Departmento de Física - Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Juiz de Fora

Partícula não-relativística com spin-1/2 em campos eletromagnético e gravitacional

Dissertação de Mestrado

Guilherme Yoshi Oyadomari
Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Agosto de 2022

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oyadomari, Guilherme Yoshi.
Partícula não-relativística com spin-1/2 em campos eletromagnético e gravitacional / Guilherme Yoshi Oyadomari. -- 2022.
42 p.

Orientador: Ilia Chapiro
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2022.

1. Gravitação. 2. Espinores. 3. Relatividade Geral. 4. Equação de Pauli. I. Chapiro, Ilia , orient. II. Título.

Guilherme Yoshi Oyadomari

"Partícula não-relativística com spin-1/2 em campos eletromagnético e gravitacional"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 18 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilia Chapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 04/08/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Manoel Messias Ferreira Junior**, **Usuário Externo**, em 18/08/2022, às 16:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro**, **Professor(a)**, em 18/08/2022, às 16:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Agradecimentos

- À minha família, em especial aos meus pais, Floriano e Nera, à minha irmã Stela e aos meus tios, Maria do Carmo e Nogueira, pelo apoio, incentivo, carinho e suporte que recebi durante toda a minha vida;
- Aos meus amigos-irmãos de quase duas décadas, Lucas Davin, Vitor Davin, Públio do Vale e Pablo do Vale (ao qual agradeço também pelas muitas discussões que ajudaram a tornar clara para mim a escolha por seguir uma carreira científica);
- Ao meu orientador, professor Dr. Ilya L. Shapiro, pela orientação, pelas discussões científicas e pelo problema proposto que deu origem a esta dissertação;
- Ao meu amigo e colega de trabalho, Samuel William de Paulo Oliveira, pela colaboração na realização deste trabalho, e pela parceria ao longo de nossa trajetória acadêmica;
- Aos amigos que fiz durante a graduação, Letícia Ildefonso, João Paulo Melo, Thábata Lorenzetti, João Batista e Igor Peixoto;
- Aos amigos que me ajudaram durante o mestrado, Wagno Cesar e Vitor Barra;
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF com os quais fiz cursos durante o mestrado;
- Aos professores da minha graduação na UFSJ, em especial Edson Dias e Ana Cláudia Monteiro;
- Ao meu orientador da graduação, professor Jander P. dos Santos;
- Ao professor Mario Wilian Dávila Dávila, que me orientou durante o meu ensino médio no programa de PIBIC Jr da UFSJ e é um dos grandes responsáveis pelo meu fascínio pela matemática;
- À Capes, pelo apoio financeiro no meu projeto de mestrado.

Resumo

No presente trabalho, nosso ponto de partida é a equação de Pauli em um campo gravitacional fraco, obtida como limite de baixa energia da equação de Dirac em uma métrica de fundo curva. Essa equação é escrita em termos de uma perturbação gravitacional arbitrária $h_{\mu\nu}$, sobre a qual não especificamos nenhuma característica. A partir dessa equação geral, obtemos as equações de movimento para posição, momento e spin no limite $\hbar \to 0$, com o objetivo de investigar os efeitos da gravidade sobre férmions. Depois disso, em nossas equações gerais, especificamos a forma da perturbação gravitacional para alguns casos particularmente importantes, a saber, a onda gravitacional fraca e o limite newtoniano da métrica de Schwarzschild, a fim de comparar nossos resultados com os resultados encontrados na literatura que foram obtidos por outros métodos.

Palavras-chave: Gravitação; Espinores; Relatividade Geral; Equação de Pauli.

Abstract

In the present work our starting point is the Pauli equation in a weak gravitational field, obtained as a low energy limit of the Dirac equation in a curved background. This equation is written in terms of an arbitrary gravitational perturbation $h_{\mu\nu}$, about which we did not specify any characteristic. From such a general equation, we obtain the equations of motion for position, momentum and spin in the limit $\hbar \to 0$, with the purpose of investigating the effects of gravity on fermions. After that, in our general equations we specify the form of the gravitational perturbation for some particularly important cases, namely the weak gravitational wave and the Newtonian limit of the Schwarzschild metric, in order to compare our results with the results found in literature that were obtained by other methods.

Keywords: Gravitation; Spinors; General Relativity; Pauli Equation.

Sumário

Introdução

No artigo [1], publicado em 2007, B. Gonçalves, Y. N. Obukhov e I. L. Shapiro apresentam uma equação de Pauli na presença de uma onda gravitacional, obtida a partir da transformação *exata* de Foldy-Wouthuysen. Dessa equação, são obtidas as equações de movimento para posição, momento e spin e é aplicado o limite $\hbar \to 0$. O resultado obtido para a equação de movimento do spin nesse artigo, mostra a possibilidade de que, devido à influência de um campo gravitacional, a precessão do spin do elétron poderia ocorrer mesmo na ausência de um campo magnético externo. Tal fenômeno, se confirmado, poderia ser útil, por exemplo, no aprimoramento de detectores de ondas gravitacionais.

Em 2015, J. Q. Quach publica o artigo [2], no qual argumenta que a precessão do spin do elétron, especulada em [1], seria não-física e proveniente de um termo sem invariância de calibre, consequência de uma falha na aplicação da transformação *exata* de Foldy-Wouthuysen. O autor então apresenta suas próprias derivações da equação de Pauli na presença de uma onda gravitacional, feitas a partir da transformação *exata* de Foldy-Wouthuysen e da transformação *padrão* de Foldy-Wouthuysen, ambas levando ao o mesmo resultado, que ele afirma ser o correto. A partir dessas equações, ele então obtém a equação de movimento para o spin. Tal resultado, contudo, não contém termos que indiquem a possibilidade de precessão do spin do elétron devido a um campo gravitacional na ausência de um campo magnético.

No artigo [3], A. J. Silenko e O. V. Teryaev obtém a equação de Pauli para o limite Newtoniano da métrica de Schwarzschild. Tal resultado é obtido a partir da transformação *padrão* de Foldy-Wouthuysen. Dessa equação, são obtidas as equações de movimento para o momento e para o spin, nas quais é aplicado o limite $\hbar \to 0$.

Todos os resultados citados anteriormente, obtidos pelas transformações *exata* e *padrão* de Foldy-Wouthuysen, tem como característica a necessidade de se especificar desde o começo a forma da métrica a ser trabalhada.

O que apresentamos aqui, é parte do trabalho desenvolvido em colaboração com Samuel William de Paulo Oliveira e nosso orientador, Prof. Dr. Ilya L. Shapiro. Em nosso trabalho, obtivemos a equação de Pauli em um campo gravitacional fraco para uma métrica arbitrária, de onde então calculamos as equações de movimento para a partícula não relativística. Aqui detalhamos a obtenção de tais equações. Por terem sido obtidas a partir de um método que não requer a especificação da forma da métrica, nossas equações são mais gerais que as anteriores, presentes na literatura. Além disso, a generalidade da métrica possibilita a comparação de nossos resultados com os dos trabalhos citados anteriormente.

O texto foi organizado da seguinte forma: No capítulo 1, desenvolvemos a teoria de espinores no espaço-tempo curvo, nele introduzimos o formalismo de tetradas, construímos a ação de um espinor de Dirac no espaço tempo curvo e obtemos, por fim, a equação de Dirac para um campo gravitacional fraco. No capítulo 2, apresentamos as equações de campo de Einstein e duas soluções importantes, que se encaixam no requisito de campo gravitacional fraco e que são utilizadas em nossas equações no capítulo 4. No capítulo 3, apresentamos a obtenção da equação de Pauli como limite não-relativístico da equação de Dirac no espaço-tempo *plano*, com o objetivo de ilustrar o procedimento utilizado na obtenção da equação de Pauli apresentada no capítulo 4. Estes três primeiros capítulos são de caráter revisivo, e não apresentam quaisquer resultados originais. Por fim, no capítulo 4 apresentamos a equação de Pauli em um campo gravitacional fraco arbitrário, e a partir dela obtemos as equações de movimento para posição, momento e spin, em seguida introduzimos as métricas das soluções apresentadas no capítulo 2 em nossas equações, e comparamos nossos resultados a alguns dos presentes na literatura.

CAPÍTULO 1

Teoria de espinores no espaço-tempo curvo

Neste capítulo fazemos uma sucinta apresentação da teoria de espinores no espaço-tempo curvo. Essa apresentação se baseia principalmente em [4], [5] e [6], mas uma abordagem similar também pode ser encontrada em [7]. A seguir introduzimos o formalismo de tetradas, construímos a derivada covariante de um espinor e por fim obtemos a ação de um espinor de Dirac no espaço-tempo curvo.

1.1 Definição de tetradas

A opção mínima na formulação de uma teoria de campos clássica no espaço-tempo curvo é a generalização covariante de sua contraparte no espaço de Minkowski. Tal abordagem consiste na construção de uma expressão covariante que se reduz à ação no espaço de Minkowski em um referencial localmente plano. Ao realizar tal procedimento na ação do férmion de Dirac, cuja expressão no espaço de Minkowski é

$$S_f = i \int d^4x \bar{\psi} \left(\gamma^a \partial_a - im \right) \psi, \tag{1.1}$$

onde $a = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ são índices do espaço de Minkowski, é necessária a introdução de entidades matemáticas chamadas tetradas.

