

UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE JUIZ DE FORA



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**Leíse Santos Vieira**

**Uma Proposta de Ensino de Continuidade de Funções em Cálculo Diferencial e  
Integral a partir da noção de Complementaridade**

Juiz de Fora  
2022

**Leíse Santos Vieira**

**Uma Proposta de Ensino de Continuidade de Funções em Cálculo Diferencial e Integral a partir da noção de Complementaridade**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Willian José da Cruz

Juiz de Fora  
2022

**Leíse Santos Vieira**

**Uma Proposta de Ensino de Continuidade de Funções em Cálculo Diferencial e Integral a partir da noção de Complementaridade**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 29 de junho de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Willian José da Cruz - Orientador**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Amarildo Melchades da Silva**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Profa. Dra. Lúcia Cristina Silveira Monteiro**

Universidade Federal de Alagoas

Juiz de Fora, 14/07/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Willian Jose da Cruz, Coordenador(a) em exercício**, em 18/07/2022, às 16:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchades da Silva, Professor(a)**, em 19/07/2022, às 22:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj ([www2.uffj.br/SEI](http://www2.uffj.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0869500** e o código CRC **E1FEBD2C**.

---

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus, meu criador, que me capacitou e permitiu chegar a esse momento de forma bondosa.

Especialmente, agradeço ao meu marido, Paulo Junior, meu maior incentivador. Não teria realizado essa pesquisa se não fosse pelo seu apoio e cuidado durante esse tempo. Obrigada por estar comigo em cada momento, me encorajando. É uma alegria dividir esse título e a vida com você.

Agradeço à minha mãe, Maria Cristina e o meu pai Paulo pelo amor, cuidado e orações. Aos meus irmãos Emerson, Luísa e Emanuel, que Deus colocou na minha vida. Aos meus sogros, Paulo e Raquel por acolherem-me de forma tão amorosa.

Agradeço à minha amiga Janaína, por estar comigo durante todo esse trajeto, me ouvindo, ajudando e compartilhando dessa pesquisa comigo. Ao meu orientador Willian por toda a ajuda durante a realização deste trabalho e aos professores Amarildo e Lúcia pelas considerações e contribuições que enriqueceram muito essa pesquisa.

“Afinal, educar não é condicionar o aluno ao nosso esquema, mas é estimulá-lo a pensar e a questionar, e nada mais apropriado para isto do que a matemática” (D’AMBRÓSIO, 1975).

## RESUMO

Essa produção científica é uma pesquisa qualitativa, de caráter bibliográfico e explicativo para a obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF. Foi proposto com esse trabalho apresentar as considerações dessa pesquisa de Mestrado, que objetiva investigar os processos de visualização, representações semióticas e a produção de significados, no contexto da formação de professores de matemática, sobretudo com foco no conceito de continuidade. Para isso, propomos como ponto de partida a análise de diferentes concepções do conceito de continuidade, como ela foi aplicada e estudada ao longo do tempo por diferentes autores e como cada uma delas indicam a importância do uso da intuição. Adotamos como base teórica a Semiótica de Peirce e a complementaridade de Otte e buscamos possíveis relações entre a Educação Matemática, os aspectos teóricos da mediação Semiótica Peirciana e a aplicação de Experimentos Mentais para a compreensão da ideia de continuidade por uma abordagem pela complementaridade entre intuição e conceito; intuição e lógica, utilizando os pensamentos de Poncelet e Cauchy. Um dos objetos desta pesquisa foi a produção de um conjunto de tarefas que auxiliassem no desenvolvimento do conceito de continuidade. E como finalidade, confeccionamos um produto educacional que consiste em uma sequência de atividades para que auxiliem na formação de professores de matemática e que também podem ser adaptadas para aplicação à alunos de cálculo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Semiótica. Complementaridade. Continuidade.

## **ABSTRACT**

This scientific production is a qualitative, bibliographic and explanatory research to obtain a Master's degree at the Postgraduate Program in Mathematics Education at the Federal University of Juiz de Fora — UFJF. With this work we propose to present the considerations of our Master's research, which aims to investigate the processes of visualization, semiotic representations, and production of meanings in the context of the training of math teachers, especially focused on the concept of continuity. For this intent, we propose as a starting point the analysis of different notions of the concept of continuity, how it has been applied and studied over time by different authors, and how each of them indicates the importance of using intuition. We adopted Peirce's Semiotics and Otte's complementarity as a theoretical basis and sought possible relationships between Mathematics Education, the theoretical aspects of Peircean Semiotics mediation, and the application of thought experiments to understand the idea of continuity by means of an approach through the complementarity between intuition and concept; intuition and logic, using the thoughts of Poncelet and Cauchy. One of the objects of this research was the production of a set of tasks that would help in the development of the concept of continuity. And as a goal, we made an educational product which consists of a sequence of activities elaborated to help in the training of mathematics teachers and that can also be adapted for application to calculus students.

**Keywords:** Mathematical Education. Semiotics. Complementarity. Continuity.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A Tríade de Peirce .....	33
Figura 2 – O processo semiótico .....	33
Figura 3 – Diagrama do Signo .....	35
Figura 4 – Pontos $Px$ , $F$ , $V$ e a reta $g$ .....	55
Figura 5 – Circunferência $c$ e curva .....	55
Figura 6 – Propriedade da curva .....	55
Figura 7 – Propriedade de áreas .....	57
Figura 8 – Propriedade de áreas .....	57
Figura 9 – Áreas .....	57
Figura 10 – Eixos Orientados .....	58
Figura 11 – Coordenadas dos pontos .....	59
Figura 12 – Parábola na construção geométrica e como função .....	61
Figura 13 – Bissetriz de $FPC$ .....	62
Figura 14 – Teorema de Poncelet .....	63
Figura 15 – Teorema de Poncelet .....	63
Figura 16 – Teorema de Poncelet .....	64
Figura 17 – Diagrama .....	66
Figura 18 – Parábola na construção geométrica e como função .....	72

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>2 O PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE</b> .....	13
2.1 CONTINUIDADE NA MATEMÁTICA.....	16
2.2 O PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE EM FUNÇÕES E CURVAS.....	17
<b>3 QUADRO TEÓRICO</b> .....	26
3.1 JUÍZOS ANALÍTICOS E SINTÉTICOS.....	28
3.2 A SEMIÓTICA.....	30
3.3 SEMIÓTICA DE PEIRCE.....	31
3.4 EXPERIMENTOS MENTAIS.....	39
3.5 A COMPLEMENTARIDADE.....	43
<b>4 METODOLOGIA</b> .....	49
<b>5 O PRODUTO EDUCACIONAL: MOSTRANDO A COMPLEMENTARIDADE DE CAUCHY E PONCELET</b> .....	53
5.1 UM EXEMPLO DE EXPERIMENTO MENTAL — O PRODUTO EDUCACIONAL.....	54
5.2 O PROBLEMA DA TANGENTE.....	62
5.3 UMA NOÇÃO TOPOLÓGICA.....	65
<b>6 COMPLEMENTARIDADE NO CONCEITO DE FUNÇÃO: MEU EXEMPLO EM VISTA O TEXTO DE OTTE</b> .....	68
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	71
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	74

# 1 INTRODUÇÃO

A partir de vivências no ensino de cálculo, seja como aluno e também como professor em sala de aula ou em monitorias e tutorias dando suporte teórico, prático e acompanhamento de alunos que apresentaram dificuldades relacionadas à aprendizagem dos conceitos abordados nessa disciplina, percebemos a grande dificuldade que a maioria dos alunos enfrentava no desenvolvimento de alguns assuntos e temas abordados naquele momento, não conseguindo acompanhar a nova rotina, ritmo e abstração que eram exigidas nessa “nova matemática” apresentada a eles. Isso de certa forma incomodava. Seriam as aulas muito abstratas? Existiriam outras maneiras de se aprender o cálculo que se tornasse um estudo mais prazeroso e interessante? Qual é a importância do cálculo para o aluno e futuro professor de matemática? Respondendo a essa última questão, Rezende escreve que:

Se a geometria e a aritmética representam a base, isto é, os pés, do corpo do conhecimento matemático, poderíamos dizer, metaforicamente, que o Cálculo representa a sua “espinha dorsal”. [...] O Cálculo, historicamente, tomou emprestado da geometria e da aritmética, e também da física, alguns conceitos e problemas fundamentais, e desenvolveu novos instrumentos para solucioná-los, retornando sempre aos “conceitos envolvidos”, em um nível superior de significação. O conjunto dos números reais e o conceito de função, junto com a geometria analítica, foram, sem dúvida, algumas das maiores reinvenções do Cálculo (REZENDE, 2003, p. 69–70).

A possibilidade de investigar mais profundo sobre o ensino de cálculo surgiu juntamente com a proposta de um olhar para a matemática a partir dos aspectos semióticos. Surgindo, assim, algumas indagações como, por exemplo, quais conteúdos poderiam ser objetos de pesquisa para serem trabalhados nos cursos de cálculo para futuros professores de matemática, e, quais desses conteúdos permitiriam uma nova proposta de ensino por meio do uso da complementaridade. Diante dessa problemática a opção foi por direcionarmos o foco para o conceito de continuidade. Conceito que vem sendo investigado a décadas, intrigando muitos pesquisadores. Por ser um conceito que necessita de outros conceitos consideravelmente complexos e abstratos, como os conceitos de infinito, aproximação, vizinhança e limite, a compreensão da continuidade apela para o uso da intuição ao mesmo tempo em que é um “objeto matemático que exige o uso constante de regras formais” (ALVES, 2011, p. 28). Assim, buscaremos identificar os aspectos intuitivos presentes nas abordagens de Poncelet e Cauchy à continuidade, que nos pareceu apontar uma complementaridade entre o sintético e o analítico, ou *geometria e aritmética*. A identificação de tais aspectos, podem nos permitir investigar uma proposta de ensino do tema continuidade na disciplina Cálculo Diferencial e

Integral, com base na noção de complementaridade, para uso do professor do Curso de Licenciatura em Matemática.

Como será esclarecido mais adiante, a ideia de complementaridade, como afirma Otte (1990) está associada a existência de outros pontos de vista, que se complementam representando dois aspectos de um mesmo objeto. E, a partir disso, procuraremos responder algumas questões, para as quais lançaremos nossos olhares e objetivos:

- I. Quais analogias e diferenças existem nos estudos do princípio da continuidade nas perspectivas de Poncelet e de Cauchy?
- II. Quais contribuições a semiótica nos fornece no âmbito da investigação envolvendo o caminho percorrido de Poncelet a Cauchy?
- III. Quais concepções e/ou propostas podemos estabelecer para o ensino de cálculo com base nestas analogias e diferenças de maneira que as perspectivas de Poncelet e Cauchy, em relação ao princípio da continuidade, possam ser complementares uma à outra?

Para responder essas questões, traçamos como objetivos analisar e compreender o conceito de continuidade nas perspectivas de Poncelet e Cauchy e como esse conceito está refletido no ensino deste tópico nas aulas de cálculo. Buscamos a compreensão da ideia de continuidade por uma abordagem pela complementaridade entre intuição e conceito; intuição e lógica, utilizando os pensamentos desses dois importantes matemáticos. Além de investigar como se desenvolve esse conceito na visão geométrica de Poncelet e nas concepções funcionais de Cauchy; identificar os aspectos semióticos envolvidos na apresentação desses conceitos; identificar complementaridade entre Experimentos Mentais e sistemas formais como meio para abordar a continuidade; e, constituir uma proposta de ensino desse tópico que possa evidenciar esse aspecto complementar, dando ao professor formador e/ou licenciando em matemática, uma oportunidade de pensar a continuidade num aspecto mais geral.

Em nossa investigação pretendemos priorizar o ensino e a aprendizagem do conceito de continuidade sob os aspectos da semiótica na perspectiva de Peirce e por meio do uso dos Experimentos Mentais nas concepções de Cruz (2018) que estão fundamentadas na Semiótica de Peirce e nas complementaridades entre intuição e

conceito, intuição e lógica, para, assim, propor complementaridade entre Experimentos Mentais e provas formais.

As principais questões da pesquisa basearam-se em como uma abordagem semiótica para a matemática pode contribuir para a interseção entre as habilidades e estratégias na compreensão de um texto matemático (o princípio da continuidade), e qual a importância dos Experimentos Mentais em complementaridade com aspectos formais dos conceitos podem ser úteis na construção de ideias matemáticas. Nesse sentido, no capítulo 2 falaremos sobre a continuidade de funções e de curvas e as principais concepções segundo o ponto de vista de Poncelet e Cauchy, além da relação que esse conceito tem com a intuição.

No capítulo 3, trataremos da fundamentação teórica que nos serviu de suporte e base para a elaboração de nosso trabalho. Nesse capítulo, aprofundaremos alguns conceitos semióticos pelo viés das categorias de Peirce, sendo eles a primeiridade, segundidade e terceiridade, dando sequência a um detalhamento das diferenças entre os signos peircianos (ícones, índices e símbolos) para então relacionarmos conceitos e intuição a experimento mental e prova formal, fazendo o uso da complementaridade de Otte.

O capítulo 4 apresentaremos a metodologia utilizada para realização do trabalho e no capítulo 5, desenvolveremos um exemplo conforme o que pesquisamos e produzimos no produto educacional. E, por fim, no capítulo 6, uma pequena reflexão a respeito da complementaridade de funções a partir de Otte (1990).

## **2 O PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE**

Neste capítulo faremos uma revisão de literaturas que abordam assuntos como o ensino de cálculo e sua problemática atualmente e como isso nos motivou a pesquisar sobre o conceito de continuidade de funções e de curvas. Dessa forma, aprofundaremos alguns pontos de vista sobre diversas definições do conceito de continuidade e detalharemos sobre as duas principais concepções para nosso trabalho: a definição de continuidade do ponto de vista de Poncelet e de Cauchy.

Não é de hoje que se fala do fracasso no ensino de cálculo. Elevados índices de evasão, reprovação e baixo rendimento nos mostram o quão preocupante é essa situação. Esses dados podem ser encontrados em vários trabalhos, dos quais destacamos Barufi (1999), Rafael (2016) e Rezende (2003) por apresentarem um panorama sobre a situação do ensino de cálculo.

Barufi (1999) em sua tese de Doutorado intitulada “A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral”, já apontava dados alarmantes sobre o índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995.

Rafael (2016) em seu trabalho “Redução da não aprovação em cálculo: intervenções realizadas por universidades públicas e privadas” faz um levantamento de dados em três instituições da região sudeste do Brasil. Das quais são duas privadas e uma é pública. Apesar da diferença entre as instituições é possível notar o problema da reprovação e evasão de alunos de cálculo nos cursos de Matemática, Computação e Engenharia de Produção.

Rezende (2003) em seu trabalho de nome “O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica”, detalha essa situação na Universidade Federal Fluminense, relativos ao período de 1996 a 2000. O autor afirma, que esta situação não é local ou cultural, mas, um problema geral. Fato que, ao longo do tempo surgiram diversas perguntas e respostas apresentadas por pesquisadores da área; indagando sobre a razão, a origem e onde residem as dificuldades.

Alguns desses pesquisadores acreditam que o problema é de natureza psicológica, enquanto outros, consideram que são decorrentes do processo didático, uma natureza mais simples. Nós, assim como Rezende (2003), acreditamos que as dificuldades têm natureza epistemológica e a falta de construção de significados pelos alunos gera uma enorme dificuldade no aprendizado.



Rezende (2003) faz um mapeamento sobre as dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de cálculo, estabelecendo e reunindo essas dificuldades em cinco macro-espços, identificados pelas cinco dualidades fundamentais do Cálculo e do seu ensino: discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção. Dos quais destacaremos o contínuo/discreto em que o autor destaca a ignorância das ideias do campo semântico dessa dualidade, caracterizado pelo hiato entre os campos da aritmética e da geometria; para ele,

o domínio numérico da totalidade de nossos alunos se restringe aos racionais. Já com respeito aos números reais (irracionais), podemos dizer, com certas restrições, que apenas a "técnica operatória" é dominada por eles. Não sabem responder o que um número real é, efetivamente. Isto ocorre, como diria Caraça (1989), porque não conhecem o reagente básico (o conceito de continuidade) que motiva o processo de extensão do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais (REZENDE, 2003, p. 339).

Rezende (2003) fala do olhar para a aritmética em grande parte e o não olhar para a geometria. Nesse caso, podemos afirmar que, há uma necessidade por uma complementaridade entre essas áreas. O autor ainda faz referência a incompreensão dos números reais, afirmando que o domínio numérico dos alunos se restringe aos racionais e chama atenção para que a base para essa compreensão está focada no estudo e conhecimento do conceito de continuidade, que para nós, não é um conceito tão básico, como ele afirma.

Monteiro (2015), chama a atenção para a dicotomia entre o contínuo e o discreto, segundo essa autora,

desde a época dos gregos antigos, há uma dicotomia que permeia o pensamento e o conhecimento humano, que é a compreensão e a descrição do contínuo e do discreto. Essa dicotomia se anuncia desde as discussões sobre o paradoxo de Zenão, por isso compreendemos que só podemos visualizá-la pela ótica da complementaridade entre os conceitos e objetos (MONTEIRO, 2015, p. 39).

Além disso, Courant e Robbins (2000) afirmam que o contínuo numérico tem sido base para a matemática, em particular na geometria analítica e no cálculo, desde o século XVII, "seja ele aceito como uma verdade ou após um exame crítico" (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 87). A partir dessa inquietação levantamos, então, a hipótese de que, parte deste problema começa na construção dos números reais e, portanto, acontece motivada pela não compreensão de certos conceitos fundamentais, como, por exemplo, a ideia de infinitamente grande e infinitamente pequeno, limite, aproximação, vizinhança, mônadas (...) e por fim, a continuidade. Em

vista disso, nosso objeto matemático de estudo será o princípio da continuidade, que mediante os Experimentos Mentais nos permitirá entender e desenvolver essa complementaridade entre a aritmética a geometria.

## 2.1 CONTINUIDADE NA MATEMÁTICA

Durante séculos, a busca por uma teoria quantitativa da continuidade, segundo Monteiro (2015), parecia paradoxal, enquanto a grandeza geométrica proporciona um contínuo intuitivo, os números, por essência, parecem ser descontínuos. Dessa forma, ao longo da história, o conceito de continuidade levantou grandes debates de caráter científico e filosófico entre os estudiosos.

A continuidade da reta é uma ideia que tem fascinado e intrigado a humanidade por muitos séculos. Em essência, deseja-se dizer que a reta não tem “furos” ou interrupções. Euclides, em seu *Elementos*, considerou esta ideia como intuitiva, não a explicitando como axioma ou postulado. Isso somente acabou ocorrendo mais de dois mil anos depois, após os trabalhos de Dedekind e George Cantor (RIPOLL apud MONTEIRO, 2015, p. 34).

