Samuel Oliveira de Almeida

Soluções para problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Brasil

Abril de 2013

Samuel Oliveira de Almeida

Soluções para problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - (UFJF)

Brasil

Abril de 2013

Samuel Oliveira de Almeida
Soluções para problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev/ Samuel Oliveira de Almeida. – Brasil, Abril de 2013-
69 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - (UFJF)

Dissertação – Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação, Abril de 2013.

1. Problema do tipo Ambrosetti-Prodi. 2. Expoente crítico de Sobolev. 3. Problema Neumann. 4. Fronteira mista. 5. Métodos variacionais.

CDU 02:141:005.7

Samuel Oliveira de Almeida

Soluções para problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Trabalho aprovado. Brasil, 24 de novembro de 2012:

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - (UFJF)
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasil
Abril de 2013

Dedico este trabalho a meu pai Silvério, minha mãe Maria de Lourdes, meus irmãos Sonimar, Selmar e Cristiano, meus sobrinhos Sara, Luana, Ana Clara, Arthur e a minha noiva Monalisa.

AMO VOCÊS.

Agradecimentos

À Deus, por permitir mais essa conquista.

Aos meus familiares e a minha noiva Monalisa, que sempre me deram amor e força para poder continuar, valorizando meus potenciais.

Ao meu orientador, professor Fábio Rodrigues Pereira, pela atenção e dedicação com que me orientou.

À coordenação do mestrado em matemática da UFJF juntamente com todos os professores do programa.

À professora Flaviana Andréa Ribeiro por me incentivar a continuar os estudos.

Aos professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Ederson Moreira dos Santos por terem aceito o convite para participar da minha Banca.

Aos meus amigos de mestrado, pelas proveitosas discussões e pela ótima companhia.

À todos meus amigos, que souberam entender o motivo de minha ausência.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções para problemas elípticos envolvendo o expoente crítico de Sobolev.

Primeiramente, investigamos a existência de soluções para um problema superlinear do tipo Ambrosetti-Prodi com ressonância em λ_1, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Além disso, estudamos resultados de multiplicidade para uma classe de equações elípticas críticas relacionadas com o problema de Brézis-Nirenberg, com condição de contorno de Neumann sobre a bola.

Palavras-chave: Problema do tipo Ambrosetti-Prodi, expoente crítico de Sobolev, problema Neumann, fronteira mista, métodos variacionais.

Abstract

In this work we study the existence of solutions for elliptic problems involving critical Sobolev exponent.

Firstly we investigate the existence of solutions for an Ambrosetti-Prodi type superlinear problem with resonance at λ_1 , where λ_1 is the first eigenvalue of $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Besides, we study multiplicity results for a class of critical elliptic equations related to the Brézis-Nirenberg problem with Neumann boundary condition on a ball.

Key Words: Ambrosetti-Prodi type problem; critical Sobolev exponent, Neumann problem, mixed boundary, variational methods.

Lista de ilustrações

Índice de notações

Ω é um domínio limitado no $\mathbb{R}^n$.

$\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω.

$\partial\Omega$ é a fronteira de Ω.

A^c o complemetar do conjunto A.

$med\ A$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é continuamente k vezes diferenciável}\}$.

$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); supp(u) \text{ é compacto}\}$.

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < \infty\}$.

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\langle u, v\rangle_2 = \int_\Omega uv\ dx,\ \forall u, v \in L^2(\Omega)$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\}$.

$\|u\|_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$.

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ denota o completamento do espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $1 \leq p < N$, com $N \geq 2$.

$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

$\Delta u = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

$\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada normal exterior a $\partial\Omega$.

q.t.p   quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$X \hookrightarrow Y$ imersão contínua de X em Y.

$u^{+} = \max\{0, u\}$ parte positiva de u.

$u^{-} = \min\{0, u\}$ parte negativa de u.

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$, significa que $\exists\ C \in \mathbb{R}$ talque $|f(x)| \leq C|g(x)|,\ \forall x$ suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$, significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

$B_r(a)$ Bola de centro em a e raio r.

Sumário

1 Introdução

Métodos Variacionais é uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares. A ideia central é a formulação de um problema variacional equivalente, em certo sentido, ao problema de equação diferencial. O problema variacional consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional I associado, tal que a equação de Euler-Lagrange seja o problema proposto.

É interessante observar, que o problema de minimização de funcionais é o objetivo central do Cálculo das Variações Clássico, e que em seu estudo, equações diferenciais aparecem de modo natural como condições suficientes que a função que minimiza o funcional deve satisfazer. Assim, no Cálculo das Variações Clássico, a questão de minimização de um funcional é reduzida ao estudo de um problema na teoria das Equações Diferenciais.

O Método Direto do Cálculo das Variações surgiu em meados do século XIX, e consiste em estudar diretamente o funcional e procurar obter seu mínimo (ou um ponto crítico) sem fazer apelo à sua equação diferencial.

Neste trabalho aplicamos o Método Direto para encontrar soluções de equações diferenciais parciais. Dividiremos este trabalho em 4 Capítulos.

No Capítulo 1, tratatamos de uma breve introdução histórica dos problemas trabalhados nesta dissertação.

No Capítulo 2, apresentaremos o problema de autovalor para o operador Laplaciano e alguns resultados relacionados a Análise Funcional. Estes resultados fornecerão uma base teórica para os capítulos posteriores.

Nos Capítulo 3 e 4 (baseados em [18] e [16] respectivamente), consideramos dois problemas com não-linearidade envolvendo o expoente crítico de Sobolev. A principal dificuldade em lidar com esse tipo de problema é que a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, não é compacta.

O objetivo deste trabalho é usar versões mais gerais em espaços de dimensão infinita de Teoremas do Cálculo Diferencial bem conhecidos pelos alunos dos cursos básicos de graduação, a saber: o Teorema da Função Implícita e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, e provar resultados de existência de soluções para equações elípticas envolvendo o expoente crítico de Sobolev.

O Capítulo 3 trata-se de um dos problemas encontrados no artigo "*Critical Superlinear Ambrosetti-Prodi Problems*" de D.G. de Figueiredo e Y. Jianfu [18] e considera o seguinte problema ressonante e crítico.

$$(FJ) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + u_+^{2^*-1} + f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $2^* = \dfrac{2N}{(N-2)}$, com $N \geq 3$ é o expoente crítico de Sobolev, λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1)$ e $u_+ = \max\{u, 0\}$ é a parte positiva de u.

Os autores mostraram que se $\|f\|_2$ é suficientemente pequena, o problema (FJ) possui pelo menos uma solução não-trivial. Entre as técnicas utilizadas nas provas dos resultados, destaca-se a de minimização utilizando o Teorema da Função Implícita.

Esse problema pertence a uma classe que é conhecida como problemas do tipo Ambrosetti-Prodi. Problemas desse tipo surgiram a partir da década de 70, quando A. Ambrosetti e G. Prodi estudaram uma classe de problemas dados por

$$(AP) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) + f(x) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, e caracteriza-se por determinar funções f, de modo que a equação (AP) tenha ou não solução. No trabalho "*On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach Spaces*" de A. Ambrosetti e G. Prodi [5], os autores consideraram a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo de classe C^2, satisfazendo $g''(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $0 < \lim\limits_{s \to -\infty} g'(s) < \lambda_1 < \lim\limits_{s \to +\infty} g'(s) < \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 são o primeiro e segundo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Eles provaram a existência de uma variedade fechada e conexa M em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ de classe C^1 que divide o espaço em dois conjuntos disjuntos abertos S_1 e S_2 de maneira que:

(I) Se $f \in S_1$, o problema (AP) não tem solução.

(II) Se $f \in M$, o problema (AP) tem solução única.

(III) Se $f \in S_2$, o problema (AP) tem exatamente duas soluções.

Posteriormente, M. S. Berger e E. Podolak [7] deram uma grande contribuição no estudo desses problemas, dando uma estrutura cartesiana para a variedade M em espaços de Hilbert. Eles decompuseram as funções $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ na forma $f = t\varphi_1 + f_1$, onde φ_1 é uma autofunção normalizada em L^2 associada ao autovalor λ_1 e $f_1 \in (span\ \varphi_1)^\perp$ (no sentido L^2) e reescreveram o problema (AP) na seguinte forma:

$$(BP) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) + t\varphi_1 + f_1(x) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, para cada f_1 com a propriedade acima, os autores mostraram a existência de um número real $r = r(f_1)$ tal que:

(a) Se $t > r$, o problema (BP) não tem solução (isto é, $f \in S_1$).

(b) Se $t = r$, o problema (BP) tem solução única (isto é, $f \in M$).

(c) Se $t < r$, o problema (BP) tem exatamente duas soluções (isto é $f \in S_2$).

O problema (AP) leva o nome de ressonante quando um dos limites

$$g_- = \lim_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} \quad \text{ou} \quad g_+ = \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s},$$

é igual a um autovalor, em nosso caso, $g_- = \lambda_1$.

Gostaria de remeter ao leitor, a uma referência recente sobre o problema do tipo Ambrosetti-Prodi, feito por F.O. de Paiva e M. Montenegro no trabalho "An Ambrosetti-Prodi type result for quasilinear Neumann problem", ver [20]. Os autores estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) + t \text{ em } \Omega, \\ |\nabla u|\dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com $\partial\Omega$ suave, t um parâmetro real e f está relacionada as condições de Ambrosetti-Prodi.

Eles provaram que existe t_0 de modo que o problema acima não possui solução se $t > t_0$. Se $t \leq t_0$ existe pelo menos uma solução minima, e se $t < 0$ existem, pelo menos duas soluções distintas.

O Capítulo 4 é baseado no trabalho de C. Comte - M. Knapp [16], e trata do seguinte problema elíptico crítico com condição de Neumann na fronteira:

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda u & \text{em B}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial\text{B}, \end{cases}$$

onde B é uma bola unitária em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p = \dfrac{N+2}{N-2}$. O teorema principal desse capítulo mostra que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o problema (P_2) possui infinitas soluções.

Em [16], os autores também garantiram que para cada domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^3$, simétrico com respeito a um plano, existe uma constante $\mu > 0$ de modo que para cada $\lambda < \mu$ esse problema possui pelo menos uma solução não trivial. Para o caso subcrítico $\left(\text{quando } p < \dfrac{N+2}{N-2}\right)$, este problema foi estudado por Lin-Ni [26] e Lin-Ni-Takagi [27]. Quando Ω é uma bola, soluções radialmente simétricas foram obtidas por Ni [30] para o caso $p < \dfrac{N+2}{N-2}$ e por Adimurthi-Yadava [4], Budd-Knapp-Peletier [12] e Knapp [24] para $p = \dfrac{N+2}{N-2}$. Problemas envolvendo expoente crítico de Sobolev podem ser visto com mais detalhes no livro [35]

É importante notar que para esse tipo de problema, resultados distintos são obtidos se trocarmos a condição de Neumann pela condição de Dirichlet, isto é, se substituirmos

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ por } \ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

A identidade de Pohozaev (ver apêndice B, Teorema B.5) nos diz, que se Ω é um domínio estrelado, então não existe solução se $\lambda \leq 0$ (ver [31]). Para o problema de Neumann, a identidade de Pohozaev torna-se

$$\int\limits_{\Omega} u^2 \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{N-2}{N} |u|^{\frac{2N}{N-2}} + \lambda u^2 - |\nabla u|^2 \right) (x, n) \, dx$$

e assim, não podemos garantir a não existência de solução para esse caso como para o problema de Dirichlet. Outras questões de existência de soluções para equações elípticas envolvendo condições de Neumann são tratadas em [1] e [13].

A técnica utilizada ao longo deste capítulo, é a técnica de minimização via Teorema de Multiplicadores de Lagrange.

2 Resultados Preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados utilizados neste trabalho.

2.1 Operador de Laplace

Um pouco da História

No Cálculo Diferencial, o operador de Laplace ou Laplaciano, é um operador diferencial elíptico de segunda ordem denotado por Δ. O operador recebeu esse nome em reconhecimento a Pierre Simon Laplace que estudou soluções de equações diferenciais parciais nas quais aparece esse tipo de operador.

Aplicações do Laplaciano

Em Física, o Laplaciano aparece em vários contextos como a teoria do potencial, propagação de ondas, condução de calor, distribuição de tensões em um sólido deformável, mas de todas essas situações destaca-se também na eletrostática e na mecânica quântica. Em eletrostática, o operador de Laplace aparece na equação de Laplace e na equação de Poisson, enquanto na mecânica quântica o Laplaciano da função de onda de uma partícula fornece a energia cinética do mesmo. Em matemática, as funções em que o Laplaciano se anula em um determinado domínio, são chamadas funções harmônicas. Estas funções têm importância excepcional na teoria de funções complexas.

O Problema de Autovalor para o Laplaciano (ver [8])

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. O problema de autovalor para o Laplaciano consiste em encontrar os valores λ tais que

$$(L) \qquad -\Delta u = \lambda u \qquad \in \Omega,$$

admite soluções não triviais, com a condição de fronteira de Dirichlet ou Neumann.

O problema é tradicionalmente escrito nesta forma, com o sinal negativo multiplicando o Laplaciano, porque assim todos os autovalores são não-negativos. No caso do problema de Dirichlet, este fato segue imediatamente do princípio do máximo (ver apêndice C). Por outro lado, zero é um autovalor no problema de Neumann, pois as funções constantes são autofunções associadas a este.

O Espectro do Laplaciano (ver [8])

Para o problema de Dirichlet, o espaço natural para aplicar o método variacional é $H_0^1(\Omega)$, enquanto que para o problema de Neumann trabalharemos em $H^1(\Omega)$. Examinaremos primeiro o problema de autovalor do Laplaciano para condição de fronteira de Dirichlet.

Teorema 2.1 *(ver [8])*
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor

$$-\Delta u \;=\; \lambda u \quad em \quad \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots \quad tais\ que \quad \lambda_j \rightarrow \; +\infty$$

e as autofunções $\{\varphi_j\}$ constituem um sistema ortogonal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad para\ todo \quad v \in L^2(\Omega).$$

Em particular

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Além disso para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$\|\nabla v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2 .$$

A versão do teorema acima para o problema de autovalor do Laplaciano para condição de fronteira de Neumann, garante que os autovalores possuem o seguinte comportamento.

$$0 = \widetilde{\lambda_0} \leq \widetilde{\lambda_1} \leq \widetilde{\lambda_2} \leq \ldots \leq \widetilde{\lambda_j} \leq \ldots \quad tais\ que \quad \widetilde{\lambda_j} \rightarrow \; +\infty$$

e as autofunções $\{\psi_j\}$ que satisfazem $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$ constituem um sistema ortogonal completo para $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.2 *(ver [8])*
Seja Ω um conjunto aberto limitado e conexo. Então o problema de autovalor

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda_1 u \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

possui uma solução positiva $\varphi_1 > 0$ (primeira autofunção) em Ω. Além disso, qualquer outra autofunção associada a λ_1 é múltipla de φ_1.

