Universidade Federal de Juiz de Fora

Profmat - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rodrigo dos Anjos Azevedo

Modelo de inserção das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica

Juiz de Fora

2013

Rodrigo dos Anjos Azevedo

Modelo de inserção das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2013

Azevedo, Rodrigo dos Anjos.

Modelo de inserção das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica / Rodrigo dos Anjos Azevedo - 2013.

84f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Geometrias não Euclidianas. 2. Geometrias. 3. Geometria Hiperbólica. 4. Geometria Elíptica. I. Título.

Rodrigo dos Anjos Azevedo

Modelo de inserção das Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Valéria Mattos da Rosa
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Allan de Oliveira Moura
Universidade Federal de Viçosa - UFV

Juiz de Fora, 13 de março de 2013.

A meu querido avô Anício de Azevedo (*In Memorian*), lembrome quando ele, em diversas ocasiões, me dizia que eu seria “um grande homem”, certamente essas palavras dele ficaram eternizadas comigo e, elas sempre aparecem em meus pensamentos em momentos como este, sendo assim, esse trabalho é dedicado a ele. Uma dedicação especial ainda ao meu filho João Lucas Medeiros Azevedo e à minha filha Maria Luísa Medeiros Azevedo que nascerá em breve.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- Aos meus pais, minhas avós e minha tia pelos exemplos, pela educação herdada e pelas orações e a toda minha família pelo apoio.
- A minha esposa, pela paciência, dedicação e companheirismo.
- Aos meus colegas de curso pelo coleguismo e pelas discussões que tanto me ajudaram nesta caminhada.
- Aos amigos de trabalho e de viagem Augusto, Jones, Lilian e Marcelo, por tornarem os translados de Três Rios à Juiz de Fora sempre bem comunicativos.
- A Capes pelo financiamento e também a Universidade Federal de Juiz de Fora, junto da Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade que me deu de fazer um Mestrado nos moldes do PROFMAT com formação de qualidade.
- Aos meus colegas de trabalho pelo companheirismo.
- Aos meus amigos Arnaldo pela forte ajuda na logística do trabalho desde o início até o final e a Giliza por me ajudar na reta final do trabalho.
- Ao Professor José Barbosa pela disposição em relação ao PROFMAT e aos demais professores pelos ensinamentos.
- Ao Professor Sandro Rodrigues Mazorche pela orientação nessa dissertação além do grande apoio que me passou durante nossas conversas.
- Ao professor Allan de Oliveira Moura da UFV e à Professora Valéria Mattos da Rosada UFJF por aceitarem compor a banca avaliadora dessa dissertação.
- Ao Professor Alberto Hassen Raad, uma pessoa que tem muito conhecimento além da Matemática para passar aos seus discentes, sinto-me lisonjeado e sortudo em ter sido seu aluno, até hoje busco dentro dos meus limites de conhecimentos me espelhar nele.

- Aos Professores, colegas e amigos do CES-JF onde fiz minha graduação, pois lá tive contato com alguns Professores que foram significantes nessa minha empreitada.
- Aos tutores e Professores do CEDERJ pelo apoio dado nessa e em outras jornadas, sempre nos ajudando no que estiver ao alcance deles.
- A todos os colegas, amigos e familiares que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, com apoios e incentivos de todas as formas, não farei listas para não deixar ninguém de fora, então todos que participaram desse processo saibam que estou muito agradecido com todos vocês.

"Estou certo de que nenhuma matéria perde tanto quanto a matemática ao se dissociá-la de sua história."

(J.W. L. Glaisher)

RESUMO

Esse trabalho apresenta as Geometrias não Euclidianas através de seus aspectos históricos e, apesar da carência do assunto nos cursos de Licenciatura em Matemática, os professores que lerem o trabalho poderão ter algumas noções dessas Geometrias e transmitir um pouco desse conhecimento aos seus alunos. Haverá sugestão de atividades utilizando Softwares de Geometria Dinâmica, para a Geometria Hiperbólica e atividades sem o uso de Softwares para a Geometria Elíptica. Além disso no apêndice serão apresentadas mais duas Geometrias em caráter informativo aos alunos, a do Táxi e a Projetiva, neste momento será indicado para os alunos o que caracterizará em geral, uma Geometria ser dita não Euclidiana. Cabe ressaltar que a apresentação estará toda voltada para alunos do 9º do ensino fundamental.
Palavras-chave: Geometrias não euclidianas. Geometrias. Geometria hiperbólica. Geometria elíptica.

ABSTRACT

This work will show the non Euclidean Geometries through their historical aspects and, althougt the privation of this subject in some Mathematics courses, teachers who read this work will have some notions about these Geometries and will be able to transmit them to their students. There will be some sugggestions of activities using Dinamic Geometry softwares for Hiperbolic Geometry and suggestions of activities without the use of these softwares for Elliptic Geometry. More than that, it the appendices, two other Geometries will be shown in an informative character to the students, the Taxicab Geometry and the Projective Geometry. In that moment, will be indicated to the students what will characterize, in general, a Geometry called non Euclidean. It is necessary to emphasize that the presentation will be designated to students of 9 year degree.
Keywords: Non euclidean geometries. Geometries. Hiperbolic geometry. Elliptic geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em todos os lugares do mundo, independente de raças, credos ou sistemas políticos, desde os primeiros anos de escolaridade, a Matemática se faz presente nos currículos escolares, ao lado da linguagem natural, como uma disciplina básica. A Matemática não é uma disciplina relegada a simples ator no ensino, muito pelo contrário, ela é onipresente em qualquer sistema educacional mundo afora.

No entanto, o ensino dessa disciplina vive hoje um paradoxo, ao mesmo tempo em que a sociedade pleiteia e justifica a sua presença de forma marcante nos currículos escolares, reivindicação esta amparada na crença de que é uma cadeira do conhecimento fundamental para o progresso da Ciência e da Tecnologia, percebe-se que a maioria dos conteúdos ensinados são considerados desinteressantes e inúteis, não estando vinculados diretamente à realidade.

Esse trabalho busca demonstrar através de algumas vertentes, que o estudo dos conceitos matemáticos, em particular os geométricos constitui uma parte importante nesse processo de desenvolvimento cognitivo do ser humano. Isso ocorre porque faculta ao aluno desenvolver um tipo especial de raciocínio que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que ele vive. Além disso, a Geometria pode catalisar os outros diferentes ramos da Matemática, estimulando a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Dessa forma, o corpo desse trabalho estará estruturado em sete capítulos mais um apêndice que serão brevemente discriminados a seguir.

No primeiro capítulo será falado um pouco sobre a Geometria Euclidiana e a problemática do quinto postulado de Euclides, evidenciando todas as suas consequências para o campo da Geometria, alcançando, neste ínterim, o estudo superficial das Geometrias Hiperbólica e Elíptica.

O Segundo capítulo falará um pouco sobre a importância das Geometrias não Euclidianas segundo os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais).

No terceiro capítulo encontra-se uma apresentação da Geometria Hiperbólica e, serão feitas algumas menções aos matemáticos que contribuíram consideravelmente para o surgimento e desenvolvimento dessa Geometria, bem como os modelos que podem ser adotados para se estudar e ter um bom entendimento de como trabalhar nessa Geometria.

O quarto capítulo tratará da Geometria Elíptica, onde também serão falados sobre os matemáticos que deram importantes contribuições para o seu surgimento e desenvolvimento, além dos modelos que poderão ser usados para o estudo dessa Geometria.

Agora o quinto capítulo é breve, nele será feito apenas uma comparação das três Geometrias vistas no transcorrer desse trabalho. Nesse capítulo a ideia é ratificar com o leitor que o quinto postulado de Euclides foi de fato, o responsável pelo surgimento dessas outras Geometrias.

Já o sexto capítulo sugere atividades envolvendo a Geometria Hiperbólica para turmas do 9º ano do ensino fundamental, usando um ambiente que contenha softwares específicos para a realização dessas atividades.

No sétimo e último capítulo serão sugeridas atividades envolvendo a Geometria Elíptica, em especial, a Geometria Esférica. Diferente do capítulo 6, as atividades propostas nesse capítulo são praticáveis em quaisquer ambientes, inclusive aqueles que não tenham acessos a computadores ou softwares específicos e, todos os materiais usados para a sua aplicação são baratos e totalmente acessíveis à todos os alunos do 9º ano do ensino fundamental.

O apêndice encerra a exposição do tema em questão, apresentando outras duas Geometrias não Euclidianas, a do Táxi e a Projetiva. Mas, essas duas Geometrias são postas apenas em caráter informativo apontando para outras Geometrias além das colocadas nesse trabalho, sem apresentação de atividades, no entanto, essas atividades podem ser sugeridas aos alunos, em especial, sobre a Geometria do Táxi numa turma de 1º ano do ensino médio, por exemplo. Já sobre a Geometria Projetiva fica mencionado a partir de desenhos a famosa definição do ponto de fuga.

1.1 JUSTIFICATIVA

A motivação para esse trabalho em dar enfoque para um modelo de inserção das Geometrias não Euclidianas no âmbito da Educação Básica se deve, principalmente, ao interesse de mostrar aos alunos, que a Geometria Euclidiana não é única e universal, além de ser tangenciado um tema até então pouquíssimo explorado nos diversos níveis de ensino, inclusive no superior.

1.2 METODOLOGIA

A metodologia para a execução deste trabalho constará basicamente de pesquisas bibliográficas através de literaturas específicas como, por exemplo, livros, dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado sobre o tema disponíveis para consulta pública. Outra fonte valiosa será a pesquisa envolvendo meios eletrônicos como a Internet através da qual fica-se na espera da obtenção de textos interessantes, artigos e periódicos em sites de busca como os das agências de fomento à pesquisa no Brasil e também nos sites de universidades nacionais e internacionais etc.

1.3 OBJETIVOS

Ao fim da apresentação desse trabalho é esperado que o aluno esteja apto a estabelecer o Quinto Postulado nas Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica, sabendo escrever o teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo em cada uma delas e, finalmente, dizer o modelo frequentemente adotado para se explicar cada uma dessas Geometrias. Além disso, deseja-se mostrar a riqueza e abrangência do tema, tendo a oportunidade de revisar e aprofundar os conceitos da Geometria Euclidiana Tradicional, ensinados na Educação Básica.

2 NO HORIZONTE: NOVAS GEOMETRIAS

2.1 UM POUCO SOBRE A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Atualmente quando se fala em Geometria logo se é pensado naquela com seu tipo embrionário, estabelecida inicialmente na Grécia, por volta de 300 a.C., quando Euclides escreveu “Os Elementos”. A respeito de conhecimento até 300 a.C., sabe-se que Atenas figurava como o maior polo cultural da Antiguidade, mas essa prioridade veio a passar para uma cidade africana, localizada no Egito e chamada de Alexandria que abrigou a maior biblioteca daquela época. Ela chegou a ter em seu acervo mais de 600.000 rolos de papiros, uma verdadeira papiroteca.

Essa Geometria florescida nessa era de Ouro da Antiga Grécia é a chamada Geometria Euclidiana e a que se estuda na Educação Básica (ensinos fundamental e médio) ela é a Geometria usada pelos que a estudam para visualizar o espaço físico. Ela consiste de afirmações, ditas teoremas ou proposições, lemas e corolários, que são demonstráveis através de deduções lógicas a partir de outras afirmações, os axiomas ou postulados. Euclides usou cinco desses postulados como alicerces para erguer a sua Geometria. No entanto, existem outras Geometrias alternativas a esta, denominadas Geometrias não Euclidianas que são, por natureza, bem mais complexas e abrangentes que a primeira.

Mas como tais Geometrias foram tomando forma, se apresentando e reclamando seus respectivos lugares entre as diversas cadeiras do conhecimento matemático? A análise do desenvolvimento dessas Geometrias ao longo do eixo da História da Matemática serve para demonstrar de forma concisa e inquestionável como uma simples definição serviu de agente catalisador, interrogando e levando uma legião de matemáticos a expandir as fronteiras do conhecimento matemático, num longo e lento processo que se estabeleceu por aproximadamente dois milênios. Esta descoberta poderia ter acontecido séculos antes caso não existissem os preconceitos de que a Geometria Euclidiana era única e seria ela a Geometria do Universo. Um preconceito tão forte que impediu Gauss, certamente um dos maiores se não, o maior matemático de todos os tempos de publicar os próprios achados sobre o assunto. Assim, a descoberta dessas Novas Geometrias representam uma vitória contra uma concepção euclidiana do mundo.

2.2 UM POUCO MAIS SOBRE A GEOMETRIA EUCLIDIANA E O PROBLEMÁTICO QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES

A gênese de todas as Geometrias nos leva ao passado, mais precisamente na Grécia Antiga, onde no século III a.C. com a anexação desse País ao Império Macedônio, parte dos intelectuais gregos rumaram para Alexandria com o objetivo de se juntar aos quadros da Universidade que acabara de ser construída nesta metrópole e que abrigava a famosa biblioteca de Alexandria, a maior do mundo, já citada anteriormente.

Apesar do passado nebuloso e distante, um dos sábios gregos que atenderam ao chamado de Ptolomeu I, então governante do Egito Antigo foi uma pessoa que com exceção de seus trabalhos, sobre ele mesmo não se sabe praticamente nada, o seu nome é Euclides, provavelmente oriundo de Atenas e a cujo encargo ficou o Departamento de Matemática da nova Universidade. Deve ter sido um homem com uma bagagem cultural muito rica, Euclides ficou imortalizado pela sua obra literária no Campo da Matemática, em especial, pela obra *Os Elementos* que se tornou, sem dúvida, o vértice de boa parte dos conhecimentos matemáticos durante dois milênios.

Essa obra é composta por treze livros abrangendo 465 proposições, os seis primeiros livros apresentam a Geometria Plana, o primeiro deles começa com 23 definições, seguidas de 5 postulados mais 5 noções comuns (axiomas) que essencialmente estabelecem a existência de objetos matemáticos, e vão ditando as regras do jogo. Apesar de não haver nenhum manuscrito original, sua relevância cultural transcendeu os obstáculos do tempo. Nela, Euclides aborda questões introdutórias da Matemática em sua generalidade e não apenas da Geometria. Esse compilado em forma de linguagem discursiva e estruturada dos conhecimentos até então estabelecidos, tiveram a seguinte organização:

- Livro I - Construções Elementares, Teoremas de Congruência, Área de Polígonos e Teorema de Pitágoras;

- Livro II - Álgebra Geométrica;
- Livro III - Geometria do Círculo;
- Livro IV - Construções de Certos Polígonos Regulares;
- Livro V - Teoria das Proporções de Eudoxo;
- Livro VI - Figuras Semelhantes;
- Livros VII, VIII e IX - Teoria dos Números;
- Livro X - Classificação de Certos Números Irracionais;
- Livro XI - Geometria no Espaço, Volumes Simples;
- Livro XII - Áreas e Volumes Determinados pelo Método de "Exaustão"de Eudoxo;
- Livro XIII - Construção dos Cinco Sólidos Regulares.

O êxito do livro *Os Elementos* se deve à sua forma de apresentação de raciocínio encadeado, inaugurando o método postulacional ou axiomático, inter-relacionando todo o conteúdo teórico abordado. Apesar de não ser perfeito em toda a sua essência o episódio de elaboração do método serve para dar mostras da genialidade e pioneirismo do raciocínio de Euclides que, num universo onde o conhecimento não era conexo, tratou de redimensionar a forma de pensar de toda uma civilização.

Sabendo que deveria haver um ponto de partida em seu método dedutivo, Euclides assume afirmações tidas como verdadeiras o que não gera a necessidade de provas, ou seja, os *axiomas* ou *postulados* e a partir dos quais todas as afirmações posteriores viriam a ser provadas.