Segundo Caraça (1989) e Monteiro (2015), o princípio da continuidade é um dos mais importantes da Ciência e da Matemática. O encontramos em trabalhos como os de Poncelet (1788–1867), com foco na Geometria e, nos trabalhos de Descartes (1596–1650), Cauchy (1789–1857), Euler (1707–1783), Bolzano (1781–1848) e Weierstrass (1815–1897), nos trabalhos de análise.

A falta de conhecimento desse conceito implicou no surgimento de vários problemas e que, durante séculos, foram considerados insolúveis. Um deles é o fenômeno da incomensurabilidade da reta. Uma “crítica desenvolvida no séc. V a. C. pela Escola de Elea contra as proposições fundamentais da Escola Pitagórica. A ruína desta Escola representou a primeira grande crise da História da Matemática” (CARAÇA, 1989, p. 213).

a recta não pode ser pensada como uma simples justaposição de pontos, mônadas ou não; há nela qualquer coisa que ultrapassa uma simples coleção de pontos; essa qualquer coisa – a sua continuidade - necessita dum estudo aprofundado, ligado com o aspecto numérico, quantitativo, da medida (CARAÇA, 1989, p. 80).

Caraça (1989) fala de continuidade pelos aspectos de propriedades a todos os pontos de uma dada curva, no caso a reta. Segundo ele, “a imagem ideal da continuidade é a linha reta” (CARAÇA, 1989, p. 58). E para ele, um conjunto será contínuo sempre que ele tiver a mesma estrutura da reta. E para perceber a

continuidade em um conjunto qualquer, é necessário um critério que seja distintivo e, ao mesmo tempo simples, sempre que possível, no qual ele chama de reagente.

O que vamos procurar é uma espécie de reagente que nos mostre se, num dado conjunto, existe ou não essa propriedade, assim como o químico determina se, num dado soluto, existe ou não certo elemento. O reagente pode não dar uma explicação do elemento procurado, mas, nem por isso ele será menos útil ao químico no estudo do soluto que tiver entre mãos (CARAÇA, 1989, p. 58).

Com a ideia de buscar compreender se a reta tem a mesma estrutura de um conjunto qualquer, surgiu a necessidade de novos conceitos, dos quais um deles é o que, para Caraça (1989), é o bom reagente da continuidade. Proposto por Dedekind (1831–1916), séculos depois da teoria das mônadas, em 1872, surgiu uma teoria satisfatória, um tratamento rigoroso do conceito de continuidade com base na definição de um “corte na reta”, trabalhando com ideias mais abstratas e gerais, e não com seqüências de intervalos encaixados, como descrito resumidamente por Caraça.

[...] nós atribuímos à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, dum modo vago, de uma conexão ininterrupta nas suas partes menores. O que se procura é formular uma propriedade característica e precisa da continuidade que possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias. [...] verificou-se que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade e, portanto, no princípio seguinte: se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes (DEDEKIND, 1872, apud CARAÇA, 1989, p. 60).

Aqui entramos no campo da intuição. Ninguém conseguiu oferecer uma demonstração a esse princípio, apesar de parecer evidente. É uma verdade intuitiva, tomada como um axioma e designada por *postulado da continuidade de Dedekind*.

## 2.2 O PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE EM FUNÇÕES E CURVAS

Ainda hoje, como afirma Campos (2014), raramente há um consenso entre os professores ao discutir como abordar esse conceito. Além disso, em uma análise feita pela autora, os livros didáticos apresentam esse conteúdo de várias formas distintas,

que segundo os autores dos livros, “são “mais intuitivas” ou “menos intuitivas”, são “mais rigorosas” ou “menos rigorosas”” (CAMPOS, 2014, p. 19). E é essa possibilidade de trabalhar com o intuitivo e o não intuitivo que buscamos. Pretendemos estudar a continuidade sob o aspecto construtivo que ela nos permite.

No desenvolvimento das ciências matemáticas encontramos a cada passo, conjugados, estes dois motivos de progredir, dois gumes da mesma arma – actividade racional e actividade experimental; teoria e experiência; pensamento e ação (CARAÇA, 1989, p. 53).

Para futuros professores de matemática, os conceitos de limite e continuidade são essenciais para a Análise Matemática. Esta disciplina está presente no currículo como obrigatória, segundo o Parecer CNE/CES n.º 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001 — Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001). Porém, são conceitos que para nós, são “difíceis, arditos para professores ensinarem e alunos aprenderem” (CAMPOS, 2014, p. 20), se não forem concebidos na complementaridade dos pensamentos indutivos, lógicos e intuitivos, que são a natureza da matemática e são base para o pensamento científico atual, em diversas áreas do conhecimento.

Dentre os fatores que desencadeiam as dificuldades no ensino e aprendizado do conceito de continuidade, Alves, citando Artigue e Tall, destaca em sua Tese dois aspectos relacionados a este conceito, que dificultam o seu ensino/aprendizagem:

O primeiro refere-se à sua “natureza epistemológica reconhecidamente complexa.”. O segundo, diz respeito aos “processos mentais requeridos na compreensão desta ideia” (ARTIGUE, 2003; TALL, 2002 apud ALVES, 2011, p. 28).

Campos (2014) descreve que Núñez<sup>1</sup> estabelece dois tipos de continuidade, a continuidade natural e a definição por  $\varepsilon$  e  $\delta$ . O Autor afirma que continuidade natural é a chamada “intuitiva”, caracterizada por aqueles que criaram o cálculo como um processo contínuo, sem mudanças bruscas, sem interrupções ou buracos. A continuidade natural surgiu no século XVII, e supriu todos os objetos matemáticos até o século XIX. A definição por  $\varepsilon$  e  $\delta$ , é a continuidade de Cauhy – Weierstrass que surgiu no Século XIX, e “que é considerada como a definição rigorosa do que realmente é continuidade”(NÚÑEZ, 2003 apud BARTO, 2004, p. 53). Também considerada como a definição formal, a continuidade de Cauhy-Weierstrass utiliza o conceito de limite de funções para caracterizar uma função contínua. Nesse ponto, é

---

<sup>1</sup> NÚÑEZ, R. E. Cognição humana e continuidade na matemática moderna. Tradução de Janete Bolite Frant. VETOR NETELEM, v. 1, n. 1, p. 9-26, 2003.

importante salientar que trazer o Rafael Núñez aqui, não caracteriza filiação às ideias dele, no que tange à sua abordagem teórica, a cognição corporificada.

A continuidade natural, considerada a “não-rigorosa” trabalha no quadro geométrico. Ela foi usada por vários matemáticos, dentre os quais, destacamos Newton, Leibniz, Euler e Fourier, que a tinham por uma perspectiva dinâmica, descrevendo a continuidade de uma curva como “deixar a mão mover-se livremente” (BARTO, 2004, p. 53). Para trabalharmos no quadro geométrico, falamos em uma continuidade numa perspectiva de movimentos fictícios sobre a curva, visto que a mesma se mantém estática. Já a continuidade formal, para Núñez (apud BARTO, 2004), trabalha no quadro algébrico demandando outros mecanismos cognitivos, como as ideias de preservação de proximidade e ausência de movimento, isto é, uma continuidade local definida no ponto. A continuidade formal generaliza o conceito de continuidade natural e muitas vezes é vista como a essência da ideia de continuidade.

Conforme as classificações de Núñez, nós consideramos que a continuidade em que Poncelet dedicou os seus estudos pode ser classificada como uma continuidade natural. Segundo CHAVES e GRIMBERG (2014), Poncelet a define como manter uma propriedade invariante, partindo de um contínuo de ideias.

Em todas essas conceituações há o uso expressivo da intuição e cada uma das continuidades tem suas particularidades. Núñez (apud BARTO, 2004) diz que não se trata de eleger uma das abordagens como a mais apropriada, precisamos discutir com os alunos de modo que percebam que são processos cognitivos diferentes. O argumento de Núñez é importante para essa análise cognitivista, e fortalece a argumentação epistemológica e a complementaridade entre intuição e lógica, mas não aprofundaremos aqui neste assunto. Por exemplo, Euler definia funções por algumas de suas propriedades (existência simbólica). No entanto, ele acreditava que as funções contínuas são exatamente aquelas que se deixam representar por uma única expressão analítica. Dessa forma, a função modular, por exemplo, para esse autor não é contínua. Pois, “uma simples mudança de notação será suficiente para transformar uma função contínua em uma função descontínua, e reciprocamente, como Cauchy tinha observado” (SANTANA, 2015, p. 166). Isto é, Cauchy observou essa inconsistência no conceito de continuidade de Euler dando como exemplo a função com a expressão analítica

$$h(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

que, ao ser definida por mais de uma expressão, então ela é descontínua, mas, se representada por uma única expressão, a saber:  $h(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ , para  $-\infty < x < +\infty$  então ela é ao mesmo tempo, contínua.

Cauchy (e outros) em sua tentativa de definir a noção de uma função contínua trouxe para a matemática o Axioma da Extensionalidade<sup>2</sup>. Esta noção foi um ponto de discordância das noções de Poncelet e Cauchy a respeito do princípio de continuidade. Otte (2011) afirma que

“O princípio da continuidade, o guia supremo no enquadramento de hipóteses filosóficas” (CP 6.101), é a “doutrina do falibilismo objetivado” (CP 1.172). Isso implica que não podemos dar regras definidas de como aplicar o princípio da continuidade (OTTE, 2011, p. 292–293).

Esse princípio, de acordo com Otte (2011), tem sido interpretado na matemática de duas maneiras distintas. Levando a duas tendências diferentes no debate fundamental da matemática durante o século XIX, para os quais as concepções contrastantes do princípio da continuidade de Cauchy e Poncelet, marcaram uma significativa expressão.

Enquanto Galileu foi o principal responsável pelo dismantelamento platônico – a Ptolomaica cosmologia, a criação da visão de mundo mecanicista-corporcular foi realização de um número de investigadores, devido sua culminação final para Newton. Neste sentido, Moscovici (Moscovici, S. (1968). *Essai sur l'histoire humaine de la nature*. Paris, Flammarion) está certo ao afirmar que a revolução científica consistiu essencialmente no aumento da mecânica ao nível da filosofia. A Abordagem de Newton para cálculo repousa firmemente sobre a concepção de contínuo como sendo gerado pelo movimento. E o movimento é matematicamente modelado em termos do conceito da função matemática. Para entender uma função matemática significa compreender a complementaridade da fórmula e da relação, de algoritmo e lei natural.

Na matemática dos séculos 17th/18th, funções descontínuas não podem ser representadas, porque a função era uma lei analítica. Uma curva geométrica, por outro lado, foi chamada contínua se poderia ser representado por um grupo (n) função (analítico) (Euler 1748, vol. II). Mas esta caracterização provou ser incoerente. Cauchy, depois de ter demonstrado a inconsistência destes esforços (Grattan-Guinness, 1970), e revisto toda a abordagem com base no princípio da continuidade, transformou a matemática em teoria extensional. Uma função no sentido de Cauchy ou Dirichlet pode ser visto como uma classe de equivalência de expressões ou fórmulas analíticas, onde a

<sup>2</sup> Este axioma é de Frege e diz que se dois conjuntos tiverem a mesma quantidade de elementos, então são iguais e isto é independente da natureza dos elementos de cada conjunto.

relação de equivalência é baseada no axioma da extensionalidade. Este interruptor de uma visão intensional para uma visão extensional tornou possível desde Cauchy destacar conjuntos de funções por certas propriedades, e em geral para raciocinar sobre elas, sem representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de conferir uma função linear directamente por  $f(x) = ax$ , Cauchy prova que uma função contínua que tem a propriedade  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pode ser representada como acima (Cauchy 1821, 99/100 apud PAULA, 2014, p. 96).

Para Cauchy (SANTANA, 2015), certas propriedades fundamentais, como a da continuidade, só poderiam ser conseguidas numa conceituação de correspondência funcional, de modo que uma função matemática tinha de surgir das classes de equivalência de representações simbólicas, isto é, de expressões analíticas e fórmulas. Com este problema, Cauchy se ocupou dando a nós o conceito de função contínua vigente ainda hoje, com um carácter aritmético.

“A primeira grande expressão do reducionismo à aritmética se tornava visível diante dos caminhos tomados por Bolzano-Cauchy ao lidar com o problema de continuidade e contínuo. Uma das primeiras observações da definição de continuidade na forma Bolzano-Cauchy diz respeito ao seu carácter local, que contrastava com o conceito tradicional de continuidade uniforme; a definição fala sobre a continuidade em um determinado ponto e, em seguida, pode generalizar por quantificar conjunto de pontos” (MONTEIRO, 2015, p. 36).

A ideia de Cauchy para continuidade está associada ao conceito de função, ela existe apenas no âmbito das funções. Dessa forma, ele introduz o conceito de continuidade associado ao conceito de função por meio do conceito formal de continuidade local:

dizemos que a função  $f(x)$  é, na vizinhança de um valor particular dado à variável  $x$ , uma função contínua dessa variável, sempre que ela é contínua entre dois limites de  $x$ , mesmo quando muito próximos um do outro, que contenham esse valor particular (Cauchy 1992 apud VIANNA, 2009, p. 81).

A concepção de Cauchy sinaliza o interesse em uma nova relação entre o conceitual e o construtivo. Otte (1990) diz que

Essa tendência no desenvolvimento da matemática de substituir parcialmente "ver" por "compreender", ou seja, substituir, por exemplo, provas computacionais explícitas por argumentos conceituais, foi fortalecida em nosso século. Esses argumentos conceituais são geralmente não construtivos. "Para ver que algo é verdadeiro e entender por que é verdadeiro não precisa ser a mesma coisa. O construtivista está disposto a abrir mão da clareza de compreensão em prol de uma espécie de clareza absoluta de visão" (Goodman, 1983, 63) (OTTE, 1990, p. 39, tradução nossa).

Poncelet na busca de generalidades, segundo Monteiro (2015), apropriou-se do conhecimento de Leibniz (1646–1716), utilizando o princípio da continuidade no desenvolvimento da geometria projetiva, entre elas os invariantes nas transformações geométricas, como, por exemplo, as interseções que se encontram no infinito. Definindo assim o princípio da continuidade a partir das propriedades que uma curva apresenta:

Adotarei, em princípio, nesta memória de geometria, que se uma figura goza de uma dessas propriedades que denominamos de posição, quando as partes que a compõem têm uma disposição particular, esta figura goza ainda da mesma propriedade, qualquer que seja a maneira geral com a qual se tenha invertido a ordem ou a disposição das figuras (CHAVES; GRIMBERG, 2014, p. 94).<sup>3</sup>

Para Chaves e Grimberg (2014), Poncelet em suas publicações utiliza de uma maneira engenhosa para solucionar problemas. Inspirado em Charles – Julien Brianchon, Poncelet conduz sua intuição sobre o princípio da continuidade e desenvolve o método da Projeção Central.

O princípio da projeção central está intimamente ligado ao princípio de continuidade. Embora o princípio de continuidade não distorça a figura, fazendo apenas modificá-la de posição, esta variação de posição permite estudar quais propriedades são conservadas. A ideia de variação contínua da figura permite separar as propriedades não métricas da figura. E nos é claro que a variação em um plano, na verdade, são os estados diferentes de uma figura plana que varia sob a projeção de pontos no espaço que estão variando (CHAVES; GRIMBERG, 2014, p. 95).

A ideia de continuidade para Poncelet, segundo Chaves e Grimberg (2014), está relacionada com as propriedades geométricas invariantes que as curvas apresentam, isto é,

as propriedades geométricas que se aplicam a uma configuração particular vão (salvo as mudanças de sinais que correspondem às mudanças de posição) continuar a se aplicar as figuras correlativas que diz “todos os estados reais e absolutos de um mesmo sistema que se transforma por graus insensíveis” (PONCELET, 1818) É suficiente então demonstrar a propriedade por um raciocínio explícito considerando uma figura onde todos os objetos e as relações são reais. E ainda fazendo uso do princípio de continuidade, é possível estender esta propriedade a todas as figuras correlativas, sendo entendido que este princípio permite afirmar “sobre a permanência das relações, mas não diz sobre a natureza e existência absoluta dos objetos e das grandezas que estas relações são concernentes” (PONCELET, 1818) (CHAVES; GRIMBERG, 2014, p. 100).

---

<sup>3</sup> Tradução de PONCELET, J.V. Application d’analyse et de géométrie. 1ªed. tomo 1. Paris: Gauthier-Villars, 1862. p. 374.



Chaves e Grimberg (2014) argumenta que essas relações são coerentes em uma aplicação real no sistema. “É bem claro que, na visão de Poncelet, não é uma questão de aplicar o princípio de continuidade de qualquer propriedade. Ele define o objeto da geometria como o estudo “das propriedades dos corpos em relação as suas áreas ou de suas configurações”” (PONCELET, 1818 apud CHAVES; GRIMBERG, 2014, p.100).

As propriedades métricas descobertas para uma figura primitiva permanecem aplicáveis, sem modificações além de mudança de sinal, a todas as figuras correlatas que podem ser consideradas como provindo da primeira (BOYER, 1974, p. 390).

Ainda que possamos pensar na continuidade de forma mais ou menos intuitiva, atualmente, ela está relacionada à concepção matematicamente abstrata do conceito de função, tendo por base o conceito de limite, que, segundo Courant e Robbins (2000) “é fruto de mais de uma centena de anos de tentativas e erros, e incorpora em poucas palavras o resultado de esforços persistentes para colocar este conceito sobre sólidas bases matemáticas” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 371). Ligando este conceito ao princípio da continuidade de Cauchy. No qual, introduz certas hipóteses descritivas na relação funcional.

O papel do princípio da continuidade na formação do conceito de função revela-se, sobretudo, no fato de que somente uma concepção geral e suficientemente abstrata das funções matemáticas possibilitou a ação recíproca dos aspectos complementares da função como operação ou regra, e da função como uma conexão regular preexistente (OTTE, 1993, p. 230).

Buscando uma complementaridade entre as ideias de Cauchy e de Poncelet sobre a continuidade, esta pesquisa se apresenta como uma possibilidade de compreensão de certos aspectos que envolvem esse conceito, oferecendo desta forma, uma nova perspectiva para o ensino desta temática.

A chamada "Crise Fundamental" nos fundamentos da matemática deste século foi na verdade uma polêmica sobre essa complementaridade. Intuicionismo e formalismo estavam ambos no mesmo barco, na medida em que ambos acreditavam que os objetos da matemática são construções. A briga deles nada mais era do que uma discussão dentro de uma mesma família, como E. Study (1862-1930) certa vez observou. O intuicionismo e o platonismo, por outro lado, pertenciam a campos essencialmente diferentes por causa de suas ideias diferentes sobre o status dos objetos matemáticos (OTTE, 1990, p. 39, tradução nossa).

Para Courant e Robbins (2000) Cauchy, por exemplo, pensou na continuidade em termos de aproximação e limite, trabalhava no particular, fixando parâmetros de aproximação. Uma definição estática: “ela não pressupõe a ideia intuitiva de

movimento” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 372). Já Poncelet, concebia esse princípio em termos de estrutura e variação ou invariância. Resolvendo os problemas fundamentais da matemática, estendendo e generalizando suas estruturas relacionais e suas regras de inferência.