Vamos começar definindo o formalismo de tetradas no espaço Riemanniano $M_{1,3}$, cuja métrica é $g_{\mu\nu}$. Localmente, em um ponto P, pode-se introduzir coordenadas X^a de forma que no ponto P a métrica seja a de Minkowski $\eta_{ab} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Isso significa que localmente a base será composta por quatro vetores ortonormais $\mathbf{e}_a$, tais que $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \eta_{ab}$. As coordenadas X^a podem também ser vistas como coordenadas do espaço tangente em uma vizinhança próxima ao ponto P. Assim, dados os vetores de base locais $\mathbf{e}_\mu$, correspondentes às coordenadas gerais x^μ, podemos escrever $\mathbf{e}_a = e^\mu_a \mathbf{e}_\mu$ e $\mathbf{e}_\nu = e^b_\nu \mathbf{e}_b$, onde

e_a^μ e e_ν^b são os coeficientes de transição de uma base para outra, dados por

$$e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a}, \qquad e_\nu^b = \frac{\partial X^b}{\partial x^\nu}. \tag{1.2}$$

Utilizaremos índices gregos μ, ν, ... no que se refere às coordenadas gerais x^μ, e estes índices serão abaixados e levantados, respectivamente, por meio das métricas $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$. Já os índices latinos a, b, ... serão utilizados para as coordenadas localmente planas X^a e serão abaixados e levantados por meio de $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$, respectivamente.

Os objetos e_a^μ e e_ν^b, definidos na equação (1.2), são chamados de *tetradas* (a palavra em alemã *vierbein* é também frequentemente utilizada), e torna-se evidente que

$$e_a^\mu e^{a\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \qquad e_a^\mu e_{a\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

e também

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \qquad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{1.4}$$

A partir das equações (1.3) e (1.4) pode-se observar que as descrições em termos da métrica e em termos de tetradas são equivalentes. Essa característica, aliada ao fato de conectarem um referencial localmente plano ao referencial geral, faz com que as tetradas desempenhem um papel fundamental no processo de generalização covariante da ação (1.1) mencionado anteriormente.

1.2 Derivada covariante no formalismo de tetradas

No formalismo da métrica, a derivada covariante de um vetor arbitrário V^μ é

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} V^\tau, \tag{1.5}$$

onde a conexão afim $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ é o símbolo de Christoffel usual, dado por

$$\Gamma^\mu_{\tau\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\tau g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\nu\tau} - \partial_\nu g_{\tau\lambda} \right), \tag{1.6}$$

usado em Relatividade geral, que é obtido a partir de duas condições: simetria $\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$; e metricidade da derivada covariante $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

O fato de tetradas possuírem índices de Lorentz locais faz com que a construção de suas derivadas covariantes não seja um procedimento trivial. Como tetradas não são tensores, suas derivadas covariantes não são algo natural, consequentemente a construção que faremos envolverá algumas suposições *ad hoc*.

É importante ressaltar que no referencial localmente plano X^a a derivada covariante de um dado vetor não pode ser simplesmente $\partial_a V^b$, visto que qualquer deslocamento a partir do ponto P significa uma mudança de um espaço tangente para outro. Vamos supor então que tal derivada é dada por um operador linear e satisfaz a regra de Leibniz. A expressão geral que obedece essas condições é

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, ca} V^c, \tag{1.7}$$

onde $\tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, ca}$ é um coeficiente desconhecido.

Da nossa definição de tetradas, temos que componentes vetoriais satisfazem $V^\mu = e^\mu_a V^a$ e componentes tensoriais satisfazem $\nabla_\nu V^\mu = e^a_\nu e^\mu_b \nabla_a V^b$, então das equações (1.5) e (1.7) temos

$$\nabla_\lambda V^\mu \;=\; \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} V^\tau \;=\; e^a_\lambda e^\mu_b \nabla_a V^b \;=\; e^a_\lambda e^\mu_b \left(\partial_a V^b + \tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, ca} V^c\right). \tag{1.8}$$

O termo do lado direito da ultima equação que evolve uma derivada parcial pode ser reescrito como

$$\partial_a V^b = e^\nu_a \partial_\nu \left(V^\tau e^b_\tau\right) = e^\nu_a e^b_\tau \partial_\nu V^\tau + e^\nu_a V^\tau \partial_\nu e^b_\tau. \tag{1.9}$$

Substituindo a equação (1.9) na equação (1.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda V^\mu &= e^a_\lambda e^\mu_b \left(e^\nu_a e^b_\tau \partial_\nu V^\tau + e^\nu_a V^\tau \partial_\nu e^b_\tau + \tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, ca} V^c\right) \\
&= \delta^\nu_\lambda \delta^\mu_\tau \partial_\nu V^\tau + \delta^\nu_\lambda V^\tau e^\mu_b \partial_\nu e^b_\tau + e^a_\lambda e^\mu_b e^c_\tau V^\tau \tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, ca} \\
&= \partial_\lambda V^\mu + V^\tau \left(e^\mu_b \partial_\lambda e^b_\tau + e^\mu_b e^c_\tau V^\tau \tilde{\omega}^{b}_{\cdot\, c\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Comparando a equação (1.10) à equação (1.5) concluímos que

$$\Gamma^\mu_{\tau\nu} = e^\mu_d \partial_\nu e^d_\tau + e^\mu_d e^c_\tau \tilde{\omega}^{d}_{\cdot\, c\nu}. \tag{1.11}$$

Multiplicando a ultima equação por $e^a_\mu e^{\tau b}$ chegamos a

$$\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\,\cdot\,\nu} = e^a_\mu e^{\tau b} \Gamma^\mu_{\tau\nu} - e^{\tau b} \partial_\nu e^a_\tau. \tag{1.12}$$

A partir da ultima equação podemos verificar que $\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\,\cdot\,\lambda}$ é antissimétrico nos índices a e b, ou seja $\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\,\cdot\,\lambda} = -\tilde{\omega}^{ba}_{\cdot\,\cdot\,\lambda}$, pois

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\cdot\mu} + \tilde{\omega}^{ba}_{\cdot\cdot\mu} &= e^a_\nu e^{\lambda b} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + e^b_\nu e^{\lambda a} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - e^{\lambda b} \partial_\mu e^a_\lambda - e^{\lambda a} \partial_\mu e^b_\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right)\left(e^{a\nu} e^{\lambda b} + e^{a\lambda} e^{\nu b}\right) - e^{b\lambda} \partial_\mu e^a_\lambda - e^{a\lambda} \partial_\mu e^b_\lambda \\
&= e^{a\nu} e^{\lambda b} e^c_\nu \partial_\mu e_{c\lambda} + e^{a\nu} e^{\lambda b} e_{c\lambda} \partial_\mu e^c_\nu - e^{\lambda b} \partial_\mu e^a_\lambda - e^{a\lambda} \partial_\mu e^b_\lambda \;=\; 0\,.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Podemos agora construir a derivada covariante de uma tetrada combinando

$$\begin{aligned}\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda &= e^a_\nu e^\mu_b \nabla_a V^b + e^a_\nu V^b \nabla_a e^\mu_b \\ &= e^a_\nu e^\mu_b (\partial_a V^b + \tilde{\omega}^b_{\cdot\, ca} V^c) + e^a_\nu V^b \nabla_a e^\mu_b,\end{aligned} \tag{1.14}$$

com

$$\partial_\nu V^\mu = e^a_\nu e^\mu_b \partial_a V^b + V^b e^a_\nu \partial_a e^\mu_b, \tag{1.15}$$

de onde obtemos

$$V^\lambda e^c_\lambda \tilde{\omega}^b_{\cdot ca} e^a_\nu e^\mu_b + e^a_\nu e^b_\lambda V^\lambda \nabla_a e^\mu_b = V^\lambda e^b_\lambda e^a_\nu \partial_a e^\mu_b + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}. \tag{1.16}$$

A equação (1.16) tem que ser válida para qualquer V^λ, então chegamos a

$$e^a_\nu e^b_\lambda \nabla_a e^\mu_b = e^a_\nu e^b_\lambda \, \partial_a e^\mu_b + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - e^a_\nu e^c_\lambda e^\mu_b \, \tilde{\omega}^b_{\cdot\, ca}. \tag{1.17}$$

Multiplicando a equação (1.17) por $e^\nu_d e^\lambda_e$ e mudando alguns índices mudos obtemos finalmente

$$\nabla_a e^\mu_b = \partial_a e^\mu_b + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e^\lambda_b e^\nu_a - \tilde{\omega}^{cb}_{\cdot\cdot\, \nu} e^\nu_a e^\mu_c. \tag{1.18}$$

Podemos multiplicar a ultima equação por e^a_τ, e assim obtemos

$$\nabla_\tau e^\mu_b = e^a_\tau \partial_a e^\mu_b + \Gamma^\mu_{\lambda\tau} e^\lambda_b - \tilde{\omega}^c_{\cdot\, b\tau} \, e^\mu_c. \tag{1.19}$$

Seguindo os mesmos passos anteriores, ou diretamente a partir da equação (1.19), podemos mostrar também que

$$\nabla_\tau e_{\mu a} = e^b_\tau \partial_b e_{\mu a} - \Gamma^\lambda_{\mu\tau} e^\lambda_a - \tilde{\omega}_{a\cdot\,\tau}^{\ \, b} e^\mu_b. \tag{1.20}$$

Por fim, como consequência direta da propriedade de metricidade, podemos mostrar que $\nabla_\tau e^\mu_b = 0$ e $\nabla_\tau e_{\mu a} = 0$, pois

$$\nabla_\tau g_{\mu\nu} = \nabla_\tau (e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}) = e^a_\mu \eta_{ab} \nabla_\tau e^b_\nu + e^b_\nu \eta_{ab} \nabla_\tau e^a_\mu = 2 e^a_\mu \eta_{ab} \nabla_\tau e^b_\nu = 0. \tag{1.21}$$

Agora estamos em condições de construir a derivada covariante de um férmion.

1.3 Derivada covariante de um férmion de Dirac

Partindo da expressão no espaço de Minkowski, dada por (1.1), a expressão que desejamos para a generalização covariante da ação de um campo espinorial tem a forma

$$S_f = i\int d^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}\big(\gamma^\mu\nabla_\mu - im\big)\psi. \tag{1.22}$$

Como a parte relacionada ao volume de integração é relativamente simples, nos resta generalizar as matrizes gama e construir a derivada covariante.

