

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

João Marcos de Paula Vieira

**Otimização estrutural multi-objetivo de treliças planas e espaciais
considerando aspectos dinâmicos e de estabilidade global**

Juiz de Fora

2023

João Marcos de Paula Vieira

Otimização estrutural multi-objetivo de treliças planas e espaciais
considerando aspectos dinâmicos e de estabilidade global

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais. Linha de pesquisa: Mecânica das Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientadores: Profs. D.Sc. Patrícia Habib Hallak e Dênis Emanuel da Costa Vargas

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vieira, João Marcos de Paula.

Otimização estrutural multi-objetivo de treliças planas e espaciais considerando aspectos dinâmicos e de estabilidade global / João Marcos de Paula Vieira. – 2023.

100 f. : il.

Orientador: Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientadores: Patrícia Habib Hallak e Dênis Emanuel da Costa Vargas
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2023.

1. Otimização estrutural multi-objetivo. 2. Evolução Diferencial. 3. Frequências naturais de vibração. 4. Estabilidade Global. 5. Tomada de decisão multi-critério. I. Lemonge, Afonso Celso de Castro, orient. II. Hallak, Patrícia Habib, coorient. III. Vargas, Dênis Emanuel da Costa, coorient. IV. Título.

João Marcos de Paula Vieira

Otimização estrutural multi-objetivo de treliças planas e espaciais considerando aspectos dinâmicos e de estabilidade global

Dissertação apresentada ao Programa de Pós graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Aprovada em 10 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Afonso Celso de Castro Lemonge - Orientador e Presidente da banca
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.^a Dr.^a Patrícia Habib Hallak - Coorientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Dênis Emanuel Costa Vargas - Coorientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof.^a Dr.^a Beatriz de Souza Leite Pires de Lima
COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Marcelo Greco
Universidade Federal de Minas Gerais

Juiz de Fora, 07/03/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Afonso Celso de Castro Lemonge, Professor(a)**, em 10/03/2023, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Patricia Habib Hallak, Professor(a)**, em 10/03/2023, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dênis Emanuel da Costa Vargas, Usuário Externo**, em 10/03/2023, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Beatriz de Souza Leite Pires de Lima, Usuário Externo**, em 10/03/2023, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Usuário Externo**, em 10/03/2023, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1175396** e o código CRC **A65251BC**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre presente em minha vida e me dar saúde, força e esta grande oportunidade de continuar meus estudos. Agradeço ao meu pai Marcos, minha mãe Catarina e minha irmã Isabella pelo amor, incentivo e apoio incondicionais. Sou muito grato por ter essa família, que é a base de tudo em minha vida. Agradeço ao meu orientador Afonso Lemonge, por toda a sua atenção, dedicação e conhecimento, e também aos meus coorientadores Patrícia Hallak e Dênis Vargas, que me ajudaram e apoiaram do início ao fim deste trabalho. Agradeço à minha namorada Bárbara por estar sempre me acompanhando e incentivando, e a meus amigos de dentro e fora da faculdade, especialmente meu colega Bruno Brugnara, por traçar essa caminhada do mestrado ao meu lado, e ao José Pedro Carvalho, pela disponibilidade em me ajudar desde o início deste estudo. Agradeço a todos os demais amigos e familiares que de alguma forma me ajudaram e torceram por mim ao longo desses 2 anos de curso, e agradeço aos professores que fizeram parte da minha formação no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora. Por fim, agradeço à UFJF pelo auxílio financeiro ao longo do meu período como bolsista no curso de mestrado.

RESUMO

O presente trabalho de dissertação apresenta a formulação de problemas de otimização estrutural (POEs) com três a seis funções objetivo, aplicados em treliças planas e espaciais, destacando-se a consideração de objetivos e restrições referentes às frequências naturais de vibração e fatores de carga crítica. A resolução de POEs auxilia os profissionais de engenharia na determinação de soluções e na tomada de decisões no desenvolvimento de um projeto. A aplicação de POEs multi-objetivo permite ao tomador de decisões encontrar configurações estruturais que atendam simultaneamente a todos os critérios desejados, sem a necessidade de resolver vários problemas mono-objetivo individualmente. Visando diminuir os custos e o consumo de materiais, o primeiro objetivo, abordado em todos os problemas propostos, é a minimização do peso das treliças. Para evitar o efeito de ressonância e encontrar soluções com melhor comportamento dinâmico, outros objetivos utilizados são a maximização da primeira frequência natural de vibração e a maximização das diferenças entre as frequências naturais da estrutura, evitando a sobreposição de seus modos de vibração. Com a intenção de garantir a estabilidade estrutural das treliças, também são propostos POEs com as funções objetivo de maximizar o primeiro fator de carga crítica relacionado à estabilidade global e maximizar a diferença entre os dois primeiros fatores de carga crítica. As meta-heurísticas de busca utilizadas na resolução dos problemas de otimização deste estudo são o GDE3 (*Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution*), o SHAMODE (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution*), o SHAMODE-WO (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution with Whale Optimisation*) e o MM-IPDE (*Multi-objective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimation*). As soluções não-dominadas obtidas para cada POE são apresentadas por meio de gráficos das frentes de Pareto e gráficos de coordenadas paralelas normalizadas (para os casos com mais de três funções objetivo). Um método de tomada de decisão de torneio multicritério é aplicado para extrair as soluções desejadas de cada problema, de acordo com as preferências do projetista. Por fim, as performances dos quatro algoritmos utilizados são comparadas através de indicadores de desempenho presentes na literatura.

Palavras-chave: Otimização estrutural multi-objetivo. Evolução diferencial. Frequências naturais de vibração. Estabilidade Global. Tomada de decisão multi-critério.

ABSTRACT

This dissertation presents the formulation of structural optimization problems (SOPs) containing three to six objective functions applied to plane and spatial trusses, focusing on considering objectives and constraints regarding the natural frequencies of vibration and the critical load factors. Solving SOPs helps engineering professionals find solutions and make decisions in developing a project. The application of multi-objective SOPs allows the decision-maker to find structural configurations that simultaneously serve all the desired criteria without solving several single-objective problems individually. To reduce costs and material consumption, the first objective, analyzed in all proposed problems, is to minimize the weight of the trusses. To avoid the resonance effect and find solutions with better dynamic behavior, other objectives used are the maximization of the first natural frequency of vibration and the maximization of the differences between the structure's natural frequencies to avoid the superposition of their vibration modes. To guarantee the structural stability of the trusses, SOPs are also proposed with the objective functions of maximizing their first critical load factors related to global stability and maximizing the difference between their first two critical load factors. The meta-heuristics used to solve the optimization problems of this study are the GDE3 (Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution), the SHAMODE (Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution), the SHAMODE-WO (Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution with Whale Optimisation) and the MM-IPDE (Multi-objective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimation). The non-dominated solutions obtained for each SOP are presented by graphs of the Pareto fronts and normalized parallel coordinate graphs (for the cases with more than three objective functions). A multi-criteria tournament decision-making method is applied to extract the desired solutions for each problem, according to the designer's preferences. Finally, the performances of the four algorithms are compared through performance indicators found in the literature.

Keywords: Multi-objective structural optimization. Differential evolution. Natural frequencies of vibration. Global stability. Multi-criteria decision-making.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema do processo de mutação do DE	28
Figura 2 – Exemplo de hipervolume para um problema com três objetivos .	37
Figura 3 – Diferença entre os cálculos do IGD e IGD+	38
Figura 4 – Distância d^+ entre dois pontos \mathbf{a} e \mathbf{z} em um exemplo com duas funções objetivo	39
Figura 5 – Treliça de 10 barras	42
Figura 6 – Treliça de 25 barras	42
Figura 7 – Treliça de 56 barras	43
Figura 8 – Treliça de 72 barras	44
Figura 9 – Treliça de 120 barras	45
Figura 10 – Treliça de 582 barras	46
Figura 11 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	51
Figura 12 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	52
Figura 13 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	53
Figura 14 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	54
Figura 15 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	55
Figura 16 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	56

Figura 17 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	57
Figura 18 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	58
Figura 19 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	59
Figura 20 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	60
Figura 21 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	61
Figura 22 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	62
Figura 23 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	63
Figura 24 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	64

- Figura 25 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 65
- Figura 26 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 66
- Figura 27 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 67
- Figura 28 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 68
- Figura 29 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 69
- Figura 30 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 70
- Figura 31 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 71

- Figura 32 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 72
- Figura 33 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 73
- Figura 34 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 74
- Figura 35 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 75
- Figura 36 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 76
- Figura 37 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO . . . 77
- Figura 38 – Perfis de desempenhos referentes aos valores de Hipervolume apresentados nas Tabelas 9-14. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 87
- Figura 39 – Perfis de desempenhos referentes aos valores de IGD+ apresentados nas Tabelas 9-14. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO 88

Figura 40 – Perfis de desempenho gerais referentes ao Hipervolume e IGD+. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	90
Figura 41 – Perfis de desempenho globais referentes à análise conjunta do Hipervolume e IGD+. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição da figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Revisão Literária	18
Tabela 2 – Tabela de perfis W para a treliça de 582 barras	47
Tabela 3 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 1	78
Tabela 4 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 2	79
Tabela 5 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 3	79
Tabela 6 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 4	80
Tabela 7 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 5	80
Tabela 8 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 6	81
Tabela 9 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE1.	84
Tabela 10 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE2.	85
Tabela 11 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE3.	85
Tabela 12 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE4.	86
Tabela 13 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE5.	86
Tabela 14 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE6.	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVO PRINCIPAL	15
1.2	OBJETIVOS SECUNDÁRIOS	16
1.3	JUSTIFICATIVA	16
1.4	REVISÃO DA LITERATURA	17
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL (POE) . . .	20
2.1	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL MONO-OBJETIVO .	20
2.2	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL MULTI-OBJETIVO	20
2.3	FUNÇÕES OBJETIVO	21
2.3.1	O peso ou massa da estrutura	21
2.3.2	As frequências naturais de vibração	21
2.3.3	Os fatores de carga crítica	22
2.4	RESTRIÇÕES	23
2.4.1	Os deslocamentos nodais	23
2.4.2	As tensões normais nas barras	23
2.4.3	As frequências naturais de vibração	24
2.4.4	Os fatores de carga crítica	24
2.5	FORMULAÇÃO DOS POEs EM ESTUDO	25
3	META-HEURÍSTICAS DE BUSCA, EXTRAÇÃO DE SOLU- ÇÕES E INDICADORES DE PERFORMANCE	27
3.1	<i>THIRD EVOLUTION STEP OF GENERALIZED DIFFERENTIAL EVOLUTION (GDE3)</i>	27
3.1.1	Mutação	28
3.1.2	Cruzamento	28
3.1.3	Seleção	29
3.1.4	Tratamento de restrições - Método de Penalização Adaptativa (APM) . .	29
3.2	<i>SUCCESS HISTORY-BASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIF- FERENTIAL EVOLUTION (SHAMODE)</i>	30
3.2.1	Adaptação dos parâmetros da Evolução Diferencial	30
3.2.2	Mutação	31
3.2.3	Cruzamento	32
3.2.4	Seleção	32
3.3	<i>SUCCESS HISTORY-BASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIF- FERENTIAL EVOLUTION WITH WHALE OPTIMISATION (SHAMODE- WO)</i>	32

3.4	<i>MULTI-OBJECTIVE META-HEURISTIC WITH ITERATIVE PARAMETER DISTRIBUTION ESTIMATION (MM-IPDE)</i>	33
3.4.1	Adaptação dos parâmetros da Evolução Diferencial	33
3.4.2	Mutação e Cruzamento	34
3.5	TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO	35
3.6	INDICADORES DE PERFORMANCE DOS ALGORITMOS	36
3.6.1	Hipervolume	36
3.6.2	<i>Inverted Generational Distance Plus</i>	37
3.6.3	Perfis de desempenho	39
4	ESTRUTURAS ANALISADAS	41
4.1	TRELIÇA DE 10 BARRAS (T10)	41
4.2	TRELIÇA DE 25 BARRAS (T25)	41
4.3	TRELIÇA DE 56 BARRAS (T56)	43
4.4	TRELIÇA DE 72 BARRAS (T72)	44
4.5	TRELIÇA DE 120 BARRAS (T120)	44
4.6	TRELIÇA DE 582 BARRAS (T582)	45
5	RESULTADOS E ANÁLISES	49
5.1	FRENTES DE PARETO, GRÁFICOS DE COORDENADAS PARALELAS E SOLUÇÕES EXTRAÍDAS	49
5.2	VARIÁVEIS DE PROJETO DAS SOLUÇÕES MTD	78
5.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS	82
5.4	PERFORMANCE DOS ALGORITMOS - HIPERVOLUME E IGD+	84
5.5	PERFIS DE DESEMPENHO	84
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	92
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de otimização estão presentes nas mais diversas áreas de conhecimento, como no setor industrial, na medicina e até mesmo nos esportes. Na engenharia estrutural, a formulação e resolução desses problemas tem grande aplicabilidade, visando, principalmente, a redução dos custos e a melhora do desempenho e segurança das estruturas, objetivos que podem ser conflitantes. Nesse contexto, a otimização estrutural é uma ferramenta capaz de auxiliar o profissional de engenharia na resolução de problemas e na tomada de decisões na elaboração de um projeto.

O grande desenvolvimento da otimização estrutural remete ao início dos anos 60, quando técnicas de programação foram usadas para a minimização do peso de estruturas. Desde então, uma grande diversidade de técnicas gerais foram desenvolvidas e adaptadas para o ramo estrutural [1]. Ainda hoje, uma das principais funções objetivo adotadas nos problemas de otimização estrutural é a minimização do peso da estrutura, visando a redução do volume de materiais utilizado, tanto por motivos econômicos quanto ambientais.

Outro desafio da engenharia moderna, com o projeto de estruturas cada vez mais altas, leves e esbeltas, é a otimização das mesmas quanto aos seus aspectos dinâmicos e sua estabilidade global, atendendo os critérios de segurança e de conforto aos usuários. No campo da otimização estrutural, quando o projetista se depara com situações que requerem análises dinâmicas, elas devem ser incluídas na formulação dos problemas [2].

Para obter configurações estruturais que atendam, simultaneamente, a um conjunto de características e desempenhos desejados, podem ser resolvidos problemas de otimização multi-objetivo. Diferentemente dos problemas mono-objetivo, que apresentam apenas uma função objetivo e uma solução ótima, os problemas multi-objetivo possuem duas ou mais funções objetivo e fornecem um conjunto de soluções não-dominadas entre si chamado de soluções ótimas de Pareto, cabendo ao tomador de decisões escolher a mais adequada de acordo com suas prioridades e intenções.

A definição de um problema de otimização estrutural (indicados ao longo do trabalho pela sigla POE) multi-objetivo envolve não apenas a determinação das funções objetivo a serem minimizadas ou maximizadas, mas também das variáveis de projeto e das restrições impostas a cada problema. No estado da arte, são encontrados diversos algoritmos para resolver POEs multi-objetivo. Destacam-se, entre eles, as meta-heurísticas baseadas em populações.

1.1 OBJETIVO PRINCIPAL

O objetivo principal deste trabalho é a formulação e resolução de problemas de otimização estrutural multi-objetivo em treliças planas e espaciais, destacando-se a consideração de funções objetivo e restrições referentes às frequências naturais de vibração

e fatores de carga crítica. Nos exemplos apresentados, são resolvidos POEs com 3 a 6 funções objetivos, utilizando os algoritmos de busca GDE3 (*Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution*) [3], SHAMODE (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution*) [4], SHAMODE-WO (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution with Whale Optimisation*) [4] e MM-IPDE (*Multi-objective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimation*) [5]. Um método de tomada de decisão de torneio multicritério é aplicado a cada problema com a finalidade de escolher, entre as soluções obtidas, as configurações estruturais mais adequadas em dois cenários referentes à possíveis critérios e preferências do projetista. Dessa forma, analisa-se a capacidade de encontrar, através da resolução desses POEs multi-objetivo, soluções que atendam às expectativas do tomador de decisões, tanto em relação à minimização dos pesos e dos custos das treliças, quanto no que se refere a seus aspectos dinâmicos e de estabilidade global.

1.2 OBJETIVOS SECUNDÁRIOS

Desenvolver uma comparação entre o desempenho das quatro meta-heurísticas utilizadas na resolução dos POEs multi-objetivo deste estudo, através dos indicadores de performance Hipervolume e IGD+. Com base nos resultados desses indicadores, apresentam-se os perfis de desempenho dos algoritmos na resolução de cada problema, visando, por fim, definir quais meta-heurísticas apresentaram as melhores performances na resolução dos POEs abordados neste trabalho.

