

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Pós-Graduação em Física  
Tese de Doutorado

Patrick Paolo Silva

**Variáveis dinâmicas não comutativas em  
magnetohidrodinâmica e método  
Faddeev-Jackiw aplicado à  
magnetohidrodinâmica relativística**

Juiz de Fora  
2022

PATRICK PAOLO SILVA

**Variáveis dinâmicas não comutativas em  
magnetohidrodinâmica e método  
Faddeev-Jackiw aplicado à  
magnetohidrodinâmica relativística**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Física da Universidade  
Federal de Juiz de Fora, como requisito par-  
cial à obtenção do título de Doutor em Física.  
Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes  
Coorientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Juiz de Fora  
2022

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Patrick Paolo .

Variáveis dinâmicas não comutativas em magnetohidrodinâmica e método Faddeev-Jackiw aplicado à magnetohidrodinâmica relativística / Patrick Paolo Silva. -- 2022.

112 p.

Orientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2022.

1. Magnetohidrodinâmica. 2. Não-Comutatividade. 3. Ondas em Magnetohidrodinâmica. 4. Método Simplético. 5. Fluido Relativístico. I. Mendes, Albert Carlo Rodrigues , orient. II. de Abreu, Everton Murilo Carvalho, coorient. III. Título.

**Patrick Paolo Silva**

**"Variáveis dinâmicas não comutativas em magnetohidrodinâmica e método Faddeev-Jackiw aplicado à magnetohidrodinâmica relativística"**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 01 de dezembro de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes - Orientador**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Clifford Neves Pinto**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Prof. Dr. Vahid Nikoofard**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Prof. Dr. Jorge Ananias Neto**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto**

## Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 05/12/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Professor(a)**, em 05/12/2022, às 14:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto, Professor(a)**, em 06/12/2022, às 18:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Professor(a)**, em 08/12/2022, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vahid Nikoofard, Usuário Externo**, em 08/12/2022, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clifford Neves Pinto, Usuário Externo**, em 08/12/2022, às 18:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1064506** e o código CRC **89709A98**.

# Agradecimentos

Quero agradecer ao Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes e ao Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pelas orientações, pois pude aprender muito ao longo deste período em que trabalhamos juntos.

Quero agradecer a minha família: Edison Jacy da Silva, Maria de Marilack Pires Silva, Raphael Pires da Silva, Paloma Juliana Silva e Gabriel Marti Silva Santiago, pois esses são aqueles que sempre estiveram presentes ao longo desta caminhada.

Quero agradecer a todas as pessoas que compõem o Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF. Aos professores por se dedicarem a nos ensinar, e aos Alunos por estarmos juntos no dia a dia participando efetivamente do crescimento uns dos outros.

Quero agradecer a Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes, secretário da Pós-Graduação, pela dedicação e esforço que possibilitam uma tranquilidade para os Alunos em relação às demandas administrativas.

Quero agradecer também aos Amigos da Sala 6 de alunos da Pós-Graduação, essa da qual fiz parte e pude conhecer excelentes pessoas.

Quero agradecer aos amigos de longa data, pois também fazem parte desta caminhada.

Agradecer também aos funcionários responsáveis pela limpeza e manutenção das instalações do Departamento de Física.

Agradecer também à CAPES, FAPEMIG e ao CNPq pelo fomento à pesquisa e apoio aos estudantes.

*"Elen síla lúmenn' omentielvo,  
uma estrela brilha sobre a hora  
de nosso encontro."*

---

J. R. R. Tolkien, A Sociedade  
do Anel

## Resumo

A Magnetohidrodinâmica (MHD) descreve o comportamento de um fluido carregado imerso em um campo magnético. Tais sistemas quando dentro de certos valores para a condutividade elétrica do fluido, e frequência do campo eletromagnético externo, apresentam um caráter ondulatório particular, manifestado através das ondas de H. Alfvén.

É notável mencionar que, tanto para a mecânica dos fluidos, quanto para a Magnetohidrodinâmica, quando analisadas em espaços não-comutativos, apresentam características peculiares. Neste trabalho, foi construída uma álgebra de velocidades não-comutativas para a MHD, onde foi obtida a versão não-comutativa da equação de Navier-Stokes, analisada a variação de energia mecânica juntamente ao acoplamento entre a vorticidade e o campo magnético, e estudada a variação da circulação, onde foram analisados cada um dos termos. Vemos que esses, devido à presença do parâmetro não-comutativo, podem agir como fonte de vorticidade.

Para a obtenção das equações para a MHD não-comutativa, foi introduzida uma nova Lagrangiana, a qual possibilitou a construção de uma Hamiltoniana para a MHD, que juntamente à nova estrutura simplética não-comutativa, dá origem a uma dinâmica não-comutativa para a MHD.

Ao final, é aplicado o método simplético a um fluido ideal relativístico composto por partículas massivas. Para esse sistema, foi construída a matriz simplética e obtidos os parênteses generalizados.

**Palavras-chave:** Magnetohidrodinâmica. Não-Comutatividade. Ondas em Magnetohidrodinâmica. Método Simplético. Fluido relativístico.



## Abstract

Magnetohydrodynamics (MHD) describes the behavior of a charged fluid embedded in a magnetic field. Such systems, when electrical conductivity and frequency of the external electromagnetic field belongs to a certain range of values, present a particular wave behavior. This is manifested through the H. Alfvén's waves [1].

It is noteworthy to mention that, for both fluid mechanics and Magnetohydrodynamics, when analyzed in a noncommutative space, they present peculiar characteristics. In this work, an algebra of noncommutative velocities was built for the MHD, where the noncommutative version of the Navier-Stokes equation was obtained, the variation of mechanical energy was analyzed together with the coupling between the vorticity and the magnetic field, and studied the variation of the circulation, where each of the terms were analyzed. We see that these, due to the presence of the noncommutative parameter, can act as a source of vorticity.

To obtain the equations for the noncommutative MHD, a new Lagrangian was introduced, which allowed the construction of a Hamiltonian for the MHD. This Hamiltonian, together with the new noncommutative symplectic structure, gives rise to a noncommutative dynamics for the MHD.

At the end, the symplectic method was applied to a relativistic ideal charged fluid, composed by massive particles. For this system, the symplectic matrix was constructed and the generalized parentheses were obtained.

**Keywords:** Magnetohydrodynamics. Noncommutativity. Magnetohydrodynamics Waves. Symplectic Method. Relativistic Fluid.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>As Equações da Magnetohidrodinâmica</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução . . . . .	17
2.2	Equações da Magnetohidrodinâmica . . . . .	18
2.3	Densidade Lagrangiana Para a MHD . . . . .	25
2.4	Comportamento Ondulatório em MHD . . . . .	32
2.4.1	Relação de Dispersão em MHD . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Não-Comutatividade em MHD</b>	<b>45</b>
3.1	Espaços Não-Comutativos . . . . .	45
3.1.1	O Produto Estrela ( $\star$ ), ou Produto de Groenewold-Moyal . . . . .	46
3.1.2	Teoria de Yang-Mills Não-Comutativa . . . . .	48
3.1.3	O Problema de Landau e a Não-Comutatividade . . . . .	49
3.2	Álgebra Não-Comutativa dos Parênteses de Poisson . . . . .	51
3.3	NC Entre as Componentes da Velocidade . . . . .	53
3.3.1	Equação de Navier-Stokes Não-Comutativa . . . . .	55
3.3.2	Conservação de Energia na MHD Não-Comutativa . . . . .	57
3.4	A Circulação $\mathcal{C}$ . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Método Simplético e o Fluido Relativístico</b>	<b>63</b>
4.1	Introdução . . . . .	63
4.2	O Método Simplético . . . . .	64
4.3	Os Parênteses Generalizados . . . . .	64
4.3.1	Método de Faddeev-Jackiw . . . . .	68
4.3.2	Algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani . . . . .	70
4.4	Tensor Energia-Momento do Fluido Ideal Relativístico . . . . .	72
4.5	Campo Tensorial Com Acoplamento Mínimo . . . . .	74
4.6	Aplicação do método Simplético ao Fluido Carregado . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>93</b>
	<b>Apêndice A Não-Comutatividade e o Produto Estrela <math>\star</math></b>	<b>95</b>
	<b>Apêndice B Representação das Coordenadas de um Fluido</b>	<b>97</b>



# Lista de Figuras

3.1	Figura 1 . . . . .	60
-----	--------------------	----

# Capítulo 1

## Introdução

A Magnetohidrodinâmica (MHD) é o estudo da dinâmica de um fluido eletricamente condutor, gás ionizado, parcialmente ou completamente e metais líquidos, por exemplo, em interação com campos eletromagnéticos. Pode-se dizer que a MHD teve seu início nos anos de 1940 com os trabalhos de Hannes Alfvén [1]. Seus trabalhos chamaram a atenção de outros pesquisadores, dentre estes pode-se citar Enrico Fermi [2] e J. W. Dungey [3]. H. Alfvén através da combinação das equações de Maxwell (principalmente as Leis de Faraday e de Ampère) construiu uma nova teoria matemática, que resultou nas equações para a MHD. Essas novas equações levaram H. Alfvén à descoberta de ondas na MHD e à uma velocidade de propagação característica a esse sistema que leva o seu nome, Velocidade de Alfvén [4, 5, 6]. As aplicações da MHD cobrem uma vasta área de interesse da física, do estudo de metais líquidos ao de plasmas<sup>1</sup> cósmicos. No campo de estudos de Plasmas espaciais [8, 9, 10], as ondas em MHD cumprem um importante papel, tais ondas também são uma peça fundamental na formação da coroa solar (*Solar Corona*) [11, 12, 13], onde a cromosfera solar influencia a propagação e dissipação das ondas em MHD. Por exemplo, as estruturas formadas por campos magnéticos acima das regiões onde se encontram as manchas solares, exercem grande influência na evolução e dissipação das ondas MHD, essas estruturas apresentam formas tubulares que funcionam como guias de ondas para as ondas MHD [14]. Além dessas, podem ser citadas as aplicações desta teoria ao estudo das propriedades lineares das ondas magnetosônicas rápidas que se propagam em plasmas não-homogêneos [15, 16, 17] e o aquecimento e aceleração dos ventos em estrelas em rotação devido às ondas MHD rápidas amortecidas, devido a campos magnéticos localmente fortes nas atmosferas estelares [18].

Nos últimos anos, maneiras alternativas para descrever a dinâmica do fluido, que ainda é um problema teórico em aberto, tem sido propostas [19, 20, 21]. Em

---

<sup>1</sup>Plasma é o nome dado a um gás de elétrons e íons parcialmente, ou completamente ionizado [7]

outras palavras, a dinâmica de fluidos é bem descrita pela equação de Navier-Stokes, porém, o que está em aberto é encontrar uma solução para a equação de Navier-Stokes que descreva todos os fluidos. Dessa forma, tornando essa área de estudos um campo de grande interesse. Destas novas formulações, destacamos a construção dos modelos que levam em conta a analogia das equações dinâmicas do fluido com as equações do eletromagnetismo. Essa analogia permite escrever as equações dinâmicas do fluido em uma nova forma devido à redefinição das variáveis dinâmicas. O conjunto de equações resultante é chamado de equações Tipo-Maxwell.

Um ambiente natural para a análise da MHD é a construção de um princípio variacional para a teoria que possa nos levar à dinâmica desses sistemas, bem como permitir a extração de novas propriedades para esses. Em [22] Newcomb propôs pela primeira vez o princípio da ação mínima para a MHD ideal, tanto para a descrição por coordenadas de Euler, quanto em coordenadas de Lagrange. Logo sendo seguido por vários outros autores [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Ficando a estrutura Lagrangiana dependente da escolha dos campos básicos para a teoria em cada caso. Assim sendo, pode-se escolher uma estrutura de equações Tipo-Maxwell para as equações de movimento, possibilitando a formulação Lagrangiana para um fluido carregado incompressível (ou compressível) imerso em um campo eletromagnético. O resultado é a obtenção de uma ação para o fluido onde os campos básicos são a velocidade, vorticidade e a energia de Bernoulli, ou energia de Bernoulli modificada para o caso compressível em termos da entalpia do fluido [30, 31, 32, 33]. Essa nova estrutura para as equações de movimento de um fluido, representa um novo caminho na análise da dinâmica de tais sistemas.

Além do estudo da Magnetohidrodinâmica, outro tema tratado nesta tese é a não-comutatividade do espaço-tempo e sua aplicação à MHD. O conceito de um espaço-tempo não-comutativo (NC) não é tão novo, tendo sido discutido pela primeira vez em um artigo publicado por Snyder em 1947 [34]. Seu trabalho foi motivado pela necessidade de superar as divergências encontradas na teoria quântica de campos, devido à interação entre campos e matéria considerando o caráter pontual de partículas. As coordenadas espaciais não-comutativas propostas no trabalho de Snyder tem consequências bem conhecidas para a física [34]. A saber, o movimento de natureza quântica de partículas carregadas imersas em um campo magnético forte, de modo que quando o movimento dessas partículas é projetado ao nível de Landau mais baixo, essas passam a ser confinadas em um plano perpendicular ao campo magnético e suas coordenadas passam a apresentar não-comutatividade entre elas [35, 36, 37]. Nos últimos anos, esse fenômeno envolvendo não-comutatividade tem sido utilizado em diversas investigações na mecânica quântica, envolvendo tanto modelos teóricos [38, 39, 40], quanto aplicações fenomenológicas [41, 42, 43, 44]. Simultaneamente, são realizadas generalizações para a teoria quântica de campos, pois a mecânica quântica pode ser entendida como o setor de partículas não-relativísticas da teoria quântica de campos. Essas generalizações deram origem a várias teorias quânticas de campos não-comutativas,

por exemplo, a eletrodinâmica quântica não-comutativa [45, 46, 47, 48, 49].

Como a construção de um espaço-tempo não-comutativo teve sua inspiração no espaço de fase quântico, podemos dizer que os operadores de coordenadas  $\hat{x}^i$  devem satisfazer uma relação de incerteza que, de maneira mais simples, devem obedecer a relação de não-comutatividade  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$ , onde  $\theta^{ij}$  são as componentes constantes de valores reais de um tensor de segunda ordem antissimétrico. Essa relação de não-comutatividade foi usada, inicialmente, para introduzir a estrutura não-comutativa em um sistema de coordenadas espaço-temporais em pequenas escalas, de modo a permitir a introdução de um corte (*cutoff*) no regime ultravioleta. No entanto, logo após o artigo de Snyder, Yang [50] demonstrou que embora usando essa álgebra não-comutativa, as divergências da teoria quântica de campos permaneciam lá, causando um desinteresse sobre a álgebra não-comutativa das coordenadas por algum tempo. Então, 50 anos depois, Seiberg e Witten [51] demonstraram que a álgebra resultante de um modelo de cordas abertas cujas extremidades estão fixadas em Dp-Branas, imersas em um campo de Neveu-Schwarz [52] (Que equivale a um campo magnético constante nas Dp-Branas) apresenta uma álgebra não-comutativa. Despertando novamente o interesse nesta área.

Ao que se trata a não-comutatividade na MHD, pode-se citar o trabalho de Z. Guralnik *et al.* [36], onde os autores usaram o produto estrela (Ou produto Moyal) para analisar a não-comutatividade em eletrodinâmica, com a intenção de construir a teoria que descreve um fluido carregado na presença de um campo magnético intenso. Esse sistema leva as partículas ao nível de energia de Landau mais baixo. E uma vez que o sistema encontra-se nesse nível, os parênteses de Poisson entre as densidades de carga do fluido tornam-se não-comutativos.

Nesta tese, estendemos essa nova estrutura para um sistema onde temos uma interação entre o fluido eletricamente condutor e o campo eletromagnético. Ademais, o meio é assumido ter condutividade infinita. Além disso, propomos uma Lagrangiana para a MHD e desenvolvemos uma generalização não-comutativa da teoria. As variáveis não-comutativas foram introduzidas na teoria a partir dos parênteses de Poisson. Veremos que a álgebra não-comutativa será realizada no espaço de fase entre as componentes da velocidade. A motivação para introduzir uma álgebra não-comutativa de velocidades na dinâmica dos fluidos é estudar a extensão não-comutativa da MHD. Deste modo, para a mecânica clássica é assumida uma nova estrutura simplética, que é consistente com a álgebra de comutadores da mecânica quântica não-comutativa. E em seguida analisamos as consequências da introdução da álgebra não-comutativa das velocidades do fluido.

Além disso, ao final desta tese é apresentada a aplicação do método simplético [53, 54, 55] a um fluido incompressível ideal relativístico, composto por partículas massivas carregadas levando em consideração os vínculos presentes neste sistema físico.

A tese é estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2 são apresentadas as equações fundamentais da MHD, que descrevem a dinâmica do fluido condutor, sendo esse considerado um meio dotado de condutividade infinita. É construída

a densidade Lagrangiana para a MHD tendo como ponto de partida as equações Tipo-Maxwell para um fluido viscoso em regime de turbulência completamente desenvolvida. Ao final desse capítulo, é realizada uma análise do comportamento ondulatório para a MHD, tendo como ponto de partida a Lagrangiana desenvolvida para nosso sistema físico. No Capítulo 3, é realizado um estudo acerca de espaços não-comutativos através da relação entre operadores de coordenadas  $\hat{x}^i$  do tipo  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$  e como transportar esses conceitos para espaços de fase clássicos. São apresentados dois exemplos de sistemas não-comutativos e suas relações com o parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$ . Em seguida, é construída uma MHD não-comutativa nas velocidades. A partir desse novo modelo são obtidas a equação de Navier-Stokes para a álgebra de velocidades não-comutativas, a equação para a conservação da energia e a taxa de variação da circulação. Os resultados obtidos neste capítulo foram publicados em [56]. No Capítulo 4 é apresentado o método simplético, este é aplicado a um fluido ideal incompressível relativístico composto por partículas carregadas e massivas. São obtidos os parênteses generalizados (parêntese de Dirac) para esse sistema, partindo da definição de um novo tensor de segunda ordem para a quadrivelocidade do fluido. Esse novo tensor leva em conta o comportamento termodinâmico do sistema através da função entalpia, que entra como um fator de peso para esse novo tensor. No Capítulo 5 é realizada a conclusão do trabalho. Além de três apêndices. O primeiro trata da não-comutatividade e do produto estrela, o segundo sobre a representação em coordenadas de Lagrange e de Euler para um fluido e como se relacionam e o terceiro trata do termo de pressão magnética presente na força de Lorentz para a MHD.



## Capítulo 2

# As Equações da Magnetohidrodinâmica

### 2.1 Introdução

A Magnetohidrodinâmica (MHD) descreve a dinâmica do fluido eletricamente condutor em movimento em relação a um campo magnético externo. Sendo o fluido um meio não magnético [6]. Alguns exemplos relacionados à Magnetohidrodinâmica são: o estudo do campo magnético da terra (Mantido pelo movimento do núcleo terrestre formado por uma liga metálica majoritariamente composta por ferro e níquel em alta pressão), o estudo de manchas solares e erupções solares causadas pelo campo magnético do sol, e o estudo de campos magnéticos galácticos e sua atuação na poeira interestelar [6]. Além de sua aplicação nos processos de siderurgia, por exemplo, na levitação de metais líquidos [6].

Em essência a MHD é baseada no movimento relativo entre o campo magnético e o fluido condutor. Desse movimento relativo surge uma corrente induzida que por meio da Lei de Ampère, permite observar o surgimento de um campo magnético induzido. Esse campo magnético induzido irá se acoplar ao campo magnético externo. Tal acoplamento obedece ao princípio de Lenz [57], ou seja, a direção e intensidade do campo magnético induzido serão determinados de modo a se opor à variação do fluxo magnético. Este efeito tem consequências bem interessantes para a Magnetohidrodinâmica, como por exemplo, o transporte das linhas de campo magnético pelo fluido (As linhas de campo passam a estar fixadas no fluido) ocasionando processos como as ondas de Alfvén (Ondas observadas somente no contexto da Magnetohidrodinâmica) ocorridos quando a velocidade de escoamento, condutividade elétrica, ou o comprimento característico do meio são muito grandes. Ou no caso contrário, onde a velocidade, condutividade ou comprimento característico assumem valores pequenos (Por exemplo da ordem de  $\sim 1 \frac{m}{s}$ ,  $\sim 10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$  e  $\sim 0,1 m$ , respectivamente) onde o campo magnético externo permanece praticamente inalterado e passa a ter grande influência na velocidade de

escoamento [6].

Pode-se notar que a MHD deve ser descrita através de relações que levam em conta a dinâmica do fluido (equações de movimento da mecânica dos fluidos) juntamente à descrição dinâmica de partículas carregadas (eletrodinâmica). Para obter essa descrição, são empregadas a equação da continuidade, equação de Euler para o fluido, entre outras como a divergência do campo de velocidades, variação da entropia e equação de condução de calor, por exemplo. Para a descrição do caráter eletromagnético são empregadas as equações de Maxwell e a força de Lorentz. Para um escoamento à velocidades não-relativísticas ( $v \ll c$ ,  $c$  a velocidade da luz no vácuo), o campo elétrico pode ser negligenciado em comparação aos termos contendo o campo magnético. Dessa forma, a força de Lorentz será modificada para a MHD, bem como a corrente de deslocamento que, para  $v \ll c$  e meios condutores (condutores ideais) pode ser desprezada quando comparada com o termo de densidade de corrente na equação de Ampère-Maxwell. Quando as condições acima são aplicadas ao fluxo de um fluido condutor, a descrição desse sistema está dentro do que se propõe a Magnetohidrodinâmica. A seção a seguir tem como referência o tratamento ao tema da MHD apresentados em [6] e [58].

## 2.2 Equações da Magnetohidrodinâmica

Consideremos um fluido incompressível e condutor ideal em movimento, condutor ideal, na ausência de campo gravitacional, porém, na presença de um campo eletromagnético externo. Um condutor ideal é aquele cuja condutividade elétrica tende ao infinito,  $\sigma \rightarrow \infty$ . Nesta tese a condutividade elétrica será considerada constante e uniforme ao longo de todo o volume. Em algumas partes deste capítulo,  $\sigma$  será mantida ao decorrer dos cálculos, para ao fim ser aplicado o limite  $\sigma \rightarrow \infty$ .

A frequência  $\omega$  do campo eletromagnético, sobre o qual o fluido condutor está submetido, é de fundamental relevância para o comportamento dos portadores de cargas (elétrons e íons) [57]. Para baixas frequências é possível, em excelente aproximação, negligenciar a corrente de deslocamento presente na equação de Ampère-Maxwell. Essa aproximação é aplicável quando o escoamento é descrito por velocidades não-relativísticas, ou seja,  $\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \ll 1$  e é claro, baixas frequências do campo eletromagnético externos ( $\omega < 20MHz$ ). Além disso, para um fluido condutor ideal espera-se que o campo eletromagnético varie em um comprimento típico  $L$  e em um tempo típico  $T$ . Variações menores que os característicos  $L$  e  $T$ , serão rapidamente atenuadas pelo rearranjo das cargas elétricas. Assim, tendo como valores característicos  $L$  e  $T$ , esses definem uma escala de comprimento  $L$  e uma escala nos tempos  $T$ , de forma a tornar possível a identificação  $\nabla = L^{-1}$  e  $\partial_t = T^{-1}$  [58]. Fica assim definido o valor característico para a velocidade,  $\frac{L}{T} = v$ .

Em complemento, também é possível estimar a ordem de grandeza da corrente de deslocamento através da expressão que relaciona a densidade de cargas ao tempo de relaxamento das cargas elétricas em um condutor [6].

Para estimar a corrente de deslocamento no interior de um condutor com base no tempo de relaxamento das cargas: consideremos um fluido condutor no qual fixamos um referencial que se move junto a um determinado volume de fluido. Em relação a esse referencial, a Lei de Ohm escreve-se

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_f, \quad (2.1)$$

onde  $\vec{E}_f$  refere-se ao campo elétrico experimentado pelas cargas em relação ao sistema de referência que move junto ao fluido. Aplicando a segunda Lei de Newton, igualando as forças por unidade de carga no referencial do laboratório com o referencial que se move com o fluido, pode-se concluir

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_f = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.2)$$

onde o termo do lado direito de (2.2) é a força por unidade de carga medida no referencial do laboratório, em relação ao qual o fluido move-se com velocidade  $\vec{v}$ . Aplicando o divergente à equação (2.2), usando a equação da continuidade,  $\nabla \cdot \vec{J} = \partial \rho_e / \partial t$  e a Lei de Gauss, resulta

$$\nabla \cdot \vec{J} = \left( \frac{\rho_e}{\tau_e} + \frac{1}{c} \sigma \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \right) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}, \quad \tau_e = (4\pi\sigma)^{-1}. \quad (2.3)$$

Analisando inicialmente um condutor estacionário,  $\vec{v} = 0$ , e eq.(2.3) fica

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_e(t) = \rho_e(0)e^{(-t/\tau_e)}. \quad (2.4)$$

Onde  $\tau_e$  é chamado de tempo de relaxamento da carga elétrica, sendo da ordem de  $10^{-18}s$  para metais [6] e  $\rho_e(0)$  uma dada distribuição inicial de cargas. A equação (2.4) mostra que em um condutor estacionário, as cargas vão rapidamente para a superfície por meio da ação de forças eletrostáticas, instante após estarem livres para se moverem pelo condutor. Para o caso onde  $\vec{v} \neq 0$  a derivada  $\partial \rho_e / \partial t$  pode ser negligenciada na eq.(2.3), quando essa é comparada a  $\rho_e / \tau_e$ . Isso nos leva a

$$\rho_e = -\frac{1}{4\pi c} \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.5)$$

ou seja, quando o condutor está em movimento existe uma densidade de carga diferente de zero dentro do condutor. Pela Lei de Ohm, o campo elétrico é da ordem de  $\vec{E} \sim \frac{\vec{J}}{\sigma}$  e pela eq.(2.5)  $\rho_e \sim \frac{1}{4\pi c} v \frac{B}{L}$ , onde foi usada a aproximação para os operadores diferenciais em termos dos respectivos valores característicos correspondentes as suas dimensões. Com isso o termo contendo o campo elétrico na força de Lorentz

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.6)$$

é da ordem de

$$\rho_e \vec{E} \sim \left( \frac{1}{4\pi c} v \frac{B}{L} \right) \left( \frac{\vec{J}}{\sigma} \right) \sim \frac{v\tau_e}{Lc} B \vec{J}, \quad (2.7)$$

mostrando que o produto  $\rho_e \vec{E}$  em relação a  $\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$  pode ser negligenciado em excelente aproximação. A força de Lorentz para a MHD é

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}. \quad (2.8)$$

As equações (2.6) ou (2.8) podem ser aplicadas ao elemento de fluido como se ele fosse composto por espécies de cargas do mesmo tipo. Para isso, basta que o livre caminho médio dos portadores de cargas seja muito menor em comparação às dimensões do elemento de fluido que os contém. As colisões ocorridas neste volume irão fazer com que os efeitos individuais devido a força de Lorentz sejam redistribuídos entre os portadores de cargas, resultando em um único comportamento coletivo [58].

Para a equação da continuidade, devido a  $\rho_e$  ser muito pequeno para tempos logo após o início da dinâmica e quase não variar com o tempo (Devido ao comportamento assintótico da exponencial em relação ao eixo dos tempos), chega-se à equação para a corrente

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.9)$$

A Lei de Ampère-Maxwell também sofre modificação. Para o rotacional do campo magnético, escreve-se

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}. \quad (2.10)$$

Porém,  $\vec{E} \sim \frac{\vec{J}}{\sigma}$  e do segundo termo do lado direito de (2.10), temos

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \sim \frac{1}{c} \frac{1}{T} \frac{\vec{J}}{\sigma} \sim \frac{4\pi}{c} \frac{1}{T} \tau_e \vec{J} \ll \vec{J}, \quad (2.11)$$

ou seja, a corrente de deslocamento para um condutor pode ser negligenciada na MHD, pois ela é muito menor que o primeiro termo do lado direito da eq.(2.10), resultando na Lei de Ampère para a MHD

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.12)$$

As equações de Maxwell restantes, Lei de Gauss,  $\nabla \cdot \vec{B}$  e a Lei de Faraday não são alteradas. Deste modo pode-se escrever as equações de Maxwell nas condições usadas na MHD, também chamadas de forma reduzida das equações de Maxwell

para a MHD [6].

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.16)$$

Juntamente às equações para a força e densidade de corrente

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.17)$$

Para obtermos a equação de indução para o campo magnético, que expressa o transporte, ou a difusão das linhas de campo magnético pelo meio, em nosso caso o meio é o fluido, consideramos inicialmente a Lei de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.18)$$

e substituindo na Lei de Ampère para a MHD, resulta

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B} = \sigma \vec{E} + \frac{\sigma}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.19)$$

A segunda equação em (2.19) apresenta uma alternativa para a obtenção do campo elétrico em termos da velocidade  $\vec{v}$  e do campo magnético  $\vec{B}$ . Substituindo na Lei de Faraday, obtém-se

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é chamada equação de indução para o campo magnético. Para o caso que queremos,  $\sigma \rightarrow \infty$ , a equação de indução torna-se

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.21)$$

Aplicando o mesmo limite em  $\sigma$  para a eq.(2.18), obtém-se

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (2.22)$$

A equação de Navier-Stokes para um fluido composto por partículas carregadas, com a força de Lorentz para a MHD (2.17) é

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.23)$$

A força de Lorentz foi reescrita utilizando a equação de Ampère  $\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B}$ . Em (2.23)  $\vec{v}(t, \vec{x})$  é a velocidade de escoamento do fluido,  $P(t, \vec{x})$  é o campo de pressão,  $\rho$  é densidade de massa do fluido,  $\nu$  é a viscosidade cinemática definida por  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  ( $\eta$  é a viscosidade dinâmica, que pode depender de quantidades do fluido como a pressão, densidade e etc. Para nosso caso será considerada constante ao longo de todo o espaço) e  $\vec{B}$  é o campo magnético. O termo  $\nu \nabla^2 \vec{v}$  em (2.23) é devido ao tensor<sup>1</sup>

$$\bar{\sigma}_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{onde} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \rightarrow \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.24)$$

para o fluido incompressível. Outro resultado importante para a MHD apresentado nesta seção, é a taxa de variação da energia mecânica. Essa será dada pela soma da variação da energia do campo magnético e a variação da energia cinética do elemento do fluido. Para a variação da energia magnética, consideremos o teorema de Poynting para o eletromagnetismo [57]

$$\partial_t (u_{campos}) = -\nabla \cdot \vec{S} - \vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (2.25)$$

onde

$$u_{campos} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (2.26)$$

é a energia armazenada nos campos por unidade de volume.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (2.27)$$

é o vetor de Poynting. Aplicando a aproximação da MHD, reescrevendo o teorema de Poynting usando

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.28)$$

resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned} \partial_t \left[ \frac{1}{8\pi} B^2 \right] &= -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \left( \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \\ &= -\nabla \cdot \vec{S} - \left( \frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\sigma} |\nabla \times \vec{B}|^2 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

A densidade de energia no campo elétrico pode ser negligenciada por ser muito pequena em comparação à densidade de energia do campo magnético ( $E^2 \sim (\frac{v}{c} B)^2$ )

---

<sup>1</sup>Componentes de um tensor simétrico de segunda ordem que representa a transferência de momento causada pelas tensões de cisalhamento devidas a viscosidade  $\eta$ .