O debate da matemática durante o século XIX girava em torno das concepções contrastantes do princípio da continuidade de Cauchy e Poncelet. Cauchy não concebia a continuidade em termos de estrutura e variação ou invariância, mas em termos de aproximação e de limite. Por outro lado, o movimento axiomático, previsto no trabalho de Poncelet ou Grassmann, tentou resolver os problemas fundamentais da matemática, através da ampliação e generalização de suas estruturas relacionais e suas regras de inferência. O lançamento da comutatividade geral de um produto e sua definição do produto em vetor anticomutativo de Grassmann é um exemplo pertinente (MONTEIRO, 2015, p. 36).

Logo concordamos com a ideia de Otte (2011) ao afirmar que Cauchy, ao contrário de compreender o princípio da continuidade em termos de estrutura e variação, adotava uma estratégia indutiva ou de baixo para cima pensando na continuidade como aproximação de limite. Já o movimento axiomático, como Otte coloca, presente na obra de Poncelet, resolve problemas fundamentais da matemática estendendo e generalizando suas estruturas relacionais e suas regras de inferência, adotando assim, uma estratégia de cima para baixo. Isto é, Cauchy vai do Particular para o geral e Poncelet do geral ao particular.

Enquanto aritmética e geometria, quantidades discretas e contínuas formaram o objeto de estudo da matemática até o século 19, a função dessa dualidade, após a evolução da matemática "pura", ou seja, após a teorização generalizada da matemática no século 19, foi mais do que um modo de geração de matéria matemática. A Aritmética e a Geometria, ao servirem uma à outra como campos de interpretação ou como aplicações pretendidas, estabeleceram um modo de geração de verdades matemáticas que tornou a matemática pura concebível. Mesmo o papel desempenhado posteriormente pelos conceitos teóricos dos conjuntos pode ser compreendido no sentido de usar alguma imagem geométrica generalizada (OTTE, 1990, p. 39, tradução nossa).

Dessa forma, é possível, do ponto de vista analítico, fazer uma ponte entre ambos, uma complementaridade entre geometria e aritmética, e juízos sintéticos e analíticos. Talvez mais notoriamente, essa complementaridade seja expressa nos princípios fundamentais da identidade, que dizem o que deveria ser o objeto do conhecimento matemático.

Um grupo concebeu teorias matemáticas em continuidade à experiência cotidiana, considerando o mundo como essencialmente constituído de coisas individuais ou conjuntos de tais coisas, enquanto o outro considerou as teorias como realidades em sua própria espécie,

como signos, que mantêm no máximo uma relação metafórica com o universo de coisas definidas (OTTE, 2011, p. 292–293).

Otte (2011) afirma ainda que o problema essencial de ver um “A como um B” sempre permanece e que nesse problema sempre existem duas operações envolvidas: perceber semelhanças e fazer distinções.

Dentro de um mundo contínuo, com tudo sendo semelhante a todas as outras coisas, a metáfora não leva a lugar nenhum, ao passo que o pensamento relacional se torna impossível em um universo de coisas distintas completamente isoladas. O princípio da continuidade só faz sentido, portanto, se tentarmos relacionar o particular e o pragmático ao geral e objetivo, e requer os dois tipos de operações mencionados. Portanto, Marietti (2006) poderia dizer que o diagrama geométrico “nunca é autocontido. A figura não pode funcionar por si só: está sempre acompanhada por um texto” (OTTE, 2011, p. 292–293).

Percebemos que a dicotomia entre contínuo e discreto tem sido alvo de discussões por séculos e o conceito de continuidade tem-se revelado muito importante, podendo ser explorado a partir de aspectos aritméticos e geométricos. Motivo pelo qual, compreendemos, assim como Monteiro (2015), que a partir da ótica da complementaridade é possível compreender mais profundamente esse conceito tão fascinante. Dessa forma, no capítulo seguinte, traremos os principais conceitos e ideia que fundamentam nossa pesquisa.

### **3 QUADRO TEÓRICO**

Neste capítulo apresentaremos o referencial teórico que orientou nossas reflexões ao longo da investigação. Baseados na semiótica Peirciana, buscamos trazer de forma sucinta conceitos que fundamentam nosso trabalho. Uma breve introdução sobre a semiótica e como ela se desenvolveu ao longo do tempo. Além disso, traremos uma reflexão sobre os Experimentos Mentais e a complementaridade que aplicamos em nosso produto educacional.

Cruz (2019a) disserta que o pensamento efetiva-se por intermédio de sinais, o que justifica uma abordagem semiótica para os processos de ensino e aprendizagem da matemática nos diversos níveis (ensinos fundamental, médio e superior). Trataremos aqui de pensamento na conceituação cultural escrita por Radford que escreve: “pensamento, é uma reflexão cognitiva do mundo na forma das atividades culturalmente moldadas do indivíduo” (RADFORD, 2011, p.197).

No entanto, esse ponto de vista não é comum entre professores de matemática, pois acreditam na objetividade da matemática. A crença na objetividade do conhecimento se tornou mais evidente após Bolzano, em que a “matemática começava a tentar mostrar a ordem objetiva dos conhecimentos, como fora o objetivo de Euclides e Aristóteles” (CLÍMACO, 2007, p. 62).

A busca pela compreensão de como se processa o conhecimento motivou e envolveu diversos filósofos e de diferentes épocas. Segundo Clímaco (2007), Kant questionou toda forma de conhecimento, afirmando que ele é fruto da relação da estrutura entre sujeito e objeto, isto é, da intuição e conceito. Para ele, “a metafísica não pode ter hipóteses” e a “Lógica geral (considerada como fornecedora de conhecimento sobre o conteúdo de alguma ciência), é sempre uma lógica da ilusão” (CLÍMACO, 2007, p. 61).

Bolzano, questionou a busca da evidência e da certeza, mas o fez com o objetivo de demonstrar a objetividade da ciência. Ao contrário de Kant, para ele, o conhecimento deveria ser obtido mediante conceitos, mas rejeitava a busca fazendo o uso da intuição, por acreditar que, segundo Clímaco (2007), a Lógica é tão segura quanto a intuição, mas tem a vantagem de fornecer os fundamentos objetivos dos conhecimentos e não pelo fato de que buscar conhecimento somente por meio da intuição possa conduzir ao erro.

Já para Peirce, segundo Salatiel (2012), qualquer conhecimento, incluindo o matemático, advém da observação de tudo aquilo que está presente à mente, seja

real ou não. Ele preocupou-se em associar seus estudos em lógica com a validade das crenças e métodos da ciência.

Kant, Bolzano e Peirce interpretaram o raciocínio analítico de diferentes formas enfatizando dualismo entre analítico e sintético. Destacaremos, resumidamente a seguir cada um deles.

### 3.1 JUÍZOS ANALÍTICOS E SINTÉTICOS

Em seu livro *Crítica da Razão Pura*, Kant (1997) distingue os conhecimentos que ele classifica como a priori, adquiridos independentemente de qualquer experiência, dos conhecimentos a posteriori, que adquirimos por experiência. Além da distinção entre os conhecimentos a posteriori e a priori, Kant considera ainda juízos denominados por ele analíticos e sintéticos. Podemos entender juízos como dizer algo de algo. Uma relação de conexão de dois conceitos. Em que um cumpre a função de sujeito, do qual se fala algo, o predicado.

Podemos dizer que os juízos analíticos são juízos explicativos e que os juízos sintéticos são juízos extensivos, pelo fato destes nada acrescentarem ao conceito do sujeito. Apenas pela análise, eles se decompõem em conceitos parciais, compreendidos e concebidos ainda que tacitamente nos mesmos (CRUZ, 2015, p. 159).

Isto é, para Kant (1997), os juízos analíticos são aqueles em que a conexão se concebe por identidade, os atributos fazem parte do termo sobre o qual se afirma algo. Ele apenas analisa o conceito, aqueles em que “o predicado B pertence ao sujeito A como algo contido (ocultamente) nesse conceito A”. Isto é, são juízos de ampliação, mas nada acrescentam ao sujeito.

Já os juízos sintéticos são os que associam os conceitos, de forma que os termos se complementam e geram um novo saber, ampliando o conhecimento. Nele, o predicado acrescenta algo ao conceito de sujeito. O predicado B está totalmente fora do conceito A. São juízos de elucidação. Kant também denomina esses dois juízos como juízos explicativos e juízos extensivos, respectivamente.

A partir dessa diferenciação entre os juízos, Kant argumenta que os juízos da experiência, posteriori, são todos sintéticos. E classifica-os então em analíticos, sintéticos a priori e sintéticos a posteriori. Assim, para Kant, as proposições matemáticas são todas juízos sintéticos a priori, pois são simultaneamente, universais e necessárias e fazem o conhecimento evoluir.

Kant, dessa forma, assume uma dualidade entre os juízos, se baseando numa distinção, segundo Clímaco (2007), entre os componentes que constituem as ideias que o sujeito tem do objeto e as propriedades desse objeto (o objeto em si). Ele, com isso, afirmara a diferença entre teoria e experiência.

Já Bolzano, discorda de Kant e vê essa distinção como exagerada, e com isso, pretendeu construir uma filosofia da ciência que superasse e respondesse à formulada por Kant na Crítica da Razão Pura, porém, não quis conciliar o empirismo com sua doutrina, não compreendendo o importante papel da experiência para a comunicação. Ele afirma que:

se existir uma única idéia numa proposição que podemos variar arbitrariamente sem mudar sua validade ou falsidade, ou seja, se todas as proposições produzidas substituindo esta idéia por qualquer outra idéia que quisermos são, ora todas verdadeiras, ora todas falsas, pressupondo apenas que tenham denotação; então... me permito chamar tais proposições - pegando emprestado de Kant a expressão – analíticas (Bolzano apud CLÍMACO, 2007, p. 77).

Para Bolzano (apud CLÍMACO, 2007) existem dois tipos de proposições analíticas: as logicamente analíticas aquelas em que “nada é necessário para julgar” sua natureza analítica “a não ser seu conhecimento lógico, porque os conceitos que fazem a parte invariante dessas proposições são todas lógicas” e as analíticas no sentido estrito em que “conceitos não lógicos entram” e que, portanto, requerem “um tipo bem diferente de conhecimento” (CLÍMACO, 2007, p. 77).

Já as proposições sintéticas, para ele, são as demais em que “não há uma única ideia que possa ser arbitrariamente variada sem afetar sua veracidade ou falsidade” (Bolzano apud CLÍMACO, 2007, p. 77). Ele defendeu que, no sentido em que Kant considerava, não existiam intuições puras, que os juízos sintéticos não surgem de intuições, mas que decorrem parcialmente dos conceitos e que a “distinção entre julgamentos analíticos e sintéticos é meramente subjetiva” (Bolzano apud CLÍMACO, 2007, p. 78).

Enquanto a preocupação de Kant era a de saber como o sujeito alcança o conhecimento, o foco de Bolzano está mais na explicação do que na descoberta.

Peirce, produziu diversos trabalhos sobre lógica e matemática, que segundo Salatiel (2012), “ora parecem abandonar completamente o dualismo analítico/sintético, ora parecem sustentá-lo” (SALATIEL, 2012, p. 393). Ele afirma que a única falha na definição Kantiana é que ela seria ambígua, em virtude da sua ignorância lógica dos relativos. Kant trabalhou com uma lógica de classes ou

propriedades, afirmando se algo pertence ou não a classe e o “conceito de “contenção” dos juízos analíticos de Kant restringe-se a esse tipo de proposição categórica, que se mostrou, com o tempo, limitada” (SALATIEL, 2012, p. 396).

Entretanto, segundo Salatiel (2012), Peirce não extinguiu os conflitos e ambiguidades presentes nesse assunto. Peirce reconstrói o conceito de analiticidade de Kant, incluindo o método do pragmatismo, o falibilismo, a semiótica e a fenomenologia. Ele aponta duas classes de raciocínios, os explicativos (analíticos ou dedutivos) e os ampliativos (sintéticos ou indutivos).

Na concepção de Peirce, o raciocínio analítico é aquele o qual a conclusão é uma consequência daquilo que estava dito nas premissas e deve ser interpretado em termos lógicos e inferenciais, indicando as diferentes formas de raciocínio. Ele é oposto ao raciocínio sintético, são conclusões dedutivas e que somente ele ou a indução pode de aumentar o conhecimento.

Segundo Salatiel (2012), os estudos em lógica de Peirce o levaram a buscar maior rigor e precisão na divisão Kantiana. De maneira que ele primeiro considerou inadequada a análise em juízos aplicando somente aos dois tipos de inferência e demonstrou que todo raciocínio dedutivo requer uma prática perceptiva, observacional e experimental. A matemática e a lógica formal estão no centro da filosofia de Peirce, ele descobriu que a matemática (tanto a aritmética quanto a geometria) e o raciocínio dedutivo são matérias de experiência e de percepção, como qualquer outra ciência (SALATIEL, 2012, p. 407).

Peirce se dedicou em diversas áreas da ciência. Sua obra é extensa e complexa. Segundo Santaella (2002), Peirce se dedicou à lógica da ciência. Ele buscava o conhecimento dos métodos e dos fundamentos lógicos contidos neles. A semiótica de Peirce foi pensada como uma lógica em um sentido muito amplo e está fundamentada na fenomenologia, que é “uma quase-ciência que investiga os modos como aprendemos qualquer coisa que aparece à nossa mente” (SANTAELLA, 2002, p. 2).

### 3.2 A SEMIÓTICA

No desenvolvimento da história, destacamos que a semiótica sempre esteve presente como formas de questionar, representar e significar. Segundo Santaella (2002) é possível notar uma preocupação com os problemas de linguagem desde o



mundo grego que nos leva a considerar uma semiótica implícita com investigações sobre a natureza dos signos e uma semiótica explícita, a ciência propriamente dita.

A semiótica tem origens próximas à matemática, sempre juntas de modo que ambas as ciências se ajudaram e continuam se ajudando, servindo de suporte uma à outra, mesmo que ainda fosse desconhecida. Entretanto, a semiótica, como pode observar no livro *Primeiros elementos de Semiótica* (PINILLA; IORI; D'AMORE, 2015), foi reconhecida como ciência apenas no século XIX e somente a partir da década de 1990 ela despontou na didática matemática a partir dos problemas de ensino aprendizagem.

Podemos destacar alguns pioneiros da semiótica como Platão, no qual em seu diálogo *Crátilo* retrata a origem da linguagem, e Aristóteles que aponta para a interpretação. Entre os autores atuais, destacamos Santaella (2002) que é a maior pesquisadora brasileira, reconhecida internacionalmente como pesquisadora da Semiótica de Peirce, Luis Radford (1998), Willian Cruz (2015, 2018) e Michael Otte (1993, 2011), que investigam Didática e Epistemologia da Matemática, baseados na Semiótica de Peirce.

Pinilla; Iori e D'amore (2015) afirmam que a raiz etimológica da palavra semiótica vem de *semeion*, traduzido como signo, contudo, conceitualmente a semiótica se aproxima do termo latino *signum* que era usado para indicar uma noção geral, incluindo fenômenos culturais e naturais.

### 3.3 SEMIÓTICA DE PEIRCE

Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) especialmente ao estudar “A Crítica da Razão Pura” de Kant, iniciou a publicação de suas pesquisas sobre semiótica em 1867, a partir da experiência que teve do mundo e da observação detalhada dos próprios fenômenos.

A fenomenologia, segundo Santaella (2002), fornece as fundações para as ciências normativas, das quais a lógica faz parte. A lógica, é a “ciência das leis necessárias para o pensamento e das condições para se atingir a verdade” (SANTAELLA, 2002, p. 3), é o estudo do raciocínio correto. Peirce, descobriu que o pensamento carece de signos para o seu desenvolvimento. Vem dessa descoberta a concepção peirciana da lógica para a semiótica.

A função da fenomenologia é a de apresentar as categorias formais e universais da forma em que os fenômenos são aprendidos pela mente. Para Peirce, são exatamente três os elementos formais e universais que se apresentam a mente. Esses elementos são a *primeiridade*, *secundidade* e *terceiridade*. Santaella, explica esses três elementos em seu livro, afirmando que

A primeiridade aparece em tudo que estiver relacionado com acaso, possibilidade, qualidade, sentimento, originalidade, liberdade, mônada. A secundidade está ligada as ideias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, aqui e agora, conflito, surpresa, dúvida. A terceiridade diz respeito a generalidade, continuidade, crescimento, inteligência (SANTAELLA, 2002, p. 7).

Santaella (2002) afirma ainda que, para Peirce, o aspecto mais simples da terceiridade manifesta-se nos signos. Pois, o signo é um primeiro, que representa algo para alguém e que liga um segundo, sendo aquilo que o signo indica ou representa, a um terceiro, o efeito produzido em um possível intérprete.

Peirce disserta que signo (representâmen) é uma coisa que representa algo para alguém que quando dirigido a alguém, cria um signo equivalente na mente (interpretante). A representação é a característica de algo, que produz um efeito mental.

um signo ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa algo, o seu objeto. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei fundamento do representâmen (PEIRCE, 2005, p. 46).

Por exemplo, um professor desenha uma curva que representa uma parábola no plano cartesiano na lousa durante uma aula. A curva é um signo de uma função que o professor deseja explicar, o objeto do signo. O efeito que esse desenho produz nos alunos é o interpretante dessa curva. Assim, esse desenho é um mediador entre a ideia que o professor deseja explicar aos alunos e o efeito que ele produzirá neles.

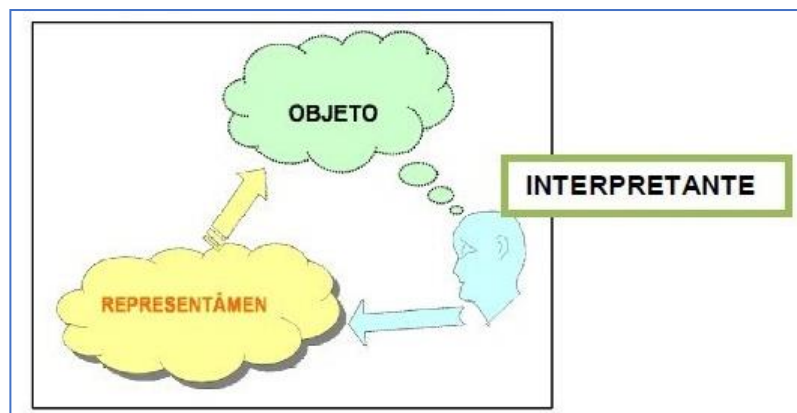
Figura 1 – A Tríade de Peirce



Fonte: <https://amusearte.hypotheses.org/1075>, acesso em 11/2019.

Para Cruz (2018) signo é tanto uma representação de algo como um processo que estabelece uma relação entre o objeto e interpretante. É um fluxo de significação. “O representâmen está ligado a três aspectos: o fundamento, o objeto e o interpretante. O fundamento é a ideia gerada pelo símbolo na mente de quem o percebe e o interpretante é o que gera significado” (CRUZ, 2019b).