1.3 JUSTIFICATIVA

Como mencionado anteriormente, a diminuição dos custos e do consumo de materiais, assim como a verificação dos aspectos dinâmicos e de estabilidade global em estruturas cada vez maiores e mais leves, são questões de grande relevância nos projetos atuais. Tais fatores destacam a importância das funções objetivo abordadas neste trabalho, relacionadas a aspectos econômicos e ambientais, como a minimização do peso, e à segurança e integridade estrutural, como a maximização da primeira frequência natural de vibração e do primeiro fator de carga crítica referente à estabilidade global das treliças. Aliadas a esses objetivos, são utilizadas restrições relacionadas às tensões máximas permitidas nas barras das treliças, aos deslocamentos máximos indicados, às frequências naturais de vibração e aos fatores de carga crítica.

Além disso, como aspecto inovador do presente trabalho, também são utilizadas como funções objetivo a maximização das diferenças entre frequências naturais de vibração (para evitar a sobreposição de seus modos de vibração) e a maximização da diferença entre os dois primeiros fatores de carga crítica relacionados à estabilidade global (impedindo a sobreposição dos modos de flambagem da estrutura). Esse conjunto de funções objetivo

e restrições serão combinadas para formular problemas de otimização estrutural multi-objetivo capazes de fornecer soluções que satisfaçam as expectativas do projetista em relação aos custos, rigidez da estrutura (deslocamentos), sua estabilidade global e frequências de vibração. Assim, a resolução desses POEs multi-objetivo permite aos profissionais de engenharia encontrar configurações estruturais que atendam simultaneamente a todos os critérios desejados, sem a necessidade de resolver vários problemas mono-objetivo individualmente.

1.4 REVISÃO DA LITERATURA

Com o objetivo de esquematizar publicações anteriores envolvendo problemas de otimização estrutural multi-objetivo com funções objetivo e restrições no contexto deste trabalho, a Tabela 1 foi adaptada de [6].

Na Tabela 1, W representa o peso ou a massa total da estrutura, de acordo com cada trabalho. f_i representa a i -ésima frequência natural de vibração, u é o deslocamento nodal máximo, λ^m é a restrição de flambagem do membro m da estrutura, σ é a tensão máxima permitida e $NCST$ é o número de seções transversais diferentes adotadas. FRF é a função de resposta de frequência, FT é o máximo parâmetro de transmissibilidade da força em relação a f_i , RMC é a razão entre a carga de compressão máxima e a carga crítica de flambagem em cada barra, P_E é a carga crítica de flambagem de Euler, β é um parâmetro de confiabilidade e P_f é a probabilidade de falha. CMA é a média da massa restringida; $SDCV$ é o desvio padrão das violações das restrições; RI é o índice de confiabilidade e RC são as restrições de confiabilidade. TPE é a energia potencial total, LCC são os custos da vida útil da estrutura, GC as restrições geométricas e λ_1 é o primeiro fator de carga crítica elástica relacionado à estabilidade global da estrutura.

Observa-se que, entre os estudos citados, apenas em [6] e [7] analisa-se o primeiro fator de carga crítica relacionado à estabilidade global nas funções objetivo e nas restrições dos problemas de otimização, sendo que apenas em [6] esse fator λ_1 é otimizado simultaneamente à primeira frequência natural de vibração nos POEs. Além de realizar também essa otimização conjunta de λ_1 e f_1 , o presente trabalho tem como aspecto inovador a maximização das diferenças $f_2 - f_1$, $f_3 - f_2$ e $\lambda_2 - \lambda_1$. Assim como em [6], [8] e [9], este trabalho de dissertação propõe a resolução de POEs com três ou mais funções objetivo.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho de dissertação de mestrado é dividido em 6 capítulos. Este capítulo inicial apresenta uma introdução acerca dos temas do trabalho, seus objetivos, justificativa da pesquisa, sua organização e uma revisão literária. O segundo capítulo discorre sobre os problemas de otimização estrutural, trazendo definições teóricas e apresentando as funções objetivo, restrições e formulações dos POEs resolvidos neste estudo. O Capítulo

Tabela 1 – Revisão Literária

Referência	Domínio	Tipo	Funções Objetivo	Restrições
[10]	2D	Pórtico	$W, NCST$	σ, λ^m, u
[11]	2D	Pórtico	$CMA, SDCV$	σ, λ^m, u
[12]	3D	Torre treliçada	$M, 1/\sum_{i=1}^3(F_i u_i)$	σ
[13]	2D	Treliça	W, u	σ
[14]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[15]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[16]	2D-3D	Treliça	W, LCC	σ
[17]	2D	Treliça	W, f_1 W, RI $W, f_1 + f_2 + f_3$ $W, 1/\sum_{i=1}^3 FRF(f_i)$ $W, 1/\sum_{i=1}^3 FT(f_i)$	σ, λ^m, u RC λ^m ad hoc
[18]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[19]	2D-3D	Treliça, Pórtico	W, u	σ
[20]	2D-3D	Treliça, Pórtico	W, u	σ
[21]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[22]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[23]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[8]	2D-3D	Treliça	$W, TPE, RMC, f_1, f_2, f_3$	u, σ, P_E
[24]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[25]	2D	Pórtico	$W, LCCs$	GC, PH
[9]	2D-3D	Treliça	W, u, f_1, TPE W, u, f_1 W, u	σ σ, u σ
[26]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[27]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[28]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[29]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[30]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[4]	2D-3D	Treliça	W, β	P_f
[31]	2D-3D	Treliça	W, β	P_f
[32]	2D-3D	Treliça	W, u	σ
[33]	2D	Treliça	W, u	σ
[34]	2D	Treliça	W, u	σ
[7]	2D-3D	Treliça	W, f_1 W, λ_1 W, u	σ, λ_1, u σ, f_1, u σ, λ_1, f_1
[6]	2D-3D	Treliça	W, f_1, u W, λ_1, u W, f_1, λ_1 W, f_1, u, λ_1	σ, λ_1 σ, f_1 σ, u σ
Este estudo	2D-3D	Treliça	W, f_1, λ_1 $W, f_1, f_2 - f_1$ $W, \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$ $W, f_1, f_2 - f_1, f_3 - f_2$ $W, f_1, f_2 - f_1, \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$ $W, f_1, f_2 - f_1, f_3 - f_2, \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$	σ, u σ, u, λ_1 σ, u, f σ, u, λ_1 σ, u σ, u

Fonte: Adaptado de Carvalho et al. (2021) [6]

3 trata das meta-heurísticas de busca utilizadas na resolução dos problemas propostos, do método de tomada de decisões multicritério adotado para extrair as soluções desejadas pelo projetista e das métricas aplicadas para avaliar o desempenho dos algoritmos na resolução dos POEs. No quarto capítulo, apresentam-se as treliças planas e espaciais a serem otimizadas neste estudo, indicando as características e especificidades de cada estrutura. O Capítulo 5 expõe e analisa os resultados dos problemas de otimização obtidos para as treliças em estudo, fornecendo também uma análise da performance dos algoritmos na resolução dos POEs. Por fim, no Capítulo 6, são discutidas as conclusões do trabalho, além de possíveis extensões do tema para trabalhos futuros.

2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL (POE)

Neste capítulo, são apresentados os problemas de otimização estrutural analisados no presente estudo, incluindo os tipos de POE, as funções objetivo otimizadas, as restrições impostas e as formulações desses problemas.

2.1 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL MONO-OBJETIVO

O POE mono-objetivo é aquele que possui apenas uma função objetivo. Esse problema consiste na determinação de um vetor $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_V}\}$, formado pelas N_V variáveis de projeto, que minimize a função objetivo $of(\mathbf{x})$ e atenda às restrições impostas. Ele pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & of(\mathbf{x}) \\ \text{submetido a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, \dots, N_V\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Na Equação 2.1, $g_i(\mathbf{x})$ e $h_i(\mathbf{x})$ representam, respectivamente, as restrições de desigualdade e igualdade, $N_R = m + p$ é o número de restrições e \mathbf{X} é o espaço de busca contido em \mathbb{R}^n e definido pelos limites inferior (x_i^L) e superior (x_i^U) de cada variável de projeto x_i . Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ que satisfaz todas as restrições do problema é chamado de solução factível. O espaço delimitado pelas restrições é chamado de região factível. A solução do problema é chamada de solução ótima e, havendo mais de uma, são denominadas soluções ótimas alternativas.

Para o caso da maximização da função objetivo, é realizada a minimização da função com o sinal negativo:

$$\max \quad of(\mathbf{x}) = \min \quad -of(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

2.2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL MULTI-OBJETIVO

O POE multi-objetivo é caracterizado por possuir duas ou mais funções objetivo. Sua formulação é semelhante à dos problemas mono-objetivo e pode ser escrita como na Equação 2.3. Nesses problemas, obtém-se como solução um conjunto de vetores \mathbf{x} não-dominados que minimizam as N_F funções objetivo e satisfazem as restrições impostas. Esse conjunto de soluções é denominado Frente de Pareto.

$$\min of_1(\mathbf{x}), \quad \min of_2(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \min of_{N_F}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

As restrições e o espaço de busca podem ser definidos da mesma forma que na Equação 2.1.

2.3 FUNÇÕES OBJETIVO

Nos POEs propostos no presente trabalho, utilizam-se funções objetivo relacionadas à minimização do peso das estruturas, a suas frequências naturais de vibração e seus fatores de carga crítica relacionados à estabilidade global. As treliças em estudo são submetidas a análises lineares estáticas, através das quais são definidos os valores dessas grandezas. A seguir, são apresentados os objetivos a serem otimizados, suas definições e as operações utilizadas no cálculo dessas funções.

2.3.1 O peso ou massa da estrutura

Em todos os POEs analisados neste estudo, a minimização do peso total da estrutura é uma das funções objetivo adotadas. Com ela, busca-se diminuir os custos e o consumo de materiais na execução da estrutura. Sabendo-se que N_B é o número de barras e L_i , A_i e ρ_i são, respectivamente, o comprimento, a área de seção transversal e a massa específica de cada barra i , o peso da treliça $W(\mathbf{x})$ é calculado pela equação:

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_B} \rho_i A_i L_i \quad (2.4)$$

A Equação 2.4 é aplicada devido ao caráter prismático das seções transversais das barras nas treliças em estudo. Assim como é comumente considerado na literatura (como exemplo em [2], [6] e [35]), o peso total da treliça é aproximado como a soma dos pesos de suas barras, desconsiderando as massas das ligações e as massas não-estruturais aplicadas em algumas das treliças deste estudo.

2.3.2 As frequências naturais de vibração

Pode-se definir o efeito da ressonância como a condição na qual a frequência da carga aplicada se iguala a uma frequência natural de vibração do sistema estrutural. Com o sistema trabalhando perto da ressonância, seus deslocamentos, vibrações e acelerações se intensificam, encurtando a vida útil da estrutura e podendo causar desconforto aos usuários, fadiga do material, corrosão e até mesmo seu colapso. Tendo em vista esses riscos, adota-se como função objetivo a maximização da primeira frequência natural de

vibração da estrutura, visando afastá-la das frequências geradas pelas cargas aplicadas, evitando efeitos indesejáveis. Outras funções objetivo abordadas neste trabalho são a maximização da diferença entre a segunda frequência natural e a primeira, e da diferença entre a terceira frequência natural e a segunda, para que seus respectivos modos de vibração não se sobreponham, intensificando a ressonância e os deslocamentos da estrutura.

Na dinâmica estrutural, as frequências naturais de vibração podem ser encontradas através da solução do problema de autovalor e autovetor da Equação 2.5, na qual $[K]$ é a matriz de rigidez elástica, $[M]$ é a matriz de massa, os autovalores são as frequências naturais angulares de vibração ($\omega_i(\mathbf{x})$) e seus respectivos autovetores representam os modos de vibração da estrutura ($\{\Phi_i\}(\mathbf{x})$) [36].

$$([K] - \omega_i(\mathbf{x})^2[M])\{\Phi_i(\mathbf{x})\} = 0 \quad (2.5)$$

O menor autovalor encontrado ($\omega_1(\mathbf{x})$) corresponde à primeira frequência natural angular de vibração, o segundo menor ($\omega_2(\mathbf{x})$) à segunda frequência angular e assim por diante. Calculados esses autovalores, as frequências naturais de vibração da estrutura são definidas por:

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega_i(\mathbf{x})}{2\pi} \quad (2.6)$$

2.3.3 Os fatores de carga crítica

A estabilidade global indica a sensibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem que podem acarretar algum tipo de não-linearidade. Assim, a verificação da estabilidade global quanto às cargas de flambagem de Euler é importante em um projeto estrutural, visando garantir a segurança quanto ao estado limite último de estabilidade. O fator de carga crítica é determinado pela razão entre a carga crítica estimada que gera a instabilidade da estrutura e a carga efetivamente aplicada sobre ela. Nesse sentido, a função objetivo de maximizar o primeiro fator de carga crítica visa encontrar a solução em que o maior carregamento possível possa ser aplicado à estrutura sem que ela deixe de ser estável. Outro objetivo proposto é a maximização da diferença entre o segundo fator e o primeiro, de forma a evitar a sobreposição dos respectivos modos de flambagem da estrutura, o que resultaria na intensificação de sua instabilidade.

Considerando regimes de pequenos deslocamentos e deformações, os fatores de carga crítica podem ser calculados através do problema de autovalor e autovetor da Equação 2.7, relacionada à análise da estabilidade em estruturas reticuladas [37]. Nela, $[K_G]$ representa a matriz de rigidez geométrica avaliada de acordo com o esforço normal e o comprimento

das barras, os autovalores ($\lambda_i(\mathbf{x})$) correspondem aos fatores de carga crítica da estrutura e os autovetores ($\{\Delta_i\}(\mathbf{x})$) são os respectivos modos de instabilidade que acompanham cada um dos fatores de carga crítica. O menor autovalor calculado ($\lambda_1(\mathbf{x})$) corresponde ao primeiro fator de carga crítica, o segundo menor ($\lambda_2(\mathbf{x})$) ao segundo fator e assim por diante.

$$([K] + \lambda_i(\mathbf{x})[K_G])\{\Delta_i(\mathbf{x})\} = 0 \quad (2.7)$$

2.4 RESTRIÇÕES

Nos problemas de otimização resolvidos neste estudo, a região factível é delimitada por restrições relacionadas a diversas características estruturais. A seguir, são apresentadas e explicadas as restrições de desigualdade utilizadas. Destaca-se que, nos POEs analisados, quando uma grandeza é utilizada como função objetivo, a mesma deixa de ser aplicada como restrição.

2.4.1 Os deslocamentos nodais

Uma restrição adotada em todos os POEs deste estudo está relacionada aos deslocamentos nodais máximos determinados para cada treliça. Inicialmente, os deslocamentos dos nós são calculados pela equação de equilíbrio estático do método da rigidez (representada pela Equação 2.8), que considera a relação linear entre medidas de tensão e deformação.

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (2.8)$$

Sabe-se que $[K]$ é a matriz de rigidez elástica da estrutura, $\{f\}$ é o vetor de forças e $\{u\}$ seus deslocamentos nodais. Assim, dado que $u_j(\mathbf{x})$ é o deslocamento do j -ésimo nó da treliça \mathbf{x} e \bar{u}_j é o valor máximo permitido para o mesmo, a restrição de desigualdade pode ser escrita como na Equação 2.9:

$$\frac{u_j(\mathbf{x})}{\bar{u}_j} - 1 \leq 0 \quad (2.9)$$

2.4.2 As tensões normais nas barras

Para cada estrutura em estudo, tem-se um valor máximo permitido para a tensão normal nas barras, seja ela de tração ou compressão, indicado por $\bar{\sigma}$. Esse valor está

relacionado ao material adotado e às seções transversais indicadas para as barras de cada treliça nos casos analisados.

Conhecendo-se os deslocamentos da estrutura, as tensões normais médias nas barras são determinadas pela equação:

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \frac{N_n(\mathbf{x})}{A_n(\mathbf{x})} \quad (2.10)$$

Sendo $\sigma_n(\mathbf{x})$ a tensão normal média, $N_n(\mathbf{x})$ o esforço normal e $A_n(\mathbf{x})$ a área da seção transversal da n -ésima barra da treliça dada pela solução \mathbf{x} . Por fim, as restrições quanto às tensões normais máximas permitidas nas barras podem ser escritas como:

$$\frac{\sigma_n(\mathbf{x})}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad (2.11)$$

2.4.3 As frequências naturais de vibração

Em relação aos aspectos dinâmicos das estruturas analisadas, adotam-se restrições relacionadas a suas frequências naturais de vibração, calculadas como mostrado na Seção 2.3.2. Essas restrições são baseadas na definição dos valores mínimos permitidos para tais frequências.