Qualquer teoria que siga o modelo axiomático será tanto mais elegante quanto menor for o seu número de axiomas e, estes devem ser escolhidos com a preocupação de que sejam *consistentes, suficientes e independentes.*

Pode-se dizer que um rol de axiomas é consistentes se não conduzir a teoremas conflitantes, ou seja, um teorema e à sua negação.

Um conjunto de axiomas é suficiente ou completo quando a teoria pode ser desenvolvida sem a necessidade de outros axiomas.

Agora, os axiomas dizem-se independentes quando nenhum deles pode ser demonstrado a partir dos demais. Quando se verifica que um dos axiomas pode ser demonstrado a partir dos outros, tal axioma torna-se um dos teoremas da teoria e, com isto, o conjunto de axiomas torna-se menor, o que é sempre louvável.

A Geometria de Euclides foi a primeira teoria dentro da Matemática a ser axiomatizada, por isso, muitas "pessoas" podem acreditar que apenas a Geometria possui teoremas. É provável que elas desconheçam muitos teoremas do Cálculo, da Aritmética e da Álgebra.

O método axiomático está completamente enraizado na forma de se propor Matemática atualmente, inclusive no ensino médio das escolas brasileiras, o que, apesar de nem sempre ser feito, constitui uma das observações fundamentais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), em conformidade com as doutrinas do Ministério da Educação que cita:

> *"Afirmar que algo é verdade em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é consequência lógica de outras proposições provadas previamente. O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige prova nenhuma. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da Geometria Clássica."*

Então, é aqui que tudo tem início, pois o Livro I, de *Os Elementos*, conforme supracitado, apresenta uma lista de 23 definições sem qualquer comentário, sendo as dez primeiras divididas em noções comuns (comuns a todas as cadeiras do conhecimento) e os postulados (inerentes a uma área específica do saber):

Noções comuns:

- Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
- Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;
- Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;

- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
- O todo é maior que qualquer de suas partes.

Postulados:

- Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos;
- Pode-se continuar uma reta infinitamente;
- Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
- Todos os ângulos retos são iguais;
- Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que a soma de dois ângulos retos, então essas duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no mesmo lado no qual estão os ângulos colaterais considerados.

É público e notório a diferença entre o quinto postulado e os demais. Este postulado foi o ponto de partida para todo o calvário que envolveu numerosos matemáticos, boa parte deles com o objetivo de provar que este postulado na verdade era um teorema, podendo então ser demonstrado a partir dos demais.

O que mais chamou a atenção no quinto postulado diz respeito à sua formulação, uma vez que um postulado deveria ser enunciado de forma breve e simples, o que não era o seu caso. A sua veracidade jamais foi questionada, pelo menos até meados do século XIX. Provavelmente, isto pode ser explicado pelo fato de que duas retas acabariam por se encontrar, num ponto teórico, não havendo necessidade de ser construído, uma vez que sua existência estaria garantida racionalmente. O que preocupava Euclides, não era, portanto, a sua veracidade, mas sua praticidade.

O próprio Euclides pelo que parece, evitou ao máximo utilizá-lo em suas demonstrações, só o fazendo muito depois, na proposição de número 29 que diz o seguinte: “Quando uma reta corta duas retas paralelas, ou seja, duas retas que não possuem pontos em comum, formam-se ângulos correspondentes iguais.” No entanto, alguns estudiosos afirmam que ele poderia ter aplicado o quinto postulado já na proposição 17 que diz o seguinte: “Em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois ângulos internos é menor que dois ângulos retos.”

A comunidade de matemáticos adotou então dois caminhos com relação ao quinto postulado de Euclides, também batizado de postulado das paralelas:

- Substituí-lo por outro mais auto-evidente, ou;
- Demonstrá-lo através de seus anteriores, mostrando com isso, não ser ele, independente.

Esta segunda alternativa se divide em duas:

1ª - Demonstrar o teorema a partir dos outros axiomas (método direto de prova);

2ª - Admiti-lo como um absurdo, ou seja, falso, tentando dessa forma atacá-lo de forma a se obter alguma contradição (método indireto de prova).

Em relação ao primeiro caminho há uma variedade de opções, como, por exemplo, a alternativa dada por John Playfair (1748 - 1819) um matemático e geólogo escocês, que lecionava Matemática na faculdade de Edimburgo, essa formulação se tornou a mais comum nos livros de Geometria:

"Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma reta paralela a esta reta."

A seguir outras formulações de postulados equivalentes ao quinto postulado de Euclides:

Postulado A: A soma dos ângulos internos de triângulo é sempre igual a soma de dois ângulos retos;

Postulado B: Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes;

Postulado C: Existe um par de retas equidistantes;

Postulado D: Se três dos quatro ângulos internos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo interno também é um ângulo reto.

O postulado das paralelas não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, sendo essencialmente auto-evidentes e, em geral, não remetendo o pensamento a ideia de infinito. Assim, havia um problema no sistema de Euclides: suas "evidências" não eram tão evidentes. Para muitos matemáticos, o quinto postulado de Euclides, tratava-se, muito provavelmente, não de um postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria Geometria, utilizando-se apenas dos quatro primeiros postulados mais os cinco axiomas e o conjunto de definições fixado. Nesta tarefa, a de provar o quinto postulado de Euclides, envolveu-se uma quantidade numerosa de matemáticos conforme já citado durante mais de dois mil anos.

Existem tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitaram de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio cíclico que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar.

A suposta verdade sobre a existência de uma única paralela estava tão inserida no pensamento científico que era fácil usá-la sem se dar conta. São tantos os resultados obtidos como consequência direta da unicidade das paralelas, que até então eram inquestionáveis, como a simples existência de retângulos ou o fato de a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser igual a soma de dois ângulos retos. Tais fatos eram usados, sem que se percebesse a dependência que tinham em relação ao quinto postulado, nas pretensas provas que acabavam sempre se tornando círculos viciosos de redundância lógica.

2.3 O APARECIMENTO DE NOVAS GEOMETRIAS

A não existência de uma prova para o quinto postulado de Euclides levou, assim, à consideração de que este postulado não é uma consequência lógica dos quatro anteriores. Substituindo-o, criam-se Novas Geometrias, tão boas e consistentes como a de Euclides. Os matemáticos János BOLYAI (1802 - 1860), Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1792 - 1856), Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855) e Georg Friedrich RIEMANN (1826 - 1866) lançaram as bases dessas Geometrias que são logicamente aceitas assim como a euclidiana. Por volta de 1820 já se conheciam os principais teoremas das Geometrias não Euclidianas, nome dado por Gauss. Muito embora Gauss não tenha publicado as suas conclusões, em 1829 Lobachevsky e, em 1832 Bolyai publicaram seus trabalhos independentes um do outro sobre o assunto. A razão pela qual Gauss manteve em segredo suas descobertas, foi o fato de que a filosofia de Immanuel Kant (1724 - 1804) dominava a Alemanha da época e seus dogmas eram que as ideias da Geometria Euclidiana eram as únicas possíveis.

Kant foi um filósofo prussiano considerado por muitos como o último grande filósofo dos princípios da era moderna. Depois de um longo período como Professor Secundário de Geografia, começou em 1755 a carreira universitária ensinando Ciências Naturais. Em 1770 foi nomeado Professor Catedrático da Universidade de Königsberg, cidade da qual nunca saiu, levando uma vida monotonamente pontual e só dedicada aos estudos filosóficos. Realizou numerosos trabalhos sobre Ciência, Física, Matemática e etc.

Gauss sabia que essas ideias não eram intocáveis, mas para não entrar em conflito com os filósofos da época resolveu manter-se em silêncio. Em 1829 ele escreveu o seguinte para um matemático alemão chamado Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846): “Não irei dedicar muito de meus esforços para escrever algo publicável sobre esse assunto (Fundamentos da Geometria), pois tenho horror aos gritos histéricos que ouviríamos dos beócios se eu tornasse claro meus pensamentos sobre o assunto.”

Bessel a quem Gauss dirigiu a escrita acima, pode-se dizer que foi um matemático e astrônomo alemão que sistematizou as Funções de Bessel descobertas por Daniel Bernouilli, este último membro da famosa família Bernouilli, da Suíça, eles ocuparam um lugar ímpar na História da Matemática. As Funções de Bessel, A Desigualdade de Bessel, Os Polinômios de Bessel, Os Filtros de Bessel, A Transformada de Bessel, A Cratera de Bessel e o Asteróide 1552 Bessel foram batizados em sua honra.

Vários matemáticos começaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da Geometria de Euclides, e a obra mais conhecida é “Fundamentos da Geometria” (1889) do matemático alemão David Hilbert. Hilbert (1862 - 1943), foi um notável matemático e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da Matemática, certamente esteve entre os maiores matemáticos do século passado.

Aos matemáticos interessados em demonstrar o axioma das paralelas via método do absurdo restavam ainda duas alternativas:

I - Supor que para qualquer ponto fora de uma reta dada é possível passar pelo menos duas retas paralelas a esta;

II - Supor que não seja possível obter nenhuma reta paralela a uma dada reta.

Ao desconsiderar o axioma das paralelas e usando o raciocínio acima, alguns matemáticos começaram a observar a viabilidade de novos modelos de Geometria em que se o caminho seguido fosse o primeiro apareceria a chamada **Geometria Hiperbólica** e, caso o caminho seguido fosse o segundo apareceria a chamada **Geometria Elíptica ou Geometria Riemanniana**.

O sistema axiomático de Hilbert fixou os fundamentos da Geometria Plana e seus axiomas estão divididos em cinco grupos: **Incidência, Ordem, Congruência, Conti-**

nuidade e Paralelismo. Isto está ilustrado na figura 8, acrescido do axioma de separação para a Geometria Elíptica.

Chama-se de Geometria Neutra ou Geometria Absoluta, a Geometria que omite o postulado das paralelas, isto é, admite todos os axiomas de Hilbert, exceto o de paralelismo. Com os axiomas da Geometria Neutra e negando a unicidade das paralelas do quinto postulado de Euclides, surgem Novas Geometrias.

Partindo de um ponto, que apesar de ser fundamental não será esmiuçado nesse trabalho, é possível sintetizar, sem antes mesmo do aprofundamento nos dois tipos principais de Geometrias não Euclidianas que estão intimamente ligadas ao conceito de curvatura de sua superfície particular. Então, de acordo com a natureza de sua curvatura específica há uma forma de se classificar um modelo geométrico a partir de tal parâmetro. Assim a Geometria Euclidiana é aquela que possui curvatura nula, já a Geometria Hiperbólica possui uma curvatura negativa e a Geometria Elíptica possui uma curvatura positiva, exemplos ilustrativos estão na figura 9.

Figura 1: Imagem de Euclides. Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/comum-mat/images/Euclid1.jpg

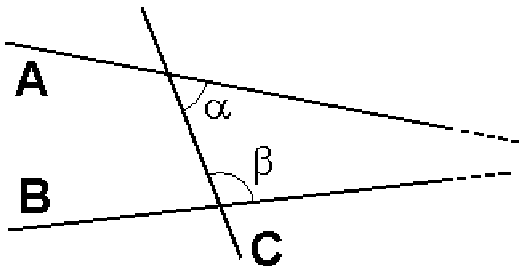

Figura 2: Ilustração do quinto postulado de Euclides onde $\alpha + \beta < 180^o$

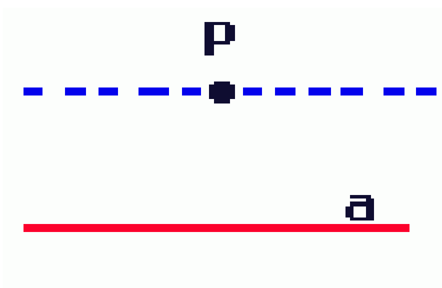

Figura 3: Figura ilustrativa do quinto postulado na formulação de Playfair

Figura 4: Foto de Playfair. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/John-Playfair

Figura 5: Foto de Kant. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Kant

Figura 6: Gravura de Bessel. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Friedrich-Wilhelm-Bessel

Figura 7: Foto de Hilbert. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/David-Hilbert

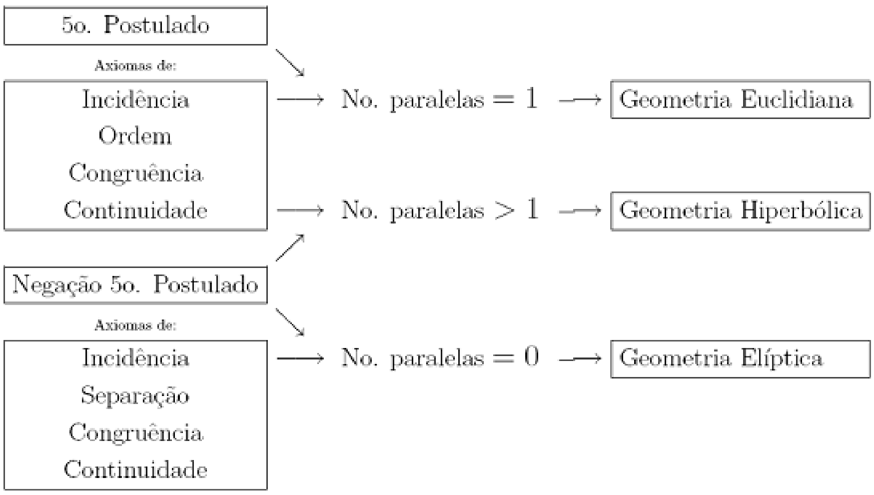

Figura 8: Esquema do quinto postulado de Euclides e suas implicações

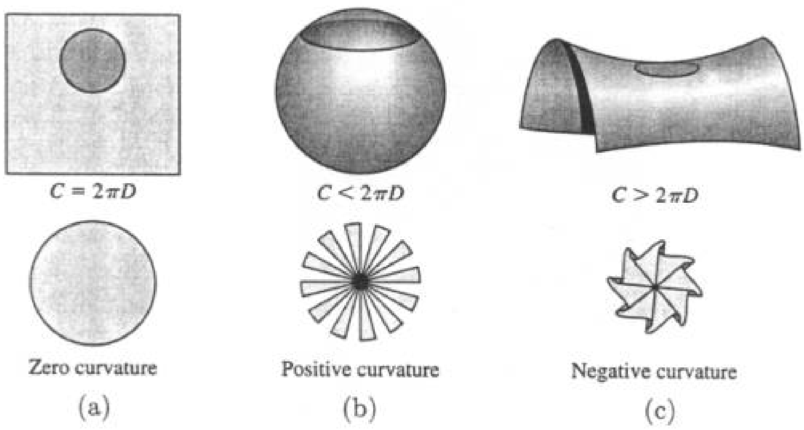

Figura 9: As implicações da curvatura nos diferentes modelos geométricos

3 *AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E OS PCN'S*

3.1 A IMPORTÂNCIA

"[...] fruto da criação e invenção humana, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos e idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na Ciência ou Tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desses fatos podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, dos irracionais e dos imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única Geometria Real, a Geometria Euclidiana, para a aceitaçao de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.

A Matemática desenvolveu-se seguindo caminhos diferentes nas diversas culturas.

O modelo de Matemática hoje aceito, originou-se com a civilização grega, no período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas. A maturidade desses sistemas formais foi atingida no século XIX, com o surgimento da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Matemática.

O Advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos e teorias matemáticas evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sobre o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o Acaso, a Estatística, a Probabilidade e daqueles relacionados com as noções matemáticas do Caos e de Conjuntos de Fractais."(Brasil, 1998, p.24)

No capítulo inicial do volume dos PCNs destinado à 8ª série do ensino fundamental ou, 9º ano do ensino fundamental, relativamente aos princípios norteadores do ensino e à aprendizagem da Matemática e seus temas correlatos, vale mencionar a ênfase dada a importância de se relacionar observações do mundo real com suas representações e estas a princípios e conceitos matemáticos:

> "No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados." (p.19)

Sobre o ensino de Geometria pesquisadores apontam que:

> "Grande parte dos Professores que hoje estão em atividade teve formação básica muito precária em Geometria. Além disso, os cursos de formação inicial para Professores, tanto os cursos de Magistério como os de Licenciatura, continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos, futuros Professores, propostas mais eficientes para o ensino da Geometria e, também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido (ainda) o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria." (Almouloud, 2004)

Os PCNs (1998) corroboram as afirmações, pois atestam que o ensino da Geometria proporciona ao aluno a compreensão do mundo em que vive, tornando-o apto a descrevê-lo, a representá-lo e a localizar-se nele.

O que se tem observado é que a Geometria Euclidiana tem sido apresentada na Escola Básica como a única existente, quando de fato é apenas uma pequena parte das

Geometrias, pois existem outras, mais amplas, que, muitas vezes, são completamente desconhecida dos alunos e, até mesmo ignorada pelos Professores. Estudos realizados na UFF com 53 Professores de Matemática dos ensinos fundamental e médio, apontaram que desses, quase 7 % não sabem o que seja o plano euclidiano, quase 18 % desconhecem quais são os seus axiomas e quase 20 % não sabem o que seja o quinto postulado de Euclides. Além disso, quase 34 % não sabem o que são Geometrias não Euclidianas e quase 54 % não estudaram estas Geometrias nos seus cursos de formação. (Kaleff, 2004)

A partir destas considerações pode-se afirmar que as preocupações com a aprendizagem e com o ensino dos conhecimentos geométricos euclidianos e não-euclidianos, tanto no âmbito escolar, como no da formação de Professores de Matemática não podem ser negligenciadas, pois tais conhecimentos assumem importância crescente na Matemática escolar, não se mantendo mais restritos ao âmbito da Matemática desenvolvida pelos matemáticos.

4 A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

4.1 ESTUDO

A Geometria Hiperbólica é, por definição, a Geometria obtida quando se assumem todos os axiomas da Geometria Neutra e substitui-se o postulado das paralelas por uma negação da unicidade, o que será chamado de “axioma hiperbólico”.

Essa Geometria lança mão do postulado de Lobachevsky ao invés do postulado das paralelas de Euclides. Antes de prosseguir falando sobre a Geometria Hiperbólica é bom saber um pouco mais a respeito dessa pessoa que teve fundamental importância nos desdobramentos dessa nova Geometria.

Sobre Lobachevsky pode-se dizer que era um dos três filhos de uma família russa muito pobre. Em 1800, quando Lobachevsky tinha apenas sete anos de idade, seu pai faleceu e sua mãe mudou-se para a cidade de Kazan, próxima à fronteira com a Sibéria. Foi lá que ele começou seus estudos, sempre financiado por bolsas escolares devido à pobreza de sua família.

Em 1804 o Czar Alexander I da Rússia reformou a Universidade de Kazan e convidou vários Professores estrangeiros, principalmente da Alemanha, para ensinarem na Universidade. Um desses Professores era Martin Bartels (1769 - 1833) que ocupou o cargo de Professor de Matemática dessa Universidade. Bartels era muito amigo de Gauss e os dois se correspondiam sobre assuntos científicos com bastante frequência. Foi Bartels que fez com que Lobachevsky, inicialmente interessado em estudar Medicina, se apaixonasse pela Matemática.

O principal trabalho de Lobachevsky foi “Geometriya” terminado em 1823, mas somente em 23 de fevereiro de 1826 é que ele fez sua famosa apresentação “Sobre os Fundamentos da Geometria” em uma sessão do Conselho Científico do Departamento de Física e Matemática da Universidade de Kazan, cuja publicação fora feita em 1829.

Figura 10: Foto de Lobachevsky. Fonte: http://ww.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a-geometria-dos-espacos-curvos.pdf

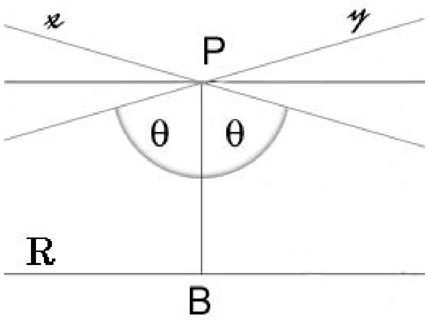

Figura 11: Ilustração do axioma hiperbólico

O interesse de Lobachevsky na Geometria não Euclidiana fez com que ele fosse visto na Rússia como uma pessoa esquesita e afastada do habitual. Ele foi atacado em um artigo humilhante e ignorante publicado no periódico “O Filho da Pátria” ao mesmo tempo em que membros distintos da comunidade de matemáticos russos faziam zombarias e publicavam rudes comentários sobre ele, todos os seus estudantes o abandonaram e, no seu funeral, quando era comum serem realizados discursos enaltecendo as obras do falecido, nada foi dito sobre o assunto que foi principal investigação de sua vida: a Geometria não Euclidiana.

“Por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma paralela a esta reta dada.”

A primeira consequência importante do axioma hiperbólico é o lema da não existência de retângulos na Geometria Hiperbólica e a partir desse lema é possível demonstrar o

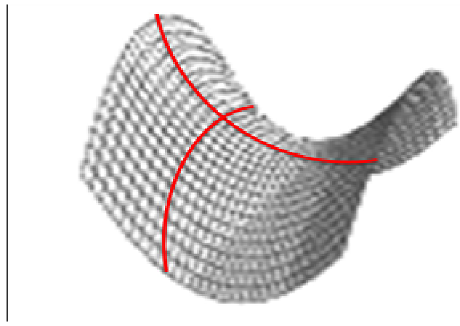

Figura 12: Duas curvas se cruzando numa sela

Teorema Universal Hiperbólico.

"Na Geometria Hiperbólica, para toda reta r e para todo ponto P não pertecente à reta r, passam por P pelo menos duas retas paralelas e distintas à reta r."

Um dos modelos para se representar a Geometria Hiperbólica é o de uma superfície com curvatura negativa. Uma superfície que atende esse requesito é vista na figura 12. Pelo seu aspecto ela recebeu o nome de sela. Verifica-se que, em qualquer ponto dessa superfície, duas curvas se cruzam com curvaturas para lados opostos, isso caracteriza a curvatura negativa dessa superfície.

A melhor maneira de visualizar o que realmente se passa quando se troca o quinto postulado de Euclides pelas versões não Euclidianas é por meio das construções de modelos. Esses modelos para um determinado sistema axiomático tornam-se uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas possuam todos eles propriedades verdadeiras.

A necessidade de visualizar um espaço onde seriam possíveis outras Geometrias, que negassem o quinto postulado de Euclides, deu origem à criação dos modelos para as Geometrias não Euclidianas.

Sendo assim, foram desenvolvidos quatro modelos consistentes para a Geometria Hiperbólica. O primeiro desses modelos foi desenvolvido pelo matemático italiano Eugenio BELTRAMI (1835 - 1900), a pseudo-esfera. Um outro modelo foi criado pelo matemático alemão Felix KLEIN (1849 - 1925) e mais dois modelos foram construídos pelo matemático francês POINCARÉ (1854 - 1912). Esses três últimos modelos consistem de representações da Geometria Hiperbólica no plano enquanto que o primeiro modelo é um sólido no R^3 que apresenta curvatura negativa.

Na figura 18, aparecem desenhados triângulos na Geometria Hiperbólica, através da

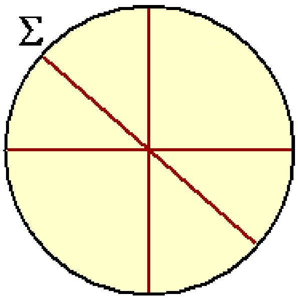

Figura 13: Modelo de Klein

Figura 14: Modelo de Poincaré

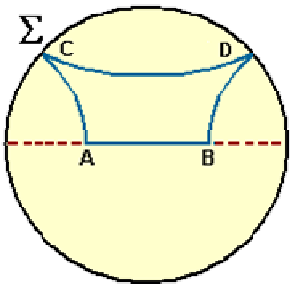

Figura 15: Um quadrilátero no disco de Poincaré

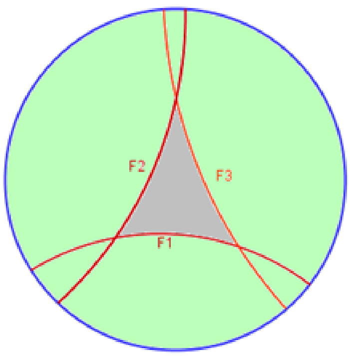

Figura 16: Triângulo hiperbólico

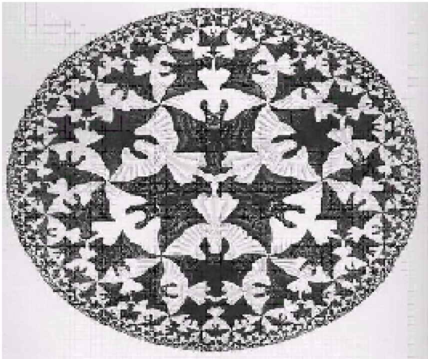

Figura 17: Uma figura de Escher no disco de Poincaré. Fonte: http://zephmeister.blogspot.com.br/2010/08/magica-grafica-escher.html

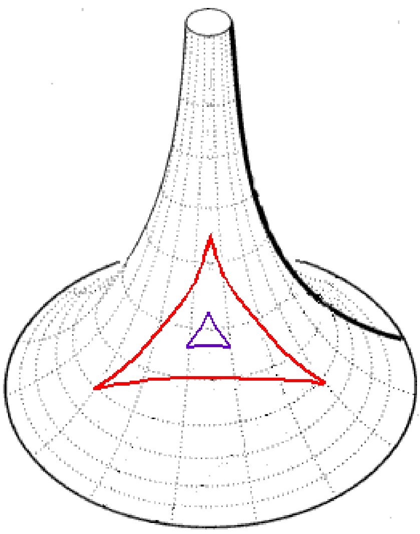

Figura 18: Dois triângulos na superfície de uma pseudo-esfera

pseudo-esfera, um sólido no R^3 que apresenta curvatura negativa.

Para se determinar uma reta na pseudo-esfera, marcam-se dois pontos quaisquer e depois deve-se uni-los de tal forma que a curva obtida determina a menor distância possível entre os pontos (uma curva em qualquer superfície, que fornece a menor distância entre dois pontos será chamada de GEODÉSICA). Assim, tem-se infinitas retas em várias direções que são paralelas a uma reta dada.

A tractriz é uma curva equitangencial estudada por Huygens, uma pseudo-esfera pode ser obtida através da revolução de uma tractriz em torno de um eixo.

No modelo proposto por Felix Klein o plano euclidiano é transformado num disco,

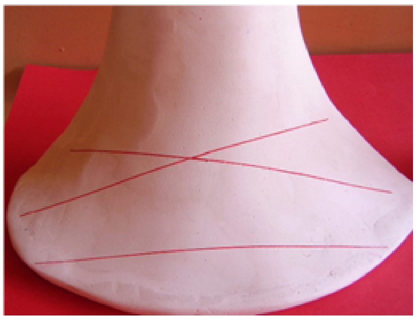

Figura 19: Duas retas distintas paralelas a uma terceira reta na pseudo-esfera. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

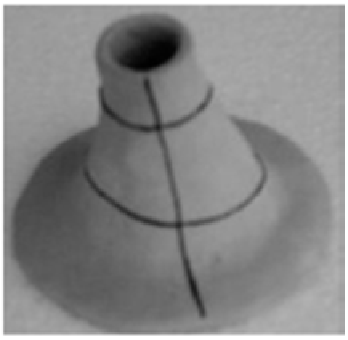

Figura 20: Duas retas paralelas cortadas por uma outra reta na pseudo-esfera. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

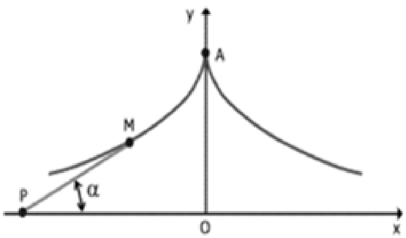

Figura 21: Tractriz

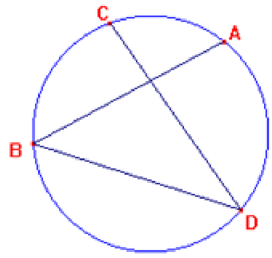

Figura 22: O plano no modelo de Klein

tendo na circunferência que o circunda os pontos que representam o infinito no plano original. Dessa forma, as retas são as cordas do disco, excluindo suas extremidades. Na figura 22, as retas BA e CD são paralelas à reta BD.

Nesse modelo, o mais simples de todos, as retas tem uma dimensão infinita dentro de uma área finita. Além da noção euclidiana de distância, os ângulos também são distorcidos.

Felix Klein foi um matemático alemão e embora tenha trabalhado em diversos assuntos como Teoria das Funções e Física Matemática, suas contribuições mais fortes foram em Geometria. Em 1872 ele apresenta o seu *Erlanger Programm*, que iria influenciar fortemente o desenvolvimento da Matemática no século XX. Neste programa, Klein apresenta a Geometria como o estudo das propriedades de um espaço invariante pela ação de um grupo. A Geometria Euclidiana não era mais do que o estudo do grupo das transformações euclidianas, a Geometria Hiperbólica não era mais do que o grupo dos estudos das transformações hiperbólicas, desmistificando assim as Novas Geometrias. Ainda no campo da Geometria, Klein estudou a hoje chamada Garrafa de Klein, uma superfície fechada e não orientável, numa área da Matemática denominada Topologia.

Agora, no modelo do Disco de Poincaré, o plano hiperbólico é um disco limitado e as retas são todos os diâmetros do círculo (excluindo as extremidades) e todos os arcos de círculos ortogonais a circunferência desse disco.

O ângulo hiperbólico entre duas retas é definido como sendo o ângulo euclidiano entre suas tangentes no ponto de interseção e o comprimento de um segmento AB é dado por: $\boldsymbol{d(A,B) = ln\left[\frac{(AC.BD)}{(BC.AD)}\right]}$, sendo C e D pontos do disco que são as extremidades da reta hiperbólica que contém AB, onde AC, BD, BC e AD são comprimentos euclidianos.

Poincaré redefiniu a distância de modo que o espaço se comprime a medida que nos aproximamos do limite do Universo, transformando efetivamente em infinita uma área

 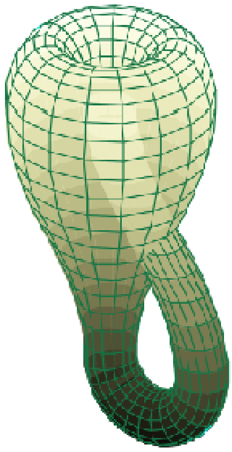

Figura 23: Foto de Klein e a Garrafa de Klein. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Felix-Klein

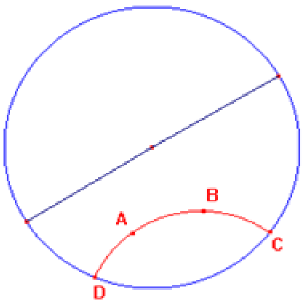

Figura 24: Reta contendo um segmento AB no disco de Poincaré

finita.