Figura 2 – O processo semiótico



Fonte: Cruz (2015).

Santaella, argumenta que estando essa lógica triádica clara, então é possível compreender melhor o motivo da definição peirciana incluir três categorias acerca da natureza do signo: significação, objetivação e interpretação. A significação está relacionada às propriedades internas do signo; é a relação do signo com ele mesmo e que o dá a capacidade de funcionar como tal. Essa relação pode ser sua qualidade, sua existência, ou ainda seu caráter na lei. A objetivação refere àquilo a que o signo indica, ela provém da relação do fundamento com o objeto, é o que determina o signo e é simultaneamente, o que o signo representa. Por fim, a interpretação está

relacionada ao efeito ou interpretação que o signo tem potencial de despertar. É a relação do fundamento com o interpretante.

Como a semiótica está fundamentada na fenomenologia, existem signos tanto de terceiridade, quanto de primeiridade e de secundidade, esses últimos chamados de quase-signos. Assim, o signo pode ser qualquer elemento que representa algum significado para alguém, ele representa algo — o objeto do signo — e produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial, chamado interpretante do signo. Assim como o signo, o objeto também pode ser qualquer elemento, de qualquer espécie. Dessa forma, como Santaella afirma, o que define signo, objeto e interpretante é a posição lógica que cada um desses elementos irá ocupar no processo representativo. É por isso, que qualquer coisa pode ser analisada semioticamente, desde uma música a um teorema. Santaella, afirma que essa potencialidade é resultado dessa ligação da semiótica com a fenomenologia.

É desta que advém a possibilidade de considerar os signos e interpretações de primeira categoria (meros sentimentos e emoções), de segunda categoria (percepções, ações e reações) e de terceira categoria (discursos e pensamentos abstratos), que tornam muito próximos o sentir, o reagir, o experimentar e o pensar. São essas misturas que estão muito justamente fundamentadas nas diferentes classes de signos estudadas por Peirce (SANTAELLA, 2002, p. 11).

Para Peirce (apud SANTAELLA, 2002), existem três propriedades (fundamentos) que dão competências as coisas para atuar como signo: qualidade (*qualisigno*), sua existência (*sinsigno*) e o caráter na lei (*legisigno*). De forma que pela qualidade tudo pode ser signo e pela lei tudo deve ser signo. Santaella (2002), explica essas propriedades utilizando alguns exemplos, dentre os quais citaremos três a seguir.

Uma simples qualidade faz algo ser signo quando essa qualidade é um signo, como, por exemplo, a cor azul-claro que produz uma cadeia associativa e que nos faz lembrar do céu. A mera cor não é o céu, mas lembra ou sugere isso. Quando a qualidade funciona como tal, é chamada quali-signo.

O fato de uma pessoa simplesmente existir faz com que ela emita “sinais” como o modo de vestir ou de falar e são esses que fazem que o existente funcione como signo e nesse caso, será chamado sin-signo.

Por último, a propriedade da lei e que ao ter essa propriedade é chamado legisigno. A lei tem a função de fazer com que algo singular se conforme e se amolda à generalidade, como, por exemplo, as palavras que são leis, pois pertencem a um

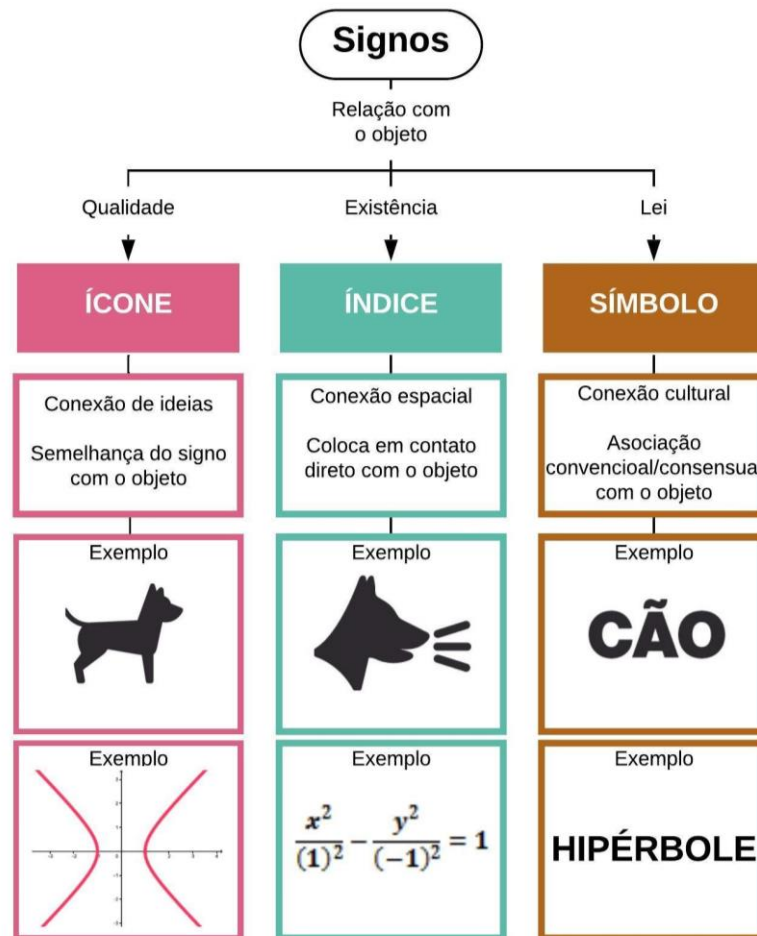
sistema e faz com que cada vez que ocorrem, sejam entendidas com significado para um grupo de pessoas.

É importante observarmos que essas propriedades não são excludentes, na maioria das vezes elas ocorrem simultaneamente, mas com a dominância de uma ou outra.

Como são três fundamentos, existem três categorias de signos que envolvem o raciocínio, definido por uma tríade: o ícone, o índice e o símbolo. Quando o fundamento é considerado uma qualidade na relação com o objeto, o signo é um ícone. Se o signo for um existente, será um índice. Assim, para Peirce, índice é a relação de um signo com um objeto. Se o signo for uma lei, será um símbolo.

O ícone é um signo [...] que é a imagem ou representação do objeto. Já o índice é um signo que se refere ao objeto em virtude de ser realmente afetado por esse objeto. O índice envolve uma espécie de ícone, um ícone do tipo especial e não uma mera semelhança com o seu objeto. Tem alguma qualidade em comum com o objeto, é um nome ou uma indicação (CRUZ, 2015, p. 33,34).

Figura 3 – Diagrama do Signo



Fonte: Elaborado pela autora.

O ícone tem como fundamento um quali-signo, nele o que dá poder para funcionar como signo é apenas a sua qualidade (como, por exemplo a cor), assim ele sugere seu objeto por similaridade, isso é, ícone só pode sugerir ou evocar o objeto porque a qualidade que exhibe se assemelha a outra qualidade. Por exemplo: um desenho de uma curva no plano cartesiano: não há nada nela que possa representar algo, é simplesmente uma linha curva num papel que apresenta a si mesma, porém pela semelhança ela pode despertar cadeias associativas que se assemelha a uma infinidade de outras curvas.

O índice é fundamentado pela sua existência concreta. É necessária uma conexão entre o índice e o objeto. Por exemplo, a equação de uma hipérbole. Ela não tem nenhuma semelhança com a hipérbole, mas aponta para outro existente porque seria uma curva que faz parte de um conjunto de curvas semelhantes chamadas, hipérbole. Assim, essa equação funciona como índice, pois é o resultado de uma conexão de fato entre a equação e a curva hipérbole.

Símbolos são os mais importantes dos sinais e também os mais complexos. O fundamento do símbolo é o legi-signo e ele opera no modo condicional, pois preenchidas determinadas condições a lei agirá. Por exemplo, a equação geral das hipérbolas é a lei que determina todas as curvas que correspondem a uma mesma propriedade.

Cada signo possui um objeto e o objeto imediato do ícone é o modo como a qualidade pode sugerir ou evocar outras qualidades. Já o do índice é o modo pelo qual esse signo indica seu objeto. O do símbolo é o modo como ele representa o objeto, dessa forma, ele é um conceito. No ícone as associações são por semelhança, no índice por conexão de fato e no símbolo através da lei.

Na matemática, os símbolos resultam da consideração dela como uma linguagem e dessa forma, são indispensáveis. O matemático representa tudo por meio dos símbolos.

Para Bense (2010), o símbolo

é um signo que se refere ao seu objeto denotando uma virtude ou uma lei, normalmente, associando ideias gerais que operam no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo ao seu objeto, ou seja, é uma convenção (BENSE, 2010, p. 20).

Segundo Otte (2011), a ontologia matemática, na concepção de Peirce, consiste em um contínuo de universais que fazem a mediação entre a realidade

objetiva e os signos interpretativos. É com Peirce que a relação entre a generalidade e continuidade ganha destaque. O termo “geral” é usado por Peirce para designar uma regularidade ou uma lei aberta a um número indefinido de possibilidades, significando algo além de toda cardinalidade definida e esse algo, portanto, representa um *continuum*.

De acordo com Cruz (2015), Peirce afirma que o raciocínio matemático procede da construção de todas as formas e tipos de diagramas e da experimentação deles (Experimentos Mentais). Esses diagramas são considerados signos usados referencialmente (ícones) e atributivamente (índices).

Otte (2011) afirma que a matemática, considerada do ponto de vista genérico, é essencialmente um raciocínio diagramático. A matemática como raciocínio diagramático ou como “lógica modal” representa uma perspectiva que visa à generalização, enquanto a matemática como aritmética ou teoria dos conjuntos preocupa-se principalmente com a fundação e a separação.

Explorando continuamente os limites de uma determinada constelação diagramática logo antes de sua quebra, pode-se exibir que a permanência das relações dentro dessas limitações, ao invés da existência empírica e isolada ou inexistência do relato, valida o argumento. O geral tem o caráter de uma relação ou conexão, como uma ideia que se espalha entre as mentes. Os diagramas, portanto, são especialmente úteis para o matemático e o epistemólogo quando a continuidade está envolvida, porque então esse processo de raciocínio abduutivo pode ser estudado mais facilmente. Normalmente “a lógica não é pertinente” à matemática e pode ser inútil para ela, diz Peirce (CP 2.197), mas em questões de continuidade e abdução “uma ciência da lógica é necessária” (CP 7.525), e “uma lógica evolutiva satisfatória da matemática continua sendo um desejo” (CP 3.526)(OTTE, 2011, p. 276, tradução nossa).

Quando se trata de legi-signos, o interpretante que este signo estará apto a produzir é chamado argumento, sendo que as regras interpretativas para a produção do interpretante já estão inclusas no próprio signo, assim a ordem lógica das relações das premissas é que dá o sustento ao interpretante. A essência da Lógica reside na classificação e na crítica dos argumentos, que se dividem em três: *abdução* (hipótese), *dedução* (necessidade), *indução* (probabilidade). “Nenhum argumento pode existir sem que “se estabeleça uma referência entre ele e alguma classe especial de argumento”” (BACHA, 1997, p. 37). Dessa forma, para Peirce, os três estágios da investigação são: abdução, dedução e indução. É esta distinção que fundamenta a Teoria da Investigação, formalizando um ciclo; abdução, dedução, indução, nova abdução, e assim, sucessivamente.

Mais especificamente, a abdução é o “primeiro degrau do raciocínio científico” (CP 7.218 apud BACHA, 1997, p. 117) e se refere ao processo a partir do qual é gerada uma hipótese provisória e plausível a respeito de um fato ainda sem explicação. É o processo de formação de uma hipótese explanatória.

Para Peirce, a cognição só pode existir num processo contínuo. A continuidade é expressada nas formas das inferências válidas que são três: *dedução* (é o raciocínio necessário), *indução* (o raciocínio procede como se todos os objetos dotados de certos caracteres fossem conhecidos) e *hipótese* (ou abdução, que é a inferência que procede como se todos os caracteres necessários para a determinação de um certo objeto ou classe fossem conhecidos) (BACHA, 1997, p. 87–88).

A abdução tem a ver com a geração e recomendação de hipóteses explicativas, diferentemente de apenas uma percepção e pode ser parte de uma ideia já presente na mente. No que diz respeito ao método científico, a abdução é “meramente preparatória”. “É a única operação lógica que apresenta uma ideia nova” (PEIRCE, CP 5.171 apud BACHA, 1997, p. 117). Ao adotarmos uma hipótese, adotamos um processo abduativo e esse processo está ligado ao contexto e ao objeto em questão.

Ainda, segundo Otte (2011), na matemática pura, os índices se referem a objetos que pertencem a um modelo e não a um mundo real, eles indicam objetos em universos semânticos construídos. A compreensão de que a matemática não realiza afirmações existenciais, mas apenas esboça possibilidades e que, ao mesmo tempo, faz o uso de índices para representar afirmações é essencial para a compreensão da matemática como Raciocínio diagramático, na concepção de Peirce. O uso de índices, apontando para um contexto, torna a abordagem semiótica inevitável, pois demonstra que o raciocínio matemático é, como os demais, contextual e que a matemática não pode ser afirmada apenas em termos descritivos.

Peirce viu, Seboek continua, “como ninguém antes dele viu, que a indicação (apontar, ostensão, dêixis) é um modo de significação tão indispensável quanto irreduzível” (OTTE, 2011, p. 280 tradução nossa).

Kant (apud OTTE, 2011) sustenta que o mundo sensível é dependente da mente e para Otte, “essa dependência da mente ou perceptividade do conhecimento significa não haver matematização completamente objetiva e absoluta da realidade fenomenológica” (OTTE, 2011, p. 281 tradução nossa).

A pragmática de Peirce (CP 5.3 apud OTTE, 2011) indica haver um problema de generalização, um problema entre a relação do geral e do particular. Ele afirma que



a “a única tendência primária e fundamental da ação mental é a tendência a generalizar” (CP 6.21; CP 1.82 apud OTTE, 2011, p. 281, tradução nossa) portanto, deve-se observar como os matemáticos generalizam. É nesse contexto que Peirce apresenta a geometria de Poncelet como um exemplo. Para ele, nessa geometria, as relações e as estruturas relacionais são generalizadas com base no princípio da continuidade e a objetividade é alcançada em função das aplicações procuradas.

### 3. 4. EXPERIMENTOS MENTAIS

Para Otte (2011), a escolha dos índices básicos (variáveis) deve ser feita conforme a tarefa matemática e não, segundo uma interpretação concreta da situação a ser matematizada. “A essência de algo deve ser observada na lógica de seu desenvolvimento posterior e nas possibilidades assim abertas, portanto, não é mais que a essência de uma representação desse algo” (OTTE, 2011, p. 282, tradução nossa). Isso é, para Otte, o desenvolvimento da matemática precisa ser encarado como o processo de matematizar o indeterminado e o contínuo.

No Livro “Os Elementos de Euclides”<sup>4</sup> surge uma prática matemática fixada em diagramas que são representações semióticas. Nele o termo *semeion* aparece para designar o ponto (PINILLA; IORI; D’AMORE, 2015). “Essas construções são consideradas Experimentos Mentais” (CRUZ, 2019a, p.5), dos quais falaremos a seguir.

Para Otte (2011), os diagramas de Euclides podem ser interpretados de duas maneiras distintas, porém complementares. Em uma, a proposição a ser provada, é referente a uma totalidade já definida e diz algo sobre cada um deles. Enquanto na outra interpretação, a frase tem um caráter mais condicional, pois essa totalidade não é suposta. Assim, ele afirma que o raciocínio diagramático euclidiano poderia ser descrito em termos da noção de “experimento do pensamento”, pois ele envolve um pensamento físico idealizado, mas que pode ser representado por diagramas.

"Uma função para experimentos de pensamento" de Thomas Kuhn (1977) mostra que a produtividade do experimento de pensamento é devido à sua função de reajustar a relação entre um aparato conceitual ou uma teoria e a realidade à qual ele é aplicado. Portanto, os

---

<sup>4</sup> Esta obra de matemática é composta por 13 livros em que, além de definições, postulados e noções comuns/axiomas, demonstram-se 465 proposições, em forte sequência lógica, referentes à geometria euclidiana, a da régua e compasso, e à aritmética, isto é, à teoria dos números. Esta é a primeira tradução completa para o português feito a partir do texto grego (BICUDO, 2009).

experimentos mentais podem nos ensinar algo novo sobre o mundo, mesmo que não tenhamos novos dados, ajudando-nos a reconceitualizar o mundo de uma maneira melhor (OTTE, 2011, p. 282–283, tradução nossa).

A aplicação dos Experimentos Mentais está associada ao desenvolvimento do raciocínio diagramático, buscando a generalidade. Ambos têm o papel de desenvolver métodos para facilitar a abdução, que segundo Peirce é “o processo de formação de uma hipótese explanatória. A única operação lógica que apresenta uma ideia nova” (PEIRCE, 2005, p. 220).

A invenção geométrica e a prova de teoremas geométricos usam diagramas e desenhos, experimentando-os, por exemplo, para encontrar retas auxiliares adequadas. Na medida em que tornamos explícitos os fatos representados pelos desenhos de forma axiomática, esses experimentos parecem ser “experimentos mentais” (OTTE, 1990, p. 47, tradução nossa).

Assim, intensificam a crença na existência de objetos na matemática. Em uma perspectiva semiótica, utilizam variáveis objetuais, fazendo o uso de ícones. Os objetos são determinados pela intuição direta, independentemente de qualquer teoria e as provas não se referem a um contexto lógico definido, fixo e explícito.

Segundo Cruz (2018), Peirce define raciocínio diagramático como processo em três etapas: construção de uma representação, experimentação dessa construção e observação dos resultados, o que torna esse método muito interessante para o nosso processo de pesquisa. Para Wielewski (2008), a experiência mental é um dos modelos e atividades e que

Com o uso desse modelo de atividade desenvolve-se e aprimora-se a sensibilidade para os aspectos mais globais do processo de modelagem, ficando cada vez mais claro e evidente o estabelecimento da concepção geral, da avaliação, da análise crítica e possível validade/viabilidade dos modelos utilizados ou em disponibilidade. (WIELEWSKI, 2008, p. 204).

Segundo Cruz (2018), toda prova matemática tem um elemento de generalização, sugerindo que pode haver uma conexão entre os Experimentos Mentais e os métodos formais de provas. De forma que a aplicação dos Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem perpassa pela compreensão da matemática por intermédio de um processo semiótico. Assim, o pragmatismo de Peirce trata do problema da complementaridade entre a estrutura e o conteúdo particular em termos de processos semióticos e lógica relacional. Wielewski (2008) fala da importância da complementaridade entre o pensamento relacional e o instrumental.

o estudo global de uma situação, percorrendo todo o ciclo do processo de modelação ou modelagem matemática, é fundamental para que os

alunos se apercebiam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles, seja ao utilizar-se de abordagens geométricas, algébricas, algorítmicas, numéricas, lógicas etc. Essa concepção de modelagem como uma estratégia de ação ou de ensino, tem como função a de estabelecer um forte elo de ligação ou complementaridade entre a teoria ou fundamentos teóricos – pensamento relacional — em relação aos procedimentos, regras, técnicas e algoritmos — pensamento instrumental. (WIELEWSKI, 2008, p. 202-203).