[58]. O último termo do lado direito de (2.29) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) &= \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{ijk} \partial_j B_k) (\varepsilon^{iml} v_m B_l) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{iml} (\partial_j B_k) v_m B_l \\
&= \frac{1}{4\pi} (\delta_j^m \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^m) (\partial_j B_k) v_m B_l \\
&= \frac{1}{4\pi} (\partial_j B_k) v_j B_k - \frac{1}{4\pi} (\partial_j B_k) v_k B_j \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} v_j \partial_j (B_k B_k) - \frac{1}{4\pi} v_k \partial_j (B_j B_k) \\
&= \frac{1}{4\pi} v_i \partial_j \left[ -B_i B_j + \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right] = -v_i \partial_j M_{ij}^{(MHD)}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Onde foi definido o tensor

$$M_{ij}^{(MHD)} = \frac{1}{4\pi} \left[ B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right]. \quad (2.31)$$

O termo  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita. A equação (2.31) é o tensor de Maxwell

$$M_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ij} \right], \quad (2.32)$$

com os produtos dos campos elétricos negligenciados, pois são pequenos em comparação aos demais termos em  $M_{ij}$  ( $E \sim \frac{v}{c} B$ ). A equação (2.29) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\partial_t \left( \frac{1}{8\pi} B^2 \right) = -\nabla \cdot \vec{S} - v_i \partial_j M_{ij}^{(MHD)}. \quad (2.33)$$

A eq.(2.33) é a taxa de variação da energia do campo magnético por unidade de volume em relação ao tempo. Aqui não está presente o termo referente a perda de energia devida à condutividade elétrica, pois para o fluido de nosso estudo, essa é considerada muito grande (infinita). Agora, para obter a taxa de variação da energia cinética, vamos tomar o produto escalar de  $\vec{v}$  com (2.23)

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla P + \frac{1}{4\pi \rho} \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{v}. \quad (2.34)$$

Multiplicando a equação (2.34) por  $\rho$  e somando a equação da continuidade, seu lado esquerdo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\rho (v_i \partial_t v_i + v_i (v_j \partial_j) v_i) &= \frac{1}{2} \rho (\partial_t v_i v_i) + \frac{1}{2} \rho v_j (\partial_j v_i v_i) \\
&= \frac{1}{2} \rho (\partial_t v^2) + \frac{1}{2} \rho v_j (\partial_j v^2) + \frac{1}{2} v^2 [\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j)] \\
&= \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left( \frac{1}{2} \rho v^2 v_j \right). \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Já o lado direito de (2.34) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 & - v_i \partial_i P + \frac{1}{4\pi} v_i \varepsilon_{ijk} \left( \varepsilon^{jlm} \partial_l B_m \right) B_k + v_i \partial_j \bar{\sigma}_{ij} \\
 & = -\partial_i (v_i P) + P \partial_i v_i + \frac{1}{4\pi} v_i B_k (\partial_k B_i) - \frac{1}{8\pi} v_i \partial_i (B_k B_k) + v_i \partial_j \bar{\sigma}_{ij} \\
 & = -\partial_i (P v_i) + \frac{1}{4\pi} v_i B_k (\partial_k B_i) - \frac{1}{8\pi} v_i \partial_i B^2 + \partial_j (v_i \bar{\sigma}_{ij}) - \bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i. \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Igualando as eqs.(2.35) e (2.36)

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left( \frac{1}{2} \rho v^2 v_j \right) & = -\partial_j (P v_j) + \frac{1}{4\pi} v_i B_k (\partial_k B_i) - \frac{1}{8\pi} v_i \partial_i B^2 \\
 & + \partial_j (v_i \bar{\sigma}_{ij}) - \bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i. \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Rearranjando e usando a definição de  $M_{ij}^{(MHD)}$ , a equação (2.37) torna-se

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \partial_j \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + P \right) v_j - v_i \bar{\sigma}_{ij} \right] = -\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i + v_i \partial_j M_{ij}^{(MHD)}. \quad (2.38)$$

Somando as eqs.(2.38) e (2.33), seguinte equação é encontrada

$$\partial_t \left( \frac{1}{8\pi} B^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \rho \frac{v^2}{2} + P \right) \vec{v} + \vec{S} - \vec{\sigma} \right] = -\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i. \quad (2.39)$$

Onde  $\vec{\sigma}$  tem componentes  $v_i \bar{\sigma}_{ij}$ . Para o termo do lado direito de (2.39) observa-se o seguinte

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i & = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \eta \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \\
 & = \eta \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\
 & = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 - \bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Que resulta em

$$\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i = \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \geq 0. \quad (2.41)$$

$\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i$  é positivo, ou igual a zero. Ou seja, em uma integração num volume qualquer que envolva o fluido, a soma de suas contribuições não resulta zero. Logo é um termo dissipativo para (2.39). Esse termo representa a perda de energia devido a viscosidade [58].



A partir daqui, podemos organizar as equações que descrevem a dinâmica para a Magnetohidrodinâmica como

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.44)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.45)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.46)$$

As equações (2.42)-(2.46) são necessárias para a MHD de um fluido condutor ideal incompressível [58, 6, 59].

Assim, com as equações para a MHD apresentadas prosseguimos para as próximas seções deste capítulo.

## 2.3 Densidade Lagrangiana Para a MHD

No célebre trabalho de William A. Newcomb de 1962 [22], este propôs pela primeira vez o princípio da ação para a MHD ideal, tanto em abordagem Lagrangiana, quanto em abordagem Euleriana, abrindo caminho para outros autores [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Um dos trabalhos acerca da hidrodinâmica em regime turbulento que merece destaque, é o de Haralambos Marmanis [21], onde através de equações obtidas em regime de escoamento turbulento para um fluido incompressível, são elaborados os conceitos de densidade de carga turbulenta e densidade de corrente turbulenta. Essas novas equações de movimento são construídas por meio da analogia entre as equações de Maxwell para o eletromagnetismo e as equações para a dinâmica do fluido <sup>2</sup>, levando em consideração um regime de escoamento turbulento [21]. Tais equações descrevem os valores macroscópicos das quantidades dinâmicas do fluido por meio de médias obtidas pela aplicação do método de filtragem de Russakoff [57, 60]. Dentre essas quantidades a serem apresentadas por seus valores médios, os campos fundamentais são a vorticidade  $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$  e o vetor de Lamb  $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$ .

Esta nova descrição da dinâmica de fluidos turbulentos foi apresentada por H. Marmanis como um caminho alternativo ao uso dos valores médios de  $\vec{v}(t, \vec{r})$

---

<sup>2</sup>Equação da continuidade, equação de Euler, equação para a variação da entalpia em termos da variação da pressão e da variação da entropia e a divergência do campo de velocidade.

e  $P(t, \vec{r})$  em equações não-lineares (Eq. de Navier-Stokes) na descrição do escoamento turbulento. Em sua formulação para o fluido incompressível, também chamada de Dinâmica Metafluida, H. Marmanis mostrou que a não-linearidade encontra-se nos termos que passam a ser definidos como fontes de turbulência para as equações de movimento. Essas equações de movimento são chamadas equações Tipo-Maxwell. Porém, vale ressaltar que estas fontes de turbulência (Densidade de carga e densidade de corrente turbulenta) não fornecem uma solução analítica para as equações Tipo-Maxwell, já que ambas são funções dos próprios campos que descrevem a dinâmica. As equações Tipo-Maxwell são dadas através das seguintes relações

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{l} + \nu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.48)$$

$$\nabla \cdot \vec{l} = n(\vec{x}, t), \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = c_0^2 \nabla \times \vec{w} - \vec{J}_{mf}(\vec{x}, t) + \nu \nabla n(\vec{x}, t) - \nu \nabla^2 \vec{l}, \quad (2.50)$$

onde  $c_0^2 = \langle v^2 \rangle$  é a média espacial do quadrado da velocidade de escoamento do fluido.  $n(t, \vec{r})$  e  $\vec{J}_{mf}(t, \vec{r})$  são a densidade de carga turbulenta e densidade de corrente turbulenta, respectivamente. Essas densidades são construídas de maneira que todos os termos que não podem ser expressos como funções somente de  $\vec{l}$  e  $\vec{w}$  durante a obtenção do sistema de equações (2.47)-(2.50), são tratados como termos para as densidades de carga e corrente turbulentas.  $n(t, \vec{r})$  e  $\vec{J}_{mf}(t, \vec{r})$  são dadas por

$$n(\vec{x}, t) = -\nabla^2 \phi, \quad (2.51)$$

$$\vec{J}_{mf}(\vec{x}, t) = \vec{v}n + \nabla \times [(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{v}] + \vec{w} \times \nabla (\phi + v^2) + 2(\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2.52)$$

onde

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} v^2, \quad (2.53)$$

é a função energia de Bernoulli [59]. Pode-se notar que, desta forma, as fontes de turbulência estão estritamente vinculadas à geometria do sistema sob análise, ou seja, dependentes do perfil por onde ocorre o escoamento [21].

É possível estabelecer uma Lagrangiana para a dinâmica metafluida partindo da analogia do sistema de equações Tipo-Maxwell (2.47)-(2.50) com as equações de Maxwell. Essa Lagrangiana foi obtida para um fluido viscoso em regime turbulento descrito por equações Tipo-Maxwell em [30]. Assim sendo, da densidade Lagrangiana dos campos livres para o eletromagnetismo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2), \quad (2.54)$$

estabelece-se a densidade Lagrangiana homogênea para um fluido viscoso incompressível em regime turbulento

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( |\vec{l}|^2 - a_0^2 |\vec{w}|^2 \right), \quad (2.55)$$

onde  $a_0^2 = \langle v^2 \rangle$  é a média espacial do quadrado da velocidade de escoamento. O vetor de Lamb é obtido a partir da equação de Navier-Stokes sem a presença da força de Lorentz através de

$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.56)$$

e a vorticidade  $\vec{w}$  é dada por

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v}. \quad (2.57)$$

Substituindo as eqs.(2.56) e (2.57) em (2.55), obtém-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} \right)^2 - \frac{1}{2} a_0^2 (\nabla \times \vec{v})^2. \quad (2.58)$$

Se calcularmos as equações de Euler-Lagrange em relação a  $\phi$  e  $\vec{v}$  para a Lagrangiana (2.58), obtemos as seguintes equações

$$\nabla \cdot \left( -\partial_t \vec{v} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} \right) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{l} = 0, \quad (2.59)$$

e a outra equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\partial_t \vec{v} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} \right) &= a_0^2 (\nabla \times \vec{w}) - \nu \nabla^2 \left( -\partial_t \vec{v} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} \right) \\ \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} &= a_0^2 \nabla \times \vec{w} - \nu \nabla^2 \vec{l}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

As eqs.(2.59) e (2.60) são as equações homogêneas para o sistema de equações (2.47)-(2.50). As outras duas equações são obtidas, uma através do divergente de (2.57) e a outra por meio da aplicação do rotacional à eq.(2.56) [30].

Agora, para que possamos estabelecer a conexão entre a dinâmica metafluida e a Magnetohidrodinâmica, propomos o acoplamento mínimo entre os campos do fluido e eletromagnético [31], [61]:

$$\vec{l} \rightarrow \vec{l} + \frac{e}{m} \vec{E}, \quad (2.61)$$

é o acoplamento mínimo entre o vetor de Lamb  $\vec{l}$  e o campo elétrico  $\vec{E}$ .

$$\vec{w} \rightarrow \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B}, \quad (2.62)$$

é o acoplamento mínimo entre a vorticidade e o campo magnético. A carga elétrica é  $e$ , e  $m$  é a massa do portador de carga. O vetor de Lamb agora passa a ser

$$\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Omega + \vec{k} + \frac{e}{m} \vec{E}, \quad (2.63)$$

onde  $\Omega = h + \frac{1}{2}v^2$  é chamada energia total,  $h$  é a entalpia por unidade de massa.  $\vec{k} = T\nabla s + \frac{1}{\rho}\nabla\bar{\sigma}$  contém as contribuições devido ao caráter estatístico e à viscosidade, respectivamente.  $T$  é a temperatura e  $s$  é a entropia por unidade de massa.

Substituindo (2.62) e (2.63) em (2.55), obtém-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \nabla\Omega + \vec{k} + \frac{e}{m}\vec{E} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m}\vec{B} \right)^2, \quad (2.64)$$

onde foi considerado  $a_0^2 = 1$ .

Os acoplamentos mínimos propostos em (2.61) e (2.62) podem ter suas validades testadas da seguinte maneira: calculando o momento conjugado à velocidade  $\vec{v}$  para a Lagrangiana (2.64)

$$\vec{\pi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{v}}} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\Omega - \vec{k} - \frac{e}{m}\vec{E} = -\vec{l}. \quad (2.65)$$

a equação (2.65) com o uso de  $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$  onde  $\vec{w} \Rightarrow \vec{w} + \frac{e}{m}\vec{B}$  pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\Omega - \vec{k} - \frac{e}{m}\vec{E} = - \left[ \left( \vec{w} + \frac{e}{m}\vec{B} \right) \times \vec{v} \right]. \quad (2.66)$$

E usando que  $\Omega = h + \frac{1}{2}v^2$  e  $\vec{k} = T\nabla s + \frac{1}{\rho}\nabla\bar{\sigma}$ , temos

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla h + \nabla \left( \frac{1}{2}v^2 \right) - T\nabla s - \frac{1}{\rho}\nabla\bar{\sigma} - \frac{e}{m}\vec{E} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{v} \times \frac{e}{m}\vec{B}. \quad (2.67)$$

Usando a relação para a variação de entalpia  $h$ ,  $\nabla h = \frac{1}{\rho}\nabla P + T\nabla s$ , a equação (2.67) fica

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{w} \times \vec{v} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}v^2 \right) + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{e}{m} \left[ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right]. \quad (2.68)$$

A equação (2.68) descreve a dinâmica de um fluido carregado submetido a força de Lorentz, ou seja, através do acoplamento mínimo (2.61) e (2.62) é possível escrever uma densidade Lagrangiana que incorpora a dinâmica metafluida para um fluido carregado imerso em um campo eletromagnético externo.

Na aproximação para a MHD de um fluido incompressível, considerando a eq.(2.22), pode-se reescrever a Lagrangiana (2.64) da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_{MHD} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \nabla \left( \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}v^2 \right) + \nu\nabla^2\vec{v} - \frac{e}{m}\vec{v} \times \vec{B} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[ \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m}\vec{B} \right]^2. \quad (2.69)$$

A Lagrangiana (2.69) traz a extensão da Dinâmica Metafluida para a MHD. A ligação que fundamenta essa extensão é a força de Lorentz que está presente na equação de Navier-Stokes para cargas elétricas na presença de campos eletromagnéticos. Vale lembrar que a densidade Lagrangiana (2.69) leva em conta a aproximação para um condutor ideal realizada na seção anterior.

Para a Lagrangiana (2.64) (ou (2.69) usando a expressão para  $\Omega$ ), pode-se escrever as seguintes equações de movimento para o campo eletromagnético

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Omega)} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Omega)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = 0, \quad (2.70)$$

que resulta

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Omega - \vec{k} - \frac{e}{m} \vec{E} \right] = 0. \quad (2.71)$$

Lembrando que  $\vec{l} = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Omega + \vec{k}$ , a eq.(2.71) fica

$$\nabla \cdot \vec{E} + \frac{m}{e} \nabla \cdot \vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \tilde{\vec{E}} = 0, \quad (2.72)$$

onde  $\tilde{\vec{E}} = \vec{E} + \frac{e}{m} \vec{l}$ . Para a outra equação de movimento

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \vec{v})} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \vec{v})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.73)$$

substituindo (2.64)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Omega - \vec{k} - \frac{e}{m} \vec{E} \right] - \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[ -\frac{1}{2} \left( \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.74)$$

O segundo termo do lado esquerdo da eq.(2.74) pode ser substituído por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_l} \left[ \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \frac{e}{m} B_i \right)^2 \right] &= \varepsilon_{imn} \partial_m \frac{\partial v_n}{\partial v_l} \left( \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \frac{e}{m} B_i \right) \\ &= \varepsilon_{ijl} \partial_l \left( \varepsilon_{ijl} \partial_j v_l + \frac{e}{m} B_i \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

ou seja,

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{m}{e} \vec{J}_l, \quad (2.76)$$

onde  $\vec{J}_l = \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \nabla \times \vec{w}$ . O rótulo  $l$  em  $\vec{J}_l$  serve para indicar que a equação (2.76) é oriunda dos acoplamentos mínimos (2.61) e (2.62). As equações (2.72) e (2.76) são as equações de Maxwell para a MHD com termos de fonte devido ao fluido. As outras duas equações de Maxwell permanecem as mesmas, Lei de Faraday e divergente de  $\vec{B}$ .

Decorrente da aproximação não-relativística para a MHD, a Lei de Ampère é

$$\vec{J} = \rho_e \vec{v} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \vec{B}, \quad (2.77)$$

onde como antes,  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica. Substituindo (2.77) em (2.64) e usando

$$-\frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{e}{m} \left( \vec{B} \times \nabla \times \vec{B} \right) \frac{1}{4\pi \rho_e} = \frac{1}{4\pi \rho} \left[ \frac{1}{2} \nabla \left( \vec{B} \cdot \vec{B} \right) - \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \right], \quad (2.78)$$

pois  $\frac{e}{m} \frac{1}{4\pi\frac{e}{\tilde{v}}} = \frac{V}{4\pi m} = \frac{1}{4\pi\rho}$ , obtém-se

$$\mathcal{L}_{MHD} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla\phi + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \nabla\vec{B} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2, \quad (2.79)$$

com  $\phi$  definido da seguinte maneira

$$\phi = \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} v^2 + \frac{B^2}{8\pi\rho}. \quad (2.80)$$

O terceiro termo do lado direito da equação (2.80) (Advindo da força de Lorentz presente na equação de Navier-Stokes escrita na aproximação para a MHD de um fluido condutor ideal) tem o caráter de um termo de pressão devido ao campo magnético e a densidade do fluido [Apêndice C].

A equação de Navier-Stokes para esta formulação pode ser obtida através do momento conjugado à velocidade, ou seja,

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{MHD}}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\phi - \nu\nabla^2\vec{v} - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \nabla\vec{B} = -\vec{l}, \quad (2.81)$$

onde  $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$  é o vetor de Lamb, pois a equação de Navier-Stokes (2.23) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{l} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} v^2 + \frac{B^2}{8\pi\rho} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \nu\nabla^2\vec{v}. \quad (2.82)$$

Realizando a transformação de Legendre  $\mathcal{H} = \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{v}} - \mathcal{L}_{MHD}$  (ou seja,  $\vec{\pi}$  e  $\vec{v}$  formam um par canônico), pode-se obter a densidade Hamiltoniana  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla\phi + \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla\phi + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla\phi + \nu\vec{\pi} \cdot \nabla^2\vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Podemos obter de (2.83) as equações de movimento usando os parênteses de Poisson. Os parênteses de Poisson para os campos básico  $v_i(t, \vec{x})$  e  $\pi_j(t, \vec{x})$  são

$$\begin{aligned} \left\{ v_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t) \right\} &= \int d^3x' \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\delta v_i(\vec{x}, t)}{\delta v_k(\vec{x}', t)} \frac{\delta \pi^j(\vec{y}, t)}{\delta \pi^k(\vec{x}', t)} - \frac{\delta v_i(\vec{x}, t)}{\delta \pi^k(\vec{x}', t)} \frac{\delta \pi^j(\vec{y}, t)}{\delta v_k(\vec{x}', t)} \right\} \\ &= \int d^3x' \sum_{k=1}^3 \delta_k^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta_k^j \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}') = \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Ou seja,

$$\{v_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t)\} = -\{\pi^j(\vec{x}, t), v_i(\vec{y}, t)\} = \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.85)$$

$$\{v_i(\vec{x}, t), v_j(\vec{y}, t)\} = \{\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)\} = 0. \quad (2.86)$$

Nas eqs.(2.84)-(2.86) os campos  $v_i(t, \vec{x})$  e  $\pi_j(t, \vec{x})$  são dados pelos funcionais

$$v_i(\vec{x}, t) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') v_i(\vec{x}', t) \quad (2.87)$$

e

$$\pi_j(\vec{x}, t) = \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \pi_j(\vec{x}', t). \quad (2.88)$$

A partir da densidade Hamiltoniana (2.83) e das relações (2.85) e (2.86) obtém-se a equação dinâmica para a velocidade

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}(\vec{x}) = \{\vec{v}(\vec{x}), H(\vec{y})\} &= \int d^3y \int d^3y' \left\{ \frac{\delta \vec{v}(\vec{x})}{\delta v(\vec{y}')} \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \vec{\pi}(\vec{y}')} - \frac{\delta \vec{v}(\vec{x})}{\delta \vec{\pi}(\vec{y}')} \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta v(\vec{y}')} \right\} \\ &= \int d^3y d^3y' \left\{ \delta(\vec{x} - \vec{y}') \left[ \vec{\pi}(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}') - \nabla \phi(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \nabla^2 \vec{v}(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}') + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B}(\vec{y}) \cdot \nabla_y) \vec{B}(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Resultando, portanto em

$$\dot{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{\pi}(\vec{x}) - \nabla \phi(\vec{x}) + \nu \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{x}), \quad (2.90)$$

ou

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \phi - \nu \nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = -\vec{l}, \quad (2.91)$$

que é a equação de Navier-Stokes (2.81). O resultado (2.91) reafirma a escolha de (2.85) e (2.86).

A equação para a dinâmica de  $\vec{\pi}$ , momento conjugado à velocidade, é

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i(\vec{x}) &= \{\pi_i(\vec{x}), H(\vec{y})\} = \int d^3y \{\pi_i(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} \\ &= \int d^3y \int d^3y' \left\{ \frac{\delta \pi_i(\vec{x})}{\delta v_k(\vec{y}')} \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \pi_k(\vec{y}')} - \frac{\delta \pi_i(\vec{x})}{\delta \pi_k(\vec{y}')} \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta v_k(\vec{y}')} \right\} \\ &= \int d^3y \int d^3y' \left\{ -\delta_{ik} \delta(\vec{x} - \vec{y}') \left[ \frac{\delta \nu \pi_j(\vec{y}) \nabla_y^2 v_j(\vec{y})}{\delta v_k(\vec{y}')} + \frac{1}{2} \frac{\delta (\varepsilon_{jlm} \partial_l v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j)^2}{\delta v_k(\vec{y}')} \right] \right\} \\ &= \int d^3y \int d^3y' \left\{ -\delta_{ik} \delta(\vec{x} - \vec{y}') [\nu \pi_j(\vec{y}) \nabla_y^2 \delta_{jk} \delta(\vec{y} - \vec{y}')] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{jlm} \partial_l^y \delta_{mk} \delta(\vec{y} - \vec{y}') (\varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m + \frac{e}{m} B_j) \right\} \\ &= \int d^3y \left\{ -\delta_{ij} \nu \pi_j \nabla_y^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \varepsilon_{jlm} \partial_l^y \delta_{im} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m + \frac{e}{m} B_j \right) \right\} \\ &= -\nu \nabla_x^2 \pi_i - \varepsilon_{jli} \partial_l^x \left( \varepsilon_{jlk} \partial_l^x v_k + \frac{e}{m} B_j \right). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Em forma vetorial

$$\dot{\vec{\pi}} = -\nu \nabla^2 \vec{\pi} + \nabla \times \vec{w} + \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B}. \quad (2.93)$$

Note a dependência de  $\dot{\vec{\pi}}$  em termos do campo magnético  $\vec{B}$  e da vorticidade  $\vec{w}$  por meio do acoplamento mínimo (2.62).

## 2.4 Comportamento Ondulatório em MHD

O estudo do comportamento ondulatório dos campos que descrevem a Magnetohidrodinâmica, é de grande relevância devido à ocorrência de ondas, que só podem ser observadas em um fluido eletricamente condutor na presença de campos magnéticos. Essas ondas devem-se essencialmente ao termo de tensão magnética

$$\frac{B^2}{4\pi\rho} \frac{1}{r}, \quad (2.94)$$

onde  $B$  é o módulo do campo magnético e  $\rho$  é a densidade de massa. Como mostrado na [Apêndice C], o termo (2.94) (Devido a força de Lorentz) age de modo a tornar as linhas de campo magnético retas (Raio de curvatura infinito), se opondo a qualquer curvatura imposta às linhas de campo magnético através do fluxo descrito pelo campo de velocidade  $\vec{v}(t, \vec{r})$ . Este movimento transversal das linhas de campo magnético devido a velocidade de escoamento do fluido causa oscilações, e a essas é dado o nome de ondas de Alfvén [57].

As oscilações em um fluido eletricamente condutor podem ser divididas em duas partes. A primeira, na qual são válidas para a interação do fluido com campos eletromagnéticos de baixa-frequência ( $w < 20MHz$  [62], por exemplo). E a segunda, de oscilações em Plasmas, caracterizadas pela interação do fluido com campos eletromagnéticos de alta-frequência ( $w > 20MHz$ ). A segunda, gera separação de cargas elétricas e dos íons no fluido carregado, ocasionando variação na densidade de carga elétrica (Entre elétrons e íons), e por consequência, na densidade de corrente. Essa separação é contrabalanceada por forças eletrostáticas de alta-intensidade que tentam restaurar a configuração inicial das cargas, gerando assim oscilações dos portadores de cargas, porém não do meio ao qual compõem. A essas oscilações dá-se o nome oscilações em Plasma [57], [62]. Para baixas-frequências ocorrem oscilações do próprio meio (oscilações do próprio fluido), a essas dá-se o nome Ondas em Magnetohidrodinâmica [57]. Esses comportamentos distintos dependentes dos valores de frequência  $w$  do campo eletromagnético externo são provenientes de suas relações com a frequência de colisões dos portadores de cargas, que além de imersos no campo eletromagnético, experimentam uma força (força de arraste da forma  $w_{ar} m \vec{v}$ ,  $w_{ar}$  é a frequência de colisões) que se opõem ao seu movimento [57].



Uma importante análise a ser feita sobre as linhas de campo magnético pertencentes ao fluido carregado, concerne à equação de indução do campo magnético (2.20), ou seja,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.95)$$

Como já mencionado, a equação (2.95) é responsável pela descrição do transporte, ou difusão das linhas de campo magnético pelo fluido. Iniciemos nossa análise pelo fenômeno de transporte das linhas de campo magnético pelo fluido: suponhamos que uma superfície  $\gamma$  mova-se junto ao fluido, ou seja, uma superfície material. O fluxo de campo magnético através desta superfície é dado pela integral dupla

$$\Phi = \iint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{n}, \quad (2.96)$$

onde  $d\vec{n}$  é o elemento de área orientada da superfície  $\gamma$ . Para que possamos calcular a variação do fluxo magnético, façamos: seja  $\gamma$  a superfície no instante  $t$  e  $\gamma'$  a superfície em um instante de tempo posterior  $t+dt$ , devido ao movimento do fluido. A superfície  $\gamma$  movimenta-se com velocidade  $\vec{v}(t, \vec{x})$ , de modo que no instante  $t+dt$  é formado um volume fechado cujas "tampas" são  $\gamma$ ,  $\gamma'$  e com área lateral  $S$  com elemento de área  $d\vec{l} \times \vec{v}dt$ .  $d\vec{l}$  é o elemento de linha do contorno de  $\gamma$ . Das equações de Maxwell sabemos que para um volume qualquer  $V$ , vale a igualdade

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0. \quad (2.97)$$

Sendo  $V$  o volume delimitado pelas superfícies  $\gamma$ ,  $\gamma'$  e  $S$  temos para o instante  $t+dt$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = - \iint_{\gamma} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{n}_{\gamma} + \iint_{\gamma'} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{n}_{\gamma'} + \iint_S \vec{B}(t+dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}dt) = 0. \quad (2.98)$$

O sinal negativo na primeira integral do lado direito de (2.98) é devido aos vetores normais apontarem sempre para fora do volume. A variação do fluxo magnético é dada por

$$d\Phi = \iint_{\gamma'} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{n}_{\gamma'} - \iint_{\gamma} \vec{B}(t) \cdot d\vec{n}_{\gamma}. \quad (2.99)$$

Substituindo (2.98) em (2.99), obtém-se

$$\begin{aligned} d\Phi &= \iint_{\gamma'} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{n}_{\gamma'} - \iint_{\gamma} \vec{B}(t) \cdot d\vec{n}_{\gamma} - \iint_S \vec{B}(t+dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}dt) \\ &= \iint_{\gamma'} [\vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{n}_{\gamma'} - \vec{B}(t) \cdot d\vec{n}_{\gamma}] - \iint_S \vec{B}(t+dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}dt). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Para  $dt \rightarrow 0$ , o integrando do primeiro termo do lado direito de (2.100) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$d\Phi = \iint_{\gamma} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{n}_{\gamma} \right] dt - \oint_{\partial_{\gamma}} \left[ \vec{B}(t+dt) \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) \right] dt. \quad (2.101)$$

A segunda integral do lado direito de (2.101) é uma integral de linha cujo domínio de integração é o contorno da superfície  $\gamma$  ( $\partial_{\gamma}$ ). Em primeira ordem em  $dt$ , o argumento do campo magnético na integral de linha pode ser trocado por  $\vec{B}(t)$ . Assim a equação (2.101) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{\gamma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{n}_{\gamma} - \oint_{\partial_{\gamma}} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}). \quad (2.102)$$

Aplicando permutação cíclica ao produto misto e o teorema de Stokes à segunda integral, fica

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{\gamma} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{n}_{\gamma} = 0. \quad (2.103)$$

A última igualdade é possível devido a equação de indução para um fluido condutor ideal,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (2.104)$$

A equação (2.103) prova que para um fluido condutor ideal, as linhas de campo magnético estão fixadas no fluido de modo a acompanharem o escoamento, ou seja, o fluxo magnético através de uma superfície que move-se junto ao fluido não muda com o passar do tempo. O resultado (2.103) é conhecido como teorema de Alfvén para um fluido condutor perfeito [63]. Agora, para o fenômeno de difusão das linhas de campo magnético ao longo do fluido. Uma importante quantidade adimensional usada para distinguir, por meio da equação de indução (2.95), se o campo magnético encontra-se em um regime de transporte onde está "congelado" no fluido, ou se está em um regime de difusão, é o número de Reynolds magnético  $R_M$  dado por

$$R_M = \frac{4\pi\sigma V}{c^2} L, \quad (2.105)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $\sigma$  é a condutividade elétrica,  $V$  a velocidade característica para o sistema e  $L$  o comprimento típico para o sistema. Para  $R_M \gg 1$ , o campo magnético encontra-se em regime de transporte, por exemplo. Esse regime pode se alcançado para uma condutividade muito grande, ou para um tempo de observação do sistema muito menor que o tempo de difusão das linhas de campo magnético. O tempo de difusão do campo magnético pelo fluido é dado por [57]

$$\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}. \quad (2.106)$$

O tempo de difusão  $\tau$  é obtido considerando o regime no qual processos difusivos são dominantes, ou seja, quando a condutividade do meio é pequena e/ou a velocidade de escoamento é muito pequena de modo a não influenciar o campo magnético  $\vec{B}$ . Este regime é caracterizado por  $R_M \ll 1$ . Quando a velocidade  $\vec{v}(t, \vec{x})$  é nula, a equação (2.95) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B}. \quad (2.107)$$

A equação (2.107) descreve a difusão do campo magnético através do meio eletricamente condutor. Dessa equação é possível obter o tempo de difusão  $\tau$  [57]. O significado físico de (2.107) pode ser entendido através da analogia com a equação de difusão de calor

$$\frac{\partial T(t, \vec{x})}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T(t, \vec{x}). \quad (2.108)$$

Ou seja, assim como para a temperatura o campo magnético deve se difundir através do meio partindo de um valor inicial  $B_0$  em um instante de tempo  $t_0$ . Na equação (2.108)  $T(t, \vec{x})$  é a distribuição de temperatura no meio e  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade chamada coeficiente de difusividade térmica e tem dimensão de  $\left(\frac{m^2}{s}\right)$ .

O estudo do comportamento ondulatorio em MHD é realizado para  $R_M \gg 1$ , ou seja, as linhas de campo magnético encontram-se movendo fixas ao fluido.