Quanto ao modelo do semi-plano de Poincaré, tem-se um semi-plano onde as retas são semi-círculos com centro numa reta, conhecida como eixo dos infinitos. Também serão retas nesse modelo, qualquer reta que seja perpendicular à reta dos infinitos, que podem ser imaginadas como semi-círculos de raio infinito. Ângulos e distâncias são medidas como no modelo do Disco de Poincaré.

No semi-plano da figura 25, tem-se: r // s e s // q.

Sobre o francês Jules Henri Poincaré sabe-se que foi um matemático, físico e filósofo da ciência. Considerado como o último universalista da Matemática, ou seja, aquela pessoa que fica totalmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados da Matemática, ele liderou e enriqueceu uma gama espantosa de assuntos. Não permanecia por muito tempo num único campo, daí, pulava ligeiramente de uma área para outra de estudos. Muito provavelmente, nos dias de hoje não aparecerá ninguém com um domínio tão amplo dentro da Matemática, isto porque o crescimento da Matemática atualmente é tão grande

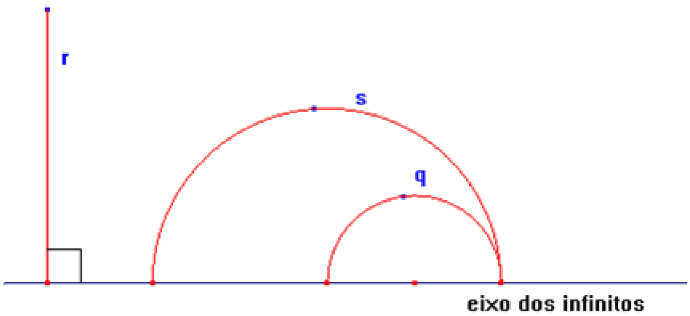

Figura 25: Modelo do semi-plano de Poincaré

Figura 26: Foto de Poincaré. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Henri-Poincar%C3%A9

que dificilmente surgirá alguém capaz de passear por todos os seus campos, sendo assim, Poincaré pode ser considerado como o último dos matemáticos universalistas.

Chama-se **triângulo hiperbólico** aquele formado por segmentos de retas hiperbólicas. Na figura 27, tem-se um triângulo hiperbólico. A soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico formado pelas retas da figura é menor do que 180º, e isso ocorrerá com qualquer triângulo considerado dentro da Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos não será mais constante, no entanto, ela será sempre menor do que 180º.

O Jesuíta italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) na tentativa de provar o quinto postulado de Euclides, criou um quadrilátero que ficou conhecido como quadrilátero de Saccheri. Este quadrilátero tem dois ângulos retos. A base CD é menor que o topo AB, conforme mostra a figura 28.

Sabe-se que Saccheri foi partidário das demonstrações pela teoria do absurdo, esse encanto aconteceu após ter lido os Elementos de Euclides e ter visto o poderoso método

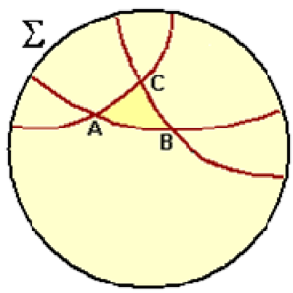

Figura 27: Um triângulo hiperbólico no disco de Poincaré

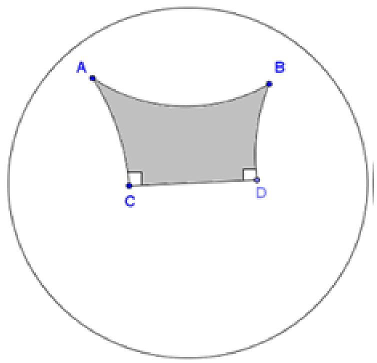

Figura 28: Um quadrilátero hiperbólico com dois ângulos retos

de *reductio ad absurdum.* Ele publicou os primeiros estudos que se baseavam em análises críticas da estrutura da Geometria de Euclides e, deve-se a ele uma das mais conceituadas investigações sobre o postulado das paralelas. Seu método consistia em desenvolver as consequências da negação do postulado das parelelas de Euclides mantendo os outros postulados. Desta forma, ele esperava desenvolver uma Geometria contraditória, pois partia do princípio indubitável da veracidade do postulado das paralelas. Assumindo a infinitude da reta, Saccheri eliminou a hipótese do ângulo obtuso no seu quadrilátero que tinha os ângulos da base reto e os lados perpendiculares a base iguais, caso não tivesse tão fascinado em mostrar tal contradição e, em vez disso, tivesse admitido sua incapacidade de alcançá-la naquela que ele chamou de hipótese do ângulo agudo, provavelmente os méritos da descoberta das Geometrias não Euclidianas caberiam a ele.

A sua tentativa de demonstrar o postulado das paralelas falhou, no entanto, foi o primeiro a utilizar na sua demonstração a possibilidade da existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos pode ser maior ou menor que a soma de dois ângulos retos e a tentar desse fato uma contradição. Quando era professor na Universidade de Pávia recebeu a permissão para imprimir um pequeno livro intitulado *Euclides ab amni naevo*

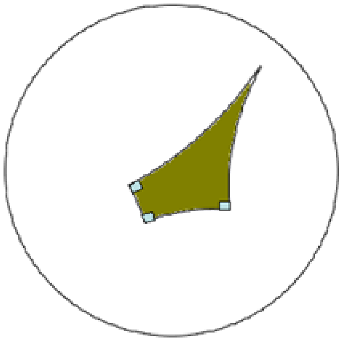

Figura 29: Quadrilátero de Lambert

vindicatus (Euclides Livre de Toda Imperfeição) sobre Geometria Plana que apareceu em Milão em 1733, uns poucos meses após a sua morte.

O suiço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) na tentativa de provar o quinto postulado de Euclides, fez a construção de um quadrilátero com três ângulos retos, conhecido como Quadrilátero de Lambert, conforme o quadrilátero da figura 29.

Sobre Lambert, ele nasceu em Mulhouse (Alsácia) então parte do território suiço, no entanto, foi considerado um matemático de origem francesa, radicado na Alemanha. A sua obra inclui a primeira demonstração de que π é um número irracional (1768), o desenvolvimento da Geometria da regra e o cálculo da trajetória de cometas. Também teve interesse em cartografia e definiu a projeção de Lambert. Foi um dos criadores da fotometria (parte da óptica que investiga os métodos e processos de medição de fluxos luminosos e das características energéticas associadas a tais fluxos) e autor de trabalhos inovadores sobre Geometrias não Euclidianas, graças as pesquisas que desenvolveu sobre o postulado das paralelas de Euclides, assunto de seu livro em 1766, mas publicado postumamente, *Die Theorie der Parallellinien.*

Assim, através dessas representações fica fácil de verificar que o quinto postulado de Euclides não é válido para um espaço hiperbólico.

Serão destacados agora alguns resultados de Geometria Hiperbólica que serão apenas enunciados, suas demonstrações podem ser encontradas em Greenberg (1974).

- Na Geometria Hiperbólica dois triângulos semelhantes são obrigatoriamente congruentes;

- A fórmula para calcular a área do triângulo multiplicando-se a base pela sua altura relativa e dividindo esse resultado por 2 não é válida na Geometria Hiperbólica;

Figura 30: Foto de Lambert. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Johann-Heinrich-Lambert

- Na Geometria Hiperbólica não há retângulos, os quadriláteros terão no máximo, três ângulos retos;
- Na Geometria euclidiana se duas retas distintas são paralelas há uma terceira, então elas são paralelas entre si, o mesmo não se pode dizer na Geometria hiperbólica;
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo não é constante e, é sempre menor do que 180º;
- A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero também não é constante e, é sempre menor do que 360º.

Neste capítulo foram citados matemáticos como Johann Christian Martin Bartels (1769 - 1836) que foi um matemático alemão, Tutor de Gauss e Professor de Lobachevsky.

Outro importante matemático citado no texto foi Beltrami que deu contribuições em Geometria Diferencial através de Curvas e Superfícies, além de uma ajuda substancial no desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas.

E ainda, na figura 17 foi citado o holandês Mauritus Cornelis Escher (1898 - 1970) uma pessoa que dedicou toda a sua vida às artes gráficas, sem um conhecimento matemático prévio, mas através do estudo sistemático e da experimentação, descobre todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é brilhantemente utilizada na xilografia (arte de reproduzir imagens e textos por meio de pranchas de madeira gravadas em relevo.).

Na figura 34 aparecem mais duas litografias (processo de gravar sobre pedra calcária ou placa de metal) de Escher dentro dos discos de Poincaré.

Figura 31: Foto de Bartels. Fonte: http://wikipedia.org/wiki/Johann-Christian-Martin-Bartels

Figura 32: Foto de Beltrami. Fonte: http://www.encyclopedia.com/topic/Eugenio-Beltrami.aspx

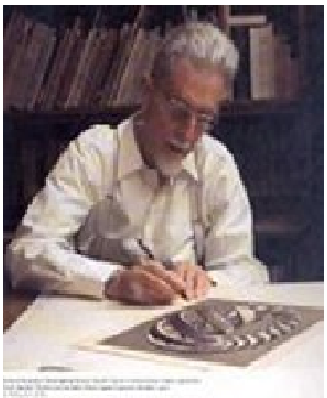

Figura 33: Foto de Escher. Fonte: http://costapintodesigner.blogspot.com.br/2010/11/mc-escher-uma-breve-biografia.html

Figura 34: Litografias de Escher. Fonte: http://zephmeister.blogspot.com.br/2010/08/magica-grafica-escher.html

5 A GEOMETRIA ELÍPTICA OU GEOMETRIA RIEMANNIANA

5.1 ESTUDO

O surgimento da Geometria Elíptica ocorreu em 1854 durante um evento acadêmico na Universidade de Göttingen no qual um jovem pesquisador se aventurou na extrapolação dos estudos sobre a Geometria Euclidiana. Seu nome era Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866) e seu objetivo era o de obter a qualificação necessária a fim de se tornar Professor Universitário.

Riemann foi ousado e corajoso ao enfrentar o tema escolhido por sua banca examinadora, que continha nomes de peso como, por exemplo, Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Ainda naquela época, havia a vontade entre os matemáticos de se demonstrar o quinto postulado de Euclides a partir dos outros quatro postulados, apesar de anos antes já ter havido a chamada Geometria Hiperbólica de Lobachevsky e Bolyai.

Sobre Lobachevsky já foi falado um pouco, agora com relação a János Bolyai, pode-se dizer que foi uma criança prodígio. Filho do matemático húngaro Farkas Bolyai (1775 - 1856), Farkas Bolyai era amigo pessoal de Gauss.

János Bolyai teve toda a sua infância voltada para o aprendizado da Matemática. Tendo seu pai como professor desse assunto, aos treze anos ele já tinha um bom domínio de Cálculo e várias formas de Mecânica Analítica.

Em 1832, após cinco anos de estudos, Bolyai publicou os resultados de sua pesquisa sobre Geometrias não Euclidianas como um apêndice a um trabalho volumoso de seu pai.

Bolyai teve uma vida dura. Morreu em 1860 e a cerimônia de seu enterro parecia um ritual de esquecimento. Pouquíssimas pessoas estiveram presentes para verem seus restos

Figura 35: Foto de Farkas Bolyai. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Farkas-Bolyai

Figura 36: Foto de János Bolyai. Fonte: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a-geometria-dos-espacos-curvos.pdf

mortais serem colocados em um túmulo coletivo sem lápide. O registro de sua morte numa igreja, dizia apenas: “Sua vida passou inutilmente”.

Curiosamente, Bolyai nunca publicou seus trabalhos, exceto algumas poucas páginas no apêndice do livro de seu pai. No entanto, ele deixou muitas páginas em manuscritos de trabalhos de Matemática desenvolvidos por ele até a sua morte.

Entretanto, ainda havia um problema fundamental nesse contexto, e este era o fato de que não havia um modelo dessa Geometria, única maneira de se garantir que não se poderia achar alguma contradição nas construções de Lobachevsky e Bolyai. Ao se acessar as conclusões obtidas por Gauss em muitos de seus *papers*, percebe-se que ele acreditava que uma superfície de curvatura negativa constante, conforme aquelas citadas no capítulo

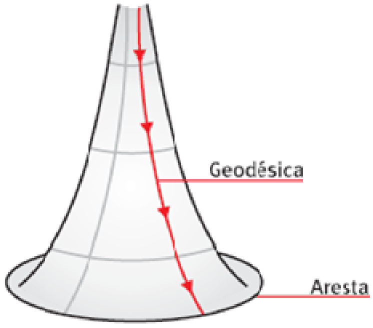

Figura 37: Figura com curvatura constante negativa

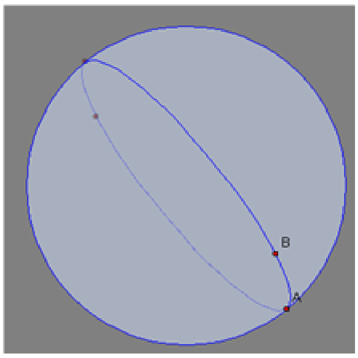

Figura 38: Figura de uma esfera com indicação de um círculo máximo

anterior e, ilustrada na figura 37, na figura 38 aparece um modelo de uma superfície com curvatura constante e positiva, em geral, uma superfície tem curvatura negativa quando duas curvas que se cortam passando por um ponto seguem caminhos de sentidos opostos e as que possuem curvatura positiva se cortam seguindo caminhos de mesmo sentido.

Conforme visto na figura 37, o modelo de Beltrami possuía um defeito. As superfícies de curvatura negativa constante, conhecidas na época, possuíam arestas, o que impedia o prolongamento de certas geodésicas. Hoje se sabe que nas superfícies de curvatura positiva constante, as curvas geodésicas são as retas de uma Geometria não Euclidiana, na qual vale a hipótese do ângulo obtuso de Saccheri. Essa Geometria pode ser imaginada na esfera em que as retas são os círculos máximos, conforme a figura 38.

Até aqui foram citadas algumas vezes o nome do matemático Carl Friedrich Gauss, considerado o maior matemático de sua época e, também o príncipe dos matemáticos. Foi um menino prodígio, já aos dez anos de idade, ainda na escola elementar, Gauss mostrou seu potencial matemático ao demonstrar quase que imediatamente aos seus professores a soma dos números inteiros de 1 a 100, notando que isso representava a soma de cinquenta

Figura 39: Foto de Gauss. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Gauss

pares de números cuja soma dos números de cada par era sempre 101.

Desde o início dos anos de 1800, Gauss começou a se interessar pela possível existência de Geometrias não Euclidianas. Sabe-se a partir dos seus livros de anotações que Gauss desenvolveu partes de uma nova Geometria, que não era a euclidiana, já por volta do ano de 1820. No entanto, ele sabia que a existência de uma Geometria não Euclidiana faria uma pertubação imensa na Matemática. Mais ainda, ele notou que a reação de seus colegas a essa descoberta e, a qualquer um que a apoiasse publicamente, seria extremamente dura. Desse modo, ele preferiu manter seu status social e não divulgou os resultados de sua pesquisa. Deve ficar claro, entretanto, que Gauss não se acovardou cientificamente, pois manteve correspondência sobre o assunto com vários matemáticos de sua época, embora sem adaptar seu extenso trabalho para a forma de artigo científico.