Cruz (2019a) sugere que pode haver alguma relação entre a semiótica e as habilidades matemáticas por meio dos Experimentos Mentais. Segundo Oliveira, em seu livro “Francis Bacon e a Fundamentação da ciência como tecnologia”,

Experimentos mentais visam encontrar respostas para determinadas dúvidas colocadas pela teoria. [...]. Referem-se a situações idealizadas, que não são encontráveis, mas abstratamente representáveis, como a experiência da aceleração de um corpo em um plano inclinado sem atrito [...]. Os experimentos mentais não são propriamente uma invenção da modernidade, pois a antiguidade já havia se valido deles. [...] No caso dos experimentos mentais situações hipotéticas ainda que irrealizáveis, como a de um movimento sem atrito, fornecem um meio privilegiado de testar os desdobramentos de certas premissas e leis. [...] Os experimentos mentais concebem como revelador aquilo que está fora da percepção ordinária e produzem fenômenos e objetos que desejam observar (OLIVEIRA, 2010, p. 153–157).

Na perspectiva formalista, segundo Cruz (2018), a intuição não é considerada relevante tanto para o conteúdo matemático, quanto para a ampliação de raciocínios. Essa irrelevância da intuição no estudo da estrutura faz-se necessário o uso do método axiomático. Para os formalistas, apenas as demonstrações formais validam um teorema, e, somente assim, adquirimos conhecimento matemático.

Para Garbi (2010) a prova Matemática formal é um “processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas” (GARBI, 2010 apud CRUZ, 2018, p. 61).

Entretanto, entendemos que a construção de conceitos fundamenta a matemática, por isso, em nossa pesquisa, faremos uma aproximação dos experimentos mentais e das provas matemáticas formais. Isto é, buscaremos elementos que fazem assemelhar ou diferenciar os Experimentos Mentais das provas matemáticas formais. “Com efeito, a intuição revela elementos que o processo de formalização desconsidera ou encobre” (ALVES, 2011, p. 25). Para Otte (1990),

Para chegar a algum conhecimento novo, a atividade matemática não pode ser reduzida a deduções formais. Se o conteúdo matemático fosse identificado com as definições, o assunto e a atividade seriam

completamente separados na matemática. O "movimento axiomático", portanto, possivelmente alegaria que uma descrição completa e rigorosa do assunto matemático é uma mera ficção. As teorias axiomáticas devem ser entendidas como dispositivos exploratórios em vez de espelhos da realidade. Os axiomas não são afirmações sobre nenhuma realidade exterior, mas são instrumentos que permitem passar do particular ao geral. Uma descrição axiomática não reflete nenhum fato verdadeiro, mas orienta nossa atividade mental em seus esforços exploratórios (OTTE, 1990, p. 48, tradução nossa).

Os Experimentos Mentais são poderosos instrumentos para o aprimoramento e compreensão da matemática, principalmente no que tange o seu ensino. Otte (2011) afirma que Peirce observou que relações, tendências, leis, ideias e significados gerais são mais reais do que coisas existentes particulares porque são diretamente eficazes em nossas mentes e comportamento.

Nós, humanos, vivemos mais em um mundo de signos e possibilidades do que em um universo de coisas determinadas. Isso poderia parecer uma espécie de hegelianismo (CP 5.90) se não fosse pela secundidade, o grau de resistência, que a matemática como raciocínio diagramático traz para a fenomenologia (CP 5.40). Peirce enfatizou repetidamente que os diagramas são essencialmente ícones, porque os ícones são o único tipo de signo que possivelmente traz novos insights e verdades (CP 2.279) (OTTE, 2011, p. 283 tradução nossa).

Para Peirce a intuição espacial é “o único método de pensamento valioso” (CP 1.383 apud OTTE, 2011, p. 284 tradução nossa) e podem ser de dois tipos diferentes: as que surgem como problemas a serem solucionados fazendo o uso da produção abdutiva de novas hipóteses e as que vem de julgamentos perceptivos.

No primeiro tipo, as novas hipóteses substituem um complicado e embaraçoso conjunto de predicados ligados a um sujeito. Essa intuição, ou síntese abdutiva, afirma Otte (2011), é “um meio ou parte da atividade e experimentação semiótica, ao invés de ser uma base de conhecimento passivamente recebida e não mediada” (OTTE, 2011, p. 284 tradução nossa).

Enquanto, no segundo tipo, é que nos diz algo sobre o que é percebido e é possível raciocinar dedutivamente sobre os significados dados ou pela construção de um diagrama, produzido pela abdução.

A dedução representa a terceiridade, mediando entre a abdução (primeiridade) e a verificação (secundidade). A noção de continuum é essencial para a lógica, porque o próprio espaço tem uma natureza triádica. Na medida em que é um continuum, é uma “mera lei - uma mera terceiridade” (CP 7.488). Por outro lado, o espaço mostra “indícios de secundidade” - do contrário poderíamos prescrever suas propriedades, sua dimensionalidade ou a validade do axioma dos paralelos, por exemplo - e, como tal, “é mais do que uma mera lei.”

Essas propriedades, entretanto, não são absolutamente certas ou fixas e, portanto, o espaço também é um Primeiro (CP 1.244, NEM 4: 82). [...] Nessa natureza triádica do espaço reside todo o problema da interação entre os aspectos objetual (extensional) e lógico (intensional) do significado matemático e do raciocínio diagramático. O espaço como terceira é paradoxal: é tanto o processo histórico como o seu contexto estrutural (OTTE, 2011, p. 284 tradução nossa).

Para Cruz (2018), os Experimentos Mentais são a forma de representar os pensamentos visando o objetivo de entender a coerência do próprio conceito e a possibilidade de aplicação do mesmo. Ou seja, é a forma, desempenhada pelo sujeito cognoscente, de expor seu próprio pensamento, utilizando como objeto de consideração um contexto bem definido, por intermédio de uma representação. Permitindo o uso da intuição, combinando experiências e conhecimentos.

De um lado, temos as provas formais que se constituem de proposições conectadas ou encadeadas logicamente, tentando eliminar o uso da intuição em seu desenvolvimento. Podendo assim, ser desenvolvida somente por quem já acumulou conhecimento e experiência suficiente para realizar a prova.

Por outro, os Experimentos Mentais, baseados num sistema de atividades supostas (síntese abdutiva), permitem o uso da intuição, combinando experiências e conhecimentos e seguindo uma lógica de considerações heurísticas. Além de deduções lógicas e cálculos formais, e também cálculos não estritamente formais. A matemática por essa consideração é compreendida como uma atividade, ou seja, uma construção.

Por essa perspectiva, a matemática é compreendida como uma atividade, uma construção a base de possibilidades. No experimento mental, surge então a possibilidade de uma investigação em Matemática. Não sendo apenas uma intuição, mas uma experiência baseada num contexto teórico, envolvendo questões pragmáticas. Possibilitando uma reflexão à base de dados conhecidos, e muitas vezes, ajudando a resolver confusões no nosso modo de pensar, permitindo novos olhares sobre aquilo que já fora dito.

### 3.5 A COMPLEMENTARIDADE

Nessa seção aprofundaremos a ideia de complementaridade definida por Otte em seu artigo *Arithmetic and geometry: Some Remarks on the Concept of Complementarity* (1990) a qual é parte essencial em nossa pesquisa.

A noção de complementaridade tem sido usada em diversos campos da ciência tendo em vista os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos. Esse conceito foi introduzido na Física quântica por Niels Bohr para caracterizar a interação entre os aparelhos de medição e os objetos que constituem uma parte essencial do fenômeno físico, embora estivesse bastante ciente de sua importância epistemológica e cognitiva.

A ideia desse conceito, segundo Otte (apud WIELEWSKI, 2008) pode ser compreendida com a experiência de entender um objeto novo e ainda desconhecido. De maneira que surge a necessidade de relacionar cada informação nova e o objeto novo com conhecimentos já estabelecidos.

Nessa linha de raciocínio, tentar aprender um novo conceito, é explicá-lo ou introduzi-lo no conhecimento por meio de uma definição. Por um lado, isso significa encontrar uma definição para o conceito que o defina por si próprio e não por outros conceitos (WIELEWSKI, 2008, p. 177).

Aqui precisamos retomar a Kant (1997), para melhor fundamentarmos o conceito de complementaridade. Para ele, o conhecimento se dá por intermédio de duas fontes básicas da mente — a que recebe as concepções e a capacidade de reconhecer um objeto a partir dessas concepções — relacionado assim, intuição e conceitos. “Intuição e conceitos são assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento” (KANT, 1997, p. 88). Esse mesmo autor disserta:

A nossa natureza impõe que a intuição jamais seja algo diferente do sensorial, isto é, ela contém apenas a maneira como somos impregnados pelos objetos. A capacidade de pensar o objeto da intuição sensorial, ao contrário, é a razão. Nenhuma dessas propriedades é mais importante que a outra. Sem o sensorial, nenhum objeto se daria para nós e, sem a razão, nenhum poderia ser pensado. Ideias sem conteúdo são vazias, intuições sem conceitos são cegas. (KANT, 1997, p. 88).

Wielewski (2008) afirma que para Kant, os termos ‘conteúdo’ (objeto) e ‘conceito’ teriam de ser considerados mais próximos um do outro. Foi de Kant as primeiras reflexões acerca do significado da diferenciação teórico-tipológica básica entre conceito e objeto do conceito que caracteriza o pensamento moderno.

Kant (1997), faz uma diferenciação entre as ciências discursivas e as ciências intuitivas utilizando o processo complementar do pensamento para isso, considerando a matemática uma ciência intuitiva.

Nas ciências discursivas, ele inclui a filosofia e a lógica e se baseia no conhecimento do conceito; a Matemática seria para ele uma ciência intuitiva e se baseia na intuição do objeto conceitual. Em razão disso, "o conhecimento matemático considera o geral no particular, e o filosófico, ao contrário, o particular no geral", de acordo com Kant (1997; p. 90) (WIELEWSKI, 2008, p. 178).

Podemos notar esta diferenciação de Kant nos dois ramos da matemática: a aritmética ou álgebra e a geometria, pois, segundo Otte (1993),

a Aritmética expressa o particular (relação entre grandezas isoladas) no geral, e a geometria o geral (o conceito de uma figura) no particular. Torna-se claro, dessa forma, que na matemática desaparecem todas as oposições concebidas com base na antítese entre o geral e o particular [...] SCHELLING (1802; p. 206) apud OTTE (1993; p. 221) (WIELEWSKI, 2008, p. 179).

Na matemática, sobretudo na Educação Matemática, não é diferente. Segundo Otte (2003), citado por Monteiro (2015),

A prática matemática, que tem progressivamente se libertado de esquemas metafísicos e ontológicos desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista – talvez mais do que qualquer campo de conhecimento a fim de que seja adequadamente compreendida (OTTE, 2003, p.204 apud MONTEIRO, 2015, p. 99).

Para Otte (2003 apud MONTEIRO, 2015), a necessidade de uma atitude complementarista parte da impossibilidade de definir a realidade matemática se a considerarmos como sendo independente da atividade do conhecimento em si. Para ele, todo o conhecimento surge a partir de um sujeito e um objeto e a relação entre ambos. O sujeito não é a única fonte dinâmica de conhecimento, o objeto do conhecimento é parte importante nesse processo. O que caracteriza, como Otte (1990) afirma, uma estrutura distintamente bipartida do conhecimento. Otte, defende que esse dimorfismo está presente tanto no plano psicológico, quanto em todas as reflexões epistemológicas e nomeia-os como “complementaridade”.

O ponto de vista complementarista se expressa de múltiplas maneiras: todos os modelos, teorias, termos teóricos etc. mostram uma complementaridade de objeto e método, de aspectos descritivos e construtivos, de propriedades representacionais e instrumentais. O conhecimento é sempre ambiente e esquema de ação. Toda explicação científica contém simultaneamente uma metacomunicação, ou seja, representa, de forma exemplar, uma resposta à pergunta o que significa explicar um objeto ou um fato em um determinado momento histórico (OTTE, 1990, p. 38, tradução nossa).

A relação entre aritmética e geometria permite uma visualização dessa complementaridade na matemática visto que expressam diferentes formas de nosso ser no mundo utilizando diferentes códigos, meios e sistemas de símbolos e não

somente a partir de conceitos ou teoremas. Ao passo que a polaridade entre aritmética e geometria apontam para uma complementaridade na matemática, na medida que elas se relacionam com o intuicionismo e platonismo, respectivamente, e servem uma à outra como campo de interpretação.

A verdadeira dualidade de aritmética e geometria não deixa de ter relação com a oposição entre intuicionismo e platonismo. O verdadeiro conceito de número aparece na aritmética. É de origem intuitiva, mas então a ideia da totalidade dos números é sobreposta. Por outro lado, na geometria a ideia platônica de espaço é primordial, e é neste contexto que os procedimentos intuicionistas de construção de figuras tomam seu lugar. Isso basta para mostrar que as duas tendências, intuicionista e platônica, são ambas necessárias; eles se complementam, e seria violência a si mesmo renunciar a um ou outro (BERNAYS, 1985 apud OTTE, 1990, p. 39, tradução nossa).

Para nós, apoiados em Otte (1990), os diagramas algébricos oferecem oportunidades para uma reflexão profunda construtiva e para a generalização. Isso se dá em vista de seu caráter visual das “provas gerais”, de forma que o raciocínio indutivo dessas provas utilizando diagramas visuais, representam dois aspectos complementares. Dado que “as fórmulas e os diagramas algébricos têm dois aspectos, um lógico-linear e um visual-ideográfico” (OTTE, 1990, p. 43, tradução nossa).

Para Cruz (2018), a ideia de complementaridade está relacionada a dois conceitos que se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno, isto é, não separamos os conceitos em “isto ou aquilo”, mas consideramos ambos como “isto mais aquilo”, que Otte resume como sendo “a existência de outros pontos de vista”.

A complementaridade coloca o objeto e o meio em conexão, mas os mantém em oposição também. Segundo Otte, a dinâmica do processo de pesquisa traz a perspectiva que em certo sentido é relevante a relação entre a teoria Matemática e suas linguagens, uma vez que essa relação é extremamente fechada, rígida e impenetrável (CRUZ, 2018, p. 43).

A noção de complementaridade em termos semióticos, para Cruz (2018), é concebida segundo os aspectos *intensionais* e *extensionais* dos sistemas de signos e da linguagem. Epistemologicamente, esses conceitos não devem ser vistos como uma dualidade ou oposição, mas, complementares. Ela conecta objeto e meio (atividade), mas, ao mesmo tempo, os mantém em oposição.

Meios (conceitos) e objetos devem ser completamente diferenciados em cada momento da atividade cognitiva individual, mas eles desempenham no desenvolvimento global do conhecimento um papel



totalmente simétrico. Essas simetrias (diferença e conexão) entre objeto e meio fundamentam o nascimento e a dinâmica da Matemática Pura no século XIX e elas implicam que, tanto o conceito quanto o objeto, possuem um caráter complementar (WIELEWSKI, 2008, p. 179–180).

Em linhas gerais, a noção de intensão de termos matemáticos, está relacionada ao conceito, que “reúne vários caracteres conexos a um todo pensado” (CRUZ, 2019b, p. 45), explicitando as relações entre os objetos matemáticos e também suas relações estruturais. São os meios (atividades), os processos, as operações, as regras, é o que denominamos sentido do signo e que produzem uma intermediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Ao passo que isso nos permite uma verdadeira complementaridade, segundo Otte (1993) — e não somente uma dualidade — entre meio e objeto, pois ambos não podem ser determinados um sem o outro, apesar de desempenharem papéis assimétricos em diferentes momentos.

É, igualmente visão do próprio Otte (1993), preciso, colocar a atividade (grifo meu) como eixo e como a essência da relação sujeito- objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Essa dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento (WIELEWSKI, 2008, p. 183).

A noção de extensão está intimamente ligada à interpretação dos objetos matemáticos. A extensão é o conteúdo, o objeto, a referência, são as aplicações; ela é constituída pelos objetos pensados através do conceito. Nas palavras de Cruz (2018),

Estudando esses dois valores semânticos de signos em geral, entendemos extensão como o objeto (caso exista) ao qual o signo refere-se e intensão como o conteúdo ou sentido do signo que, às vezes, é considerado como significado dos signos (CRUZ, 2018, p. 46).

A relação entre objeto e meio pode ser representada na atividade matemática, segundo Otte (1993), pois nela, eles estão conectados. “Objeto e meio não apenas se conectam, mas mantêm-se em oposição. Os objetos são, como a própria palavra indica, resistências ao conhecimento, e os problemas não produzem por si só os meios de sua solução”(WIELEWSKI, 2008, p. 183).

a objetivação do conhecimento matemático, o seu status como conhecimento objetivo e verdadeiro, só é assegurado quando baseado no universo de ‘todos’ os meios pensáveis e todas as possíveis representações. O conceito não é idêntico à sua definição. O conceito representa uma complementaridade entre objeto e meio, ou entre conhecimento e método. Essa é, com certeza, uma posição defendida pelo terceiro componente da ‘tríade’, ou seja, a Educação Matemática. (WIELEWSKI, 2008, p. 186).

Assim, enfatizamos a importância da complementaridade entre diferentes interpretações de um problema, sobretudo na combinação da aritmética e da geometria, e na utilização de ambas como instrumentos e campos de interpretação nessa combinação, que “juntas representam um modo de geração do pensamento matemático desde a antiguidade até agora” (OTTE, 1990, p. 43–44, tradução nossa), tendo como finalidade a elaboração de uma compreensão construtiva dos objetos da matemática.

Em nossa descrição da relação entre aritmética e geometria, assumimos que a relação entre os elementos conceituais-reflexivos e lógico-algorítmicos da atividade mental só é concebível como uma interação de dois polos de uma relação cuja base é a atividade. A atividade representa a essência da relação sujeito-objeto e não a consciência ou o conhecimento. Especialmente quando se refere à lógica, o pensamento conceitual totalmente desenvolvido é caracterizado por fornecer permanentemente a possibilidade e a pré-condição para a aplicação de uma argumentação estritamente lógica. Desta forma, o elemento construtivo desenvolve simultaneamente a precisão do significado conceitual. A discussão acima sobre o pensamento axiomático deve ser entendida neste sentido (OTTE, 1990, p. 53, tradução nossa).

Em nossa pesquisa buscamos uma interação entre conceitos e intuições, uma analogia entre os aspectos formais e os Experimentos Mentais por meio da complementaridade do conceito de continuidade de Poncelet e Cauchy, como passar de um para o outro e o que está envolvido nisto. “Complementaridade isto mais aquilo se corrigindo, se opondo e se conectando!” (CRUZ, 2020, p. 22).