### 2.4.1 Relação de Dispersão em MHD

Após a descrição apresentada acima sobre a natureza do fluido condutor carregado e o campo magnético que o permeia, analisemos as relações de dispersão associadas às ondas em MHD. Para que se possa obter as relações de dispersão, faz-se necessário um longo trabalho algébrico com as equações de onda. Por isso, a fim de simplificar tal trabalho, ao invés de partir das equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana homogênea

$$\mathcal{L}_{MHD} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Phi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2, \quad (2.109)$$

onde<sup>3</sup>  $\Phi = \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} v^2 + \frac{B^2}{8\pi\rho}$ , definimos a Lagrangiana de interação responsável por conter os termos de fonte turbulentas, ou seja, densidade de carga e densidade de corrente turbulentas. A seguinte Lagrangiana de interação é definida como sendo [30]

$$\mathcal{L}_{int} = \vec{J}_{mf} \cdot \vec{v} - n\phi - \nu \vec{v} \cdot \nabla n, \quad (2.110)$$

---

<sup>3</sup>Usaremos nesta seção  $\Phi$  para a expressão contendo o termo de pressão magnética e  $\phi$  será reservado para a função energia de Bernoulli. No próximo capítulo,  $\phi$  voltará a ser como em (2.80), será indicado quando ocorrer essa troca.

onde  $\vec{J}_{mf}$  (equação (2.52)) é densidade de corrente e  $n$  (equação (2.51)) a densidade de carga turbulenta.  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\phi = \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}v^2$  é a função energia de Bernoulli [64]. A nova Lagrangiana será dada por  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{MHD} + \mathcal{L}_{int}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \Phi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2 \\ & + \vec{J}_{mf} \cdot \vec{v} - n\phi - \nu \vec{v} \cdot \nabla n. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Na ausência do campo eletromagnético a Lagrangiana (2.111), quando obtidas as equações de Euler-Lagrange para os campos  $\phi$  e  $\vec{v}$ , reproduz as equações (2.49) e (2.50) que são as equações Tipo-Maxwell da dinâmica metafluida com os termos de fonte [30].

Reescrevendo a Lagrangiana (2.111) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right)^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2 \\ & + \vec{J}_{mf} \cdot \vec{v} - n\phi - \nu \vec{v} \cdot \nabla n, \end{aligned} \quad (2.112)$$

onde é possível manter somente  $\phi = \frac{1}{\rho}P + \frac{1}{2}v^2$  em toda a expressão (2.112) e  $a_0^2$  foi recuperada por análise dimensional, pois será vantajoso manter nos cálculos para as relações de dispersão. Para a obtenção de (2.112) foi usado

$$\frac{e}{m} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\rho_e} \frac{e}{m} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi} \frac{V}{e} \frac{e}{m} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}), \quad (2.113)$$

na expressão (2.69), onde  $V$  é uma medida de volume.

Para a obtenção da equação de movimento, aplicamos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t v_l)} \right) + \partial_p \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_p v_l)} \right) - \partial^2 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^2 v_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_l} = 0. \quad (2.114)$$

Através da Lagrangiana (2.112), obtém-se a seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\tilde{l}_l) - a_0^2 \varepsilon_{ipl} \partial_p \left( \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k + \frac{e}{m} B_i \right) - \nu \partial^2 (\tilde{l}_l) - J_{(mf)l} + \nu \partial_l n = 0, \quad (2.115)$$

onde

$$\tilde{l}_i = -\partial_t v_i - \partial_i \phi + \nu \partial^2 v_i + \frac{1}{4\pi\rho} \varepsilon_{ijk} B_j \varepsilon_{kmn} \partial_m B_n. \quad (2.116)$$

Em notação vetorial, (2.115) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\vec{l}} = a_0^2 \nabla \times (\tilde{\vec{w}}) - \nu \nabla^2 \tilde{\vec{l}} - \vec{J}_{mf} + \nu \nabla n, \quad (2.117)$$

que é a equação (2.76) com os termos de fonte e  $\vec{w} = \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B}$ . Para que possamos encontrar as relações de dispersão, explicitemos  $\vec{l}$  em (2.117)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right) = a_0^2 \nabla \times \left( \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B} \right) - \vec{J}_{mf} + \nu \nabla n \\ & - \nu \nabla^2 \left( -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \cancel{\nu \nabla^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] = a_0^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + a_0^2 \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B} \\ & - \vec{J}_{mf} + \cancel{\nu \nabla n} + \cancel{\nu \nabla^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\nu \nabla^2 (\nabla \phi)} - \nu^2 \nabla^4 \vec{v} - \frac{\nu}{4\pi\rho} \nabla^2 (\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Usando a identidade  $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$ , temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - a_0^2 \nabla^2 \vec{v} + a_0^2 \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B} - \vec{J}_{mf} - \nu^2 \nabla^4 \vec{v} \\ & - \frac{\nu}{4\pi\rho} \nabla^2 (\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})) = 0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Decompondo  $\vec{J}_{mf}$  (decomposição de Helmholtz) em uma componente  $\vec{J}_{(mf)\parallel}$  (longitudinal) e uma componente  $\vec{J}_{mf\perp}$  (solenoidal), isto é  $\vec{J}_{mf} = \vec{J}_{mf\parallel} + \vec{J}_{mf\perp}$ , onde  $\vec{J}_{mf\parallel} = \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$ , a equação (2.120) escreve-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - a_0^2 \nabla^2 \vec{v} + a_0^2 \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B} - \nu^2 \nabla^4 \vec{v} \\ & - \frac{\nu}{4\pi\rho} \nabla^2 (\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})) = \vec{J}_{mf\perp}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

A partir de agora, consideremos o caso homogêneo, ou seja, sem termos de fonte. Considerando que o sistema encontrasse em um estado de equilíbrio estacionário, onde  $\vec{B}_0$  é um campo uniforme e constante, e  $\vec{v}_0$  (velocidade do estado estacionário) é nula. A partir disso, suponhamos que ocorram pequenas variações dessas quantidades representadas por  $\vec{B}_1$  e  $\vec{v}_1$ , de modo que estes campos sejam representados por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{x}, t), \quad (2.122)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1(\vec{x}, t). \quad (2.123)$$

Com o objetivo de que a eq.(2.121) seja linearizada nas quantidades com índice 1, os termos de segunda ordem, ou maior, quantidades serão descartados. Substituindo

(2.122) e (2.123) em (2.121), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{B}_1)] &= a_0^2 \nabla^2 \vec{v}_1 + a_0^2 \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B}_1 - \nu^2 \nabla^4 \vec{v}_1 \\ &- \frac{\nu}{4\pi\rho} \nabla^2 (\vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{B}_1)) = 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Para o segundo termo de (2.124), usando a equação de indução para a MHD ideal

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.125)$$

fica

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{B}_1)) = \vec{B}_0 \times \left( \nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) = \vec{B}_0 \times \left[ \nabla \times (\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)) \right]. \quad (2.126)$$

Assim, temos para a eq.(2.124)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 \vec{v}_1 + a_0^2 \frac{e}{m} \nabla \times \vec{B}_1 - \nu^2 \nabla^4 \vec{v}_1 &= \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B}_0 \times \left[ \nabla \times (\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)) \right] \\ &- \frac{\nu}{4\pi\rho} \nabla^2 (\vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{B}_1)) = 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Considerando as soluções em ondas planas para  $\vec{v}_1(\vec{x}, t)$  e  $\vec{B}_1(\vec{x}, t)$

$$\vec{v}_1(\vec{x}, t) = \vec{v}_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (2.128)$$

$$\vec{B}_1(\vec{x}, t) = \vec{B}_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}. \quad (2.129)$$

Substituindo na equação (2.127), obtém-se

$$\begin{aligned} -\omega^2 \vec{v}_1 + a_0^2 k^2 \vec{v}_1 + a_0^2 \frac{e}{m} i\vec{k} \times \vec{B}_1 - \nu^2 k^4 \vec{v}_1 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B}_0 \times \left[ \vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)) \right] \\ &+ \frac{\nu}{4\pi\rho} i k^2 (\vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{B}_1)) = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Aplicando à equação de indução as relações (2.122) e (2.123), obtém-se

$$-w \vec{B}_1 = \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_1), \quad (2.131)$$

mantendo somente os termos de primeira ordem nas perturbações, (2.131) resulta em

$$\vec{B}_1 = -\frac{1}{w} \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0). \quad (2.132)$$

Com a equação (2.132), podemos escrever o terceiro e o sexto termo de (2.130) da seguinte maneira

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 = -\frac{1}{w} \vec{k} \times \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0), \quad (2.133)$$

em notação indicial, os produtos vetoriais do lado direito de (2.133) ficam

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} k_j \left[ \varepsilon_{klm} k_l \left( \varepsilon_{mnp} v_{(1)n} B_{(0)p} \right) \right] &= \varepsilon_{ijk} k_j \left[ \varepsilon_{mkl} \varepsilon^{mnp} k_l v_{(1)n} B_{(0)p} \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} k_j \left[ (\delta_k^n \delta_l^p - \delta_k^p \delta_l^n) k_l v_{(1)n} B_{(0)p} \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} k_j \left[ k_l v_{(1)k} B_{(0)l} - k_l v_{(1)l} B_{(0)k} \right]. \\ &= \varepsilon_{ijk} k_j \left[ (k_l B_{(0)l}) v_{(1)k} - (k_l v_{(1)l}) B_{(0)k} \right]. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Em forma vetorial, pode-se escrever

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 = -\frac{1}{w} \left[ (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{k} \times \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \times \vec{B}_0) \right], \quad (2.135)$$

e para o produto vetorial duplo

$$\vec{B}_0 \times \vec{k} \times \vec{B}_1 = -\frac{1}{w} \vec{B}_0 \times \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{v}_1 \times \vec{B}_0. \quad (2.136)$$

Vemos que o sexto termo em (2.130), após a uso de (2.132) é proporcional ao quinto termo em (2.130). Assim temos

$$\begin{aligned} w^2 \vec{v}_1 &- a_0^2 k^2 \vec{v}_1 + \nu^2 k^4 \vec{v}_1 + \frac{ia_0^2 e}{wm} \left[ (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{k} \times \vec{v}_1) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \times \vec{B}_0) \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{i\nu k^2}{w} \right) \left[ (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) B_0^2 \vec{k} \right. \\ &\left. + (\vec{B}_0 \cdot \vec{k}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.137)$$

A fim de extrair informações relacionadas às relações de dispersão da equação (2.137), analisemos por partes. Primeiro caso, quando  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ , ou seja,  $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ . Da equação (2.137), aplicando  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ , obtêm-se

$$w^2 \vec{v}_1 - a_0^2 k^2 \vec{v}_1 + \nu^2 k^4 \vec{v}_1 - \frac{ia_0^2 e}{wm} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k} \times \vec{B}_0 - \frac{1}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{i\nu k^2}{w} \right) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) B_0^2 \vec{k} = 0. \quad (2.138)$$

Tomemos, sem perda de generalidade, os seguintes vetores em termos da base ortonormal  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z, \quad (2.139)$$

$$\vec{v}_a = v_a \hat{e}_z, \quad (2.140)$$

onde  $\vec{v}_a$  é a velocidade de Alfvén [57], dada pela expressão

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (2.141)$$

E por fim

$$\vec{k} = k_x \hat{e}_x + k_z \hat{e}_z \quad (2.142)$$

e

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \hat{e}_x + v_{1y} \hat{e}_y + v_{1z} \hat{e}_z. \quad (2.143)$$

Substituindo (2.139), (2.140), (2.142) e (2.143) em (2.138), resulta a seguinte equação

$$\tilde{w}^2 \vec{v}_1 + \frac{ia_0^2 e}{wm} (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) k_x B_0 \hat{e}_y - \frac{1}{4\pi\rho} \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) B_0^2 \vec{k} = 0. \quad (2.144)$$

Onde  $\tilde{w}^2 = w^2 - a_0^2 k^2 + \nu^2 k^4$ . Separando as componentes da equação (2.144), temos para a direção  $\hat{e}_x$

$$\begin{aligned} \tilde{w}^2 v_{1x} - A (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) B_0^2 k_x &= 0, \\ (\tilde{w}^2 - k_x^2 B_0^2 A) v_{1x} - k_x k_z A B_0^2 v_{1z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.145)$$

onde  $A = \frac{1}{4\pi\rho} \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right)$ . Para a componente na direção  $\hat{e}_y$

$$\begin{aligned} \tilde{w}^2 v_{1y} + D (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) k_x B_0 &= 0, \\ k^2 B_0 D v_{1x} + \tilde{w}^2 v_{1y} + k_x k_z B_0 D v_{1z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.146)$$

com  $D = \frac{ia_0^2 e}{wm}$ . Finalmente para a componente na direção  $\hat{e}_z$

$$\begin{aligned} \tilde{w}^2 v_{1z} - A (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) B_0^2 k_z &= 0, \\ -A B_0^2 k_z k_x v_{1x} + (\tilde{w}^2 - A k_z^2 B_0^2) v_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.147)$$

As três componentes podem ser organizadas através do produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}^2 - k_x^2 B_0^2 A & 0 & -A k_x k_z B_0^2 \\ D k_x^2 B_0 & \tilde{w}^2 & D k_x k_z B_0 \\ -A B_0^2 k_x k_z & 0 & (\tilde{w}^2 - A k_z^2 B_0^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.148)$$

O sistema representado pelo produto de matrizes (2.148) admite uma solução não-trivial, se o determinante da matriz  $3 \times 3$  for igual a zero. Desse modo, escreve-se a equação característica

$$\left(\tilde{w}^2 - k_x^2 B_0^2 A\right) \tilde{w}^2 \left(\tilde{w}^2 - A k_z^2 B_0^2\right) - A^2 k_x^2 k_z^2 \tilde{w}^2 = 0. \quad (2.149)$$



Mas, como  $\vec{k} \perp B_0 \hat{e}_z$ , então  $k_x \neq 0$  e  $k_z = 0$ . Logo a equação (2.149) resulta em

$$\tilde{w}^4 \left( \tilde{w}^2 - Ak_x^2 B_0^2 \right) = 0. \quad (2.150)$$

Analisando a equação (2.150), pode-se extrair as seguintes relações de dispersão. De  $\tilde{w}^4 = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} w^2 - a_0^2 k_x^2 + \nu^2 k_x^4 &= 0, \\ w &= \pm k_x \sqrt{a_0^2 + \nu^2 k_x^2}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Ou seja, a relação de dispersão é

$$w(k_x) = \pm a_0 k_x \sqrt{1 - \frac{\nu^2 k_x^2}{a_0^2}}. \quad (2.152)$$

A relação de dispersão (2.152) é o mesmo resultado obtido por H. Marmanis [21] e é independente do campo magnético.

De  $(\tilde{w}^2 - Ak_x^2 B_0^2) = 0$  pode-se extrair

$$w^2 - a_0^2 k_x^2 + \nu^2 k_x^4 - Ak_x^2 B_0^2 = 0, \quad (2.153)$$

ou

$$w^2 = a_0^2 k_x^2 - \nu^2 k_x^4 + \frac{1}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{i\nu k_x^2}{w} \right) k_x^2 B_0^2. \quad (2.154)$$

Usando a velocidade de Alfvén

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \rightarrow v_a^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho} \quad (2.155)$$

pode-se reescrever a equação (2.154)

$$w^2 = a_0^2 k_x^2 - \nu^2 k_x^4 + \left( 1 - \frac{i\nu k_x^2}{w} \right) k_x^2 v_a^2. \quad (2.156)$$

Considerando o caso em que a viscosidade é muito pequena,  $\nu \rightarrow 0$ , temos da equação (2.156)

$$w^2 = a_0^2 k_x^2 + k_x^2 v_a^2. \quad (2.157)$$

Resultando na velocidade de fase

$$\frac{w}{k_x} = \sqrt{a_0^2 + v_a^2}. \quad (2.158)$$

Voltando na equação (2.156),

$$w^2 = \left( a_0^2 + v_a^2 \right) k_x^2 - \nu^2 k_x^4 - \frac{i\nu k_x^2}{w} k_x^2 v_a^2 \quad (2.159)$$

e da equação (2.158), ou seja considerando ainda  $\nu$  muito pequeno mas não desprezível, podemos reescrever  $k_x^2$  em termos de  $k^2$  já que  $k_z^2 = 0$ , ou seja,

$$k_x^2 = k^2 = \frac{w^2}{a_0^2 + v_a^2}. \quad (2.160)$$

Substituindo (2.160) nos dois últimos termos de (2.159),  $w^2$  será aproximadamente

$$w^2 \approx (a_0^2 + v_a^2) k^2 - \nu^2 \frac{w^2}{(a_0^2 + v_a^2)} \frac{w^2}{(a_0^2 + v_a^2)} - \frac{i\nu}{\omega} \frac{w^2}{(a_0^2 + v_a^2)} \frac{w^2}{(a_0^2 + v_a^2)} v_a^2. \quad (2.161)$$

Como  $\nu$  é muito pequeno, vamos descartar o termo com  $\nu^2$

$$\begin{aligned} (a_0^2 + v_a^2) k^2 &\approx w^2 + i \frac{\nu w^3}{(a_0^2 + v_a^2)^2} v_a^2 \\ &\approx w^2 \left( 1 + i \frac{\nu w}{(a_0^2 + v_a^2)^2} v_a^2 \right). \end{aligned} \quad (2.162)$$

Explicitando o vetor de onda

$$k \approx \frac{w}{\sqrt{a_0^2 + v_a^2}} \left( 1 + i \frac{\nu v_a^2}{(a_0^2 + v_a^2)^2} w \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.163)$$

Fazendo a expansão em série de potências para o termo contendo  $\nu$ , já que  $\frac{i\nu v_a^2 w}{(a_0^2 + v_a^2)^2} \ll 1$ , obtêm-se

$$k \approx \frac{w}{\sqrt{a_0^2 + v_a^2}} + iw^2 \left( \frac{\nu v_a^2}{2(a_0^2 + v_a^2)^{\frac{5}{2}}} \right). \quad (2.164)$$

Podemos ver que a atenuação na amplitude da onda cresce rapidamente com a frequência  $w$ , porém também decresce com o aumento do campo  $\vec{B}_0$ , já que o último termo em (2.164) é proporcional a

$$\sim i \frac{w^2}{v_a^3}, \quad (2.165)$$

representando uma rápida diminuição na amplitude da onda.

Segundo caso,  $\vec{k} \parallel \vec{v}_a$ , com  $\vec{v}_a = v_a \hat{e}_z$ ,  $\vec{k} = k_z \hat{e}_z$  e  $\vec{k} \times \vec{B}_0 = 0$ . Da equação (2.137), obtêm-se

$$\begin{aligned} w^2 \vec{v}_1 &- a_0^2 k^2 \vec{v}_1 + \nu^2 k^4 \vec{v}_1 + \frac{ia_0^2 e}{\omega m} k B_0 (\vec{k} \times \vec{v}_1) + \frac{1}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{i\nu k^2}{w} \right) \left[ k B_0 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{k} \right. \\ &- \left. k^2 B_0^2 \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) B_0^2 \vec{k} + B_0 k (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Como  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ , então  $\vec{k} = \frac{k}{B_0} \vec{B}_0$ . Tendo  $\vec{k}$  e  $\vec{B}_0$  o mesmo sentido. Substituindo nos 2 últimos termos da equação (2.166)

$$\begin{aligned} w^2 \vec{v}_1 &= a_0^2 k^2 \vec{v}_1 + \nu^2 k^4 \vec{v}_1 + \frac{ia_0^2 e}{wm} k \cancel{B_0} \frac{k}{B_0} (\vec{B}_0 \times \vec{v}_1) + \frac{1}{4\pi\rho} \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) \left[ k \cancel{B_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \frac{k}{B_0} \vec{B}_0 \right. \\ &\quad \left. - k^2 B_0^2 \vec{v}_1 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \cancel{B_0} \frac{k^2}{B_0^2} \vec{B}_0 + \cancel{B_0} \frac{k^2}{B_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Melhorando a expressão anterior, fica

$$\begin{aligned} (w^2 - a_0^2 k^2 + \nu^2 k^4) \vec{v}_1 &+ \frac{ia_0^2 e}{wm} k^2 (\vec{B}_0 \times \vec{v}_1) + \frac{1}{4\pi\rho} \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) \left[ k^2 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 - k^2 B_0^2 \vec{v}_1 \right. \\ &\quad \left. - k^2 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 + k^2 (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Da expressão para a velocidade de Alfvén  $B_0^2 = 4\pi\rho v_a^2$ , a equação anterior passa a ser escrita como

$$(w^2 - a_0^2 k^2 + \nu^2 k^4) \vec{v}_1 + i \frac{a_0^2 e}{wm} \sqrt{4\pi\rho} (\vec{v}_a \times \vec{v}_1) + \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) k^2 \left[ (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a - v_a^2 \vec{v}_1 \right] = 0. \quad (2.169)$$

Se além de  $\vec{k} \parallel \vec{v}_a (\vec{B}_0)$ , considerarmos  $\vec{v}_1 \parallel \vec{k}$ , ou seja,  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_a$ , temos  $\vec{v}_a \times \vec{v}_1 = 0$  de modo que a equação anterior, (2.169), torna-se

$$\left[ w^2 - a_0^2 k^2 + \nu^2 k^4 - \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) k^2 v_a^2 \right] \vec{v}_1 + \left(1 - \frac{i\nu k^2}{w}\right) k^2 v_a^2 \vec{v}_1 = 0. \quad (2.170)$$

Resultando na velocidade de fase já obtida antes, (2.152)

$$w^2 = (a_0^2 + \nu^2 k^2) k^2, \quad (2.171)$$

para  $\vec{v}_a = v_a \frac{\vec{v}_1}{v_1}$ , ou seja,  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_1$  com mesmo sentido.

Sumarizando os resultados obtidos até aqui: para o primeiro caso considerado  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$  foi obtido a relação de dispersão

$$w(k_x) = \pm a_0 k_x \sqrt{1 - \frac{\nu^2 k_x^2}{a_0^2}}. \quad (2.172)$$

A relação de dispersão (2.172) mostra que  $w(k_x)$  depende de maneira não-linear em  $k_x$ . Especificamente, a presença de  $\nu$  introduz uma dependência não-linear em  $w(k_x)$ , logo o meio de propagação da onda além de dissipativo, é também dispersivo. Pois ondas com diferentes valores de  $k_x$  propagam com diferentes velocidades [58] [57].

Quando calculado o limite  $\nu \rightarrow 0$  em (2.156) foi obtido a relação

$$\frac{w}{k_x} = \sqrt{a_0^2 + v_a^2}. \quad (2.173)$$

A equação (2.173) mostra que para esse caso,  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$  e  $\nu \rightarrow 0$ , a velocidade de propagação da onda depende de  $a_0^2$  e  $v_a^2$ .  $a_0^2 = \langle v^2 \rangle$  é a média quadrática espacial da velocidade e pode ser considerada aproximadamente constante para o regime de turbulência completamente desenvolvida, ou seja, fluxos com altos números de Reynolds [21]. A expressão (2.173) é semelhante a velocidade de fase da onda para um fluido incompressível ideal submetido a perturbações adiabáticas (cuja entropia do estado estacionário é a mesma para o estado perturbado) dada por

$$\frac{w}{k_x} = \sqrt{s^2 + v_a^2}. \quad (2.174)$$

Onde  $s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)$  é a velocidade do som à entropia constante. Essas ondas são chamadas de magnetosônicas [57].

O terceiro resultado obtido trata a viscosidade  $\nu$  muito pequena, porém não-desprezível. De modo que

$$k \approx \frac{w}{\sqrt{a_0^2 + v_a^2}} + iw^2 \left( \frac{\nu v_a^2}{2(a_0^2 + v_a^2)^{5/2}} \right). \quad (2.175)$$

Como mencionado, a atenuação na amplitude da onda cresce rapidamente com a frequência  $w$ , e também é atenuada pelo aumento do módulo de  $\vec{B}_0$ . Além disso, se a viscosidade  $\nu$  é dominante, a onda é drasticamente atenuada.

O segundo caso, no qual é considerado  $\vec{k} \parallel \vec{v}_a$ ,  $\vec{k}$  e  $\vec{B}_0$  tendo o mesmo sentido e  $\vec{v}_1 \parallel \vec{k}$ , ou seja,  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_a$  obtemos o mesmo resultado que em (2.172), ou seja, o comportamento ondulatório é o mesmo que para  $\vec{k} \times \vec{B}_0$ .

Notamos que partindo da equação (2.137) as relações de dispersão são derivadas de comportamentos ondulatórios distintos, que podem ser categorizados em duas partes. A primeira para  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$  e a segunda parte quando  $\vec{k} \parallel \vec{v}_a$ , ou seja,  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ . Dentro do segundo caso, ainda é possível considerar juntamente à condição  $\vec{k} \parallel \vec{v}_a$  duas situações distintas  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_a$ , ou  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_a$ . Os cálculos para a segunda possibilidade  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_a$  e  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_a$ , estão em andamento. As relações de dispersão aqui obtidas (Todas aquelas contendo o termo  $a_0^2$ ) são um resultado original obtido por nosso grupo.

## Capítulo 3

# Não-Comutatividade em MHD

### 3.1 Espaços Não-Comutativos

A álgebra da mecânica quântica formulada por Heisenberg em 1925 [65], onde os observáveis são tratados como operadores lineares auto-adjuntos em um espaço de Hilbert  $H$  [66], permitiu que a álgebra comutativa de grandezas clássicas pudesse ser passada a uma álgebra não-comutativa de observáveis quânticos [67]. Essa álgebra é obtida a partir da troca das grandezas clássicas por operadores Hermitianos definidos em um espaço de Hilbert. Esses operadores são funções de  $\hat{q}^i$  e  $\hat{p}_j$  e devem obedecer as relações de comutação de Heisenberg

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i, \quad (3.1)$$

onde  $\hat{q}^i$  é o operador posição e  $\hat{p}_j$  o operador momento. A esse procedimento, juntamente a uma escolha de ordenamento dos operadores de aniquilação e criação é dado o nome quantização canônica<sup>1</sup> [68].

A mecânica quântica tem um papel fundamental para a construção de espaços não-comutativos, sendo esses objeto principal de estudos tanto para a mecânica quântica, quanto para a geometria não-comutativa [67]. Um espaço não-comutativo, de modo semelhante à quantização do espaço de fase clássico [68], é construído a partir da troca das grandezas posição  $x^i$  e momento  $p_j$  pelos operadores Hermitianos posição  $\hat{x}^i$  e momento  $\hat{p}_j$ , respectivamente. A novidade é que agora além do comutador entre  $\hat{x}^i$  e  $\hat{p}_j$  ser diferente de zero, o comutador entre as coordenadas também será diferente de zero. Para este fim, a relação de comutação

---

<sup>1</sup>Sendo o mais comum o ordenamento normal onde os operadores de criação são postos à esquerda dos operadores de aniquilação na definição da Hamiltoniana  $\hat{H}$  e operador momento  $\hat{P}_j$ .

entre os operadores de coordenadas passa a ser

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}. \quad (3.2)$$

Aqui  $\theta^{ij}$  são as componentes de um tensor antissimétrico com valores reais e constantes com  $i, j = 1, 2, \dots, D$  sendo  $D$  a dimensão do espaço. A ideia de introduzir coordenadas não-comutativas foi apresentada pela primeira vez de modo sistemático por Snyder [34], tendo essas ideias sua alvorada em 1930 com Heisenberg [69]. A proposta de Snyder se baseia na ausência da noção de ponto em escalas menores que  $\Lambda \sim \sqrt{|\theta^{ij}|}$  (tendo em mente que a não-comutatividade das coordenadas implica na troca do ponto por células de Planck da ordem de  $\hbar^2$  [70]), onde para uma descrição de um espaço não-comutativo,  $\Lambda$  serviria como um *cutoff* superior nas integrais no espaço dos momentos para o cálculo de diagramas de Feynmann [71]. Porém, essas ideias foram abandonadas devido ao sucesso dos procedimentos de renormalização em desenvolvimento neste mesmo período.

Foi durante os anos de 1980 que a geometria não-comutativa voltou a ocupar papel de destaque. Por volta desse período os matemáticos A. Connes, Woronowicz e Drinfel'd utilizando os teoremas de Gelfand e Naimark [72] generalizaram as estruturas diferenciais para os espaços não-comutativos [67]. Essas generalizações resultaram em uma álgebra não-comutativa baseada na álgebra de funções sobre esses espaços [71], tendo como base um importante resultado da geometria algébrica que diz que a álgebra de pontos em uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  tem sua informação contida na álgebra de funções  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  definida em  $\mathcal{M}$  [51], [67].

### 3.1.1 O Produto Estrela ( $\star$ ), ou Produto de Groenewold-Moyal

A não-comutatividade entre os operadores  $\hat{x}^i$  (por exemplo para a construção de operadores na mecânica quântica não-comutativa) pode ser realizada através da deformação das estruturas de Poisson, quantização por deformação [67], [73]. Essa deformação é realizada por meio da troca do produto usual entre funções definidas no espaço de fase pelo produto estrela (também chamado apenas de produto Moyal)[74]. O produto Moyal pode ser obtido através do produto de operadores  $\hat{W}[f]$ , sendo  $\hat{W}$  operadores de Weyl. O processo de quantização de Weyl (do qual decorre os operadores  $\hat{W}[f]$ ) fornece uma correspondência um-a-um entre operadores quânticos e funções definidas em um espaço de fase clássico [71], [75]. Assim, para a construção do operador (também chamado de símbolo de Weyl) de Weyl: seja  $f(x)$  uma função que satisfaz as condições de Schwartz, ou seja,  $f(x)$  vai rapidamente a zero no infinito, bem como suas derivadas em qualquer ordem tanto no espaço das posições, quanto no espaço dos momentos. Isso garante que

$f(x)$  possa ser representada pela transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} f(x). \quad (3.3)$$

O operador de Weyl é definido como

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i}, \quad (3.4)$$

ou ainda

$$\hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x). \quad (3.5)$$

Com

$$\hat{\Delta} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^2} e^{ik_i \hat{x}^i} e^{-ik_i x^i}. \quad (3.6)$$

Note a introdução dos operadores Hermitianos  $\hat{x}^i$  em (3.4), onde devido a relação de comutatividade  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$  resulta uma álgebra não-comutativa para os operadores  $\hat{W}[f]$ . É interessante perceber que para  $\theta^{ij} = 0$  (Caso comutativo),  $\hat{\Delta}(x)$  torna-se a função delta em  $\mathbb{R}^D$  e  $\hat{W}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$ .

Considerando  $f$  e  $g$  funções sobre o espaço de fase clássico, o produto de operadores  $\hat{W}[f]$  e  $\hat{W}[g]$  para as coordenadas não-comutativas ( $\theta^{ij} \neq 0$ )

$$\hat{W}[f] \hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g], \quad (3.7)$$

onde o produto de Moyal é escrito como [71]

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^2} \frac{d^D k'}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{ik'_i x^i} \\ &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x) \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Onde foi usada a relação de Baker-Campbell-Hausdorff para as exponenciais de operadores ([Apêndice A]). Por meio de (3.8), nota-se que o caráter não-comutativo da álgebra de operadores de Weyl  $\hat{W}$  está codificado no produto estrela entre funções definidas no espaço de fase clássico [71], [76].

A forma (3.8) é uma expressão particular do produto de Moyal [73]. De forma genérica, o produto estrela pode ser definido como uma deformação da álgebra usual de funções em uma variedade  $\mathcal{A}$  por meio de uma série de potências em um parâmetro  $\lambda \in \mathcal{A}$ . De modo que

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{C}_n(f, g), \quad (3.9)$$

onde  $\mathcal{C}_n(f, g)$  é um operador local bidiferencial  $\mathcal{C}_n : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$   $[[\lambda]]$  com  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$  a álgebra de funções  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$  infinitamente diferenciáveis em  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$   $[[\lambda]]$  é formado por potências de  $\lambda$  e coeficientes em  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$  [76].

O produto estrela pode ser aplicado aos parênteses entre funções do espaço de fase onde no lugar do produto usual passa a ser usado o produto estrela

$$\begin{aligned} \{f(x), g(x)\}_M &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\ &= 2if(x) \sin\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os parênteses  $\{ , \}_M$  entre as coordenadas  $x^i$  e  $f(x)$  em termos do parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$  são dados por

$$\{x^i, f(x)\}_M = x^i \star f(x) - f(x) \star x^i = i\theta^{ij} \partial_j f(x). \quad (3.11)$$

Quando aplicados às coordenadas do espaço de fase, reduz-se a

$$\{x^i, x^j\}_M = i\theta^{ij}, \quad (3.12)$$

que é equivalente à expressão (3.2). Deste modo, é possível notar que a troca do produto usual pelo produto Moyal, torna a álgebra que antes era associativa e comutativa em uma álgebra associativa, porém não-comutativa. Tanto a associatividade, quanto a não-comutatividade podem ser obtidas através da verificação da álgebra dos operadores de Weyl [77], pois esses são definidos de maneira única em termos das funções do espaço de fase clássico [71]. Uma das vantagens da utilização do produto estrela na descrição de álgebras não-comutativas, é que a passagem ao limite comutativo é direta [76].