Dado que $f_i(\mathbf{x})$ é a i -ésima frequência natural de vibração da treliça obtida na solução \mathbf{x} e \bar{f}_i é o valor mínimo que essa frequência pode assumir, as restrições de desigualdade utilizadas podem ser escritas como:

$$1 - \frac{f_i(\mathbf{x})}{\bar{f}_i} \leq 0 \quad (2.12)$$

2.4.4 Os fatores de carga crítica

Na Seção 2.3.3, mostrou-se como os fatores de carga crítica relacionados à estabilidade global são obtidos. Mencionou-se também que o fator de carga crítica é calculado pela razão entre a carga que ocasiona a instabilidade da estrutura e a carga efetivamente aplicada sobre ela. Portanto, para garantir a estabilidade das treliças em estudo, é necessário que o primeiro fator $\lambda_1(\mathbf{x})$ seja maior ou igual a 1, ou seja, que o carregamento aplicado seja menor do que a carga crítica estimada para a estrutura. Para isso, utiliza-se neste estudo a restrição descrita pela Equação 2.13:

$$1 - \frac{\lambda_1(\mathbf{x})}{1} \leq 0 \quad (2.13)$$

2.5 FORMULAÇÃO DOS POEs EM ESTUDO

Neste trabalho, apresentam-se as formulações e as soluções de seis POEs multi-objetivo para cada treliça em estudo.

Os POEs analisados podem ser escritos formalmente como mostrado abaixo. As especificidades dos espaços de busca, restrições e funções objetivo para cada treliça são descritas no Capítulo 4.

a) POE 1

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}) \quad , \quad \max \quad f_1(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \max \quad \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \text{submetido a} \quad & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\ & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{aligned} \quad (2.14)$$

b) POE 2

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}) \quad , \quad \max \quad f_1(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \max \quad f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}) \\ \text{submetido a} \quad & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\ & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\ & \lambda_1(\mathbf{x}) \geq 1 \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{aligned} \quad (2.15)$$

c) POE 3

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}) \quad , \quad \max \quad \lambda_1(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \max \quad \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \text{submetido a} \quad & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\ & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\ & f_i(\mathbf{x}) \geq \bar{f}_i \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{aligned} \quad (2.16)$$

d) POE 4

$$\begin{aligned} \min \quad & W(\mathbf{x}), \quad \max \quad f_1(\mathbf{x}), \quad \max \quad f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}) \quad \text{e} \\ \max \quad & f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) \\ \text{submetido a} \quad & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\ & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\ & \lambda_1(\mathbf{x}) \geq 1 \\ & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{aligned} \quad (2.17)$$

e) POE 5

$$\begin{array}{llll}
 \min & W(\mathbf{x}), & \max & f_1(\mathbf{x}), & \max & f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}), \\
 \max & \lambda_1(\mathbf{x}) & e & \max & \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x}) & \\
 & & & \text{submetido a} & & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\
 & & & & & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\
 & & & & & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U
 \end{array} \tag{2.18}$$

f) POE 6

$$\begin{array}{llll}
 \min & W(\mathbf{x}), & \max & f_1(\mathbf{x}), & \max & f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}), \\
 \max & f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}), & \max & \lambda_1(\mathbf{x}) & e & \max & \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x}) \\
 & & & \text{submetido a} & & \sigma_n(\mathbf{x}) \leq \bar{\sigma} \\
 & & & & & u_j(\mathbf{x}) \leq \bar{u}_j \\
 & & & & & \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U
 \end{array} \tag{2.19}$$

3 META-HEURÍSTICAS DE BUSCA, EXTRAÇÃO DE SOLUÇÕES E INDICADORES DE PERFORMANCE

Na literatura, são encontrados diversos algoritmos para a resolução de problemas de otimização multi-objetivo. Entre eles, destacam-se as meta-heurísticas baseadas em populações, classe que engloba os algoritmos utilizados no presente trabalho.

Meta-heurísticas são estratégias que guiam o processo de busca, evitando a retenção dos resultados em máximos e mínimos locais. O objetivo é explorar eficientemente o espaço de busca para encontrar soluções ótimas ou o mais próximo possível delas. As meta-heurísticas podem utilizar desde procedimentos simples de busca local até complexos processos de aprendizagem [38].

As meta-heurísticas utilizadas para resolver os POEs propostos neste estudo são o GDE3 (*Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution*) [3], o SHAMODE (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution*) [4], sua adaptação SHAMODE-WO (*Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution with Whale Optimisation*) [4] e o MM-IPDE (*Multi-objective Meta-heuristic with Iterative Parameter Distribution Estimation*) [5]. O funcionamento e processo de evolução de cada uma delas será explicado neste capítulo. A escolha desses algoritmos foi baseada em trabalhos anteriores da literatura, como em Carvalho et al. [6] e Motta [35], nos quais essas mesmas meta-heurísticas são utilizadas na resolução dos respectivos POEs.

O Capítulo 3 apresenta também o método de torneio multicritério aplicado para extrair as soluções desejadas de cada problema, de acordo com as preferências do tomador de decisões. Por fim, apresentam-se os indicadores utilizados para avaliar o desempenho de cada meta-heurística na resolução dos POEs.

3.1 THIRD EVOLUTION STEP OF GENERALIZED DIFFERENTIAL EVOLUTION (GDE3)

O algoritmo de evolução diferencial (DE), introduzido por Storn e Price [39], é baseado na geração e evolução de uma população de soluções candidatas com variáveis contínuas, visando a solução de problemas de otimização mono-objetivo. Um dos algoritmos de busca utilizados neste trabalho foi o GDE3 (*Third Evolution Step of Generalized Differential Evolution*), proposto por Kukkonen e Lampinen em [3] como uma adaptação do DE para a resolução de problemas multi-objetivo.

O GDE3 é iniciado por uma geração de N_c vetores candidatos ($\mathbf{x}_{i,0}$) cujas dimensões são a quantidade de variáveis de projeto. Essa população é submetida a um processo de evolução que envolve mutação, cruzamento e seleção. Os métodos de mutação e cruzamento são extraídos diretamente do DE, enquanto o GDE3 se diferencia do seu antecessor no processo de seleção das soluções. Aplica-se também um método para o tratamento das

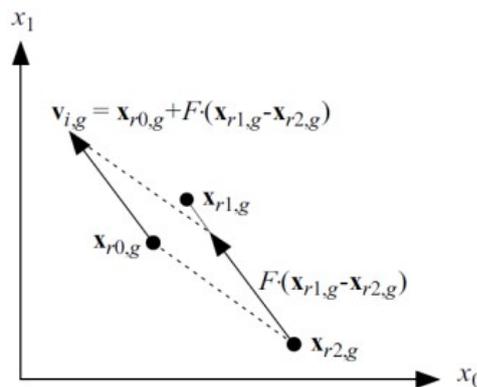
violações das restrições.

3.1.1 Mutação

A cada geração no processo evolutivo, novos vetores são criados através da mutação diferencial, que consiste em adicionar a um vetor base aleatório ($\mathbf{x}_{r0,g}$), a diferença entre dois vetores também escolhidos aleatoriamente ($\mathbf{x}_{r1,g}$ e $\mathbf{x}_{r2,g}$), multiplicada pelo fator de escala ($F \in (0, 1)$). Obtém-se assim $\mathbf{v}_{i,g}$, o i -ésimo vetor mutante da geração g . Esse processo é descrito pela Equação 3.1 e representado graficamente pela Figura 1.

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r0,g} + F \times (\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g}) \quad (3.1)$$

Figura 1 – Esquema do processo de mutação do DE



Fonte: Price, Storn e Lampinen (2005) [40].

3.1.2 Cruzamento

A evolução diferencial também emprega a operação de cruzamento uniforme (*crossover*). Esse procedimento consiste na comparação entre um vetor base ($\mathbf{x}_{i,g}$) e um vetor mutante obtido pela Equação 3.1 ($\mathbf{v}_{i,g}$), gerando um novo vetor ($\mathbf{u}_{i,g}$). O usuário determinará a taxa de *crossover* ou probabilidade de cruzamento ($P_{cr} \in [0, 1]$), valor que indica a probabilidade da j -ésima variável do i -ésimo vetor mutante ser transportada para o novo vetor. Além disso, um parâmetro com índice aleatório j_{rand} é extraído do vetor mutante para assegurar que não ocorra a duplicação do vetor $\mathbf{x}_{i,g}$. O processo de cruzamento é representado pela equação 3.2:

$$u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g}, & \text{se } rand(0, 1) \leq P_{cr} \text{ ou } j = j_{rand} \\ x_{j,i,g}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.3 Seleção

Com a definição do vetor teste $\mathbf{u}_{i,g}$, o vetor base correspondente $\mathbf{x}_{i,g}$ é comparado a ele em relação à dominância no espaço das restrições. Pode-se afirmar que um vetor solução \mathbf{x} domina um vetor \mathbf{y} ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$) se uma das seguintes condições for verdadeira:

- a) o vetor \mathbf{x} é factível e \mathbf{y} é infactível;
- b) ambos são factíveis e $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ no espaço das funções objetivo;
- c) ambos são infactíveis e $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ no espaço das violações das restrições.

A partir dessa comparação, realiza-se o processo de seleção das soluções. Se $\mathbf{u}_{i,g} \succ \mathbf{x}_{i,g}$, esse vetor teste é selecionado para substituir o vetor base na próxima geração ($g + 1$). Caso contrário, se $\mathbf{x}_{i,g} \succ \mathbf{u}_{i,g}$, o vetor teste é descartado e o vetor base é mantido para a próxima geração. Se nenhuma dessas condições for atendida, ambos são incluídos na geração seguinte.

3.1.4 Tratamento de restrições - Método de Penalização Adaptativa (APM)

O tratamento das restrições para esse algoritmo de busca foi feito através do método APM (*Adaptive Penalty Method*), proposto por Lemonge e Barbosa em [41]. O APM adapta o valor do coeficiente de penalização de cada restrição por meio de dados da população, como a média da função objetivo e o nível de violação da restrição. Busca-se, dessa forma, aplicar penalizações mais altas àquelas restrições que, em média, apresentam os maiores valores de violação. O APM acoplado ao GDE3 como usado nestes experimentos foi proposto por Vargas em [42].

No método APM, avalia-se o valor da função aptidão ($F(\mathbf{x})$), que representa a soma da função objetivo com a penalização devido à violação de restrições pelo vetor candidato. A função aptidão é calculada através da equação:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} of(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \text{ é factível} \\ \overline{of}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_R} k_j v_j(\mathbf{x}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

$of(\mathbf{x})$ é a função objetivo não penalizada. $v_j(\mathbf{x})$ é a violação da j -ésima restrição pelo vetor candidato \mathbf{x} . Por sua vez, $\overline{of}(\mathbf{x})$ tem seu valor definido pela Equação 3.4, na qual $\langle of(\mathbf{x}) \rangle$ representa a média dos valores dessa função objetivo na população da geração atual.

$$\overline{of}(\mathbf{x}) = \begin{cases} of(\mathbf{x}), & \text{se } of(\mathbf{x}) > \langle of(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle of(\mathbf{x}) \rangle, & \text{se } of(\mathbf{x}) \leq \langle of(\mathbf{x}) \rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

Já o parâmetro de penalização k_j é calculado pela Equação 3.5, onde $\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle$ é a média das violações da população em relação à j -ésima restrição do problema.

$$k_j = |\langle of(\mathbf{x}) \rangle| \frac{\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle}{\sum_{l=1}^{N_R} [\langle v_l(\mathbf{x}) \rangle]^2} \quad (3.5)$$

Na aplicação do APM nos problemas multi-objetivo, calcula-se a função aptidão individualmente para cada uma das funções objetivo, de acordo com os cálculos apresentados acima.

3.2 SUCCESS HISTORY-BASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION (SHAMODE)

Desenvolvido por Panagant *et al* [4], o *Success History-based Adaptive Multi-objective Differential Evolution* (SHAMODE) é um algoritmo de evolução diferencial adaptativa para problemas de otimização multi-objetivo. Ele é caracterizado por adaptar os parâmetros F e P_{cr} do DE original, baseado em resultados bem sucedidos nas gerações anteriores de soluções. Este método de adaptação foi proposto originalmente por Tanabe e Fukunaga [43].

O SHAMODE também é iniciado por uma população aleatória de N_c vetores candidatos ($\mathbf{x}_{i,0}$), cujas dimensões são o número de variáveis de projeto. Assim como no GDE3, essa população é submetida a um processo de evolução que envolve mutação, cruzamento e seleção. É necessário, inicialmente, criar um arquivo externo vazio (A_0) e definir os valores iniciais dos parâmetros de adaptação.

3.2.1 Adaptação dos parâmetros da Evolução Diferencial

Um dos fatores que diferencia o SHAMODE do GDE3 é a adaptação do fator de escala (F) e da probabilidade de cruzamento (P_{cr}) para cada indivíduo $\mathbf{x}_{i,g}$.

Ao final de cada geração g , o índice i dos indivíduos que sobreviveram ao processo evolutivo é armazenado no vetor *sind*. A partir desses índices, os vetores $\mathbf{x}_{sind,g}$, que geraram descendentes de sucesso, são enviados ao arquivo externo A_{g+1} . Caso *sind* não seja um vetor vazio, são calculadas as médias de Lehmer dos parâmetros F e P_{cr} dos seus indivíduos. Essas médias são armazenadas nos vetores de memória M_F e $M_{P_{cr}}$, que guardam as médias calculadas para as últimas H gerações (número de gerações definido pelo usuário). Nas primeiras H gerações, adota-se um valor inicial pré-definido para essas médias. Dado que k_g é a posição da geração g entre o grupo analisado de 1 a H gerações, este processo é definido pelas equações 3.6, 3.7 e 3.8 a seguir:

$$M_{F,k_{g+1}} = \begin{cases} L_{\text{m\u00e9dia}}(F_{\text{ind},g}), & \text{se } F_{\text{ind},g} \neq 0 \\ M_{F,k_g}, & \text{caso contr\u00e1rio} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$M_{P_{cr},k_{g+1}} = \begin{cases} L_{\text{m\u00e9dia}}(P_{cr,\text{ind},g}), & \text{se } P_{cr,\text{ind},g} \neq 0 \\ M_{P_{cr},k_g}, & \text{caso contr\u00e1rio} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$k_{g+1} = \begin{cases} k_g + 1, & \text{se } k_g + 1 \leq H \\ 1, & \text{caso contr\u00e1rio} \end{cases} \quad (3.8)$$

No in\u00edcio da gera\u00e7\u00e3o seguinte ($g = g + 1$), s\u00e3o definidos os valores de $F_{i,g}$ e $P_{cr,i,g}$ de cada um dos N_c vetores candidatos. Para cada um desses vetores, define-se aleatoriamente um dos valores m\u00e9dios contidos em M_F (denominado μ_F) e uma das m\u00e9dias contidas em $M_{P_{cr}}$ (denominada $\mu_{P_{cr}}$). Com esses valores, $F_{i,g}$ \u00e9 calculado atrav\u00e9s de distribui\u00e7\u00f5es de Cauchy e $P_{cr,i,g}$ por meio de distribui\u00e7\u00f5es normais, considerando vari\u00e2ncias com valor de 0.1.

$$F_{i,g} = \text{rand.c}_i(\mu_F, 0.1) \quad (3.9)$$

$$P_{cr,i,g} = \text{rand.n}_i(\mu_{P_{cr}}, 0.1) \quad (3.10)$$

3.2.2 Muta\u00e7\u00e3o

A cada gera\u00e7\u00e3o do processo evolutivo, s\u00e3o gerados N_c vetores mutantes ($\mathbf{v}_{i,g}$) atrav\u00e9s da opera\u00e7\u00e3o descrita na Equa\u00e7\u00e3o 3.11. Este processo de muta\u00e7\u00e3o consiste em adicionar dois termos ao vetor base $\mathbf{x}_{i,g}$, multiplicados pelo fator de escala adaptado ($F_{i,g} \in (0, 1)$).