## **4 METODOLOGIA**

Os aspectos metodológicos que aportam nosso objeto de estudo direcionam-se por uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico e explicativo, pertencente à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática — PPGEM da Universidade Federal de Juiz de Fora. Segundo Severino,

a pesquisa bibliográfica realiza-se a partir dos registros disponíveis, decorrentes de pesquisas anteriores em documentos impressos como livros, artigos, teses etc., e a pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar o fenômeno estudado busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos (SEVERINO, 2007, p. 122–123).

Estudamos a relação entre a Matemática e a linguagem buscando uma compreensão do conceito de continuidade por meio dos aspectos semióticos, históricos e epistemológicos da Matemática, associados aos processos de experimentação mental, numa dinâmica complementar por meio das categorias de semiótica de Peirce, a saber, Primeiridade, Segundidade e Terceiridade, que podem ser descritas pelos diferentes signos: ícones, índices e símbolos. Os processos de experimentação mental foram desenvolvidos com o apoio do GeoGebra. De maneira que, optamos pelo desenvolvimento do raciocínio diagramático de Peirce e o Princípio da Complementaridade de Otte na distinção entre o pensamento sintético e o pensamento analítico.

Como qualquer símbolo deve ser caracterizado pela complementaridade de sentido e referência, e toda a língua pela complementaridade de sintaxe e semântica, nós escolhemos esta complementaridade como nossa ferramenta principal de investigação na comparação de provas formais e experimentos mentais (CRUZ, 2015, p. 25).

Mediante a nossa problemática, sobretudo com enfoque no conceito de continuidade no Ensino Superior, buscamos compreender a relação existente entre a construção de um pensamento formal em interface com os aspectos intuitivos baseando-se nas concepções de Cauchy e Poncelet.

Propomos um *produto educacional* que permite passar de Poncelet para Cauchy e de Cauchy para Poncelet desenvolvendo a complementaridade dos conceitos de continuidade de ambos. A opção é construir uma analogia entre as concepções de matemática no aspecto formal e os Experimentos Mentais, evidenciando esta complementaridade. Por fim, construir uma ligação entre essas duas formas de conceber o conceito de continuidade.

Assim mostraremos essa oposição entre Cauchy e Poncelet, mas, ao mesmo tempo, sua conexão e, para isso, propomos um produto educacional que consiste em uma sequência de atividades que permitem ao professor aplicar em sua sala de aula. Essas atividades foram, inicialmente, elaboradas para a aplicação na formação de professores de matemática, porém, ela é perfeitamente adaptável para aplicação aos estudantes de nível médio durante a aprendizagem de funções.

Para esse propósito, adotaremos os seis aspectos do processo de experimentação mental conceituados por Cruz (2021) que os qualificam como uma metodologia para o ensino de Matemática, sendo elas *forma*, *estrutura*, *compreensão*, *dependência*, *revelação* e *comparação*.

A *forma*, indica que os Experimentos Mentais são baseados num sistema de atividades supostas. De maneira que as atividades partem de hipóteses desenvolvidas em uma representação particular de um objeto geral. A busca da generalização no processo de experimentação mental nos direciona para o ponto de vista semiótico, tornando a *forma* essencial no desenvolvimento do experimento.

Já a *estrutura* consiste em considerar os Experimentos Mentais sem uma estrutura rígida, assumindo implicitamente diversas coisas. Aplicando assim, uma síntese abdutiva.

A *compreensão* combina experiências e conhecimentos que seguem uma lógica de considerações heurísticas, procurando novas interpretações utilizando deduções lógicas e cálculos formais. Sendo caracterizada pelo processo dedutivo.

A *dependência* significa que o processo de experimentação mental depende de conhecimentos e informações já disponíveis, do conhecimento comum e de argumentos que a comunidade aceita, podendo ou não, serem argumentos estritamente lógicos, levando a uma nova compreensão da natureza dos objetos ou a um novo conhecimento.

A *revelação* aponta contradições no sistema do nosso conhecimento, permitindo a descoberta de novas leis e permitindo o uso do pensamento intuitivo.

A *comparação* consiste em comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma atividade, prova ou problema.

Essas características dos Experimentos Mentais evidenciam o raciocínio diagramático e ajudam a compreender e desenvolver provas e atividades matemáticas utilizando representações associadas a um contexto bem definido. Exercendo dois

papeis fundamentais, mostrando a coerência do conceito e identificando a possibilidade de aplicação desse conceito.

**5 O PRODUTO EDUCACIONAL: MOSTRANDO  
A COMPLEMENTARIDADE DE CAUCHY E  
PONCELET**

Neste capítulo traremos um exemplo de uma sequência de atividades da qual nosso produto educacional se refere. Esperamos que esse produto seja de grande valia e que o leitor faça uso desse material e seja mais um caminho para a ampliação dos conhecimentos na formação de futuros professores de matemática possibilitando um novo olhar para a continuidade e sua aplicabilidade no ensino de funções.

## 5.1 UM EXEMPLO DE EXPERIMENTO MENTAL — O PRODUTO EDUCACIONAL

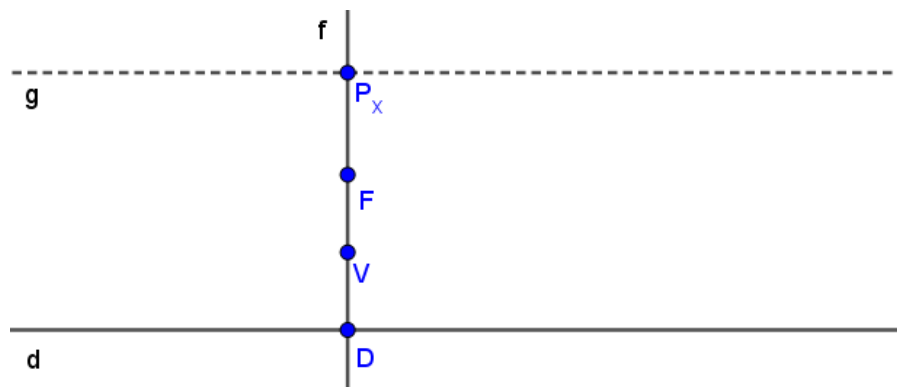
Em nosso produto, sugerimos a construção de duas curvas, adotando a dinâmica dos Experimentos Mentais que por meio de um conjunto de informações buscam uma melhor representação para construir o objeto em questão, uma curva muito manipulada no ensino de cálculo.

Como exemplo traremos aqui uma dessas curvas, o leitor pode conferir em detalhes o processo de construção dessa e também de outros exemplos sugeridos em nosso produto.

Para a construção, utilizamos um software que permite trabalhar geometria plana, em particular o GeoGebra, porém o leitor pode escolher o software de sua preferência ou, ainda, régua e compasso. Nos próximos parágrafos, apresentaremos alguns passos da construção dessa curva e alguns comentários a respeito.

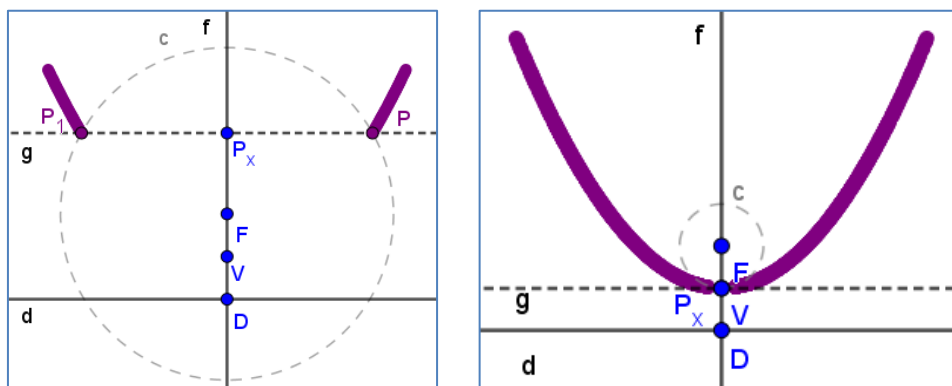
Primeiramente, construa uma reta a qual nomearemos por  $d$  (índice) e por ela, uma reta perpendicular que nomearemos  $f$  (índice). Marque o ponto de interseção entre  $d$  e  $f$  que indicaremos por  $D$  (índice). Do ponto de vista semiótico,  $d$  e  $f$  são índices, que indicam suas respectivas retas;  $D$  é o índice do ponto e, a imagem abaixo (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**) é um ícone. Assim como os demais pontos e retas que seguem nosso exemplo. Sobre  $f$ , coloque um ponto qualquer e nomeie-o de  $F$  e encontre o ponto médio do segmento  $\overline{FD}$ , ele será o ponto  $V$ . Ainda, sobre  $f$ , coloque um ponto qualquer, nomeando-o de  $(P_x)$ . E, por  $(P_x)$  trace uma reta perpendicular à  $f$  a reta  $g$ .



Figura 4 – Pontos  $P_x$ ,  $F$ ,  $V$  e a reta  $g$ 

Fonte: Autoria própria

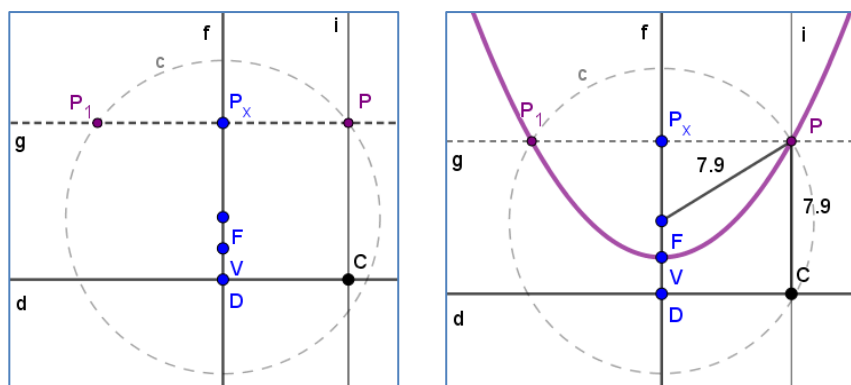
Construa uma circunferência — temos posto aqui, outros índices — com centro em  $F$  e raio  $\overline{P_x D}$ , a circunferência  $c$  e identifique os pontos de intercessão de  $c$  e  $g$  ( $P$  e  $P_1$ ). Habilitando o rastro de  $P$  e  $P_1$ , ao movermos o ponto  $P_x$  sobre a reta  $f$ , observamos a construção de uma curva que representa nosso objeto:

Figura 5 – Circunferência  $c$  e curva

Fonte: Autoria própria

Podemos observar uma propriedade dessa curva própria construção: por  $P$ , trace uma reta auxiliar perpendicular a  $d$  ( $i$ ). Marque um ponto  $C$  na intercessão de  $d$  e  $i$ .

Figura 6 – Propriedade da curva



Fonte: Autoria própria

Observe que a distância de  $P$  à reta  $d$  ( $\overline{PC}$ ) é igual a distância de  $P$  à  $F$  ( $\overline{PF}$ ), independentemente da localização do ponto  $P$ .

Essa observação das distâncias  $\overline{PC} = \overline{PF}$  constitui um lugar geométrico: “uma sucessão de pontos ou de linhas que gozam de uma propriedade comum” (CARVALHO, 2005, p. 21). Isto é, esta curva é o lugar geométrico dos pontos  $P$  que atendem à seguinte conclusão: qualquer que seja  $F$  e  $d$  nas condições dadas, a distância de  $P$  à  $F$  é igual à distância de  $P$  à  $d$ , isto é, possuem a mesma medida.

Em especial essa curva é uma cônica: “o lugar geométrico dos pontos do plano, tais que a razão entre as distâncias a um ponto fixo (foco), e a uma reta fixa (diretriz) do plano é uma quantidade constante, denominada excentricidade” (CARVALHO, 2005, p. 225).

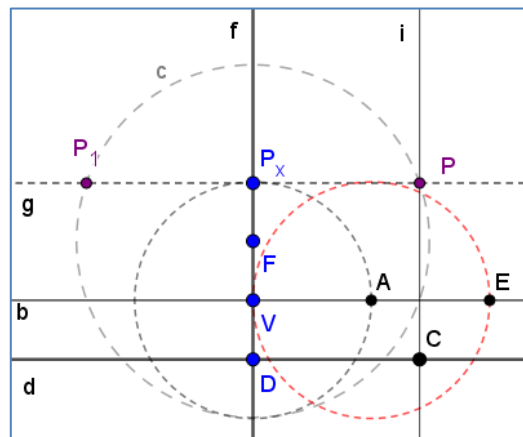
*Definição:* A *parábola* é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz) (CARVALHO, 2005, p. 228).

A propriedade de que se  $P = P_1 = P_x = V$ , os segmentos  $\overline{PF}$  e  $\overline{PC}$  serão iguais (congruentes), indica que todos os pontos da curva formada têm esta propriedade. Ou seja, são equidistantes do foco ( $F$ ) e da reta diretriz ( $d$ ), constituindo assim o lugar geométrico da nossa curva.

Logo, a curva que chamamos parábola é contínua, numa interpretação do conceito de continuidade de Poncelet abordado no capítulo 2, pois mantém uma mesma propriedade para quaisquer de seus pontos. Por isto, construímos um lugar geométrico de pontos que apresentam esta mesma propriedade para todos (invariante). Em uma perspectiva semiótica, temos nesse ponto, um avanço, trazendo uma situação mais geral e abrangente. Todo o processo de construção da parábola até concluirmos que a mesma é contínua é caracterizado por um processo abduutivo, que também é uma pista semiótica.

Há outra propriedade que envolve a ideia de áreas, dessa forma construiremos, também, esta propriedade. Por  $V$  trace uma reta  $b$  paralela à  $d$  e com ajuda do compasso, marque o ponto  $E$  de forma que o segmento  $\overline{EV}$  tenha medida igual à  $2\overline{DF}$ . (Observe que a circunferência em vermelho possui centro  $A$  e raio  $\overline{DF}$ ).

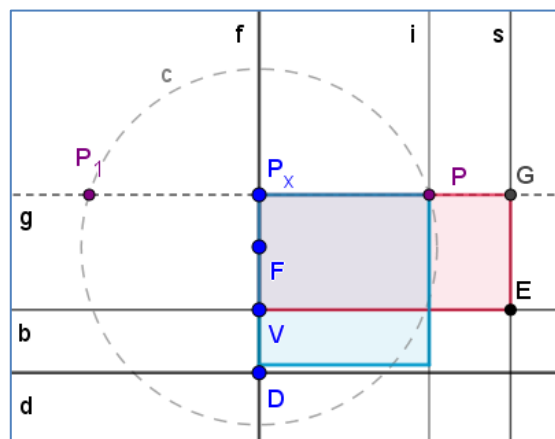
Figura 7 – Propriedade de áreas



Fonte: Autoria própria

Por  $E$ , construa uma reta  $s$  perpendicular à  $de$  e marque o ponto  $G$  na interseção de  $g$  e  $s$  e construa o retângulo  $EGPV$ . Em seguida, construa um quadrado de lado  $\overline{PP_x}$  sobre a reta  $f$ .

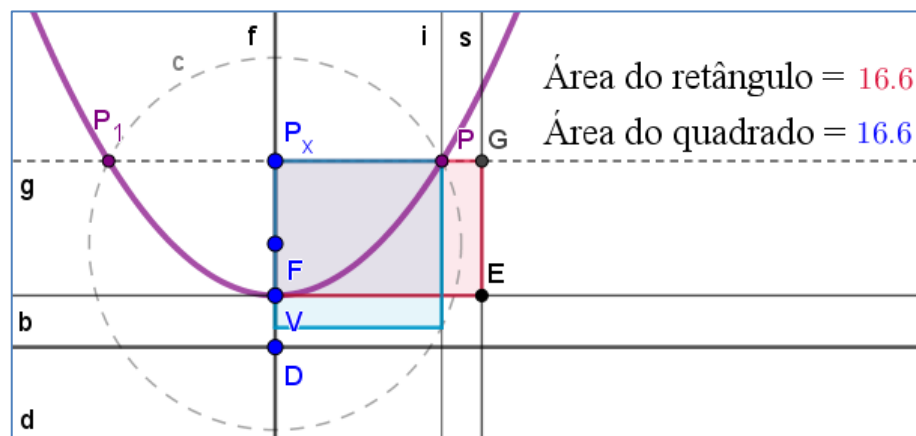
Figura 8 – Propriedade de áreas



Fonte: Autoria própria

Calculando a área de ambos percebemos que, a área do retângulo e a área do quadrado são iguais, para todos os pontos pertencentes à parábola.

Figura 9 – Áreas



Fonte: Autoria própria

Por essa propriedade também podemos concluir que a parábola é uma curva contínua, pois essa propriedade se mantém por todos os pontos pertencentes a ela (invariante). Agora, vamos aos cálculos. Área do retângulo é dada por:

$$A_r = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP_x}$$

Já a área do quadrado é:

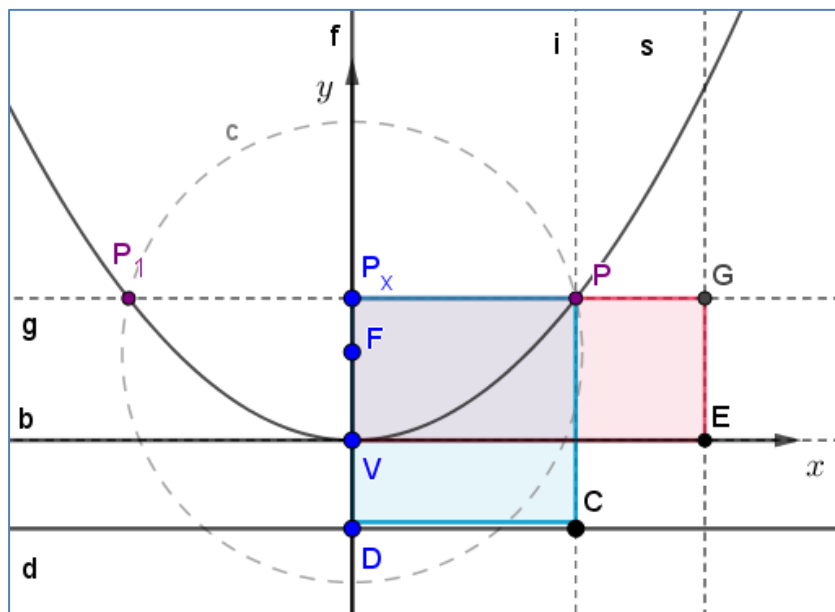
$$A_Q = \overline{PP_x}^2$$

Como sabemos serem iguais, então,

$$\overline{PP_x}^2 = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP}$$

Para pensarmos na continuidade desta curva em termos analíticos, temos que algebrizar a curva, isto é, escrever uma função que representa partes desta curva num dado intervalo. Para isso, sobre nossa curva, colocaremos eixos orientados — o plano cartesiano — de forma que  $V$  coincida com a origem  $O$ . Sobrepondo em  $f$ , o eixo das abscissas ( $x$ ) e em  $b$ , o eixo das ordenadas ( $y$ ).