Um exemplo da aplicação do produto estrela pode ser encontrado na construção da teoria de Yang-Mills não-comutativa.

### 3.1.2 Teoria de Yang-Mills Não-Comutativa

Afim de ilustrar a aplicação do produto estrela, citamos brevemente a teoria de Yang-Mills não-comutativa. Seja  $A_i(x)$  um campo de gauge sobre  $\mathbb{R}^D$  e  $t_a$  geradores da álgebra de Lie em  $U(N)$ ,  $a = 1, 2, \dots, N^2$ . O comutador entre os geradores é  $[t_a, t_b] = if_{ab}{}^c t_c$ , sendo  $f_{ab}{}^c$  as constantes de estrutura do grupo. Assumindo que a álgebra é simissimples, ou seja,  $tr_N(t_a t_b) = \delta_{ab}$ .  $tr_N$  é o traço usual de uma matriz. Como  $A_i(x)$  tem elementos pertencentes à álgebra  $U(N)$ , o campo de gauge pode ser expresso em termos dos geradores  $t_a$  como  $A_i(x) = A_i^a(x) t_a$ . Para a obtenção da teoria de Yang-Mills não-comutativa define-se o operador de Weyl para  $A_i(x)$

$$\hat{W}[A]_i = \int d^D x \hat{\Delta}(x) \otimes A_i(x), \quad (3.13)$$



onde  $\hat{\Delta}(x)$  é dado por (3.6). Utilizando as relações de comutação [71]

$$[\partial_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j; \quad [\partial_i, \partial_j] = 0; \quad [\partial_i, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_i \hat{\Delta}(x); \quad [\partial_i, \hat{W}[\partial_i f]] = \hat{W}[\partial_i f], \quad (3.14)$$

a ação para o campo de Yang-Mills puro não-comutativo é

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g^2} Tr \otimes tr_N \left( [\partial_i, \hat{W}[A]_j] - \partial_j, \hat{W}[A]_i - i [\hat{W}[A]_i, \hat{W}[A]_j] \right)^2. \quad (3.15)$$

Onde  $Tr$  é o operador traço ( $Tr \hat{W}[f] = \int d^D x f(x)$ ). O termo  $g^2$  é o parâmetro de gauge de Yang-Mills. Utilizando as relações de comutação entre derivadas e operadores de Weyl (3.14), a forma integral para  $Tr \hat{W}[f]$  e o produto Moyal em termos de  $\hat{W}[f] \hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g]$  a ação para o campo de Yang-Mills não-comutativo pode ser reescrita da seguinte maneira

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g^2} \int d^D x tr_N \left( F_{ij}(x) \star F^{ij}(x) \right), \quad (3.16)$$

onde o tensor de campo  $F_{ij}$  é definido em termos do campo de gauge  $A_i(x)$  como

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) &= \partial_i A_j(x) - \partial_j A_i(x) - i (A_i(x) \star A_j(x) - A_j(x) \star A_i(x)) \\ &= \partial_i A_j(x) - \partial_j A_i(x) - i [A_i(x), A_j(x)] + \frac{1}{2} \theta^{kl} (\partial_k A_i(x) \partial_l A_j(x) \\ &\quad - \partial_k A_j(x) \partial_l A_i(x)) + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

A teoria de gauge não-comutativa torna-se a teoria de Yang-Mills com grupo de simetria  $U(N)$  comutativa convencional para o limite  $\theta = 0$  [71]. Por exemplo, temos para  $N = 1$  e  $\theta = 0$  que (3.16) reproduz a eletrodinâmica pura.

### 3.1.3 O Problema de Landau e a Não-Comutatividade

Encerramos essa seção citando mais um exemplo: o problema de Landau [78]. Sua notável importância é devida a esse ser um exemplo da ocorrência de coordenadas não-comutativas em um sistema físico, e também à sua semelhança com a descrição das coordenadas não-comutativas em teoria de cordas abertas, cujas extremidades encontram-se fixadas em Dp-Branas (Hipersuperfícies de  $p$ -dimensões espaciais). Os dois sistemas quando submetidos a um campo "magnético" constante apresentam coordenadas não-comutativas. As aspas anteriores são devidas ao campo nas Dp-Branas ser um campo constante tipo Neveu-Schwarz [52], que equivale a um campo magnético constante nas Dp-Branas.

O problema de Landau (de natureza quântica) consiste de uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$  sob a presença de um campo magnético constante de fundo  $\vec{B}$ . A Lagrangiana para esse sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \quad (3.18)$$

Onde a Hamiltoniana correspondente é dada por

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2. \quad (3.19)$$

O momento canônico da partícula é dado por  $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$  ( $c$  é a velocidade da luz no vácuo). Escolhendo a direção  $\hat{z}$  para o campo magnético (sem perda de generalidade), a seguinte relação deve ser válida para  $\vec{A}$ ,  $\vec{A} = (0, xB, 0)$ . Pois  $\nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$ . Para essa escolha de potencial vetor vemos que o operador Hamiltoniano  $H$  comuta com os operadores de momento  $p_y$  e  $p_z$ . De modo que para  $|\Psi\rangle$  autoestado de  $H$ , esse será autoestado simultâneo de  $p_y$  e  $p_z$ . Isso possibilita escrever  $p_y|\Psi\rangle = \hbar k_y|\Psi\rangle$  e  $p_z|\Psi\rangle = \hbar k_z|\Psi\rangle$ . Substituindo a expressão para o potencial vetor  $\vec{A}$  e os autovalores para  $p_y$  e  $p_z$ , a Hamiltoniana  $H$  fica

$$H = \frac{1}{2m} (\hbar k_z)^2 + \frac{1}{2m} \left[ p_x^2 + \left( \frac{eB}{c} \right)^2 \left( x - \frac{c\hbar k_y}{eB} \right)^2 \right]. \quad (3.20)$$

As autoenergias associadas aos autoestados  $|\Psi\rangle = |n, k_y\rangle$  são

$$E_n = \hbar \frac{eB}{mc} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.21)$$

As energias (3.21) são chamadas de níveis de energia de Landau, ou apenas níveis de Landau. Os valores de energia  $E_n$  são infinitamente degenerados em  $k_y$  [78].

Para a obtenção do comutador entre as coordenadas não-comutativas, é necessário projetar esse sistema (descrito pela Lagrangiana (3.18)) no nível de Landau mais baixo, ou seja, aquele com  $n = 0$ . Para tanto observemos que a diferença de energia entre dois autoestados adjacentes  $|n, k\rangle$  e  $|n+1, k'\rangle$  é da ordem de  $\mathcal{O}(\frac{B}{m})$ . Ou seja, para  $B \rightarrow \infty$  (ou para o limite  $m \rightarrow 0$ ) somente o nível de Landau mais baixo resta para ser ocupado pelo sistema. Sendo os demais níveis desacoplados do sistema no infinito [78]. Desta forma, calculando o elemento de matriz para o comutador entre as coordenadas, temos [78]

$$\langle 0, k | [x, y] | 0, k' \rangle = -i \frac{\hbar c}{eB} \langle 0, k | 0, k' \rangle. \quad (3.22)$$

Ou seja

$$[x, y] = -i \frac{\hbar c}{eB}. \quad (3.23)$$

### 3.2. ÁLGEBRA NÃO-COMUTATIVA DOS PARÊNTESES DE POISSON 51

O valor  $n = 0$  corresponde ao índice do nível de Landau mais baixo,  $k = \hbar k_y$  e as autofunções no espaço das coordenadas são dados por

$$\langle x, y | n, k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iky} \psi_n \left( x - \frac{e\hbar k}{eB} \right), \quad (3.24)$$

onde  $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^n \left( \frac{mw}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{mw x^2}{2\hbar}}$  são as funções de onda normalizadas do oscilador harmônico e  $w = \frac{eB}{cm}$ . O resultado anterior (3.23) é do tipo  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$  e ilustra o surgimento de coordenadas não-comutativas em um sistema quântico composto por partículas de massa  $m$  e carga  $e$  na presença de um campo magnético intenso.

É possível obter o comutador (3.23) através da construção de um sistema clássico para um fluido carregado cujas equações da continuidade e de Euler são

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) = -\nabla \cdot (\rho(t, \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r})) \quad (3.25)$$

e

$$m\dot{v}^i + m\vec{v} \cdot \nabla v^i = \frac{e}{c} \varepsilon^{ij} v^j B + f^i, \quad (3.26)$$

onde  $\varepsilon^{ij}$  é o símbolo antissimétrico em duas dimensões e  $f^i$  são as demais forças presentes. Após a obtenção da descrição Hamiltoniana do sistema e a aplicação do limite  $m \rightarrow 0$ , ou  $B \rightarrow 0$ , é possível obter o parêntese de Poisson entre as densidades

$$\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = -\frac{c}{eB} \varepsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial r^i} \rho(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r'^j} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.27)$$

Quando esse sistema é quantizado os parenteses anteriores (3.27) resultam

$$[\rho(\hat{r}), \rho(\hat{r}')] = i\hbar \frac{c}{eB} \varepsilon^{ij} \partial_i \rho(\hat{r}) \partial_j \delta(\hat{r} - \hat{r}'). \quad (3.28)$$

Além disso, adotando a relação  $\rho(\hat{r}) = \sum_{n=1}^N \delta(\hat{r} - \hat{r}_n)$  (essa equação expressa a ligação entre coordenadas de Lagrange e coordenadas de Euler [Apêndice B]) para o operador densidade em (3.28), os operadores de coordenadas iram satisfazer a relação

$$[\hat{r}^i, \hat{r}^j] = -i\hbar \frac{c}{eB} \varepsilon^{ij}, \quad (3.29)$$

que corresponde à (3.23). A descrição do fluido carregado com densidades não-comutativas acima foi tratada por Z. Guralnik *et al.* em [36].

## 3.2 Álgebra Não-Comutativa dos Parênteses de Poisson

Após essa breve introdução aos espaços não-comutativos realizada na seção anterior, passamos agora à análise da não-comutatividade das estruturas definidas

pelos parênteses de Poisson no espaço de fase clássico. Vimos anteriormente, que para a construção de uma mecânica quântica em um espaço não-comutativo, substituímos as relações de comutação canônicas (para  $\hbar = 1$ )

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0; \quad [\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\delta_j^i; \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (3.30)$$

pelos relações de não-comutatividade expressas pelo parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$  [71] da seguinte maneira

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}; \quad [\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\delta_j^i; \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (3.31)$$

Uma vez que a mecânica clássica pode ser considerada o limite clássico da mecânica quântica (ou seja,  $\hbar \rightarrow 0$ ), a regra de correspondência de Dirac para a quantização canônica diz que para tal limite, os comutadores quânticos devem ser substituídos pelos parênteses de Poisson através da relação

$$[\hat{A}, \hat{B}] \rightarrow i\{A, B\}. \quad (3.32)$$

Ou seja, podemos transportar a ideia de espaços não-comutativos concebida em espaços munidos de uma álgebra de observáveis quânticos para um espaço com uma álgebra de grandezas clássicas. Essa transposição é efetuada por intermédio da relação (3.32). Resultando na estrutura de Poisson

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij}; \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i; \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (3.33)$$

A estrutura simplética (3.33) é coerente com as propriedades inerentes à álgebra de comutadores (3.31), ou seja, bilinearidade, antissimetria, regra de Leibniz e identidade de Jacobi. A estrutura (3.33) resulta em uma modificação dos parênteses de Poisson. Sendo as coordenadas do espaço de fase  $\xi^a = (x^i, p_j)$ , cujos parênteses  $\{\xi^a, \xi^b\}$  são elementos da matriz antissimétrica  $\Lambda^{ab} = \{\xi^a, \xi^b\}$ . Os parênteses de Poisson entre as funções  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$  em termos da nova estrutura simplética (3.33) são

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= \frac{\partial A}{\partial \xi^a} \Lambda^{ab} \frac{\partial B}{\partial \xi^b} \\ &= \frac{\partial A}{\partial x^i} \theta^{ij} \frac{\partial B}{\partial x^j} + \left( \frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Onde índices repetidos implicam soma. A equação (3.34) representa o parêntese "deformado" de Poisson entre duas funções diferenciáveis arbitrárias de  $\xi^a$ . A expressão (3.34) leva em conta a não-comutatividade entre as coordenadas. Aplicações da estrutura (3.34) podem ser encontradas em [79], [80] e [81]. Para o caso onde além das coordenadas, os momentos também seguem uma relação de não-comutatividade, ou seja, os parênteses de Poisson terão termos a mais que em (3.34), [82]. Outro exemplo vem das relações que conectam as representações de

Lagrange e Euler ([Apêndice B]), onde é possível introduzir a não-comutatividade nas coordenadas de um fluido ideal. Deste modo os parênteses canônicos na formulação de coordenadas de Lagrange não-comutativas fica [83]

$$\begin{aligned}\{X^i(\vec{x}), \dot{X}^j(\vec{x}')\} &= \frac{1}{\rho_0} \delta^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}'); \quad \{\dot{X}^i(\vec{x}), \dot{X}^j(\vec{x}')\} = 0; \\ \{X^i(\vec{x}), X^j(\vec{x}')\} &= \frac{1}{\rho_0} \theta^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}'),\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde  $\rho_0$  é um valor constante para a densidade. Como a densidade  $\rho(\vec{r})$  e o campo de velocidades  $\vec{v}(\vec{r})$  (ambos grandezas que caracterizam as coordenadas Eulerianas) podem ser expressas em termos de  $\vec{X}$  e  $\dot{X}^i$  da seguinte maneira

$$\rho(\vec{r}) = \int \rho(\vec{x}) \delta(\vec{X}(\vec{x}) - \vec{r}) dx, \quad (3.36)$$

$$v_i(\vec{r}) = \frac{\int \rho(\vec{x}) \dot{X}_i(\vec{x}) \delta(\vec{X}(\vec{x}) - \vec{r}) dx}{\int \rho(\vec{x}) \delta(\vec{X}(\vec{x}) - \vec{r}) dx}, \quad (3.37)$$

torna-se possível que os parênteses de Poisson (que passam a conter uma estrutura não-comutativa devido às (3.35)) combinados com a Hamiltoniana do sistema, que é mantida inalterada, possam ser usados para o cálculo das novas equações de movimento. Essas novas equações de movimento passam a conter termos dependentes do parâmetro não-comutativo. Esse estudo acerca da introdução da não-comutatividade entre coordenadas de Lagrange e seus resultados para os parênteses de Poisson entre os campos Eulerianos de um fluido ideal foi realizado em [83].

Tendo como premissa a não-comutatividade no espaço de fase clássico, propomos nesta tese a introdução da não-comutatividade entre as velocidades para a descrição da MHD desenvolvida no Capítulo 2 dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla \phi + \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2 \quad (3.38)$$

e estrutura simplética

$$\{v^i(\vec{x}), v^j(\vec{y})\} = 0; \quad \{v^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} = \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} = 0. \quad (3.39)$$

### 3.3 NC Entre as Componentes da Velocidade

Após essa breve apresentação acerca de como a não-comutatividade pode ser introduzida em um espaço de fase clássico através do limite  $\hbar \rightarrow 0$  aplicado aos

comutadores de observáveis de um espaço quântico não-comutativo, voltamos ao nosso sistema para o fluido carregado, viscoso e na presença de um campo eletromagnético externo. A equação de movimento para esse fluido, como vimos anteriormente, é dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.40)$$

Que em termos do momento conjugado à velocidade  $\vec{v}$  e do vetor de Lamb  $\vec{l} = \vec{w} \times \vec{v}$  fica

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{MHD}}{\partial \dot{\vec{v}}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \phi - \nu \nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = -\vec{l}. \quad (3.41)$$

A equações (3.40) e (3.41) podem ser obtidas por meio dos parênteses de Poisson entre  $v^i(t, \vec{r})$  e a Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 - \vec{\pi} \cdot \nabla \phi + \nu \vec{\pi} \cdot \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{B} \right)^2, \quad (3.42)$$

sendo fornecida a estrutura simplética

$$\{v^i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})\} = -\{\pi_j(t, \vec{y}), v^i(t, \vec{x})\} = \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.43)$$

$$\{v_i(t, \vec{x}), v_j(t, \vec{y})\} = \{\pi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})\} = 0. \quad (3.44)$$

A introdução de não-comutatividade será realizada entre as componentes das velocidades do espaço de fase por meio do parâmetro não-comutativo  $\theta^{ij}$ . A estrutura simplética anterior é redefinida como

$$\{v_i(\vec{x}), v_j(\vec{y})\} = \theta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} = \delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} = 0. \quad (3.45)$$

Onde  $\theta^{ij}$  são as componentes constantes e reais do tensor antissimétrico de segunda ordem. Para verificar se a estrutura (3.45) é coerente com a álgebra de comutadores, vejamos: seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável equipada com o bivector de Poisson  $\Lambda = \overleftarrow{\partial}_i \Lambda^{ij} \overrightarrow{\partial}_j$  [76]. O parêntese de Poisson é um mapa bilinear que deve satisfazer as condições de antissimetria, regra de Leibniz e a identidade de Jacobi. Desse modo sendo compatível com a álgebra dos comutadores correspondentes por quantização de Dirac. Para verificar se (3.45) é compatível com a álgebra de comutadores, escrevemos o parêntese de Poisson na forma

$$\{f, g\} = \Lambda^{ij} \partial_i f \partial_j g. \quad (3.46)$$

Onde  $\Lambda^{ij} = \{\xi^i, \xi^j\}$  e  $\xi^i$  são os campos que descrevem o espaço de fase ( $\xi^a = (v^i, \pi_j)$ ). A propriedade de antissimetria é verificada imediatamente a partir do fato que  $\Lambda^{ij} = -\Lambda^{ji}$ . Bem como a regra de Leibniz e a bilinearidade devido a

linearidade da derivada parcial em (3.46). Para a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} &= \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} [(\partial_m \partial_i f) \partial_j g + \partial f (\partial_m \partial_j g)] \partial_n h \\
&+ \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} [(\partial_m \partial_i g) \partial_j h + \partial_i g (\partial_m \partial_j h)] \partial_n f \\
&+ \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} [(\partial_m \partial_i h) \partial_j f + \partial_i h (\partial_m \partial_j f)] \partial_n g \\
&= \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_i f) \partial_j g \partial_n h \\
&- \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_i f) \partial_j g \partial_n h \\
&+ \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_j g) \partial_i f \partial_n h \\
&- \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_j g) \partial_i f \partial_n h \\
&+ \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_j h) \partial_i g \partial_n f \\
&- \Lambda^{mn} \Lambda^{ij} (\partial_m \partial_j h) \partial_i g \partial_n f = 0. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Ou seja, a estrutura (3.45) é compatível com a álgebra de comutadores. A introdução do parâmetro  $\theta^{ij}$  torna a álgebra das velocidades não-comutativa.

### 3.3.1 Equação de Navier-Stokes Não-Comutativa

Para a obtenção da equação de movimento de uma álgebra não-comutativa das velocidades, mantemos a forma da densidade Hamiltoniana (3.42) inalterada<sup>2</sup> e calcula-se o parêntese de Poisson entre  $\vec{v}$  e  $\mathcal{H}$  e aplicando as relações (3.45). Assim a generalização não-comutativa da equação de Navier-Stokes é obtida:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(\vec{x}) &= \int d^3 y \left[ \left\{ v_i(\vec{x}), \frac{1}{2} \pi_j \pi_j(\vec{y}) \right\} - \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) \partial_j^y \phi(\vec{y}) \right\} + \left\{ v_i(\vec{x}), \nu \pi_j(\vec{y}) \partial_y^2 v_j(\vec{y}) \right\} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) (B_k \partial_k^y) B_j(\vec{y}) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ v_i(\vec{x}), \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right)^2 \right\} \right]. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Resolvendo cada termo da eq.(3.48), partindo do primeiro termo do lado direito de (3.48) ao último termo, temos para o primeiro

$$\int d^3 y \left\{ v_i(\vec{x}), \frac{1}{2} \pi_j \pi_j(\vec{y}) \right\} = \pi_i(\vec{x}). \tag{3.49}$$

<sup>2</sup>Caso contrário a Hamiltoniana deve ser redefinida em termos de novas variáveis expressas em termos de relações lineares envolvendo o parâmetro não-comutativo, onde permanecem válidos os parênteses (3.43) e (3.44)[80]. A não-comutatividade é expressa diretamente nas variáveis redefinidas.

Para o segundo termo

$$\begin{aligned}
\int dy \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) \partial_j^y \phi(\vec{y}) \right\} &= \int d^3y \left[ \pi_j(\vec{y}) \left\{ v_i(\vec{x}), \partial_j^y \phi(\vec{y}) \right\} + \partial_j^y \phi(\vec{y}) \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) \right\} \right] \\
&= \partial_i^x \phi(\vec{x}) - \int d^3y l_j(\vec{y}) \left\{ v_i(\vec{x}), v_k(\vec{y}) \partial_j^y v_k(\vec{y}) \right\} = \partial_i^x \phi(\vec{x}) \\
&\quad - \theta_{ik} l_j(\vec{x}) \partial_j^x v_k(\vec{x}) + v_k(\vec{x}) \partial_j^x l_j(\vec{x}) \theta_{ik} + \theta_{ik} l_j(\vec{x}) \partial_j^x v_k(\vec{x}). \\
\int dy \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) \partial_j^y \phi(\vec{y}) \right\} &= \partial_i^x \phi(\vec{x}) + \theta_{ik} v_k(\vec{x}) \partial_j^x l_j(\vec{x}),
\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde  $\phi = \left( \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} v^2 + \frac{B^2}{8\pi\rho} \right)$  e  $\pi_j(\vec{y}) = -l_j(\vec{y})$ , como em (2.91). Para o terceiro termo

$$\begin{aligned}
\int d^3y \left\{ v_i(\vec{x}), \nu \pi_j(\vec{y}) \partial_y^2 v_j(\vec{y}) \right\} &= \int d^3y \left[ \nu \pi_j(\vec{y}) \left\{ v_i(\vec{x}), \partial_y^2 v_j(\vec{y}) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \partial_y^2 v_j(\vec{y}) \left\{ v_i(\vec{x}), \nu \pi_j(\vec{y}) \right\} \right] \\
&= \nu \partial_x^2 v_i(\vec{x}) + \nu \theta_{ij} \partial_x^2 \pi_j(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para o quarto termo

$$\int d^3y \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ v_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y}) (B_k \partial_k^y) B_j(\vec{y}) \right\} = \frac{1}{4\pi\rho} (B_k \partial_k^x) B_i(\vec{x}). \tag{3.52}$$

E finalmente para o quinto e último termo

$$\begin{aligned}
&\int d^3y \frac{1}{2} \left\{ v_i(\vec{x}), \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right)^2 \right\} \\
&= \int d^3y \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right) \left\{ v_i(\vec{x}), \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right\} \\
&= \int dy \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right) \left\{ v_i(\vec{x}), \varepsilon_{jkn} \partial_k^y v_n(\vec{y}) \right\} \\
&= \int d^3y \left( \varepsilon_{jlm} \partial_l^y v_m(\vec{y}) + \frac{e}{m} B_j(\vec{y}) \right) \partial_k^y \varepsilon_{jkn} \theta_{in} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -\theta_{in} \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{jkn} \partial_k^x \partial_l^x v_m(\vec{x}) - \frac{e}{m} \theta_{in} \varepsilon_{jkn} \partial_k^x B_j(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Por fim, substituindo (3.49)-(3.53) em (3.48) obtém-se a equação de movimento

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(\vec{x}) &= \pi_i(\vec{x}) - \partial_i^x \phi(\vec{x}) - \theta_{ik} v_k(\vec{x}) \partial_j^x l_j(\vec{x}) + \nu \partial_x^2 v_i(\vec{x}) + \nu \theta_{ij} \partial_x^2 \pi_j(\vec{x}) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\rho} (B_k \partial_k^x) B_i(\vec{x}) - \theta_{in} \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{jkn} \partial_k^x \partial_l^x v_m(\vec{x}) - \frac{e}{m} \theta_{in} \varepsilon_{jkn} \partial_k^x B_j(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{3.54}$$



Em forma vetorial

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \nu \vec{\theta} \times \nabla^2 \vec{l} \\ &+ \vec{\theta} \times \left[ \nabla \times \left( \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B} \right) \right] + (\vec{\theta} \times \vec{v}) \nabla \cdot \vec{l}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Podemos ver que para  $\theta^{ij} = 0$  recupera-se a equação canônica de movimento para a MHD (Navier-Stokes). Pode-se notar o surgimento de três termos associados ao parâmetro não-comutativo  $\theta$ . O antepenúltimo termo do lado direito de (3.55) acrescenta um termo de viscosidade devido a não-comutatividade entre as velocidades. O penúltimo termo do lado direito de (3.55) adiciona à equação de Navier-Stokes uma contribuição devida ao acoplamento entre o campo de vorticidade e o campo magnético. O último termo do lado direito de (3.55) adiciona o divergente do vetor de Lamb. Porém  $\nabla \cdot \vec{l} = n(t, \vec{r})$ , onde  $n(t, \vec{r})$  é a densidade de carga turbulenta. Ou seja, a não-comutatividade adiciona uma densidade de carga turbulenta ao escoamento do fluido. Além disso, da equação de Navier-Stokes não-comutativa (3.55) (a equação para a aceleração do fluxo) podemos ver que os termos não-comutativos aceleram (Podendo também desacelerar) o fluxo. Assim permitindo-nos conjecturar se esses termos atuam como uma força de vorticidade.

### 3.3.2 Conservação de Energia na MHD Não-Comutativa

Analisemos agora as contribuições para a energia que a álgebra não-comutativa das velocidades fornece. Para a análise da variação de energia, escreve-se de modo análogo ao já feito na seção (1.2). Aplicando o produto escalar de ambos os lados da eq.(3.55) com  $v_i(t, \vec{r})$

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i (v_j \partial_j) v_i &= -\frac{1}{\rho} v_i \partial_i \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu v_i \partial^2 v_i + \frac{1}{4\pi\rho} v_i (B_j \partial_j) B_i \\ &- \nu \varepsilon_{ijk} \theta_j v_i \partial^2 l_k + \varepsilon_{ijk} \theta_j v_i \left( \varepsilon^{klm} \partial_l w_m \right) + \varepsilon_{ijk} \theta_j v_i \frac{e}{m} \left( \varepsilon^{klm} \partial_l B_m \right) \\ &+ v_i (\varepsilon_{ijk} \theta_j v_k) \partial_n l_n. \end{aligned} \quad (3.56)$$

E agora multiplicando ambos os lados por  $\rho$ , fazendo uso da equação de continuidade para este, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\rho\partial_t(v_i v_i) + \frac{1}{2}\rho v_j(\partial_j v_i v_i) + \frac{1}{2}v^2[\partial_t\rho + \partial_j(\rho v_j)] \\
= & -v_i\partial_i\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \eta v_i\partial^2 v_i + \frac{1}{4\pi}v_i(B_j\partial_j)B_i - \eta\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\partial^2 l_k \\
& + \rho\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i(\varepsilon^{klm}\partial_l w_m) + \varepsilon_{ijk}\theta_j\rho\frac{e}{m}v_i(\varepsilon^{klm}\partial_l B_m) + \rho v_i(\varepsilon_{ijk}\theta_j v_k)\partial_n l_n.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Onde  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ . Rearranjando

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \partial_j\left(\frac{1}{2}v^2 v_j\right) &= -\partial(v_i P) + P(\partial_i v_i) - v_i\partial_i\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \eta v_i\partial^2 v_i \\
&+ \frac{1}{4\pi}v_i(B_j\partial_j)B_i - \eta\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\partial^2 l_k + \rho\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i(\varepsilon^{klm}\partial_l w_m) \\
&+ \rho\frac{e}{m}\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i(\varepsilon^{klm}\partial_l B_m) + \rho v_i(\varepsilon_{ijk}\theta_j v_k)\partial_n l_n.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

O termo  $\eta\partial^2 v_i$  pode ser posto na forma  $\partial_j\bar{\sigma}_{ij}$  ( $\bar{\sigma}_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ ), pois o fluido é incompressível. Assim

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \partial_j\left(\frac{1}{2}v^2 v_j\right) &= -\partial_i(v_i P) + v_i\partial_j\bar{\sigma}_{ij} - v_i\partial_i\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}v_i(B_j\partial_j B_i) \\
&- \eta\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\partial^2 l_k + \rho\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\left(\varepsilon^{klm}\partial_l w_m + \frac{e}{m}\varepsilon^{klm}\partial_l B_m\right),
\end{aligned} \tag{3.59}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \partial_j\left(\frac{1}{2}v^2 v_j\right) &= -\partial_i(v_i P) + \partial_j(v_i\bar{\sigma}_{ij}) - \bar{\sigma}_{ij}\partial_j v_i \\
&+ v_i\partial_j\left\{\frac{1}{4\pi}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right]\right\} - \eta\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\partial^2 l_k \\
&+ \rho\varepsilon_{ijk}\theta_j v_i\left(\varepsilon^{klm}\partial_l w_m + \frac{e}{m}\varepsilon^{klm}\partial_l B_m\right).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Do teorema de Poynting aplicado à MHD ideal, ou seja,  $\sigma \rightarrow \infty$ , é possível escrever

$$\partial_t\left(\frac{1}{8\pi}B^2\right) = -\partial_i S_i - v_i\partial_j M_{ij}^{(MHD)} \tag{3.61}$$

onde

$$M_{ij}^{(MHD)} = \frac{1}{4\pi}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right] \quad e \quad S_j = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{jkl}E_k B_l. \tag{3.62}$$

$S_j$  é o vetor de Poynting. Agora, somando as (3.61) e (3.60), obtém-se

$$\begin{aligned}
\partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right] &+ \partial_j \left[ \left( \frac{1}{2} v^2 + P \right) v_j - v_i \bar{\sigma}_{ij} \right. \\
&+ \left. S_j + \eta \theta_{ik} v_i \partial_j l_k + \rho \theta_{in} \varepsilon^{kjn} v_i \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right) \right] \\
&= -\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i + \eta \theta_{ik} (\partial_l l_k) (\partial_l v_i) \\
&- \rho \varepsilon_{imn} \theta_m (\partial_j v_i) \varepsilon^{njk} \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

O último termo da eq.(3.63) pode ser reescrito da seguinte maneira para um fluido incompressível

$$\begin{aligned}
-\rho \varepsilon_{imn} \varepsilon^{njk} \theta_m \partial_j v_i \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right) &= \rho \left( \delta_i^j \delta_i^k - \delta_i^j \delta_m^k \right) \theta_m \partial_j v_i \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right) \\
&= \rho \theta_j (\partial_j v_k) \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right),
\end{aligned} \tag{3.64}$$

donde a eq.(3.63) torna-se

$$\begin{aligned}
\partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right] &+ \partial_j \left[ \left( \frac{1}{2} v^2 + P \right) v_j - v_i \bar{\sigma}_{ij} + S_j + \eta \theta_{ik} v_i \partial_j l_k \right. \\
&+ \left. \rho \theta_{in} \varepsilon^{kjn} v_i \left( w_k + \frac{e}{m} b_k \right) \right] \\
&= -\bar{\sigma}_{ij} \partial_j v_i + \eta \theta_{ik} (\partial_l l_k) (\partial_l v_i) + \rho \theta_j (\partial_j v_k) \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right).
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Podemos ver que nesse caso não é somente a viscosidade que contribui para que a energia mecânica não seja conservada, também há participação do parâmetro de não-comutatividade. É possível notar que os termos do lado direito da eq.(3.65) não são nulos após uma integração sob um volume qualquer envolvendo o fluido, ou seja, são termos que contribuem para a taxa de variação temporal da energia mecânica.

Aplicando o limite para  $\eta \rightarrow 0$ , um fluido não-viscoso, obtém-se

$$\begin{aligned}
\partial_t \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right] &+ \partial_j \left[ \left( \frac{1}{2} v^2 + P \right) v_j - v_i \bar{\sigma}_{ij} + S_j + \rho \theta_{in} \varepsilon^{kjn} v_i \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right) \right] \\
&= \rho \theta_j (\partial_j v_k) \left( w_k + \frac{e}{m} B_k \right).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Note que o termo não-comutativo responsável pela energia não ser conservada (No limite  $\eta \rightarrow 0$ ), está relacionado ao acoplamento mínimo entre a vorticidade e o campo magnético. A vorticidade passa a ocupar um papel importante para a não-conservação da energia.