Por meio de tetradas vamos definir as matrizes gama no espaço-tempo curvo como sendo $\gamma^\mu = e^\mu_a\gamma^a$. Dessa forma, os índices das matrizes gama no espaço-tempo curvo são abaixados e levantados por meio das métricas covariantes $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$. Assim, podemos ver que a versão da álgebra de Clifford para as novas matrizes gama é dada por

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = e^a_\mu e^b_\nu\left(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a\right) = 2e^a_\mu e^b_\nu\eta_{ab} = 2g_{\mu\nu}. \tag{1.23}$$

Para o processo de construção da derivada covariante, vamos primeiro definir

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}\sigma_{ab}\psi, \tag{1.24}$$

onde σ_{ab} é dado por

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2}\big(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a\big). \tag{1.25}$$

Podemos considerar (1.24) uma hipótese que pode ser provada ou descartada. Em nossa definição, $\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}$ é a *conexão espinorial*, que devemos obter a partir da exigência de que a expressão seja covariante. Tomando o conjugado de (1.24), obtemos

$$\nabla_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}\bar{\psi}\sigma_{ab}. \tag{1.26}$$

Com o intuito de obter a expressão da conexão espinorial, consideremos a expressão dada por

$$\nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \tag{1.27}$$

Via regra de Leibniz, podemos obter

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) &= \nabla_\mu\bar{\psi}\cdot\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}(\nabla_\mu\gamma^\alpha)\psi + \bar{\psi}\gamma^\alpha\nabla_\mu\psi \\ &= \partial_\mu\bar{\psi}\cdot\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\mu\psi \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\bar{\psi}\gamma^\nu\psi - \frac{i}{2}\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}\bar{\psi}\sigma_{ab}\gamma^\alpha\psi + \frac{i}{2}\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}\bar{\psi}\gamma^\alpha\sigma_{ab}\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^a(\partial_\mu e^\alpha_a)\psi + \bar{\psi}\Gamma^\alpha_{\nu\mu}\gamma^\nu\psi.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Como a equação (1.28) deve ser válida para qualquer campo ψ, concluímos que

$$-\frac{1}{4}\,\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\;\;ab}\,e_c^\alpha\left[\gamma^c(\gamma_a\gamma_b-\gamma_b\gamma_a)-(\gamma_a\gamma_b-\gamma_b\gamma_a)\gamma^c\right]\;=\;\gamma^c\big(e_c^\nu\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\partial_\mu e_c^\alpha\big). \tag{1.29}$$

Por meio das relações

$$\gamma^c\gamma_a\gamma_b\;=\;2\delta_a^c\gamma_b-\gamma_a\gamma^c\gamma_b, \tag{1.30}$$

e

$$2\delta_a^c\gamma_b-2\delta_b^c\gamma_a+\gamma_a\gamma_b\gamma^c-\gamma^c\gamma_b\gamma_a\;=\;-2\delta_b^c\gamma_a+2\gamma_b\delta_a^c-\gamma_b\gamma_a\gamma^c, \tag{1.31}$$

obtemos

$$\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\;\;ab}\left(e_b^\alpha\gamma_a-e_a^\alpha\gamma_b\right)\;=\;\gamma^c\big(e_c^\tau\Gamma^\alpha_{\tau\mu}+\partial_\mu e_c^\alpha\big). \tag{1.32}$$

A ultima equação pode ser resolvida facilmente devido à antissimetria de $\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\;\;ab}$, e o resultado é dado por

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\cdot\cdot}^{\;\;ab}\;&=\;-\frac{1}{2}\,\tilde{\omega}^{ab}_{\cdot\cdot\,\mu}\;=\;\frac{1}{2}\,(e_\tau^b e^{\lambda a}\Gamma^\tau_{\lambda\mu}-e^{\lambda a}\partial_\mu e_\lambda^b)\\&=\frac{1}{4}\,(e_\tau^b e^{\lambda a}-e_\tau^a e^{\lambda b})\Gamma^\tau_{\lambda\mu}\;+\;\frac{1}{4}(e^{\lambda b}\partial_\mu e_\lambda^a-e^{\lambda a}\partial_\mu e_\lambda^b).\end{aligned} \tag{1.33}$$

Aqui nós estabelecemos a relação da conexão espinorial com equação a equação (1.12), e apresentamos tanto uma forma compacta quanto uma forma explicitamente antissimétrica da conexão espinorial. Por fim, temos a expressão da derivada covariante de um espinor, dada por (1.24), onde a conexão espinorial é a mostrada na equação (1.33). A construção da ação (1.22) está, portanto, completa.

1.4 Ação linearizada do campo espinorial

A partir da construção da ação de um férmion de Dirac no espaço-tempo curvo, fica claro que num referencial localmente plano, bem como na ausência de um campo gravitacional, a expressão (1.22) se reduz à ação no espaço de Minkowski dada por (1.1). O procedimento realizado nesta seção será útil na obtenção da expressão para a ação de um campo espinorial no caso em que o campo gravitacional é fraco, mas diferente de zero. Para isso, o primeiro passo é fazer na ação (1.22) a mudança

$$g_{\alpha\beta}\to g'_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}, \tag{1.34}$$

onde $g'_{\alpha\beta}$ é composto por uma métrica de fundo, dada por $g_{\alpha\beta}$, e por uma perturbação $h_{\alpha\beta}$, onde $|h_{\alpha\beta}|\ll 1$. Em seguida, calculamos a expansão da ação (1.22) até primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$ e, por fim, fazemos a métrica de fundo igual à métrica de Minkowski.

Vamos agora obter a variação em primeira ordem da ação (1.22) com respeito à perturbação da métrica, $h_{\alpha\beta}$. Com esse intuito, primeiro vamos trocar a ação (1.22) por sua equivalente Hermitiana, dada por

$$S_f = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\big(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi + 2im\big). \tag{1.35}$$

Podemos observar agora que, embora a variação a ser tomada seja com respeito à métrica, a ação (1.35) é construída em termos de tetradas e da conexão espinorial. Para contornar esse problema, devemos tomar a variação da métrica $g_{\alpha\beta} \to g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ e encontrar a variação correspondente de todas as quantidades envolvidas. Em primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$, a solução desse problema nos dá

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}h, & \delta g^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu} \\ \delta e^c_\mu &= \frac{1}{2}\,h^\nu_\mu e^c_\nu, & \delta e^\rho_b &= -\frac{1}{2}\,h^\rho_\lambda e^\lambda_b \\ \delta\gamma^\mu &= -\frac{1}{2}\,h^\mu_\nu\,\gamma^\nu, & \delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\big(\nabla_\alpha h^\lambda_\beta + \nabla_\beta h^\lambda_\alpha - \nabla^\lambda h_{\alpha\beta}\big). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Aqui todos os índices são levantados e abaixados por meio das métricas de fundo $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ e, além disso, $h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

A partir de (1.36) e (1.33), podemos obter

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab} = -\,\delta\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ba} &= \frac{1}{2}\,\delta(e^b_\tau e^{\lambda a}\Gamma^\tau_{\lambda\mu} - e^{\lambda a}\partial_\mu e^b_\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\,\big(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\,\big)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Agora substituimos (1.33) e (1.36) na ação (1.35), e expandimos

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \;=\; \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{i}{4}\,\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}\,\bar{\psi}\big(\gamma^\mu\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma^\mu\big)\psi. \tag{1.38}$$

Considerando o termo dependente da variação de $\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab}$, definida na equação (1.37)

$$\begin{aligned} \delta_\omega S_f &= -\,\frac{i}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\,\bar{\psi}\big(\gamma^\mu\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma^\mu\big)\psi\,\delta\omega_{\mu\,\cdot\cdot}^{\;ab} \\ &= -\,\frac{i}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}\,\big(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\big)\,\nabla_\lambda h_{\mu\tau}\,e^{\mu c}\,\bar{\psi}(\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c)\psi. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Após a integração por partes obtemos

$$\delta_\omega S_f = \frac{i}{8}\int d^4x\sqrt{-g}\,h_{\mu\tau}e^{\mu c}\big(e^{\tau a}e^{\lambda b} - e^{\tau b}e^{\lambda a}\big)\,\nabla_\lambda\big[\bar{\psi}(\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c)\psi\big]. \tag{1.40}$$

Podemos notar na ultima equação, que o termo entre colchetes é antissimétrico em ab. Assim, podemos simplificá-lo usando a expressão (1.25) para σ_{ab},

$$\delta_\omega S_f = -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}e^{\mu c}e^{\nu a}e^{\lambda b}\nabla_\lambda\big[\bar{\psi}(\gamma_c\gamma_a\gamma_b - \gamma_c\gamma_b\gamma_a + \gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_b\gamma_a\gamma_c)\psi\big]. \quad (1.41)$$

Substituindo $\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}$, chegamos a

$$\delta_\omega S_f = -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}\,h_{\mu\nu}\nabla_\lambda\big[\bar{\psi}(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu)\psi\big] = 0. \quad (1.42)$$

Como podemos observar, a contribuição de $\delta\omega_\mu{}^{ab}_{\cdot\cdot}$ desaparece, assim, obtemos a variação em primeira ordem da ação (1.22), dada por

$$\delta S_f = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{2}\left(hg^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\left(\bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi\right) + ihm\bar{\psi}\psi\Big\}. \quad (1.43)$$

Somando a variação em primeira ordem à ação original obtemos

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m\right)\psi + \frac{i}{4}\left(hg^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\left(\overline{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma_\nu\psi\right) - \frac{mh}{2}\overline{\psi}\psi\right\}. \quad (1.44)$$

Variando a ação (1.44) com respeito a $\bar{\psi}$, e tomando o limite de um campo gravitacional fraco, onde temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &\to \eta^{\mu\nu}, \\ \nabla_\mu &\to \partial_\mu, \end{aligned} \quad (1.45)$$

obtemos finalmente a equação de Dirac em um capo gravitacional fraco, dada por

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m + \frac{i}{2}\left(h\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\gamma_\nu\partial_\mu + \frac{i}{4}\left(\partial_\nu h - \partial_\mu h^{\mu\nu}\right)\gamma^\nu - \frac{mh}{2}\right\}\psi = 0. \quad (1.46)$$

A equação (1.46) é de fundamental importância no presente trabalho, seu limite não-relativístico é a equação de Pauli para um campo gravitacional fraco, obtida em nosso trabalho em colaboração com Samuel William de Paulo Oliveira e Prof. Dr. Ilya L. Shapiro, cuja obtenção é mostrada em detalhes em [8]. Essa equação será apresentada no capítulo 4, e a partir dela obteremos as equações de movimento para uma partícula não-relativística de spin-1/2.