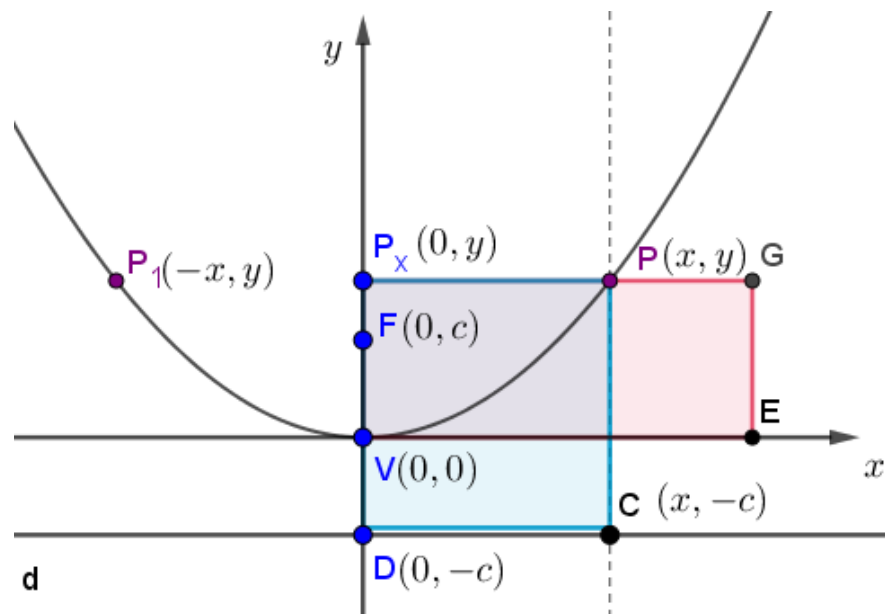
Figura 10 – Eixos Orientados



Fonte: Autoria própria

Considere que  $F$  esteja a uma distância  $c$  de  $V$  e que  $P$  tenha coordenadas  $(x, y)$  quaisquer. Então, as coordenadas dos pontos da curva são:  $P(x, y)$ ,  $C(-c, y)$ ,  $D(-c, 0)$ ,  $V(0, 0)$ ,  $F(c, 0)$  e  $P_x(x, 0)$ .

Figura 11 – Coordenadas dos pontos



Fonte: Autoria própria

Agora, cada ícone desse, chamado ponto, tem uma localização em outro sistema — o sistema cartesiano. Uma observação a ser feita é que na geometria sintética, ponto não possui localização, não é necessário localizá-lo num eixo, porém analiticamente cada ponto tem seu lugar específico.

Dessa maneira, temos  $\overline{PP_x} = x$ ,  $\overline{VP} = y$  e  $\overline{DF} = 2c$ . Como  $\overline{PP_x}^2 = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP}$ , concluímos que  $x^2 = 2 \cdot 2c \cdot y \Rightarrow x^2 = 4cy \Rightarrow y = \frac{1}{4c}x^2$ . Tomando o parâmetro  $p = 2c$ ,

$$x^2 = 2py \text{ ou } y = \frac{1}{2p}x^2$$

Esta última expressão é a equação algébrica da curva que é o novo objeto a ser considerado, que a partir desse momento transformou nosso objeto passando por algumas transformações em sua representação, isto é, temos um novo objeto. Os ícones passam a ter características diferentes, representados por pares ordenados.

Essa, é uma das curvas que podem ser obtidas por secções cônicas. O nome parábola fora aplicado a ela, segundo Boyer & Merzbach (2012), pela primeira vez por Apolônio, que introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola para as secções cônicas.

A palavra parábola (uma colocação ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência. Apolônio aplicou estas palavras num contexto novo, como nomes para as seções planas. A equação familiar moderna para a parábola com vértice na origem e  $y^2 = lx$  (onde  $l$  é o latus rectum ou parâmetro, agora frequentemente representado por  $2p$ , ou ocasionalmente por  $4p$ ). Isso é, a parábola

tem a propriedade que não importando qual ponto sobre a curva se escolha, o quadrado sobre a ordenada é precisamente igual ao retângulo sobre a abscissa  $x$  e o parâmetro  $l$  (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 114).

Já na concepção de Cauchy, a curva chamada parábola tem a seguinte representação funcional:  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R} a \neq 0$ . Aqui o objeto foi reificado! Na continuidade, devemos discutir a possibilidade de todos os pontos no intervalo do domínio constituir uma imagem e estas representarem os limites da função em cada um desses pontos. Isto é:

*Definição:* seja  $f$  uma função real definida num subconjunto  $D$  contido em  $\mathbb{R}$  e seja  $a$  um ponto pertencente a  $D$ . A função  $f$  é contínua em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Assim, considerando a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , então  $f$  é contínua.

*Demonstração:* De fato, seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ , então  $x_0 \in D(f)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [a(x_0)^2 + bx_0 + c] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a(x_0)^2 + \lim_{x \rightarrow x_0} bx_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} c = \\ &= a(x_0)^2 + bx_0 + c = f(x_0). \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $x_0$ . Logo, contínua em  $\mathbb{R}$ . ■

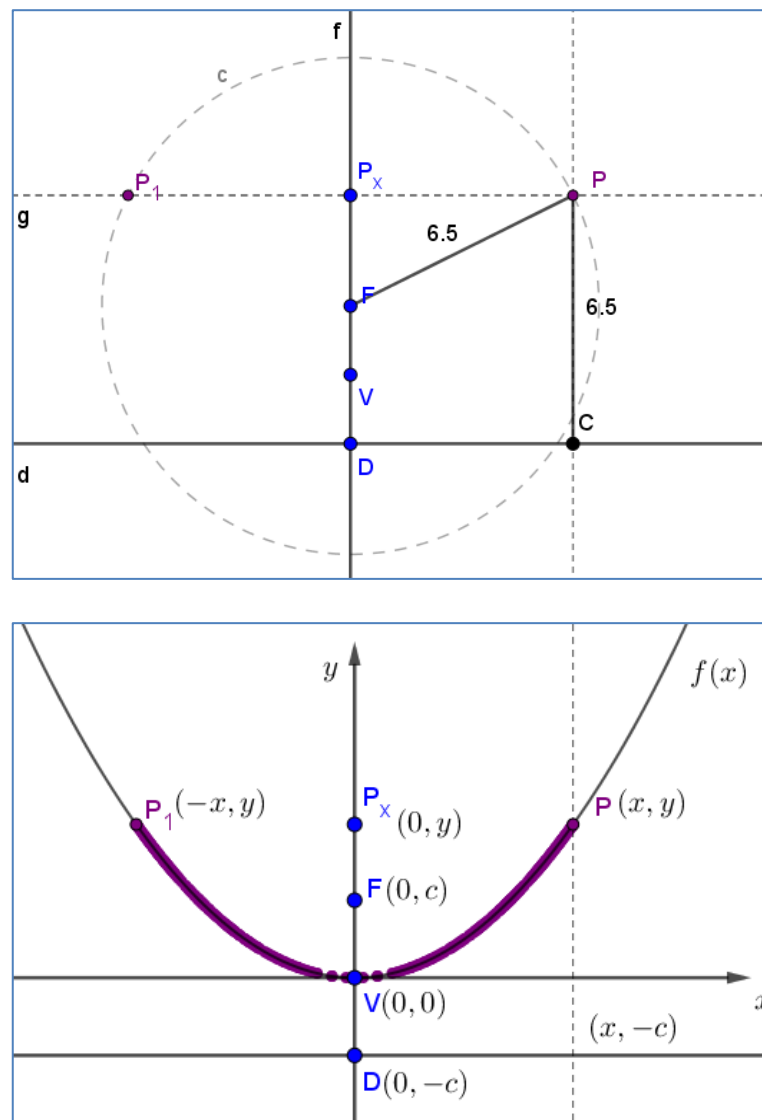
Esta é a definição formal para Cauchy. A continuidade neste caso não está baseada na curva, mas na função. Essa definição está sob um jogo de argumentos, discute um conjunto de relações que aplicados à equação gera um resultado.

Para Courant e Robbins, “de uma forma geral dizemos que uma curva é contínua, se seu gráfico for uma curva ininterrupta” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 344). Na perspectiva de Cauchy, não é necessário trabalhar sobre o gráfico para construir a ideia de continuidade. Por meio dessa definição, não é possível discutir se o gráfico é ou não uma curva ininterrupta.

Para Poncelet, a continuidade nesse caso irá acontecer, pois, todos os pontos dessa curva possuem a mesma propriedade. Assim, a continuidade saiu de um campo intensional, para um campo extensional. Esse campo extensional ganha um impulso da intuição, pois não é preciso limitar somente a isso, podemos estendê-lo a qualquer outra curva.

No campo formal não é possível perceber a continuidade, pois ela não é sobre a curva ininterrupta, mas sobre uma fórmula. É uma relação lógica, mecânica. O teorema de Poncelet baseia-se em que, se uma curva é ininterrupta em qualquer ponto, ela pode ser linearizada. Isto é, Poncelet permite visualizar a curva definindo a continuidade com tangente, recorrendo à intuição agregada a conceitos, já Cauchy abre mão da representação e da intuição para ganhar certo controle sobre a curva. Esta é a complementaridade: um busca a continuidade na figura e o outro na estrutura funcional.

Figura 12 – Parábola na construção geométrica e como função

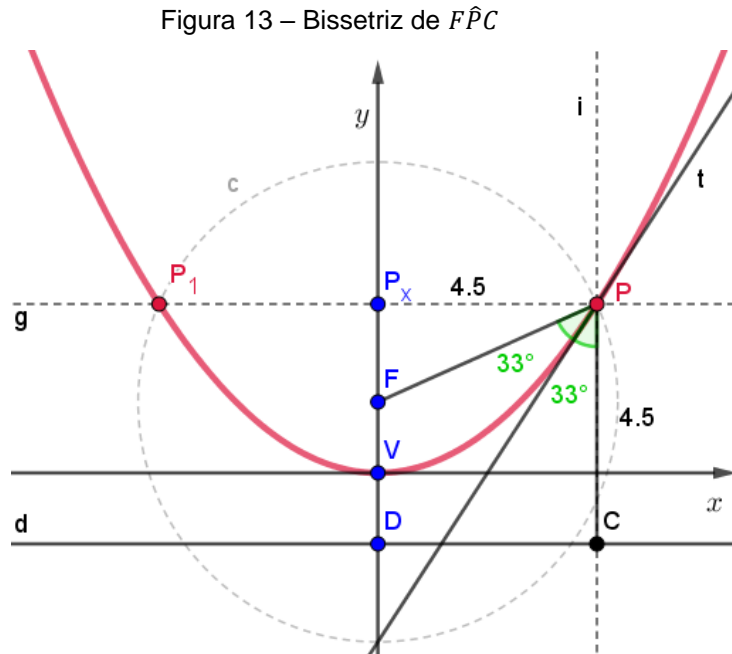


Fonte: Autoria própria

Como passar de uma para outra? Se a propriedade é válida para todos os pontos, há um contínuo posto aí como acreditava Poncelet, mas para Cauchy é outra coisa.

## 5.2 O PROBLEMA DA TANGENTE

Há outra propriedade que podemos construir nesta curva, que envolve o teorema de Poncelet sobre as tangentes. Para analisarmos, tracemos a bissetriz  $t$  de  $F\hat{P}C$ .



Fonte: Autoria própria

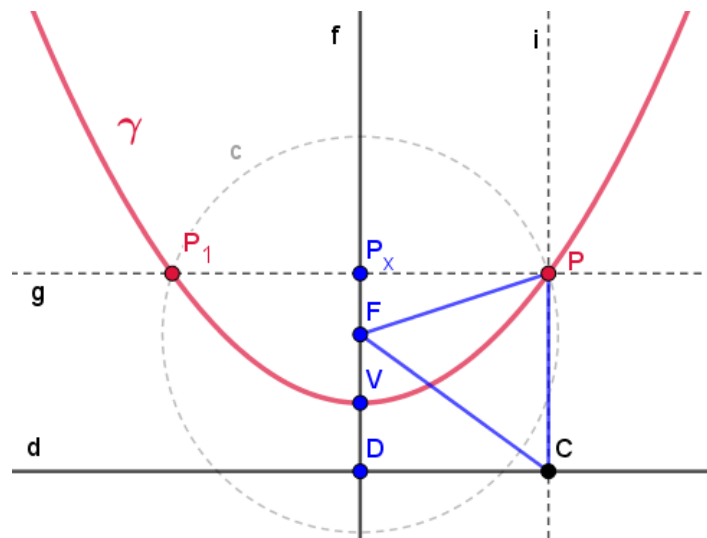
Ao observarmos a reta  $t$ , podemos perceber que a mesma é a reta tangente à curva, passando por  $P$ . Essa conclusão é conhecida como Teorema de Poncelet sobre as tangentes. Vejamos ele a seguir.

*Teorema de Poncelet:* Dado uma parábola  $\gamma$  de foco  $F$  e um ponto  $P$  pertencente a mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor (segmento de reta que une um ponto da parábola a um de seus focos) e pela reta perpendicular à diretriz  $d$  que passa por  $P$  são as retas tangente e normal a parábola em  $P$ .

Seja o ponto  $C$ , a projeção ortogonal do ponto  $P$  em  $d$ , como podemos observar por meio da construção da parábola. Assim,  $\overline{CP}$  é ortogonal à  $d$  em  $C$  e o triângulo  $\Delta FPC$  é isósceles de base  $\overline{CF}$ , pois  $P$  pertence à parábola, de forma que as medidas de  $\overline{FP}$  e  $\overline{CP}$  são congruentes pela definição de lugar geométrico da parábola discutida anteriormente.



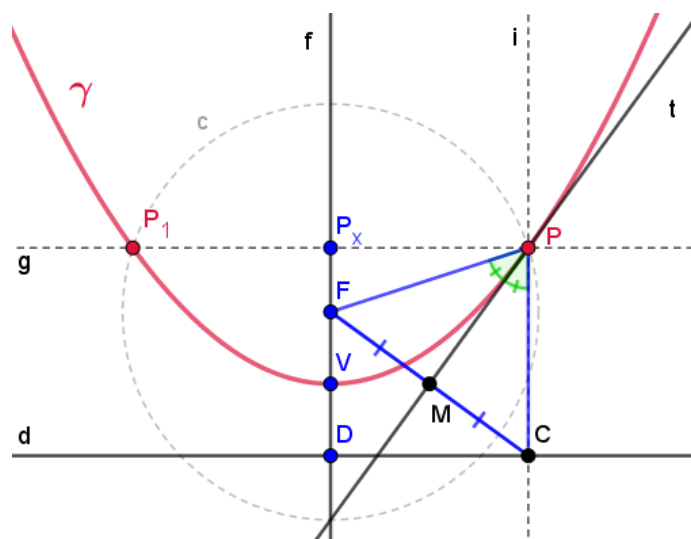
Figura 14 – Teorema de Poncelet



Fonte: Autoria própria

Considere a bissetriz  $t$  do ângulo  $\widehat{C\hat{P}F}$  e  $M$ , o ponto de interseção de  $t$  e o segmento  $\overline{CF}$ . Consequentemente,  $t$  é a mediatriz de  $\overline{CF}$ , os triângulos  $\Delta FPM$  e  $\Delta CPM$  são congruentes (*A. L. A.*) e o ponto  $M$ , é o ponto médio de  $\overline{CF}$ .

Figura 15 – Teorema de Poncelet



Fonte: Autoria própria

Considere um ponto  $T \neq P$  em  $t$  e seja  $T'$  a projeção ortogonal de  $T$  em  $d$ . Como  $t$  é mediatriz de  $\overline{CF}$ , as medidas de  $\overline{CT'}$  e  $\overline{FT'}$  são congruentes; além disso,  $\overline{FT} = \overline{CT} > \overline{TT'}$ , pois  $\Delta CTT'$  é retângulo em  $T'$  com  $\overline{CT}$  sendo a hipotenusa e  $\overline{TT'}$  uns dos catetos. Assim sendo, a distância de  $T$  à  $F$  é maior que a distância de  $T$  à  $T'$ . Isto é,  $T'$  é exterior à parábola.



Este aspecto intuitivo pode não ser aplicável a todas as curvas e/ou funções, ou pode ser extremamente trabalhoso. Temos aqui então que recíproca desse teorema anterior é falsa. Existem funções contínuas em  $x_0$ , porém não deriváveis em  $x_0$ , como no caso da função modular. Dessa forma, a existência de reta tangente ao gráfico de uma função num ponto de seu domínio acarreta necessariamente na continuidade da função nesse ponto.

O objeto não é mais a curva e sim a função. Esta passagem que os alunos de cálculo I não tem a oportunidade de entender. As extensões exigem outras formas de pensar! Outros meios.

### 5.3 UMA NOÇÃO TOPOLÓGICA

Analisamos o conceito de continuidade de Poncelet, muito ligado a geometria sintética. Fazendo a passagem para Cauchy, mostrando a complementaridade. Segundo D'Ambrósio (1975), entre as características da noção de limite, uma das mais importantes é que ele descreve o comportamento da função ao redor de um ponto, pertencente ou não ao domínio dessa função. Isto é, nas proximidades desse ponto, na sua vizinhança. Quando falamos desse estar próximo, estamos tratando da estrutura chamada *Topologia*. Nesse sentido, trabalharemos o conceito de continuidade, em relação a funções, também num conceito topológico.

Observamos que não precisamos representar graficamente uma função para saber se é ou não contínua (Cauchy). Entretanto, podemos apresentar a continuidade de função da seguinte forma:

*Definição:* seja  $f$  uma função real definida num subconjunto  $D$  contido em  $\mathbb{R}$  e seja  $a$  um ponto pertencente a  $D$ . Diz-se que a função  $f$  é contínua em  $a$  se e só se, qualquer que seja o número positivo  $\delta$  existir um número  $\varepsilon$ , também positivo, tal que, sempre que  $x$  seja um ponto pertencente a  $D$  e verificar a condição  $|x - a| < \varepsilon$ , se tenha  $|f(x) - f(a)| < \delta$ .

Neste caso, no processo de ensino, o diagrama é fundamental para tomada de ações e análise. A semântica aqui exige uma representação.