Gauss também demonstrou grande interesse em Geometria Diferencial. Publicou vários artigos sobre o assunto e, em 1828, apresentou um de seus mais importantes artigos onde estava contido o famoso *"Teorema Egregium"* um resultado fundamental em Geometria Diferencial que trata da curvatura de superfícies, além de importantes ideias geométricas, tais como a curvatura gaussiana. (Um tratamento bacana a respeito desses temas podem em [10, 11])

Então vários dos exemplos de superfícies tinham pontas ou arestas o que contradiz o segundo postulado de Euclides e, é exatamente nesse ponto que se situa o trabalho de Riemann. Lançando mão de uma linguagem espartana, sem definições precisas, nem demonstrações cuidadosas, Riemann, durante sua dissertação em 1854, introduziu o que hoje é chamado de *variedade de dimensão n* (um objeto que generaliza a noção de superfície para qualquer dimensão e sem menção a um espaço ambiente) e postulou que uma

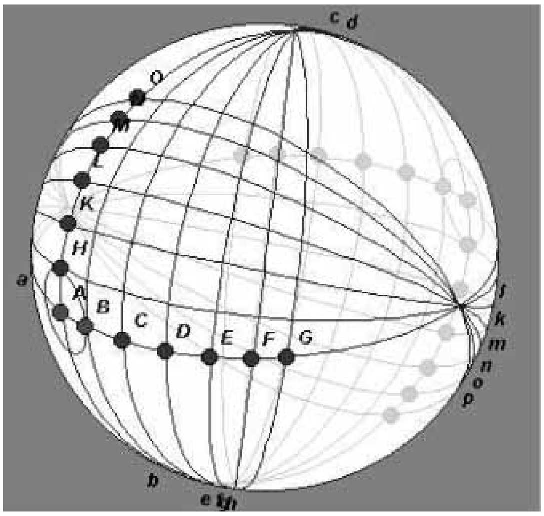

Figura 40: Linhas geodésicas na esfera

Geometria era um modo de medir comprimentos em uma tal variedade. (Um aprofundamento nesse assunto pode ser dado ao estudar os dois livros do Manfredo do Carmo, [10, 11]) A partir daí, são definidas as curvas "mais curtas entre pontos próximos", chamadas *geodésicas*, que irão desempenhar o papel de retas nesta Geometria, por exemplo, a ilustração na figura 4.6 representa um postulado desse tipo de Geometria:

"Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro".

Gauss havia provado que a curvatura de uma superfície dependia apenas de medidas feitas sobre ela. Riemann, então, aproveitou esse fato e, levando em conta que a Geometria por ele definida dependia de medidas feitas na variedade, definiu a curvatura de uma variedade de tal modo que a curvatura de uma superfície passou a ser um caso particular da noção de curvatura de uma variedade de Riemann.

O caso mais simples dessa situação é o espaço euclidiano usual, no qual as geodésicas são retas, e a curvatura é identicamente nula. Riemann afirmou, mas não provou, que se a curvatura é zero por toda parte, então a variedade é local, isto é, nas proximidades de um ponto tem-se o espaço euclidiano usual.

Então o grande passo para o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas foi feito por Riemann. Conforme foi dito no início desse capítulo, querendo obter a posição de Professor Assistente na Universidade de Göttingen, Riemann tinha que fazer uma palestra que serviria como teste. Seguindo o procedimento existente, ele apresentou ao Departamento três tópicos para que fosse escolhido o assunto da palestra. Dois desses tópicos versavam sobre problemas correntes entre os matemáticos da época, enquanto que o terceiro estava voltado para os Fundamentos da Geometria. Muito embora esse último assunto fosse o menos preparado por ele, Gauss escolheu exatamente o terceiro tema na expectativa de ver como um jovem matemático trataria tema tão difícil.

Riemann deu sua palestra sobre o tema, que mais tarde foi publicada com o título de *"Sobre as Hipóteses Subjacentes aos Fundamentos da Geometria"*, com sucesso absoluto. Após o término da palestra Gauss permaneceu em silêncio e, então levou Riemann aos céus, algo bastante raro de ser feito por ele.

Gauss ficou impressionado com a abordagem que Riemann deu para essa Geometria não Euclidiana pelo fato dela ser bem diferente daquelas apresentadas pelos seus antecessores. Aparentemente Riemann não sabia nada a respeito dos trabalhos de Lobachevsky e Bolyai e tinha apenas uma vaga ideia do interesse de Gauss pelo assunto. O sucesso de Riemann se deve ao fato dele ter incorporado em seus estudos duas ideias extremamente férteis: o aparato matemático de Gauss para descrever a Geometria de Superfícies Curvas Bi-dimensionais e seu próprio novo conceito de *Variedade Multidimensional*, ou seja, objetos geométricos de múltiplas dimensões.

Uma superfície é uma variedade bi-dimensional, um espaço é uma variedade tri-dimensional, etc. Como essa é a única diferença entre elas, todas as ideias e métodos usados para descrever superfícies bi-dimensionais podem ser agora diretamente aplicados a espaços curvos tri-dimensionais. Entre as noções usadas a mais importante é aquela de métrica, ou seja, a forma quadrática para as diferenças entre coordenadas que descreve o comprimento do intervalo entre dois pontos vizinhos em uma variedade curva, esses temas não serão abordados no trabalho, mas também podem ser encontrados nos livros do Manfredo do Carmo supracitados.

A **Geometria Esférica** é uma Geometria não Euclidiana de espaços com curvatura constante positiva. A propriedade essencial desse espaço é que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre ela na mesma direção, ele pode certamente retornar ao ponto de partida. Como pode ser visto na figura 40, ao invés de linhas retas da Geometria Euclidiana na Geometria Esférica Riemanniana temos **geodésicas**, ou seja, os arcos dos grandes círculos que podem ser traçados sobre a esfera.

A partir de uma ilustração bi-dimensional da Geometria sobre a Esfera conforme a mostrada na figura 40, fica claro que a noção de linhas paralelas como dada pelo quinto postulado de Euclides nesse caso não tem qualquer sentido, pois qualquer arco de um grande círculo que passa através de um ponto C, não situado sobre AB, necessariamente irá intersecrtar AB e até mesmo em dois pontos diferentes. Nessa Geometria a soma

Figura 41: Foto de Riemann. Fonte: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a-geometria-dos-espacos-curvos.pdf

dos ângulos internos de um triângulo, formado por três arcos que se intersectam de três grandes círculos é maior do que 180º e, será sempre assim nessa Geometria. Esta bem sucedida integração de ideias permitiram que Riemann avançasse ao construir tantos casos particulares de Espaços Não-Euclidianos como uma teoria de espaços arbitrariamente curvos. Em primeiro lugar Riemann descobriu uma Geometria Esférica que era oposta à Geometria Hiperbólica. Dessa maneira, ele foi o primeiro a indicar a possibilidade de existir um espaço geométrico finito. Essa ideia logo se firmou e trouxe a questão de se o espaço físico era finito. Além disso, ele teve coragem de construir Geometrias muito mais gerais do que a de Euclides e mesmo as aproximadamente não Euclidianas já conhecidas.

Desse modo, a Geometria Euclidiana é apenas uma entre as Geometrias de Riemann e, é possível provar, como Gauss havia previsto, que as variedades de curvatura negativa constante fornecem modelos para Geometrias que não satisfazem o quinto postulado de Euclides.

Entre os modelos de Geometria Elíptica (Geometrias Projetiva, Estereográfica, Hiperesférica, etc) esse trabalho se limitará a um tipo especial, que facilita a visualização, ou seja, a Geometria Esférica, onde as retas são as *geodésicas ou círculos máximos* da superfície e, agora serão dados alguns resultados importantes tirados do estudo da Geometria Elíptica:

- Uma “reta” nessa Geometria é ilimitada, mas não é infinita;
- Por um ponto P qualquer, fora de uma reta r, não passa nenhuma paralela à r;

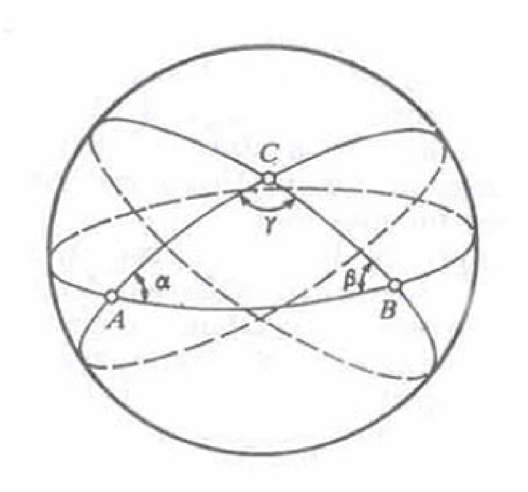

Figura 42: Um triângulo ABC com indicação de seus ângulos na esfera

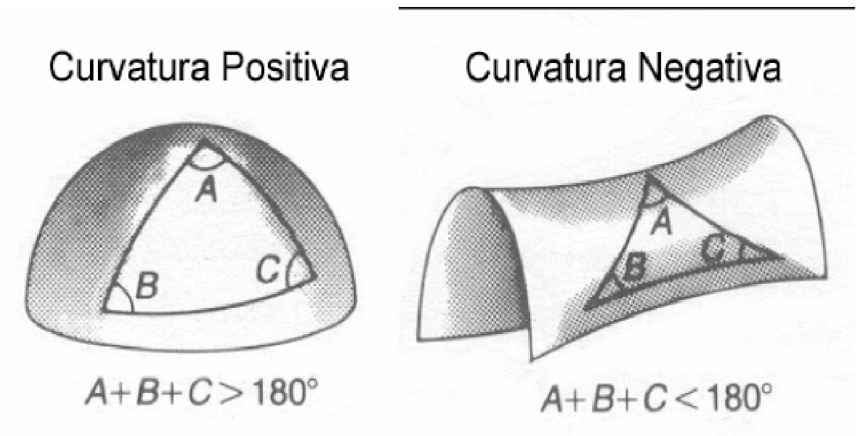

Figura 43: Triângulos desenhados em superfícies de curvaturas positiva e negativa, respectivamente

Figura 44: Professor exibindo uma das proposições anteriores

- A soma dos ângulos internos de um triângulo não é constante e, é sempre maior do que 180º;
- Os lados de um triângulo são ângulos com vértices no centro da esfera e são medidos em graus;
- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero não é constante, no entanto, é sempre maior do que 360º;
- A classificação dos triângulos quanto aos ângulos é dada devido a quantidade de ângulos retos que eles possuem um, dois ou três, tendo os nomes de retângulo, birretângulo e trirretângulo, respectivamente;
- A classificação dos triângulos quanto aos lados será retilátero, birretilátero ou trirretilátero, caso tenham um lado, dois lados ou os três lados medindo 90º, respectivamente.

A audaciosa concepção de Riemann não foi bem entendida em sua época, lentamente foi se desenvolvendo e, hoje é chamada de Geometria Riemanniana. Um dos pontos importantes nesse desenvolvimento foi a Teoria da Relativadade Geral do físico alemão Albert Einstein (1879 - 1955), de 1916, em que ele utilizou a linguagem introduzida por

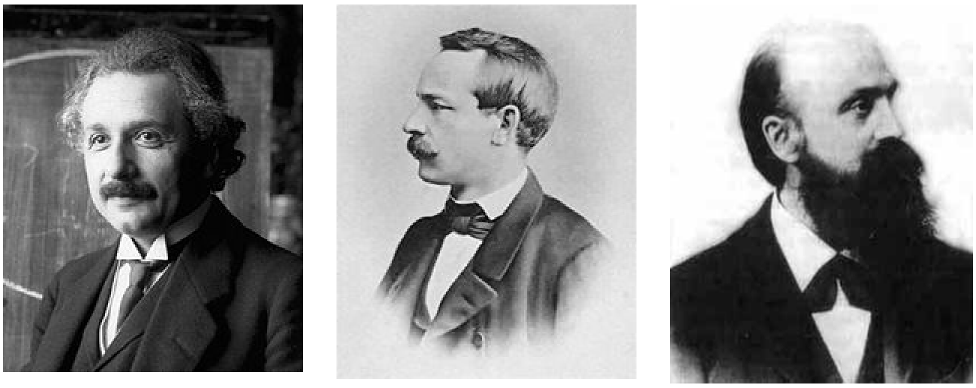

Figura 45: Fotos de Einstein, Cristoffel e Killing. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

Riemann e por seus sucessores, especialmente, os matemáticos alemães Elwin Cristoffel (1829 - 1900) e Wilhelm Killing (1853 - 1925).

Na figura 45 aparecem as fotos de Einstein, Cristoffel e Killing, respectivamente.

Apesar da natural tendência em se discutir qual modelo de Geometria é mais viável para se representar o nosso Universo, o fato é que a Geometria de Riemann se consolidou como uma teoria consistente e totalmente aceita pela comunidade acadêmica, sendo rotineiramente aplicada nos mais diversos ramos da atividade humana como, por exemplo, na navegação marítima, aérea, etc.

6 AS TRÊS GEOMETRIAS: EUCLIDIANA, HIPERBÓLICA E ELÍPTICA

6.1 COMPARAÇÃO

Uma maneira prática pela qual pode-se fazer distinção entre essas Geometrias é a seguinte: Pegar uma folha de papel e colocá-la sobre uma pequena superfície plana. Será observado que o papel cobrirá suavemente toda essa superfície. Agora, com uma folha de papel de mesmo tamanho ao se cobrir uma superfície esférica com uma área equivalente à da superfície plana que fora coberta inicialmente pela folha de papel, será percebido que, essa superfície para ser coberta completamente será necessário permitir que surjam vincos no papel. Isso indica que próximo a qualquer ponto dado sobre a superfície da esfera a área do papel é maior do que a área que se está tentando cobrir. Quando se tenta cobrir a superfície de uma sela com a mesma folha de papel o que ocorrerá será a situação inversa, a área do papel torna-se insuficiente para cobrir a superfície próxima a qualquer ponto sobre ele e o papel se rasga.

Outro fato interessante a se considerar é que a palavra "hipérbole", vem do grego, significando "excesso", já a palavra "elipse" significa "deficiência" e a palavra "parábola" significa sendo "paralelo a". Daí, pode-se pensar que a Geometria Hiperbólica é aquela que possui um excesso de paralelas, já que podem existir infinitas retas paralelas a uma dada reta passando por uma ponto fora dessa reta dada e, na Geometria Elíptica existe uma deficiência dessas paralelas, pois não há nenhuma reta paralela a uma dada reta passando por um ponto fora dessa reta dada, ambas quando comparadas em relação à Geometria Euclidiana.

Agora, sobre qual das Geometrias é preferível para o mundo físico, Gauss tentou resolver esse problema através de uma experiência medindo os ângulos de um triângulo

Comparandos os três espaços uniformes	
espaço euclidiano	através de um ponto dado podemos traçar somente uma paralela a uma linha reta.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é igual a π vezes o seu diâmetro.
espaço esférico	através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a um ponto dado.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é menor do que π vezes o seu diâmetro.
espaço hiperbólico	através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é maior do que π vezes o seu diâmetro.

Figura 46: Quadro comparativo entre as três geometrias vistas

formado por três picos de montanhas bem afastadas e dentro dos limites de erros experimentais, resultaram no famoso 180º da Geometria Euclidiana. Portanto, não se pode nem afirmar nem negar que a Geometria Euclidiana corresponde à realidade, pois quando as referências tomadas estão muito distantes, as diferenças entre essas Geometrias tornam-se significativas. Porém, para distâncias muito pequenas as três Geometrias acabam tendo uma convergência de resultados e a preferência pela Euclidiana ocorre, por ela ser a mais simples dessas três Geometrias.

Certamente uma grande lição deixada por essas novas Geometrias foi a influência deixada sobre a concepção matemática no século XX, pois suas consolidações deixaram claro que numa teoria todos os elementos devem ser cuidadosamente analisados, com a necessidade do rigor matemático em todas as suas demonstrações não devendo se ficar preso a certos apelos intuitivos da teoria.