CAPÍTULO 2

Equações de campo de Einstein e algumas soluções importantes

Neste capítulo apresentamos as equações de campo de Einstein. Em seguida mostramos duas soluções importantes: as ondas gravitacionais em uma métrica de fundo plana e o limite Newtoniano da solução de Schwarzschild. Não incluímos aqui detalhes da obtenção das equações de Einstein, nem detalhamos as soluções apresentadas, para isso recomendamos [4]. Nosso objetivo aqui é apenas apresentar duas soluções podem ser expressas como perturbações na métrica de Minkowski, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, e que são utilizadas nas equações de movimento apresentadas em nossos resultados no capítulo 4.

2.1 Equações de campo de Einstein

Nesta seção apresentamos as equações de campo de Einstein. Nossa apresentação se baseia fortemente em [4].

Uma forma de se obter as equações da Relatividade Geral, é postular a ação da métrica. Nessa abordagem, partimos de uma ação total na forma

$$S_{total} = S_{grav} + S_m, \tag{2.1}$$

onde S_{grav} é a ação gravitacional e S_m é a ação de matéria.

A parte gravitacional da ação é dada por

$$S_{grav} = -\frac{1}{2\gamma} \int d^4x \sqrt{-g}(R + 2\Lambda), \tag{2.2}$$

onde R é o escalar de curvatura, ou escalar de Ricci, e γ e Λ são constantes, sendo Λ chamada de constante cosmológica.

Para encontrar as equações de movimento, fazemos

$$\frac{\delta S_{total}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \tag{2.3}$$

O tensor de momento-energia da matéria é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{2.4}$$

Desconsiderando termos de superfície, a variação da ação total será dada por

$$\delta S_{total} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\gamma} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right\} h_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

onde $R^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci.

Pelo princípio da mínima ação, obtemos as equações de movimento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \gamma T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

que podem ser reescritas como

$$G_{\mu\nu} = \gamma T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein.

A constante γ pode ser calibrada, assumindo o valor $\gamma = 8\pi G/c^2$, onde G é a constante gravitacional de Newton, e c é a velocidade da luz. Assim, temos finalmente

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Essas são as equações de Einstein com constante cosmológica.

2.2 Ondas gravitacionais em um fundo plano

Ondas gravitacionais constituem atualmente uma área extremamente ampla de pesquisa, muito além do escopo deste trabalho. Nesta seção apresentamos o caso mais simples, que consiste na propagação de ondas gravitacionais em um fundo plano. Nossa apresentação se baseará principalmente em [4] e [9].

Na situação descrita, podemos considerar $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ e $\Lambda = 0$. A partir dessa aproximação, podemos construir uma versão linearizada das equações de

Einstein. Em primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, o símbolo de Christoffel fica

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}{}^{(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}), \tag{2.9}$$

e o tensor de Ricci será dado por

$$R_{\mu\nu}{}^{(1)} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\nu h^\lambda_\mu + \partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda_\nu - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h), \tag{2.10}$$

onde $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, e todos os índices são levantados e abaixados por meio da métrica de Minkowski. As pequenas perturbações da métrica serão descritas pela equação de movimento

$$R_{\mu\nu}{}^{(1)} = 8\pi G S_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

onde $S_{\mu\nu}$ é dado por

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^\lambda_\lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.12}$$

A equação (2.11) descreve a emissão de ondas gravitacionais.

Como consequência da invariância de calibre, que no caso linearizado se resume a

$$h_{\alpha\beta} \to h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha, \tag{2.13}$$

o lado esquerdo da equação equação (2.11) é degenerado. Precisamos então fixar uma condição de calibre. Nesse caso, a condição de calibre harmônico de Fock-DeDonder, dada por

$$\partial_\alpha h^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\partial_\beta h = 0, \tag{2.14}$$

é particularmente útil. E a partir dela e da equação (2.11) chegamos à seguinte expressão

$$\Box h_{\alpha\beta} = 8\pi G S_{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

Tomando o caso de uma equação sem fontes, ou seja

$$\Box h_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.16}$$

uma possível solução é na forma de ondas planas, dada por

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda} + e^*_{\mu\nu}e^{-ik_\lambda x^\lambda}, \tag{2.17}$$

onde k_λ é o vetor de onda. Aqui $e_{\mu\nu}(k) = e_{\nu\mu}(k)$ é o tensor de polarização, e o quadrimomento dos modos satisfaz a relação de dispersão de campos sem massa $k_\lambda k^\lambda = 0$.

A condição de calibre (2.14) nos dá mais uma relação

$$k_\mu e^\mu_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu_\mu. \tag{2.18}$$

Podemos escolher a orientação dos eixos de nosso sistema de coordenadas, de forma que a nossa solução seja dada por uma onda se propagando na direção x. Assim, o vetor de onda será tal que $k^0 = k^1 = k > 0$ e $k^2 = k^3 = 0$.

A partir dessas equações, e da transformação de calibre (2.13), podemos obter uma solução da forma

$$h_{yy} = -h_{zz} = -2\upsilon, \qquad h_{yz} = h_{zy} = 2u, \tag{2.19}$$

onde $\upsilon = \upsilon(ct - x)$ e $u = u(ct - x)$ são duas funções descrevendo ondas se propagando na direção x, cada uma delas descrevendo um possível estado de polarização da onda gravitacional.

O tensor métrico será então dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\upsilon & 2u \\ 0 & 0 & 2u & -1+2\upsilon \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

podendo ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\upsilon & 2u \\ 0 & 0 & 2u & 2\upsilon \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

onde está sob a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, e

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\upsilon & 2u \\ 0 & 0 & 2u & 2\upsilon \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

é a perturbação gravitacional.

2.3 Solução de Schwarzschild e limite Newtoniano

A primeira solução exata das equações de campo de Einstein foi publicada em 1916, por Karl Schwarzschild. Em sua solução, ele considerou o caso de uma fonte pontual estática de massa M no espaço vazio. Essa aproximação é apropriada também para o campo gravitacional criado por uma estrela sem rotação de raio R a distâncias $r > R$ de seu centro. Nesta seção, apresentamos a solução de Schwarzschild, esta apresentação se baseará principalmente em [10], mas também contém elementos de [4].

Como a solução de Schwarzschild descreve um sistema com simetria esférica, o sistema de coordenadas esféricas é apropriado para escreve-la. Nesse caso a métrica é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.23}$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi \tag{2.24}$$

é o elemento de ângulo sólido, e o tensor métrico é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r\sin\theta)^2 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Vamos agora obter o limite Newtoniano da equação (2.25). Para isso, podemos observar que no caso de um campo gravitacional fraco temos

$$\left|\frac{2GM}{rc^2}\right| \ll 1. \tag{2.26}$$

Assim, podemos expandir o termo $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$ em série de potências, obtendo em primeira ordem

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{2GM}{rc^2}. \tag{2.27}$$

Dessa forma, no limite para campos gravitacionais fracos, a equação (2.25) se torna

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(r\sin\theta\right)^2 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Agora faremos uma mudança de coordenadas para coordenadas isotrópicas [11], dadas por

$$r = r'\left(1 + \frac{GM}{2r'c^2}\right)^2. \tag{2.29}$$

Podemos verificar que mediante essa mudança, a equação (2.28) se torna

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(r\sin\theta\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

onde omitimos as linhas nas novas coordenadas r' e, por simplicidade, usamos a notação

$$\Phi = \frac{GM}{r}. \tag{2.31}$$

Agora definiremos novas coordenadas quasi-cartesianas [11] como

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta, \tag{2.32}$$

e assim poderemos reescrever a equação (2.30) sob a forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

A equação (2.33) pode ser expressa como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2\Phi}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

onde está sob a forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, sendo

$$h_{\mu\nu} = -\frac{2\Phi}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

a perturbação gravitacional.

As métricas dadas pelas equações (2.22) e (2.35) tem um importante papel no presente trabalho, pois serão utilizadas nas equações de movimento obtidas no capítulo 4.

CAPÍTULO 3

Limite não-relativístico da Equação de Dirac

Neste capítulo apresentamos a obtenção da equação de Pauli como limite não-relativístico da equação de Dirac no espaço-tempo plano. Nosso objetivo aqui é ilustrar o procedimento usado na obtenção da equação de Pauli apresentada no capítulo 4, cuja obtenção é mostrada em detalhes em [8]. Para isso, seguimos principalmente a abordagem utilizada em [12]. Faz-se aqui também a introdução de algumas notações que serão úteis no capítulo 4. Por fim, obtemos as equações de movimento para uma partícula sem campo gravitacional, com o intuito de compará-las com as equações obtidas no capítulo 4, na presença de um campo gravitacional fraco. No que segue, índices i, j, k, ... $= 1, 2, 3$ denotam as componentes espaciais do espaço de Minkowski, enquanto o índice $t = 0$ denota a componente temporal.