2.2 Resultados da Análise Funcional

Apresentaremos agora resultados importantes da Análise Funcional que nos auxiliarão nos Capítulos 3 e 4.

Definição 2.3 *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$; Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f|^p dx\right]^{1/p}.$$

Definição 2.4 *Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ quase sempre em } \Omega.\}$$

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| < C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Definição 2.5 (Espaço de Sobolev)

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \le m\},$$

onde $D^\alpha u$ é definida pela seguinte relação:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para $1 \le p < \infty$ definiremos a seguinte norma, $\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Tomando $m = 1$ e $p = 2$ temos que, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ e a seguinte norma equivalente $\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 2.6 (Rellich-Kondrashov) *(ver [29])*

Seja Ω um domínio limitado e aberto, com fronteira suave em $I\!R^N$. Então as seguintes imersões são compactas:

(a) $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *para* $p < N$ *e* $1 \le q < p^* := \frac{Np}{N-p}$;

(b) $W^{1,N}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *para* $1 \le q < \infty$ *(aqui temos $p = N$);*

(c) $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ *para* $p > N$.

Teorema 2.7 (Desigualdade de Hölder) *(ver [29])*

Sejam $1 < p < \infty$ *e* $1 < q < \infty$, *tais que,* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Teorema 2.8 *(ver [29])*

Suponha que $\Omega \subset I\!R^N (N \geq 1)$ *é um conjunto limitado e* $1 \leq p \leq q$. *Se* $u \in L^q(\Omega)$, *então* $u \in L^p(\Omega)$, *além disso, a imersão* $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *é contínua.*

Teorema 2.9 *(ver [29])*

Seja $\Omega \subset I\!R^n$ *um domínio limitado e aberto, com fronteira suave. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

(a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}$, *para* $1 \leq p < N$, *onde* $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$;

(b) $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q < \infty$ *(aqui nós temos* $p = N$*);*

(c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *para* $p > n$.
No caso $p = N$ *não é verdade em geral que* $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Exemplo 2.10 *Seja* $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset I\!R^2$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ *e* $u(x) = \log(\log \frac{2}{r})$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$. *Então* $u \in H^1(\Omega)$, *porém* $u \notin L^\infty(\Omega)$ *(ver[8], exemplo 7, página 173).*

Teorema 2.11 (Desigualdade de Poincaré) *(ver [29]) Sejam* Ω *um domínio aberto e limitado de* $I\!R^N$ *e* $p \in [1, \infty]$. *Então existe uma constante* $C = C(\Omega, p) > 0$, *tal que, para todo* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *temos* $\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$.

Lema 2.12 (Brézis-Lieb) *(ver [36])*

Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ *subconjunto aberto e* $f_n \subset L^p(\Omega)$ *em que* $1 \leq p < \infty$. *Suponhamos que*

(i) (f_n) *seja limitada em* $L^p(\Omega)$ *e*

(ii) $f_n \to f$ *q.t.p em* Ω.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p \right] = \|f\|_p^p.$$

3 Solução para um Problema Ressonante do tipo Ambrosetti-Prodi

3.1 Apresentação do Problema

Neste capítulo mostraremos alguns dos resultados provados por D.G de Figueiredo e Y. Jianfu (ver [18]). O problema estudado, trata-se de uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem com ressonância em λ_1 e condição de Dirichlet homogênea na fronteira, envolvendo o expoente crítico de Sobolev. Utilizando Métodos Variacionais e versões mais gerais de Teoremas do Cálculo Diferencial, garantimos a existência de pelo menos uma solução para o seguinte problema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \lambda_1 u + u_+^{2^*-1} + f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ com $N \geq 3$, é o expoente crítico de Sobolev, λ_1 é o primeiro autovalor associado a $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Dada uma função $f \in L^2(\Omega)$ não nula, uma condição necessária para a solubilidade do problema (3.1) é que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\int_\Omega f\varphi_1 \, dx < 0, \tag{3.2}$$

onde φ_1 é a primeira autofunção associada ao autovalor λ_1.

De fato, essa condição é facilmente verificada, pois se multiplicarmos (3.1) por φ_1 e integrarmos, obtemos que

$$\int_\Omega f\varphi_1 \, dx = -\int_\Omega u_+^{2^*-1}\varphi_1 \, dx < 0,$$

e temos o resultado desejado.

Abaixo enunciaremos o Teorema principal deste Capítulo que estabelece pelo menos uma solução para o problema (3.1)

Teorema 3.1 *Suponha que a condição (3.2) seja satisfeita, e que $\|f\|_2$ seja suficientemente pequena (satisfazendo a condição (3.17) que será obtida posteriormente), então o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não nula.*

A fim de encontrar uma solução para esse problema inicial, buscaremos pontos críticos para o seguinte funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (3.1), $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2]\ dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega fu\ dx.$$

De agora em diante, denotaremos o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, por E e consideraremos a sua decomposição em soma direta da seguinte forma: $u \in E = E^- \oplus E^+$, onde $E^- = span\{\varphi_1\}$ e $E^+ = (E^-)^\perp$.

Assim para cada $u \in E = E^- \oplus E^+$, existe um $t \in \mathbb{R}$ e $v \in E^+$ de modo que $u = t\varphi_1 + v$. Portanto, substituindo essa decomposição no Funcional I, obtemos que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla(t\varphi_1 + v)|^2 - \lambda_1(t\varphi_1 + v)^2]\ dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega f(v + t\varphi_1)dx.$$

Observemos que a primeira integral pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\int_\Omega [|\nabla(t\varphi_1 + v)|^2 - \lambda_1(t\varphi_1 + v)^2]\ dx &= t^2\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\ dx + 2t\int_\Omega \nabla\varphi_1\nabla v\ dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\ dx \\ &- t^2\lambda_1\int_\Omega \varphi_1^2\ dx - 2t\lambda_1\int_\Omega \varphi_1 v\ dx - \lambda_1\int_\Omega v^2\ dx,\end{aligned}$$

e utilizando o fato de $\varphi_1 \perp v$ em $L^2(\Omega)$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega [|(\nabla t\varphi_1 + v)|^2 - \lambda_1(t\varphi_1 + v)^2]\ dx &= t^2\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\ dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\ dx \\ &- t^2\lambda_1\int_\Omega \varphi_1^2\ dx - \lambda_1\int_\Omega v^2\ dx,\end{aligned}$$

agora usando o fato de que $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, e as Fórmulas de Green (ver apêndice A, Teorema A.4),

$$\int_\Omega [|\nabla(t\varphi_1 + v)|^2 - \lambda_1(t\varphi_1 + v)^2]\ dx = \int_\Omega |\nabla v|^2\ dx - \lambda_1\int_\Omega v^2\ dx.$$

Desta forma o funcional I associado a (3.1) pode ser reescrito como

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2]\ dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega f(v + t\varphi_1)dx,$$

onde $u = v + t\varphi_1$ e $t = \int_\Omega u\varphi_1\ dx$.

3.2 Resultados Auxiliares

Feitas estas considerações iniciais, enunciaremos e provaremos alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2 *Seja* $\{\varphi_j\}$ *a sequência das autofunções ortonormais em* $L^2(\Omega)$ *do problema* (L), *sob as condições de contorno de Dirichlet, associadas aos autovalores* λ_j *de maneira que para algum* $k \in \mathbb{N}$ *tenhamos* $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$. *Definindo* $H_0^1 = W \oplus X$, *onde* $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$ *e* $X = W^\perp = \overline{[\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, ...]}$, *desta forma temos as seguintes estimativas:*

(i) $\|u\|^2_{H_0^1} \leq \lambda_k \|u\|^2_{L^2}, \forall\ u \in W.$

(ii) $\|u\|^2_{H_0^1} \geq \lambda_{k+1} \|u\|^2_{L^2}, \forall\ u \in X.$

Demonstração: Mostremos o item (i). Seja $u \in W$, logo existem constantes reais $\xi_{i's}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i$. Usando a integração por partes e o fato de φ_i ser autofunção associada ao autovalor λ_i do problema (L) com $\int_\Omega \varphi_i \varphi_j dx = 0$ para $i \neq j$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega -\Delta u\ u\ dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i(-\Delta \varphi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \lambda_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \leq \lambda_k \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \\
&= \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx = \lambda_k \int_\Omega u^2 dx = \lambda_k \|u\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

De modo semelhante mostra-se o item (ii). ∎

Lema 3.3 *Para cada* $v \in E^+$ *fixo, existe uma constante* C *tal que* $I(w + v) \leq C$, *para todo* $w \in E^-$. *Em outras palavras, para cada* $v \in E^+$ *fixo, o funcional* I *é limitado superiormente em* E^-.

Demonstração: Fixado $v \in E^+$, defina a função de valores reais.

$$
g(t) = I(v + t\varphi_1) \tag{3.3}
$$

Dividiremos a prova em dois casos:

- Para $t < 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2} \int_\Omega [|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2]\ dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega f(v + t\varphi_1)\ dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_\Omega [|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2]\ dx - \int_\Omega fv\ dx - t \int_\Omega f\varphi_1\ dx.
\end{aligned}
$$

Agora, como $\int\limits_{\Omega} f\varphi_1 \, dx < 0$, pela desigualdade de Hölder, segue que:

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2] \, dx + \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \\ &= C_1 \ \text{(constante, já que } v \text{ e } f \text{ estão fixos).} \end{aligned}$$

• Para $t > 0$ afirmamos que:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2^*}\int\limits_{\Omega}(v + t\varphi_1)_+^{2^*} \, dx + \int\limits_{\Omega} f(v + t\varphi_1) \, dx\right\} = \infty. \tag{3.4}$$

Provando essa afirmação, concluimos a prova do lema, pois:

Por (3.4), $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = -\infty$, assim existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que se $t > t_0$ então $g(t) < 0$. Para $t \in [0, t_0]$ utilizamos a continuidade de $g(t)$, que garante a existência de uma constante $C_2 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) \leq C_2$ para todo $t \in [0, t_0]$. Tomando $K = \max\{C_1, C_2\}$ concluímos que $g(t) \leq K$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Prova da afirmação (3.4).

Seja $a = \max\{\varphi_1(x) : x \in \Omega\}$, tomemos $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ de modo que $\varphi_1(x) > \frac{a}{2}$ para todo $x \in \Omega_0$. Pelo Teorema de Lusin (ver apêndice A, Teorema A.8), dado $\delta > 0$ (escolha $\delta = \frac{med\ \Omega_0}{2}$), existe uma função contínua $h(x)$ em Ω_0 de modo que para $H = \{x; h(x) \neq v(x)\}$, temos que a $med\ H < \delta$. Assim, $G = \{x; h(x) = v(x)\}$ possui medida maior que $\frac{med\ \Omega_0}{2}$. De fato, $\Omega_0 = H\dot{\cup}G$, assim $med\ \Omega_0 = med\ G + med\ H$, e segue que

$$med\ G = med\ \Omega_0 - med\ H > med\ \Omega_0 - \frac{med\ \Omega_0}{2} = \frac{med\ \Omega_0}{2}.$$

Como G é um conjunto compacto, defina $M = \sup\{|v(x)|;\ x \in G\}$. Assim, para $x \in G$ temos que se $t \geq t_0 := \frac{4M}{a}$, então

$$\varphi_1(x) + \frac{v(x)}{t} \geq \frac{a}{2} - \frac{M}{t} \geq \frac{a}{4}.$$

Portanto, existe uma constante positiva $\eta = \left(\frac{a}{4}\right)^{2^*}\frac{med\ \Omega_0}{2}$ de modo que

$$\int\limits_{\Omega}\left(\varphi_1 + \frac{v}{t}\right)_+^{2^*} dx \geq \int\limits_{G}\left(\varphi_1 + \frac{v}{t}\right)_+^{2^*} dx \geq \int\limits_{G}\left(\frac{a}{4}\right)^{2^*} dx, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0.$$

Agora, como o crescimento da segunda integral de (3.4) é linear em t, e observando que

$$\frac{1}{2^*}\int\limits_{\Omega}(v + t\varphi_1)_+^{2^*} dx = \frac{1}{2^*}\int\limits_{\Omega}\left(t\left(\varphi_1 + \frac{v}{t}\right)\right)_+^{2^*} dx = \frac{t^{2^*}}{2^*}\int\limits_{\Omega}\left(\varphi_1 + \frac{v}{t}\right)_+^{2^*} dx \geq \frac{t^{2^*}}{2^*}\eta = Ct^{2^*}$$

que vai para $+\infty$, quando $t \to +\infty$, obtemos o resultado. ■

Teorema 3.4 *Para cada $v \in E^+$ fixo, existe um único $t(v)$ de forma que*

$$g(t(v)) = máx\{g(t); t \in \mathbb{R}\}. \tag{3.5}$$

Demonstração: Temos que

$$g(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2]\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*}\, dx - \int_\Omega f(v + t\varphi_1)\, dx,$$

assim, derivando em relação ao parâmetro real t, obtemos

$$g'(t) = -\int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1\, dx - \int_\Omega f\varphi_1\, dx, \tag{3.6}$$

derivando g', segue que:

$$g''(t) = -(2^* - 1)\int_\Omega (v + t\varphi_1)_+^{2^*-2}\varphi_1^2\, dx.$$

Desta forma, obtemos que $g''(t) \leq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto $g(t)$ é côncava. Logo $g(t)$ possui máximo.

Gostaríamos de mostrar que o conjunto de pontos onde $g(t)$ assume o máximo é um conjunto unitário. A concavidade de $g(t)$ nos diz que esse conjunto ainda pode ser um intervalo, então basta mostrar que em um ponto de máximo t_0, $g''(t_0)$ não pode ser 0, assim, t_0 é isolado e portanto único.

De fato, se $g''(t_0) = 0$ então teríamos que $-\int_\Omega (t_0\varphi_1 + v)_+^{2^*-2}\varphi_1^2\, dx = 0$, assim, $(t_0\varphi_1 + v)_+ = 0$, e por (3.6), segue que

$$0 = g'(t_0) = -\int_\Omega f\varphi_1\, dx,$$

o que é uma contradição com (3.2). Então g é estritamente côncava em t_0, e assim obtemos que dado $v \in E^+$, podemos associar um único ponto de máximo $t(v)$, e a aplicação $v \in E^+ \to t(v) \in \mathbb{R}$, está bem definida. ∎

Agora, como consequência do Teorema da Função Implícita Global a aplicação

$$v \in E^+ \to t(v) \in \mathbb{R}$$

é diferenciável. Portanto

$$g(t) \leq g(t(v)), \ \forall t \neq t(v)$$

e assim

$$I(t\varphi_1 + v) \leq I(t(v)\varphi_1 + v), \ \text{se } t \neq t(v). \tag{3.7}$$

Por (3.6), como $g'(t(v)) = 0$, obtemos que,

$$\int_\Omega (v + t(v)\varphi_1)^{2^*-1}\varphi_1\, dx + \int_\Omega f\varphi_1\, dx = 0, \forall v \in E^+ \tag{3.8}$$

assim, para $v = 0 \in E^+$, $g'(t(0))$ nos garante que:

$$\int_\Omega (t(0)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 dx = -\int_\Omega f\varphi_1 \; dx \tag{3.9}$$

e a função $g(t)$ neste caso é:

$$g(t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega (t\varphi_1)_+^{2^*} dx - t\int_\Omega f\varphi_1 \;\; dx. \tag{3.10}$$

Isso mostra que $t(0)$ tem que ser maior que 0.
De fato, se $t(0) \leq 0$, por (3.9), segue que $\int_\Omega f\varphi_1 \, dx = 0$, o que é um absurdo, logo $t(0) > 0$.