O primeiro termo \u00e9 definido pela diferen\u00e7a entre \mathbf{x}_p , uma solu\u00e7\u00e3o escolhida aleatoriamente da frente de Pareto da gera\u00e7\u00e3o g , e o vetor base $\mathbf{x}_{i,g}$. J\u00e1 o segundo termo \u00e9 o vetor diferen\u00e7a entre $\mathbf{x}_{r1,g}$, um vetor solu\u00e7\u00e3o escolhido aleatoriamente na popula\u00e7\u00e3o da gera\u00e7\u00e3o atual, e $\tilde{\mathbf{x}}_{r2,g}$, vetor escolhido dentro da uni\u00e3o entre a popula\u00e7\u00e3o da gera\u00e7\u00e3o atual e o arquivo externo ($x_g \cup A_g$).

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{i,g} + F_{i,g} \times (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{i,g}) + F_{i,g} \times (\mathbf{x}_{r1,g} - \tilde{\mathbf{x}}_{r2,g}) \quad (3.11)$$

3.2.3 Cruzamento

Assim como no GDE3, o processo de cruzamento uniforme no SHAMODE consiste em confrontar um vetor base ($\mathbf{x}_{i,g}$) e um vetor mutante ($\mathbf{v}_{i,g}$, obtido pela Equação 3.11), gerando um vetor teste ($\mathbf{u}_{i,g}$). Como mencionado anteriormente, a taxa de *crossover* ou probabilidade de cruzamento ($P_{cr_{i,g}} \in [0, 1]$) é o valor que indica a probabilidade da j -ésima variável do i -ésimo vetor mutante ser transportada para o vetor teste. Nesta meta-heurística, diferentemente do GDE3, esse parâmetro é adaptado para cada vetor de cada geração. Assim, a operação de *crossover* é fornecida pela Equação 3.12 a seguir:

$$u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g}, & \text{se } rand(0, 1) \leq P_{cr_{i,g}} \text{ ou } j = j_{rand} \\ x_{j,i,g}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.12)$$

3.2.4 Seleção

A seleção de indivíduos para a próxima geração se inicia através da união entre todos os vetores base e teste da geração atual ($x_g \cup u_g$). Os vetores desse conjunto são ordenados de acordo com o esquema de não dominância do NSGA-II, proposto por Deb *et al* [44]. Assim, são selecionadas as soluções que possuem os maiores níveis de não-dominância. Caso o número de vetores selecionados seja superior a N_c , alguns são excluídos aleatoriamente para manter o tamanho da população. As soluções restantes formam a população da nova geração x_{g+1} .

Por fim, as soluções selecionadas dentre os vetores teste (u_g) são incorporadas ao arquivo externo $Pareto_g$, dando origem a $Pareto_{g+1}$. Novamente, caso o número de vetores do arquivo seja superior ao definido como o máximo, soluções serão removidas aleatoriamente para manter esse tamanho.

3.3 *SUCCESS HISTORY-BASED ADAPTIVE MULTI-OBJECTIVE DIFFERENTIAL EVOLUTION WITH WHALE OPTIMISATION* (SHAMODE-WO)

A próxima meta-heurística utilizada é o SHAMODE-WO, uma adaptação do algoritmo SHAMODE, proposta também por Panagant *et al* [4]. Este algoritmo se diferencia de seu predecessor no processo de mutação, no qual é adicionado o operador de movimento espiral proveniente do algoritmo de otimização da baleia (WOA) [45].

Inicialmente, os vetores $\mathbf{v}_{i,g}$ são gerados pelo processo de mutação descrito pela Equação 3.11. Depois, cada um desses vetores mutantes possui 50% de chance de ser modificado pelo operador de movimento espiral do WOA, como mostram as Equações 3.13 e 3.14 a seguir:

$$\mathbf{v}_{i,g}^* = \begin{cases} D_i \times e^l \times \cos(2\pi l) + \mathbf{x}_{p2}, & \text{se } \text{rand}[0, 1] < 0.5 \\ \mathbf{v}_{i,g}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$D_i = |\mathbf{x}_{p2} - \mathbf{v}_{i,g}| \quad (3.14)$$

Nessas equações, $\mathbf{v}_{i,g}^*$ representa o novo vetor mutante gerado por esse processo, l é um número aleatório escolhido no intervalo $[-1, 1]$ e \mathbf{x}_{p2} é uma solução selecionada aleatoriamente da frente de Pareto da geração g .

Os processos de adaptação de parâmetros, cruzamento e seleção de soluções são feitos através dos mesmos procedimentos mostrados para o SHAMODE, detalhados anteriormente nas seções 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4, respectivamente.

3.4 MULTI-OBJECTIVE META-HEURISTIC WITH ITERATIVE PARAMETER DISTRIBUTION ESTIMATION (MM-IPDE)

O último algoritmo utilizado é o MM-IPDE, proposto em 2020 por Wansasuebe *et al* [5]. Esta meta-heurística adota também a adaptação dos parâmetros da evolução diferencial. Entretanto, enquanto o SHAMODE e o SHAMODE-WO adaptam os parâmetros F e P_{cr} com base no sucesso de indivíduos anteriores, o MM-IPDE realiza esse processo através de um algoritmo de otimização que atua em espaços de busca binários, denominado *Population-Based Incremental Learning for Multi-objective optimisation* (PBILM) [46]. Além da adaptação dos parâmetros, o PBILM também é utilizado para escolher os processos de mutação e cruzamento a serem aplicados no processo evolutivo de problemas de otimização multi-objetivo. Esse algoritmo é baseado no *Population-Based Incremental Learning* (PBIL), proposto em [47] para problemas mono-objetivo.

3.4.1 Adaptação dos parâmetros da Evolução Diferencial

No processo evolutivo do MM-IPDE, há dois grupos de variáveis. O primeiro deles corresponde às variáveis de alto nível (x_h), que representam os parâmetros de otimização da Evolução Diferencial:

$$\mathbf{x}_h = \{F_{scheme}, F_1, F_2, P_{cr}, I_{rep}\} \quad (3.15)$$

No vetor acima, F_{scheme} indica o processo a ser utilizado na adaptação do fator de escala F , F_1 e F_2 são valores utilizados na obtenção de F , P_{cr} é a probabilidade de

cruzamento e I_{rep} indica os processos de mutação e cruzamento a serem adotados na reprodução dos indivíduos.

A probabilidade de cruzamento ($P_{cr,i,g}$) corresponde diretamente ao respectivo valor da variável de alto nível do i -ésimo indivíduo da geração g . O fator de escala F é definido como na Equação 3.16. Nela, caso o valor de F_{scheme} seja 1, $F_{i,g}$ é um valor aleatório definido a partir de uma distribuição normal com média F_1 e desvio padrão F_2 . Já para o caso de $F_{scheme} = 2$, $F_{i,g}$ corresponde a um número aleatório calculado a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[F_2, F_1]$. Define-se que o valor de F_2 é sempre inferior ao de F_1 .

$$F_{i,g} = \begin{cases} rand.n_i(F_1, F_2), & \text{se } F_{scheme} = 1 \\ rand_i(F_2, F_1), & \text{se } F_{scheme} = 2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Como mencionado anteriormente, a evolução das variáveis de alto nível é realizada através do algoritmo de otimização em espaços de busca binários denominado PBILM. Nele, são utilizados vetores de probabilidade para representar a população durante o processo de busca. Esses valores de x_h são utilizadas na obtenção das variáveis de baixo nível (x_l), que correspondem às variáveis de projeto do problema de otimização a ser resolvido.

3.4.2 Mutação e Cruzamento

No MM-IPDE, a reprodução dos indivíduos pode ser feita através de cinco processos distintos, envolvendo procedimentos de mutação e cruzamento dos vetores solução. Esses processos são apresentados na Equação 3.17. A determinação de qual desses métodos será utilizado na reprodução das soluções é feita de acordo com o valor da variável I_{rep} .

$$\mathbf{u}_{i,g} = \begin{cases} \text{Reprodução proposta em [48]} (\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}, P_{cr}), & \text{se } I_{rep} = 1 \\ \mathbf{x}_{i,g} + F_{i,g}(\mathbf{x}_{p1} + \mathbf{x}_{p2} - \mathbf{x}_{i,g}) \rightarrow \text{Cruzamento}, & \text{se } I_{rep} = 2 \\ \mathbf{x}_{p1} + \mathbf{x}_{p2} + F(\mathbf{x}_{r,1,g} + \mathbf{x}_{r,2,g} - \mathbf{x}_{r,3,g} - \mathbf{x}_{r,4,g}) \rightarrow \text{Cruzamento}, & \text{se } I_{rep} = 3 \\ \mathbf{x}_{i,g} + F(\mathbf{x}_{p1} - \mathbf{x}_{i,g}) \rightarrow \text{Cruzamento}, & \text{se } I_{rep} = 4 \\ \text{Mutação Simples} \rightarrow \text{Cruzamento} & \text{se } I_{rep} = 5 \end{cases} \quad (3.17)$$

O primeiro método de reprodução utiliza a probabilidade de cruzamento (P_{cr}) e duas soluções não-dominadas (\mathbf{x}_{p1} e \mathbf{x}_{p2}) escolhidas aleatoriamente do arquivo externo *Pareto_g*. Sua descrição detalhada pode ser encontrada em [48]. O segundo método utiliza a i -ésima solução da geração g ($\mathbf{x}_{i,g}$) e uma soma ponderada entre duas soluções aleatórias

obtidas do arquivo externo ($\mathbf{x}_{p1} + \mathbf{x}_{p2}$). O terceiro método gera o vetor mutante por meio da soma de duas soluções não-dominadas aleatoriamente escolhidas (\mathbf{x}_{p1} e \mathbf{x}_{p2}) com uma operação ponderada envolvendo quatro soluções aleatórias da geração atual ($\mathbf{x}_{r,i,g}$). O quarto processo reprodutivo é fornecido pela soma entre o vetor $\mathbf{x}_{i,g}$ e a diferença ponderada entre um vetor não dominado \mathbf{x}_{p1} e o próprio $\mathbf{x}_{i,g}$. Por fim, o quinto esquema possui um processo de mutação simples, como apresentado anteriormente na Equação 3.1. Cada um desses processos de reprodução realiza também uma operação de cruzamento uniforme, semelhante àquelas descritas nas Equações 3.2 e 3.12.

3.5 TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

A extração de uma solução das frentes de Pareto, que fornece os valores das funções objetivo e os valores finais das variáveis de projeto, é de grande interesse para os projetistas estruturais. Nesse sentido, o tomador de decisões tem a tarefa desafiadora e não-trivial de selecionar as soluções desejadas dentre as não-dominadas [6].

Neste estudo, para extrair a solução desejada da frente de Pareto obtida em cada POE, utiliza-se uma decisão de torneio multicritério (da sigla MTD, em inglês). Proposto por Parreira e Vasconcelos [49], esse método é baseado no ranqueamento das melhores e piores soluções obtidas. Essa classificação se baseia nos valores das funções objetivo e nos pesos atribuídos a cada uma delas pelo tomador de decisões, de acordo com suas intenções e preferências.

O processo se inicia através da função $t_i(a, b)$, que indica se a solução a vence ou não o torneio contra a solução b , em relação à minimização da i -ésima função objetivo. Esse procedimento se encontra na Equação 3.18:

$$t_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } of_i(b) - of_i(a) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.18)$$

A função torneio $T_i(a, A)$ fornece o número de vezes que a solução a vence as demais soluções b que compõem o conjunto A . O conjunto A , por sua vez, é formado por todas as soluções dessa frente de Pareto. A função torneio é escrita como na Equação 3.19:

$$T_i(a, A) = \sum_{\forall b \in A, b \neq a} \frac{t_i(a, b)}{(|A| - 1)} \quad (3.19)$$

Dessa forma, a função $T_i(a, A)$ indica o desempenho da solução a em relação às outras do conjunto A . Com os resultados dessa função, pode-se gerar um *ranking* global R , que considera todas as funções objetivo do problema e os respectivos pesos atribuídos

a elas. Esse procedimento pode ser feito através das equações 3.20 ou 3.21. No presente trabalho, a Equação 3.20 foi a escolhida para fazer o ranqueamento.

$$R(a) = \left(\prod_{i=1}^{N_F} T_i(a, A)^{w_i} \right)^{1/N_F} \quad (3.20)$$

$$R(a) = \min\{T_1(a, A)^{w_1}, \dots, T_{N_F}(a, A)^{w_{N_F}}\} \quad (3.21)$$

Nas equações 3.20 e 3.21, w_i representa os pesos de importância definidos pelo tomador de decisões para cada uma das N_F funções objetivo do problema, onde $w_i > 0$ para $i = 1, \dots, N_F$ e $\sum_{i=1}^{N_F} w_i = 1$. Os indicadores de *ranking* definidos por $R(a)$ fornecem uma medida de preferência da solução a em comparação com as demais soluções, tal que:

- Se $R(a) > R(b)$, então a é preferida em relação a b .
- Se $R(a) = R(b)$, então a é indiferente em relação a b .

3.6 INDICADORES DE PERFORMANCE DOS ALGORITMOS

Um dos objetivos deste estudo é comparar o desempenho das meta-heurísticas utilizadas na resolução dos POEs multi-objetivo formulados. Para isso, são utilizados indicadores de performance consagrados da literatura, como o Hipervolume [50] e o IGD+ [51], a partir dos quais são traçados os Perfis de Desempenho [52] dos algoritmos.

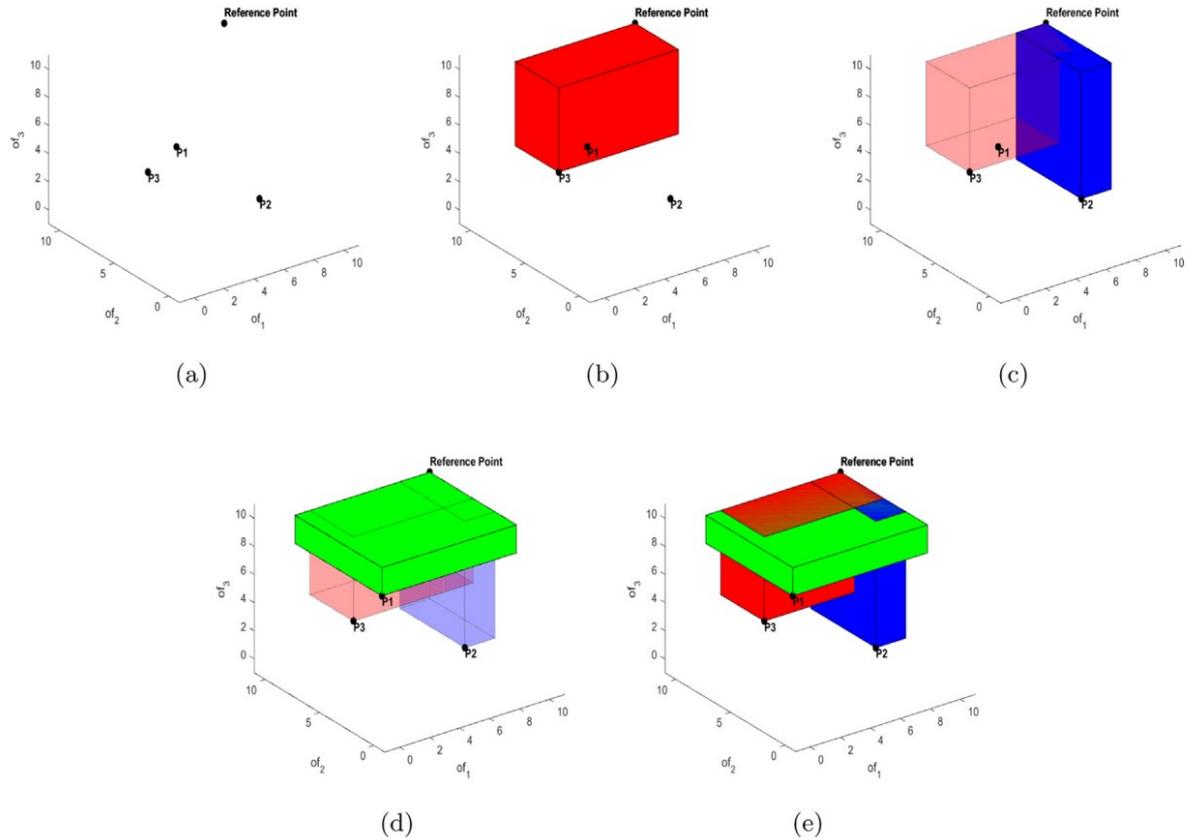
3.6.1 Hipervolume

Com objetivo de analisar o desempenho dos algoritmos de evolução diferencial na resolução dos problemas de otimização propostos, o primeiro indicador de performance utilizado foi o Hipervolume (HV). Proposta por Zitzler e Thiele em [50], essa métrica é muito utilizada na literatura, por avaliar simultaneamente a convergência e a diversidade do conjunto de soluções não-dominadas obtido, sem a obrigatoriedade de se conhecer a Frente de Pareto real do problema, sendo aplicável mesmo a problemas com mais de três funções objetivo. Esse método se baseia no cálculo do hipervolume do espaço limitado pelas soluções não-dominadas (Frente de Pareto) e um ponto de referência. Usualmente, o ponto de referência corresponde a um vetor formado pelos maiores valores encontrados para as funções objetivo de minimização e pelos menores valores das funções de maximização.