3.1 A Equação de Dirac

A equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético no espaço-tempo plano (espaço de Minkowski) pode ser escrita como

$$i\hbar\partial_t\psi = \left\{c\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\phi\right\}\psi, \tag{3.1}$$

onde $\vec{p}$ é o operador momento, cujas componentes são $p_j = -i\hbar\partial_j$, ϕ é o potencial escalar, $\vec{A}$ é o potencial vetor e as matrizes α e β são dadas, respectivamente, por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e $\mathbb{I}$ é o símbolo que utilizaremos para a matriz identidade qualquer que seja a sua dimensão.

Por simplicidade, introduzimos a partir daqui a notação $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$, de forma que a equação (3.1) pode, então, ser reescrita como

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi, \tag{3.3}$$

onde $H = \left\{c\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi} + \beta mc^2 + e\phi\right\}$ é o operador Hamiltoniano.

3.2 Limite não-relativístico da Equação de Dirac

Como podemos observar no operador Hamiltoniano da equação (3.3), a expressão da energia relativística de uma partícula contém sua energia de repouso mc^2. Tal termo não é desejável no limite não-relativístico, portanto, com o intuito de eliminá-lo faremos a substituição

$$\psi = \psi' \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right) \tag{3.4}$$

na equação (3.3), obtendo assim

$$i\hbar\exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\left\{\partial_t - \frac{i}{\hbar}mc^2\right\}\psi' = \exp\left(-\frac{imc^2}{\hbar}t\right)\left\{c\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi} + \beta mc^2 + e\phi\right\}\psi', \tag{3.5}$$

e finalmente

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left\{c\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi} + (\beta - \mathbb{I})\, mc^2 + e\phi\right\}\psi'. \tag{3.6}$$

Fazendo a substituição $\psi' = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$, a equação anterior pode ser reescrita sob a forma matricial como

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \left\{c\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{\Pi} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\mathbb{I}\end{pmatrix}mc^2 + \begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}e\phi\right\}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Assim obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (i\hbar\partial_t - e\phi)\,\varphi = c\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\chi \\ (i\hbar\partial_t + 2mc^2 - e\phi)\,\chi = c\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\varphi. \end{cases} \tag{3.8}$$

Podemos observar que, no regime de baixas energias, o termo dominante do lado esquerdo da segunda equação é o proporcional a mc^2, dessa forma, em primeira aproximação podemos escrever

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\right)\varphi, \tag{3.9}$$

ou seja, $\chi \sim \frac{\Pi}{mc}\varphi$.

Substituindo a equação (3.9) na primeira equação de (3.8) temos

$$(i\hbar\partial_t - e\phi)\,\varphi = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\right)^2\varphi. \tag{3.10}$$

Vamos agora desenvolver o termo entre parênteses do lado direito da equação (3.10), usando notação indicial temos

$$\begin{aligned}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\right)^2 &= \sigma_i\Pi_i\sigma_j\Pi_j\\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i\right)\Pi_i\Pi_j + \frac{1}{2}\left(\sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i\right)\Pi_i\Pi_j.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Aplicando as propriedades de comutação e anti-comutação das matrizes de Pauli, dadas por

$$(\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i) = 2\delta_{ij}, \qquad (\sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i) = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{3.12}$$

obtemos finalmente

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\right)^2 = \Pi_i\Pi_i + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\Pi_i\Pi_j. \tag{3.13}$$

No ultimo termo da equação (3.13), o produto vetorial $\epsilon_{ijk}\Pi_i\Pi_j$ não se anula pois $\Pi_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$, portanto p_i e A_i não comutam, assim

$$\epsilon_{ijk}\Pi_i\Pi_j = \epsilon_{ijk}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)\left(p_j-\frac{e}{c}A_j\right) \;= \frac{ie\hbar}{c}\epsilon_{ijk}\left(\partial_iA_j\right) = \frac{ie\hbar}{c}B_k, \tag{3.14}$$

onde B_k é a k-ésima componente do vetor $\vec{B} =$ rot $\vec{A}$, que denota o campo magnético.

A partir das equações (3.13) e (3.14), explicitando $\vec{\Pi} = \vec{p} - \dfrac{e}{c}\vec{A}$, podemos finalmente escrever a equação (3.10) como

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left\{\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right\}\varphi. \tag{3.15}$$

tal equação é conhecida como *equação de Pauli*, e está escrita sob a forma

$$i\hbar\partial_t\varphi = H\varphi, \tag{3.16}$$

onde H é o operador Hamiltoniano, dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}. \tag{3.17}$$

Como podemos observar na equação (3.17), a Hamiltoniana de Pauli contém, além do termo associado à energia cinética e do termo associado ao potencial elétrico, um termo associado à energia potencial de um dipolo magnético em um capo externo.

3.3 Equações de movimento para a partícula

Nessa seção, obtemos as equações de movimento para a partícula a partir do operador Hamiltoniano dado pela equação (3.17), para isso, usamos as equações de movimento de Heisenberg. Em seguida aplicamos o limite macroscópico, ou seja $\hbar \to 0$, após o qual estaremos no regime clássico, o que significa que após isso os observáveis não são mais operadores e o princípio da incerteza já não se aplicará.

3.3.1 Equação de movimento para x_i

Para x_i a equação de movimento é dada por

$$i\hbar\frac{dx_i}{dt} = [x_i, H]. \tag{3.18}$$

Como o único termo de H que não comuta com x_i é o operador momento $\vec{\Pi}$, a equação de movimento fica

$$i\hbar\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2m}\left[x_i, \Pi^2\right], \tag{3.19}$$

que nos dá, já no limite $\hbar \to 0$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\Pi_i}{m}. \tag{3.20}$$

3.3.2 Equação de movimento para p_i

Para p_i a equação de movimento é

$$i\hbar\frac{dp_i}{dt} = [p_i, H], \tag{3.21}$$

e o único termo de H que não contribui para essa equação de movimento é o termo $\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$, pois ele é $\mathcal{O}(\hbar)$ e seu comutador com p_i será $\mathcal{O}(\hbar^2)$, fazendo com que ele não contribua para a equação de movimento no limite $\hbar \to 0$. Ficamos então com

$$i\hbar\frac{dp_i}{dt} = \left[p_i, \frac{1}{2m}\vec{\Pi}^2 + e\phi\right]. \tag{3.22}$$

A ultima equação pode ser reescrita como

$$i\hbar\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{2m}\left[p_i, \vec{\Pi}^2\right] + [p_i, e\phi], \tag{3.23}$$

que nos dá

$$i\hbar\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{2m}[p_i, \Pi_k]\,\Pi_k + \frac{1}{2m}\Pi_k\,[p_i, \Pi_k] + [p_i, e\phi]. \tag{3.24}$$

Como

$$[p_i, \Pi_k] = \frac{ie\hbar}{c}(\partial_i A_k), \tag{3.25}$$

obtemos, no limite $\hbar \to 0$,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{e}{mc}\Pi_k(\partial_i A_k) + eE_i \tag{3.26}$$

onde $E_i = -\partial_i \phi$ é o campo elétrico.

Como $\Pi_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$, podemos escrever

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\Pi_i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}, \tag{3.27}$$

onde $\frac{dx_k}{dt}$ é dado pela equação (3.20), o que nos da (para A_i estático)

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\Pi_i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\Pi_k}{m}. \tag{3.28}$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.27) obtemos então

$$\frac{d\Pi_i}{dt} = \frac{e}{mc}\Pi_k\left(\partial_i A_k - \partial_k A_i\right) + eE_i. \tag{3.29}$$

A ultima equação pode ser reescrita como

$$\frac{d\Pi_i}{dt} = \frac{e}{mc}\epsilon_{ikl}\Pi_k B_l + eE_i, \tag{3.30}$$

e é a expressão da força de Lorentz.

3.3.3 Equação de movimento para $\boldsymbol{\sigma_i}$

Para σ_i a equação de movimento é dada por

$$i\hbar\frac{d\sigma_i}{dt} = \left[\sigma_i, H\right]. \tag{3.31}$$

O único termo que contribui para esse comutador é o termo que contém uma matriz σ, assim temos

$$i\hbar\frac{d\sigma_i}{dt} = \left[\sigma_i, -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right], \tag{3.32}$$

que nos dá, no limite $\hbar \to 0$,

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = -\frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k. \tag{3.33}$$

CAPÍTULO 4

Equações de movimento para a partícula não-relativística de spin-1/2 em um campo gravitacional fraco

No capítulo 1, obtivemos a equação de Dirac no espaço-tempo curvo. Neste capítulo, apresentamos a equação de Pauli em um campo gravitacional fraco obtida a partir dela, em nosso trabalho feito em colaboração com Samuel William de Paulo Oliveira e com Prof. Dr. Ilya L. Shapiro. Essa equação foi obtida pelo mesmo método utilizado no capítulo 3, e sua obtenção é mostrada em detalhes em [8]. Aqui, partimos dela para obter as equações de movimento para a partícula semiclássica em um campo gravitacional fraco. No que segue, da mesma forma que no capítulo 3, índices i, j, k, ... $= 1, 2, 3$ denotam as componentes espaciais do espaço de Minkowski, enquanto o índice $t = 0$ denota a componente temporal.