Desta forma, a relação (3.9) pode ser reescrita como

$$t(0)^{2^*-1}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} dx = -\int_\Omega f\varphi_1 dx. \tag{3.11}$$

O nosso próximo passo é mostrar que o funcional $F : E^+ \to \mathbb{R}$ dado por $F(v) = I(v + t(v)\varphi_1)$ possui um mínimo no interior de certa bola B_ρ centrada na origem. Para isso, introduziremos agora notações e provaremos algumas estimativas, que serão úteis na demostração do próximo lema.
Sejam

$$A := -\int_\Omega f\varphi_1 dx \quad \text{e} \quad B := \int_\Omega \varphi_1^{2^*} dx \tag{3.12}$$

Afirmamos que

$$F(0) = \left(\frac{N+2}{2N}\right)\frac{A^{\frac{2N}{N+2}}}{B^{\frac{N-2}{N+2}}}. \tag{3.13}$$

De fato, por (3.11), usando as notações (3.12) acima, obtemos

$$t(0)^{2^*-1} = \frac{A}{B}, \quad \text{então} \quad t(0) = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(0) &= I(0 + t(0)\varphi_1) \\ &= -\frac{1}{2^*}\int_\Omega (t(0)\varphi_1)_+^{2^*} \; dx - t(0)\int_\Omega f\varphi_1 \; dx \\ &= -\frac{t(0)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} \; dx - t(0)\int_\Omega f\varphi_1 \; dx \\ &= -t(0)\left[\frac{t(0)^{2^*-1}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} \; dx + \int_\Omega f\varphi_1 \; dx\right]. \end{aligned}$$

Pela equação (3.11), temos que

$$\begin{aligned} F(0) &= -t(0)\left[-\frac{1}{2^*}\int_\Omega f\varphi_1 \; dx + \int_\Omega f\varphi_1 \; dx\right] \\ &= -t(0)\left(\frac{2^*-1}{2^*}\right)\int_\Omega f\varphi_1 \; dx, \end{aligned}$$

e segue de (3.12), que

$$\begin{aligned} F(0) &= t(0)\left(\frac{2^*-1}{2^*}\right)A \\ &= t(0)\left(\frac{N+2}{2N}\right)A. \end{aligned}$$

Por (3.11) e pelo fato de $t(0) = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} F(0) &= \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\frac{2N}{N-2}-1}}\left(\frac{N+2}{2N}\right)A \\ &= \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N-2}{N+2}}A\left(\frac{N+2}{2N}\right) \\ &= \left(\frac{N+2}{2N}\right)\frac{A^{\frac{2N}{N+2}}}{B^{\frac{N-2}{N+2}}}, \end{aligned}$$

então, nossa afirmação está provada.

Nosso objetivo agora é estimar

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2]dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + t(v)\varphi_1)_+^{2^*}dx - \int_\Omega f(v + t(v)\varphi_1)dx. \tag{3.14}$$

Sejam

$$M_1 =: \frac{1}{N+1}\lambda_2^{-\frac{N}{4}}S^{\frac{N}{4}}\left(\frac{N}{N+2}\right)^{\frac{N-2}{4}}(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{N+2}{4}}, \tag{3.15}$$

$$M_2 =: min\left\{\left(\frac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}}S^{\frac{N+2}{4}},\quad \left(\frac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}}\|\varphi_1\|_{2^*}\left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)S\right]^{\frac{N+2}{4}}\right\}, \tag{3.16}$$

onde S é a melhor constante de Sobolev.

No próximo Lema, além de (3.2), vamos supor que f satisfaz:

$$\|f\|_2 \le M_1 \quad \text{e} \quad -\int_\Omega f\varphi_1 dx < M_2. \tag{3.17}$$

Lema 3.5 *Suponhamos (3.2) e (3.17), então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$F(v) \ge \alpha > F(0), \tag{3.18}$$

desde que $\|v\|_E = \rho_0$, onde $\rho_0 = \left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{N-2}{4}}S^{\frac{N}{4}}$.

Demonstração:
Segue de (3.6) e da desigualdade abaixo, (ver Lema 3.2, para $k=1$)

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \ge \lambda_2 \int_\Omega v^2 dx, \quad \text{para todo} \quad v \in E^+,$$

que

$$\begin{array}{rcl} F(v) & = & I(v+t(v)\varphi_1) = g(t(v)) =: \max\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t) \geq g(0) = I(v) \\ & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda_1 v^2)dx - \dfrac{1}{2^*}\int_\Omega v_+^{2^*} dx - \int_\Omega fv\ dx \\ & \geq & \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \dfrac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*} dx - \|f\|_2 \|v\|_2 . \end{array} \tag{3.19}$$

Logo, usando a desigualdade de Sobolev e (3.19), obtemos que:

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\rho^2 - \frac{1}{2^*} S^{-\frac{N}{N-2}} \rho^{2^*} - \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\rho, \tag{3.20}$$

onde $\rho = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Agora, considere a função real de valores reais, com a, b e c constantes positivas.

$$k(\rho) =: \frac{1}{2}a\rho^2 - \frac{1}{2^*}b\rho^{2^*} - c\rho := \rho j(\rho), \quad \text{onde} \quad j(\rho) = \frac{1}{2}a\rho - \frac{1}{2^*}b\rho^{2^*-1} - c.$$

O ponto máximo ρ_0 de $j(\rho)$ em $\mathbb{R}_+$ satisfaz

$$j'(\rho_0) = \frac{1}{2}a - \left(\frac{2^*-1}{2^*}\right) b\rho_0^{2^*-2} = 0.$$

Desta forma, obtemos que

$$\rho_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2^*}{2^*-1}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Como

$$\frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{N+2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^*-2} = \frac{N-2}{4},$$

temos que

$$\rho_0 = \left[\left(\frac{N}{N+2}\right)\frac{a}{b}\right]^{\frac{N-2}{4}}.$$

Portanto

$$\begin{array}{rcl} k(\rho_0) & = & \rho_0 j(\rho_0) \\ & = & \rho_0 \left[\dfrac{1}{2}a\rho_0 - \dfrac{1}{2^*}b\rho_0^{2^*-1} - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[\dfrac{1}{2}a\left[\dfrac{a}{b}\dfrac{N}{N+2}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \left(\dfrac{N-2}{2N}\right) b \left(\left[\dfrac{a}{b}\dfrac{N}{N+2}\right]^{\frac{N-2}{4}}\right)^{\frac{N+2}{N-2}} - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[\dfrac{1}{2}aa^{\frac{N-2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \left(\dfrac{N-2}{2N}\right) ba^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N+2}{4}} - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[\dfrac{1}{2}a^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}} - \left(\dfrac{N-2}{2N}\right) ba^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right] - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[a^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{(N-2)}{2N}b\dfrac{N}{b(N+2)}\right) - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[\left(\dfrac{(N+2)-(N-2)}{2(N+2)}\right) a^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}} - c\right] \\ & = & \rho_0 \left[\left(\dfrac{2}{N+2}\right) a^{\frac{N+2}{4}}\left[\dfrac{N}{b(N+2)}\right]^{\frac{N-2}{4}} - c\right], \end{array}$$

assim,

$$\rho_0 j(\rho_0) = k(\rho_0) = \rho_0 \left[\frac{2}{N+2} \left(\frac{N}{(N+2)b} \right)^{\frac{N-2}{4}} a^{\frac{N+2}{4}} - c \right]. \tag{3.21}$$

Usando $a = 1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $b = S^{-\frac{N}{N-2}}$ e $c = \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}}$ em (3.21), obtemos que

$$F(v) \geq k(\rho_0) = \rho_0 \left[\frac{2}{N+2} \left(\frac{N}{(N+2)S^{\frac{-N}{N-2}}} \right)^{\frac{N-2}{4}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}} - \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \right],$$

a qual podemos reescrever da seguinte forma,

$$\begin{aligned} F(v) \quad &\geq \quad \rho_0 \left[\frac{1}{N+2} \left(\frac{N}{(N+2)S^{\frac{-N}{N-2}}} \right)^{\frac{N-2}{4}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}} \right. \\ &\quad + \left. \frac{1}{N+2} \left(\frac{N}{(N+2)S^{\frac{-N}{N-2}}} \right)^{\frac{N-2}{4}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}} - \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Seja

$$\Psi =: \frac{1}{N+2} \left(\frac{N}{(N+2)S^{\frac{-N}{N-2}}} \right)^{\frac{N-2}{4}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}} - \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Mostraremos que $\Psi \geq 0$. De fato

$$\begin{aligned} \Psi \quad &= \quad \frac{1}{N+2} \left(\frac{N}{N+2} \right)^{\frac{N}{N+2}} \left[S^{\frac{N}{N-2}} \right]^{\frac{N-2}{4}} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^{\frac{N+2}{4}}}{\lambda_2^{\frac{N+2}{4}}} - \|f\|_2 \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \\ &= \quad \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{N+2} \lambda_2^{-\frac{N}{4}} \left(\frac{N}{N+2} \right)^{\frac{N-2}{4}} (\lambda_2 - \lambda_1)^{\frac{N+2}{4}} - \|f\|_2 \right]. \end{aligned}$$

Por (3.15) e (3.17) , temos

$$\Psi = \lambda_2^{-\frac{1}{2}} \left[M_1 - \|f\|_2 \right] \geq 0,$$

e concluímos que

$$F(v) \geq \frac{\rho_0}{N+2} \left[\frac{N}{(N+2)b} \right]^{\frac{N-2}{4}} a^{\frac{N+2}{4}} \quad \text{com} \quad \|v\|_E = \rho_0. \tag{3.22}$$

Afirmamos agora que por (3.22) e (3.17), $F(v) > F(0)$, quando $\|v\|_E = \rho_0$.

Prova da afirmação:

De fato, lembremos que $F(0) = \left(\dfrac{N+2}{2N}\right) \dfrac{A^{\frac{2N}{N+2}}}{B^{\frac{N-2}{N+2}}}$, onde $\rho_0 = \left[\dfrac{N}{N+2} \left(1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \right]^{\frac{N-2}{4}} S^{\frac{N}{4}}$, $A := -\displaystyle\int_\Omega f\varphi_1 dx$ e $B := \displaystyle\int_\Omega \varphi_1^{2^*} dx$. Portanto podemos reescrever $F(0)$ da seguinte forma:

$$F(0) = \left(\frac{N+2}{2N} \right) \frac{\left(-\displaystyle\int_\Omega f\varphi_1 \, dx \right)^{\frac{2N}{N+2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^{2^*} \, dx \right)^{\frac{N-2}{N+2}}},$$

e portanto, por (3.17) obtemos

$$F(0) < \left(\frac{N+2}{2N}\right) \frac{M_2^{\frac{2N}{N+2}}}{\left(\int\limits_\Omega \varphi_1^{2^*}\, dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}}}.$$

Pela definição de M_2 temos

$$\begin{aligned} F(0) &< \left(\frac{N+2}{2N}\right) \frac{\left[\left(\frac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi_1\|_{2^*} \left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) S\right]^{\frac{N+2}{4}}\right]^{\frac{2N}{N+2}}}{\left(\int\limits_\Omega \varphi_1^{2^*}\, dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}}} \\ &= \left(\frac{N+2}{2N}\right) \frac{\left[\left(\frac{2}{N+2}\right)\left(\int\limits_\Omega \varphi_1^{2^*}\, dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}} \left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) S\right]^{\frac{N}{2}}\right]}{\left(\int\limits_\Omega \varphi_1^{2^*}\, dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}}}. \end{aligned}$$

Desta forma

$$\begin{aligned} F(0) &< \left(\frac{N+2}{2N}\right)\left[\left(\frac{2}{N+2}\right)\left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) S\right]^{\frac{N}{2}}\right] \\ &= \left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{N-2}{4}} S^{\frac{N}{4}} \left[\left(\frac{2}{N+2}\right)\left(\frac{N+2}{2N}\right)\left(\frac{N}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{4}}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}} S^{\frac{N}{4}}\right] \\ &= \frac{\rho_0}{N+2}\left[\frac{N}{N+2}\right]^{\frac{N-2}{4}} S^{\frac{N}{4}} \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{N+2}{4}}. \end{aligned}$$

Como, $a = 1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ e $b = S^{\frac{-N}{N-2}}$, concluimos por (3.22) que

$$F(0) < \frac{\rho_0}{N+2}\left[\frac{N}{(N+2)b}\right]^{\frac{N-2}{4}} a^{\frac{N+2}{4}} \leq F(v), \quad \text{desde de que} \quad \|v\|_E = \rho_0.$$

Logo, a demonstração está completa. ∎

Lema 3.6 *Suponhamos (3.17) então*

$$F(0) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.23}$$

Demonstração:

$$F(0) = \left(\frac{N+2}{2N}\right)\frac{A^{\frac{2N}{N+2}}}{B^{\frac{N-2}{N+2}}} = \left(\frac{N+2}{2N}\right)\frac{\left(-\int\limits_\Omega f\varphi_1\, dx\right)^{\frac{2N}{N+2}}}{\|\varphi_1\|_{2^*}^{\frac{2N}{N+2}}} < \left(\frac{N+2}{2N}\right)\frac{M_2^{\frac{2N}{N+2}}}{\|\varphi_1\|_{2^*}^{\frac{2N}{N+2}}}.$$

Agora analisaremos as duas possibilidades para M_2, (apresentadas em (3.16)).

(i) Se $M_2 = \left(\dfrac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi_1\|_{2^*} \left[\dfrac{N}{N+2}\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)S\right]^{\frac{N+2}{4}}$, segue que

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{N+2}{2N}\frac{1}{\|\varphi_1\|_{2^*}^{\frac{2N}{N+2}}}\left(\frac{2}{N+2}\right)\|\varphi_1\|_{2^*}^{\frac{2N}{N+2}}\left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{N+2}{4}\frac{2N}{N+2}} S^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{N}\left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\right]^{\frac{N}{2}} S^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, como $\lambda_1 < \lambda_2$, temos que $F(0) < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

(ii) Se $M_2 = \left(\dfrac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}} S^{\frac{N+2}{4}}$, por (3.16) temos que

$$M_2 \le \left(\frac{2}{N+2}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi_1\|_{2^*} \left[\frac{N}{N+2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)S\right]^{\frac{N+2}{4}},$$

e segue o resultado analogamente ao primeiro caso. ∎

3.3 Prova do Teorema Principal do Capítulo

Como F é limitado inferiormente em B_{ρ_0}, seja $m =: \inf\{F(v) : v \in B_{\rho_0}\}$, nosso objetivo é mostrar que:

$$m := min\{F(v) : v \in B_{\rho_0}\}. \tag{3.24}$$

Teorema 3.1 *Sob as hipóteses (3.2) e (3.17), o problema (3.1) tem pelo menos uma solução não trivial* $v_0 \in B_{\rho_0}$.