### 3.4 A Circulação $\mathcal{C}$

Um escalar de considerável importância para a descrição do fluxo de vórtices é a circulação  $\mathcal{C}$  no entorno de uma curva  $c$ , definida como a integral de linha sobre o circuito fechado  $c$  da componente da velocidade tangente a  $c$  ao longo de toda a curva fechada.  $c$  é dita ser uma curva material, ou seja, move-se fixa ao fluido.

$$\mathcal{C} = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{x} \quad (3.67)$$

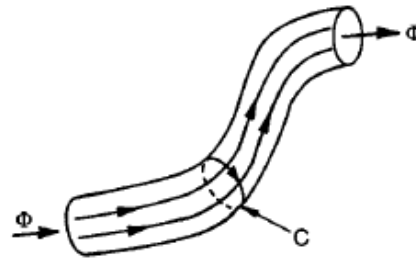
ou seja,  $\vec{v}$  é a velocidade de um elemento pertencente à curva  $c$  e  $d\vec{x}$  é o comprimento deste elemento. A circulação, associada a uma quantidade física, calculada ao longo de um circuito fechado, pode ser nula ou diferente de zero dependendo se esta quantidade física é uma diferencial exata ou não. Por exemplo, se essa quantidade for  $Tds$  ( $T$  a temperatura e  $s$  a entropia), a circulação pode ser diferente de zero e irá medir o calor ganho em um ciclo termodinâmico quase-estático.

A circulação é relacionada à vorticidade e vice-versa, através da aplicação do teorema de Stokes ao campo de vorticidade

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{x}. \quad (3.68)$$

Onde  $S$  é a superfície cujo contorno é limitado por  $c$ . Além disso, o lado esquerdo da eq.(3.68) nada mais é que o fluxo  $\Phi$  de vorticidade através de  $S$

Figura 3.1: Tubo de vorticidade.



Fonte: P. A. Davidson, 2002, p. 72

A figura ilustra um tubo de vórtices, que assim como para um tubo de fluxo magnético, é composto por várias linhas de vórtices e mostra seus fluxos através do contorno  $c$ .

Da eq.(3.68), além de ser notável que a circulação  $\mathcal{C}$  serve como fonte para o fluxo de vorticidade através da superfície  $S$ , podemos extrair uma interpretação geométrica para a vorticidade em uma direção  $\hat{n}$ . Assim, seja  $d\vec{S}$  um vetor normal

infinitesimal à superfície  $S$ , ou seja,  $d\vec{S} = ds\hat{n}$ . A projeção de  $\vec{w}$ ,  $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$ , na direção  $\hat{n}$  pode ser escrita, por meio do uso de (3.68), da seguinte forma

$$\hat{n} \cdot \vec{w} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (3.69)$$

$c$  é o contorno da superfície  $S$ . A equação (3.69) mostra que para um dado ponto no espaço, onde o rotacional do campo de velocidades  $\vec{v}$  é diferente de zero, existirá uma densidade de vorticidade diferente de zero. Além disso, essa densidade de vorticidade é devida à circulação do campo  $\vec{v}$  (no sentido de ser a fonte).

Passamos agora ao cálculo da taxa de variação da circulação em relação ao tempo em uma curva que se move com o fluido, levando em conta a presença do parâmetro não-comutativo  $\theta$  presente na equação (3.55). A taxa de variação da circulação é

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \oint_{\gamma} \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v} \times \vec{v}) \right] \cdot d\vec{x}. \quad (3.70)$$

Substituindo (3.55) na eq.(3.70), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}}{dt} &= \oint_{\gamma} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} (\varepsilon^{jlm} \partial_l v_m) v_j \right] dx_i \\ &= \oint_{\gamma} \left[ -\partial_i \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{1}{\rho} \partial_i \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \partial^2 v_i + \frac{1}{4\pi\rho} (B_j \partial_j) B_i \right. \\ &\quad \left. - \nu \theta_{ij} \partial^2 l_j - \theta_{in} \varepsilon_{jkn} \partial_k \left( w_j + \frac{e}{m} B_j \right) - \theta_{ik} v_k \partial_j l_j \right] dx_i. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Em forma vetorial, podemos escrever a eq.(3.71) na seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}}{dt} &= - \oint_{\gamma} \nabla \xi \cdot d\vec{x} + \nu \oint_{\gamma} \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho} \oint_{\gamma} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \cdot d\vec{x} - \nu \oint_{\gamma} \nabla^2 (\vec{\theta} \times \vec{l}) \cdot d\vec{x} \\ &\quad - \oint_{\gamma} \vec{\theta} \times \vec{v} (\nabla \cdot \vec{l}) \cdot d\vec{x} - \oint_{\gamma} (\vec{\theta} \cdot \nabla) \left( \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B} \right) \cdot d\vec{x} \\ &\quad + \oint_{\gamma} (d\vec{x} \cdot \nabla) \left[ \vec{\theta} \cdot \left( \vec{w} + \frac{e}{m} \vec{B} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde foi usado  $\theta_{ij} = \varepsilon_{ijk} \theta_k$  e

$$\xi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{8\pi\rho} B^2. \quad (3.73)$$

Podemos observar a partir da eq.(3.72), que o primeiro termo do lado direito contribui para a taxa de variação de circulação se

$$\oint_{\gamma} \nabla \xi \cdot d\vec{x} = \oint_{\gamma} d\xi \neq 0, \quad (3.74)$$

ou seja, se a força obtida pelo gradiente de energia  $\xi$  não for uma diferencial exata. Além disso, há outras seis contribuições relativas à taxa de variação da circulação. O segundo termo do lado direito da eq.(3.72) é a contribuição para a variação da circulação devido a viscosidade. O terceiro termo do lado direito da eq.(3.72), que é a contribuição devido ao campo magnético, também age como um termo fonte para a vorticidade. Os últimos quatro termos da eq.(3.72) representam a contribuição não-comutativa para a variação da circulação. Dois deles são funções do vetor de Lamb  $\vec{l}$ , agindo como fonte de vorticidade. Considerando o segundo termo não-comutativo na eq.(3.72), aquele que contém o divergente de  $\vec{l}$ , e por meio da equação de Navier-Stokes, onde é possível ver que a divergência do vetor de Lamb é o termo de fonte para a equação de Poisson da função de Bernoulli, temos a presença de uma densidade de carga turbulenta, *i.e.*, não-comutatividade introduz uma densidade de carga turbulenta  $n(\vec{x}, t)$  ( $\nabla \cdot \vec{l} = -\nabla^2 \Phi = n(\vec{x}, t)$ ), semelhante ao ocorrido para a eq.(3.55). Consequentemente, a divergência do vetor de Lamb na eq.(3.72) coloca a função de Bernoulli na taxa de variação da circulação.

Para fluxos irrotacionais, onde  $\vec{w} = \vec{l} = 0$ , somente os termos não-comutativos contendo  $\vec{B}$  são diferentes de zero. A saber, não-comutatividade não irá introduzir densidade de carga turbulenta. Tendo dito isso, os termos relacionados a variáveis não-comutativas agem como fontes, que em principio podem ser consideradas geradoras ou sorvedoras para a variação da circulação.

## Capítulo 4

# Método Simplético e o Fluido Relativístico

### 4.1 Introdução

O método simplético é uma formulação para a descrição da mecânica Hamiltoniana de sistemas vinculados. Trata-se de uma abordagem, que pode ser vista como uma opção à abordagem de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados. Talvez a principal característica que diferencie o método simplético do tratamento dado por Dirac em 1964, [84], acerca da dinâmica Hamiltoniana, é o fato de o método simplético ter seus pilares na geometria simplética, bem como na geometria diferencial [85], o que possibilita a identificação e descrição de objetos da mecânica Hamiltoniana (e Lagrangiana) com grandezas geométricas como variedades, subvariedades, espaços vetoriais e formas diferenciais, por exemplo.

Este capítulo tem o objetivo de descrever o método simplético, os parênteses generalizados, a técnica de obtenção desses apresentada por Faddeev-Jackiw [53], bem como o algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani [54]. E por fim aplicá-los a um fluido relativístico ideal carregado, tendo como ponto de partida a Lagrangiana homogênea dos campos do fluido e eletromagnético acoplados. Este acoplamento entre os campos foi apresentado por S. M. Mahajan em [86]. Ao final deste capítulo obtivemos os parênteses de Dirac (ou parênteses generalizados) para o sistema físico descrito acima.

## 4.2 O Método Simplético

A mecânica clássica pode ser construída sem a identificação, ou alusão da geometria simplética. Porém, é possível através dos conceitos da geometria simplética, construir uma visão mais geral e provavelmente mais fundamental sobre a dinâmica Hamiltoniana, principalmente ao que se refere à natureza do espaço de fase.

## 4.3 Os Parênteses Generalizados

Dirac em 1964 desenvolveu um método para tratar a quantização de sistemas Hamiltonianos vinculados, por meio do qual é realizada a classificação dos vínculos, relações funcionais entre as coordenadas do espaço de fase em vínculos primários, ou vínculos secundários. E esses em de primeira classe e segunda classe.

- **Vínculo Primário.** São relações entre as variáveis do espaço de fase para a formulação Hamiltoniana. Essas relações são oriundas da forma da Lagrangiana para um dado sistema físico e ocorrem devido à matriz Hessiana ser singular, ou seja,  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = 0$ .
- **Vínculos Secundários.** Vínculos primários devem ser preservados no tempo. Isso dá lugar a uma condição de consistência para os vínculos primários. Uma vez que a condição de consistência não é identicamente satisfeita, ou não determinar univocamente os multiplicadores de Lagrange, serão gerados novos vínculos a partir da condição de consistência. Esses novos vínculos são chamados de secundários [87].
- **Vínculos de Primeira Classe e de Segunda Classe.** Uma função (ou vínculo) é dita de primeira classe se o seu parêntese de Poisson com os vínculos resultar zero. Porém, se a função tiver parêntese de Poisson diferente de zero com pelo menos um vínculo, essa é dita de segunda classe<sup>1</sup>.

Em seu trabalho Dirac mostra que em teorias com presença de vínculos, os parêntese de Poisson devem ser trocados por outra estrutura. Estrutura esta chamada de parêntese de Dirac, ou parênteses generalizados [87]

---

<sup>1</sup>As afirmações anteriores acerca dos vínculos, consideram a dinâmica do sistema na hipersuperfície definida pelos vínculos no espaço de fase, onde não é necessário usar o conceito de igualdade fraca, presente no formalismo de Dirac para sistemas Hamiltonianos vinculados.



$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Omega_m\} C^{mn} \{\Omega_n, B\} \quad (4.1)$$

onde  $\Omega_m$  são as relações funcionais entre as coordenadas que definem os vínculos e  $(C^{mn}) = (C_{mn})^{-1}$ , a qual é definida como  $(C_{mn}) = (\{\Omega_m, \Omega_n\})$ .  $\{\cdot, \cdot\}$  são os parênteses de Poisson. Dirac, com esse trabalho, propõe que devem ser usados os parênteses (4.1) na substituição por comutadores na quantização de sistemas vinculados, ao invés dos de Poisson.

$$\{A, B\}_D \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (4.2)$$

$\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  são os operadores associados aos campos  $A$ ,  $B$  e  $\hbar$  é a constante de Planck. Mais tarde, Ludvig Faddeev e Roman Jackiw mostraram que a quantização de sistemas Hamiltonianos vinculados pode ser realizada por meios mais modernos. Meios esses que levam em consideração parênteses generalizados induzidos por estruturas simpléticas [53]. Tal método proposto por Faddeev e Jackiw foi, alguns anos depois, aprimorado por Barcelos Neto, Wotzasek e Montani [54, 85, 55]. A esse desenvolvimento feito por Faddeev e Jackiw [53] foi dado o nome de método simplético.

O conceito de formas simpléticas é importante para o desenvolvimento do método simplético. Assim, vejamos

- **Definição 1.** Uma forma simplética  $f \in \Omega^2(N)$ , onde  $N$  é uma variedade com dimensão par e  $\Omega^2(N) \subset N$  é o espaço vetorial que contém as 2-formas, onde  $f: T_\xi N \times T_\xi N \rightarrow \mathbb{R}$  tem as duas propriedades: (1)  $f$  é fechada, ou seja,  $df = 0$ ; (2)  $f$  é não-degenerada, ou seja,  $\forall \zeta \neq 0, \exists \eta \mid f(\zeta, \eta) \neq 0$ , com  $\zeta \in T_x N$ .

$N$  deve ter dimensão par, pois 2-formas não-degeneradas só ocorrem nestas variedades. A saber, seja  $f = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta$  uma 2-forma não-degenerada, onde  $(f_{\alpha\beta})$  é uma matriz antissimétrica.

$$\det(f_{\alpha\beta}) = \det\left[\left(f_{\alpha\beta}\right)^T\right] = \det(f_{\beta\alpha}) = (-1)^{\dim N} \det(f_{\alpha\beta}) \quad (4.3)$$

Se  $\dim N$  (dimensão de  $N$ ) for ímpar,  $\det(f_{\alpha\beta}) = 0$ , ou seja,  $f$  é degenerada. Logo para que  $f$  seja não-degenerada,  $\dim N$  deve ser par.

- **Definição 2.** Seja  $N$  uma variedade  $2n$ -dimensional munida de uma 2-forma simplética  $f: T_x N \times T_x N \rightarrow \mathbb{R}$ .  $(N, f)$  é uma variedade simplética.

$T_x N$  é o espaço vetorial tangente à variedade  $N$  no ponto  $x$ .

Uma vez que os coeficientes de  $f$  são constantes em todos os pontos de uma variedade  $2n$ -dimensional,  $f_{\alpha\beta}$  pode ser escrita, através de transformações de coordenadas, da seguinte maneira

$$(f_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

com o ordenamento da base  $\{q^i\}$ ,  $\{p_j\}$ . A forma (4.4) é chamada forma canônica.

Agora consideramos um caso mais geral. Seja  $N_e$  uma variedade  $(2n + 1)$ -dimensional (+1 representa o parâmetro que corresponde ao tempo  $t$ ), munida da 2-forma  $f_e$  de posto máximo ( $P = 2n$ ) para um tempo  $t$  fixo, uma variedade simplética. Pode-se notar, por construção, que  $f_e$  possui um, e somente um, vetor  $\nu(\xi)$  de autovalor nulo linearmente independente. À  $\nu(\xi)$  dá-se o nome modo-zero.  $\nu(\xi)$  pode ser obtido através da 1-forma considerada a seguir.

Da densidade Lagrangiana escrita em termos da 1-forma  $a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha$

$$L(\xi) = a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha - H(q, p)dt, \quad (4.5)$$

$H(q, p)$  é uma função definida em  $N_e$ , constante para todo  $t$ . A partir da derivada exterior de  $L(\xi)$ , obtém-se a 2-forma

$$\begin{aligned} dL = d(a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha) - d(H(q, p)dt) &= [(da_\alpha(\xi)) \wedge d\xi^\alpha + (-1)a_\alpha(\xi) \wedge d(d\xi^\alpha)] \\ &- dH(q, p) \wedge dt - (-1)H(q, p)d(dt). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Através da propriedade de nilpotência da derivada exterior, ou seja,  $d(dw) = 0$ , onde  $w$  é uma  $k$ -forma qualquer, a eq.(4.6) fica

$$dL(\xi) = da_\alpha(\xi) \wedge d\xi^\alpha - dH(q, p) \wedge dt. \quad (4.7)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.7) pode ser apresentado da seguinte maneira

$$da_\alpha(\xi) \wedge d\xi^\alpha = \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha, \quad (4.8)$$

onde usando a propriedade de antissimetria do produto externo, a eq.(4.8) é reescrita como

$$\begin{aligned} da_\alpha(\xi) \wedge d\xi^\alpha &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial a_\beta(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_\beta(\xi)}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta} \right) d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\ &= \frac{1}{2} f_{e(\alpha\beta)} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Onde a 2-forma  $f_e$  definida em  $N_e$  para um dado  $t$  fixo, ou seja, em um espaço de dimensão  $2n$  passa a compor  $f$  do seguinte modo

$$dL = f = \frac{1}{2} f_{e_{\alpha\beta}} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \quad (4.10)$$

E o produto  $f_{e_{(\alpha\beta)}} \nu(\xi) = 0$  irá fornecer o modo-zero  $\nu(\xi)$ . Pois  $f \in N$  é não-degenerada devido a  $f_e$  ser não-degenerada por construção. Sendo  $f$  não-degenerada, associado à  $f_{e_{\alpha\beta}}$  haverá apenas um modo-zero, como mencionado anteriormente. A esse modo-zero está relacionada a dinâmica do espaço de fase para cada instante de tempo  $t$  e pela existência de somente um modo-zero, a evolução temporal das coordenadas do espaço de fase encontra-se determinada. Ou seja, pode-se estabelecer a relação  $\dot{\xi} = \nu(\xi)$ , onde  $\xi$  assume os valores das coordenadas e momentos conjugados às coordenadas do espaço de fase. Caso  $f$  seja degenerada, então  $f_e$  não será de posto máximo na variedade  $N$  ( $2n$ )-dimensional. Nesse caso,  $f$  é chamada de forma pré-simplética e será denotada por  $h$ . Esse caso será tratado mais adiante.

Os parênteses de Poisson para o espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$  descrito pelas coordenadas  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  fornece a evolução temporal dessas coordenadas com o auxílio da função Hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  (0-forma), através das relações

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (4.11)$$

com os parênteses de Poisson fundamentais

$$\{q^i, p_j\} = -\{p_j, q^i\} = \delta_j^i \quad (4.12)$$

e

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (4.13)$$

onde  $i = 1, \dots, n$ .

Uma maneira muito comum de escrever as equações de Hamilton em forma compacta é alcançada através da redefinição de coordenadas e definição de uma nova matriz. Seja  $\xi^i = q^i$  e  $\xi^{n+i} = p_i$  com  $i = 1, \dots, n$ , ou melhor,  $\xi^\alpha$ , onde  $\alpha = \underbrace{1, \dots, n}_{q's}, \underbrace{n+1, \dots, 2n}_{p's}$ . Donde

$$\dot{\xi}^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 2n. \quad (4.14)$$

A matriz  $(\sigma^{\alpha\beta})$

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

é uma matriz  $2n \times 2n$ . Para os parênteses fundamentais

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \sigma^{\alpha\beta}. \quad (4.16)$$

## 68CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLÉTICO E O FLUIDO RELATIVÍSTICO

A partir dessa notação, os parênteses de Poisson entre duas funções  $X(\xi), Y(\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  tornam-se

$$\{X(\xi), Y(\xi)\} = \frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial Y(\xi)}{\partial \xi^\beta}. \quad (4.17)$$

De imediato, pode-se notar que a matriz  $(\sigma^{\alpha\beta})$  é a inversa da matriz simplética (canônica)  $(f_{\alpha\beta})$  (4.4). Os parênteses de Poisson são invariantes diante de transformações canônicas. Seja a transformação  $\xi$  para  $\xi'$  canônica, temos

$$\{X, Y\}_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial Y}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi'^\gamma} \sigma^{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi'^\gamma} \sigma^{\gamma\delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi'^\delta} = \{X, Y\}_{\xi'} \quad (4.18)$$

foi aplicada a propriedade  $\sigma = M^T \sigma M$ , com  $M$  a matriz Jacobiana da transformação. Sendo a forma simplética independente da base e responsável pela estrutura canônica vinculada a evolução do sistema, a relação (4.17) pode ser reescrita

$$\{A, B\}^* = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}, \quad (4.19)$$

onde  $(f^{\alpha\beta}) = (f_{\alpha\beta})^{-1}$ . A igualdade (4.19) teve sua validade demonstrada por Montani em [55].  $\{, \}^*$  são chamados de parênteses generalizados. Assim, vemos que a forma simplética, e sua inversa, são responsáveis pela descrição dinâmica do sistema. A 2-forma simplética  $f = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta$  é obtida, como visto anteriormente, a partir do setor cinético de Lagrangianas escritas em primeira ordem nas derivadas temporais das coordenadas do espaço de fase, ou seja, Lagrangianas escritas da seguinte forma

$$L = a_\alpha(\xi) \dot{\xi}^\alpha - V(\xi), \quad (4.20)$$

onde  $\alpha = 1, \dots, 2n$ . A forma (4.20) não é restritiva ao que se trata sua representatividade para um sistema físico qualquer, pois (4.20) pode ser escrita com a ajuda de campos auxiliares, sendo possível assim escrever qualquer Lagrangiana desta forma. O formalismo de Faddeev-Jackiw [53] trata justamente da obtenção de  $(f_{\alpha\beta})$  a partir de (4.20).

### 4.3.1 Método de Faddeev-Jackiw

Atribuindo  $2n$ -coordenadas independentes ao espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\xi^i = p_i, \quad \text{e} \quad \xi^{i+n} = q^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

a esse, associamos a  $2n$ -dimensional 1-forma  $Ldt$

$$\begin{aligned}
Ldt &= d(p_i q^i) - dp_i q^i - H dt \\
&= \frac{1}{2} \xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta + \frac{1}{2} d(p_i q^i) - H(\xi) dt \\
&= \frac{1}{2} \xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta - H(\xi) dt,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde  $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n$  e a matriz  $f_{\alpha\beta}$  é

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n} \tag{4.23}$$

é a matriz simplética canônica [53].

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana  $L$  com a 1-forma qualquer  $a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha$ , ou seja,

$$L = a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha - V(\xi), \tag{4.24}$$

onde  $V(\xi)$  é o potencial generalizado, obtido por meio do processo que torna  $L$  de primeira ordem em derivada temporal nas "velocidades" (daí chamar o primeiro termo do lado direito de (4.24) de setor cinético), são

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} = 0. \quad \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = a_\alpha(\xi) \tag{4.25}$$

$$\frac{d}{dt} a_\alpha(\xi) = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} \dot{\xi}^\beta. \tag{4.26}$$

Resultando em

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} \dot{\xi}^\beta = \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha}. \tag{4.27}$$

$$\partial_\alpha V = (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha) \dot{\xi}^\beta = h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta, \tag{4.28}$$

onde  $\partial_\alpha = \partial/\partial \xi^\alpha$  e  $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha$ .

Analisando a forma do tensor  $h_{\alpha\beta}$ , conclui-se que esse pode ser visto como as componentes da 2-forma diferencial  $h$ . A derivada total da 1-forma  $a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha$  que compõe a 2-forma  $h$ , resulta em

$$\begin{aligned}
h &= da_\beta \wedge d\xi^\beta = \partial_\alpha a_\beta d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha a_\beta d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta + \frac{1}{2} \partial_\alpha a_\beta d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha a_\beta d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta - \frac{1}{2} \partial_\beta a_\alpha d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha) d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Por construção,  $h$  é uma forma fechada,  $dh = 0$ . Nosso objetivo é identificar  $h$  com a 2-forma simplética  $f$ . Como  $h$  é fechada, falta essa ser não-degenerada.

A este ponto, vemos que para que seja possível a determinação dos parênteses generalizados para um sistema físico, primeiramente é necessário obter a Lagrangiana em primeira ordem nas "velocidades" para assim determinar  $h_{\alpha\beta}$ , dada por

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\beta(\xi)}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\beta}, \quad (4.30)$$

a partir das 1-formas  $a_\alpha(\xi)$ . Porém, é mais provável que  $(h_{\alpha\beta})$  seja degenerada, tornando assim falsa sua identificação com a matriz simplética  $(f_{\alpha\beta})$ , responsável pela obtenção dos parênteses generalizados. É sobre como manipular  $h_{\alpha\beta}$ , chamada de matriz pré-simplética, até que esta seja de posto máximo  $(2n)$  na variedade  $(2n)$ -dimensional  $N$ , portanto não-degenerada, que se trata o algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani [54], [55].

### 4.3.2 Algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani

A fim obter  $(h_{\alpha\beta})$  de posto máximo,  $P = N = 2n$ , com a finalidade de determinar  $\xi^\alpha$  dado por (4.28), analisemos o que podemos afirmar de interessante sobre  $(h_{\alpha\beta})$  e seus modos-zero. Associado à matriz  $(h_{\alpha\beta})$  de posto  $P < N$ , existem  $\nu_m^\alpha(\xi)$  modos-zero não nulos ( $m = 1, 2, \dots, N - P$ ) cujos autovalores associados a  $(h_{\alpha\beta})$  são nulos.

$$\nu_m^\alpha h_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.31)$$

Multiplicando a equação de movimento (4.28) por  $\nu_m^\alpha(\xi)$ , obtêm-se

$$\nu_m^\alpha \partial_\alpha V = \nu_m^\alpha h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N - P. \quad (4.32)$$

A eq.(4.32) mostra que o potencial generalizado está relacionado a inter-relações (vínculos) entre as coordenadas do espaço de fase.  $\nu_m^\alpha \partial_\alpha V$  são os vínculos no método simplético, esses são chamados de vínculos verdadeiros, e são denominados por

$$\Omega_m = \nu_m^\alpha \partial_\alpha V = 0. \quad (4.33)$$

A condição de consistência para os mesmos implica

$$\dot{\Omega}_m = \frac{\partial \Omega_m}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\alpha = 0. \quad (4.34)$$

Operacionalmente, esses vínculos devem ser acrescentados na Lagrangiana (4.24) à parte cinemática, ou seja,

$$L^{(1)} = a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha + \dot{\lambda}^m \Omega_m - V(\xi) \Big|_{\Omega_m=0}, \quad (4.35)$$

a derivada temporal pode ser transferida para o multiplicador de Lagrange  $\lambda^m$  a menos de uma derivada total, que é um termo de superfície para a Lagrangiana. Adicionar o vínculo  $\Omega_m$  à parte cinética leva em consideração a estabilidade dos vínculos, além de restringir o potencial generalizado à superfície de vínculos. O termo

$$V(\xi) \Big|_{\Omega_m=0} \quad (4.36)$$

significa que deve-se tomar o potencial da lagrangiana

$$L = a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - V(\xi) \quad (4.37)$$

e nesse eliminar os vínculos, quando presentes, do potencial  $V(\xi)$ . o índice (1) na Lagrangiana (4.35) serve para ilustrar que  $L^{(1)}$  foi obtida de (4.24) após a adição dos vínculos obtidos através da condição (4.33). De modo mais claro, a Lagrangiana (4.35) poderia ser escrita com os seguintes índices

$$L^{(1)} = a_\alpha^{(1)}(\xi)\dot{\xi}^\alpha + \dot{\lambda}^m \Omega_m - V^{(1)}(\xi), \quad (4.38)$$

onde  $V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega_m=0}$ . Para a Lagrangiana (4.38), a nova matriz pré-simplética é dado por

$$h_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\partial a_\beta^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\alpha}} - \frac{\partial a_\alpha^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\beta}} \quad (4.39)$$

com o espaço de fase passando às coordenadas  $\xi^{(1)\alpha} = (\xi^{(0)} \quad \lambda^m)$ . O índice zero em  $\xi^{(0)}$  refere-se às coordenadas do espaço de fase antes da obtenção dos vínculos, cuja Lagrangiana era

$$L^{(0)} = a_\alpha^{(0)}(\xi)\dot{\xi}^\alpha - V^{(0)}(\xi). \quad (4.40)$$

Se  $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ , que terá a forma

$$(h_{\alpha\beta}^{(1)}) = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta}^{(0)} & \frac{\partial \Omega_m}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \\ -\frac{\partial \Omega_m}{\partial \xi^{(0)\beta}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

ainda for degenerada, repete-se os passos anteriores até que  $(h_{\alpha\beta}^{(n)})$  seja não-degenerada. Esse é o caso para sistemas compostos por vínculos de segunda classe, segundo a nomenclatura do método de Dirac. Mas se após  $n$  iterações deste algoritmo  $(h_{\alpha\beta}^{(n)})$  continuar degenerada, significa que este sistema também é composto por vínculos de primeira classe. Os quais são geradores de simetrias de calibre, segundo a conjectura de Dirac [84] e/ou geram correlações entre as coordenadas do espaço de

fase. Para o caso da presença de simetria de calibre, os fixadores de calibre devem ser adicionados ao setor cinético da Lagrangiana, assim como feito para os vínculos. O número de iterações será finito e menor ou igual ao número de coordenadas usadas para descrever o sistema, já que vínculos além destes serão combinações lineares dos demais.

Como mostrado em [55], [88] a existência de uma inversa da matriz pré-simplética está relacionada à presença de vínculos de segunda classe, apesar de tal classificação não se fazer necessária para todo o desenvolvimento do método simplético. Considerando a seguinte Lagrangiana

$$L = a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - V(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.42)$$

segundo o formalismo de Dirac, esta Lagrangiana possui  $\Omega_\alpha = \Pi_\alpha - a_\alpha(\xi)$  vínculos primários, com  $\Pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}$ . Os parêntese de Poisson entre estes vínculos resultam em

$$\begin{aligned} \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} &= \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial \Pi_\sigma} - \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial \xi^\delta} \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial \xi^\delta} \\ &= -\frac{\partial a_\alpha(\xi)}{\partial \xi^\sigma} \delta_\sigma^\beta + \frac{\partial a_\beta(\xi)}{\partial \xi^\sigma} \delta_\sigma^\alpha = \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha \\ &= h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Logo, se este sistema físico possui vínculos de segunda classe,  $(h_{\alpha\beta})$  terá inversa, caso contrário existem vínculos de primeira classe ou relações entre as coordenadas do espaço de fase que devem ser levados em conta, como mencionado anteriormente. Quando finalmente  $(h^{\alpha\beta}) = (h_{\alpha\beta})^{-1}$  é não-degenerada, essa pode ser usada na eq.(4.19) para obtenção dos parênteses generalizados.

As próximas seções deste texto irão se dedicar à aplicação do método descrito acima a um fluido ideal relativístico carregado, através de uma Lagrangiana contendo o tensor com acoplamento entre os campos do fluido com os campos eletromagnéticos.

#### 4.4 Tensor Energia-Momento do Fluido Ideal Relativístico

Considerando o tensor energia-momento para partículas massivas relativísticas

$$T^{\alpha\beta} = nm u^\alpha u^\beta. \quad (4.44)$$



#### 4.4. TENSOR ENERGIA-MOMENTO DO FLUIDO IDEAL RELATIVÍSTICO 73

$n$  é a concentração de partículas de massa  $m$ , onde  $m$  é a massa de repouso das partículas, ou seja, a massa de uma partícula medida em um referencial que se move junto à esta mesma partícula. Grandezas medidas dessa maneira são chamadas de grandezas próprias. O termo  $u^\alpha$  é a quadrivelocidade da partícula e  $T^{\alpha\beta}$  é um tensor de segunda ordem simétrico. Para um referencial que se move junto a um fluido (pode ser um gás de partículas relativísticas ideal), ou seja, a quadrivelocidade assume a forma  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ , o tensor em (4.44) tem suas componentes dadas por

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$\rho_I$  é a densidade de energia interna do fluido medida no referencial de repouso e  $P$  é a pressão experimentada pelo volume de fluido. A métrica é dada por  $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Consideremos o caso mais geral, onde um sistema de coordenadas  $K'$  move-se com velocidade  $\vec{v}$  em relação a um outro sistema de coordenadas  $K$ , no qual o fluido encontra-se em repouso. Sendo  $\Lambda(\vec{v})$  a matriz da transformação de Lorentz entre os referenciais  $K$  e  $K'$ , cuja direção de  $\vec{v}$  é arbitraria,  $T^{\alpha\beta}$  transforma-se da seguinte maneira

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\alpha(\vec{v}) T^{\mu\nu} \Lambda_\nu^\beta(\vec{v}) = h u^\alpha u^\beta + P \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.46)$$

$h = \rho_I + P$  é a entalpia relativística e pode ser expressa por<sup>2</sup>  $h = nm \frac{K_3(mc^2/K_B T)}{K_2(mc^2/K_B T)}$ .  $K_\nu(mc^2/K_B T)$  são as funções de Bessel modificadas de índice  $\nu$ .  $\Lambda^T(\vec{v})$  é a matriz transposta de  $\Lambda(\vec{v})$  dada por [90]

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & & -\gamma v_j \\ -\gamma v_i & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{v^2} & \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Onde  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ ,  $c = 1$  e  $i, j = 1, 2, 3$ . A densidade de energia  $\rho_I$ , relaciona  $N$  (número de partículas),  $\bar{\varepsilon}$  (energia média da partícula) e o volume  $V$  da seguinte maneira

$$\rho_I = \frac{N\bar{\varepsilon}}{V}. \quad (4.48)$$

Onde  $\bar{\varepsilon}$  é dado por

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{Z} \int e^{-\varepsilon/K_B T} d^3p = mc^2 \frac{k_3(mc^2/K_B T)}{K_2(mc^2/K_B T)} - KT, \quad (4.49)$$

e

$$Z = \int e^{-\varepsilon/K_B T} d^3p = 4\pi m^2 c^2 K_2(mc^2/K_B T). \quad (4.50)$$

---

<sup>2</sup>A entalpia dada em termos da razão de funções de Bessel modificadas de segundo tipo advém do uso da distribuição de Maxwell relativística para as velocidades [89]

$\varepsilon$  é dada pela relação entre momento e energia  $\varepsilon = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + c^4 m^2}$ . Desse modo  $\rho_I = nmc^2 h - P$ , relacionando assim a energia interna do gás e sua pressão à entalpia.