4.1 A equação de Pauli em um campo gravitacional fraco

Partindo da equação de Dirac em um capo gravitacional fraco, ou seja $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, e sob a condição de incluir apenas termos de primeira ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$, obtivemos, em nosso trabalho feito em colaboração com Samuel William de Paulo Oliveira e com Prof. Dr. Ilya L. Shapiro, a seguinte equação

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\varphi = \bigg\{ & e\phi + \frac{1}{2}mc^2 h_{00} - \frac{i\hbar}{4}\left(\dot{h}_{00} - \dot{h}\right) + \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\Pi}^2 \\
& - \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2m}\omega_{kl}\Pi_k\Pi_l + \frac{i\hbar}{2m}\left(\partial_k\omega_{kl}\right)\Pi_l \\
& + \frac{1}{m}v'_k\Pi_k - \frac{\hbar}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(\partial_k\omega_{lr}\right)\Pi_r - \frac{e\hbar}{4mc}\sigma_m\epsilon^{mkl}\epsilon_{jrk}\omega_{lr}B_j\bigg\}\varphi,
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

onde, da mesma forma que na equação sem campo gravitacional, $\vec{B} = \text{rot}\, A$ é o campo magnético, $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$, e além disso utilizamos as notações

$$v_k' = -\frac{i\hbar}{4}(\partial_k h + \partial_j h_{jk}), \qquad \omega_{jk} = h_{00}\delta_{jk} + h_{jk}. \tag{4.2}$$

Todos os detalhes do processo de obtenção dessa equação, que foi análogo ao realizado no capítulo 3, se encontram em [8].

A primeira característica que deve ser ressaltada é que no caso de um campo gravitacional nulo, i.e., $h_{00} = h_{ij} = 0$, a equação (4.1) se reduz à Equação de Pauli usual dada por (3.17). Outro aspecto relevante é que no processo de obtenção da equação (4.1) não foi feita nenhuma especificação a respeito da forma da perturbação da métrica. Isso significa que a equação (4.1) é válida para qualquer métrica que satisfaça $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 0$, ou seja, que descreva um campo gravitacional fraco. Esse aspecto é particularmente importante, pois nos permite comparar nossos resultados a diversos resultados presentes na literatura, obtidos por meios que requerem a especificação da métrica.

A equação (4.1) está sob a forma

$$i\hbar\partial_t\varphi = H\varphi, \tag{4.3}$$

onde

$$\begin{aligned} H =& \Bigg\{ e\phi + \frac{1}{2}mc^2 h_{00} - \frac{i\hbar}{4}\left(\dot{h}_{00} - \dot{h}\right) + \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\Pi}^2 \\ & - \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2m}\omega_{kl}\Pi_k\Pi_l + \frac{i\hbar}{2m}\left(\partial_k\omega_{kl}\right)\Pi_l \\ & + \frac{1}{m}v_k'\Pi_k - \frac{\hbar}{4m}\sigma_m\epsilon^{mkl}\left(\partial_k\omega_{lr}\right)\Pi_r - \frac{e\hbar}{4mc}\sigma_m\epsilon^{mkl}\epsilon_{jrk}\omega_{lr}B_j \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

é o operador Hamiltoniano, a partir do qual obteremos as equações de movimento para a partícula na seção seguinte.

4.2 Equações de movimento para a partícula

A partir da expressão do operador Hamiltoniano (4.4), as equações de movimento para a partícula serão obtidas por meio das equações de movimento de Heisenberg

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dx_i}{dt} &= \left[x_i, H\right], \\ i\hbar\frac{dp_i}{dt} &= \left[p_i, H\right], \\ i\hbar\frac{d\sigma_i}{dt} &= \left[\sigma_i, H\right], \end{aligned} \tag{4.5}$$

juntamente com as relações de comutação

$$
\begin{aligned}
[x_i, x_j] &= 0, \\
[p_i, p_j] &= 0, \\
[x_i, \sigma_j] &= 0, \\
[p_i, \sigma_j] &= 0, \\
[x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\
[\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Uma vez obtidas as equações de movimento, o limite macroscópico, $\hbar \to 0$, é aplicado. Após isso, estaremos no regime clássico, o que significa que os observáveis deixam de ser operadores e o princípio da incerteza já não se aplica.

Como podemos observar, alguns termos do operador Hamiltoniano não contribuirão para todas as equações de movimento, portanto, com o intuito de simplificar os cálculos que faremos a seguir, torna-se conveniente reescreve-lo sob a forma

$$
H = N - \vec{\sigma} \cdot \vec{W} + C_{kl}\Pi_k\Pi_l + D_k\Pi_k, \tag{4.7}
$$

onde N, $\vec{W}$, C_{kl} e D_k são dados por

$$
N = e\phi + \frac{1}{2}mc^2 h_{00} - \frac{1}{4}i\hbar\left(\dot{h}_{00} - \dot{h}\right), \tag{4.8}
$$

$$
\vec{W} = \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\vec{B} + -\frac{e\hbar}{4mc}\epsilon^{mkl}\epsilon_{jrk}\omega_{lr}B_j\hat{e}_m, \tag{4.9}
$$

$$
C_{kl} = \frac{1}{2m}\delta_{kl}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right) + \frac{1}{2m}\omega_{kl}, \tag{4.10}
$$

$$
D_k = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\partial_l\omega_{kl}\right) + \frac{1}{m}v'_k - \frac{\hbar}{4m}\sigma_m\epsilon^{mrl}\left(\partial_r\omega_{lk}\right). \tag{4.11}
$$

Vamos agora obter a equação de movimento para x_i

4.2.1 Equação de movimento para x_i

A equação de movimento para x_i é

$$
i\hbar\frac{dx_i}{dt} = [x_i, H], \tag{4.12}
$$

e como podemos observar, apenas os termos com C_{kl} e D_k não comutam com x_i. Assim temos

$$\begin{aligned}[x_i, H] &= [x_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l + D_k\Pi_k] \\ &= [x_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l] + [x_i, D_k\Pi_k] \,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como $D_k = \mathcal{O}(\hbar)$, temos $[x_i, D_k\Pi_k] = \mathcal{O}(\hbar^2)$. Como estamos interessados no limite $\hbar \to 0$, esses termos não contribuirão para o nosso resultado.

Nos resta então

$$[x_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l] = \frac{1}{2m}\left[\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\delta_{kl} + \omega_{kl}\right][x_i, \Pi_k\Pi_l] \,. \tag{4.14}$$

Usando a identidade

$$[x_i, \Pi_k\Pi_l] = [x_i, \Pi_k]\,\Pi_l + \Pi_k\,[x_i, \Pi_l] \,, \tag{4.15}$$

e o fato de que x_i comuta com o potencial vetor A_j, e portanto

$$[x_i, \Pi_j] = [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.16}$$

obtemos

$$\begin{aligned}[x_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l] &= \frac{1}{2m}\left[\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\delta_{kl} + \omega_{kl}\right][i\hbar\delta_{ik}\Pi_l + i\hbar\delta_{il}\Pi_k] \\ &= \frac{i\hbar}{m}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\delta_{kl} + h_{kl}\right](\delta_{ik}\Pi_l) \\ &= \frac{i\hbar}{m}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\Pi_i + h_{il}\Pi_l\right].\end{aligned} \tag{4.17}$$

Substituindo a equação (4.15) na equação de movimento (4.12), chegamos a

$$i\hbar\frac{dx_i}{dt} = \frac{i\hbar}{m}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\Pi_i + h_{il}\Pi_l\right], \tag{4.18}$$

que no limite $\hbar \to 0$, se torna

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\Pi_i + h_{il}\Pi_l\right], \tag{4.19}$$

que é a equação de movimento para x_i.

Podemos observar que no caso em que o campo gravitacional é nulo, a equação (4.19) se reduz à expressão (3.20), obtida da equação de Pauli usual, no capítulo 3.

O próximo passo será a obtenção da equação de movimento para p_i

4.2.2 Equação de movimento para p_i

A equação de movimento de Heisenberg para p_i é

$$i\hbar\frac{dp_i}{dt} = [p_i, H]\,, \tag{4.20}$$

e a partir dela podemos observar primeiramente que, como definidos em (4.9) e (4.11), $\vec{W} = \mathcal{O}(\hbar)$ e $D_k = \mathcal{O}(\hbar)$. Assim, temos $\left[p_i, \vec{W}\right] = \mathcal{O}(\hbar^2)$ e $[p_i, D_k] = \mathcal{O}(\hbar^2)$. Portanto, no cálculo da equação de movimento, esses termos podem ser omitidos, uma vez que não contribuirão no limite $\hbar \to 0$.

Então, o comutador da equação (4.20) fica simplesmente

$$[p_i, H] = [p_i, N] + [p_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l]\,. \tag{4.21}$$

Começando pelo primeiro termo do lado direito da equação (4.21), nós temos

$$[p_i, N] = -ie\hbar\partial_i\phi - \frac{i\hbar}{2}mc^2\left(\partial_i h_{00}\right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{4.22}$$

Para o segundo termo, usaremos a identidade

$$[p_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l] = [p_i, C_{kl}]\,\Pi_k\Pi_l + C_{kl}\,[p_i, \Pi_k]\,\Pi_l + C_{kl}\Pi_k\,[p_i, \Pi_l]\,. \tag{4.23}$$

Assim, o primeiro comutador do lado direito nos dá

$$[p_i, C_{kl}] = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right], \tag{4.24}$$

e o segundo nos dá

$$[p_i, \Pi_k] = \frac{ie\hbar}{c}(\partial_i A_k). \tag{4.25}$$

Substituindo as equações (4.24) e (4.25) na equação (4.23), temos

$$\begin{aligned} [p_i, C_{kl}\Pi_k\Pi_l] = &-\frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l \\ &+ \frac{ie\hbar}{c}C_{kl}(\partial_i A_k)\Pi_l + \frac{ie\hbar}{c}C_{kl}\Pi_k(\partial_i A_k). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Agora substituindo as equações (4.26) e (4.22) na equação (4.21), nós obtemos

$$\begin{aligned} [p_i, H] = &-i\hbar\left[e\partial_i\phi + \frac{mc^2}{2}\left(\partial_i h_{00}\right)\right] - \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l \\ &+ \frac{ie\hbar}{c}\left[C_{kl}(\partial_i A_k)\Pi_l + C_{kl}\Pi_k(\partial_i A_k)\right]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Assim, a equação de movimento de Heisenberg nos dá

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{dp_i}{dt} =& - i\hbar\left[e\partial_i\phi + \frac{mc^2}{2}\left(\partial_i h_{00}\right)\right] - \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l \\
&+ \frac{ie\hbar}{c}\left[C_{kl}(\partial_i A_k)\Pi_l + C_{kl}\Pi_k(\partial_i A_k)\right].
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

E finalmente, no limite $\hbar \to 0$, obtemos a equação de movimento para p_i, que é dada por

$$
\frac{dp_i}{dt} = eE_i - \frac{mc^2}{2}\left(\partial_i h_{00}\right) + \frac{2e}{c}C_{kl}(\partial_i A_k)\Pi_l - \frac{1}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l, \tag{4.29}
$$

onde $E_i = -\partial_i\phi$ é o campo elétrico.