Demonstração: Por (3.23), temos que

$$m \le F(0) < \frac{1}{N}S^{N/2}. \tag{3.25}$$

Seja $\{v_n\}$ uma sequência minimizante de (3.24). Como $\|v_n\|_E \le \rho_0$, podemos assumir que

$$\begin{aligned} &v_n \to v_0 \text{ fracamente em E}, \\ &v_n \to v_0 \text{ em } L^q(\Omega),\ 2 \le q < 2^*, \\ &v_n \to v_0 \text{ q.t.p em } \Omega, \end{aligned} \tag{3.26}$$

quando $n \to \infty$.

A continuidade fraca da norma nos garante que

$$\|v_0\|_E \le \varliminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E \le \rho_0, \quad \text{assim} \quad v_0 \in B_{\rho_0}. \tag{3.27}$$

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice A, Teorema A.3), podemos assumir que

$$F(v_n) \to m,\ F'(v_n) \to 0,\ \text{quando } n \to \infty. \tag{3.28}$$

Devido,

$$F'(v_n) \to 0 \Leftrightarrow I'(v_n + t(v_n)\varphi_1) \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \tag{3.29}$$

temos que,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda_1 v_n^2)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n + t(v_n)\varphi_1)_+^{2^*} dx - \int_\Omega f(v_n + t(v_n)\varphi_1)dx = m + o(1) \tag{3.30}$$

e

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda_1 v_n^2)dx - \int_\Omega (v_n + t(v_n)\varphi_1)_+^{2^*-1} v_n dx - \int_\Omega f v_n \, dx = o(1). \tag{3.31}$$

Agora, utilizando a convergência fraca, verificaremos que v_0 satisfaz a seguinte equação no sentido fraco.

$$-\Delta v = \lambda_1 v + (v + t(v)\varphi_1)_+^{2^*-1} + f. \tag{3.32}$$

Com efeito, passando o limite fraco em

$$F'(v_n)\varphi = \int_\Omega (\nabla v_n \nabla \varphi - \lambda_1 v_n \varphi) \, dx - \int_\Omega (v_n + t(v_n)\varphi_1)_+^{2^*-1} \varphi \, dx - \int_\Omega f\varphi \, dx = o(1),$$

$\forall \varphi \in E$, temos que:

$$\int_\Omega (\nabla v_0 \nabla \varphi - \lambda_1 v_0 \varphi) \, dx - \int_\Omega (v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*-1} \varphi \, dx - \int_\Omega f\varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in E$$

e segue o resultado.
Multiplicando (3.32) por φ_1 e integrando em Ω,

$$\int_\Omega [-(\Delta v_0)\varphi_1 - \lambda_1 v_0 \varphi_1 - (v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 - f\varphi_1)]dx = 0, \tag{3.33}$$

usando que $-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$, obtemos

$$\int_\Omega [(v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 + f\varphi_1]dx = 0. \tag{3.34}$$

A demonstração estará completa se pudermos mostrar que $v_0 \not\equiv 0$.
Primeiro afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} t(v_n) = t(v_0). \tag{3.35}$$

Caso contrário, teríamos $\lim_{n\to\infty} t(v_n) = t_1 \neq t(v_0)$. Pelas equações (3.6) e (3.34), como $t(v_n)$ são pontos de máximo, segue que:

$$\int_\Omega [(v_n + t(v_n)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 \, dx = -\int_\Omega f\varphi_1 \, dx = \int_\Omega [(v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 \, dx,$$

passando o limite, quando $n \to \infty$

$$\int_\Omega [(v_0 + t_1\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 \, dx = \int_\Omega [(v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*-1}\varphi_1 \, dx.$$

Logo $t_1 = t(v_0)$, o que é uma contradição.

Agora seja $w_n = v_n - v_0$. Por (3.30),

$$m + o(1) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda_1 v_n^2)\ dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n + t(v_n)\varphi_1)_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega f(v_n + t(v_n)\varphi_1)\ dx.$$

Pelo Lema 2.12 (Brézis-Lieb),

$$\begin{aligned} m + o(1) &= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla v_0|^2\ dx + \int_\Omega |\nabla w_n|^2\ dx\right] - \frac{\lambda_1}{2}\left[\int_\Omega v_0^2\ dx + \int_\Omega w_n^2\ dx\right] \\ &- \frac{1}{2^*}\left[\int_\Omega (v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*}\ dx + \int_\Omega (v_n + t(v_n)\varphi_1)_+ - (v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*}\ dx\right] \\ &- \int_\Omega f(v_n + t(v_n)\varphi_1)\ dx + o(1), \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} m + o(1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega [(v_n - v_0)_+ + (t(v_n)\varphi_1 - t(v_0)\varphi_1)_+]^{2^*}\ dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx - \frac{\lambda_1}{2}\left[\int_\Omega v_0^2 dx + \int_\Omega w_n^2 dx\right] \\ &- \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_0 + t(v_0)\varphi_1)_+^{2^*}\ dx - \int_\Omega f(v_n + t(v_n)\varphi_1)\ dx + o(1). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda_1 v_0^2) dx \\ - &\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_0 + t(v_0)\varphi_1)^{2^*} dx - \int_\Omega f(v_0 + t(v_0)\varphi_1) dx = m + o(1), \end{aligned} \tag{3.36}$$

ou seja,

$$F(v_0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} dx = m + o(1). \tag{3.37}$$

Similarmente, por (3.31), (3.34) e pelo Lema de Brézis - Lieb, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx &- \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} dx - \int_\Omega (v_0 + t(v_0)\varphi_1)^{2^*} dx \\ &+ \int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda_1 v_0^2) dx - \int_\Omega f(v_0 + t(v_0)\varphi_1) dx = o(1), \end{aligned}$$

assim,

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \ - \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} dx = o(1). \tag{3.38}$$

Observe que $\int_\Omega (w_n)_+^{2^*}\ dx$ é limitada, pois $w_n = v_n - v_0 \in H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$, isto é,

$$\|w_n\|_{2^*} = \|v_n - v_0\|_{2^*} \le C\|v_n - v_0\|_{H_0^1} \le k, \text{ já que, } v_n - v_0 \rightharpoonup 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Se $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx = +\infty$, temos um absurdo por (3.38) e pela observação acima.

Logo, seja $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx = k \geq 0$. Temos dois casos a considerar:
(i) Se $k = 0$, é claro.
(ii) Se $k > 0$, sabemos pela desigualdade de Sobolev que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx = \|w_n\|_E^2 \geq S \left(\int_\Omega (w_n)^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \geq S \left(\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} dx \right)^{2/2^*}. \tag{3.39}$$

Tomando o limite em (3.38) e em (3.39), obtemos

$$k \geq S k^{(N-2)/N}, \quad \text{isto é}, \quad k \geq S^{N/2}. \tag{3.40}$$

Assim, por (3.38),

$$\begin{aligned} m + o(1) &= F(v_0) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} \, dx \\ &= F(v_0) + \frac{1}{2} \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} \, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} \, dx + o(1) \\ &= F(v_0) + \frac{1}{N} \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} \, dx + o(1). \end{aligned}$$

Passando o limite quando $n \to \infty$, por (3.38) e (3.40) temos que:

$$m = F(v_0) + \frac{1}{N} K \geq F(v_0) + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Por outro lado, por (3.25), $m < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, consequentemente, $\frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} > F(v_0) + \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, e desta forma, $F(v_0) < 0$.

Agora podemos concluir que $v_0 \not\equiv 0$. De fato, se $v_0 \equiv 0$, então, por (3.13)

$$F(v_0) = F(0) = \left(\frac{N+2}{2N} \right) \frac{A^{\frac{2N}{N+2}}}{B^{\frac{N-2}{N+2}}} > 0, \quad \text{o que é um absurdo.}$$

Por outro lado, $v_0 \in \mathrm{int} B_{\rho_0}$, pois se $v \in \partial B_{\rho_0}$ então $\|v_0\|_E = \rho_0$. Como $F(v) \geq \alpha > 0$ se $\|v\|_E = \rho_0$, temos que $F(v_0) > 0$, o que é uma contradição. Desta forma, a demonstração está completa.

■

4 Infinitas Soluções para um Problema Crítico com a Condição de Neumann na Fronteira

4.1 Apresentação do Problema

Neste capítulo, mostraremos alguns dos resultados provados por M. Comte e M. Knaap (ver [16]). O problema estudado, trata-se de uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem com condições de Neumann homogênea, envolvendo o expoente crítico de Sobolev. Utilizamos a técnica de minimização via Teorema de Multiplicadores de Lagrange para obtermos soluções para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda u & \text{em } \ B, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde B é uma bola unitária em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p = \dfrac{N+2}{N-2}$.

Para resolver o problema acima, precisaremos primeiramente encontrar uma solução positiva para o seguinte problema auxiliar:

$$(P_m) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{em } A_m, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_{0,m}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{1,m}, \end{cases}$$

definido em um setor angular da bola B com condições de fronteira mista. A fronteira deste setor é formada por duas partes planas que denotaremos por $\Gamma_{0,m}$ e por uma parte curva denotada por $\Gamma_{1,m}$. Assim, o setor angular é uma "fatia de pizza", que posteriormente será definida formalmente. Feito isso, utilizaremos um argumento de "colagem" de soluções para estender a solução desse problema auxiliar para o problema definido na bola B.

Assim, como no capítulo anterior, também precisaremos de estimativas que envolvem a constante ótima de Sobolev, que é bem típico para problemas críticos.

O teorema principal do capítulo é:

Teorema 4.1 *Se $N \geq 4$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe uma infinidade de soluções para o problema (4.1).*

Porém, antes de mostrá-lo, apresentaremos algumas notações e resutados que nos auxiliarão na prova.

Por conveniência, nós moveremos o centro da bola unitária para o ponto $(0, ..., 0, 1)$ de modo que a origem esteja na fronteira ∂B.

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N; x_1^2 + ... + x_{N-1}^2 + (x_N - 1)^2 < 1\}. \tag{4.2}$$

Em seguida dividiremos a bola B em setores angulares da seguinte forma:
para $m = 1, 2, ...$ definimos o setor angular A_m por

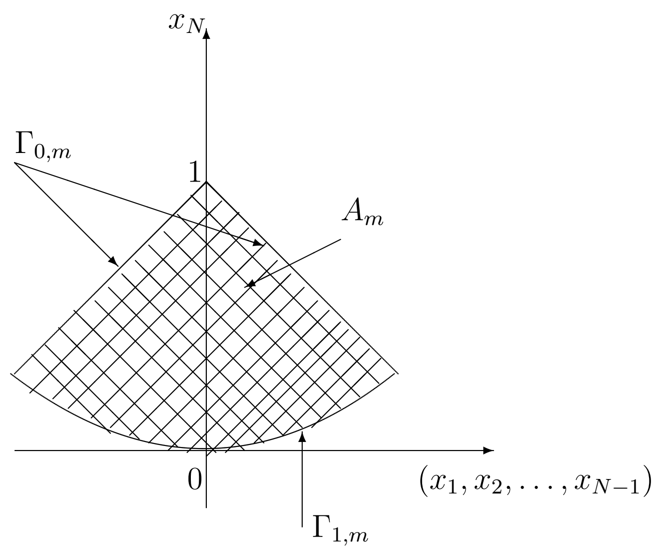
$$A_m = \left\{x \in B; cos\left(\frac{\pi}{2^m}\right) \|(x_1, x_2, ..., x_{N-1})\|_2 < sin\left(\frac{\pi}{2^m}\right)(1 - x_N)\right\}. \tag{4.3}$$

O ângulo entre dois planos limites é chamado o ângulo do setor.

Observe que A_1 é a metade da bola (com o setor angular de π), A_2 é um quarto da bola (com o setor angular de $\pi/2$) e A_3 é um oitavo da bola (com o setor angular de $\pi/4$), e assim sucessivamente.

Abaixo, representamos o setor angular A_m definido anteriormente.

Figura 1 – Setor angular A_m



Fonte: Comte-Knaap [16]

Aqui $\Gamma_{0,m} = \partial A_m \backslash \partial \mathrm{B}$ e $\Gamma_{1,m} = \partial A_m \cap \partial \mathrm{B}$.

Usando as notações acima, consideramos o problema elíptico auxiliar com as seguintes condições de contorno mista.

$$(P_m) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{em } A_m, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 & \text{em } A_m, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_{0,m}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{1,m}. \end{cases}$$

Como dito anteriormente, a ideia é "colar" as soluções deste sistema auxiliar, a fim de se obter uma solução para a equação (4.1).

Apresentaremos a seguir, alguns resultados de grande importância que serão utilizados posteriormente.

Sejam ψ_m e μ_m sendo respectivamente a primeira autofunção e o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta \psi = \lambda \psi & \text{em } A_m, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma_{0,m}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{1,m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Esse problema é bem conhecido e sabe-se que seus autovalores $\mu_m \to +\infty$, quando $m \to +\infty$ ver [15] e [33]. Esta informação será extremamente útil na prova do Teorema principal do capítulo (Teorema 4.1).

4.2 Solução para o Problema Auxiliar

Para mostrarmos o Teorema principal deste capítulo, necessitamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Se $N \geq 4$, para todo $\lambda < \mu_m$, existe pelo menos uma solução positiva para o problema (P_m).*

Antes de provarmos o Teorema acima, mostraremos um resultado de não existência.