7 ALGUMAS PROPOSTAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Neste capítulo a ideia é ofertar algumas propostas didáticas de atividades envolvendo o estudo da Geometria Hiperbólica para os alunos dos ensinos fundamental e médio, em especial aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, antiga 8ª série. É aconselhável para o professor optar entre fazer as atividades com o Cabri-Géomètre que são um pouco mais gerais, ou com o Geogebra, não precisa usar os dois programas para não acarretar numa tomada muito grande do tempo das aulas de Geometria. As atividades usando esses recursos computacionais é sugerida para serem executadas em duas aulas de 50 min, mas não é preciso usar os dois programas, indica-se o Cabri, aí não é preciso fazer a última atividade desse capítulo, caso não seja possível a utilização dele, fica a sugestão para o professor de fazer somente a última atividade do capítulo, pois esta lança mão do Geogebra.

Na sugestão para essas atividades está bem claro que o uso de um recurso implica na não utilização do outro, caso não haja os recursos computacionais na escola, essas atividades tornam-se impraticáveis.

Aprofundando essa exposição, em verdade, essa proposta se resume a exemplos simples de aplicação da Geometria Hiperbólica, em particular, quando esta é representada através do Disco de Poincaré. Isto torna-se interessante, pois o público alvo será levado a analisar e a estabelecer relações entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica que é um dos ojetivos propostos dessa apresentação.

Vale destacar que essas atividades que serão apresentadas serão praticáveis em um ambiente informatizado de ensino, ou seja, aquele que lança mão de softwares específicos de Geometria Dinâmica, como o Cabri-Géomètre e o Geogebra que serão os alicerces dessa proposta.

Em linhas gerais, a proposta se resume em cinco etapas, a saber:

- Apresentação das Geometrias não Euclidianas, fundamentada no seu desenvolvimento histórico, seguida de atividades de reflexão sobre o quinto postulado de Euclides;
- Exploração do "Menu-Hiperbólico" no Cabri-Géomètre;
- Atividades de exploração no modelo do Disco de Poincaré;
- Atividades de construção no modelo do Disco de Poincaré;
- Percepção da necessidade dessas novas Geometrias para a compreensão de outros conceitos geométricos analisados em planos diferentes do euclidiano.

7.1 APRESENTANDO ALGUMAS PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Na primeira atividade o objetivo será introduzir alguns conceitos de base da Geometria Hiperbólica, o que levará a compreensão dos principais aspectos históricos e matemáticos, como, por exemplo, a base euclidiana com a estrutura do Livro I dos Elementos de Euclides; o quinto postulado de Euclides e o surgimento das Geometrias não Euclidianas; a Geometria Hiperbólica e o modelo do Disco de Poincaré, entre outros.

Essa exposição das Geometrias não Euclidianas, em particular a Geometria Hiperbólica com o modelo do Disco de Poincaré, fudamenta-se no seu desenvolvimento histórico e busca abranger três aspectos:

- A Geometria de Euclides, em particular, características e estruturas do Livro I de sua obra "Os Elementos";
- A relação do quinto postulado de Euclides com o surgimento de novas Geometrias, incluindo enunciados equivalentes a esse postulado, as proposições que utilizam direta ou indiretamente esse postulado e a caracterização da Geometria Absoluta citada no texto;
- O modelo do Disco de Poincaré, com a interpretação dos principais objetos hiperbólicos, como ponto, reta, plano e também as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e de medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas.

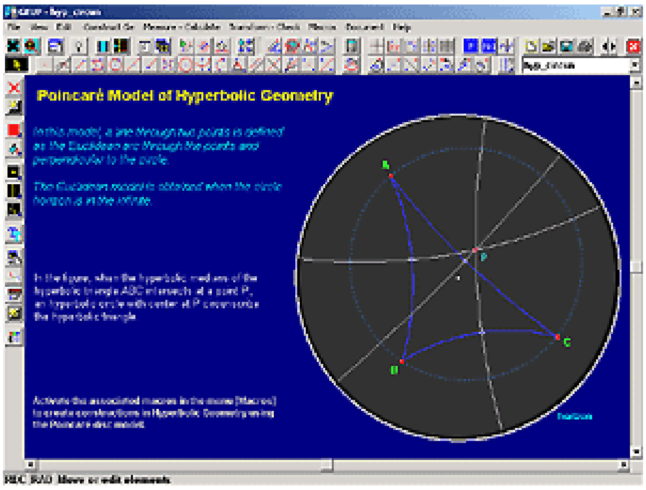

Figura 47: Software de Geometria Dinâmica no modo hiperbólico

7.2 ENFOQUE NO MENU HIPERBÓLICO

Esta etapa, que precede a apresentação de situações-problemas para os alunos é útil para familiarizá-los com a barra do menu hiperbólico, uma ferramenta imprescindível para desempenhar as atividades que serão sugeridas.

Deve-se enfatizar, entretanto, que neste ponto surgirão diversas dúvidas dos alunos, principalmente em julgar o que será válido ou não neste modelo. Uma alternativa eficaz para contornar esse problema é propor a construção desse menu, o que certamente irá catalisar o processo de transição entre os níveis teóricos e de espaço-gráfico, na medida em que o objeto geométrico é dado em termos de T e os alunos devem produzir uma representação passando para o domínio gráfico.

A seguir será representado um esquema com a interpretação dos principais entes hiperbólicos: ponto, reta, plano e também as definições de distância hiperbólica entre dois pontos e a medida de um ângulo entre duas retas hiperbólicas:

Modelo do Disco de Poincaré

Nesse modelo, o plano, o ponto, a reta, a distância e o ângulo são interpretados da seguinte maneira:

- Plano-h: é o interior de uma circunferência euclidiana (C) de centro (O) e raio (r), chamado de horizonte;
- Ponto-h: é qualquer ponto no interior do horizonte;

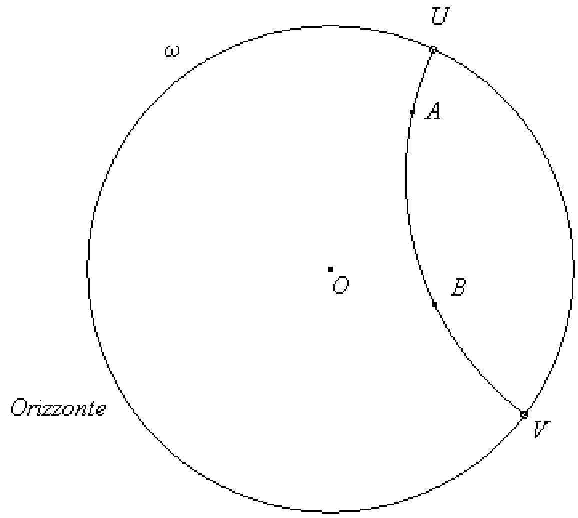

Figura 48: Disco de Poincaré no software

- Reta-h: é um diâmetro da circunferência (C) ou é um arco de uma circunferência ortogonal a (C);
- Ângulo-h entre duas retas-h: é o ângulo euclidiano formado pelas retas tangentes às retas-h no ponto de interseção delas;
- A distância-h: entre dois pontos A e B é dada por mólulo de $d(A, B) = ln\left[\frac{(AU.BV)}{(BU.AV)}\right]$ onde U e V são interseções da reta com o horizonte e as distâncias entre os pontos A e U, A e V, B e U, B e V são todas distâncias euclidianas.

7.3 EXPLORAÇÃO NO MODELO DO DISCO DE POINCARÉ

As atividades propostas para a exploração da Geometria Hiperbólica no modelo do Disco de Poincaré visam levar os alunos que a praticarem à formulação de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas.

O objetivo principal dessas atividades é levar os alunos à discussão da validade (ou não) de alguns teoremas da Geometria Euclidiana na Geometria Hiperbólica. Dentre os teoremas que não são válidos na Geometria Hiperbólica, alguns podem ser considerados enunciados equivalentes ao quinto postulado de Euclides (como citado anteriormente) e outros enunciados fazem uso do quinto postulado de forma não direta, ou seja, relacionam-se a ele. Espera-se assim que os alunos identifiquem a equivalência ou relação entre esses enunciados, chegando a formular justificativas para sua não validade no modelo hiperbólico.

A hipótese é que, na medida em que os estudantes fazem uma comparação entre as proposições nas duas Geometrias, motivados por tais atividades de exploração, uma releitura da Geometria Euclidiana se torne possível. Neste caso, intensificam-se as trocas entre os domínios teóricos e espaços-gráficos das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica, o que pode levar a compreensão de modelo em Geometria e melhor situar as proposições e relações que pertencem aos seus sistemas de axiomas.

Para essas atividades, é disponibilizada a barra completa do menu hiperbólico do Disco de Poincaré, com o diferencial de que, neste momento, grande parte delas foi efetivamente construída pelos alunos.

Para as atividades de exploração, enunciam-se alguns teoremas da Geometria Euclidiana e solicita-se a verificação de sua validade na Geometria Hiperbólica. Com o auxílio do software Cabri-Géomètre, os alunos podem fazer validações experimentais e levantar conjecturas que auxiliam para um processo de prova, no qual esperam-se que os atores da ação se engajem.

Logo, nessa proposta, enunciam-se sete teoremas da Geometria Euclidiana que são considerados fundamentais e observa-se que a lista pode ser ampliada, incluindo-se outras proposições da Geometria Euclidiana.

Atividade 7.1. *Abaixo estão enunciados alguns teoremas da Geometria Euclidiana. Utilizando o cabri-géomètre verifique quais deles também são válidos na Geometria Hiperbólica, justificando sempre a sua resposta.*

1 - A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180º.

2 - Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

3 - Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem todos 60º.

4 - Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

5 - Todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.

6 - Podemos inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado.

7 - O ponto de insterseção das medianas divide cada uma delas na proporção de 2 para 1 a partir do vértice.

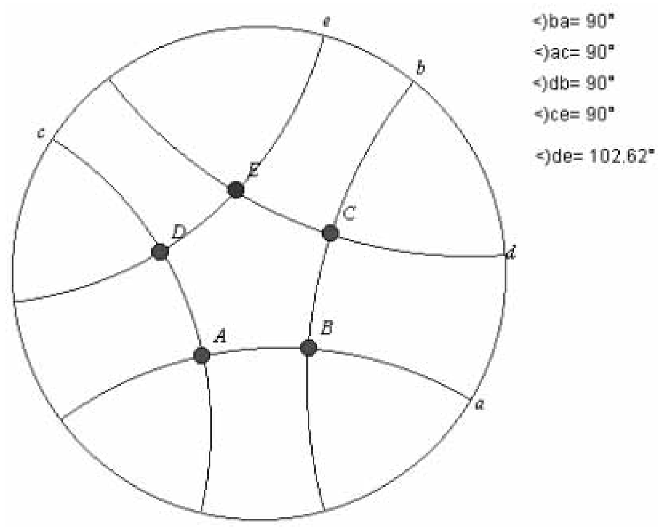

Figura 49: Pentágono no Disco de Poincaré

7.4 CONSTRUINDO OS MODELOS NO DISCO DE POINCARÉ

Nesta etapa da proposta didática envolvendo o estudo da Geometria Hiperbólica é útil abordar diferentes aspectos tratados nas primeiras fases e, inclusive, adentrar em outros.

Sendo assim poderão ser propostas muitas atividades, todas elas inseridas no contexto do modelo do disco de Poincaré, envolvendo a construção de diferentes polígonos como, por exemplo, triângulos hiperbólicos, quadriláteros de Saccheri e de Lambert, etc.

O exemplo específico abaixo serve para mostrar de forma prática algumas contradições que serão apresentadas aos estudantes quando explorarem a Geometria Hiperbólica através do disco de Poincaré. Conflitos conceituais são inevitáveis neste campo, mas o que se busca, na verdade, é o real entendimento de cada tipo de abordagem geométrica, euclidiana ou, no caso, a hiperbólica. Aqui a contradição se apresenta em relação ao somatório dos ângulos internos do pentágono, que terá valor inferior a 540º o que não ocorre na Geometria Euclidiana.

O detalhe de se iniciar a última etapa com a construção de quadriláteros se trata apenas de um capricho do professor, que pode ou não escolher abordar figuras não usuais para o estudante como os quadriláteros de Saccheri, de Lambert abordando os seus perfis históricos, ou então, um começo usual, abordando triângulos de tipos variados no disco de Poincaré.

Atividade 7.2. *Construir um pentágono fazendo uso do modelo do Disco de Poincaré.*

Um conceito metodológico que pode, vir a ser discutido e implementado na Educação Básica, inclusive no ensino fundamental conforme a proposta. Cabe a cada professor ter a sensibilidade para fazer uso de Softwares de Geometria Dinâmica o quanto antes possível o que, sobremaneira irá facilitar a compreensão dos conceitos abstratos da Geometria Hiperbólica. Sendo assim, é opcional a cada professor adaptar e enriquecer a realidade da proposta a seu universo escolar.

Não é interessante para o professor ficar numa discussão axiomática, mesmo porque os alunos deveriam ter uma base sólida de fatos geométricos e processos dedutivos. Sendo assim, o professor deve colaborar para a formação dessa base, estimulando o olhar crítico e a percepção de um processo lógico-dedutivo do aluno. Com a exposição do tema e as atividades até aqui propostas, deve estar claro para os alunos, que o desenvolvimento e o surgimento das Geometrias não Euclidianas foi devido a questão de se o quinto postulado de Euclides era ou não um teorema. O trabalho dessas Novas Geometrias na escola, além de ser motivador, pois dá uma mostra de como elas contribuíram para o enriquecimento da Matemática e de outras Ciências, ele ajuda a estruturar a capacidade dedutiva dos alunos.

A atividade a seguir é sugerida para aplicação pelos professores nos ambientes escolares que não possuam o Cabri-Géomètre, pois se sabe que muitos professores não conhecem ou, conhecem mas nunca usaram o Cabri, então segue uma atividade no Geogebra que já é um software mais conhecido entre os professores. Cabe ressaltar que sem o ambiente informatizado na escola fica impossível realizar as atividades desse capítulo com os alunos.

Atividade 7.3. ***Outra atividade envolvendo a Geometria Hiperbólica***

O conteúdo de Geometria Hiperbólica sendo inserido sem alguns cuidados torna-se questionável sua inserção, devido as reais condições para o aparecimento em sala de aula. Alguns alunos apresentam dificuldades nessa aceitação, pois vivenciam há anos apenas a Geometria Euclidiana.

A ideia agora é construir um triângulo hiperbólico usando o software Geogebra, essa é uma construção não tão simples de realizar, para a sua realização envolve-se muita atenção. Nela o aluno necessita da ferramenta segmento hiperbólico que pode e deve ser criada.

Para a construção do triângulo hiperbólico os alunos utilizarão ferramentas do Software GeoGebra e conceitos como eixo, ponto, círculo, reta tangente, segmento definido por dois pontos, ângulos e vértices serão utilizados.

Essas ferramentas e esses conceitos devem ser concebidos de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir, podendo ele, adquirir os novos conhecimentos em questão.

Após a construção do triângulo pode ocorrer de os alunos participantes da atividade, apesar de conseguirem visualizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180º, não aceitarem essa Geometria. Nesse momento caberá ao professor mediar as discussões a respeito desse resultado e limitá-las aos objetivos propostos na apresentação desse tema aos alunos.

Com o uso do GeoGebra as atividades podem ser limitadas a construção de retas, triângulos e quadriláteros hiperbólicos dentre esses últimos é interessante que se construam os de Saccheri e o de Lambert e, assim caberá ao professor fazer um encerramento das atividades ou inserir outras atividades dependendo dos desdobramentos dessas atividades em sala de aula.

