por último,

$$n(n-3) - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \leq n(m-1). \tag{7.48}$$

Pelo Lema 7.29 e pela hipótese segue que

$$-\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \geq -N\left(m^2 + \frac{n}{2}\right). \tag{7.49}$$

Agora, usando (7.49) e (7.48), temos

$$-N\left(m^2 + \frac{n}{2}\right) \leq -\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} I_p\left(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \leq n(m-1) - n(n-3).$$

Chegamos então a seguinte desigualdade

$$n^2 - 2n - nm - \frac{Nn}{2} \leq Nm^2. \tag{7.50}$$

A desigualdade (7.50) pode ser reescrita na forma

$$n^2 - \frac{(4+2m+N)}{2}n - Nm^2 \leq 0.$$

Analisando a expressão quadrática em n a esquerda da desigualdade anterior, segue que

$$n \leq \frac{4+2m+N+[(4+2m+N)^2+16Nm^2]^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

□

Corolário 7.31. *Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma curva algébrica projetiva de grau n que tem apenas nós como pontos singulares. Suponha que $C \cap U_0$ seja invariante pelo sistema (7.1). Então,*

$$n \leq 2(m+1).$$

Demonstração. Sendo um nó um ponto duplo ordinário, temos $I_p\left(F, \partial F/\partial x_2\right) \leq 1$, para cada $p \in \operatorname{Sing}(C)$. Então podemos considerar $K = 1$ no Teorema 7.30. Assim,

$$n \leq \frac{4+2m+1+[(4+2m+1)^2+16m^2]^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}(6m+3)^2 &= (2m+5)^2+32m^2-16+16m = \\ &= (2m+5)^2+16m^2-16+16m^2+16m \geq (2m+5)^2+16m^2,\end{aligned}$$

pois $m \geq 1$. Então,

$$n \leq \frac{4+2m+1+[(4+2m+1)^2+16m^2]^{\frac{1}{2}}}{4} \leq \frac{2m+5+6m+3}{4} = 2(m+1).$$

□

REFERÊNCIAS

1 AHLFORS, Lars. V. **Complex Analysis**. 3 . ed. McGraw-Hill Inc., 1979.

2 AMAYA, J.S.C. **Sobre a não existência de curvas algébricas invariantes por folheações algébricas planas**. Dissertação de Mestrado - 2020. https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/13159.

3 ANTUNES, E.E.P. **Sobre a Existência de Integral Primeira Racional de Campos Vetoriais Polinomiais Planos.**. Dissertação de Mestrado - UFJF, 2018. https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/7572.

4 ATIYAH, M.F., MACDONALD, I.G. **Introduction to Commutative Algebra**. Addison-Wesley, Reading, 1969.

5 BRIESKORN E. e KNÖRRER H., **Plane algebraic curves**. 1. ed. Birkhäuser-Verlag, 1996.

6 BROWN, W.J. e CHURCHILL, R. V., **Complex Variables and Applications**. 7.ed. McGraw Hill, 2003.

7 CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F., **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. rev. São Paulo : Atual, 1990.

8 CAMACHO, C. e LINS NETO, A. **Teoria Geométrica das Folheações**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

9 CAMPILLO, A.; CARNICER, M. M..**Proximity inequalities and bounds for the degree of invariant curves by foliations of P2C**. Trans. Am. Math. Soc. 349 2211–28, 1997.

10 CARMO, M.P., **Differential Forms and Applications**. Springer, 1998.

11 CARNICER;M. M.. **The Poincar´e problem in the non-dicritical case**. Annals of Math., 140:289– 294, 1994.

12 CASAS-ALVERO, E., **Singularities of Plane Curves**. Cambridge, 2000.

13 CERVEAU, D. e LINS NETO, A.. **Holomorphic foliations in CP(2) having an invariant algebraic curve**. Ann. Inst. Fourier Grenoble 41 883–903, 1991.

14 CHEVALLEY, Claude. **Introduction to theory of algebraic functions of one variable**. AMS Math. Survey Nº 6, 1951.

15 COELHO, J. **Introdução à Geometria Algébrica**. Notas de Aula - UFF. 2009.
https://www.ufjf.br/fred_feitosa/files/2009/08/notas-de-aula.pdf.

16 COX.,D.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. **Ideals, Varieties and Algorithms**. New York: Springer-Verlag, 1992.

17 DEURING, Max. **Lectures on the theory of algebraic functions of one variable**. Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg -New York, 1973.

18 FULTON, W. **Intersection Theory**. Springer, Berlin, 1983.

19 GARCIA, Arnaldo L. P.; LEQUAIN, Yves A..**Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

20 GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

21 GRIFFITHS, P. A., **Introduction to Algebraic Curves**. American Mathematical Society, 1989.

22 HAFFTKA, A., **Differential Topology and The Poincaré-Hopf Theorem**; In: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Hafftka.pdf acessado dia 21 de outubro de 2020.

23 HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, INC., 1971.

24 HOLMES, M.H. **Introductiona to the Foundations of Applied Mathematics**. 2009 . Texts in Applied Mathematics 56. Springer Science + Business Media. (Páginas 441 - 443).

25 HUNGERFORD, Thomas W.. **Algebra**. New York: Springer, 1974.

26 KIRWAN, F., **Complex Algebraic Curves**. Cambridge University Press, New York, 1992.

27 LANG, S. **Algebra**. 3.ed. New York: Springer, 2002.

28 MASSEY, W.S., **A Basic Course in Algebraic Topology**. Springer-Verlag, New York, 1991.

29 MICHELS, Gabriel Sehnem, **O problema de Poincaré para folheações no plano projetivo complexo.** Dissertação Mestrado - 2021.
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/229230/PMTM0279-D.pdf?sequence=-1&isAllowed=y

30 MIRANDA, R. **Algebraic Curves and Riemann Surfaces**. Graduate Studies in Mathematics. Volume 5. American Mathematial Society : 1995.

31 NETO, A. L. **Holomorphic foliations in $\mathbb{CP}(2)$ having an invariant algebraic curve**. Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 4, páginas 883 - 903. 1991. `http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_883_0`

32 ROSSINI, A. A. G. **Folheações Algébricas Projetivas**. Dissertação de Mestrado - UFJF, 2011. `https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/4701`.

33 SCÁRDUA, B. e LINS NETO, A. **Introdução à Teoria Geométrica das Folheações Algébricas Complexas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

34 SCHLAG, W., **A curse in Complex Analysis and Riemann Surfaces**. American Mathematical Society, Rhode Island, 1969.

35 SHAFAREVICH, Igor R.. **Basic Algebraic Geometry 1**. 3. ed. Moscow: Springer, 2007.

36 TSYGVINTSEV, A. **Algebraic invariant curves of plane polynomial differantial systems**. 2001. J. Phys. A: Math. Gen. **34** 663

37 VAINSENCHER, I. **Introdução às Curvas Algébricas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

38 YEKTA, A.P. e KHOSHKENAR, A. **Solving the Systems of Differential Equations by a Power Series Method**. 2014. International Journal of Innovative Research Science, Engineering an Technology. Vol. 3, Issue 4.