Teorema 4.3 *Se $\lambda \geq \mu_m$ então o problema (P_m) não possui solução positiva.*

Demonstração: De fato, obtemos esse resultado multiplicando a equação $-\Delta u = u^p + \lambda u$ pela primeira autofunção ψ_m e depois integrando sobre o conjunto A_m, Assim, segue que

$$-\int_{A_m} \Delta u \psi_m \, dx = \int_{A_m} u^p \psi_m \, dx + \int_{A_m} \lambda u \psi_m \, dx.$$

Utilizando as fórmulas de Green, (ver apêndice A, Teorema A.4), segue que

$$\int_{A_m} \nabla u \nabla \psi_m \, dx - \int_{\partial A_m} \psi_m \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds = \int_{A_m} u^p \psi_m \, dx + \int_{A_m} \lambda u \psi_m \, dx.$$

Como

$$\int_{\partial A_m} \psi_m \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds = \int_{\partial \Gamma_{0,m}} \psi_m \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds + \int_{\partial \Gamma_{1,m}} \psi_m \frac{\partial u}{\partial \eta} \, ds,$$

e usando o fato de $\psi_m = 0$ sobre $\Gamma_{0,m}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre $\Gamma_{1,m}$ obtemos que

$$\int_{A_m} \nabla u \nabla \psi_m \, dx = \int_{A_m} u^p \psi_m \, dx + \int_{A_m} \lambda u \psi_m \, dx.$$

ψ_m é solução para o problema (4.4), então $-\displaystyle\int_{A_m} \Delta \psi_m u \, dx = \int_{A_m} \lambda u \psi_m \, dx$, usando novamente a fórmula de Green segue que $\displaystyle\int_{A_m} \nabla u \nabla \psi_m \, dx = \int_{A_m} \lambda u \psi_m \, dx$ e portanto concluímos que $\displaystyle\int_{A_m} u^p \psi_m \, dx = 0$, o que é uma contradição, pois ψ_m é contínua e estritamente positiva, logo u não poderia ser positiva. ■

Lembremos que nosso objetivo nesse momento é encontrar uma solução positiva para o problema (P_m), quando $\lambda < \mu_m$. Para isso, o próximo lema será de suma importância, pois com ele, conseguiremos garantir certas propriedades referentes a compacidade.

Lema 4.4 *Se $N \geq 4$ e $\lambda < \mu_m$, então*

$$0 \leq C_\lambda < \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}, \tag{4.5}$$

onde

$$C_\lambda = \inf_{u \in V(A_m)} \{ \|\nabla u\|_{2,A_m}^2 - \lambda \|u\|_{2,A_m}^2 \}, \tag{4.6}$$

$$V(A_m) = \{ u \in H^1(A_m); u = 0 \text{ sobre } \Gamma_{0,m} \text{ e } \|u\|_{p+1,A_m} = 1 \} \tag{4.7}$$

e

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}}, \tag{4.8}$$

é a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$.

A prova desta estimativa é extensa, então a dividiremos em dois lemas. O Lema 4.5 será utilizado para provar que o nível C_λ é não negativo, enquanto que o Lema 4.7 garantem que C_λ é limitado superiormente por uma constante que depende somente da constante ótima de Sobolev S.

Lema 4.5 .
(i) *Se $\lambda' < \lambda''$ então $C_{\lambda'} \geq C_{\lambda''}$.*
(ii) *Se $\lambda < \mu_m$ então $C_\lambda \geq 0$.*

Demonstração: (i) Como $\lambda' < \lambda''$

$$\int_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \lambda' \int_{A_m} |u|^2 \, dx \geq \int_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \lambda'' \int_{A_m} |u|^2 dx,$$

para todo $u \in V(A_m)$, tomando o ínfimo sobre o conjunto $V(A_m)$, obtemos que $C_{\lambda'} \geq C_{\lambda''}$.
(ii) Note que

$$C_{\mu_m} = \inf_{u \in V(A_m)} \left\{ \int_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \mu_m \int_{A_m} |u|^2 \, dx \right\}, \text{ e } \int_{A_m} |\nabla u|^2 dx \geq \mu_m \int_{A_m} |u|^2 \, dx$$

para todo u, então tomando o ínfimo sobre o conjunto $V(A_m)$ obtemos que $C_{\mu_m} \geq 0$. Utilizando o fato de que $\lambda < \mu_m$ e o resultado do item (i), concluímos que $C_\lambda \geq C_{\mu_m} = 0$, finalizando a prova do lema. ∎

Para a estimativa superior de C_λ, argumentamos como em [1]. Considere a razão:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{A_m} u^2 dx}{\left(\int_{A_m} u^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}}, \tag{4.9}$$

para uma família de funções u_ε que se concentram na origem:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.10}$$

onde $\varphi(|x|)$ é uma função corte que satisfaz:
(a) $\varphi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem,
(b) $\varphi \equiv 0$ in B_m^c, onde B_m é uma bola aberta centrada na origem com raio $R_m = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2^m}\right)$.

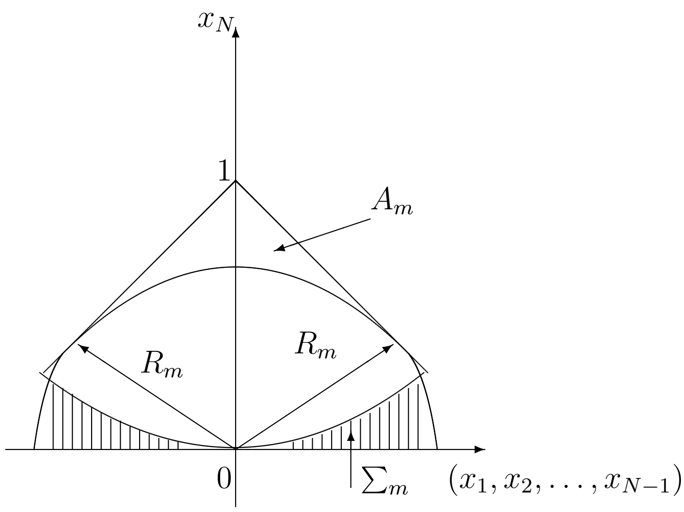
Assim, $u_\varepsilon\big|_{\Gamma_{0,m}} = 0$ e $u_\varepsilon\big|_{A_m} \in V(A_m)$, onde $V(A_m) = \{u \in H^1(A_m) \ : \ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_{0,m}\}$.

Para estimar $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ precisamos estabelecer os valores das integrais de (4.9) na metade superior da bola B_m e então subtrair dos valores das integrais no domínio Σ_m, definido por

$$\Sigma_m = (B_m \setminus \overline{A_m}) \cap \{x_N > 0\}, \tag{4.11}$$

como pode ser visto na figura abaixo:

Figura 2 – Regiões de integração do setor A_m



Fonte: Comte-Knaap [, 1]

Para isso são necessários os seguintes lemas no caso em que a dimensão do $\mathbb{R}^N$ é maior ou igual a 4.

Os valores das integrais em B_m estão apresentados no lema abaixo, e os cálculos podem ser encontrados em Brézis-Nirenberg [11].

Lema 4.6 *Sejam u_ε como definido em (4.10) e $N \geq 4$. Então*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{2,B_m}^2 = K_1 \varepsilon^{-\frac{2-N}{2}} + O(1), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0.$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2,B_m}^2 = O(|\log \varepsilon|), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0 \quad \textit{se} \quad N = 4.$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2,B_m}^2 = O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0 \quad \textit{se} \quad N \geq 5.$$

$$\|u_\varepsilon\|_{\frac{2N}{N-2},B_m}^2 = K_2 \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} + O(\varepsilon), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0,$$

onde

$$K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N} dx, \tag{4.12}$$

$$K_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|x|^2)^N} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \tag{4.13}$$

e $\dfrac{K_1}{K_2} = S$, *é a constante definida em (4.8).*

Agora, apresentaremos o último lema que nos auxiliara na prova do Lema 4.4. (ver apêndice B), Os cálculos das integrais em Σ_m aparecerão durante a demonstração dos mesmos.

Lema 4.7 (ver apêndice B) *Se $N \geq 4$, então, quando $\varepsilon \to 0$,*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \frac{K_1}{2} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \{1 - L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)\}, \tag{4.14}$$

$$\|u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \begin{cases} O(|\log \varepsilon|) & se \quad N = 4, \\ O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}})\} & se \quad N \geq 4, \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\frac{2N}{N-2},A_m} = \frac{K_2}{2^{\frac{N-2}{N}}} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{N-3}{N+1} \right) L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \right\}, \tag{4.16}$$

onde

$$L = \frac{(N-2)^2}{K_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^4}{(1+|x|^2)^N} dx. \tag{4.17}$$

Agora temos todas as informações necessárias para provar o Lema 4.4.

Demonstração: **do Lema 4.4**

Pelo lema 4.5, nos resta provar que $C_\lambda < \dfrac{S}{2^{\frac{2}{N}}}$.

Como

$$Q_\lambda(u) = \frac{\displaystyle\int_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{A_m} u^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{A_m} u^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}},$$

segue que, se $N \geq 4$ temos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u_\varepsilon\|^2_{2,A_m}}{\|u_\varepsilon\|^2_{\frac{2N}{N-2},A_m}}$$

e segue pelo lema 4.7 que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\dfrac{K_1}{2} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \{1 - L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)\} - \begin{cases} O(|\log \varepsilon|) & \text{se} \quad N = 4, \\ O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}) & \text{se} \quad N \geq 5, \end{cases}}{\dfrac{K_2}{2^{\frac{N-2}{N}}} \left\{ 1 - \dfrac{(N-3)}{(N+1)} L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \right\} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}}}.$$

Desta forma
$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}}\left\{1 - \frac{4}{N+1}L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + R(\varepsilon)\right\} < \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}},$$
com
$$R(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon|\log\varepsilon|), & \text{se} \quad N = 4, \\ O(\varepsilon), & \text{se} \quad N \geq 5. \end{cases}$$
e segue o Lema 4.4 para $N \geq 4$. ■

O último ingrediente na prova do Teorema 4.2 é mostrar que podemos utilizar uma desigualdade devido a Cherrier (ver apêndice B, Teorema B.6).

Essa desigualdade nos diz que, se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$, que é limitado e de classe C^1, então para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante M_ε, de modo que para todo $u \in H^1(\Omega)$:
$$\|u\|_{p+1,\Omega} \leq \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{2,\Omega} + M_\varepsilon \|u\|_{2,\Omega}, \tag{4.18}$$
onde $p = \dfrac{N+2}{N-2}$.

Porém, em nosso caso, A_m não é de classe C^1. Portanto estendemos as funções u pertencentes a $V(A_m)$, para bola unitária
$$B = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ x_1^2 + ... + x_{N-1}^2 + (x_N - 1)^2 < 1\}$$
definindo
$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in A_m, \\ 0 & \text{se} \quad x \in B \setminus A_m. \end{cases}$$
Então $\hat{u} \in H^1(B)$, onde B é um domínio regular suave. E claramente temos
$$\begin{aligned} \|\nabla \hat{u}\|_{2,B} &= \|\nabla u\|_{2,A_m}, \\ \|\hat{u}\|_{2,B} &= \|u\|_{2,A_m}, \\ \|\hat{u}\|_{p+1,B} &= \|u\|_{p+1,A_m}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Portanto a desigualdade (4.18) continua sendo válida para para todo $u \in V(A_m)$ isto é
$$\|u\|_{p+1,A_m} \leq \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{2,A_m} + M_\varepsilon \|u\|_{2,A_m}$$

Neste momento, estamos aptos a provar o Teorema 4.2.

Prova do Teorema 4.2

Demonstração: Seja $\{u_j\} \subset V(A_m)$ uma sequência minimizante de (4.6), isto é
$$\|u_j\|_{p+1,A_m} = 1, \tag{4.20}$$
$$\|\nabla u_j\|^2_{2,Am} - \lambda \|u_j\|^2_{2,A_m} = C_\lambda + o(1). \tag{4.21}$$

Por (4.20) e pela imersão de $L^{p+1}(A_m) \hookrightarrow L^2(A_m)$, obtemos que

$$\|u_j\|_{2,A_m} \leq C\|u_j\|_{p+1,A_m} \leq C,$$

e portanto $\{u_j\}$ é limitado em $L^2(A_m)$. Usando (4.21) e a limitação de $\{u_j\}$ em $L^2(A_m)$ obtemos que $\{\nabla u_j\}$ é limitado em $L^2(A_m)$ e, portanto, que $\{u_j\}$ é limitado em $V(A_m)$. Assim $\{u_j\}$ possui uma seqüência fracamente convergente em $V(A_m)$ de modo que

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \quad \text{fraco em} \quad V(A_m),\\ u_j &\to u \quad \text{forte em} \quad L^2(A_m),\\ u_j &\to u \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que a sequência $\{u_j\}$ converge fortemente para a u em $V(A_m)$. Seja

$$v_j = u_j - u,$$

então

$$\begin{aligned} v_j &\rightharpoonup 0 \quad \text{fraco em} \quad V(A_m),\\ v_j &\to 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(A_m),\\ v_j &\to 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad A_m. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Um resultado de Brézis e Lieb (ver Capítulo 2, Teorema 2.12), nos garante

$$1 = \|u_j\|^2_{p+1,A_m} = \|u\|^2_{p+1,A_m} + \|v_j\|^2_{p+1,A_m} + o(1), \tag{4.23}$$

substituindo v_j na desigualdade (4.18) obtemos

$$\|v_j\|_{p+1,A_m} \leq \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_j\|_{2,A_m} + M_\varepsilon \|v_j\|_{2,A_m},$$

e segue que

$$\begin{aligned} \|v_j\|^2_{p+1,A_m} \leq & \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + M_\varepsilon^2 \|v_j\|^2_{2,A_m}\\ + & 2\left[\left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_j\|_{2,A_m} M_\varepsilon \|v_j\|_{2,A_m}\right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como $\|\nabla v_j\|_{2,A_m}$ é limitado e $v_j \to 0$ em $L^2(A_m)$, assim se observarmos as duas últimas partes da desigualdade acima, teremos

$$M_\varepsilon^2 \|v_j\|^2_{2,A_m} + 2\left[\left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_j\|_{2,A_m} M_\varepsilon \|v_j\|_{2,A_m}\right] = o(1).$$

Substituindo o resultado acima na desigualdade (4.24), obtemos

$$\|v_j\|^2_{p+1,A_m} \leq \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon\right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1).$$

Agora substituindo a desigualdade acima em (4.23) e multiplicando por C_λ produzimos

$$C_\lambda \leq C_\lambda \|u\|^2_{p+1,A_m} + C_\lambda \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon \right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1). \tag{4.25}$$

Por outro lado obtemos, a partir de (4.21), que

$$C_\lambda = \|\nabla u\|^2_{2,A_m} + \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u\|^2_{2,A_m} + o(1). \tag{4.26}$$

Substituindo (4.26) em (4.25), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{2,A_m} + \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} &- \lambda \|u\|^2_{2,A_m} \\ &\leq C_\lambda \|u\|^2_{p+1,A_m} + C_\lambda \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon \right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de C_λ temos

$$C_\lambda \|u\|^2_{p+1,A_m} \leq \|\nabla u\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u\|^2_{2,A_m},$$

e segue que,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{2,A_m} + \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} &- \lambda \|u\|^2_{2,A_m} \\ &\leq \|\nabla u\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u\|^2_{2,A_m} + C_\lambda \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon \right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1), \end{aligned}$$

e portanto,

$$\|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} \leq C_\lambda \left(\frac{2^{2/N}}{S} + \varepsilon \right) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1).$$

Como $\lambda < \mu_m$, pelo Lema 4.4, temos que $C_\lambda < \dfrac{S}{2^{2/N}}$, desta forma garantimos a existência de uma constante positiva C de modo que

$$\|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} \leq (C + C_\lambda) \|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} + o(1).$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno concluímos que $\|\nabla v_j\|^2_{2,A_m} = o(1)$, e portanto $\|u_j - u\|^2_{2,A_m} = \|v_j\|^2_{2,A_m} \to 0$ quando $j \to \infty$. Conseqüentemente $u_j \to u$ forte em $V(A_m)$, u é de fato um minimizador de (4.6) e

$$C_\lambda = \|\nabla u\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u\|^2_{2,A_m}. \tag{4.27}$$

Além disso, como $\|u\|_{p+1,A_m} = 1$, concluímos que $u \not\equiv 0$.