A Figura 2 ilustra um exemplo de cálculo de Hipervolume para um problema com três funções objetivo, no qual as soluções não-dominadas obtidas são indicadas por $P1$, $P2$ e $P3$. O HV é obtido pelo volume da união dos paralelepípedos das Figuras 2.b a 2.d,

cujas diagonais conectam a respectiva solução da Frente de Pareto ao ponto de referência. Os volumes sobrepostos não são considerados na soma final. A aplicação desses conceitos pode ser estendida para problemas com outras dimensões.

Figura 2 – Exemplo de hipervolume para um problema com três objetivos



Fonte: Carvalho *et al.* (2021) [6].

Valores mais altos de HV indicam frentes de Pareto com melhor convergência e diversidade das soluções não-dominadas. O uso do hipervolume na comparação de conjuntos solução tem uma forte base teórica. Como afirma Zitzler em [53], sempre que um conjunto de soluções A tem um valor de hipervolume maior do que o de um conjunto de soluções B ($HV(A) > HV(B)$), é possível afirmar que A não é pior do que B.

Na obtenção dos hipervolumes nos POEs deste trabalho, as funções objetivo foram normalizadas no intervalo $[0, 1]$ para que todas apresentassem o mesmo peso no cálculo de HV. Assim, as coordenadas dos pontos de referência de cada problema foram designadas com valor igual a 1.

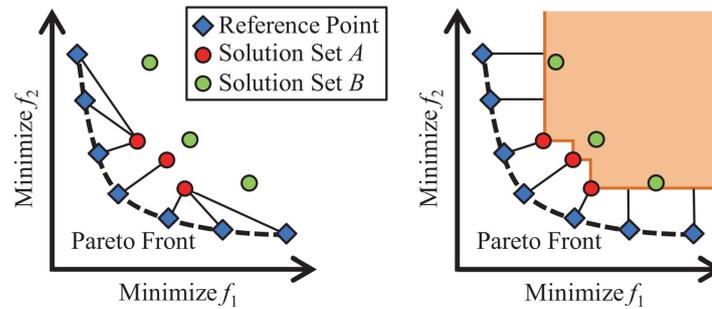
3.6.2 *Inverted Generational Distance Plus*

Uma desvantagem do Hipervolume é seu alto custo computacional com o aumento do número de funções objetivo. Como alternativa a esse método tradicional, outro indicador

de desempenho utilizado foi o *Inverted Generational Distance Plus* (IGD+), proposto por Ishibuchi *et al.* em [51].

O IGD+ é uma adaptação da métrica IGD [54]. Enquanto o cálculo do IGD se baseia na distância entre os pontos de referência e as soluções não-dominadas mais próximas a eles, o IGD+ calcula a distância média entre os pontos de referência e a região não-dominada mais próxima a eles. As regiões não-dominadas são definidas pelo conjunto de soluções em análise, enquanto os pontos de referência representam a solução ótima do problema. Quando a Frente de Pareto real é conhecida, ela normalmente exerce o papel dos pontos de referência. A diferença entre essas duas métricas está ilustrada na Figura 3, onde à esquerda observa-se a obtenção das distâncias para o IGD e à direita as distâncias utilizadas no cálculo do IGD+.

Figura 3 – Diferença entre os cálculos do IGD e IGD+



Fonte: Ishibuchi *et al.* [51].

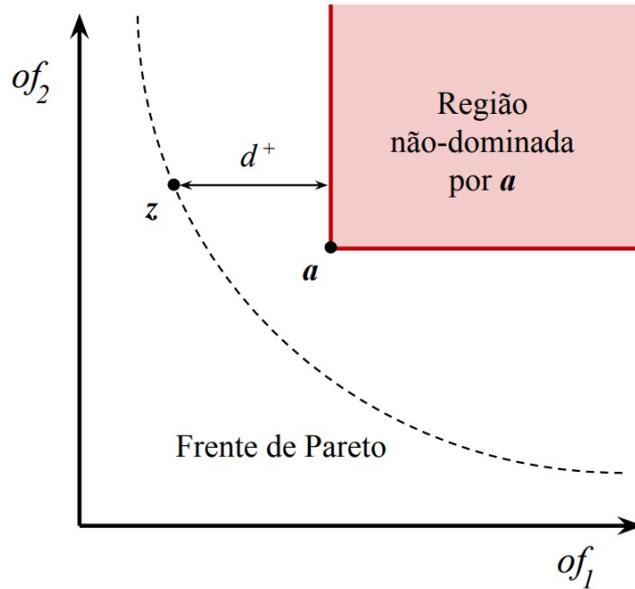
Valores menores de IGD+ indicam conjuntos de soluções melhores. O cálculo desse indicador está representado pela Equação 3.22, na qual $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{|A|}\}$ é o conjunto solução avaliado e $Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{|Z|}\}$ são os pontos de referência. Observa-se que as simbologias $|A|$ e $|Z|$ representam a quantidade de indivíduos desses conjuntos.

$$IGD^+(A) = \frac{1}{|Z|} \sum_{i=1}^{|Z|} \min_{j=1}^{|A|} d^+(z_i, \mathbf{a}_j) \quad (3.22)$$

Dado que N_F é o número de funções objetivo do problema, d^+ representa a distância entre um ponto de referência $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_{N_F}\}$ e a região não-dominada definida por um ponto $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{N_F}\}$. Essa distância é calculada pela Equação 3.23 e ilustrada pela Figura 4. Nessa formulação, o i -ésimo objetivo somente é considerado no cálculo de d^+ se o valor de a_i da solução \mathbf{a} for inferior ao valor de z_i , fornecido pelo ponto de referência \mathbf{z} .

$$d^+(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \sqrt{(\max\{a_1 - z_1, 0\})^2 + \dots + (\max\{a_{N_F} - z_{N_F}, 0\})^2} \quad (3.23)$$

Figura 4 – Distância d^+ entre dois pontos \mathbf{a} e \mathbf{z} em um exemplo com duas funções objetivo



Fonte: Motta [35].

3.6.3 Perfis de desempenho

Outra ferramenta utilizada para analisar a performance dos algoritmos na resolução dos problemas de otimização é a construção dos perfis de desempenho, introduzidos por Dolan e Moré [52]. Considerando P um conjunto de n_p problemas, S o conjunto de n_s algoritmos a serem analisados e $t_{p,s}$ uma métrica qualquer indicando o desempenho do algoritmo s na resolução do problema p . Quanto menor o valor de $t_{p,s}$, melhor o algoritmo, então métricas como o Hipervolume, na qual valores maiores indicam performances melhores, devem ser invertidas. A razão de desempenho de s na resolução de p é determinada pela Equação 3.24:

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min \{t_{p,s}, s \in S\}} \quad (3.24)$$

O perfil de desempenho representa os valores de $\rho_s(\tau)$, que é definido como a probabilidade de que a razão de desempenho $r_{p,s}$ do algoritmo s não ultrapasse um valor $\tau \geq 1$ da melhor razão possível, como mostra a Equação 3.25.

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} |\{p \in P : r_{p,s} \leq \tau\}| \quad (3.25)$$

Para um algoritmo s , $\rho_s(\tau)$ indicará a porcentagem de problemas em que o indicador de performance desse algoritmo não é maior (pior) do que o fator τ do melhor desempenho

obtido para os problemas analisados, entre todos os algoritmos de S . Segundo Barbosa *et al.* [55], a área sob a curva $\rho_s(\tau)$ do perfil de desempenho é um indicador da performance geral do algoritmo s na resolução do conjunto de problemas P , métrica utilizada na comparação das meta-heurísticas aplicadas neste trabalho. Quanto maior o valor da área, mais alta é a eficiência do algoritmo analisado.

4 ESTRUTURAS ANALISADAS

Neste capítulo, apresentam-se as treliças planas e espaciais a serem otimizadas no presente estudo. Essas estruturas são submetidas aos seis POEs descritos no Capítulo 2, resolvidos através das quatro meta-heurísticas abordadas no Capítulo 3. São apresentadas características de cada treliça, como suas dimensões, carregamentos impostos e material adotado, além de informações específicas sobre a resolução dos respectivos POEs, como as variáveis de projeto, as restrições, número de execuções e de indivíduos avaliados em cada execução. Nestes exemplos *benchmark* utilizados no presente estudo, essas informações quanto às características e restrições de cada treliça foram extraídas diretamente de trabalhos anteriores envolvendo tais estruturas, sendo encontradas por exemplo em [6]. Dessa forma, os novos POEs formulados são aplicados a essas treliças em condições pré-definidas, permitindo a comparação dos resultados a outros encontrados na literatura e a reprodução dos experimentos deste estudo em trabalhos futuros.

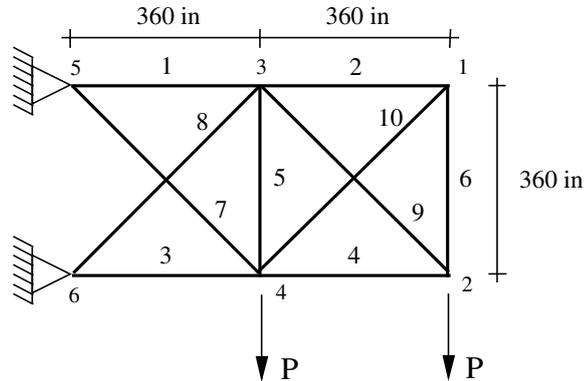
4.1 TRELIÇA DE 10 BARRAS (T10)

A primeira estrutura em estudo é a treliça plana de 10 barras representada na Figura 5, proposta por Gellatly e Berke [56] e muito conhecida no âmbito da otimização estrutural. As variáveis de projeto dos POEs são as seções transversais das barras, que podem assumir qualquer valor entre 6.45 cm^2 e 258.06 cm^2 . As cargas verticais para baixo P mostradas na Figura 5 são aplicadas nos nós 2 e 4, com a magnitude de 445.9 kN . O material adotado nas barras é o alumínio, com massa específica de 2700 kg/m^3 e módulo de Young igual a 68.95 GPa . Uma massa não estrutural de 454 kg é adicionada aos nós livres da treliça (nós 1 a 4). Em relação às restrições aplicadas ao problema, a tensão em cada barra não deve ultrapassar 172.37 MPa de tração ou compressão, o deslocamento nodal máximo está limitado a 5.05 cm em todas as direções, o fator de carga crítica λ_{cr} precisa ser maior ou igual a 1 e as três primeiras frequências naturais de vibração f_1 , f_2 e f_3 devem ser maiores ou iguais a 7 Hz , 15 Hz e 20 Hz , respectivamente. Para os algoritmos analisados, cada POE foi avaliado através de 20 execuções independentes, cada uma com 200 gerações de 50 indivíduos (10000 nfe , o número de avaliações das funções objetivo, ou seja, de estruturas avaliadas no processo de otimização).

4.2 TRELIÇA DE 25 BARRAS (T25)

A próxima estrutura a ser analisada é a treliça espacial de 25 barras da Figura 6. Os dados de carregamento e agrupamento das variáveis de projeto (áreas das seções transversais das barras) em 8 grupos são detalhados por Rajeev e Krishnamoorthy em [57]. As variáveis são discretas e escolhidas entre as 30 opções do conjunto $S_{in} = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2 \text{ e } 3.4 \text{ in}^2$, ou seja, entre $S = 0.6452, 1.2903, 1.9355, \dots, 16.7742, 18.0645,$

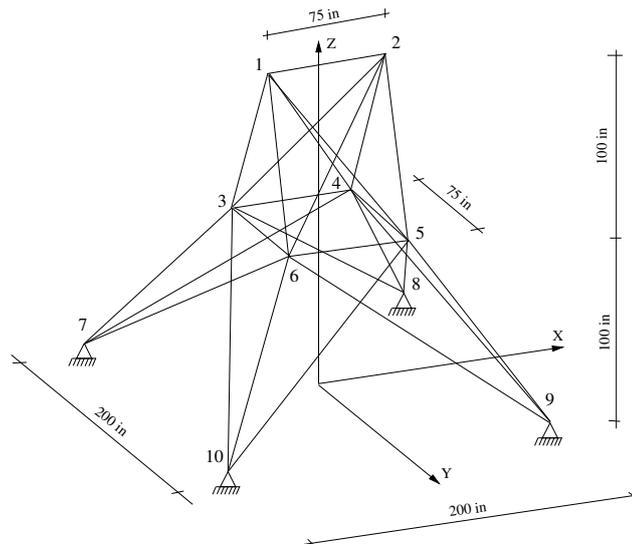
Figura 5 – Treliça de 10 barras



Fonte: Gellatly e Berke (1971) [56].

19.3548, 20.6451 e 21.9354 cm². As barras de alumínio apresentam massa específica de 2700 kg/m³ e módulo de elasticidade de 68.95 GPa. Uma massa não estrutural de 45 kg é aplicada em cada um dos nós livres da treliça. Em relação às restrições em estudo, a tensão em cada barra não deve ultrapassar 275.80 MPa de tração ou compressão, o deslocamento máximo dos nós 1 e 2 é de 0.89 cm em todas as direções, λ_{cr} deve ser maior ou igual a 1 e a primeira frequência natural de vibração f_1 deve ser maior ou igual a 10 Hz. Foram realizadas 30 execuções independentes dos algoritmos para cada problema, cada execução com 100 gerações de 20 indivíduos (2000 *nfe*).

Figura 6 – Treliça de 25 barras

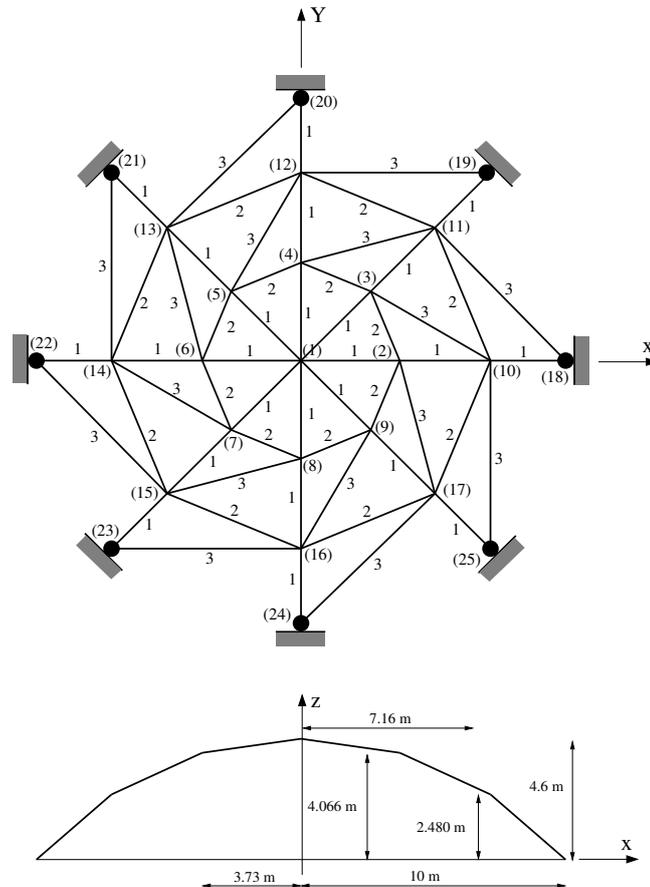


Fonte: Rajeev e Krishnamoorthy (1992) [57].