## 4.5 Campo Tensorial Com Acoplamento Mínimo

O acoplamento mínimo para um sistema de partículas relativísticas carregadas, onde existe a presença do campo eletromagnético é introduzido através da seguinte substituição

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + qA_\mu \quad e \quad mU_\mu \rightarrow mU_\mu + qA_\mu, \quad (4.51)$$

onde  $p_\mu$  é o quadrimomento,  $U_\mu$  a quadrivelocidade (nesta seção e na próxima a quadrivelocidade será representado por  $U_\mu$ , ao invés de  $u_\mu$ ),  $q$  é a carga do elétron,  $A_\mu$  é o quadripotencial eletromagnético e  $m$  é a massa do elétron. Por meio desse acoplamento entre os quadrivetores é possível transmitir a presença da força de Lorentz à variação do momento das partículas carregadas. Com o intuito de obter o acoplamento que relacione o tensor de campo eletromagnético e os campos do fluido, realizemos a seguinte análise.

Para a descrição de um gás de partículas relativísticas carregadas livres, faz-se necessário as equações de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (4.52)$$

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.53)$$

a equação de movimento para o fluido

$$\partial_\nu T_{(\alpha)}^{\mu\nu} = qF^{\mu\nu}\Gamma_{\nu(\alpha)}. \quad (4.54)$$

Onde o índice  $(\alpha)$  serve para dizer que essa equação de movimento se aplica ao volume de fluido constituído por espécies (componentes) rotuladas com o índice  $(\alpha)$ . Por exemplo, para um plasma de duas espécies, uma espécie é carregada positivamente, a outra negativamente. Porém, pelas mesmas considerações feitas sobre o livre caminho médio das partículas no capítulo 2, sabemos não ser necessário carregar estes índices, uma vez que essas considerações são satisfeitas. A última equação para suplementar a descrição, é a equação da continuidade

$$\partial_\nu \Gamma^\nu = 0. \quad (4.55)$$

Pois apesar da eq.(4.54) conter a conservação da energia e do momento, a equação da continuidade deve ser aplicada para a obtenção das equações de movimento [59].

Na eq.(4.55),  $\Gamma^\nu = nU^\nu$ , onde  $n$  é o número de partículas por unidade de volume próprio, ou seja,  $n$  é a densidade numérica de partículas no referencial próprio do volume de fluido.  $F^{\mu\nu}$  é o tensor de campo eletromagnético  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Seu dual é dado por  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ .

O tensor energia-momento relativístico para o fluido é

$$T^{\mu\nu} = hU^\mu U^\nu + P\eta^{\mu\nu} \quad (4.56)$$

onde  $h$  é a densidade de entalpia,  $P$  é a pressão e  $U^\mu$  é a quadrivelocidade,  $U^\mu = (\gamma, \gamma\vec{V})$  e  $\gamma = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Vamos utilizar  $k_B = 1$  e  $c = 1$ ,  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

A densidade de corrente é um importante termo para a construção do acoplamento, e é dada por

$$J^\mu = qnU^\mu. \quad (4.57)$$

A partir de agora, passemos a identificar a densidade de entalpia com a função  $f(t)$  da seguinte forma

$$h = mn \frac{K_3(\frac{m}{T})}{K_2(\frac{m}{T})} = mn f(T). \quad (4.58)$$

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função somente da temperatura. Esse sistema físico será considerado relativístico também nas temperaturas.

Finalmente, para a obtenção do acoplamento entre os campos do fluido e eletromagnético, é necessário definir em analogia ou tensor de campo eletromagnético, o tensor de segunda ordem antissimétrico para os campos do fluido

$$S^{\mu\nu} = \partial^\mu f U^\nu - \partial^\nu f U^\mu \quad (4.59)$$

onde  $f = f(T)$ . Seguindo a analogia com o eletromagnetismo, define-se dois novos vetores

$$S^{i0} = Q^i, \quad S^{ij} = R^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.60)$$

com a segunda equação de (4.60) válida para permutações cíclicas de  $i, j, k$ . Por construção, é válida para  $\vec{Q}$  e  $\vec{R}$

$$\nabla \cdot \vec{R} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \nabla \times \vec{Q} = 0 \quad (4.61)$$

onde

$$\vec{Q} = - \left[ \frac{\partial f \vec{U}}{\partial t} + \nabla f \gamma \right] \quad (4.62)$$

$$\vec{R} = \nabla \times f \vec{U} \quad (4.63)$$

Tendo essas equações e definições, façamos as seguintes combinações. Utilizando a equação para a entalpia (4.58) no tensor energia-momento (4.54), a equação de movimento (4.54) fica

$$\partial_\nu [P\eta^{\mu\nu} + mnf(T)] = qF^{\mu\nu}nU_\nu, \quad (4.64)$$

$$\partial^\mu P + mnU^\nu\partial_\nu(f(T)U^\mu) + f(T)U^\mu\partial_\nu(mnU^\nu) = qF^{\mu\nu}nU_\nu. \quad (4.65)$$

Usando a equação da continuidade  $\partial_\mu\Gamma^\mu = \partial_\mu(nU^\mu) = 0$ .

$$\partial^\mu P + mnU^\nu\partial_\nu(f(T)U^\mu) = qF^{\mu\nu}nU_\nu \quad (4.66)$$

Agora, fazendo o produto interno de  $U_\mu$  com  $S^{\mu\nu}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} U_\mu S^{\mu\nu} &= U_\mu\partial^\mu(f(T)U^\nu) - U_\mu\partial^\nu(f(T)U^\mu) \\ &= U_\mu\partial^\mu(f(T)U^\nu) - U_\mu U^\mu\partial^\nu f(T) - U_\mu f(T)\partial^\nu U^\mu. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Dado que  $U_\mu U^\mu = -1$ ,  $U_\mu\partial^\nu U^\mu = 0$ , escreve-se

$$U_\mu S^{\mu\nu} - \partial^\nu f(T) = U_\mu\partial^\mu(f(T)U^\nu). \quad (4.68)$$

Substituindo (4.68) na (4.66)

$$\begin{aligned} \partial^\nu P + mn[U_\mu S^{\mu\nu} - \partial^\nu f(T)] &= qnF^{\nu\mu}U_\mu, \\ \partial^\nu P + mnU_\mu S^{\mu\nu} - mn\partial^\nu f(T) &= qnF^{\nu\mu}U_\mu. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Rearranjando e equação (4.69), chega-se a

$$\frac{1}{mn}\partial^\nu P - \partial^\nu f(T) = \frac{q}{m}\left(F^{\nu\mu} + \frac{m}{q}S^{\nu\mu}\right)U_\mu. \quad (4.70)$$

Para  $n$  constante, a eq.(4.70) pode ser reescrita como

$$T\partial^\nu\sigma = qM^{\mu\nu}U_\mu, \quad (4.71)$$

onde  $T\partial^\nu\sigma$  é a equação relativística para a variação da entropia dada por

$$T\partial^\nu\sigma = \partial^\nu\left(\frac{h}{n}\right) - \frac{1}{n}\partial^\nu P, \quad (4.72)$$

e o tensor  $M^{\mu\nu}$  foi definido como

$$M^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \frac{m}{q}S^{\mu\nu}. \quad (4.73)$$

$M^{\mu\nu}$  é escrito por meio de um acoplamento semelhante ao (4.51). Esse tensor representa a unificação do campo do fluido com o campo eletromagnético [86].

Através da contração de  $U_\nu$  com a equação (4.71), é possível obter as equações de movimento para um fluido homentrópico (entropia constante) por conta da antissimetria do tensor  $M^{\mu\nu}$ . A saber

$$TU_\nu\partial^\nu\sigma = qU_\nu M^{\mu\nu}U_\mu = 0. \quad (4.74)$$

Ou seja, ao longo de uma linha de fluxo a entropia permanece constante

$$TU_\nu\partial^\nu\sigma = \gamma T \frac{d\sigma}{dt} = 0. \quad (4.75)$$

Com isso a equação de movimento

$$U_\mu M^{\mu\nu} = 0 \quad (4.76)$$

contém a dinâmica para um fluido homentrópico relativístico carregado imerso em um campo eletromagnético. Dessa equação (4.76), podemos observar que na ausência de campo eletromagnético, (4.76) deve se reduzir a  $U_\mu S^{\mu\nu} = 0$ , implicando que quando na presença de campo eletromagnético tanto o tensor quanto os campos devem obedecer a seguinte composição

$$S^{\mu\nu} + \frac{q}{m} F^{\mu\nu} = f(T)U^\mu + \frac{q}{m} A^\mu \quad (4.77)$$

ou seja, um acoplamento mínimo semelhante ao apresentado em (4.51). E assim é respondida a questão aberta no início desta seção.

Testando o limite não-relativístico de (4.76) com a finalidade de recuperar resultados clássicos, realiza-se a aproximação  $\gamma = 1$  e  $f(T) = 1$  para todos os termos onde estes estão presentes, exceto para os envolvendo o gradiente do produto  $\gamma f(T)$ . Para  $\nabla(f\gamma)$ , é necessário manter os termos em primeira ordem

$$\gamma \approx 1 + \frac{V^2}{2} \quad \text{e} \quad f(T) = \frac{K_3(\frac{m}{T})}{K_2(\frac{m}{T})} \approx 1 + \frac{5}{2} \frac{T}{m}. \quad (4.78)$$

Da equação de movimento para o fluido isentrópico

$$U_\mu \left[ \partial^\mu (f(T)U^\nu) - \partial^\nu (f(T)U^\mu) + \frac{q}{m} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] = 0. \quad (4.79)$$

Variando os índices  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , obtêm-se

$$-\partial_t \vec{V} - \nabla \left[ \frac{V^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{T}{m} \right] + \frac{q}{m} \left[ \vec{E} + \vec{V} \times \left( \nabla \times \vec{A} + \frac{m}{q} \nabla \times \vec{V} \right) \right] = 0 \quad (4.80)$$

A eq.(4.80) é a equação de movimento para um fluido homentrópico para temperaturas da ordem de  $mc^2 \gg k_B T$ , ou seja, é a equação para um fluido carregado

clássico, cuja pressão é proporcional a  $n^{5/3}$  [86]. Quando aplicado o limite não-relativístico à eq.(4.62),  $\vec{Q}$  passa a ser dado pela expressão

$$\vec{Q} = - \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V^2}{2} + \frac{5 T}{2 m} \right) \right], \quad (4.81)$$

onde por meio da equação de movimento (4.80) (Navier-Stokes) é possível associar o vetor de Lamb da seguinte forma

$$\vec{l} = \vec{Q} + \frac{q}{m} \left[ \vec{E} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]. \quad (4.82)$$

Relações semelhantes à (4.82), porém para escoamentos onde a viscosidade está presente foram obtidos em [31] e [61].

A introdução do tensor  $S^{\mu\nu}$  possibilitou a construção do acoplamento mínimo entre os campos do fluido e eletromagnético, esse resultado foi expresso através do tensor  $M^{\mu\nu}$ , que relaciona os campos livres.

O resultado (4.73) foi obtido por S. M. Mahajan em [86]. Em seu trabalho, Mahajan lançou algumas questões pertinentes ao acoplamento entre os campos do fluido e o campo eletromagnético. como por exemplo a obtenção de um acoplamento mínimo de forma que os campos do fluido carregado em alta temperatura quando imersos em um campo eletromagnético, possam ser apresentados de forma compacta em uma equação de movimento para um escoamento homentrópico (eq.(4.76)). Dessa forma Mahajan foi capaz de compactar a dinâmica de um fluido carregado em alta temperatura com entropia constante em uma equação relativamente simples.

A próxima seção trata da obtenção dos parênteses generalizados para um gás de partículas relativísticas livres carregadas na presença de campo eletromagnético.

## 4.6 Aplicação do método Simplético ao Fluido Carregado

O objetivo desta seção é aplicar o método simplético a um fluido relativístico ideal carregado, tendo como ponto de partida a Lagrangiana homogênea dos campos livres descrita pelo acoplamento obtido na seção anterior

$$M^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \frac{m}{q} S^{\mu\nu} \quad (4.83)$$

Da equação (4.76), a qual contém a dinâmica para um fluido isentrópico relativístico composto por partículas massivas carregadas, imerso em um campo

#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 79

eletromagnético, obtemos a seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left[ S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + g^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] - gfU^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

onde  $S^{\mu\nu} = \partial^\mu(fU^\nu) - \partial^\nu(fU^\mu)$ ,  $f(T) = \frac{K_3(m/T)}{K_2(m/T)}$ ,  $U^\mu = (\gamma, \gamma V^i) = (U^0, U^i)$  é a quadrivelocidade,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  com  $A^\mu$  o quadrivetor eletromagnético e  $g := \frac{q}{m}$  é a razão carga-massa das partículas constituintes do fluido. O tensor métrico é tal que  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

A densidade Lagrangiana (4.84) pode ser reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial t}(f\vec{U}) - \nabla(fU^0) \right]^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times (f\vec{U}))^2 + \frac{g^2}{2} \left[ -\dot{\vec{A}} - \nabla A^0 \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}g^2(\nabla \times \vec{A})^2 - gfU^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Trabalhando com os índices do último termo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( -(f\dot{\vec{U}}) - \nabla(fU^0) \right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times (f\vec{U}))^2 + \frac{g^2}{2} (-\dot{\vec{A}} - \nabla A^0)^2 - \frac{1}{2}g^2(\nabla \times \vec{A})^2 \\ &\quad - gfU^0 \partial^i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) - gfU^i \partial^0 (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) - gfU^i \partial^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Define-se agora o campo auxiliar  $\Sigma^\mu = (\partial_0 A^\mu, \phi)$ , onde<sup>3</sup>  $\phi$  é seu momento conjugado. A definição de campos auxiliares é um procedimento padrão para a obtenção de Lagrangianas de primeira ordem nas "velocidades". Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( -(f\dot{\vec{U}}) - \nabla(fU^0) \right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times (f\vec{U}))^2 + \frac{g^2}{2} (-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 - \frac{1}{2}g^2(\nabla \times \vec{A})^2 \\ &\quad - gfU^0 (\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) - gf\vec{U} (\nabla \Sigma^0 + \dot{\vec{\Sigma}}) - gf\vec{U} (\nabla \times \nabla \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Agora, calcula-se os momentos conjugados referentes às variáveis canônicas  $(U^\mu, p_\mu), (A^\mu, \pi_\mu), (\Sigma^\mu, \phi_\mu)$ . Os quais resultam

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 U^\mu)} = f S_{\mu 0}, \quad (4.88)$$

$$\phi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \Sigma^\mu)} = gf U^k \eta_{k\mu}, \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\Sigma^\mu)} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \Sigma^\mu)} - 2\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^k \Sigma^\mu)} \\ &= g^2 F_{\mu 0} - S_{0k} \eta_{k\mu} g + \partial_k (f U_k) g \eta_{\mu 0}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

<sup>3</sup>Neste capítulo  $\phi$  não deve ser confundido com as definições para  $\phi$  dos capítulos anteriores.

80CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLÉTICO E O FLUIDO RELATIVÍSTICO

Em seguida é feita a identificação desses momentos na Lagrangiana em primeira ordem nas "velocidades".

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( -\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU^0) \right)^2 - \left( \nabla \times (f\vec{U}) \right)^2 + g^2(-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 - g^2(\nabla \times \vec{A})^2 \right\} \\ &\quad - gfU^0(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) - gf\vec{U}(\nabla \Sigma^0 + \dot{\vec{\Sigma}}) - gf\vec{U}(\nabla \times \nabla \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Levando em conta  $\vec{p} = f(-\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU^0))$ , onde  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ , escreve-se

$$\begin{aligned} (-\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU^0)) \cdot (-\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU^0)) &= (-\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU_0)) \cdot (-f\dot{\vec{U}} - \nabla(fU_0)) \\ &= -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla(fU_0). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Onde foi considerado que  $f(T) = f$  não depende explicitamente do tempo. Reescrevendo a eq.(4.91) e observando que  $\frac{\vec{p}^2}{f^2}$  pode ser escrita como  $\frac{\vec{p}^2}{f^2} = \left( -\partial_0(f\vec{U}) - \nabla(fU^0) \right)^2$ , ou seja,

$$\frac{\vec{p}^2}{f^2} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla(fU_0), \quad (4.93)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{p}^2}{f^2} + \frac{\vec{p}^2}{f^2} - \frac{\vec{p}^2}{f^2} - \left( \nabla \times (f\vec{U}) \right)^2 + g^2(-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 - g^2(\nabla \times \vec{A})^2 \right\} \\ &\quad - gfU^0(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) - gf\vec{U} \cdot (\nabla \Sigma^0 + \dot{\vec{\Sigma}}) - gf\vec{U} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Notando que as componentes espaciais de  $\phi_\mu$  são  $\vec{\phi} = gf\vec{U}$ , somando e subtraindo  $\pi_\mu \dot{A}^\mu = \pi_\mu \Sigma^\mu$ , podemos escrever a densidade lagrangiana de primeira ordem em derivadas temporais das "velocidades"

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{\Sigma}} + \pi_\mu \dot{A}^\mu - V^{(0)}, \quad (4.95)$$

onde

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= \pi_\mu \Sigma^\mu + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{f^2} + \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla(fU^0) + \frac{1}{2} \left( \nabla \times (f\vec{U}) \right)^2 - \frac{g^2}{2} (-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 \\ &\quad + \frac{g^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + gfU^0(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) + \vec{\phi} \cdot \nabla \Sigma^0 + \vec{\phi} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (4.96)$$

O índice (0) em (4.95) será importante para numerar os passos de iteração do algoritmo simplético.



#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 81

O conjunto de variáveis que definem o espaço de fase estendido é dado por  $\xi^{(0)} = (U^k, P_k, U^0; A^k, \pi_k; A^0, \pi_0; \Sigma^k, \phi_k, \Sigma^0)$ . Para a obtenção da 2-forma pré-simplética (que chamaremos de  $f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$ ), calculamos os momentos canônicos associados aos campos

$$\begin{aligned} {}^0a_k^U &= -p_k; \quad {}^0a_k^P = 0; \quad {}^0a_0^{U^0} = 0; \quad {}^0a_k^A = \pi_k; \quad {}^0a_k^\pi = 0; \quad {}^0a_0^{A^0} = \pi_0; \\ {}^0a_0^{\pi_0} &= 0; \quad {}^0a_k^\Sigma = -\phi_k; \quad {}^0a_k^\phi = 0; \quad {}^0a_0^{\Sigma^0} = 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Os únicos termos diferentes de zero da matriz  $f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$ , cujos elementos são dados pela 2-forma  $f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$ , são

$$f_{ij}^{(0)\vec{U}\vec{P}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^0a_j^P(\vec{y}))}{\delta U^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^0a_i^U(\vec{x}))}{\delta p_j(\vec{y})} = \delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.98)$$

$$f_{ij}^{(0)\vec{A}\vec{\pi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^0a_j^\pi(\vec{y}))}{\delta A^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^0a_i^A(\vec{x}))}{\delta \pi_j(\vec{y})} = -\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.99)$$

$$f_{ij}^{(0)\vec{\Sigma}\vec{\phi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^0a_j^\phi(\vec{y}))}{\delta \Sigma^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^0a_i^\Sigma(\vec{x}))}{\delta \phi_j(\vec{y})} = \delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.100)$$

$$f_{00}^{(0)\pi_0 A^0}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^0a_0^{A^0}(\vec{y}))}{\delta \pi_0(\vec{x})} - \frac{\delta({}^0a_0^{\pi_0}(\vec{x}))}{\delta A^0(\vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.101)$$

A matriz  $(f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}))$  tem a seguinte forma

$$(f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})) = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.102)$$

que é uma matriz degenerada, ou seja, deve-se obter os modos-zero para esta matriz. Calculando o modo-zero através de  $\int d^3x f_{ij}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}) v_j^{(0)}(\vec{y}) = 0$ , com

$$\begin{aligned} v^{(0)T}(\vec{y}) &= (v_j^{(0)U}(\vec{y}), v_j^{(0)P}(\vec{y}), v_0^{(0)U^0}(\vec{y}), v_j^{(0)A}(\vec{y}), v_j^{(0)\pi}(\vec{y}), v_0^{(0)A^0}(\vec{y}), v_0^{(0)\pi_0}(\vec{y}), \\ &v_j^{(0)\Sigma}(\vec{y}), v_j^{(0)\phi}(\vec{y}), v_0^{(0)\Sigma^0}(\vec{y})), \end{aligned} \quad (4.103)$$

82CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLÉTICO E O FLUIDO RELATIVÍSTICO

resulta

$$\int d^3y \begin{bmatrix} \delta_{ij} v_j^{(0)p}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(0)U}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ 0 \cdot v_0^{(0)U^0}(\vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(0)\pi}(\vec{y}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ \delta_{ij} v_j^{(0)A}(\vec{y}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ -v_0^{(0)\pi_0}(\vec{y}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ v_0^{(0)A^0}(\vec{y}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ \delta_{ij} v_j^{(0)\phi}(\vec{y}) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(0)\Sigma}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ 0 \cdot v_0^{(0)\Sigma^0}(\vec{y}) \end{bmatrix} = 0. \quad (4.104)$$

Essa matriz tem dois modos-zero,  $v_0^{(0)U^0}(\vec{x})$  e  $v_0^{(0)\Sigma^0}(\vec{x})$ . A saber,

$${}^1v^{(0)}(\vec{x}) = (0, 0, v^{(0)U^0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (4.105)$$

e

$${}^2v^{(0)}(\vec{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v^{(0)\Sigma^0}), \quad (4.106)$$

que são completamente arbitrários. Aplicando  $\int d^3x v_\gamma^{(0)\varphi}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})} \int d^3y U^{(0)}(\vec{y}) = 0$ , obtém-se os vínculos verdadeiros. Para  ${}^1v^{(0)}(\vec{x})$

$${}^1\Omega^{(0)} = \int d^3x v^{(0)U^0}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta U^0(\vec{x})} \int d^3y V^{(0)}(\vec{y}) = 0. \quad (4.107)$$

Os únicos termos diferentes de zero após a aplicação da derivada funcional são

$$\begin{aligned} {}^1\Omega^{(0)} &= \int d^3x v^{(0)U^0} \frac{\delta}{\delta U^0(\vec{x})} \int d^3y \left[ \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla(fU^0) + gfU^0(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) \right] \\ &= \int d^3x v^{(0)U^0}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta U^0(\vec{x})} \int d^3y \left[ \vec{p} \cdot \nabla U^0 + \frac{U^0}{f} \vec{p} \cdot \nabla f + gfU^0(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) \right] \\ &= \int d^3x v^{(0)U^0}(\vec{x}) \int d^3y \left[ \vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla f \delta(\vec{x}-\vec{y}) \right. \\ &\quad \left. + gf(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) \delta(\vec{x}-\vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x v^{(0)U^0}(\vec{x}) \left[ -\nabla \cdot \vec{p} + \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla f + gf(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Resultando no seguinte vínculo

#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 83

$${}^1\Omega^{(0)} = \nabla \cdot \vec{p} - \frac{\vec{p}}{f} \cdot \nabla f - gf(\nabla \cdot \vec{\Sigma} - \nabla^2 A_0) = 0. \quad (4.109)$$

Para o segundo vínculo  ${}^2\Omega^{(0)}$

$$\begin{aligned} {}^2\Omega^{(0)} &= \int d^3x v^{(0)\Sigma^0}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \Sigma^0(\vec{x})} \int d^3y [\pi_0 \Sigma^0 + \vec{\phi} \cdot \nabla \Sigma^0] \\ &= \int d^3x v^{(0)\Sigma^0}(\vec{x}) \int d^3y [\pi_0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{\phi} \cdot \nabla \delta(\vec{x} - \vec{y})] \\ &= \int d^3x v^{(0)\Sigma^0}(\vec{x}) [\pi_0 - \nabla \cdot \vec{\phi}] = 0 \\ {}^2\Omega^{(0)} &= \pi_0 - \nabla \cdot \vec{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Introduzindo os dois vínculos na Lagrangiana, através do produto com a derivada temporal dos multiplicadores de Lagrange, resulta a seguinte expressão

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{\Sigma}} + \pi_\mu \dot{A}^\mu + \lambda_1 {}^1\Omega^{(0)} + \lambda_2 {}^2\Omega^{(0)} - V^{(1)}, \quad (4.111)$$

onde o potencial generalizado é

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V^{(0)} \Big|_{{}^1\Omega=2\Omega=0} = \vec{\pi} \cdot \vec{\Sigma} + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{f^2} + \frac{1}{2} (\nabla \times (f\vec{U}))^2 - \frac{g^2}{2} (-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 \\ &+ \frac{g^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \vec{\phi} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A}), \end{aligned} \quad (4.112)$$

Ficamos assim com o novo conjunto de variáveis para o espaço de fase estendido  $\xi^{(1)} = (U^k, p_k; A^k, \pi_k, A^0, \pi_0; \Sigma^k, \phi_k; \lambda_1, \lambda_2)$ . Os momentos canônicos para esse novo conjunto de variáveis são

$$\begin{aligned} {}^1a_k^U &= -p_k; \quad {}^1a_k^p = 0; \quad {}^1a_k^A = \pi_k; \quad {}^1a_k^\pi = 0; \quad {}^1a_0^{A^0} = \pi_0; \\ {}^1a_0^{\pi_0} &= 0; \quad {}^1a_k^\Sigma = -\phi_k; \quad {}^1a_k^\phi = 0; \quad {}^1a^{\lambda_1} = {}^1\Omega^{(0)}; \quad {}^1a^{\lambda_2} = {}^2\Omega^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Os elementos da matriz  $(f_{ij}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}))$  diferentes de zero, dados pela 2-forma pré simplética são

$$f_{ij}^{(1)\vec{p}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a_j^p(\vec{y}))}{\delta U^i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^U(\vec{x}))}{\delta p_j(\vec{y})} = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.114)$$

$$f_{ij}^{(1)\vec{A}\vec{\pi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a_j^\pi(\vec{y}))}{\delta A^i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^A(\vec{x}))}{\delta \pi_j(\vec{y})} = -\delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.115)$$

$$f_{ij}^{(1)\vec{\Sigma}\vec{\phi}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a_j^\phi(\vec{y}))}{\delta \Sigma^i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^\Sigma(\vec{x}))}{\delta \phi_j(\vec{y})} = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.116)$$

$$f_{00}^{(1)\pi_0 A^0}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a_0^{A^0}(\vec{y}))}{\delta \pi_0(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_0^{\pi_0}(\vec{x}))}{\delta A^0(\vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.117)$$

$$f_i^{(1)\vec{p}\lambda_1}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a^{\lambda_1}(\vec{y}))}{\delta p_i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^p(\vec{x}))}{\delta \lambda_1(\vec{y})} = \left( \partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.118)$$

$$f_0^{(1)A^0 \lambda_1}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a^{\lambda_1}(\vec{y}))}{\delta A^0(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_0^{A^0}(\vec{x}))}{\delta \lambda_1(\vec{y})} = -gf \partial_y^2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.119)$$

$$f_i^{(1)\vec{\Sigma}\lambda_1}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a^{\lambda_1}(\vec{y}))}{\delta \Sigma^i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^\Sigma(\vec{x}))}{\delta \lambda_1(\vec{y})} = -gf \partial_i^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.120)$$

$$f_0^{(1)\pi_0 \lambda_2}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a^{\lambda_2}(\vec{y}))}{\delta \pi_0(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_0^{\pi_0}(\vec{x}))}{\delta \lambda_2(\vec{y})} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.121)$$

$$f_i^{(1)\vec{\phi}\lambda_2}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta(^1 a^{\lambda_2}(\vec{y}))}{\delta \phi_i(\vec{x})} - \frac{\delta(^1 a_i^\phi(\vec{x}))}{\delta \lambda_2(\vec{y})} = -\partial_i^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.122)$$

A matriz  $(f_{ij}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}))$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left( \partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -gf \partial_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & -gf \partial_i^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & -\partial_i^y \\ 0 & \left( -\partial_j^x + \frac{\partial_j^x f}{f} \right) & 0 & 0 & gf \partial_x^2 & 0 & gf \partial_j^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_j^x & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.123)$$

Que também é degenerada. Para obtermos os modos-zero desta nova matriz,

$$\int d^3 y f_{ij}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) v_j^{(1)}(\vec{y}) = 0. \quad (4.124)$$

Onde

#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 85

$$v^{(1)T}(\vec{y}) = (v_j^{(1)U}(\vec{y}), v_j^{(1)P}(\vec{y}), v_j^{(1)A}(\vec{y}), v_j^{(1)\pi}(\vec{y}), v^{(1)A^0}(\vec{y}), v^{(1)\pi_0}(\vec{y}), \\ v_j^{(1)\Sigma}(\vec{y}), v_j^{(1)\phi}(\vec{y}), v_j^{(1)\lambda_1}(\vec{y}), v_j^{(1)\lambda_2}(\vec{y})), \quad (4.125)$$

resulta

$$\int d^3y \left[ \begin{array}{c} \delta_{ij} v_j^{(1)\vec{p}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(1)\vec{U}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \left( \partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) v^{(1)\lambda_1}(\vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(1)\vec{\pi}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \delta_{ij} v_j^{(1)\vec{A}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ -v^{(1)\pi_0}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - gf \partial_y^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) v^{(1)\lambda_1}(\vec{y}) \\ v^{(1)A^0}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + v^{(1)\lambda_2}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \delta_{ij} v_j^{(1)\vec{\phi}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - gf \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) v^{(1)\lambda_1}(\vec{y}) \\ -\delta_{ij} v_j^{(1)\vec{\Sigma}}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) v^{(1)\lambda_2}(\vec{y}) \\ \left( -\partial_j^x + \frac{\partial_j^x f}{f} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(1)\vec{p}}(\vec{y}) + gf \partial_x^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) v^{(1)A^0}(\vec{y}) + gf \partial_j^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(1)\vec{\Sigma}}(\vec{y}) \\ -v^{(1)\pi_0}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_j^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(1)\vec{\phi}}(\vec{y}) \end{array} \right] = 0. \quad (4.126)$$

De onde vem as seguintes relações

$$v_i^{(1)P}(\vec{x}) = 0; \quad v_i^{(1)\pi}(\vec{x}) = 0; \quad v_i^{(1)A}(\vec{x}) = 0; \quad v_i^{(1)\Sigma}(\vec{x}) = \partial_i v^{(1)\lambda_2}(\vec{x}); \\ v_0^{(1)A^0}(\vec{x}) = -v^{(1)\lambda_2}(\vec{x}); \quad v_0^{(1)\pi_0}(\vec{x}) = \partial_x^2 (gf v^{(1)\lambda_1}(\vec{x})); \\ v_i^{(1)\phi}(\vec{x}) = -\partial_j^x (gf v^{(1)\lambda_1}(\vec{x})); \quad v_i^{(1)U}(\vec{x}) = -\partial_i^x v^{(1)\lambda_1}(\vec{x}) - \frac{\partial_i^x f}{f} v^{(1)\lambda_1}(\vec{x}), \quad (4.127)$$

onde  $v^{(1)\lambda_1}(\vec{x})$  e  $v^{(1)\lambda_2}(\vec{x})$  são funções arbitrárias. O modo-zero é

$$v^{(1)T} = (v_j^{(1)U}(\vec{x}); 0; 0; 0; v_0^{(1)A^0}(\vec{x}); v_0^{(1)\pi_0}(\vec{x}); v_j^{(1)\Sigma}(\vec{x}); \\ v_j^{(1)\phi}(\vec{x}); v^{(1)\lambda_1}(\vec{x}); v^{(1)\lambda_2}(\vec{x})). \quad (4.128)$$