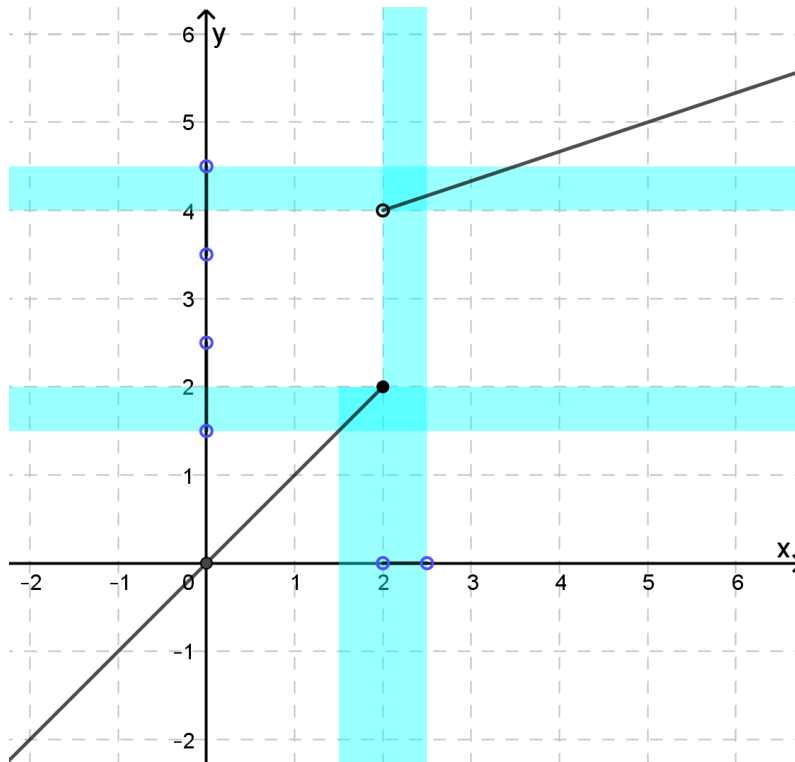
Por exemplo, analisaremos a continuidade da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \leq 2 \\ \frac{x+10}{3}; & x > 2 \end{cases} \text{ em } x = 2.$$

Por uma definição não encontramos a necessidade de construir o diagrama e

desenvolver estudos sobre ele. Já na outra, a definição topológica, esta construção se torna necessária. Note que estamos buscando intervalos abertos em torno da imagem  $f(2) = 2$ , imagem de algum intervalo aberto em torno de  $x = 2$ .

Figura 17 – Diagrama



Fonte: Autoria própria

No diagrama, é fácil perceber que indo de um lado para outro de 2 o comportamento da função muda, sua imagem apresenta um “buraco”. Não há uma continuidade na função, pois há intervalos em torno de  $f(2) = 2$ , isto é, na sua vizinhança, que não é imagem de algum intervalo em torno de  $x = 2$ .

De uma forma geral, uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se a pré-imagem de qualquer intervalo aberto for uma união de intervalos abertos (ou o conjunto vazio). Esta é uma definição topológica.

Expressando em termos topológicos o conceito de limite, o conceito de continuidade fica apresentado automaticamente também em termos topológicos, pois a continuidade depende da noção de limite. O que estamos querendo com isto é dizer que o pensamento matemático não se encerra, ou seja, a base deste pensamento está na continuação da atividade.

Matemática não é lógica, pois temos sempre que construir conceitos. A evolução do conceito de continuidade, por exemplo, passou de propriedades da geometria, para um conceito algébrico e agora topológico. A matemática só foi

traduzida para lógica, no intuito de ensiná-la em grande escala na sociedade.

Em nosso produto o leitor poderá encontrar outro exemplo de complementariedade como foco o estudo da Elipse e suas propriedades geométricas, detalhado, assim como na parábola, que abordamos acima e como ele pode ser aplicado no ensino da continuidade. Nele, propomos o roteiro de construção da curva e sugestões de questões que podem ser trabalhadas com os alunos para podermos, juntos, desenvolver esse experimento mental, expondo a complementaridade.

**6 COMPLEMENTARIDADE NO CONCEITO DE  
FUNÇÃO: MEU EXEMPLO EM VISTA O TEXTO  
DE OTTE**

Nessa dinâmica, destacamos então, a complementaridade entre a geometria e a aritmética aplicada ao conceito de continuidade de função.

Considerado historicamente, o conceito de função tem uma dupla raiz, primeiro ele se desenvolve ao lado do conceito de lei, particularmente junto ao conceito de lei natural, ele surge do conceito da operação aritmética, do conceito do algoritmo e das concepções gerais de máquina. [...] O outro aspecto é a lei natural, por exemplo, grandezas como velocidade, força etc, todas são representadas por meio de equações. [...] Otte (1993) comenta ainda que esses dois aspectos pertencem ao conceito de função e demorou quase duzentos anos, do século XVII ao XIX, para os matemáticos entenderem mais ou menos bem essa complementaridade do conceito de função (WIELEWSKI, 2008, p. 189–190).

Otte (1990) afirma que o conhecimento não é absoluto, com uma estrutura fixa, de maneira que o concreto e o abstrato mudam continuamente de lugar. Definir um conceito é antes de qualquer coisa o desenvolver. Cada conceito tem, no contexto de seu desenvolvimento, diversas interpretações em diferentes contextos. Particularmente, em nosso caso, o conceito de continuidade muda dentro das duas perspectivas que estamos mostrando. Não é algo rígido, mas sim complementar.

A função contínua como um modelo de movimento, na verdade, reflete muito claramente o duplo caráter deste conceito: Por um lado, ela contém aspectos discretos, pois me permite calcular valores únicos quando é escrita como uma fórmula. Por outro lado, enfatiza aspectos contínuos, por exemplo, na ilustração do gráfico funcional que me permite uma ideia geral qualitativa da função (= movimento). A função é simultaneamente qualitativa e quantitativa; conceitual e construtiva. É conhecimento (ideia geral) e ferramenta (fórmula de cálculo) em um (OTTE, 1990, p. 55–56, tradução nossa).

Precisamos adotar um ponto de vista relacional para a interpretação do problema proposto “que confere aos objetos e às relações entre os objetos um status ontológico igual” (OTTE, 1990, p. 56–57, tradução nossa). Isso se faz necessário por conta do caráter duplo da função como um modelo de movimento, pois o aspecto contínuo do movimento não contradiz a perspectiva discreta. Como exemplo, Otte (1990) interpreta fisicamente esse aspecto com o problema do paradoxo de Aquiles e a tartaruga, que para ele é a representação usando o conceito de função que nos permite reproduzir o paradoxo em um novo nível devido ao seu duplo caráter.

Em nosso exemplo, dois pontos de vista diferentes são possíveis agora. A abordagem construtiva, parte do pressuposto que todos os objetos (pontos geométricos) são diferentes e, a partir desse pressuposto, construímos todos os conceitos (continuidade) e todo o conhecimento. Ela visa identificar as propriedades invariantes em cada ponto, de forma que nenhum movimento é possível. A abordagem

conceitual, ao contrário, estabelece a diferença de objetos por intermédio de conceitos. Assim como no exemplo de Otte (1990), em nossa abordagem, a perspectiva construtiva, parte da diferença e da descrição, enquanto a abordagem conceitual mostra a existência de um ponto fixo individual. No entanto, não consegue identificá-lo sem a ajuda de cálculos construtivos. Isso nos leva a uma complementaridade no conceito de continuidade de funções.

Na complementaridade tem-se que ter alguma ligação, uma interação, uma influência mútua um sobre o outro, entre aspectos que se enfrentam. Na dualidade não necessariamente. Otte (2003) indica que não se pode simplesmente integrar esse terceiro aspecto, ou seja, tendo uma dualidade, têm-se já dois aspectos, que podem ser antagônicos, e como numa somatória, agregar mais um componente, no caso a complementaridade que corre o risco de se tornar contraditório (WIELEWSKI, 2008, p. 191).

A ponte estabelecida, entre os conceitos de Poncelet e Cauchy mostra a necessidade de ter o conceito de relação funcional, o conceito de função como uma ideia, como um modelo conceitual que Atiyah escreve: “O que era novo sobre o conceito matemático de função era considerá-lo como um único objeto matemático” (Otte, 1974 apud OTTE, 1990, p. 57, tradução nossa). A complementaridade entre esses dois conceitos nos mostra, particularmente, que uma solução para um problema não deve ser tomada como única ou superior a outra, mas que precisamos escolher a solução conforme o tipo específico do problema.

um conhecimento para ter efeito educacional precisa ser sobretudo significativo, e isso implica que não se trata apenas do conhecimento em si, mas também da maneira de relacionar-se com o conhecimento e conseguir responder e compreender ‘os porquês’. Estabelecer dessa forma, a complementaridade entre ‘os quês’ e os ‘porquês’ é que se pode caracterizar como pensamento relacional (WIELEWSKI, 2008, p. 194).

Como já afirmamos não se trata de identificar qual das concepções é a melhor, mas, como Otte afirma em outro exemplo, que cabe aqui em nosso contexto, “as diferenças psicológicas das duas soluções diferentes são de menor importância. São apenas questões de gosto e estilo e, na verdade, exigem os mesmos tipos de capacidades cognitivas” (OTTE, 1990, p. 59, tradução nossa). Assim, nossa abordagem complementarista visa enfatizar os aspectos simétricos entre os conceitos de continuidade de Cauchy e Poncelet. “Complementaridade significa apenas diferença e relação simultaneamente” (OTTE, 1990, p. 60, tradução nossa).



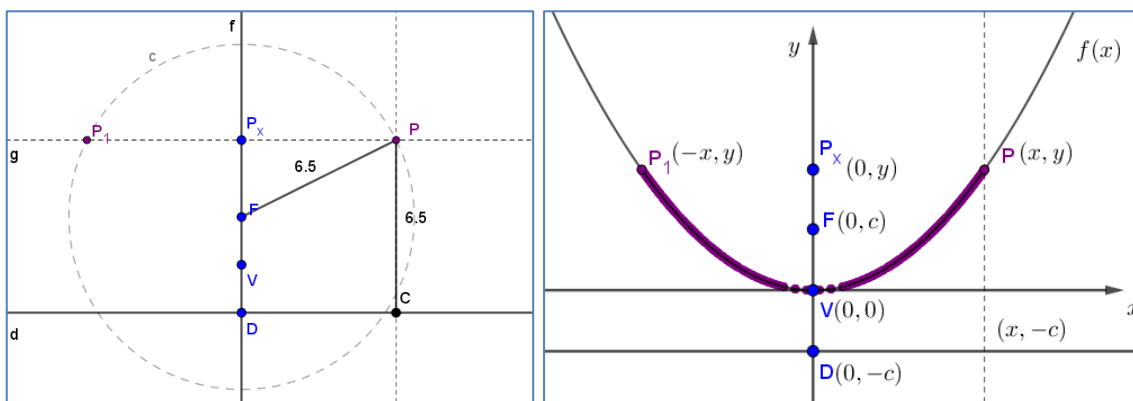
## **7 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Para Poncelet, a continuidade em uma curva acontece quando todos os pontos dessa curva possuem a mesma propriedade. Assim, a continuidade sai de um campo intensional, para um campo extensional. Esse campo extensional ganha um impulso da intuição, pois não é preciso limitar somente a isso, podemos estendê-lo a qualquer outra curva.

No campo formal não é possível perceber a continuidade, pois ela não é sobre a curva ininterrupta, mas sobre uma fórmula. É uma relação lógica, mecânica. O teorema de Poncelet baseia-se em que, se uma curva é ininterrupta em qualquer ponto, ela pode ser linearizada. Isto é, Poncelet permite visualizar a curva definindo a continuidade por meio da tangente, usando a intuição agregada a conceitos, já Cauchy abre mão da representação e da intuição para ganhar um certo controle sobre a curva. Esta é a complementaridade: Poncelet busca a continuidade na figura, enquanto Cauchy na estrutura funcional.

Antes estávamos no campo da geometria sintética, à medida que abduktivamente acrescentamos um elemento, o eixo, automaticamente transformamos o objeto. Construindo outro objeto ideal. Chamamos esse processo de evolutivo ou de generalização. Esse processo evidencia a complementaridade entre as duas concepções.

Figura 18 – Parábola na construção geométrica e como função



Fonte: Autoria própria

Como passar de uma para outra? Claro que ainda não é uma discussão sobre a continuidade, mas um indício. Pois, se a propriedade é válida para todos os pontos, há um contínuo posto aí como acreditava Poncelet, mas para Cauchy é outra coisa.

A nossa intenção, como foi mostrada no exemplo é mostrar a complementaridade de Poncelet e Cauchy, em termos do estudo da continuidade. O que pretendemos neste trabalho foi evidenciar esta complementaridade, identificando

analogias que possam servir de base a uma nova proposta de ensino deste conteúdo. Evidenciar as pistas semióticas envolvidas nessas concepções e implementar o uso de Experimentos Mentais como suporte para o desenvolvimento complementar deste conceito nas aulas de cálculo. Ofertar um instrumento que possa ser reflexivo nesse processo, o nosso produto educacional.

Nesse produto, o público-alvo das atividades pode ser perfeitamente adaptado para ser aplicado desde alunos do ensino médio e fundamental da educação básica a alunos de cálculo e, principalmente, servir como um ótimo aliado para formação de professores. Destacamos que, para cada etapa de ensino ao qual o professor deseja aplicar, será necessário adaptar os níveis de aplicação, explorando os diferentes níveis conceituais. Por exemplo, nos anos finais do ensino fundamental o professor poderá explorar os diagramas e a dinâmica dos gráficos para trabalhar com os alunos a introdução às funções e também a construção e identificação de lugares geométricos. Outra possibilidade, no ensino médio, é a adaptação no estudo de funções, curvas e das cônicas. O professor pode explorar a construção da curva como função e como lugar geométrico, pode aplicar a complementaridade entre as diferentes representações e fazer a passagem da curva para um objeto algébrico, a função. Omitindo alguns conceitos mais complexos que serão melhor compreendidos em cursos de cálculo ou na formação de professores.

Acreditamos que, é no processo complementar entre Experimentos Mentais e as definições formais na construção do pensamento sobre o conceito de continuidade, que o conhecimento matemático avança. Esta complementaridade se torna mais dinâmica por meio da observação possibilitada pela utilização de tecnologias digitais, como os softwares de geometria dinâmica, a destacar o GeoGebra. Esses softwares permitem termos uma visão e percepção da transformação do diagrama, oportunizando alcançar o conhecimento que surge a partir do sujeito, do objeto e da relação entre eles. O diagrama associado as tecnologias digitais mudam a nossa relação com a semiótica e a relação entre meio e objeto, permitindo uma nova complementaridade de objeto e método nos aspectos construtivos.

A partir de nossos estudos, contribuímos com um olhar, sob o aspecto construtivo, que a continuidade nos permite. Possibilitando professores e alunos construir significados para a continuidade a partir de lentes diferentes, mas de forma que ambas se complementem.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011.
- BACHA, M. D. L. **A Teoria da Investigação de C.S.Peirce**. São Paulo, SP: PUC, 1997.
- BARTO, M. C. A. L. **Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade**. São Paulo, SP: PUC/SP, 2004.
- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo, SP: USP, 1999.
- BENSE, E. W. **A Teoria Geral dos Signos: introdução aos fundamentos da semiótica**. Tradução: Pérola De Carvalho. São Paulo: Perspectiva, 2010.
- BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed da USP, 1974.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. **Parecer CNE/CES 1.302/2001 - Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: MEC, 2001.
- CAMPOS, M. L. T. DE. **Discursos Sobre Continuidade De Funções Reais De Variável Real Em Ambiente Virtual Colaborativo: Uma Perspectiva Da Cognição Corporificada**. São Paulo, SP: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, 2014.
- CARAÇA, B. DE J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9ª ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.
- CARVALHO, B. DE A. **Desenho Geométrico**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 2005.
- CHAVES, J. A.; GRIMBERG, G. E. O Tratado Sobre As Propriedades Projetivas Das Figuras De Jean- Victor Poncelet: Elementos De Uma Gênese. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 14, n. 28, p. 85–106, 2014.
- CLÍMACO, H. D. A. **PROVA E EXPLICAÇÃO EM BERNARD BOLZANO**. [s.l.]

- UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, 2007.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA, 2000.
- CRUZ, W. J. DA. **Experimentos mentais e provas matemáticas formais.** São Paulo, SP: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, 2015.
- CRUZ, W. J. DA. **Experimentos Mentais na Educação Matemática: Uma analogia com provas matemáticas formais.** 1ª ed. Curitiba - PR: Appris, 2018.
- CRUZ, W. J. DA. A semiótica e os experimentos mentais no ensino e na aprendizagem em matemática. **XIII ENEM**, n. jun, 2019a.
- CRUZ, W. J. DA. O Raciocínio Diagramático E Os Experimentos Mentais Numa Perspectiva Semiótica. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 62, p. 6–28, 2019b.
- CRUZ, W. J. DA. **Complementaridade.** [s.l.] Notas de Aula, 2020.
- CRUZ, W. J. O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 16, p. 1–26, 2021.
- D'AMBRÓSIO, U. **Cálculo e Introdução à Análise.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.
- GARBI, G. G. **CQD: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- KANT, I. **Crítica da Razão Pura.** Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.
- MONTEIRO, L. C. S. **SENTIDOS E SIGNIFICADOS PARA UMA ABORDAGEM SEMIÓTICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SOBRE AS DISCUSSÕES DAS INTERPRETAÇÕES DO PARADOXO DE ZENÃO.** São Paulo: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, 2015.
- OLIVEIRA, B. J. DE. **Francis Bacon e a fundamentação da ciência como tecnologia.** 2ª ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2010.
- OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática.** Tradução: Raul Fernando Neto. São Paulo: Ed. UNESP, 1993.
- OTTE, M. Space, complementarity, and “diagrammatic reasoning”. **Semiotica**, v. 2011, n. 186, p. 275–296, 2011.
- OTTE, M. F. Arithmetic and geometry: Some Remarks on the Concept of Complementarity. **Studies in Philosophy and Education**, n. 10, p. 37–62, 1990.
- PAULA, J. B. DE. **O Termo ‘Axioma’ No Tempo, Considerando A Relação Entre A**

**Filosofia E A Matemática Alicerçada No Pensamento Sobre Complementaridade 'Otteano'**. Cuiabá - MT: Universidade Federal De Mato Grosso, 2014.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução: José Teixeira Coelho. 3ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PINILLA, M. I. F.; IORI, M.; D'AMORE, B. **Primeiros Elementos De Semiotica**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2015.

RADFORD, L. On signs and representations a cultural account. **Scientia Paedagogica Experimentalis**, v. 35(1), p. 277–302, 1998.

RADFORD, L. **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. 1ª ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2011.

RAFAEL, R. C. Redução da não aprovação em cálculo: intervenções realizadas por universidades públicas e privadas. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, p. 1–12, 2016.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. São Paulo, SP: Universidade de São Paulo, 2003.

SALATIEL, J. R. PEIRCE SOBRE ANALITICIDADE. v. 16, n. 3, p. 393–415, 2012.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 1ª ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2002.

SANTANA, G. F. As transformações do conceito de função. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/On line**, n. v. 3, n. 1, p. 165–175, 2015.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. re ed. São Paulo: Cortez, 2007.

VIANNA, R. N. G. **Um Estudo Do Cours D ' Analyse Algébrique De Cauchy Em Face Das Demandas Do Ensino Superior Científico Na École Polytechnique**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

WIELEWSKI, S. A. **Pensamento instrumental e pensamento relacional na Educação Matemática**. São Paulo: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, 2008.