8 ALGUMAS ATIVIDADES ENVOLVENDO A GEOMETRIA ESFÉRICA

Algumas noções básicas de Geografia podem ajudar a interpretar esta Geometria, já que o planeta Terra onde a humanidade vive tem uma forma quase esférica.

A Geometria Esférica tem sido muito empregada nas rotas aéreas e marítimas.

Para as atividades que serão sugeridas para essa Geometria não serão necessários os recursos computacionais, elas estão sendo propostas nestes moldes pois diversos alunos distribuídos em várias escolas espalhadas pelo País não têm acesso a tais recursos computacionais como os que foram propostos para as atividades do capítulo anterior. Dessa forma, as atividades desse capítulo podem ser aplicadas em qualquer ambiente, sendo preciso para isso apenas boa vontade dos que participarão das atividades.

Atividade 8.1. ***Um famoso problema dessa Geometria***

"Um urso polar saiu de um determinado ponto e caminhou 10 km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou mais 10 km. Então virou e caminhou novamente por mais 10 km ao norte, chegando ao local de origem". Onde está tal urso?

1) Desenhe numa folha pode ser de papel ofício a viagem do urso. Comente com os colegas de seu grupo as conclusões a que vocês chegaram e anote-as abaixo.

2) É possível para um urso chegar ao mesmo lugar em que ele iniciou uma caminhada como a descrita acima?

3) Esboce sobre sua esfera o desenho da viagem do urso. Relate as conclusões a que chegaram.

Ao se deparar com esse problema os alunos deverão tentar fazer essa trajetória do urso e perceberão a impossibilidade dele voltar à origem, pois seu trajeto formaria um quadrado faltando um dos lados e ao final ele se encontraria a 10 km da origem. Agora,

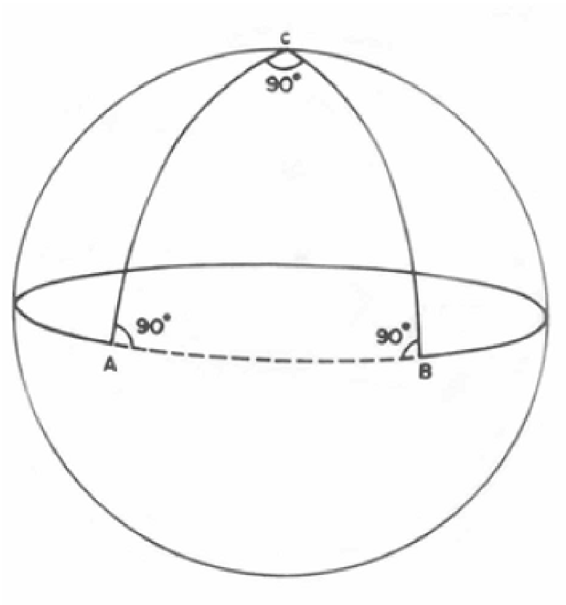

Figura 50: Um triângulo com três ângulos retos

ao transferir o problema para uma esfera ele passa a ser analisado no Globo Terrestre, e verifica-se que o urso só poderia estar no pólo norte e que seu trajeto formaria um triângulo. Veja um esboço na figura 50, onde o urso inicialmente estava em C, e então caminhou até o ponto B, dali caminhou até o ponto A e finalmente voltou ao ponto C.

Neste momento é bom dizer aos alunos que nessa Geometria quanto maior o triângulo maior a soma dos seus ângulos internos, mas esses triângulos, são diferenciados de um triângulo numa figura plana e, a partir daí, podem ser inseridos os conceitos de ângulo e polígono esférico.

O ângulo esférico é definido como sendo a interseção de duas geodésicas e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica no ponto de interseção.

Os polígonos são definidos pela porção da superfície esférica limitada pelos arcos das geodésicas.

Vale ainda destacar que na Geometria Esférica:

- Os triângulos semelhantes são obrigatoriamente congruentes;
- A fórmula $\frac{(base \times altura)}{2}$, usada para calcular a área de um triângulo euclidiano não é válida nessa Geometria;
- Não existem retângulos na Geometria Esférica;

- Por dois pontos podem passar infinitas retas (pontos opostos em uma superfície esférica);
- Por um ponto P fora de uma reta r, não passa nenhuma reta paralela a reta r.

Com essa atividade do problema do urso, pretende-se mostrar ao aluno que a Geometria Euclidiana não é a única Geometria existente, e em problemas simples como esse, se modelados para o nosso cotidiano e pensando na Terra como um objeto esférico outra Geometria figura, um problema aparentemente sem solução na Geometria Euclidiana passa a ter uma solução simples nessa nova Geometria. É uma boa hora para mostrar aos alunos um exemplo em um problema totalmente compreensível que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º.

Seria interessante que essa atividade pudesse ser aplicada no 9º ano do E.F.. Pois nesse momento o aluno já teria visto no 8º ano do E.F. boa parte dos conceitos de Geometria Euclidiana e no 9º ele retornaria a eles e poderia desde cedo ser orientado de que existem outras Geometrias, pode-se ainda aproveitar o ensejo dos alunos estarem começando a ver conceitos de física como distância percorrida e deslocamento, para ver as conclusões que eles tiram da distância percorrida nas duas Geometrias bem como o deslocamento, será que são os mesmos?

É importante que o aluno tenha visto os conceitos básicos de Geometria dados na Educação Básica e que ele saiba fazer alguns traçados dentro da Geometria. Para essa atividade é interessante que os alunos levem bexigas (algumas), pois é um material barato e certamente não haverá problemas para o Professor de pedir aos alunos para que as levem para a escola, quem quiser pode ainda levar canetinhas, mas se não quiser podem desenhar nas bexigas com as canetas que usam para escrever suas matérias em seus cadernos, no entanto, muitas bexigas podem estourar sem o uso das canetinhas. Eles devem ainda trazer uma folha de papel ofício ou A4, ou ainda usar a própria folha do caderno para descrever o trajeto do urso no plano.

Conforme dito acima os alunos terão 14 anos de idade ou mais, pois estarão no 9º ano, sugere-se que os alunos façam individualmente essa atividade do urso, sobre a atividade, depois de discutida as respostas com os alunos e o Professor já ter feito uma explanação da Geometria é pouco provável que ocorra alguma dificuldade em alguns pontos discutidos dessa Geometria. Além disso, o professor não deverá ter problemas com os materiais já que a matéria prima a ser utilizada na realização dessa atividade é bem barata. O tempo sugestivo para a aplicação dessa atividade é o de uma aula de até 50 min, pois o Professor

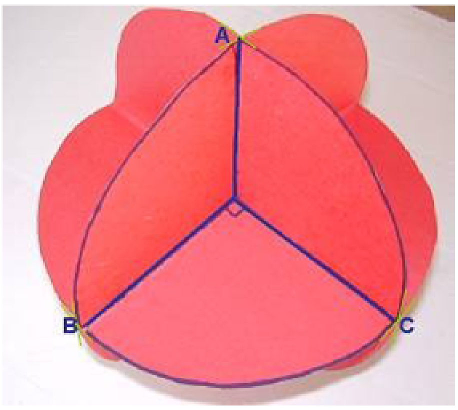

Figura 51: Triângulo esférico. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

já terá apresentado o assunto das Geometrias não Euclidianas em outras aulas.

8.1 OUTRAS ATIVIDADES ENVOLVENDO A GEOMETRIA ESFÉRICA

Atividade 8.2. *Ao se desenhar um triângulo na superficie de uma esfera, o que se pode dizer sobre a soma das medidas de seus ângulos internos?*

Observe inicialmente que o triângulo ABC da figura 51, possui três ângulos retos, portanto, a soma das medidas dos seus ângulos internos é 270º que é maior do que 180º. Agora se o desenho for de um triângulo bem pequeno na esfera notar-se-á que ele se aproximará muito de um triângulo euclidiano, sendo assim o limite inferior da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é 180º, agora quanto maior o triângulo na esfera maior será a soma dos seus ângulos internos e pode ser notado que seu limite superior é de 540º.

Essa atividade ajuda a fixar algumas ideias que eles tiveram ao realizar o problema do urso e a expandir um pouco a noção com respeito a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica.

Atividade 8.3. *Tome um círculo euclidiano de raio 1000 km, como esse círculo ficaria se fosse colocado sobre a superfície da Terra? O que ocorre com a sua área e com o seu perímetro, se comparado antes e depois da colagem?*

Observe que o círculo euclidiano formaria uma aba sobre a terra. Veja isto na figura 52 a seguir, note ainda pela figura 53 que ao se tentar assentar sobre a superfície esférica

Figura 52: Esfera de isopor e um círculo de cartolina. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

Figura 53: Colagem de um círculo na superfície da esfera. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

o círculo construído é notável que há sobra de tecido, portanto, a área e o perímetro desse circulo após assentá-lo sobre a superfície esférica tornam-se menores que do círculo euclidiano. Algo a respeito dessa atividade fora mencionado no capítulo 6 desse trabalho.

Não será difícil para os alunos com essas esferas de isopor ou bolas de plástico, que ao fazer os traçados de retas observar que elas irão se tocar em dois pontos distintos. Portanto, daí, não existem as retas paralelas nesta Geometria o que contraria o Quinto Postulado de Euclides da Geometria Euclidiana fazendo um paralelo da esfera com o Globo Terrestre eles irão ver que as retas seriam os meridianos que se intersectam nos pólos, além disso, a distância entre elas não é constante em qualquer ponto.

Novamente essa atividade é proposta para os alunos do 9º ano do ensino fundamental e é interessante que se aplique ela numa outra aula, logo depois de ser aplicada a atividade do urso, também aqui é interessante que o aluno já tenha visto alguns conceitos básicos de Geometria Plana. Para o desenvolvimento das atividades 1 e 2 seria interessante que os alunos levassem para a aula, canetinhas, uma bola de isopor, ou bolas de plástico que eles tiverem em casa e que não terá problemas se forem rabiscadas, uma ou duas cartolinas por aluno e folhas de papel A4 brancas ou coloridas.

Para a realização das atividades 1 e 2 seria interessante que os alunos formassem grupos de 3, 4 ou 5 alunos para a sua execução, dependendo de cada turma se tiver mais de 30 alunos na turma seria interessante que se montassem grupos com 5 alunos para o Professor ter um maior controle dos desdobramentos das atividades. É importante que se montem grupos, pois uma das dificuldades encontradas vai ser a da falta de materiais por boa parte dos alunos, o que poderá ser atenuado com a montagem dos grupos. As atividades 1 e 2 devem ser aplicadas em, no máximo, duas aulas de 50 min, pois nesse momento o Professor já terá gasto aí umas duas aulas de 50 min para falar um pouco sobre as Geometrias não Euclidianas e já terá gasto mais uma aula de 50 min para propor e resolver o problema do urso, então para essas duas últimas atividades o ideal é que sejam realizadas em uma aula de 50min, mas caso não se consiga, ela poderá ser realizada em, no máximo, duas aulas de 50 min, pois geralmente se tem uma aula por semana de Geometria nas escolas, e caso o Professor fique muito tempo preso nessa atividades ele pode desprender-se de um mês para esclarecer os alunos sobre a existência de outras Geometrias e apresentando atividades em uma única dessas novas Geometrias a Esférica, o que não é muito viável na prática.

Portanto, para a Geometria Elíptica, é interessante que o professor use no máximo três aulas de 50 min para a realização das duas últimas atividades mais a atividade do urso.

9 CONCLUSÃO

O estudo das Geometrias não Euclidianas, qualquer que seja ela, seja na educação básica ou no ensino superior é tão polêmico quanto o Quinto Postulado de Euclides, fato gerador de todo esse contencioso.

A despeito da corrente que engloba muitos pensadores e estudiosos rechaçar o papel técnico e mecanicista da Matemática, a verdade é que seu caráter cognitivo, indispensável ao progresso da humanidade, sobrepõe todas as críticas à sua aplicabilidade.

Com esse trabalho fica a esperança de ter-se alcançado o objetivo de tocar num assunto já corriqueiro para a comunidade acadêmica, mas ainda completamente desconhecido e intocado para aqueles que, um dia, estudaram Matemática em especial a Geometria na educação básica. Hoje a maior parte dos livros didáticos vem com o conteúdo de Álgebra e Geometria bem distribuídos em alguns capítulos dos capítulos dos livros, fato que não ocorrera no passado, eles iniciavam pela Álgebra e transcorriam toda aquela matéria para depois seguirem com os conteúdos de Geometria a partir dali, até o fim do livro. Assim muitos alunos terminavam o ensino fundamental, em especial nas escolas públicas, sem muitas vezes ter visto conceitos geométricos algum, e isso se arrastava no ensino médio, com essas novas distribuições de conteúdos nos livros da educação básica já se minimizou consideravelmente esses fatos. Mas ainda assim, vários professores empurram enquanto podem o conteúdo de Geometria para o fim do ano, quando este deve ser dado junto da matéria Matemática, algumas secretarias de educação têm as matérias de Matemática e Geometria separadas em suas grades, o que ajuda sobremaneira a vencer esses empecilhos.

Uma análise mais detalhada do corpo do trabalho levará o leitor à conclusão que, no ensino da Matemática atual, o papel dos Laboratórios tanto de Informática quanto de Ensino de Matemática são importantíssimos colaboradores para a expansão do conhecimento matemático. Sendo assim, as atividades propostas para a Geometria Hiperbólica aqui vistas terão sentido em um universo onde os professores sejam conhecedores dos softwares cabri-géomètre e geogebra e, que os professores tenham a sensibilidade de que devem se aproximar o quanto antes desses recursos computacionais e de outros softwares matemáticos.

E, por último, ressaltar a importância do passado como um requisito imprescindível para o sucesso do futuro sempre foi um dos nortes de qualquer civilização. Sendo assim, apresentar o estudo das Geometrias não Euclidianas amparado em seu viés histórico seria uma pré-condição para motivar as novas gerações acerca do caminhar científico. Segundo Devito (2006, p. 4):

Novos conhecimentos científicos surgem diante da necessidade de mudança da situação atual, ou por acaso, quando se tenta na verdade descobrir uma outra coisa, e foi assim com as Geometrias não Euclidianas; diante do desafio de provar o quinto postulado de Euclides a partir dos anteriores, vários matemáticos construíram diferentes tipos de Geometrias, que se baseiam em diferentes posturas diante desse postulado.

Apesar de muitos matemáticos afirmarem que a Geometria Euclidiana é uma generalização, ou seja, uma vertente das não Euclidianas, o fato inquestionável, demonstrado pela história é que a Geometria Euclidiana foi o ponto de partida que desafiou várias gerações de pensadores ao longo dos Séculos rumo ao descobrimento da Geometria Hiperbólica e da Geometria Elíptica constituindo assim, um dos capítulos mais interessantes e ricos da história da Matemática, graças a um exótico axioma!

A satisfação ao término dessa apresentação se dará se os que a leram minuciosamente estejam capazes de estabelecer o quinto postulado de Euclides em cada uma dessas Geometrias, bem como escrever o teorema da soma dos ângulos internos em cada um delas, além é claro de dizer qual modelo frequentemente é mais usado para descrever e explicar cada uma das Geometrias. Por fim é importante estarem todos convencidos de que o quinto postulado de Euclides foi de fato a chave necessária para abrir as portas para as Geometrias não Euclidianas.

REFERÊNCIAS

[1]ALMOULOUD, Saddo Ag , SILVA, Maria José Ferreira da, HARUNA, Nancy Cury Andraus. Relato de experiência: **Fundamentos metodológicos de formação de professores em Geometria**. Catanduva, SP, 2004.