Resultando no vínculo

$$\int d^3x v_j^{(1)\varphi}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \varphi^j(\vec{x})} \int d^3y V^{(1)}(\vec{y}) = 0. \quad (4.129)$$

Aplicando à (4.128), vem

$$\int d^3x \left[ v_j^{(1)U}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta U^j(\vec{x})} + v_0^{(1)A^0}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta A^0(\vec{x})} + v_j^{(1)\Sigma}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \Sigma^j(\vec{x})} + v_j^{(1)\phi}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \phi^j(\vec{x})} \right] \int d^3y V^{(1)}(\vec{y}) = 0. \quad (4.130)$$

Substituindo  $V^{(1)}(\vec{y})$

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left[ v_j^{(1)U}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta U^j(\vec{x})} + v_0^{(1)A^0}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta A^0(\vec{x})} + v_j^{(1)\Sigma}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \Sigma^j(\vec{x})} \right. \\ & + \left. v_j^{(1)\phi}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \phi^j(\vec{x})} \right] \int d^3y \left[ \pi^i \Sigma^i + \frac{1}{2} \frac{p^2}{f^2} + \frac{1}{2} (\nabla \times (f\vec{U}))^2 \right. \\ & - \left. \frac{g^2}{2} (\Sigma^i \Sigma^i + (\partial_i A^0)^2 + 2\Sigma^i \partial_i A^0) + \frac{g^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \phi^i (\nabla \times \nabla \times \vec{A})^i \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Que pode ser escrita

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left[ v_0^{(1)A^0}(\vec{x}) \int d^3y (-g^2 [(\partial_j A^0) + \Sigma^j] \partial_j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})) \right. \\ & + v_j^{(1)\Sigma}(\vec{x}) \int d^3y \left[ \pi^i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - g^2 (\Sigma^i + \partial_i A^0) \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right] \\ & + \left. v_j^{(1)\phi}(\vec{x}) \int d^3y (\nabla \times \nabla \times \vec{A})^j \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Realizando uma integração por partes no segundo termo, e relacionando  $v_0^{(1)A^0}(\vec{x})$  e  $v_j^{(1)\Sigma}(\vec{x})$  através das eq.(4.127), a equação anterior fica

$$\int d^3x \left\{ v_0^{(1)A^0}(\vec{x}) \partial_j \pi^j + v_j^{(1)\phi}(\vec{x}) \int d^3y (\nabla \times \nabla \times \vec{A})^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right\} = 0. \quad (4.133)$$

Realizando uma integração por partes no último termo, levando em conta a dependência de  $v_j^{(1)\phi}(\vec{x})$  dada na eq.(4.127), obtém-se

$$- \int d^3x v^{(1)\lambda_2}(\vec{x}) \partial_j \pi^j(\vec{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad {}^3\Omega^{(1)} = \nabla \cdot \vec{\pi} = 0. \quad (4.134)$$

Adicionando o vínculo à densidade Lagrangiana, escreve-se

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{\Sigma}} + \pi_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}_1 {}^1\Omega^{(0)} + \dot{\lambda}_2 {}^2\Omega^{(0)} + \dot{\lambda}_3 {}^3\Omega^{(1)} - V^{(2)}, \quad (4.135)$$

#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 87

onde

$$\begin{aligned}
 V^{(2)} &= V^{(1)} \Big|_{3\Omega=0} = \vec{\pi} \cdot \vec{\Sigma} + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{f^2} + \frac{1}{2} (\nabla \times (f\vec{U}))^2 - \frac{g^2}{2} (-\vec{\Sigma} - \nabla A^0)^2 \\
 &+ \frac{g^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \vec{\phi} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{A}). \quad (4.136)
 \end{aligned}$$

Com isso, obtém-se o conjunto de variáveis para o espaço de fase estendido

$$\xi^{(2)} \equiv \left( U^k, p_k; A^k, \pi_k, A^0, \pi_0; \Sigma^k, \phi_h; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \right). \quad (4.137)$$

Os momentos canônicos são

$$\begin{aligned}
 {}^2a_k^U &= -p_k; \quad {}^2a_k^p = 0; \quad {}^2a_k^A = \pi_k; \quad {}^2a_k^\pi = 0; \quad {}^2a_0^{A^0} = \pi_0; \quad {}^2a_0^{\pi_0} = 0; \\
 {}^2a_k^\Sigma &= -\phi_k; \quad {}^2a_k^\phi = 0; \quad {}^2a^{\lambda_1} = {}^1\Omega^{(0)}; \quad {}^2a^{\lambda_2} = {}^2\Omega^{(0)}; \quad {}^2a^{\lambda_3} = {}^3\Omega^{(2)}. \quad (4.138)
 \end{aligned}$$

A nova matriz  $(f_{ij}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}))$ , difere da anterior pelo acréscimo de uma linha e uma coluna referente à  $\lambda_3$ . O único termo dessa nova linha diferente de zero é

$$f_i^{(2)\pi\lambda_3}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^2a^{\lambda_3}(\vec{y}))}{\delta\pi^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^2a_j^\pi(\vec{x}))}{\delta\lambda_3(\vec{y})} = \delta_{ij}\partial_j^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.139)$$

Levando à matriz  $(f_{ij}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}))$

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^y & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -gf\partial_y^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & -gf\partial_i^y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & -\partial_i^y & 0 & 0 \\
 0 & \left(-\partial_j^x + \frac{\partial_j^x f}{f}\right) & 0 & 0 & gf\partial_x^2 & 0 & gf\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \quad (4.140)$$

A matriz  $(f_{ij}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}))$  é degenerada. Repete-se o processo para a busca de novos vínculos. Desta matriz, tem-se  $\int d^3y f_{ij}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y})v^{(2)}(\vec{y}) = 0$ . O modo-zero é

$$\begin{aligned}
 v^{(2)T} &\equiv (v_j^{(2)U}(\vec{y}); v_j^{(2)p}(\vec{y}); v_j^{(2)A}(\vec{y}); v_j^{(2)\pi}(\vec{y}); v_0^{(2)A^0}(\vec{y}); v_0^{(2)\pi_0}(\vec{y}); \\
 &v_j^{(2)\Sigma}(\vec{y}); v_j^{(2)\phi}(\vec{y}); v^{(2)\lambda_1}(\vec{y}); v^{(2)\lambda_2}(\vec{y}); v^{(2)\lambda_3}(\vec{y})). \quad (4.141)
 \end{aligned}$$

## 88CAPÍTULO 4. MÉTODO SIMPLÉTICO E O FLUIDO RELATIVÍSTICO

Daí, temos

$$\int d^3y \left[ \begin{array}{c}
 \delta_{ij} v_j^{(2)p}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
 -\delta_{ij} v_j^{(2)U}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \left( \partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v^{(2)\lambda_1}(\vec{y}) \\
 -\delta_{ij} v_j^{(2)\pi}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
 \delta_{ij} v_j^{(2)A}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_i^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v^{(2)\lambda_3}(\vec{y}) \\
 -v_0^{(2)\pi_0}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + g f \partial_y^2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v^{(2)\lambda_1}(\vec{y}) \\
 v_0^{(2)A^0}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + v^{(2)\lambda_2}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
 \delta_{ij} v_j^{(2)\phi}(\vec{y}) - g f \partial_i^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v^{(2)\lambda_1}(\vec{y}) \\
 -\delta_{ij} v_j^{(2)\Sigma}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v^{(2)\lambda_2}(\vec{y}) \\
 \left( -\partial_j^x + \frac{\partial_j^x f}{f} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(2)p}(\vec{y}) + g f \partial_x^2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v_0^{(2)A^0}(\vec{y}) + g f \partial_j^x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(2)\Sigma}(\vec{y}) \\
 -v_0^{(2)\pi_0}(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_j^x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(2)\phi}(\vec{y}) \\
 -\partial_j^x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) v_j^{(2)\pi}(\vec{y})
 \end{array} \right], \tag{4.142}$$

que deve ser igual à matriz coluna nula. Da eq.(4.142)

$$\begin{aligned}
 v^{(2)T}(\vec{x}) &= (v_j^{(2)U}(\vec{x}); 0; v_j^{(2)A}(\vec{x}); 0; v_0^{(2)A^0}(\vec{x}); v_0^{(2)\pi_0}(\vec{x}); \\
 v_j^{(2)\Sigma}(\vec{x}); v_j^{(2)\phi}(\vec{x}); v^{(2)\lambda_1}(\vec{x}); v^{(2)\lambda_2}(\vec{x}); v^{(2)\lambda_3}(\vec{x})). \tag{4.143}
 \end{aligned}$$

Da contração deste modo-zero,  $v^{(2)}(\vec{x})$  com o gradiente do potencial  $V^{(2)}$ , aparecem dois termos novos em relação à contração de  $v^{(1)}(\vec{x})$ , isto é

$$\begin{aligned}
 & \int d^3x (-v^{(2)\lambda_2}(\vec{x})) \partial_j \pi^j(\vec{x}) \\
 & + \int d^3x v_j^{(2)A}(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta A^j(\vec{x})} \int d^3y \left[ \frac{g^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \phi_i (\nabla \times \nabla \vec{A})^i \right] = 0. \tag{4.144}
 \end{aligned}$$

Porém, o segundo termo é nulo. O vínculo obtido, é o mesmo que anteriormente em (4.134). Como os vínculos provenientes da contração do gradiente do potencial com o modo zero foram esgotados, ou seja, não são gerados novos vínculos (Indicativo de estarmos frente a uma teoria com gauges a serem fixados), façamos as seguintes escolhas: fixamos o calibre de Coulomb e juntamente adicionamos a condição de incompressibilidade para um fluido relativístico [91]

$$A^0 = 0; \quad {}^4\Omega^{(2)} \equiv \nabla \cdot \vec{A}; \quad {}^5\Omega^{(2)} \equiv \partial_\mu U^\mu. \tag{4.145}$$

É necessário adicionar  ${}^5\Omega^{(2)}$  como vínculo, pois a fixação do calibre de Coulomb não é suficiente para tornar a matriz simplética. Enquanto que para o eletromagnetismo, os calibres de Coulomb ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ) e de Lorentz ( $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ) não



#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 89

alteram o sistema físico envolvido, a relação  $\partial_\mu U^\mu = 0$  está diretamente relacionada à natureza do fluido. Sendo  $\partial_\mu U^\mu = 0$  (lembrando que  $U^\mu = (\gamma, \gamma V^i)$ , onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz e  $V^i$  as componentes espaciais da velocidade) a característica apresentada por um fluido incompressível. O sistema físico que analisamos, trata-se de um fluido incompressível, caracterizando assim, a escolha desse vínculo para a quadri-velocidade  $U^\mu$ .

${}^4\Omega^{(2)}$  e  ${}^5\Omega^{(2)}$  são acrescentados à densidade lagrangiana por meio dos multiplicadores de Lagrange.

$$\mathcal{L} = -\vec{p} \cdot \dot{\vec{U}} - \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{\Sigma}} + \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} + \dot{\lambda}_1 {}^1\Omega^{(0)} + \dot{\lambda}_2 {}^2\Omega^{(0)} + \dot{\lambda}_3 {}^3\Omega^{(1)} + \dot{\lambda}_4 {}^4\Omega^{(2)} + \dot{\lambda}_5 {}^5\Omega^{(2)} - V^{(3)} \quad (4.146)$$

onde

$$V^{(3)} = V^{(2)} \Big|_{A^0=4\Omega=5\Omega=0} = \vec{\pi} \cdot \vec{\Sigma} + \frac{p^2}{2f^2} + \frac{1}{2}(\nabla \times (f\vec{U}))^2 - \frac{g^2}{2}(\vec{\Sigma})^2 + \frac{g^2}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 - \vec{\phi} \cdot \nabla^2 \vec{A}. \quad (4.147)$$

As coordenadas do espaço de fase estendido ficam dadas por

$$\xi^{(3)} \equiv \left( U^k, p_k; A^k, \pi_k, \pi_0; \Sigma^k, \phi_k; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \right), \quad (4.148)$$

e os momentos canônicos são

$$\begin{aligned} {}^3a_k^U &= -p_k; {}^3a_k^p = 0; {}^3a_k^A = \pi_k; {}^3a_k^\pi = 0; {}^3a_0^{\pi_0} = 0; {}^3a_k^\Sigma = -\phi_k; {}^3a_k^\phi = 0; \\ {}^3a^{\lambda_1} &= {}^1\Omega^{(0)}; {}^3a^{\lambda_2} = {}^2\Omega^{(0)}; {}^3a^{\lambda_3} = {}^3\Omega^{(1)}; {}^3a^{\lambda_4} = {}^4\Omega^{(2)}; {}^3a^{\lambda_5} = {}^5\Omega^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Os novos elementos diferentes de zero para a matriz  $f_{ij}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y})$  são

$$f_i^{(3)\vec{U}\lambda_5}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^3a^{\lambda_5}(\vec{y}))}{\delta U^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^3a_i^U(\vec{x}))}{\delta \lambda_5(\vec{y})} = \delta_{ij} \partial_j^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.150)$$

$$f_i^{(3)\vec{A}\lambda_4}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta({}^3a^{\lambda_4}(\vec{y}))}{\delta A^i(\vec{x})} - \frac{\delta({}^3a_i^A(\vec{x}))}{\delta \lambda_4(\vec{y})} = \delta_{ij} \partial_j^y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.151)$$

A matriz  $(f_{ij}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}))$  tem a seguinte forma

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^y \\
 -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left( \partial_i^y - \frac{\partial_i^y f}{f} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^y & 0 \\
 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_i^y & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & -gf\partial_i^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 & -\partial_i^y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \left( -\partial_j^x + \frac{\partial_j^x f}{f} \right) & 0 & 0 & 0 & gf\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.152)$$

Finalmente, a matriz  $f_{ij}^{(3)}(\vec{x}, \vec{y})$  é não-degenerada, portanto, possui inversa. Para a obtenção de sua inversa, escreve-se a seguinte equação

$$\int d^3x' f_{nk}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}') f_{km}^{(3)}(\vec{x}', \vec{x}'') = \delta_{nm} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.153)$$

onde  $k, m, n = 1, 2, \dots, 12$ .  $f_{nk}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}')$  são os elementos da matriz inversa de  $f_{km}^{(3)}(\vec{x}', \vec{x}'')$ , os índices  $n$  e  $k$ , ou  $k$  e  $m$  representam as linhas e as colunas das matrizes, respectivamente,  $\delta_{nm}$  é o delta de Kronecker e  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'')$  é a distribuição delta. Após um longo trabalho algébrico, podem ser obtidos os elementos de  $\left( f_{ij}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}'') \right)$ , inversa da matriz simplética.

Os parêntese generalizados, ou de Dirac, para este sistema físico composto por um fluido incompressível ideal de partículas relativísticas imerso em um campo eletromagnético podem ser obtidos por meio de

$$\{A(\xi), B(\xi)\}^* = \frac{\partial A}{\partial \xi^i} f^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j}. \quad (4.154)$$

Fazendo a seguinte correspondência entre as coordenadas do espaço de fase estendido e a numeração correspondente aos índices de linha e coluna da matriz  $\left( f_{ij}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}'') \right)$ ,

$$\begin{aligned}
 \xi^{(3)} &\equiv \left( U^k, p_k; A^k, \pi_k, \pi_0; \Sigma^k, \phi_k; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \right) \\
 \xi^{(3)} &\equiv (1, 2; 3, 4, 5; 6, 7; 8, 9, 10, 11, 12), \quad (4.155)
 \end{aligned}$$

é possível mapear os índices da eq.(4.154) por  $i, j = 1, 2, \dots, 12$ . Assim, os parêntese generalizados entre os campos básicos deste sistema físico são diretamente

#### 4.6. APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLÉTICO AO FLUIDO CARREGADO 91

determinados pelos elementos da matriz  $\left(f_{ij}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}'')\right)$ . Prosseguindo para a obtenção dos elementos  $f_{ij}^{(3)-1}(\vec{x}, \vec{x}'')$  usando (4.154), os parênteses generalizados (também chamados de Parêntese de Dirac) diferente de zero são

$$\left\{\Sigma^i(\vec{x}), \phi_j(\vec{x}'')\right\}^* = -\delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.156)$$

$$\left\{\lambda_2(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}'')\right\}^* = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.157)$$

$$\left\{\lambda_3(\vec{x}), \pi_i(\vec{x}'')\right\}^* = -\frac{\partial_i^x}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.158)$$

$$\left\{\lambda_4(\vec{x}), A^i(\vec{x}'')\right\}^* = -\frac{\partial_i^x}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.159)$$

$$\left\{\lambda_5(\vec{x}), U^i(\vec{x}'')\right\}^* = -\frac{\partial_i^x}{\nabla_{x'}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.160)$$

$$\left\{U^i(\vec{x}), p_j(\vec{x}'')\right\}^* = -\delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') + \frac{\partial_i^{x''} \partial_j^{x''}}{\nabla_x^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.161)$$

$$\left\{p_i(\vec{x}), \phi_j(\vec{x}'')\right\}^* = g f \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.162)$$

$$\left\{p_j(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}'')\right\}^* = g \partial_j^{x''} \left[ f \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \right] \quad (4.163)$$

$$\left\{\lambda_5(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}'')\right\}^* = -g \partial_i^{x''} \left[ f \frac{\partial_i^x}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \right] \quad (4.164)$$

$$\left\{p(\vec{x}), \lambda_1(\vec{x}'')\right\}^* = \frac{\partial_i^x}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.165)$$

$$\left\{\lambda_1(\vec{x}), \lambda_5(\vec{x}'')\right\}^* = -\frac{1}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.166)$$

$$\left\{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{x}'')\right\}^* = \left[ \delta_j^i - \frac{\partial_i^{x''} \partial_j^{x''}}{\nabla_x^2} \right] \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.167)$$

$$\left\{\pi_0(\vec{x}), \Sigma^i(\vec{x}'')\right\}^* = -\partial_i^{x''} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.168)$$

$$\left\{\lambda_3(\vec{x}), \lambda_4(\vec{x}'')\right\}^* = \frac{\partial_j^{x''}}{\nabla_{x''}^2} \frac{\partial_j^x}{\nabla_{x''}^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.169)$$

Desses parênteses generalizados, aqueles entre campos físicos são (4.156), (4.161), (4.162), (4.163), (4.167) e (4.168). A saber

$$\{\Sigma^i(\vec{x}), \phi_j(\vec{x}'')\}^* = -\delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.170)$$

$$\{U^i(\vec{x}), p_j(\vec{x}'')\}^* = -\delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') + \frac{\partial^{x''} \partial_j^{x''}}{\nabla_x^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.171)$$

$$\{p_i(\vec{x}), \phi_j(\vec{x}'')\}^* = g f \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.172)$$

$$\{p_j(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}'')\}^* = g \partial_j^{x''} [f \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'')] \quad (4.173)$$

$$\{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{x}'')\}^* = \left[ \delta_j^i - \frac{\partial^{x''} \partial_j^{x''}}{\nabla_x^2} \right] \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (4.174)$$

$$\{\pi_0(\vec{x}), \Sigma^i(\vec{x}'')\}^* = -\partial_i^{x''} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}''). \quad (4.175)$$

Pois, a matriz simplética tem a seguinte estrutura

$$(f^{ij}) = \begin{pmatrix} f^{ij} & \frac{\partial \Omega_m}{\partial \xi^{(0)\alpha}} \\ -\frac{\partial \Omega_m}{\partial \xi^{(0)\beta}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.176)$$

onde o setor contendo  $f^{ij}$  é formado a partir da aplicação da 2-forma simplética para os momentos conjugados aos campos físicos. Além disso, os parêntese generalizados entre os multiplicadores de Lagrange resultam zero, setor nulo de  $(f^{ij})$ , mostrando que esses não são variáveis físicas [55].

Pode-se notar a presença de (4.174), o mesmo parêntese obtido pelo método de Dirac para o campo eletromagnético [92]. É notável a semelhança de (4.171) com o Parêntese generalizado para os campos  $A^i(\vec{x})$  e  $\pi_i(\vec{x})$ . Resultados semelhantes a (4.171) foram obtidos para o fluido clássico incompressível em [30], e para o fluido clássico compressível em [32].  $f(T) = \frac{K_3(\frac{m}{T})}{K_2(\frac{m}{T})}$  está presente nos parênteses generalizados que relacionam campos com momentos conjugados de campos diferentes desse. Em outras palavras,  $f(T)$  que contém o caráter estatístico do sistema físico, está presente nos parênteses generalizados que acoplam os campos do fluido aos campos relacionados a altas derivadas do campo eletromagnético.

## Capítulo 5

### Conclusão

Podemos dizer que dentre os métodos de introdução da não-comutatividade em uma teoria física, ressaltamos aqui dois deles. Um deles é a utilização direta do produto Moyal, onde é utilizada a relação  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$ , para obter a extensão não-comutativa da teoria original. A outra forma, mais apropriada para aplicar dentro do formalismo do fluido, significa começar com o modelo do fluido descrito por uma Lagrangiana escrita em coordenadas de Lagrange [83], introduzir as coordenadas não-comutativas, construindo assim a nova álgebra não-comutativa e em seguida utilizar o mapa que atua como uma ponte entre as coordenadas de Lagrange e de Euler para o fluido. Assim, construindo uma estrutura Hamiltoniana para refletir os efeitos não-comutativos na teoria de campos do fluido. Nesta tese seguimos a segunda abordagem, mas em vez de construir um espaço com coordenadas não-comutativas, descrevemos um espaço de fase não-comutativo com variáveis dinâmicas não-comutativas. Ou seja, construímos uma álgebra não-comutativa entre as velocidades, mantendo seus momentos conjugados comutativos entre si. Com essa nova álgebra não-comutativa, construímos a versão não-comutativa da equação de Navier-Stokes para a MHD. Calculamos a extensão não-comutativa da taxa de variação da energia mecânica, onde o termo não-comutativo que quebra a conservação de energia, apresenta um acoplamento mínimo típico entre a vorticidade e o campo magnético. Esse resultado, por sua vez, motivou o cálculo da taxa de variação da circulação, que descreve o fluxo de vórtices. Os termos devido à não-comutatividade que possuem o vetor de Lamb em seu interior, que poderiam atuar como uma espécie de fonte de vorticidade, possuem sinal negativo e acabam por reduzir a taxa de variação da circulação. Por outro lado, na equação de Navier-Stokes não-comutativa para a MHD, ou seja, a equação para a aceleração do fluxo, podemos ver claramente que os termos não-comutativos aceleram o fluxo.

Assim, podemos conjecturar se esses termos atuam como uma força de vorticidade, ou seja, cumprem o papel de vetores de Lamb. Pode-se ver que quando  $\theta = 0$ , recuperamos a equação de Navier-Stokes para a MHD munida de uma álgebra de velocidades comutativas.

Através da análise das relações de dispersão para ondas em MHD, a partir da Lagrangiana  $\mathcal{L}_{MHD}$ , foi possível a obtenção de quatro relações de dispersão, sendo três delas referentes ao vetor de onda  $\vec{k}$  ser perpendicular ao campo magnético aplicado  $\vec{B}_0$ . Sendo dois desses três, obtidos através da análise de casos limite para a viscosidade  $\nu$  do meio. A quarta relação, caso para o qual  $\vec{k}$  é paralelo à velocidade da Alfvén  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{k}$  e  $\vec{B}$  tem o mesmo sentido e  $\vec{v}_1$  também é paralelo a  $\vec{v}_a$ , obtivemos o mesmo resultado que para quando  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ , responsável pelas três outras relações de dispersão, porém para o caso onde  $\nu$  não é analisado em um caso limite. Revelando o mesmo comportamento ondulatório, embora sejam caracterizados por arranjos distintos.

Foi possível também, através do método simplético, obter parênteses generalizados para um fluido relativístico incompressível carregado na presença de campo eletromagnético, onde por meio da definição de um novo tensor que relaciona a quadrivelocidade e a entalpia relativística, é estabelecido um acoplamento entre esse novo tensor de campo para o fluido e o tensor de campo eletromagnético de Maxwell. O tensor resultante desse acoplamento possibilita escrever as equações de movimento para um plasma de forma compacta. O método simplético tem a vantagem de não exigir a classificação dos vínculos em primários, secundários e anida de primeira e segunda classe. Embora a classificação desses em primeira classe, ajude a investigar a existência de simetrias de calibre, já que estes são os geradores de simetria de calibre segundo Dirac [84] e/ou inter-relações das coordenadas do espaço de fase. E os vínculos de segunda classe estejam ligados a existência da matriz simplética. Tendo em vista que esta é a inversa da matriz inicialmente pré-simplética. O parêntese obtido entre a velocidade e seu momento conjugado possuem estrutura semelhante ao parêntese entre o potencial vetor e seu momento conjugado. Isso se deve à estrutura familiar (por construção) entre  $S^{\mu\nu}$  e  $F^{\mu\nu}$ . Já os parênteses entre os campos  $p_i(t, \vec{x})$ ,  $\phi_i(t, \vec{x})$  e  $\pi_0(t, \vec{x})$ , representam uma mistura entre os momentos conjugados dos campos do fluido e do campo eletromagnético. Essa mistura se deve à presença da função  $f(T)$ , entalpia, responsável pelo caráter estatístico do sistema físico, bem como, pela presença de partículas massivas e carregadas que compõem o fluido.

## Apêndice A

# Não-Comutatividade e o Produto Estrela $\star$

Seja uma variedade  $M$  munida de uma álgebra de funções  $A$  associativa e comutativa em relação à multiplicação usual de funções,  $(A, \cdot)$ . Se realizarmos a troca do produto usual pelo produto estrela de Moyal, a nova álgebra de funções  $\mathcal{A}$  em  $M$  continua sendo associativa, porém não mais comutativa,  $\mathcal{A} = (A, \star)$ . Um exemplo dessa realização pode ser visto no processo de quantização de Weyl [93].

Inicialmente, propomos que as coordenadas  $x^\mu$  do espaço sejam substituídas por operadores hermitianos  $\hat{x}^\mu$  definidos em um espaço de Hilbert  $H$ , que obedecem a relação

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}. \quad (\text{A.1})$$

Onde, como mencionado anteriormente,  $\theta^{ij}$  são componentes constantes e reais de um tensor antissimétrico. Essa é a maneira mais simples de introduzir a não-comutatividade no espaço de coordenadas. A seguir, para funções  $f(x)$  pertencentes a um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^D$ , que sejam funções de Schwartz, ou seja, que vão a zero rapidamente no infinito, de modo que suas derivadas de qualquer ordem sejam nulas no infinito, com transformada de Fourier dado por

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x \exp(-ik_j x^j) f(x), \quad \text{onde } j = 1, 2, \dots, D \quad (\text{A.2})$$

define-se o operador de Weyl, levando em consideração  $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$ , pela seguinte fórmula

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_j \hat{x}^j}. \quad (\text{A.3})$$

Através do operador Hermitiano  $\hat{\Delta}(x)$  é possível estabelecer um mapeamento entre as funções  $f(x)$ , definidas no espaço de fase comutativo, e os operadores  $\hat{W}[f]$  pertencente ao espaço não-comutativo  $H$ , da seguinte maneira

$$\hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x), \quad (\text{A.4})$$

onde  $\hat{\Delta}$  é dado pela seguinte expressão [71]

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{(ik_j \hat{x}^j - ik_j x^j)} \quad (\text{A.5})$$

É importante notar que a equação (A.4) associa operadores em um espaço não-comutativo, à funções que dependem das variáveis do espaço de fase clássico [75]. Agora, para a obtenção de uma expressão notável, analisemos o produto de operadores  $\hat{W}[f(x)] \hat{W}[g(x)]$

$$\hat{W}[f(x)] \hat{W}[g(x)] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{ik_{1,j} \hat{x}^j} e^{ik_{2,j} \hat{x}^j}. \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) pode ser expressa de forma a apresentar sua dependência em  $\theta^{ij}$  explicitamente, por meio do uso da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para o produto de exponencial de dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$

$$e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{12}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots}. \quad (\text{A.7})$$

Para os operadores  $\hat{x}^j$ , seus comutadores são o número complexo constante  $i\theta^{ij}$ , ou seja,  $[\hat{x}^i, [\hat{x}^i, \hat{x}^j]] = 0$ , que reduz (A.7) à

$$e^{ik_{1,j} \hat{x}^j} \cdot e^{ik_{2,m} \hat{x}^m} = e^{-\frac{i}{2} k_{1,j} \theta^{jm} k_{2,m}} e^{i(k_{1,j} + k_{2,j}) \hat{x}^j} \quad (\text{A.8})$$

Dessa forma, o produto de operadores (A.6) pode ser escrito como

$$\hat{W}[f(x)] \hat{W}[g(x)] = \hat{W}[f(x) \star g(x)], \quad (\text{A.9})$$

onde produto de Moyal, no lado direito da igualdade anterior, é

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_{1,j} \theta^{jl} k_{2,l}} e^{i(k_{1,j} + k_{2,j}) \hat{x}^j}. \quad (\text{A.10})$$

O produto estrela, ou produto Moyal, (A.10) pode ser escrito na forma diferencial como apresentado anteriormente, eq.(3.8).



## Apêndice B

# Representação das Coordenadas de um Fluido

A descrição das coordenadas de Lagrange se baseia na observação das partículas que compõe o fluido, individualmente, caracterizando suas posições por  $\vec{X}(t)$  [94]. Para uma partícula, não-relativística, de massa  $m$  submetida a uma força  $\vec{F}(\vec{X}(t))$ , sua equação de movimento na descrição em coordenadas de Lagrange é

$$\ddot{X}^i(t) = \frac{1}{m} F^i(\vec{X}(t)), \quad (\text{B.1})$$

que essencialmente, se trata da equação de Newton [94]. Já a formulação de Euler para a dinâmica de fluidos, trata-se da densidade  $\rho$ , da velocidade  $\vec{v}$  e da equação de Euler para a dinâmica. As duas representações podem ser relacionadas através de funções delta, mesmo tendo como ponto de partida a descrição de Lagrange para o "fluido" de uma partícula, eq.(B.1).