Agora mostraremos que $C_\lambda > 0$.
Pelo lema (4.5) (ii), sabemos que $C_\lambda \geq 0$. Suponhamos que $C_\lambda = 0$, então por (4.27),

$$\|\nabla u\|^2_{2,A_m} - \lambda \|u\|^2_{2,A_m} = 0. \tag{4.28}$$

Por outro lado,

$$\mu_m = \inf_{u \not\equiv 0} \left\{ \frac{\|\nabla u\|^2_{2,A_m}}{\|u\|^2_{2,A_m}} \right\} \leq \frac{\|\nabla u\|^2_{2,A_m}}{\|u\|^2_{2,A_m}},$$

deste modo temos que

$$\mu_m \|u\|^2_{2,A_m} \geq \|\nabla u\|^2_{2,A_m}. \tag{4.29}$$

Por (4.28) e (4.29), temos:
$\mu_m\|u\|^2_{2,A_m} - \|\nabla u\|^2_{2,A_m} \geq 0$ e segue que $0 \geq (\mu_m - \lambda)\|u\|^2_{2,A_m} \geq 0$. Como $\mu_m > \lambda$, temos que $\|u\|^2_{A_m} = 0$ e portanto $u = 0$. Absurdo, pois $u \not\equiv 0$.

Podemos ainda supor que $u \geq 0$, caso contrário, podemos substituir u por $|u|$. Isto é possível, pois $\{|u_j|\}$ é também uma sequência minimizante, logo podemos trocar a sequência minimizante $\{u_j\}$ por $\{|u_j|\}$.

Com efeito:
Pelo Teorema de Stampacchia,

$$|\nabla|u|| = (sign\ u)\nabla u \quad \text{se} \quad u \neq 0.$$

Além disso, $\nabla u = 0$ sobre o conjunto $[u = 0]$, então $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ q.t.p em A_m, assim

$$\|\nabla|u_j|\|^2_{2,A_m} - \lambda\||u_j|\|^2_{2,A_m} = \|\nabla u_j\|^2_{2,A_m} - \lambda\|u_j\|^2_{2,A_m} \to C_\lambda,$$

e portanto $\{|u_j|\}$ também é uma sequência minimizante, como queríamos verificar.

Podemos ainda garantir, por um refinamento do Teorema de Hopf (ver apêndice C, Teorema C.11), que $u > 0$.

Agora, sejam $G(w) = \int\limits_{A_m} |w|^{p+1}dx$ e $Q(w) = \int\limits_{A_m} |\nabla w|^2 dx - \int\limits_{A_m} \lambda|w|^2 dx$, onde $w \in V(A_m)$.

Dado $w, \varphi \in H^1$ com $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, e utilizando o Teorema do Valor Médio (ver apêndice B, Teorema B.7), existe um $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$\frac{|w(x) + t\varphi(x)|^{p+1} - |w(x)^{p+1}|}{|t|} = \frac{(p+1)|w(x) + \theta t\varphi(x)|^{p-1}(w(x) + \theta t\varphi(x))t\varphi(x)}{|t|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{|w(x) + t\varphi(x)|^{p+1} - |w(x)^{p+1}|}{|t|}\right| &= (p+1)|w(x) + \theta t\varphi(x)|^p\varphi(x) \\ &\leq (p+1)(|w(x)| + |\varphi(x)|)^p|\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Desde que $w, \varphi \in H^1(\Omega)$ temos que $w, \varphi \in L^{p+1}(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{p+1}(\Omega)$, onde $p + 1 = p^*$, decorre disto que $(|w| + |\varphi|)^p \in L^{\frac{p+1}{p}}$ já que

$$\left(\int\limits_{A_m} [(|w(x)| + |\varphi(x)|)^p]^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{1}{\frac{p+1}{p}}} = \left[\left(\int\limits_{A_m} (|w(x)| + |\varphi(x)|^{p+1})dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]^p.$$

Como $\dfrac{1}{\frac{p+1}{p}} + \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p}{p+1} + \dfrac{1}{p+1} = 1$, temos pela desigualdade de Hölder que

$$\int\limits_{A_m} (|w(x)| + |\varphi(x)|)^p|\varphi(x)|dx \leq \left(\int\limits_{A_m} [(|w(x)| + |\varphi(x)|)^p]^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{1}{\frac{p+1}{p}}} \cdot \left(\int\limits_{A_m} |\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo
$$(|w(x)|+|h(x)|)^p|\varphi(x)| \in L^1(\Omega).$$
Consideraremos agora a seguinte sequência em $L^1(\Omega)$.
$f_n(x) = (p+1)|w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)|^p[w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)]\varphi(x)$ com $1 > t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, logo
$$f_n(x) \to f(x) = (p+1)|w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x).$$
Como
$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= (p+1)|w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)|^{p-1}(w(x)+\theta_n t_n\varphi(x))\varphi(x)| \\
&= (p+1)(|w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)|)^{p-1}|((w(x)+\theta_n t_n\varphi(x))||\varphi(x)| \\
&= (p+1)(|w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)|)^p|\varphi(x)| \\
&\leq (p+1)(|w(x)|+|\theta_n||t_n||\varphi(x)|)^p|\varphi(x)| \\
&\leq (p+1)(|w(x)|+|\varphi(x)|^p|)|\varphi(x)|,
\end{aligned}$$
pelo Teorema da Convergência Dominada (ver apêndice A, Teorema A.7), segue
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A_m} f_n(x)dx = (p+1)\int_{A_m} |w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x).$$

Por outro lado,

$$\frac{|w(x)+t_n\varphi(x)|^{p-1}-|w(x)|^{p+1}}{t_n} = (p+1)|w(x)+\theta_n t_n\varphi(x)|^{p-1}(w(x)+\theta_n t_n\varphi(x))\varphi(x),$$
isto é,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n}\left(\int_{A_m}|w(x)+t_n\varphi(x)|^{p-1}dx\int_{A_m}|w(x)|^{p+1}dx\right) = (p+1)\int_{A_m}|w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x)dx.$$
Logo,
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(\int_{A_m}|w(x)+t_n\varphi(x)|^{p-1}dx\int_{A_m}|w(x)|^{p+1}dx\right) = (p+1)\int_{A_m}|w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x)dx$$
e concluímos que
$$G'(w)\cdot\varphi = (p+1)\int_{A_m}|w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x)dx.$$
Tomando $w = \varphi = u$, segue que
$$G'(u)\cdot u = (p+1)\int_{A_m}|u|^{p-1}u^2dx = (p+1)\int_{A_m}|u|^{p+1}dx.$$
Assim, $G'(u)\cdot u = p+1 \neq 0$, e u é um minimizador do problema (4.6), pelo Teorema de Multiplicadores dos Lagrange (ver apêndice B, Teorema B.4), existe um numero real α de modo que:
$$Q'(u)\cdot\varphi = \alpha\, G'(u)\cdot\varphi,\ \forall\varphi \in V(A_m).$$

Colocando $I(u) = \int\limits_{A_m} |\nabla u|^2 dx$ e $J(u) = \int\limits_{A_m} |u|^2 dx$, utilizando o mesmo raciocínio da derivada anterior temos que

$$J'(u) \cdot \varphi = 2 \int\limits_{A_m} u\varphi dx$$

e

$$\begin{aligned}
I'(u) \cdot \varphi &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{J(u + t\varphi) - J(u)\} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\int\limits_{A_m} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx - \int\limits_{A_m} |\nabla u|^2 dx \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\int\limits_{A_m} (\nabla u + t\nabla\varphi)(\nabla u + t\nabla\varphi) dx - \int\limits_{A_m} \nabla u \nabla u \, dx \right] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\int\limits_{A_m} |\nabla u|^2 \, dx + 2t \int\limits_{A_m} \nabla u \nabla \varphi dx + t^2 \int\limits_{A_m} |\nabla \varphi|^2 \, dx - \int\limits_{A_m} |\nabla u|^2 \, dx \right] \\
&= 2 \int\limits_{A_m} \nabla u \nabla \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$Q'(u) \cdot \varphi = 2 \left(\int\limits_{A_m} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \lambda \int\limits_{A_m} u\varphi \, dx \right) = \lambda \int\limits_{A_m} |u|^p \varphi \, dx = \alpha G'(u)\varphi, \quad \forall \varphi \in V(A_m).$$

Tomando $\varphi = u$, temos que

$$\int\limits_{A_m} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int\limits_{A_m} u^2 dx = \frac{\alpha(p+1)}{2}.$$

Por outro lado, u é o minimizador, assim por (4.27), obtemos que $\alpha = \dfrac{2C_\lambda}{p+1} > 0$ e desta forma temos que

$$\int\limits_{A_m} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \lambda \int\limits_{A_m} u\varphi \, dx = \frac{C_\lambda}{p+1} \int\limits_{A_m} u^p \varphi,$$

e assim, u é solução fraca da equação

$$(P_{C_\lambda})_m \qquad \begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= \dfrac{C_\lambda}{p+1} u^p \text{ em } A_m, \\ u &= \text{ sobre } \Gamma_{0,m}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \text{ sobre } \Gamma_{1,m}. \end{cases}$$

Como $u \in V(A_m)$, u satisfaz a condição de Dirichlet em $\Gamma_{0,m}$ e a condição de Neumann em $\Gamma_{1,m}$. Agora vamos encontrar uma contante τ de modo que $v = C_\lambda^\tau u$ seja solução do problema (P_m). Subtituindo $v = C_\lambda^\tau u$ em (P_m) e usando o fato de que $C_\lambda > 0$ temos $-\Delta(C_\lambda^\tau u) = (C_\lambda^\tau u)^p + \lambda(C_\lambda^\tau u)$, assim, $C_\lambda^\tau(-\Delta u) = C_\lambda^{\tau p}u^p + \lambda C_\lambda^\tau$ e desta forma

$$\begin{aligned} -\Delta u &= C_\lambda^{\tau p} C_\lambda^{-\tau} u^p + \lambda C_\lambda^\tau C_\lambda^{-\tau} u \\ &= C_\lambda^{\tau p-\tau} u^p + \lambda C_\lambda^{\tau-\tau} \\ &= C_\lambda^{\tau(p-1)} u^p + \lambda u. \end{aligned}$$

Portanto u satisfaz a equação:

$$-\Delta u = C_\lambda^{\tau(p-1)} u^p + \lambda u,$$

por outro lado, u satizfaz $(P_{C_\lambda})_m$, isto é,

$$-\Delta u - \lambda u = \frac{C_\lambda}{p+1} u^p.$$

Comparando as duas equações em que u é solução, concluímos que $C_\lambda^{\tau(p-1)} = \dfrac{C_\lambda}{p+1}$, ou seja $C_\lambda^{\tau(p-1)-1} = \dfrac{1}{p+1}$, como os termos da igualdade são positivos, podemos tomar o logaritmo natural, assim $\ln(C_\lambda^{\tau(p-1)-1}) = \ln\left(\dfrac{1}{p+1}\right)$ e obtemos que $\tau(p-1) - 1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{p-1}\right)}{\ln(C_\lambda)}$, portanto $\tau = \dfrac{1}{p-1}\left(1 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{p+1}\right)}{\ln C_\lambda}\right)$.

Logo concluímos que $v = C_\lambda^\tau u$, para a constante τ obtida acima, é uma solução para o problema (P_m). ∎

4.3 Solução para o Problema Crítico

Agora nos resta mostrar o Teorema 4.1. A técnica é fazer um tipo de "colagem" de soluções obtidas pelo Teorema 4.2.

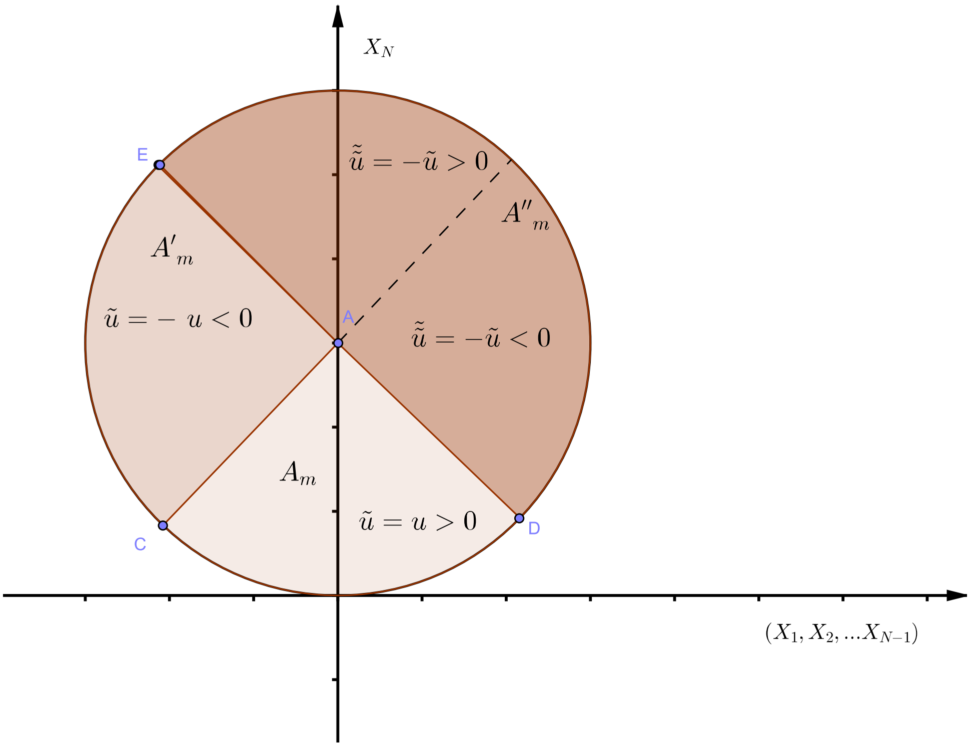
Demonstração: **Teorema 4.1**
Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja μ_m o primeiro autovalor do problema (4.4). Como $\mu_m \nearrow \infty$ quando $m \to \infty$, é possível obter um menor número natural m_0 de modo que $\lambda < \mu_{m_0}$. Para cada número natural $m \geq m_0$, consideremos u_m a solução positiva referente ou problema (P_m) obtida no Teorema 4.2. Agora consideremos A'_m a reflexão de A_m sobre uma das fronteiras planas. Sobre $A_m \cup A'_m$ definiremos a função $\tilde{u}_m$, de modo que $\tilde{u}_m = u_m$ em A_m e $\tilde{u}_m$ é a função antisimétrica de u_m com respeito ao plano de reflexão em A'_m. Seja A''_m a reflexão de $A_m \cup A'_m$ sobre uma das fronteiras planas e $\tilde{\tilde{u}}_m$ uma função definida em $A_m \cup A'_m \cup A''_m$ de modo $\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{u}_m$ em $A_m \cup A'_m$ e $\tilde{\tilde{u}}_m$ é antisimétrica com respeito ao plano de reflexão. Repetindo este procedimento m vezes, finalmente se obtem uma função u definida em toda bola B. É claro que u satisfaz a condição de Neumann na fronteira ∂B e, portanto, é

uma solução do problema (4.1). Esta solução é positiva em 2^{m-1} componentes conexas e negativa em 2^{m-1} componentes conexas, ou seja, a solução obtida muda de sinal. Usando o resultado de regularidade de Cherrier [14], temos que estas soluções pentencem a $C^2(\Omega)$.