4.3 TRELIÇA DE 56 BARRAS (T56)

A terceira estrutura em estudo é a treliça de 56 barras representada na Figura 7. Proposto por Mokarram e Banan [25], o problema de otimização tem como variáveis de projeto as áreas das seções transversais das barras, que podem assumir qualquer valor entre 2 cm^2 e 20 cm^2 , divididas em 3 grupos como mostra a figura. As cargas aplicadas são de 4 kN na direção y e 30 kN na direção z para o nó 1, enquanto todos os demais nós recebem cargas de 4 kN na direção y e 10 kN na direção z . São adotadas barras de aço, com massa específica de 7800 kg/m^3 e módulo de elasticidade de 210 GPa . Em relação às restrições do problema, a tensão em cada barra não deve ultrapassar 435 MPa de tração ou compressão. Define-se também que os deslocamentos verticais (direção z) dos nós 4, 5, 6, 12, 13 e 14 não devem ultrapassar 40 mm , enquanto o deslocamento na direção y do nó 8 é limitado a 20 mm . Por fim, λ_{cr} deve ser maior ou igual a 1 e a primeira frequência natural de vibração f_1 não deve assumir valores inferiores a 15 Hz . Foram realizadas 10 execuções independentes de cada algoritmo para cada POE, cada execução com 100 gerações de 30 indivíduos (3000 nfe por execução).

Figura 7 – Treliça de 56 barras

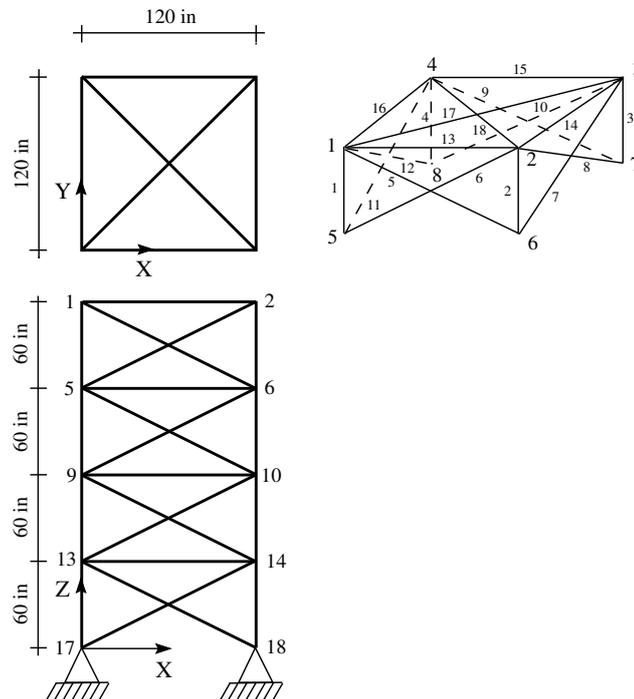


Fonte: Mokarram e Banan (2018) [25].

4.4 TRELIÇA DE 72 BARRAS (T72)

A próxima treliça a ser otimizada é a de 72 barras ilustrada na Figura 8. Proposto por Venkayya [58], este problema de otimização tem como variáveis de projeto as áreas das seções transversais das barras, que podem assumir qualquer valor entre 0.645 cm^2 e 25.806 cm^2 . As informações quanto aos dois casos de carregamentos aplicados na treliça, assim como o agrupamento das barras em 16 grupos de mesma seção transversal, são detalhados em Rajeev and Krishnamoorthy [57]. O material utilizado é novamente o alumínio, com massa específica de 2700 kg/m^3 e módulo de elasticidade de 68.95 GPa . Uma massa não-estrutural de 2270 kg é aplicada em cada um dos nós livres da treliça. Quanto às restrições do problema, a tensão em cada barra não deve ultrapassar 172.37 MPa de tração ou compressão. Os deslocamentos dos nós superiores (nós 1 a 4) nas direções x e y são limitados a 0.635 cm . O λ_{cr} deve ser maior ou igual a 1 e as frequências naturais de vibração f_1 e f_3 devem ser maiores ou iguais a 4 Hz e 6 Hz , respectivamente. Para cada POE, são realizadas 20 execuções independentes dos algoritmos de evolução diferencial, com 200 gerações de 50 indivíduos cada (10000 nfe).

Figura 8 – Treliça de 72 barras



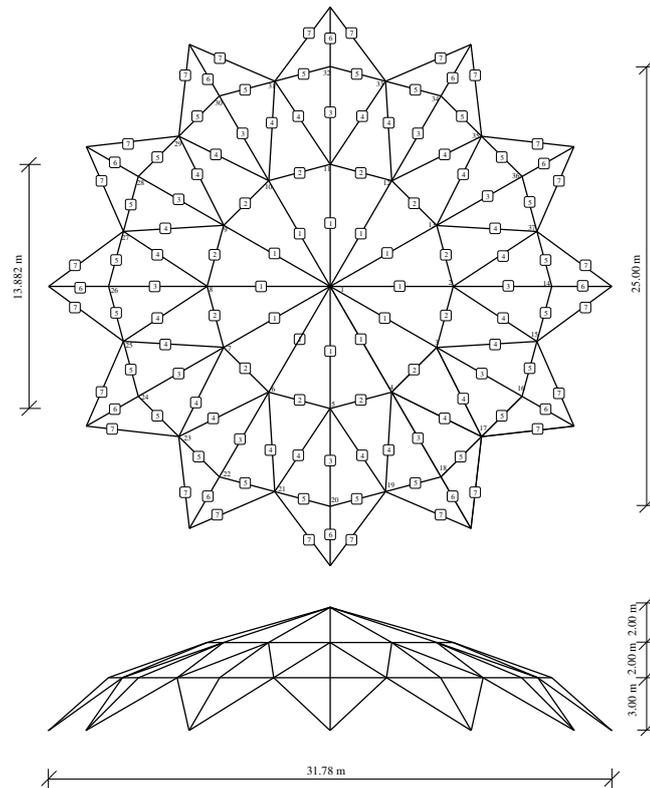
Fonte: Venkayya (1971) [58].

4.5 TRELIÇA DE 120 BARRAS (T120)

A quinta treliça em estudo se refere ao domo de 120 barras ilustrado na Figura 9, previamente abordado na literatura [59–62]. Seus problemas de otimização estrutural

têm como variáveis de projeto as áreas das seções transversais das barras, que podem assumir qualquer valor entre 2 cm^2 e 140 cm^2 . O domo está sujeito às cargas verticais para baixo (direção z , sentido negativo) de 60 kN aplicada ao nó 1 e de 30 kN aplicada aos nós 2 a 13. Utilizam-se barras de aço, com massa específica de 7860 kg/m^3 e módulo de elasticidade de 210 GPa . Uma massa não estrutural de 3000 kg é aplicada ao nó 1, massas de 500 kg são adicionadas aos nós 2 a 13 e de 100 kg aos nós 14 a 37. Como indicado na Fig. 9, as barras são subdivididas em 7 grupos de mesma seção transversal. Quanto às restrições dos POEs, a tensão em cada barra não deve ultrapassar 240 MPa de tração ou compressão. O deslocamento nodal máximo permitido é de 1 cm nas direções x , y e z . O fator de carga crítica (λ_{cr}) deve ser maior ou igual a 1 e a primeira frequência natural de vibração f_1 deve ser maior ou igual a 4 Hz . Para cada POE, são realizadas 20 execuções independentes de cada algoritmo, com 200 gerações de 50 indivíduos cada (10000 nfe).

Figura 9 – Treliça de 120 barras



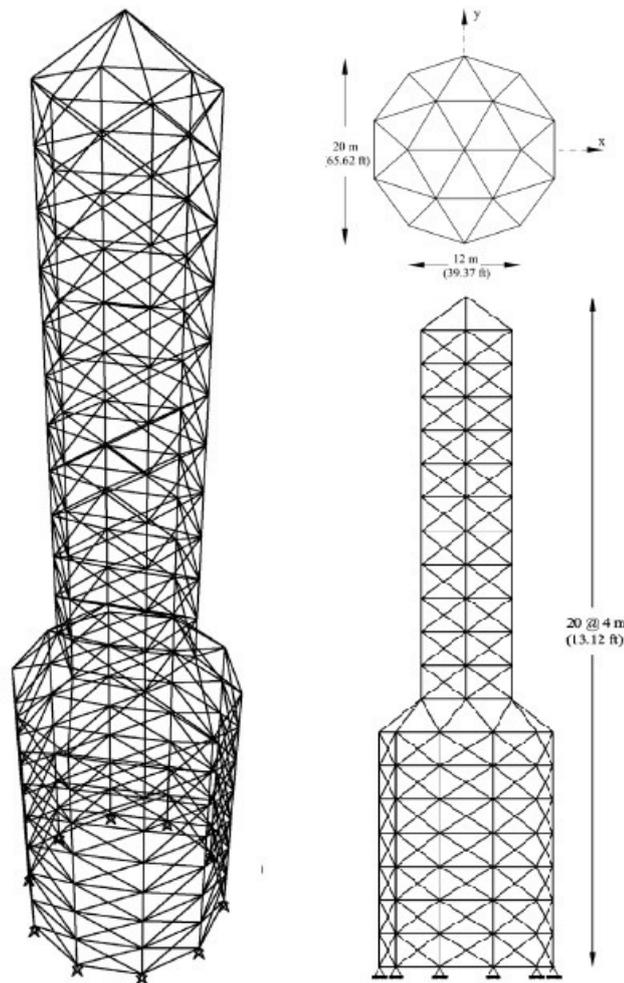
Fonte: Capriles et al. (2007) [61].

4.6 TRELIÇA DE 582 BARRAS (T582)

A última estrutura a ser otimizada é a treliça de 582 barras da Figura 10, apresentada em Hasançebi et al. [63]. As variáveis de projeto dos POEs são as seções transversais das barras, subdivididas em 32 grupos, cujo espaço de busca é formada pelos 140 perfis W indicados na Tabela 2, extraídos da AISC-LFRD [64]. Observa-se que a torre é simétrica

em relação aos eixos x e y . Quanto ao carregamento, são aplicadas cargas laterais de 5 kN nas direções x e y e a carga vertical de 30 kN na direção z , em cada um dos nós da treliça. O material adotado para as barras foi o aço, com massa específica de 7860 kg/m³ e módulo de elasticidade de 210 GPa. Uma massa não estrutural de 400 kg é adicionada a todos os nós da estrutura. Em relação às restrições impostas aos problemas, o deslocamento nodal máximo está limitado a 8 cm em todas as direções, o valor mínimo da primeira frequência natural de vibração é de 1 Hz e o primeiro fator de carga crítica deve ser maior ou igual a 1. As restrições de tensão e esbeltez são definidas pelas equações apresentadas a seguir:

Figura 10 – Treliça de 582 barras



Fonte: Hasançebi et al. (2009) [63].

$$\begin{cases} \sigma_i^+ = 0.6F_y, & \sigma_i \geq 0, \\ \sigma_i^-, & \sigma_i < 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

Na equação 4.1, σ_i^+ e σ_i^- são, respectivamente, os esforços máximos permitidos de tração e de compressão nas barras, enquanto F_y é a tensão de escoamento do material, com

Tabela 2 – Tabela de perfis W para a treliça de 582 barras

W27×178	W21×122	W18×50	W14×455	W14×74	W12×136	W10×77
W27×161	W21×111	W18×46	W14×426	W14×68	W12×120	W10×68
W27×146	W21×101	W18×40	W14×398	W14×61	W12×106	W10×60
W27×114	W21×93	W18×35	W14×370	W14×53	W12×96	W10×54
W27×102	W21×83	W16×100	W14×342	W14×48	W12×87	W10×49
W27×94	W21×73	W16×89	W14×311	W14×43	W12×79	W10×45
W27×84	W21×68	W16×77	W14×283	W14×38	W12×72	W10×39
W24×162	W21×62	W16×67	W14×257	W14×34	W12×65	W10×33
W24×146	W21×57	W16×57	W14×233	W14×30	W12×58	W10×30
W24×131	W21×50	W16×50	W14×211	W14×26	W12×53	W10×26
W24×117	W21×44	W16×45	W14×193	W14×22	W12×50	W10×22
W24×104	W18×119	W16×40	W14×176	W12×336	W12×45	W8×67
W24×94	W18×106	W16×36	W14×159	W12×305	W12×40	W8×58
W24×84	W18×97	W16×31	W14×145	W12×279	W12×35	W8×48
W24×76	W18×86	W16×26	W14×132	W12×252	W12×30	W8×40
W24×68	W18×76	W14×730	W14×120	W12×230	W12×26	W8×35
W24×62	W18×71	W14×665	W14×109	W12×210	W12×22	W8×31
W24×55	W18×65	W14×605	W14×99	W12×190	W10×112	W8×28
W21×147	W18×60	W14×550	W14×90	W12×170	W10×100	W8×24
W21×132	W18×55	W14×500	W14×82	W12×152	W10×88	W8×21

Fonte: AISC-LFRD (1989) [64].

valor de 36 ksi (248 MPa). O cálculo de σ_i^- depende do índice de esbeltez do elemento, como mostra a Equação 4.2:

$$\sigma_i^- = \begin{cases} \left[\left(1 - \frac{\lambda s_i^2}{2C_c^2}\right) F_y / \left(\frac{5}{3} + \frac{3\lambda s_i}{8C_c} - \frac{\lambda s_i^3}{8C_c^3} \right) \right], & \text{para } \lambda s_i < C_c \\ \frac{12\pi^2 E}{23\lambda s_i^2}, & \text{para } \lambda s_i \geq C_c \end{cases} \quad (4.2)$$

Já o índice C_c é calculado pela equação:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} \quad (4.3)$$

De acordo com o AISC [64], os valores máximos permitidos para o índice de esbeltez são definidos por:

$$\lambda s_i = \frac{k_i l_i}{r_i} \begin{cases} 300, & \text{para barras sob tração} \\ 200, & \text{para barras sob compressão} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde 300 e 200 são os valores máximos de esbeltez para elementos sob tração e compressão, respectivamente. Ademais, λs_i é o índice de esbeltez do i – *ésimo* elemento da estrutura, l_i o comprimento dessa barra e r_i seu raio de giração. Cada POE nesta treliça foi avaliado através dos 4 algoritmos de evolução diferencial propostos, através de 20 execuções independentes, cada uma com 200 gerações de 50 indivíduos (10000 *nfe*).

5 RESULTADOS E ANÁLISES

No Capítulo 5, apresentam-se os resultados obtidos com a resolução dos POEs nas treliças propostas, através dos quatro algoritmos previamente mencionados. Inicialmente, são apresentadas frentes de Pareto e gráficos de coordenadas paralelas representando as soluções não-dominadas obtidas para cada problema por cada meta-heurística. A partir desses resultados, são extraídas as soluções desejadas através da decisão de torneio multi-critério, de acordo com as preferências do projetista. Por fim, as performances dos algoritmos utilizados são comparadas através dos indicadores de desempenho Hipervolume e IGD+.

5.1 FRENTES DE PARETO, GRÁFICOS DE COORDENADAS PARALELAS E SOLUÇÕES EXTRAÍDAS

Como mencionado no Capítulo 4, cada treliça deste estudo é submetida aos 6 POEs apresentados na seção 2.5, resolvidos através das quatro meta-heurísticas descritas no Capítulo 3. Para o GDE3, adotam-se os valores de $P_{cr} = 0.9$ e $F = 0.3$ para os parâmetros do DE, enquanto para os demais algoritmos, tais valores são adaptados ao longo das gerações. No SHAMODE e SHAMODE-WO, adota-se $H = 5$ e valores médios iniciais de 0.5. A definição desses parâmetros é baseada em trabalhos anteriores como [3], [4], [6] e [35]. Também no Capítulo 3, aborda-se a tomada de decisão multicritério através do método MTD, utilizada para extrair, em cada problema, a solução desejada pelo projetista. Para isso, o tomador de decisões deve indicar os pesos/importância de cada função objetivo nesse processo de escolha. Para os POEs deste trabalho, utilizam-se dois cenários de comparação: sc_1 com pesos iguais para todas as funções objetivo e sc_2 com peso de 0.5 para a minimização da massa da treliça e as demais funções objetivo com pesos iguais entre si, privilegiando soluções estruturais mais leves.

A seguir, são apresentadas as frentes de Pareto com as soluções não-dominadas do POE 1 (Figuras 11, 12 e 13), POE 2 (Figuras 14, 15 e 16) e POE 3 (Figuras 17, 18 e 19). Os indivíduos fornecidos por cada algoritmo são representados em cores distintas, como indicado nas imagens.