Também aqui, podemos observar que no caso em que o campo gravitacional é nulo, a equação (4.29) se reduz à expressão (3.26), obtida da equação de Pauli usual no capítulo 3.

Como um passo adicional, vamos reescrever a ultima equação em termos somente de Π_i. Para isso, relembremos que $\Pi_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$, portanto

$$
\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\Pi_i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}. \tag{4.30}
$$

Na expressão anterior, podemos substituir o termo $\frac{dx_k}{dt}$ pela expressão (4.19), obtida anteriormente, assim a ultima equação se torna

$$
\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\Pi_i}{dt} + \frac{e}{mc}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\Pi_k + h_{kl}\Pi_l\right] + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}. \tag{4.31}
$$

Substituindo a equação (4.31) na equação (4.29) obtemos finalmente uma expressão somente em termos de Π_i, dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi_i}{dt} =& eE_i - \frac{mc}{2}(\partial_i h_{00}) - \frac{1}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l \\
&+ \frac{e}{mc}\left(\delta_{kl} + \frac{3}{4}\delta_{kl}h_{00} + h_{kl}\right)\Pi_k\epsilon_{ilj}B_j.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Uma característica relevante da equação (4.32) é que ela se reduz à expressão da força de Lorentz (3.30), obtida no capítulo 3, quando o campo gravitacional é nulo, i.e., $h_{00} = h_{jk} = 0$.

Partimos agora para a obtenção da equação de movimento para σ_i.

4.2.3 Equação de movimento para $\boldsymbol{\sigma_i}$

A equação de movimento de Heisenberg para σ_i é dada por

$$i\hbar\frac{d\sigma_i}{dt} = [\sigma_i, H]\,, \tag{4.33}$$

Como σ_i comuta com todos os termos do operador Hamiltoniano exceto aqueles que possuem σ_j, os únicos termos relevantes para a equação (4.33) serão $\vec{W}$ e o ultimo termo de D_k. Assim, o comutador do lado direito da equação anterior fica

$$[\sigma_i, H] = \left[\sigma_i, -\vec{\sigma}\cdot\vec{W} - \frac{\hbar}{4m}\sigma_m\epsilon^{mrl}\left(\partial_r\omega_{ln}\right)\Pi_n\right]. \tag{4.34}$$

Usando as relações de comutação (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}[\sigma_i, H] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k\Bigg\{&-\frac{e\hbar}{2mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)B_j - \frac{e\hbar}{4mc}\epsilon^{jml}\omega_{lr}\epsilon_{mrn}B_n \\ &+\frac{\hbar}{4m}\epsilon^{jml}\left(\partial_m\omega_{ln}\right)\Pi_n\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

A ultima equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}[\sigma_i, H] = &-\frac{ie\hbar}{mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{ie\hbar}{2mc}\epsilon_{ijk}\epsilon^{jml}\omega_{lr}\epsilon_{mrn}B_n\sigma_k \\ &+\frac{i\hbar}{2m}\epsilon_{ijk}\epsilon^{jml}\left(\partial_m\omega_{ln}\right)\Pi_n.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Usando a identidade

$$\epsilon^{jml}\epsilon_{mrn} = \delta^l_r\delta^j_n - \delta^l_n\delta^j_r, \tag{4.37}$$

podemos então reescrever a equação (4.36) sob a forma

$$\begin{aligned}[\sigma_i, H] = &-\frac{ie\hbar}{mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{ie\hbar}{2mc}\epsilon_{ijk}\omega_{lr}B_n\sigma_k\left(\delta^l_r\delta^j_n - \delta^l_n\delta^j_r\right) \\ &+\frac{i\hbar}{2m}\left(\delta^m_k\delta^l_i - \delta^m_i\delta^l_k\right)\left(\partial_m\omega_{ln}\right)\Pi_n.\end{aligned} \tag{4.38}$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}[\sigma_i, H] = &-\frac{ie\hbar}{mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{ie\hbar}{2mc}\epsilon_{ijk}\left(\omega_{rr}B_j - \omega_{lj}B_l\right)\sigma_k \\ &-\frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\partial_i\omega_{kn}\right) - \left(\partial_k\omega_{in}\right)\right]\Pi_n\sigma_k.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Substituindo a equação (4.39) na equação de movimento (4.33), chegamos então a

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d\sigma_i}{dt} =& -\frac{ie\hbar}{mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{ie\hbar}{2mc}\epsilon_{ijk}\left(\omega_{rr}B_j - \omega_{lj}B_l\right)\sigma_k \\ & - \frac{i\hbar}{2m}\left[(\partial_i\omega_{kn}) - (\partial_k\omega_{in})\right]\Pi_n\sigma_k. \end{aligned} \tag{4.40}$$

E finalmente, no limite $\hbar \to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i}{dt} =& -\frac{e}{mc}\left(1-\frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{e}{2mc}\epsilon_{ijk}\left(\omega_{rr}B_j - \omega_{lj}B_l\right)\sigma_k \\ & - \frac{1}{2m}\left[(\partial_i\omega_{kn}) - (\partial_k\omega_{in})\right]\Pi_n\sigma_k. \end{aligned} \tag{4.41}$$

De maneira similar às demais equações de movimento obtidas, podemos notar que no caso em que o campo gravitacional é nulo, a equação (4.41) se reduz à expressão (3.33), obtida da equação de Pauli usual no capítulo 3.

4.3 Equações de movimento com a métrica da onda gravitacional

Na seção anterior foram obtidas equações de movimento para uma perturbação gravitacional $h_{\mu\nu}$ arbitrária na métrica. Nesta seção especificamos a perturbação na métrica como sendo a de uma onda gravitacional se propagando no espaço plano.

Para o caso de uma onda gravitacional se propagando na direção x, como mostrado no capítulo 2, as únicas componentes diferentes de zero na perturbação gravitacional são

$$h_{yy} = -h_{zz} = -2\upsilon, \qquad h_{yz} = h_{zy} = 2u,$$

onde $\upsilon = \upsilon(ct - x)$ e $u = u(ct - x)$ são duas funções que descrevem cada uma um possível estado de polarização da onda gravitacional.

Para fins de simplicidade, e com o objetivo de comparar nossos resultados aos encontrados em [1] e [2], iremos considerar aqui apenas o estado de polarização υ, ou seja, faremos $u = 0$.

Dessa forma, alguns termos recorrentes em nossas equações

$$\upsilon'_k = -\frac{i\hbar}{4}(\partial_k h + \partial_j h_{jk}), \qquad \omega_{jk} = h_{00}\delta_{jk} + h_{jk},$$

dados pela equação (4.2), agora assumirão a forma

$$\omega_{kl} = 2\upsilon T_{kl}, \qquad \upsilon'_k = \frac{i\hbar}{2} T_{jk}(\partial_j \upsilon), \tag{4.42}$$

onde introduzimos a notação

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Estamos agora em condições de obter as equações de movimento.

4.3.1 Equação de movimento para x_i

A equação de movimento para x_i, definida pela expressão (4.19), é

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\left[\left(1 + \frac{3}{4}h_{00}\right)\Pi_i + h_{il}\Pi_l\right].$$

Introduzindo a métrica da onda gravitacional, nós obtemos

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(\delta_{il} + 2\upsilon T_{kl}\right)\Pi_l. \tag{4.44}$$

Essa equação é idêntica à encontrada em [1], dada por

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{1}{m}\left(\delta_{ab} + 2\upsilon T_{ab}\right)\left(p^b - \frac{e}{c}A^b\right), \tag{4.45}$$

uma vez que $\Pi_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$.

Podemos mencionar que o artigo [2] não apresenta uma equação de movimento para x_i

4.3.2 Equação de movimento para p_i

Temos para p_i a equação de movimento (4.29), dada por

$$\frac{dp_i}{dt} = eE_i - \frac{mc^2}{2}\left(\partial_i h_{00}\right) - \frac{1}{2m}\left[\frac{3}{4}\delta_{kl}(\partial_i h_{00}) + (\partial_i h_{kl})\right]\Pi_k\Pi_l + \frac{2e}{c}C_{kl}(\partial_i A_k)\Pi_l,$$

onde

$$C_{kl} = \frac{1}{2m}\delta_{kl}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right) + \frac{1}{2m}\omega_{kl}.$$

Introduzindo a métrica da onda gravitacional, obtemos

$$\frac{dp_i}{dt} = eE_i - \frac{1}{m}T_{kl}(\partial_i\upsilon)\Pi_k\Pi_l - \frac{e}{mc}\left(\delta_{kl} + 2\upsilon T_{kl}\right)\Pi_k(\partial_i A_l). \tag{4.46}$$

A equação análoga encontrada em [1] é

$$\begin{aligned}\frac{dp_a}{dt} =& -\frac{1}{m}T_{bc}(\partial_a \upsilon)\left(p_b - \frac{e}{c}A_b\right)\left(p_c - \frac{e}{c}A_c\right)\\ &-\frac{e}{mc}\left(\delta_{bc} + 2\upsilon T_{bc}\right)\left(p_b - \frac{e}{c}A_b\right)(\partial_a A_c).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Tais equações diferem apenas no termo do campo elétrico, que não é considerado em [1].