■

No caso $m = 2$, veja como exemplo a figura seguinte:

Figura 3 – "Colagem" da solução do setor A_2



Fonte: o autor

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Gerais do Capítulo 3

A.1 Teorema da Função Implícita.

Sejam m, n inteiros positivos.

Notação. Escreveremos um ponto em $\mathbb{R}^{n+m}$ como

$$(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

para $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ um conjunto aberto, e suponhamos $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde escreveremos $f = (f^1, \cdots, f^m)$. Assumiremos $(x_0, y_0) \in U, z_0 = f(x_0, y_0)$.

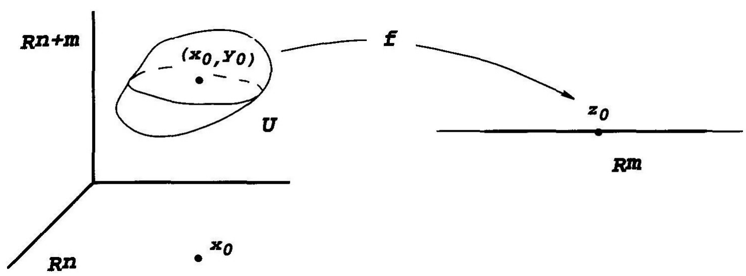
Notação.

$$\begin{aligned} Df &= \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} & f^1_{y_1} & \cdots & f^1_{y_m} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} & f^m_{y_1} & \cdots & f^m_{y_m} \end{pmatrix}_{m\times(n+m)} \\ &= (D_x f, D_y f) = \text{matriz gradiente de } f. \end{aligned}$$

Definição A.1

$$J_y f = |\det D_y f| = \left| \frac{\partial(f^1, \cdots, f^m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} \right|.$$

Figura 4 – Funcional f em uma determinada vizinhança



Fonte: Evans [22]

Teorema A.2 *(Da Função Implícita) (Ver [22]).*
Suponhamos $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ *e*

$$J_y f(x_0, y_0) \neq 0,$$

então existem conjuntos abertos $V \subset U$, *com* $(x_0, y_0) \in V$ *e* $W \subset \mathbb{R}^m$ *com* $x_0 \in W$, *e uma aplicação de classe* C^1 $g : W \to \mathbb{R}^m$, *de modo que:*

(i) $g(x_0) = y_0$,

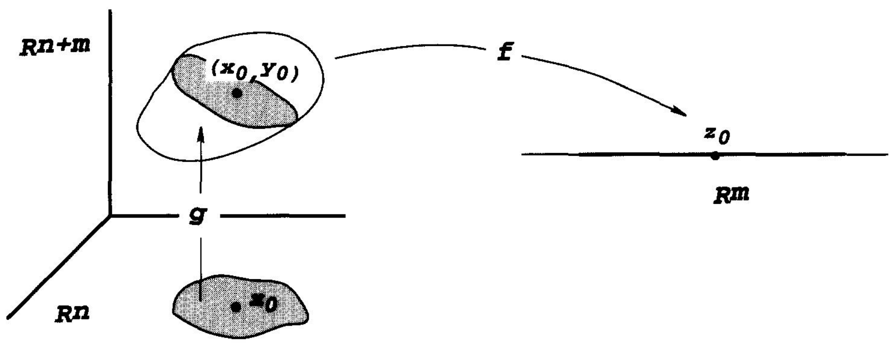
(ii) $f(x, g(x)) = z_0 \quad (x \in W)$,

(iii) se $(x, y) \in V$ *e* $f(x, y) = z_0$, *então* $y = g(x)$,

(iv) se $f \in C^k$, *então* $g \in C^k \quad (k = 2, \cdots)$.

A aplicação g *é definida implicitamente perto de* x_0 *pela equação* $f(x, y) = z_0$

Figura 5 – Teorema da Função Implicita



Fonte: Evans [22]

A.2 Princípio Variacional de Ekeland

Teorema A.3 *Seja* X *um espaço métrico completo e* $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *semicontínua inferiormente e limitada inferiormente.*

Sejam $\varepsilon > 0$, *e* $\overline{u} \in X$ *dados, tal que:*

$$(1) \quad \Phi(\overline{u}) \leq \inf_X \Phi + \frac{\varepsilon}{2}$$

Então dado $\lambda > 0$, *existe* $u_\lambda \in X$ *tal que:*

(2) $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\overline{u})$,

(3) $dist\ (u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda,$

(4) $\Phi(u_\lambda) < \Phi(u) + \dfrac{\varepsilon}{2} dist\ (u_\lambda, u) \qquad \forall\ u \neq u_\lambda$

A.3 Fórmulas de Green e Resultados de Medida

Teorema A.4 *(Fórmulas de Green) (ver [22], pág 628).*

Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. *Então:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ dS,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega Dv.Du\ dx = -\int_\Omega u\Delta v\ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u\ dS,$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\ dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\ dS.$

Lema A.5 *(Lema de Fatou) (Ver [9] página 90).*

Seja (f_n) *uma sequência de funções de* L^1 *tal que*

(a) *Para cada* n, $f_n(x) \geq 0$ *q.t.p em* Ω.

(b) $\displaystyle\sup_n \int f_n(x)dx < \infty.$

Para cada $x \in \Omega$ *ponha* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Então*

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx.$$

Teorema A.6 *(Teorema da Convergência Monótona) (Ver [9] página 90).*

Seja (f_n) *uma sequência de funções de* L^1 *satisfazendo*

(a) $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ *quase sempre em* Ω,

(b) $\displaystyle\sup_n \int f_n(x)dx < \infty$. *Então* $f_n(x)$ *converge em quase todo ponto de* Ω *para um limite finito denotado por* $f(x)$*; e a mais ainda*

$$f \in L^1 \quad e \quad \|f_n - f\|_{L^1} \to 0, \quad quando \quad n \to \infty.$$

Teorema A.7 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) (Ver [9] página 90).*

Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1. Suponhamos que

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *em quase todo ponto de* Ω

(b) *Existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo ponto em Ω.*

Então

$$f \in L^1 \quad e \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0, \quad quando \quad n \to \infty.$$

Teorema A.8 *(Lusin) (Ver [23]).*

Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, então para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subset A$, com $med(A) < \infty$, tal que $med(A - K) < \varepsilon$ e $f|_K$ é contínua.

APÊNDICE B – Resultados Gerais do Capítulo 4

B.1 Algumas Funções Especiais

Proposição B.1 *(ver [16]. Proposição 3.2) Seja $\eta(|x|)$ uma função suave.*

(a) Se $N = 3$, então

$$\int_{\Sigma_m} \eta(|x|)dx = \pi \int_0^{R_m} \eta(r)r^3 dr.$$

(b) Se $N \geq 4$, então

$$\int_{\Sigma_m} \eta(|x|)dx = \frac{\omega_{N-1}}{2} \int_0^{R_m} \eta(r)r^N(1 + h(r))dr,$$

onde $h(r)$ é uma função suave de r, com $h(r) = O(r^2)$ quando $r \to 0$ e ω_{N-1} é a área da bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$.

Definição B.2 *(ver [34]) Se $n > 0$, definimos a função gama por*

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1}e^{-u}\, du.$$

Propriedades da função gama

(1) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$, se $n > 0$.
Assim como $\Gamma(1) = 1$, temos $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2!$, $\Gamma(4) = 3!$ e, de um modo geral, $\Gamma(n + 1) = n!$, se n é inteiro positivo. Por essa razão, a função é algumas vezes chamada *função fatorial.*

(2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(3) $\Gamma(p)\Gamma(1 - p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, $0 < p < 1$.

(4) Para n grande, $\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$.

Aqui $\approx$ significa "aproximadamente igual a, para n grande". Mais exatamente, escrevemos $F(n) \approx G(n)$ se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(n)}{G(n)} = 1$. Essa é chamada *fórmula de Stirling.*

(5) Para $n < 0$, podemos definir Γ por

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}.$$

Definição B.3 *(ver [34]) Se* $m > 0,\ n > 0$, *definimos a função beta como*

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\ du$$

A função beta pode em alternativa ser definida utilizando a mudança de variável $s = \dfrac{u}{1+u}$, *como*

$$B(m,n) = \int_0^\infty s^{m-1}(1+s)^{-(m+n)}\ ds$$

Propriedades da função beta

(1) $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \text{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2m-1}\theta\ d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$.

B.2 Multiplicadores de Lagrange, Identidade de Pohozaev e Desigualdade de Cherrier

Teorema B.4 *(Multiplicadores de Lagrange) (Ver [32]). .*
Suponha $F, G : X \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^1 *e* X *um espaço de Banach. Se para* $x_0 \in X$ *tivermos* $G(x_0) = 0$, *e* x_0 *extremo local da* F *quando restrita a* $C = \{x \in X; G(x) = 0\}$, *então*

(i) $G'(x_0) = 0$ *ou*

(ii) $\exists\ \mu \in \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x_0)v = \mu G'(x_0)v,\ \forall v \in X$.

Identidade de Pohozaev

Considere o seguinte problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u), \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.1}$$

Seja $F(u) = \int_0^u f(s)\ ds.$

Teorema B.5 *(Identidade de Pohozaev) (Ver [31]).*
Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja ν o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Se u é uma solução clássica $(u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ de (B.1) então a seguinte identidade é válida:

$$n \int_\Omega F(u)\ dx - \frac{n-2}{2} \int_\Omega u f(u)\ dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_\nu^2 (x.\nu) d\sigma, \tag{B.2}$$

onde $u_\nu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

Lema B.6 *(Desigualdade de Cherrier) (Ver [13]).*
Se Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$, que é limitado e de classe C^1, então para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante M_ε, de modo que para todo $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{p+1} \leq \left(\frac{2^{\frac{2}{N}}}{S} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{2,\Omega} + M_\varepsilon \|u\|_{2,\Omega},$$

onde $p = \dfrac{N+2}{N-2}$.

Teorema B.7 *(Valor Médio) (Ver [25]).*
Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f|_{[a,a+v]}$ seja contínua e que exista derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$.

B.3 Resultados Importantes Sobre as integrais em A_m, B_m, e Σ_m

Lema B.8 *Se $N \geq 4$, então, quando $\varepsilon \to 0$,*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{2,A_m}^2 = \frac{K_1}{2} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \{1 - L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)\}, \tag{B.3}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2,A_m}^2 = \begin{cases} O(|\log \varepsilon|) & se \quad N = 4, \\ O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}})\} & se \quad N \geq 4, \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{\frac{2N}{N-2}, A_m}^2 = \frac{K_2}{2^{\frac{N-2}{N}}} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{N-3}{N+1} \right) L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon) \right\}, \tag{B.5}$$

onde

$$L = \frac{(N-2)^2}{K_1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^4}{(1+|x|^2)^N} dx. \tag{B.6}$$

Demonstração: Temos que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \frac{1}{2}\int\limits_{B_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \ dx - \int\limits_{\Sigma_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \ dx. \tag{B.7}$$

Pelo lema 4.6, o primeiro termo após a igualdade acima é dado por:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \ dx = \frac{K_1}{2}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} + O(1). \tag{B.8}$$

Para calcular o segundo termo, utilizamos a proposição (B.1), que diz

$$\int\limits_{\Sigma_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{\omega_{N-1}}{2}\int\limits_0^{R_m} |\nabla u_\varepsilon(r)|^2 r^N(1+h(r))dr.$$

Como $\varphi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem, a integral torna-se

$$\int\limits_{\Sigma_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{(N-2)^2\omega_{N-1}}{2}\int\limits_0^{R_m} \frac{r^{N+2}(1+h(r))}{(\varepsilon+r^2)^N}dr + O(1).$$

Usando que $h(r) = O(r^2)$, quando $r \to 0$, encontramos

$$\int\limits_{\Sigma_m} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx = \frac{(N-2)^2}{2}\int\limits_0^{R_m} \frac{|x|^4}{(1+|x|^2)^N}dx \ \varepsilon^{\frac{3-N}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}). \tag{B.9}$$

Substituindo as expressões (B.8) e (B.9) em (B.7), e em vista da definição (B.6), obtemos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \frac{K_1}{2}\varepsilon^{-\frac{2-N}{2}}\{1 - L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)\}.$$

Para $\|u_\varepsilon\|^2_{2,A_m}$, temos

$$\|u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \frac{1}{2}\int\limits_{B_m} u_\varepsilon^2(x) \ dx - \int\limits_{\Sigma_m} u_\varepsilon^2(x) \ dx,$$

pelo Lema (4.6)segue-se que

$$\|u_\varepsilon\|^2_{2,A_m} = \begin{cases} O(|\log\varepsilon|) & \text{se} \quad N = 4, \\ O(\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}) & \text{se} \quad N \geq 4, \end{cases} \tag{B.10}$$

o que prova (B.4).

Finalmente, para $\|u_\varepsilon\|^2_{\frac{2N}{N-2},A_m}$ temos

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\frac{2N}{N-2},A_m} = \left\{\frac{1}{2}\int\limits_{B_m} u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}(x) \ dx - \int\limits_{\Sigma_m} u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}(x) \ dx\right\}^{\frac{N-2}{N}}. \tag{B.11}$$

Utilizando o lema (4.6), o primeiro termo à direita da desigualdade pode ser substituído por

$$\int_{B_m} u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}(x)\ dx = \frac{K_2^{\frac{N}{N-2}}}{2}\varepsilon^{-\frac{N}{2}} + O(1), \tag{B.12}$$

assim pela proposição (B.1), pelo fato de $\varphi \equiv 1$ perto da origem, e $h(r) = O(r^2)$ quando $r \to 0$, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_m} u_\varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}(x)\ dx &= \frac{\omega_{N-1}}{2}\int_0^{R_m} \frac{r^N}{(\varepsilon + r^2)^N}dr + O(\varepsilon^{\frac{3-N}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{R^{N-1}} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx\varepsilon^{\frac{1-N}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3-N}{2}}). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Afirmamos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx = \left(\frac{N}{N-2}\right)\left(\frac{N-3}{N+1}\right)LK_2^{\frac{N}{N-2}}. \tag{B.14}$$

Provando a desigualdade acima, podemos substituir (B.12), (B.13) e (B.14) em (B.11) e obtemos,

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\frac{2N}{N-2}} = \frac{K_2}{2^{\frac{N-2}{N}}}\varepsilon^{-\frac{2-N}{2}}\left\{1 - \frac{N-3}{N+1}L\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon)\right\},$$

assim, (B.5) estará provado.