Para os POEs 4, 5 e 6, com mais de 3 objetivos, não é possível representar suas soluções através de frentes de Pareto tridimensionais. Por esse motivo, seus resultados são apresentados por meio de gráficos de coordenadas paralelas. Para obter esses gráficos, os valores das funções objetivo para cada solução são normalizados. Dado que of_{max} , of_{min} e $of(\mathbf{x})$ são, respectivamente, o valor máximo obtido, o valor mínimo e o valor da função objetivo of na solução \mathbf{x} , essa normalização é calculada por:

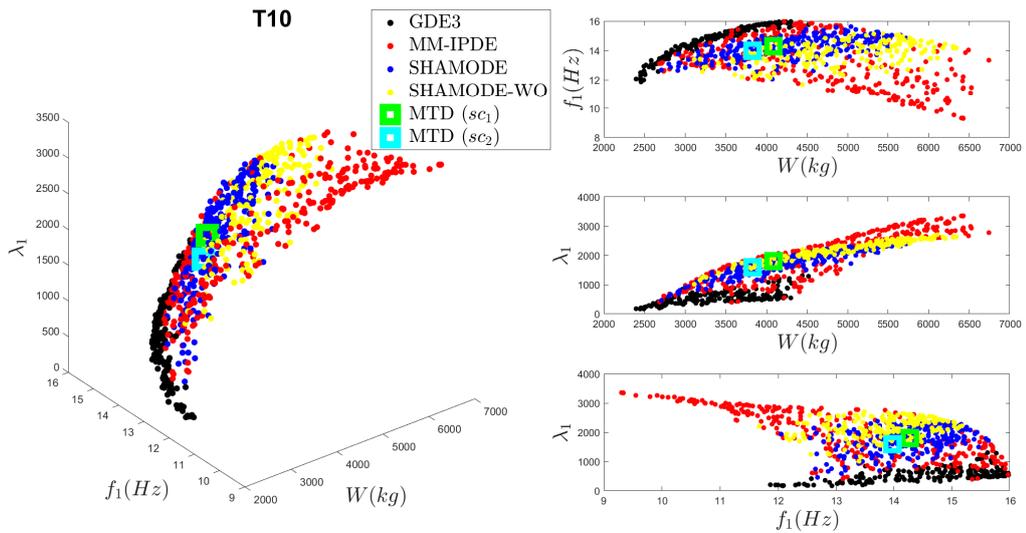
$$\frac{of(\mathbf{x}) - of_{min}}{of_{max} - of_{min}} \quad (5.1)$$

Assim, o eixo das ordenadas varia de 0 a 1, ou seja, do valor mínimo ao valor máximo obtido para cada função objetivo entre todas as soluções não-dominadas. Já o eixo das abscissas possui valores de 1 a N_F (número de objetivos do problema), para indicar os valores normalizados obtidos para cada função. Cada linha traçada é uma solução não-dominada obtida, seguindo o padrão de cores indicado nas Figuras 11 a 19 para cada meta-heurística. Os gráficos de coordenadas paralelas de cada POE são apresentados tanto na forma plana tradicional, quanto do ponto de vista tridimensional, realçando as soluções fornecidas por cada algoritmo aplicado.

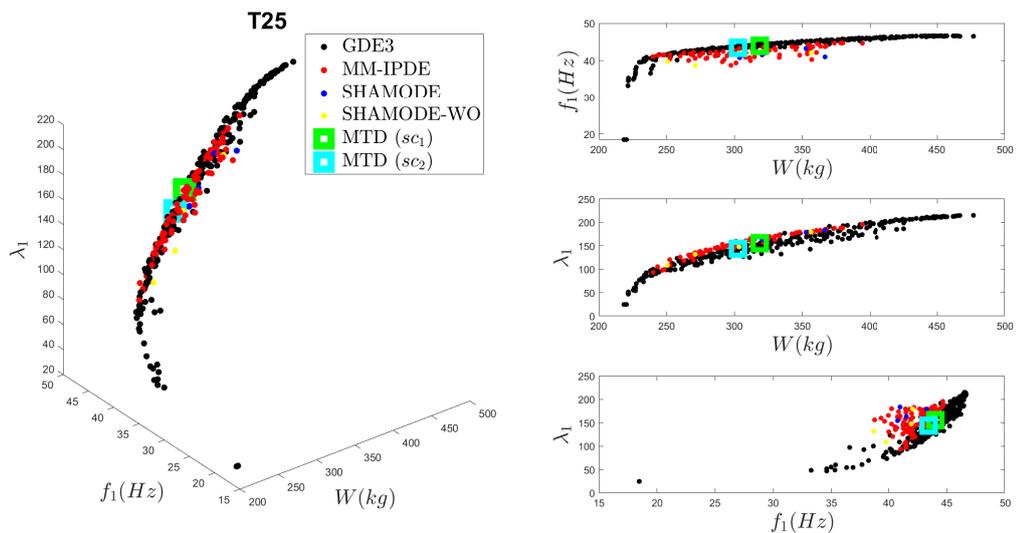
Apresentam-se, para cada gráfico, informações como as razões entre os hipervolumes de cada algoritmo e o HV do conjunto total de soluções, assim como a porcentagem de soluções não-dominadas fornecidas por cada meta-heurística. São indicadas também as coordenadas das solução MTD obtidas, acompanhadas pelo algoritmo que forneceu tal solução. As soluções MTD obtidas no cenário sc_1 são realçadas na cor verde e as soluções extraídas com os pesos de sc_2 são destacadas em ciano nos respectivos gráficos.

Figura 11 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 20.89%, 33.73%, 26.12%, 19.26% ·HV: 0.5118, 0.9741, 0.8673, 0.8133
 ·MTD (s_{c1}) = 4081.45 kg, 14.28 Hz, 1795.55 (SHAMODE) ·MTD (s_{c2}) = 3826.07 kg, 13.98 Hz, 1598.40 (SHAMODE)



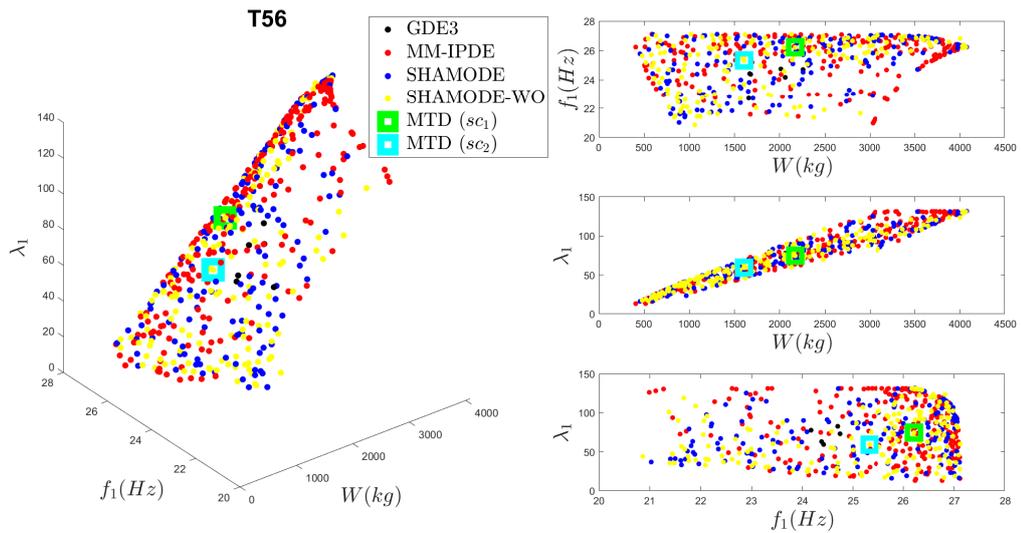
(b) ·Porcentagem: 76.23%, 21.59%, 1.09%, 1.09% ·HV: 0.9816, 0.9030, 0.6516, 0.7191
 ·MTD (s_{c1}) = 318.78 kg, 44.01 Hz, 155.86 (GDE3) ·MTD (s_{c2}) = 302.59 kg, 43.43 Hz, 144.20 (GDE3)



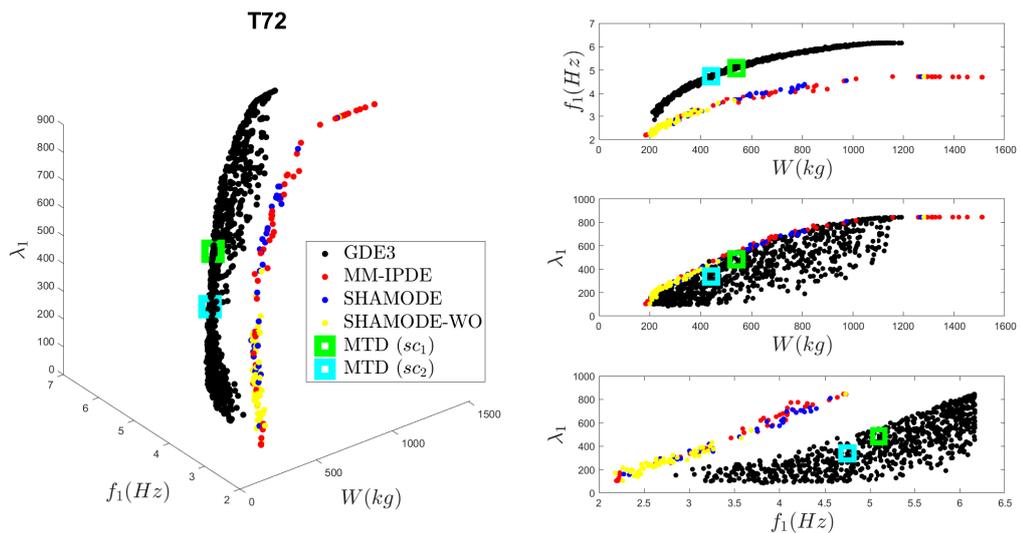
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 12 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 1.08%, 39.86%, 29.62%, 29.44% ·HV: 0.3983, 0.9750, 0.9564, 0.9378
 ·MTD (sc_1) = 2170.78 kg, 26.21 Hz, 74.56 (SHAMODE-WO) ·MTD (sc_2) = 1606.44 kg, 25.32 Hz, 59.45 (SHAMODE-WO)



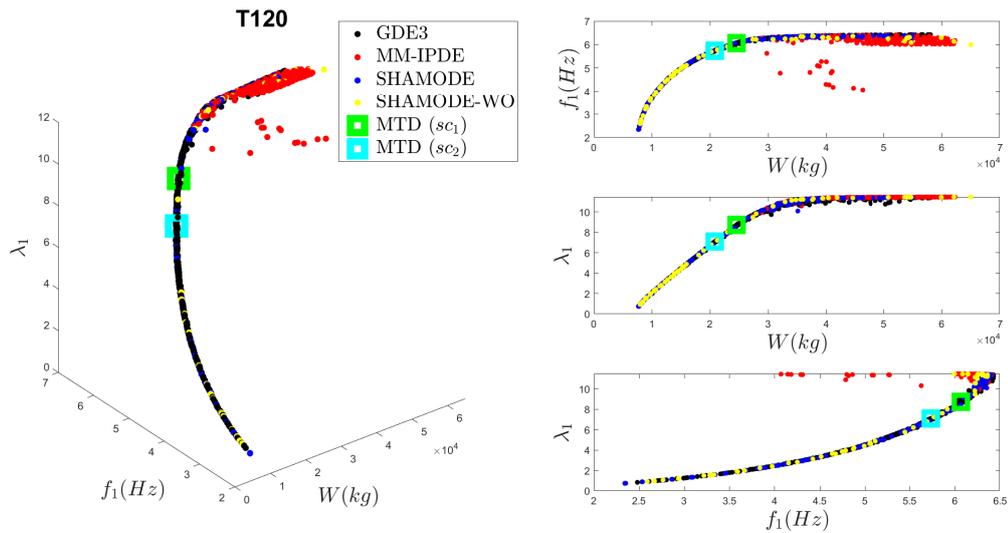
(b) ·Porcentagem: 83.09%, 6.91%, 3.72%, 6.28% ·HV: 0.9946, 0.5909, 0.5750, 0.3774
 ·MTD (sc_1) = 541.82 kg, 5.10 Hz, 486.13 (GDE3) ·MTD (sc_2) = 441.43 kg, 4.75 Hz, 337.06 (GDE3)



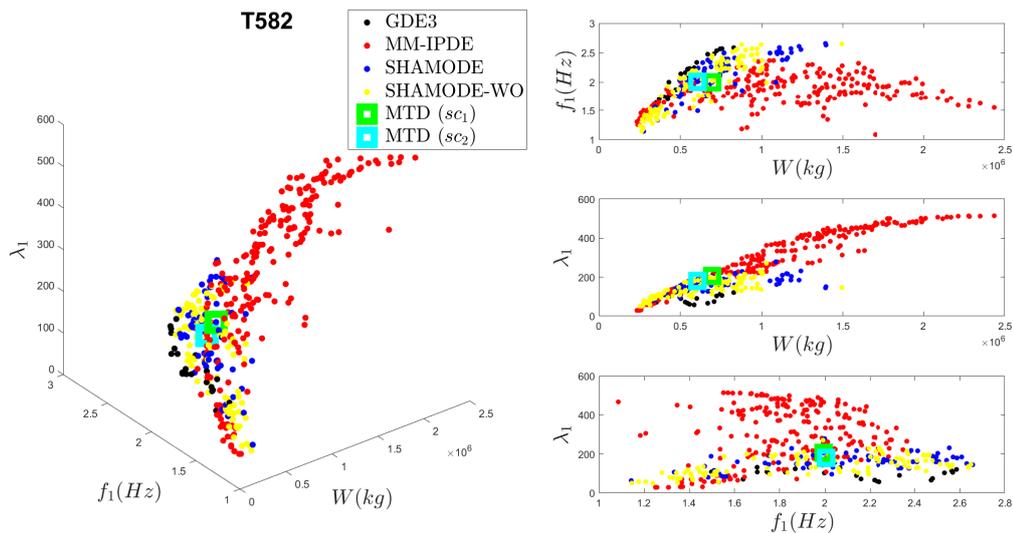
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 13 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 1 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 61.41%, 20.44%, 12.57%, 5.58% ·HV: 0.9945, 0.8897, 0.9861, 0.9660
 ·MTD (sc_1) = 24565.22 kg, 6.07 Hz, 8.73 (GDE3) ·MTD (sc_2) = 20755.41 kg, 5.73 Hz, 7.07 (GDE3)



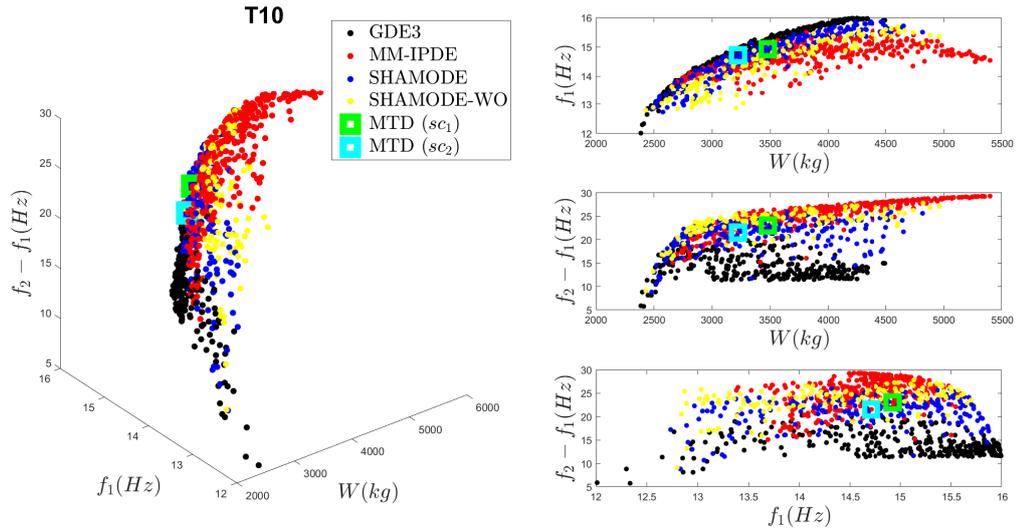
(b) ·Porcentagem: 5.16%, 53.29%, 16.90%, 24.65% ·HV: 0.3061, 0.8995, 0.6464, 0.6287
 ·MTD (sc_1) = 6.95e+05 kg, 1.99 Hz, 205.38 (SHAMODE) ·MTD (sc_2) = 6.07e+05 kg, 2.01 Hz, 179.66 (MM-IPDE)