Da mesma forma que para x_i, também não é apresentada uma equação de movimento para p_i no artigo [2].

4.3.3 Equação de movimento para $\boldsymbol{\sigma_i}$

A equação de movimento para σ_i é dada na equação (4.41) por

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_i}{dt} =& -\frac{e}{mc}\left(1 - \frac{1}{4}h_{00}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{e}{2mc}\epsilon_{ijk}\left(\omega_{rr}B_j - \omega_{lj}B_l\right)\sigma_k\\ &-\frac{1}{2m}\left[(\partial_i\omega_{kn}) - (\partial_k\omega_{in})\right]\Pi_n\sigma_k.\end{aligned}$$

Introduzindo a métrica da onda gravitacional obtemos

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = -\frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{e}{mc}\upsilon\epsilon_{ijk}T_{lj}B_l\sigma_k - \frac{1}{m}\left[(T_{kn}\partial_i\upsilon) - (T_{in}\partial_k\upsilon)\right]\Pi_n\sigma_k. \tag{4.48}$$

Essa equação difere de sua contraparte encontrada em [1], dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_a}{dt} =& -\frac{e}{mc}\epsilon_{abc}B_b\sigma_c - \frac{2e}{mc}\upsilon\epsilon_{abc}\left(\epsilon_{bde}\partial_d T_{ef}A_f\right)\sigma_c\\ &-\frac{1}{m}\left(p_d - \frac{e}{c}A_d\right)\sigma_e\left[(T_{ed}\partial_a\upsilon) - (T_{ad}\partial_e\upsilon)\right],\end{aligned} \tag{4.49}$$

no segundo termo do lado direito, que é o termo que J. Q. Quach, no artigo [2], afirma ser não-físico, e consequência de um erro.

A equação de movimento para σ_i encontrada em [2] é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_i}{dt} =& \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\sigma_k\epsilon_{jlm}\left[(\partial_l A_m) + \upsilon T_{nm}(\partial_l A_n) - \upsilon T_{nm}(\partial_n A_l)\right]\\ &-\frac{1}{m}(p_j - eA_j)\left[T_{kj}(\partial_i\upsilon) - T_{ij}(\partial_k\upsilon)\right].\end{aligned} \tag{4.50}$$

Tal equação parece, a princípio, diferente da nossa (4.48). Por isso vamos tentar reescrevê-la de outra maneira. Primeiramente temos

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_i}{dt} =& \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}\partial_l A_m)\sigma_k + \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\sigma_k \upsilon \epsilon_{jlm} T_{nm}\left[(\partial_l A_n) - (\partial_n A_l)\right] \\ &- \frac{1}{m}\left(p_j - eA_j\right)\left[T_{kj}(\partial_i \upsilon) - T_{ij}(\partial_k \upsilon)\right].\end{aligned} \tag{4.51}$$

onde

$$(\partial_l A_n) - (\partial_n A_l) = F_{ln} = -F_{nl} = -\epsilon_{nlr} B_r. \tag{4.52}$$

Substituindo a equação (4.52) na equação (4.51) chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_i}{dt} =& \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}\partial_l A_m)\sigma_k - \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\sigma_k \upsilon \epsilon_{jlm} T_{nm}\epsilon_{nlr} B_r \\ &- \frac{1}{m}\left(p_j - eA_j\right)\left[T_{kj}(\partial_i \upsilon) - T_{ij}(\partial_k \upsilon)\right].\end{aligned} \tag{4.53}$$

Agora podemos usar a identidade

$$\epsilon_{mjl}\epsilon_{lrn} = \delta_{mr}\delta_{jn} - \delta_{mn}\delta_{jr}, \tag{4.54}$$

para obter

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_i}{dt} =& \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}\partial_l A_m)\sigma_k - \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\sigma_k \upsilon\left(T_{jr}B_r - T_{mm}B_j\right) \\ &- \frac{1}{m}\left(p_j - eA_j\right)\left[T_{kj}(\partial_i \upsilon) - T_{ij}(\partial_k \upsilon)\right].\end{aligned} \tag{4.55}$$

Como o traço $T_{mm} = 0$, obtemos então (restaurando as potências de c)

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k - \frac{e}{mc}\upsilon\epsilon_{ijk}T_{lj}B_l\sigma_k - \frac{1}{m}\left[(T_{kn}\partial_i\upsilon) - (T_{in}\partial_k\upsilon)\right]\Pi_n\sigma_k. \tag{4.56}$$

onde percebemos que ela só difere da nossa equação no sinal do primeiro termo, que não possui contribuições gravitacionais. Esse termo é o encontrado para a equação de Pauli no espaço-tempo plano no capítulo 3, e o sinal encontrado é o mesmo que o da nossa equação (4.48).

4.4 Equações de movimento para a métrica de Schwarzschild

De maneira similar ao que foi feito na seção anterior, nesta seção especificamos a perturbação na métrica, dessa vez sendo a do limite Newtoniano da métrica de Schwarzschild.

Nesse caso, como mostrado no capítulo 2, em coordenadas isotrópicas as componentes diferentes de zero na perturbação gravitacional são

$$h_{00} = h_{xx} = h_{yy} = h_{zz} = -\frac{2\Phi}{c^2}, \tag{4.57}$$

onde usamos a notação introduzida no capítulo 2, $\Phi = \frac{GM}{r}$, para o potencial gravitacional Newtoniano.

Assim, os termos ω_{kl} e v'_k que aparecem em nessas equações podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \omega_{kl} =& -\frac{4\Phi}{c^2}\delta_{kl}, \\ v'_k =& \frac{5i\hbar}{2c^2}(\partial_k \Phi), \end{aligned} \tag{4.58}$$

Podemos agora obter as equações de movimento.

4.4.1 Equação de movimento para x_i

A nossa equação de movimento para x_i no caso do limite Newtoniano da métrica de Schwarzschild fica

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{7\Phi}{2c^2}\right)\Pi_i \tag{4.59}$$

4.4.2 Equação de movimento para p_i

Para p_i obtemos

$$\frac{dp_i}{dt} = -eE_i + m(\partial_i\Phi) + \frac{7}{4mc^2}(\partial_i\Phi)\vec{\Pi}^2 + \frac{e}{mc}\left(1 - \frac{7}{4c^2}\Phi\right)(\partial_i A_l)\Pi_l \tag{4.60}$$

4.4.3 Equação de movimento para σ_i

Para σ_i a equação com o limite newtoniano da métrica de Schwarzschild fica

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = -\frac{e}{mc}\left(1 + \frac{\Phi}{2c^2}\right)\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k + \frac{4e}{mc^3}\Phi\epsilon_{ijk}B_j\sigma_k + \frac{2}{mc}\left[(\partial_i\Phi)\Pi_k\sigma_k - (\partial_k\Phi)\Pi_i\sigma_k\right] \tag{4.61}$$

Considerações finais

A partir da equação de Pauli em um campo gravitacional fraco, conseguimos obter equações de movimento para x_i, p_i e σ_i em termos de uma perturbação gravitacional $h_{\mu\nu}$ arbitrária. A obtenção de nossas equações foi feita sem nenhuma consideração prévia acerca da forma de $h_{\mu\nu}$, o que consiste um resultado inédito, até onde sabemos.

Ao especificar a forma de $h_{\mu\nu}$ em nossas equações gerais, conseguimos comparar os nossos resultados com os resultados presentes em [1] e [2], sendo que nossas equações reproduzem perfeitamente os resultados encontrados via dois métodos diferentes em [2]. Acreditamos que esse fato indica que nossas equações podem estar corretas, pois além disso, elas reproduzem as equações para o espaço-tempo plano no caso em que o campo gravitacional é nulo.

Além disso, nossas equações possibilitaram a obtenção da equação de Pauli para o limite Newtoniano da métrica de Schwarzschild.

Nossos resultados possibilitam também explorar as interações de partículas de spin-1/2 com campo eletromagnético juntamente com um campo gravitacional fraco. Elucidado, por exemplo, a possibilidade de se amplificar efeitos gravitacionais através de um campo magnético suficientemente intenso.

Bibliografia

[1] B. Gonçalves, Y. N. Obukhov, and I. L. Shapiro, "Exact Foldy-Wouthuysen transformation for gravitational waves and magnetic field background," *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 124023, Jun 2007.

[2] J. Q. Quach, "Foldy-Wouthuysen transformation of the generalized Dirac Hamiltonian in a gravitational-wave background," *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 084047, Oct 2015.

[3] A. J. Silenko and O. V. Teryaev, "Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field," *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 064016, Mar 2005.

[4] I. L. Shapiro, *A Primer in Tensor Analysis and Relativity.* Springer, NY, 2019.

[5] I. L. Shapiro, "Covariant derivative of fermions and all that," *arXiv:1611.02263*, 2016.

[6] I. L. Shapiro and I. L. Buchbinder, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity.* Oxford University Press, Oxford, 2021.

[7] L. A. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[8] S. W. de Paulo Oliveira, "Obtenção da Equação de Pauli com a Presença de um Campo Gravitacional Fraco," Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2022.

[9] B. Gonçalves, "Transformação de Foldy-Woulthuytsen exata para campo de Dirac interagindo com uma onda gravitacional," Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2007.

[10] D. Soares, "De Schwarzschild a Newton," *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, 00 2020.

[11] B. Schutz, *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, 2 ed., 2009.

[12] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*. Butterworth-Heinemann, 2 ed., 1982.