A descrição completa, deve tratar o fluido como um meio contínuo. Assim, considerando um "fluido" composto por  $N$  partículas idênticas, onde a  $n$ -ésima partícula está submetida à força  $\vec{F}$ . A dinâmica da  $n$ -ésima partícula será dada pela eq.(B.1) modificada do seguinte modo

$$\ddot{X}_n(t) = \frac{1}{m} F^i(\vec{X}_n(t); \{ \vec{X}_k; k \neq n \}), \quad (\text{B.2})$$

pois  $\vec{F}$  deve ser invariante diante da troca das coordenadas corresponde às partículas restantes [94]. A conexão entre a representação de Lagrange e a representação de Euler, requer a definição da densidade de massa Euleriana

$$\rho(t, \vec{r}) = m \sum_{n=1}^N \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}). \quad (\text{B.3})$$

A equação de continuidade pode ser obtida de (B.3) realizando uma derivada temporal

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) = m \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial X^j} \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}_n^j(t) = m \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{\partial}{\partial r^j} \left( \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}_n^j(t) \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

98 APÊNDICE B. REPRESENTAÇÃO DAS COORDENADAS DE UM FLUIDO

Definindo a velocidade Euleriana como  $\vec{v}_n(t) = \dot{\vec{X}}_n(t)$ , a equação (B.4) torna-se

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) = -\nabla \cdot (\vec{v}_n(t, \vec{r})\rho(t, \vec{r})), \quad (\text{B.5})$$

que é a equação da continuidade. A partir da equação (B.5), define-se a densidade de corrente

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r})\rho(t, \vec{r}) = m \sum_{n=1}^N \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{\vec{X}}_n(t). \quad (\text{B.6})$$

Para obter a equação de Euler para a dinâmica, realiza-se a derivada temporal da densidade de corrente e emprega-se a equação de continuidade (B.5)

$$\begin{aligned} \dot{v}^i(t, \vec{r})\rho(t, \vec{r}) + v^i(t, \vec{r})\dot{\rho}(t, \vec{r}) &= m \sum_{n=1}^N \ddot{X}_n^i(t) \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^N m \dot{X}_n^i(t) \frac{\partial}{\partial X^j} \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}^j(t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Utilizando a equação da continuidade do lado esquerdo da igualdade, resulta

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{r})\dot{v}^i(t, \vec{r}) &- m \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial r^j} \left( \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}^j(t) \right) \dot{X}_n^i(t) = m \sum_{n=1}^N \ddot{X}_n^i(t) \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \\ &- m \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial r^j} \left[ \dot{X}_n^i(t) \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}^j \right] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Resultando em

$$\rho(t, \vec{r})\dot{v}^i(t, \vec{r}) = m \sum_{n=1}^N \ddot{X}_n^i(t) \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) - m \sum_{n=1}^N \delta(\vec{X}_n(t) - \vec{r}) \dot{X}^j(t) \frac{\partial}{\partial r^j} \dot{X}^i(t) \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{v}^i(t, \vec{r}) + v^j(t, \vec{r})\partial_j v^i(t, \vec{r}) = \frac{1}{m} F^i(\vec{r}). \quad (\text{B.10})$$

que é a equação de Euler para um fluido ideal submetido a uma força  $F^i(\vec{r})$ . É importante frisar que a equação (B.10) só é válida para o ponto onde  $\vec{r} = \vec{X}$ .

A passagem do discreto (Lagrange), para o contínuo (Euler) é realizada através da troca do índice discreto  $n$ , pela coordenada, "índice" contínuo,  $\vec{x}$ . Através dessa troca, as coordenadas de Lagrange  $X_n^i(t)$  passam a ser representadas por  $X_n^i(t, \vec{x})$ , ou seja,  $n$  passa a ser representada pela coordenada  $\vec{x}$  cujo domínio de valores

assumidos, é contínuo. Com isso a equação para a dinâmica do fluido em coordenadas de Lagrange, e para as coordenadas de Euler, os campos  $\rho(t, \vec{r})$ ,  $\vec{v}(t, \vec{r})$  e também  $\vec{j}(t, \vec{r})$  são, respectivamente [94] [83],

$$\ddot{X}^i(t, \vec{x}) = \frac{1}{m} F^i(\vec{X}(t, \vec{x})); \quad (\text{B.11})$$

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int dx \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}); \quad (\text{B.12})$$

$$v_i(t, \vec{r}) = \frac{\int dx \dot{X}_i(t, \vec{x}) \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r})}{\int dx \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r})}; \quad (\text{B.13})$$

$$j^i(t, \vec{r}) = v^i(t, \vec{r}) \rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int dx \dot{X}^i(t, \vec{x}) \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}). \quad (\text{B.14})$$

As integrais devem ser tomadas sobre todo o volume, de modo que quando realizada para  $\rho(t, \vec{r})$ , resulte a massa total. Como para o caso do "fluido" com  $n$  partículas, as equações (B.12) e (B.14) obedecem a equação de continuidade. Elas também podem ser relacionadas, como anteriormente, para a obtenção da equação de Euler.

A Hamiltoniana para o fluido também dependerá da descrição utilizada, como pode ser observado para a Hamiltoniana da MHD obtida no capítulo anterior. Para o método de Lagrange, essa pode ser escrita na forma usual para a mecânica clássica, já que em essência a descrição de Lagrange é a abordagem Newtoniana de um sistema físico no qual leva-se em conta a descrição da dinâmica de cada partícula. Logo  $H_L$  (Hamiltoniana para o fluido de Lagrange) é

$$H_L = \int dx \left( \frac{1}{2m} p^2 + \nu(\vec{X}) \right), \quad (\text{B.15})$$

onde a força sobre a qual as partículas estão submetidas é proveniente de um potencial,  $\vec{F} = -\nabla \nu(\vec{X})$  e  $\vec{p} = m \dot{\vec{X}}$ . Pode-se notar que os parêntese de Poisson entre  $\vec{X}$ ,  $\vec{p}$  e a Hamiltoniana (B.15), reproduz a equação dinâmica para  $\vec{X}$ , (B.11), com o uso dos parêntese fundamentais  $\{X^i(\vec{x}), p_j(\vec{x}')\} = \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ . Já a Hamiltoniana que reproduz a equação da continuidade (B.5) e a equação de Euler (B.10), pode ser obtida realizando a transformação das coordenadas de Lagrange em (B.15) resultando em uma Hamiltoniana em coordenadas Eulerianas ( $H_E$ ). A Hamiltoniana  $H_E$  será dada por

$$H_E = H = \int dr \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + V(\rho) \right). \quad (\text{B.16})$$

Onde multiplica-se a equação (B.15) pela unidade escrita na forma  $\int dr \delta(\vec{X} - \vec{r})$ , e o potencial  $\nu(\vec{X})$  é reescrito de forma que sua derivada em relação à densidade, se relaciona à pressão  $P(\rho)$ , fluido barotrópico, como a seguir

$$P(\rho) = \rho V'(\rho) + V(\rho). \quad (\text{B.17})$$

a linha refere-se à derivada em relação a  $\rho$ .  $V'(\rho)$  é chamado de entalpia [94].

Um jeito de verificar a validade da Hamiltoniana  $H$ , (B.16), é através da realização de seu parêntese de Poisson com  $\rho(t, \vec{r})$  e  $\vec{v}(t, \vec{r})$ , por meio dos quais deve-se encontrar a equação da continuidade e a equação de Euler. Porém, para tal fim é necessário conhecer os parênteses entre  $\rho$  e  $\vec{v}$ . Para a obtenção dos parênteses, exploramos as relações de  $\rho(t, \vec{r})$  e  $\vec{v}(t, \vec{r})$  (para o último lembramos que  $\vec{j} = \vec{v}\rho$ ) dadas pelas equações

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int d^3x \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}), \quad (\text{B.18})$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r})\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int d^3x \dot{\vec{X}}(t, \vec{r}) \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}). \quad (\text{B.19})$$

E levando em conta que o único parêntese diferente de zero para as coordenadas de Lagrange é  $\{X^i(\vec{x}), \dot{X}^j(\vec{x}')\} = \frac{1}{\rho_0} \delta^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ , é possível escrever os parênteses para os campos, em termos das coordenadas  $X^i(\vec{x})$  e  $\dot{X}^i(\vec{x})$ .

$$\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = \left\{ \int d^3\vec{x} \rho_0 \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}), \int d^3\vec{y} \rho_0 \delta(\vec{X}(t, \vec{y}) - \vec{r}') \right\} = 0. \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \{\rho(\vec{r}), j^i(\vec{r}')\} &= \left\{ \int d^3\vec{x} \rho_0 \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}), \int d^3\vec{y} \rho_0 \dot{X}^i(\vec{X}(t, \vec{y}) - \vec{r}') \right\} \\ &= \int d^3\vec{X} \left. \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \right|_{\rho_0} \frac{\partial \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r})}{\partial X^k(t, \vec{x})} \delta_k^i \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}') \\ &= \rho(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Desse parênteses, (B.21), usando  $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})\rho(\vec{r})$ , pode-se expressar o parêntese entre  $\vec{v}(\vec{r})$  e  $\rho(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}') v^i(\vec{r}')\} &= \{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} v^i(\vec{r}') + \rho(\vec{r}') \{\rho(\vec{r}), v^i(\vec{r}')\} \\ &= \rho(\vec{r}') \{\rho(\vec{r}), v^i(\vec{r}')\} = \rho(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

ou seja,

$$\{\rho(\vec{r}), v^i(\vec{r}')\} = \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (\text{B.23})$$

Para o parenteses entre as densidades de corrente, onde assim como para os campos anteriores, esse é escrito em termos de um funcional expresso nas coordenadas de

Lagrange, temos

$$\begin{aligned}
\{j^i(t, \vec{r}), j^j(t, \vec{r}')\} &= \int d^3\vec{x} \left[ \frac{\delta j^i(t, \vec{r})}{\delta X^k(t, \vec{x})} \frac{\delta j^j(t, \vec{r}')}{\delta(\rho_0(\vec{X})\dot{X}^k(t, \vec{x}))} - \frac{\partial j^j(t, \vec{r}')}{\partial X^k(t, \vec{x})} \frac{\partial j^i(t, \vec{x})}{\partial(\rho_0\dot{X}^k(t, \vec{x}))} \right] \\
&= \int d^3\vec{x} \left[ \rho_0\dot{X}^i \frac{\partial\delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r})}{\partial X^k(t, \vec{x})} \delta_k^j \delta(\vec{X}(t, \vec{r}) - \vec{r}') \right. \\
&\quad \left. - \rho_0\dot{X}^j(t, \vec{x}) \frac{\partial\delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}')}{\partial X^k(t, \vec{x})} \delta_k^i \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}) \right] \\
&= j^i(t, \vec{r}') \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r'^j} - j^j(t, \vec{r}) \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r^i} \\
&= j^j(t, \vec{r}) \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r^i} + j^i(t, \vec{r}') \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r'^j}. \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Ainda utilizando a expressão  $\vec{j} = \vec{v}\rho$ , omitido  $t$ , pois os parênteses são calculados para o mesmo instante de tempo, escreve-se

$$\begin{aligned}
\{j^i(\vec{r}), j^j(\vec{r}')\} &= \{v^i(\vec{r})\rho(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\rho(\vec{r}')\} \\
&= v^i(\vec{r}) \{ \rho(\vec{r}), v^j(\vec{r}') \} \rho(\vec{r}') + \{ v^i(\vec{r}'), v^j(\vec{r}') \} \rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}) \\
&\quad + v^j(\vec{r}') v^i(\vec{r}) \{ \rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}') \} + v^j(\vec{r}') \{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') \} \rho(\vec{r}). \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Explicitando o segundo termo do lado direito da igualdade

$$\begin{aligned}
\{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}') &= j^i(\vec{r}') \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r'^j} - j^j(\vec{r}) \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r^i} \\
&\quad - v^i(\vec{r})\rho(\vec{r}') \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r'^j} + v^j(\vec{r}')\rho(\vec{r}) \frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial r^i}. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Levando em conta que, após uma integração em  $\vec{r}$ , os únicos termos do lado direito da eq.(B.26), diferentes de zero são

$$\rho(t, \vec{r}') \frac{\partial v^j(t, \vec{r}')}{\partial r^i} - \rho(t, \vec{r}') \frac{\partial v^i(t, \vec{r}')}{\partial r'^j}, \tag{B.27}$$

ou para uma uma integração em  $\vec{r}'$

$$\rho(t, \vec{r}) \frac{\partial v^j(t, \vec{r})}{\partial r^i} - \rho(t, \vec{r}) \frac{\partial v^i(t, \vec{r})}{\partial r^j}. \tag{B.28}$$

Assim, pode-se escrever a eq.(B.26) na seguinte forma

$$\{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \omega_{ij}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{B.29}$$

102 APÊNDICE B. REPRESENTAÇÃO DAS COORDENADAS DE UM FLUIDO

Onde  $\omega_{ij}(\vec{r}) = \partial_i v_j - \partial_j v_i(\vec{r})$  é chamada de vorticidade [94] [95].

Sumarizando os resultados obtidos para os parênteses entre os campos de Euler, temos

$$\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$\{\rho(\vec{r}), j^i(\vec{r}')\} = \rho(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (\text{B.31})$$

$$\{j^i(\vec{r}), j^j(\vec{r}')\} = j^j(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}') + j^i(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'^j} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (\text{B.32})$$

$$\{\rho(\vec{r}), v^i(\vec{r}')\} = \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (\text{B.33})$$

$$\{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \omega_{ij}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (\text{B.34})$$

Esses parênteses são obtidos através da representação dos campos em termos das coordenadas pontuais  $\vec{X}$  e suas derivadas  $\dot{\vec{X}}$ . Além disso, pode-se usá-los para a verificação da Lagrangiana  $H$ . A saber

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\vec{r}) &= \{\rho(\vec{r}), H\} = \left\{ \rho(\vec{r}), \int d\vec{r}' \left( \frac{1}{2} \rho(\vec{r}') v^2(\vec{r}') \right) + V(\rho) \right\} \\ &= \int d\vec{r}' \left\{ \rho(\vec{r}), \frac{1}{2} \rho(\vec{r}') v^2(\vec{r}') \right\} + \int d\vec{r}' \{ \rho(\vec{r}), V(\rho) \} \\ &= \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') v^i(\vec{r}') \{ \rho(\vec{r}), v^i(\vec{r}') \} = \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') v^i(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= - \frac{\partial}{\partial r^i} \left( v^i(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Ou seja, a equação da continuidade,

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) = -\nabla \cdot (\vec{v}(t, \vec{r}) \rho(t, \vec{r})). \quad (\text{B.36})$$

Para a equação de Euler, escreve-se

$$\begin{aligned}
\dot{v}^i(\vec{r}) &= \left\{ v^i(\vec{r}), H(\vec{r}') \right\} = \left\{ v^i(\vec{r}), \int d\vec{r}' \left( \frac{1}{2} \rho(\vec{r}') v^2(\vec{r}') + V(\rho) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int d\vec{r}' \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') v^k(\vec{r}') v^k(\vec{r}') \right\} + \int d\vec{r}' \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') V'(\rho) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int d\vec{r}' \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') \right\} v^k(\vec{r}') v^k(\vec{r}') + \frac{1}{2} \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left\{ v^i(\vec{r}), v^k(\vec{r}') v^k(\vec{r}') \right\} \\
&+ \int d\vec{r}' \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') V'(\rho) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int d\vec{r}' \left[ -\frac{\partial}{\partial r^i} (v^k(\vec{r}') v^k(\vec{r}')) \right] + \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') v^k(\vec{r}') \left\{ v^i(\vec{r}), v^k(\vec{r}') \right\} \\
&+ \int d\vec{r}' \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') V'(\rho) \right\} \\
&= -v^k(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r^i} v^k(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') v^k(\vec{r}') \left[ \frac{1}{\rho(\vec{r})} \left( \frac{\partial}{\partial r^i} v^k(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial r^k} v^i(\vec{r}) \right) \right] \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\
&+ \int d\vec{r}' V'(\rho) \left\{ v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}') \right\} \\
&= -v^k(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r^k} v^i(\vec{r}) + \int d\vec{r}' V'(\rho) \left[ -\frac{\partial}{\partial r^i} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] \\
&= -v^k(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r^k} v^i(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial r^i} V'(\rho(\vec{r})), \tag{B.37}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{v}^i(\vec{r}) = -v^k(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r^k} v^i(\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial r^i} V'(\rho(\vec{r})). \tag{B.38}$$

Que nada mais é que a equação para a dinâmica (lei da força) nas coordenadas de Euler.

## Apêndice C

### Termo de Pressão Magnética

Consideremos a seguinte análise da equação

$$-\frac{e}{m}\vec{v} \times \vec{B} = \frac{e}{m} (\vec{B} \times \nabla \times \vec{B}) \frac{1}{4\pi\rho_e} = \frac{1}{4\pi\rho} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \right]. \quad (\text{C.1})$$

Esse termo, (C.1), é devido a força de Lorentz presente na equação de Navier-Stokes escrita na aproximação para a MHD de um fluido condutor ideal.

Consideremos que o campo magnético possa ser escrito em uma direção qualquer, cujo vetor unitário seja  $\hat{e}_\phi(t, \vec{x})$ , ou seja,

$$\vec{B} = B\hat{e}_\phi. \quad (\text{C.2})$$

$\hat{e}_\phi$  é o vetor unitário de um sistema de coordenadas cilíndricas cuja base é

$$\hat{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1), \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty. \quad (\text{C.5})$$

Utilizando o gradiente em coordenadas cilíndricas  $\nabla = \hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \partial_\phi + \hat{e}_z \partial_z$ , reescrevemos a equação (C.1) do seguinte modo

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} &= -\frac{1}{8\pi\rho} \nabla (\vec{B} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = -\frac{1}{8\pi\rho} \nabla B^2 + \frac{1}{8\pi\rho} \hat{e}_\phi (\hat{e}_\phi \cdot \nabla B^2) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} B^2 (\hat{e}_\phi \cdot \nabla) \hat{e}_\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi\rho} \left( \hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \partial_\phi + \hat{e}_z \partial_z \right) B^2 + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{1}{r} \hat{e}_\phi \partial_\phi B^2 + \frac{1}{4\pi\rho} B^2 \frac{1}{r} (-\hat{e}_r) \\ &= -\frac{1}{8\pi\rho} (\hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_z \partial_z) B^2 + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{B^2}{r} (-\hat{e}_r). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Assim, o primeiro termo do lado direito de (C.6) age em uma direção que é sempre perpendicular ao campo magnético e pode ser entendida como uma "pressão magnética". Já o segundo termo do lado direito de (C.6) atua no sentido de "diminuir" a curvatura do campo magnético, pois está na direção (E sentido oposto)



do raio do sistema de coordenadas cilíndricas, e coincide com o raio de curvatura das linhas de campo magnético em cada ponto do espaço. A esse último termo também pode ser visto como a tensão resultante das tensões exercidas ao longo da linha de campo magnético [58], [57]. A este último estão associadas as ondas de Alfvén, muito importantes no estudo da MHD. Após essa análise, é possível associar ao terceiro termo do lado direito de eq.(2.80) o caráter de um termo de pressão devido ao Campo magnético [6, 58].

## Referências Bibliográficas

- [1] H. Alfvén, “Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves,” *Nature*, vol. 150, no. 3805, pp. 405–406, 1942.
- [2] E. Fermi, “On the origin of the cosmic radiation,” *Phys. Rev.*, vol. 75, pp. 1169–1174, Apr 1949.
- [3] J. W. Dungey, “Electrodynamics of the Outer Atmosphere,” in *Physics of the Ionosphere*, p. 229, Jan. 1955.
- [4] A. J. Russell, “75th anniversary of ‘existence of electromagnetic–hydrodynamic waves’,” *Solar Physics*, vol. 293, no. 5, pp. 1–9, 2018.
- [5] O. Maj, “A mathematical introduction to magnetohydrodynamics,” in *Vorlesung (SS 2017)*, pp. 1–222, 2017.
- [6] P. A. Davidson, *An introduction to magnetohydrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [7] A. Piel *et al.*, “An introduction to laboratory, space, and fusion plasmas,” *Plasma Physics*, 2010.
- [8] E. R. Priest, *Solar magnetohydrodynamics*, vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] M. Goossens, *An introduction to plasma astrophysics and magnetohydrodynamics*, vol. 294. Springer Science & Business Media, 2003.
- [10] T. V. Doorselaere, V. M. Nakariakov, and E. Verwichte, “Detection of waves in the solar corona: Kink or Alfvén?,” *The Astrophysical Journal*, vol. 676, pp. L73–L75, mar 2008.
- [11] McLaughlin, J. A. and Hood, A. W., “Mhd wave propagation in the neighbourhood of a two-dimensional null point,” *A&A*, vol. 420, no. 3, pp. 1129–1140, 2004.
- [12] U. Narain and P. Ulmschneider, “Chromospheric and coronal heating mechanisms ii,” *Space Science Reviews*, vol. 75, no. 3, pp. 453–509, 1996.

- [13] G. Haerendel, “Weakly damped alfvén waves as drivers of solar chromospheric spicules,” *Nature*, vol. 360, no. 6401, pp. 241–243, 1992.
- [14] A. K. Srivastava, J. L. Ballester, P. S. Cally, M. Carlsson, M. Goossens, D. B. Jess, E. Khomenko, M. Mathioudakis, K. Murawski, and T. Zaqarashvili, “Chromospheric heating by magnetohydrodynamic waves and instabilities,” 2021.
- [15] P. Cally, “Magnetohydrodynamic tube waves and high speed solar wind streams,” *Solar physics*, vol. 108, no. 1, pp. 183–189, 1987.
- [16] P. Edwin and B. Roberts, “Employing analogies for ducted mhd waves in dense coronal structures,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 192, pp. 343–347, 1988.
- [17] V. Nakariakov and B. Roberts, “On fast magnetosonic coronal pulsations,” *Solar Physics*, vol. 159, no. 2, pp. 399–402, 1995.
- [18] T. K. Suzuki, H. Yan, A. Lazarian, and J. P. Cassinelli, “Collisionless damping of fast magnetohydrodynamic waves in magnetorotational winds,” *The Astrophysical Journal*, vol. 640, no. 2, p. 1005, 2006.
- [19] T. Kambe, “A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with maxwell’s equations,” *Fluid dynamics research*, vol. 42, no. 5, p. 055502, 2010.
- [20] R. J. Thompson and T. M. Moeller, “A maxwell formulation for the equations of a plasma,” *Physics of Plasmas*, vol. 19, no. 1, p. 010702, 2012.
- [21] H. Marmanis, “Erratum: “Analogy between the Navier–Stokes equations and Maxwell’s equations: Application to turbulence” [phys. fluids 10, 1428 (1998)],” *Physics of Fluids*, vol. 10, no. 11, pp. 3031–3031, 1998.
- [22] W. A. Newcomb, “Lagrangian and hamiltonian methods in magnetohydrodynamics,” tech. rep., California Univ., Livermore (USA). Lawrence Livermore Lab., 1961.
- [23] T. Lundgren, “Hamilton’s variational principle for a perfectly conducting plasma continuum,” *The Physics of Fluids*, vol. 6, no. 7, pp. 898–904, 1963.
- [24] M. Calkin, “An action principle for magnetohydrodynamics,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 41, no. 12, pp. 2241–2251, 1963.
- [25] P. Penfield Jr and H. A. Haus, “Hamilton’s principle for electromagnetic fluids,” *The Physics of Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1195–1204, 1966.
- [26] I. Merches, “Variational principle in magnetohydrodynamics,” *The Physics of Fluids*, vol. 12, no. 10, pp. 2225–2227, 1969.

- [27] J. D. Bekenstein and A. Oron, “Conservation of circulation in magnetohydrodynamics,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 5594–5602, Oct 2000.
- [28] Y. Zhou, H. Qin, J. W. Burby, and A. Bhattacharjee, “Variational integration for ideal magnetohydrodynamics with built-in advection equations,” *Physics of Plasmas*, vol. 21, no. 10, p. 102109, 2014.
- [29] A. Yahalom, “Simplified variational principles for non-barotropic magnetohydrodynamics,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 82, no. 2, 2016.
- [30] A. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, and F. Takakura, “Metafluid dynamics as a gauge field theory,” *Brazilian journal of physics*, vol. 33, no. 2, pp. 346–354, 2003.
- [31] E. M. Abreu, J. A. Neto, A. C. Mendes, and N. Sasaki, “Abelian and non-abelian considerations on compressible fluids with maxwell-type equations and minimal coupling with the electromagnetic field,” *Physical Review D*, vol. 91, no. 12, p. 125011, 2015.
- [32] A. C. Mendes, F. I. Takakura, E. M. Abreu, and J. A. Neto, “Faddeev-jackiw analysis for the charged compressible fluid in a higher-derivative electromagnetic field background,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 116, no. 2, p. 20004, 2016.
- [33] A. C. Mendes, F. I. Takakura, E. M. Abreu, and J. A. Neto, “Compressible fluids with maxwell-type equations, the minimal coupling with electromagnetic field and the stefan–boltzmann law,” *Annals of Physics*, vol. 380, pp. 12–22, 2017.
- [34] H. S. Snyder, “Quantized space-time,” *Phys. Rev.*, vol. 71, pp. 38–41, Jan 1947.
- [35] G. V. Dunne, R. Jackiw, and C. A. Trugenberger, “"topological"(chern-simons) quantum mechanics,” *Physical Review D*, vol. 41, no. 2, p. 661, 1990.
- [36] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Pi, and A. Polychronakos, “Testing non-commutative QED, constructing non-commutative MHD,” *Physics Letters B*, vol. 517, no. 3-4, pp. 450–456, 2001.
- [37] C. Duval and P. Horvathy, “Exotic galilean symmetry in the non-commutative plane and the hall effect,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, no. 47, p. 10097, 2001.
- [38] J. Lukierski, P. C. Stichel, and W. J. Zakrzewski, “Galilean-invariant (2+1)-dimensional models with a Chern–Simons-Like term and D= 2 noncommutative geometry,” *annals of physics*, vol. 260, no. 2, pp. 224–249, 1997.

- [39] V. Nair and A. Polychronakos, “Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere,” *Physics Letters B*, vol. 505, no. 1-4, pp. 267–274, 2001.
- [40] J. Gamboa, M. Loewe, and J. Rojas, “Noncommutative quantum mechanics,” *Physical Review D*, vol. 64, no. 6, p. 067901, 2001.
- [41] M. Eliashvili and G. Tsitsishvili, “Chern–simons theory and quantum fields in the lowest Landau Level,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 14, no. 14, pp. 1429–1439, 2000.
- [42] L. Susskind, “The quantum hall fluid and non-commutative Chern-Simons theory,” *arXiv preprint hep-th/0101029*, 2001.
- [43] A. P. Polychronakos, “Non-commutative fluids,” in *Quantum Spaces*, pp. 109–159, Springer, 2007.
- [44] S. Hellerman and M. Van Raamsdonk, “Quantum hall physics= noncommutative field theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2001, no. 10, p. 039, 2001.
- [45] C. Becchi, S. Giusto, and C. Imbimbo, “The renormalization of non-commutative field theories in the limit of large non-commutativity,” *Nuclear Physics B*, vol. 664, no. 1-2, pp. 371–399, 2003.
- [46] R. G. Amorim, M. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. d. Santana, and J. Vianna, “Non-commutative geometry and symplectic field theory,” *Physics Letters A*, vol. 361, no. 6, pp. 464–471, 2007.
- [47] R. Nakayama and Y. Shimono, “Non-commutative field theory on  $S^4$ ,” *Progress of theoretical physics*, vol. 112, no. 5, pp. 883–894, 2004.
- [48] H. Steinacker, “A non-perturbative approach to non-commutative scalar field theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2005, no. 03, p. 075, 2005.
- [49] A. H. Fatollahi and H. Mohammadzadeh, “On the classical dynamics of charges in non-commutative qed,” *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, vol. 36, no. 1, pp. 113–116, 2004.
- [50] C. N. Yang, “On quantized space-time,” *Physical Review*, vol. 72, no. 9, p. 874, 1947.
- [51] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1999, no. 09, p. 032, 1999.
- [52] D. Tong, “String theory: University of cambridge part iii mathematical tripos,” *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, 2009.
- [53] L. Faddeev and R. Jackiw, “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, pp. 1692–1694, Apr 1988.

- [54] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Symplectic quantization of constrained systems,” *Modern Physics Letters A*, vol. 7, no. 19, pp. 1737–1747, 1992.
- [55] H. Montani, “Symplectic analysis of constrained systems,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 8, no. 24, pp. 4319–4337, 1993.
- [56] P. P. Silva, A. C. Mendes, J. A. Neto, and E. M. Abreu, “Noncommutative dynamical variables in magnetohydrodynamics algebraic structure,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 128, no. 5, p. 54003, 2020.
- [57] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 1999.
- [58] M. Sormani, *Lecture Notes in Astrophysical Fluid Dynamics*. Notas de Aula, 2017.
- [59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics*, vol. 6. Elsevier, 2013.
- [60] G. Russakoff, “A derivation of the macroscopic Maxwell equations,” *American Journal of Physics*, vol. 38, no. 10, pp. 1188–1195, 1970.
- [61] A. C. Mendes, F. Takakura, E. M. Abreu, J. A. Neto, P. P. Silva, and J. V. Frossad, “Helicity and vortex generation,” *Annals of Physics*, vol. 398, pp. 146–158, 2018.
- [62] M. Hapgood, “Linking space weather science to impacts—the view from the earth,” in *Extreme Events in Geospace*, pp. 3–34, Elsevier, 2018.
- [63] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2005.
- [64] T. Kambe, *Elementary fluid mechanics*. World Scientific, 2007.
- [65] W. Heisenberg, “Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations,” *Z. Phys*, vol. 33, pp. 879–893, 1925.
- [66] J. J. Sakurai and E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition*. American Association of Physics Teachers, 1995.
- [67] M. Khalkhali, *Basic noncommutative geometry*. European mathematical society, 2009.
- [68] I. L. Buchbinder and I. Shapiro, *Introduction to quantum field theory with applications to quantum gravity*. Oxford University Press, 2021.
- [69] W. Pauli, “Letter of heisenberg to peierls (1930), scientific correspondence,” *Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag (1985)*, vol. II., p. 15., 1930.

- [70] R. G. G. d. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. R. d. Queiroz, A. E. Santana, and J. Viana, “Função de wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, 2013.
- [71] R. J. Szabo, “Quantum field theory on noncommutative spaces,” *Physics Reports*, vol. 378, no. 4, pp. 207–299, 2003.
- [72] I. Gelfand and M. Neumark, “On the imbedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space,” vol. 12, no. 2, pp. 197–217, 1943.
- [73] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization. I. deformations of symplectic structures,” *Annals of Physics*, vol. 111, no. 1, pp. 61–110, 1978.
- [74] J. E. Moyal, “Quantum mechanics as a statistical theory,” in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 45, pp. 99–124, Cambridge University Press, 1949.
- [75] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*. Courier Corporation, 1950.
- [76] M. Wohlgenannt, “Introduction to a non-commutative version of the standard model,” *arXiv preprint hep-th/0302070*, 2003.
- [77] R. G. G. d. Amorim, “Geometria não-comutativa e teoria de campos simpléctica,” 2009.
- [78] G. Magro, “Noncommuting coordinates in the Landau problem,” *arXiv preprint quant-ph/0302001*, 2003.
- [79] J. M. Romero, J. Santiago, and J. D. Vergara, “Newton’s second law in a non-commutative space,” *Physics Letters A*, vol. 310, no. 1, pp. 9–12, 2003.
- [80] B. Mirza and M. Dehghani, “Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 42, no. 2, p. 183, 2004.
- [81] E. Abreu, B. Rizzuti, A. Mendes, M. Freitas, and V. Nikoofard, “Noncommutative and dynamical analysis in a curved phase-space,” *Jagellonian University. Institute of Physics. Acta Physica Polonica B*, vol. 46, no. 4, pp. 879–903, 2015.
- [82] W. Gao-Feng, L. Chao-Yun, L. Zheng-Wen, Q. Shui-Jie, and F. Qiang, “Classical mechanics in non-commutative phase space,” *Chinese Physics C*, vol. 32, no. 5, p. 338, 2008.
- [83] P. Das and S. Ghosh, “Noncommutative geometry and fluid dynamics,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, no. 11, pp. 1–11, 2016.

- [84] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, vol. 2. Courier Corporation, 2001.
- [85] M. Jeffs, *CLASSICAL MECHANICS AND SYMPLECTIC GEOMETRY*. Notas de Aula, 2021.
- [86] S. Mahajan, “Temperature-transformed “minimal coupling”: Magnetofluid unification,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 3, p. 035001, 2003.
- [87] N. A. Lemos, *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [88] D. C. RODRIGUES, *Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos*. Tese (Doutorado em Física)-Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p.162, 2006.
- [89] K.-K. Tam, “Relativistic theory of plasmas,,” 1966.
- [90] J. Van Holten and N. Amsterdam, “Relativistic fluid dynamics,” *Nikhef Amsterdam NL*, 2006.
- [91] M. Reintjes, “A note on incompressibility of relativistic fluids and the instantaneity of their pressures,” *Reports on Mathematical Physics*, vol. 82, no. 1, pp. 113–120, 2018.
- [92] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained hamiltonian systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [93] R. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. Queiroz, A. E. Santana, and J. Viana, “Wigner function at 80 years and the origins of noncommutative geometry,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, no. 3, pp. 1–14, 2013.
- [94] R. Jackiw, V. Nair, S. Pi, and A. Polychronakos, “Perfect fluid theory and its extensions,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, no. 42, p. R327, 2004.
- [95] S. Nguyen and Ł. A. Turski, “Canonical description of incompressible fluid: Dirac brackets approach,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 272, no. 1-2, pp. 48–55, 1999.