[2]ALVES,S. (2007). **A Geometria do Globo Terrestre**. In:Programa de Iniciação Científica da OBMEP, v 6.

[3]ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica**. Dissertação de mestrado. Campinas, São Paulo, 2008.

[4]ATIKE, Roberta Godoi. **Geometria**. Universidade de São Paulo. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos: USP, 2006. Disponível em: http://www.icmc.sc.usp.br/ rwik/geometria/apostila.pdf. Acesso: em: 21 de novembro de 2012.

[5]BARBOSA, João Lucas Marques. Publicações Matemáticas – **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[6]BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª edição, tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1996.

[7]BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[8]BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III e Parte IV.** Brasília: MEC, 1999.

[9]BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

[10]CARMO,Manfredo do. **Elementos de Geometria Diferencial**, Projeto Euclides,IMPA, Rio de Janeiro.

[11]CARMO,Manfredo do. **Geometria Riemanniana**, Projeto Euclides,IMPA, Rio de Janeiro.

[12]COSTA, Celso e CARDIM, Nancy. **Tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[13]COSTA, Celso e FIGUEIREDO, Luiz Manoel Silva de. **Instrumentação para o Ensino da Geometria**. Rio de Janeiro. UFF/CEP, 2007.

[14]COUTINHO, Lazaro. **Convite às Geometrias não Euclidianas**. 1ª ed. São Paulo. Interciência, 2001. 116 p.

[15]DEVITO, André et al. **Geometrias não Euclidianas**. Universidade de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas. Campinas, 2006. Disponível em: `http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana`. Acesso em: 11/12/2012.

[16]EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

[17]GAIOWSKI, Antônio Osny e Bassoi, Tânia Stella. **A inserção das Geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica no estado do Paraná**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/848-4.pdf. Acesso em: 20 de janeiro de 2013.

[18]GREENBERG, M. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**,Freeman and Co., San Francisco, 1974.

[19]KALEFF, A. M. M. R. (2004). **Atividades Introdutórias às Geometrias não Euclidianas**: o exemplo da Geometria do Táxi. Boletim – GEPEM, Rio de Janeiro, nº 44, p. 11- 42.

[20]KALLEF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**. Rio de Janeiro: UFF, 2008.

[21]LIMA, Elon Lages. **Revista Matemática Universitária**. nº 6. Rio de Janeiro: SBM, dezembro de 1987, pp 25 – 48.

[22]MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. **Geometrias sobre a axiomática de Hilbert**. Campinas, 2006. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/ eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf

[23]OLIVERO, Mário. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[24]PETIT, J.P. **As aventuras de Anselmo Curioso**. Os mistérios da Geometria. Lisboa: Dom Quixote, 1982.

[25]SILVA, Sergio. **A Polêmica sobre o Axioma das Paralelas**. Disponível em: `http://www.ginasiomental.com/artigos/pol_paral.pdf`. Acesso em: 23 de novembro de 2012.

[26]STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Ciência Aberta. Gradiva, 1997.

APÊNDICE

Nesse apêndice serão apresentadas outras duas Geometrias não Euclidianas, no entanto, não serão feitas atividades em relação a essas Geometrias, elas serão colocadas apenas em caráter informativo para os alunos, de forma que eles vejam a existência de outras Geometrias não Euclidianas além das expostas no trabalho, e consigam refletir a respeito do porquê, essas aqui não serão Euclidianas, e o que as caracterizam como Geometrias não Euclidianas.

Após a exposição do trabalho que foi sugerido para ser realizado até aqui num total de até 7 aulas de 50 min, o professor estará totalmente a vontade para a apresentação dessas duas Geometrias abaixo, em mais uma aula de 50 min a título de curiosidade sobre essas Geometrias não Euclidianas, já que foi dito que existem várias delas.

Ao olhar a quantidade de aulas, a aplicação das atividades mais a exposição do conteúdo levariam praticamente um bimestre, então fica a sugestão de no primeiro bimestre o professor usar umas duas aulas para apresentação do tema das Geometrias não Euclidianas, aí no segundo bimestre, ele usa mais três aulas para executar as atividades da Geometria Elíptica, pois esse bimestre é um pouco mais extenso que o terceiro, então no terceiro ele faz as atividades envolvendo a Geometria Hiperbólica e por fim no quarto bimestre ele apresenta essas duas Geometrias a seguir como outras Geometrias não Euclidianas para os alunos, mas sem a presença de atividades para estas.

Cabe ressaltar que caso a escola não tenha acesso a internet ou softwares de matemática, as atividades envolvendo Geometria Hiperbólica, podem ser saltadas, daí o professor ficaria ainda mais confortável para poder explorar o tema com os alunos, talvez dando um enfoque maior na primeira parte e apresentando-a em três aulas ao invés de duas. Fica a sugestão para os interessados em executar o assunto com os alunos.

A GEOMETRIA DO TÁXI

Criada pelo matemático Hermann Minkowiski (1864-1909) e designada por Taxicab Geometry (Krause, 1975), em português designada como Geometria do Motorista de Táxi.

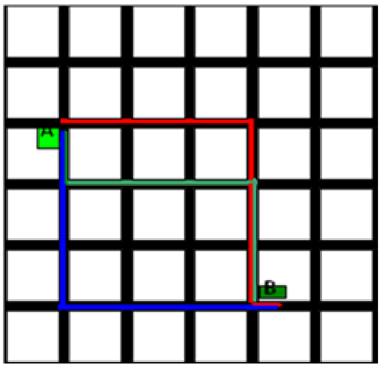

Figura 54: Alguns caminhos do táxi

Ela esta muito relacionada com a realidade do aluno em seu trajeto pela cidade, ou de sua casa até a escola. Esta é uma Geometria de Incidência e também considerada não Euclidiana e, que aos poucos vem reclamando seu espaço nos livros didáticos destinados às salas de aula do Ensino Básico.

A Geometria do Táxi é um tipo de Geometria para o qual a definição de distância entre dois pontos, habitualmente considerada na Geometria Euclidiana como a medida do menor caminho entre eles, isto é, medida do segmento de reta entre os dois pontos, passa agora a ser substituída por uma nova. Nesta geometria a distância entre dois pontos é tomada como a soma do valor absoluto da diferença de suas abscissas, com a do valor absoluto da diferença de suas ordenadas. É claro que é respeitado os limites físicos das construções, estabelecidos por meio de ruas, paralelas ou perpendiculares entre si.

Cabe enfatizar que a Geometria do Táxi vem ao encontro das necessidades requeridas pelos PCNs para as mudanças no ensino da Matemática, pois permite desenvolver os seus conteúdos relacionando-os ao ambiente do indivíduo, possibilitando o surgimento de condições de um ensino significativo.

Por exemplo, suponha que um táxi queira se deslocar de um ponto A para um ponto B, conforme a figura 54:

Os quadrados representam quadras e entre elas passam ruas e avenidas. Para o táxi sair do ponto A e chegar até o ponto B existem alguns caminhos, na figura estão representados três opções de caminhos mais curtos, mas existem outros.

Observe na figura 55 que o ponto O, é a interseção das diagonais do quadrado em destaque e os intervalos entre os quadrados menores representam caminhos para se ir de O até os pontos indicados por pequenos círculos. É perceptível que a menor distância é igual para todos os pontos.

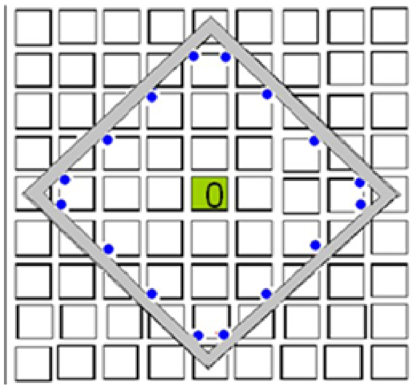

Figura 55: Uma circunferência na Geometria do Táxi

Sabe-se que uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão à mesma distância (raio) de certo ponto (dito o centro). Assim é fácil perceber que o polígono com vértices nos pontos que representam pequenos círculos na figura acima condiz com uma circunferência nessa nova Geometria e, é fácil ver que na Geometria Euclidiana essa figura seria um quadrado.

Sobre a Geometria do Táxi não será feito nenhum aprofundamento sobre o assunto, no entanto, é importante nesse momento dizer que para uma Geometria ser chamada de não Euclidiana é preciso que em seu conjunto de axiomas pelo menos um daqueles da Geometria Euclidiana não seja verdadeiro.

Pode-se exemplificar esse fato mostrando que dois triângulos que tenham um lado, um ângulo e um lado consecutivos, respectivamente de mesma medida, o caso LAL de congruência de triângulos, isso não é suficiente para que os triângulos tenham a mesma forma e o mesmo tamanho, isto é, sejam congruentes na Geometria do Táxi. Daí, revela-se que esse resultado da Geometria Euclidiana falha na Geometria do Táxi e, isto faz com que ela seja considerada como uma Geometria não Euclidiana.

Portanto, foi observado até aqui que a Geometria do Táxi está presente no cotidiano de determinados bairros cujos traçados das ruas seguem uma malha quadriculada. Nota-se que é uma Geometria simples, que não teve origem no mesmo contexto histórico que as Geometrias hiperbólica e elíptica (apresentadas no trabalho), talvez por isso, não tenha a mesma importância ou aplicação (na prática), mas que é, mais um exemplo dentre a infinidade de Geometrias que passaram a existir, a partir de uma axiomática bem próxima da axiomática euclidiana.

Essa exposição também é sugerida para as turmas de 9º ano do ensino fundamental ou qualquer turma do ensino médio, apenas como caráter informativo sobre existências das

Geometrias não Euclidianas já tratadas no trabalho. Não é necessário mais do que uma aula de 50 min para sua exposição, e novamente, os alunos notarão que para determinadas situações problemas do cotidiano, talvez a Geometria Euclidiana não seja a melhor das Geometrias para tratar as soluções do problema proposto.

A GEOMETRIA PROJETIVA

A Geometria Projetiva surge com as dificuldades dos artistas do Renascimento, para dar aos quadros que pintavam uma forma real dos objetos inspirados de modo que as pessoas ao olharem o identificassem sem dificuldades.

Isso levou os artistas a estudarem profundamente às leis que determinassem as construções dessas projeções, com esses estudos eles chegaram a teoria fundamental da perspectiva geométrica, que se expandiu, por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivado por Gerard Desargues (1591 – 1661). Desargues foi um matemático, arquiteto e engenheiro militar francês, precursor da Geometria Projetiva ele publicou um tratado original sobre cônicas, aproveitando as ideias de projeção, mas esse trabalho foi ignorado e esquecido pelos matemáticos da época e todas as publicações desapareceram.

Mas o geômetra francês Michel Chasles(1793 – 1880), conseguiu ressuscitar o trabalho de Desargues ao escrever sobre a história da Geometria, pois encontra uma cópia manuscrita de seu estudo feita por um de seus seguidores, assim o trabalho de Desargues foi reconhecido como um dos clássicos no desenvolvimento da Geometria Projetiva.

O ressurgimento da Geometria Projetiva foi impulsionado por Jean-Victor Poncelet, (1788 —1867) que foi um matemático e engenheiro francês. Foi também um prisioneiro de guerra russo, que sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a Geometria Projetiva publicada em 1822 com o titulo de "Tratado das propriedades projetivas das figuras."

Esta obra deu inicio ao chamado "grande período da história da Geometria Projetiva", que abriu espaço aos grandes matemáticos. Os trabalhos de Desargues e Poncelet acabaram levando os geômetras a classificar a Geometria em duas categorias de propriedades, que são elas:

Propriedades métricas, que intervêm nas medidas das distâncias e dos ângulos e as Propriedades descritivas, que tratam das relações e posições dos elementos geométricos entre si.

"A Geometria Projetiva criou uma grande área na geometria, única e elegantemente


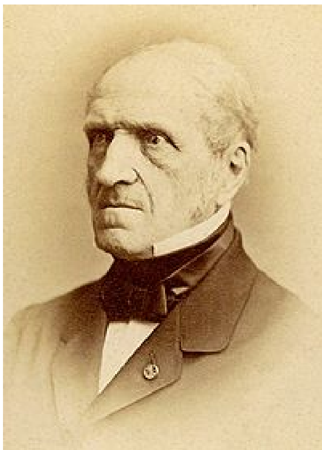


Figura 56: Fotos de Desargues, Chasles e Poncelet, respectivamente. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/

desenvolvida, cujos postulados transcendem os limites do espaço euclidiano."

Nas figuras apresentadas podemos observar que as paralelas do objeto real, ao ser transferida para um projeto (plano), perde a noção de paralelas, portanto, na Geometria Projetiva não existem paralelas. Tem-se a partir de agora o ponto de fuga que é a representação de um ponto impróprio no plano de projeção, nas figuras a seguir, caso siga cada uma das retas, em um certo momento elas se encontrarão num mesmo ponto na linha do horizonte, esse ponto é conhecido como ponto de fuga.

Enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a Geometria Projetiva lida com o mundo que vemos. Na prática, se forem consideradas as figuras acima, as retas que aparecem não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. Essa é uma das características marcantes da Geometria Projetiva, duas retas quaisquer sempre se intersectam.

Assim fica a sugestão dessas duas Geometrias serem dadas aos alunos em uma aula de 50 min, caso a escola não tenha acesso aos recursos computacionais, essas duas Geometrias apresentadas no apêndice podem até ser exploradas em duas aulas de 50 min, apenas em caráter informativo. Espera-se que com essas novas informações a serem dadas aos

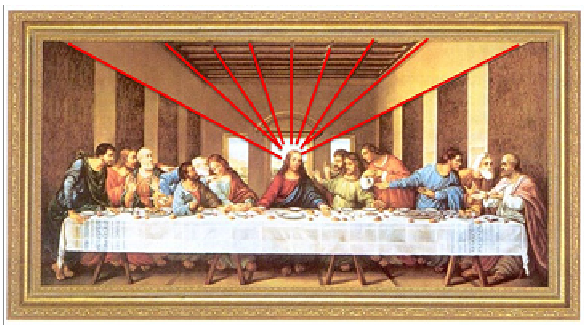

Figura 57: Quadro da Santa Ceia com um ponto de fuga no seu centro. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

Figura 58: Foto de um imóvel com o ponto de fuga à esquerda de seu centro. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

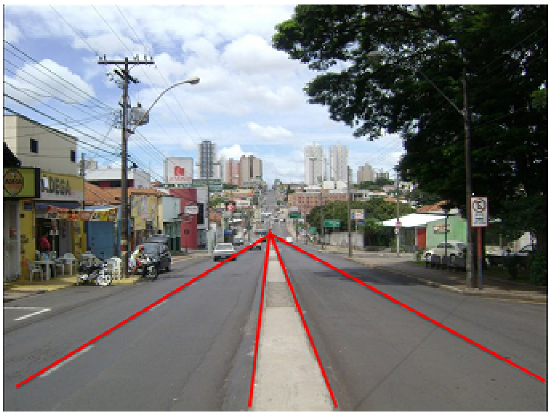

Figura 59: Foto de uma rua com o ponto de fuga no centro da foto. Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes-pde/artigo-sidinei-delai.pdf

alunos, durante oito ou sete aulas no ano letivo, com o uso de recursos computacionais no primeiro caso, ou sem o uso deles no segundo caso, faça com que os alunos sintam-se um pouco mais motivados para seguirem os seus estudos, e fiquem sabendo que os campos da Matemática são repletos de histórias belíssimas, e eles acabaram de passar por um desses campos dentro da Geometria.