Para provar (B.14) utilizaremos a função Beta $B(a,b)$: (B.3)

$$B(a,b) = \int_0^\infty s^{a-1}(1+s)^{-(a+b)}ds$$

definida para $a, b > 0$. Recordamos que $B(a,b)$ pode ser expressa em termos de Funções Gamma: (B.2)

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b).} \tag{B.15}$$

Observe que

$$\frac{1}{2}\int_0^{R_m} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx = \frac{\omega_{N-1}}{2}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} s^{\frac{N-1}{2}}(1+s)^{-N}ds.$$

Usando (B.15), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} s^{\frac{N-1}{2}}(1+s)^{-N}ds &= B(\tfrac{N+1}{2}, \tfrac{N-1}{2}) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{N+1}{2})\Gamma(\frac{N-1}{2})}{\Gamma(N)} \\ &= \frac{N-3}{N+1}\frac{\Gamma(\frac{N+3}{2})\Gamma(\frac{N-3}{2})}{\Gamma(N)} \\ &= \frac{N-3}{N+1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} s^{\frac{N+1}{2}}(1+s)^{-N}ds. \end{aligned}$$

assim,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx = \frac{N-3}{N+1}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^4}{(1+|x|^2)^N}dx. \tag{B.16}$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}dx = \frac{N-2}{N}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}dx.$$

ou

$$K_1 = N(N-2)K_2^{\frac{N}{N-2}}. \tag{B.17}$$

Combinando (B.16) e (B.17) obtemos (B.14).

■

APÊNDICE C – Princípio de Máximo

Neste apêndice iremos desenvolver Príncipios de Máximo para Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Os resultados aqui enunciaremos podem ser vistos em Evans [22].

C.1 Introdução

Os métodos de Princípios de Máximo estão baseados sob um conjunto aberto Ω em um ponto $x_0 \in \Omega$, então:

$$Du(x_0) = 0 \qquad D^2u(x_0) \leq 0,$$

onde esta desigualdade significa que a matriz simétrica $D^2u = ((u_{x_i x_j}))$, não é positiva definida em x_0. Vamos considerar operadores elípticos L, tendo a forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu,$$

onde os coeficientes a^{ij}, b^i, c são contínuos e satisfazem a condição de elipticidade uniforme, a qual definiremos a seguir. Vamos assumir, sem perda de generalidade, a condição de simetria $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, ..., N)$.

Definição C.1 *Dizemos que o operador diferencial L é (uniformemente) elíptico se existir uma constante θ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \quad q.t.p \quad x \in \Omega \quad e \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

C.2 Princípios de Máximo Fraco

Primeiramente, vamos identificar sob quais circunstâncias uma função deve atingir seu máximo (ou mínimo) na fronteira. Estamos assumindo sempre que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado.

Teorema C.2 *Assuma que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $c = 0$ *em* Ω.

(i) Se $Lu \leq 0 \quad$ *em* $\quad \Omega, \quad$ *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Se $Lu \geq 0 \quad$ *em* $\quad \Omega, \quad$ *então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Observação C.3 *Uma função* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $Lu \leq 0$ *em* Ω *é chamada de subsolução. Analogamente uma função* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $Lu \geq 0$ *em* Ω *é chamada de supersolução.*

Teorema C.4 *Assuma* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $c \geq 0$ *em* Ω.

(i) Se $Lu \leq 0 \quad$ *em* $\quad \Omega, \quad$ *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se $Lu \geq 0 \quad$ *em* $\quad \Omega, \quad$ *então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\min_{\partial\Omega} u^-.$$

Observação C.5 *Em Particular, se* $Lu = 0$ *em* Ω *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

C.3 Princípios de Máximo Forte

Lema C.6 *(Lema de Hopf para Subsoluções)*
Assuma $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *e que* $c = 0$ *em* Ω. *Suponha ainda* $Lu \leq 0$ *em* Ω, *e que exista um ponto* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

$$u(x_0) > u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Assuma, finalmente que Ω *satisfaz a condição da bola interior em* x_0, *isto é, existe uma bola aberta* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial B$.

(i) Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν *é o vetor unitário normal exterior a bola* B *em* x_0.

(ii) *Se*

$$c \geq 0 \quad em \quad \Omega,$$

a mesma conclusão é válida desde que $u(x_0) \geq 0$.

Lema C.7 *(Lema de Hopf para Supersoluções)*
Assuma $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *e que* $c = 0$ *em* Ω. *Suponha ainda* $Lu \geq 0$ *em* Ω, *e que exista um ponto* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

$$u(x_0) < u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Assuma, finalmente que Ω *satisfaz a condição da bola interior em* x_0, *isto é, existe uma bola aberta* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial B$.

(i) *Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν *é o vetor unitário normal exterior a bola* B *em* x_0.

(ii) *Se*

$$c \geq 0 \quad em \quad \Omega,$$

a mesma conclusão é válida desde que $u(x_0) \leq 0$.

Teorema C.8 *(Princípio do Máximo Forte com* $c = 0$*)*
Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e que* $c = 0$ *em* Ω. *Suponha ainda que* Ω *é conexo, aberto e limitado.*

(i) *Se*

$$Lu \leq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u *atinge seu máximo sobre* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω.

(ii) *Analogamente, se*

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u *atinge seu mínimo sobre* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω.

Teorema C.9 *(Princípio do Máximo Forte com* $c \geq 0$*)*
Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e que* $c = 0$ *em* Ω. *Suponha ainda que* Ω *é conexo.*

(i) *Se*

$$Lu \leq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u *atinge seu máximo não-negativo sobre* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω.

(ii) Analogamente, se

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u atinge seu mínimo não-positivo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.

Observação C.10 *No próximo Lema não estaremos fazendo nenhuma hipótese com respeito ao sinal de c.*

Lema C.11 *(Um Refinamento do Lema de Hopf)*
Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Assuma

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u & \geq & 0 & em & \Omega, \\ u & \geq & 0 & em & \Omega. \end{cases}$$

Suponha ainda $u \neq 0$.

(i) Se $x_0 \in \partial\Omega$, $u(x_0) = 0$, e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

(ii) Mais ainda

$$u > 0 \quad em \quad \Omega.$$

Demonstração: Seja $w := e^{-\alpha x_1}u$, onde $\alpha > 0$ será selecionado mais abaixo. Então $u = e^{\alpha x_1}w$, e assim

$$cu \geq \Delta u = \Delta(e^{\alpha x_1}w) = 2\alpha^2 u + \alpha e^{\alpha x_1}w_{x_1} + e^{\alpha x_1}\Delta w.$$

Portanto

$$-\Delta w - 2\alpha w_{x_1} \geq (\alpha^2 - c)w \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega,$$

pois como $w = e^{-\alpha x_1}u \geq 0$ em Ω e $c \in L^\infty(\Omega)$, segue que $\|c\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \geq c(x) \quad \forall x \in \Omega$. Disto segue-se que se tomar-mos $\alpha = \|c\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$ teremos $\alpha^2 - c \geq 0$ em Ω. Consequentemente w é uma supersolução para o operador elíptico $Lw := -\Delta w - 2\alpha w_{x_1}$, o qual não tem termo de ordem zero. Pelo Princípio do Máximo Forte (C.8), segue que $w > 0$ em Ω. Com efeito, suponha que exista $y_0 \in \Omega$ tal que $w(y_0) = 0$. Então como $w = e^{-\alpha x_1}u$ e $e^{-\alpha x_1} > 0$ segue que existe $y_0 \in \Omega$ tal que $u(y_0) = 0$. Mas como $u \geq 0$ em Ω, segue que y_0 é um ponto de mínimo para w em Ω. Portanto por (C.8) parte (ii), concluímos que w é constante em Ω. Mas como $w(y_0) = 0$, segue que $w(y) = 0$ para todo $y \in \Omega$. Pela continuidade de w em $\overline{\Omega}$ segue que $w = 0$ em $\overline{\Omega}$ e isto implica em $u = 0$ em $\overline{\Omega}$. Absurdo, pois por hipótese $u \neq 0$. Portanto segue que $w > 0$ em Ω. Agora, por hipótese, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $w(x_0) = 0$, e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, além disso pelo que mostramos acima temos $w(x_0) < w(x), \quad \forall x \in \Omega$. Pelo lema de Hopf (C.6) concluímos que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Como

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = e^{\alpha x_1}\Delta w(x_0)\nu(x_0) = e^{-\alpha x_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$$

e $u(x_0) = 0$, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Como $w > 0$ em Ω e $e^{-\alpha x_1} > 0$, concluímos finalmente que $u > 0$ em Ω. ■

Teorema C.12 *Suponha $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $d \in L^\infty(\Omega)$ satisfaça*

$$\begin{cases} -\Delta v + d(x)v & \geq & 0 & \textit{em} & \Omega, \\ v & \leq & 0 & \textit{em} & \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Se v se anula em um ponto $y_0 \in \Omega$, então $v \equiv 0$.

Antes de demonstrar-mos o Teorema acima, demostraremos o seguinte Lema que é essencialmente o Lema (C.11) com uma mudança de sinal.

Lema C.13 *Suponha $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $d \in L^\infty(\Omega)$ satisfaça*

$$\begin{cases} -\Delta v + d(x)v & \geq & 0 & \textit{em} & \Omega, \\ v & \leq & 0 & \textit{em} & \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Suponha ainda que

(i) Ω satisfaça a condição da bola interior em $x_0 \in \partial\Omega$,

(ii) $v(x_0) = 0$

(iii) $v \neq 0$

Então $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0$, onde ν é o vetor unitário normal exterior a bola em x_0.

Demonstração: Façamos $v = -u$ e $-c(x) = d(x)$ para $x \in \Omega$. Portanto temos que $u(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$. Logo,

$$\Delta + d(x)v = \Delta(-u) - d(x)u = -\Delta u - d(x)u = -\Delta u + c(x)u \geq 0.$$

Assim temos que

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u & \geq & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & \geq & 0 & \text{em} & \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Além disso, segue de $(i), (ii)$ e (iii) que

(iv) Ω satisfaz a condição da bola interior em $x_0 \in \partial\Omega$,

(v) $u(x_0) = 0$,

(vi) $u \neq 0$.

Então Aplicando o Teorema (C.11) parte (i), concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Além disso, pela parte (ii), do Teorema (C.11), concluímos ainda que $u > 0$ em Ω de modo que $v < 0$ em Ω. ■

Demonstração: do Teorema C.12

Suponha que $v \neq 0$. Pela demostração do Lema (C.13), temos que $v < 0$ em Ω. Absurdo, pois, por hipótese, existe $y_0 \in \Omega$ tal que $v(y_0) = 0$. Logo $v \equiv 0$. ■

Referências

[1] Adimurthi; Yadava, S. L. *Critical Sobolev exponent problem in* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 4)$ *with Neumann boundary condition.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 100 (1990), no. 3, 275-284.

[2] Adimurthi; Yadava, S. L. *Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents.* Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), no. 3, 275-296.

[3] Ambrosetti, A.; Prodi, G. *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 93 (1972), 231-246.

[4] Adimurthi; Yadava, S. L. *Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents.* Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), no. 3, 275-296.

[5] Ambrosetti, A.; Prodi, G. *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 93 (1972), 231-246.

[6] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[7] Berger, M. S.; Podolak, E. *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem.* Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75), 837-846.

[8] Biezuner, R. J. *Autovalores do Laplaciano.* Notas de aula do curso Tópicos em Análise, UFMG, Brasil, (2006).

[9] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, (2011).

[10] Brézis, H.; Lieb, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486-490.

[11] Brézis, H.; Nirenberg, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437-477.

[12] Budd, C.; Knaap, M. C.; Peletier, L. A. *Asymptotic behavior of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 117 (1991), no. 3-4, 225-250.

[13] Cherrier, P. *Meilleures constantes dans des inégalités relatives aux espaces de Sobolev.* Bull. Sci. Math. (2) 108 (1984), no. 3, 225-262.

[14] Cherrier, P. *Problèmes de Neumann non linéaires sur les variétés riemanniennes.* J. Funct. Anal. 57 (1984), no. 2, 154-206.

[15] Comte, M. *Solutions d'équations elliptiques avec exposant de Sobolev critique en dimension trois.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 309 (1989), no. 9, 597-599.

[16] Comte, M.; Knaap, M. C. *Solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary conditions.* Manuscripta Math. 69 (1990), no. 1, 43-70.

[17] De Figueiredo, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[18] De Figueiredo, D. G.; Jianfu, Y. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999), no. 1, 59-80.

[19] De Morais Filho, D. C.; Faria, L. F. O.; Miyagaki, O. H.; Pereira, F. R. *Infinitely many sign-changing solutions for a class of critical elliptic systems with Neumann conditions.* Proceedings. Section A. Mathematics, preprint.

[20] De Paiva, F. O.; Montenegro, M. *An Ambrosetti-prodi-type result for a quasilinear Neumann problem.* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 55 (2012), no. 3, 771-780.

[21] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, (1985).

[22] Evans, L. C. *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, (2010).

[23] Evans, L. C.; Gariepy, R. F. *Mesure Theory and Fine Properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, (1992).

[24] Knaap, M. C. *Large solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponents with Neumann boundary conditions,* In preparation.

[25] Lima, E. L. *Curso de análise. Vol. 2.* Projeto Euclides, 13. IMPA, Rio de Janeiro, (1981).

[26] Lin, C.-S.; Ni, W.-M. *On the diffusion coefficient of a semilinear Neumann problem.* Calculus of variations and partial differential equations (Trento, 1986), 160-174, Lecture Notes in Math., 1340, Springer, Berlin, (1988).

[27] Lin, C.-S.; Ni, W.-M.; Takagi, I. *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system.* J. Differential Equations 72 (1988), no. 1, 1-27.

[28] Meideiros, L. A.; Melo, E. A. *A integral de Lebesgue.* Sexta edição, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2008).

[29] D. Mitroviâc, D. Ubrinic *Fundamentals of applied functional analysis.* Distributions-Sobolev spaces-nonlinear elliptic equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, (1998).

[30] Ni, W.-M. *On the positive radial solutions of some semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.* Appl. Math. Optim. 9 (1983), no. 4, 373-380.

[31] Pohozaev, S. *Eigenfunction of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965) 36-39.

[32] Samuays, M. A. *O problema de Brézis-Nirenberg.* Dissertação de Mestrado. UFPr. Curitiba, (2011).

[33] Sommerfeld, A. *Partial differential equations in physics.* Academic Press, New York-London, (1964).

[34] Spiegel, M. R. *Theory and problems of Laplace transforms.* Schaum Publishing Co., New York (1965).

[35] Struwe M. *Struwe, Michael Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[36] Willem, M. *Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Aplications.* Boston, Birkauser Boston,(1996).