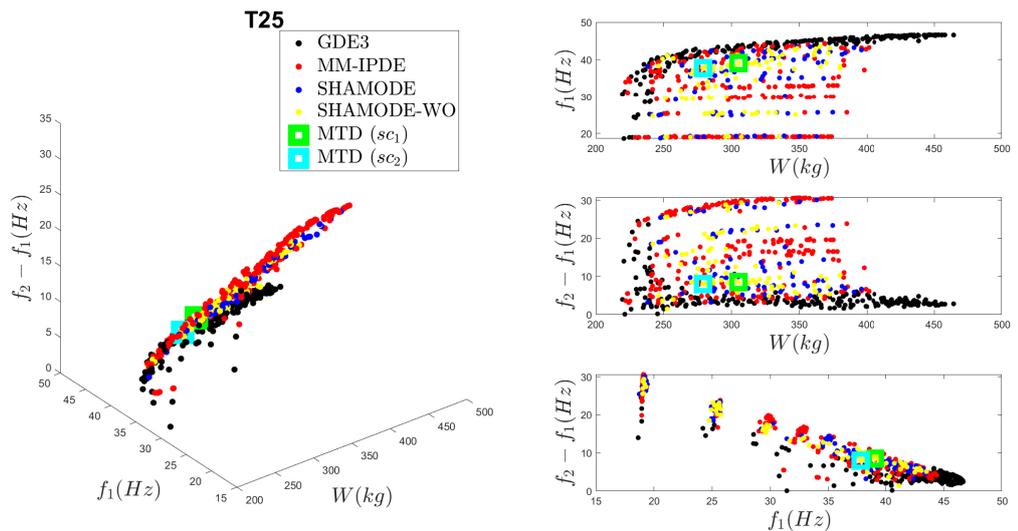
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 14 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 30.38%, 36.75%, 20.32%, 12.55% ·HV: 0.6935, 0.9227, 0.9087, 0.8992
 ·MTD (sc_1) = 3478.54 kg, 14.93 Hz, 23.04 Hz (MM-IPDE) ·MTD (sc_2) = 3223.67 kg, 14.71 Hz, 21.57 Hz (MM-IPDE)



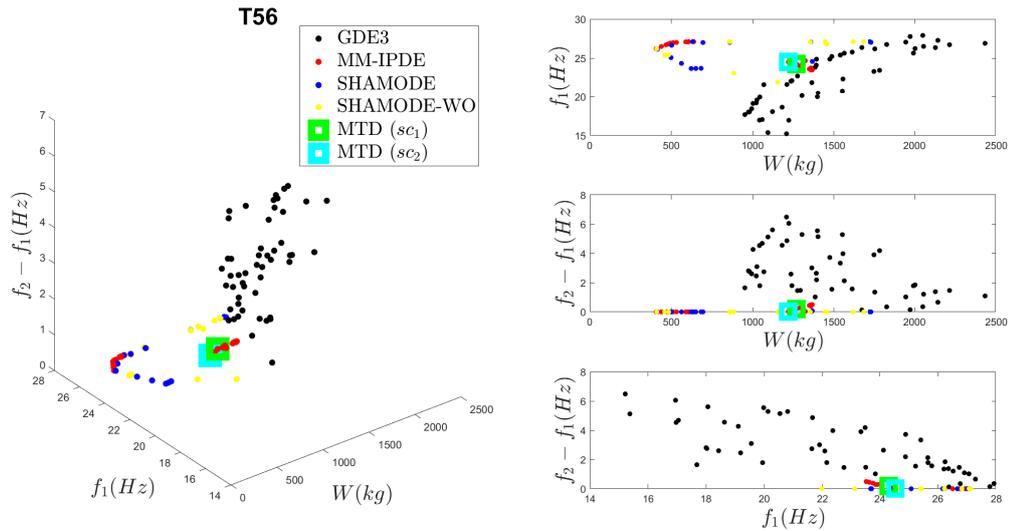
(b) ·Porcentagem: 35.31%, 37.46%, 13.86%, 13.37% ·HV: 0.7390, 0.9506, 0.8515, 0.8479
 ·MTD (sc_1) = 305.26 kg, 39.06 Hz, 8.45 Hz (SHAMODE-WO) ·MTD (sc_2) = 279.04 kg, 37.78 Hz, 8.03 Hz (SHAMODE-WO)



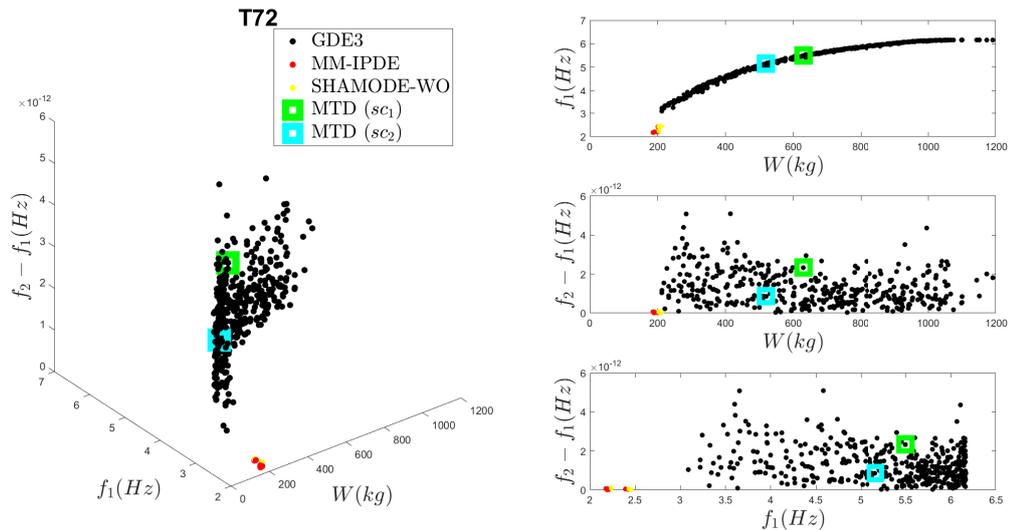
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 15 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 46.73%, 27.11%, 13.08%, 13.08% ·HV: 0.9993, 0.0765, 0.0101, 0.0139
 ·MTD (sc_1) = 1268.01 kg, 24.31 Hz, 0.20 Hz (MM-IPDE) ·MTD (sc_2) = 1219.11 kg, 24.53 Hz, 0.02 Hz (MM-IPDE)



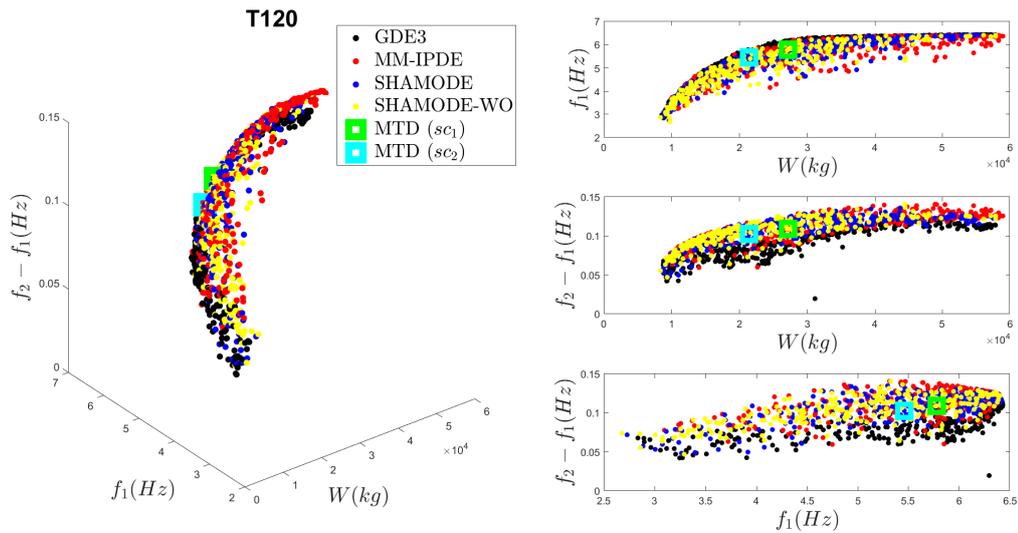
(b) ·Porcentagem: 96.13%, 3.19%, 0%, 0.68% ·HV: $\cong 1$, 7.7357e-04, 0, 0.0010
 ·MTD (sc_1) = 629.24 kg, 5.50 Hz, 2.33e-12 Hz (GDE3) ·MTD (sc_2) = 519.83 kg, 5.16 Hz, 8.54e-13 Hz (GDE3)



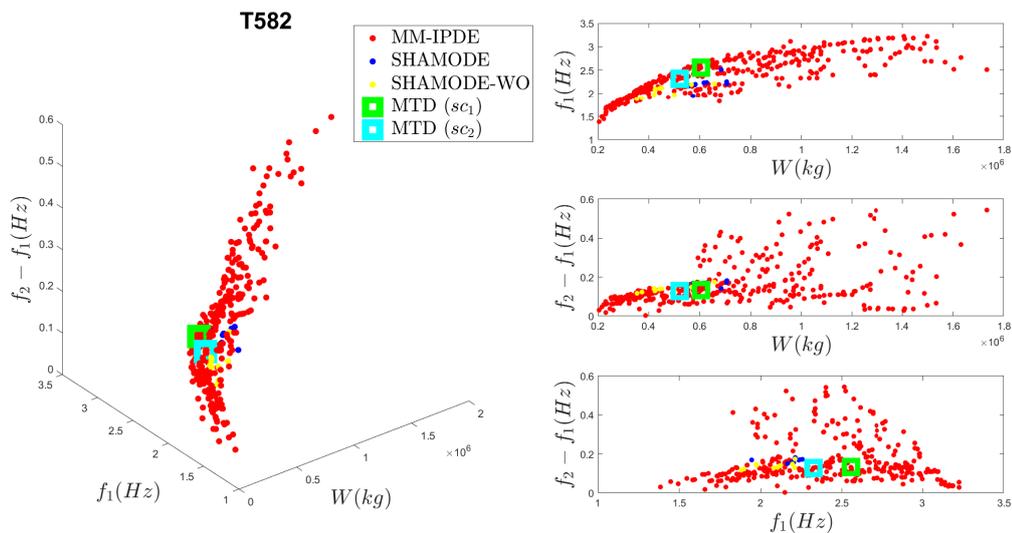
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 16 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 2 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 28.35%, 29.33%, 21.24%, 21.08% ·HV: 0.8237, 0.9790, 0.9488, 0.9675
 ·MTD (sc_1) = 27135.74 kg, 5.78 Hz, 0.11 Hz (SHAMODE-WO) ·MTD (sc_2) = 21424.29 kg, 5.46 Hz, 0.10 Hz (SHAMODE)



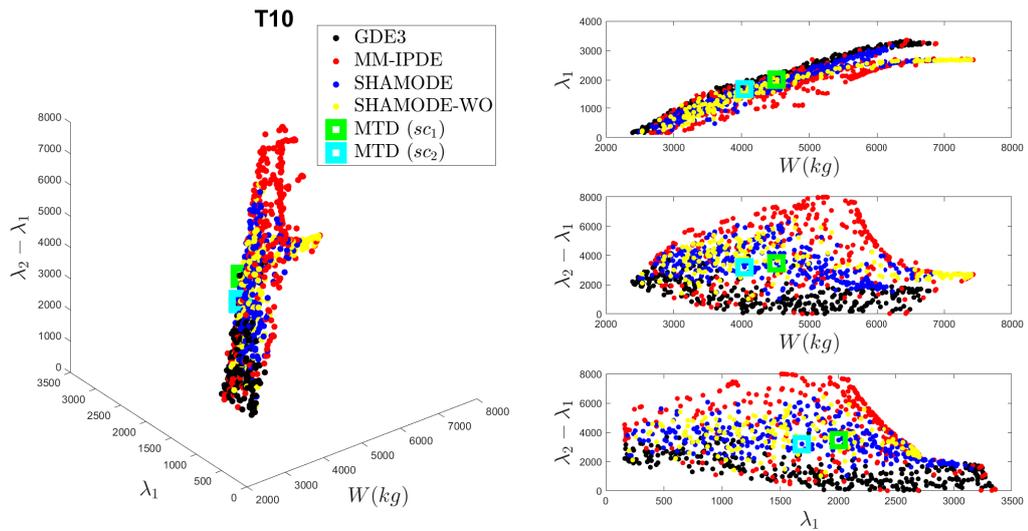
(b) ·Porcentagem: 0%, 94.24%, 2.59%, 3.17% ·HV: 0, 0.9996, 0.2836, 0.2382
 ·MTD (sc_1) = 6.05e+05 kg, 2.55 Hz, 0.13 Hz (MM-IPDE) ·MTD (sc_2) = 5.22e+05 kg, 2.32 Hz, 0.13 Hz (MM-IPDE)



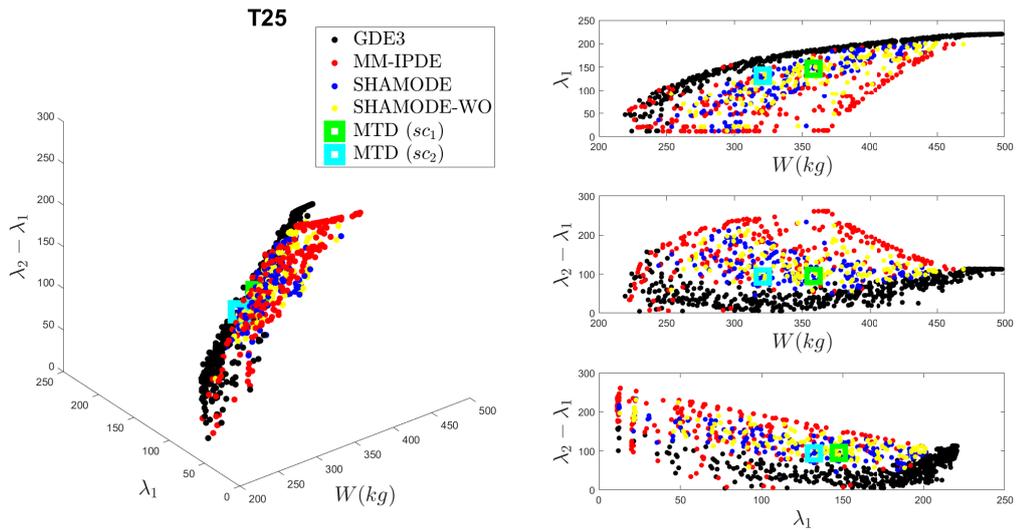
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 17 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 10 e 25 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 29.20%, 29.29%, 26.50%, 15.01% ·HV: 0.5431, 0.9705, 0.8096, 0.7798
 ·MTD (sc_1) = 4515.40 kg, 2002.35, 3470.28 (SHAMODE) ·MTD (sc_2) = 4044.25 kg, 1685.99, 3204.74 (SHAMODE)



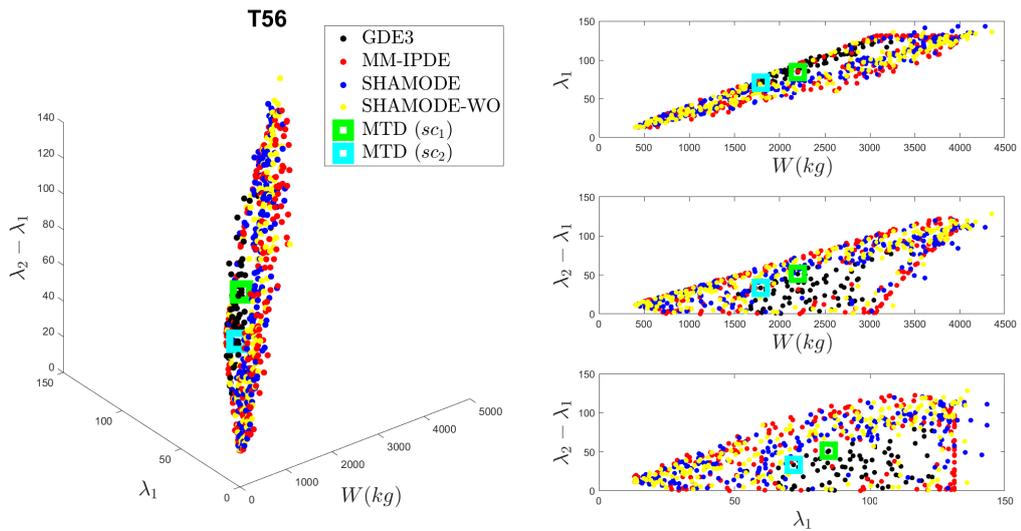
(b) ·Porcentagem: 48.18%, 23.64%, 15.25%, 12.92% ·HV: 0.6239, 0.9322, 0.7909, 0.8199
 ·MTD (sc_1) = 358.19 kg, 147.55, 95.57 (SHAMODE) ·MTD (sc_2) = 320.93 kg, 132.01, 93.90 (SHAMODE)



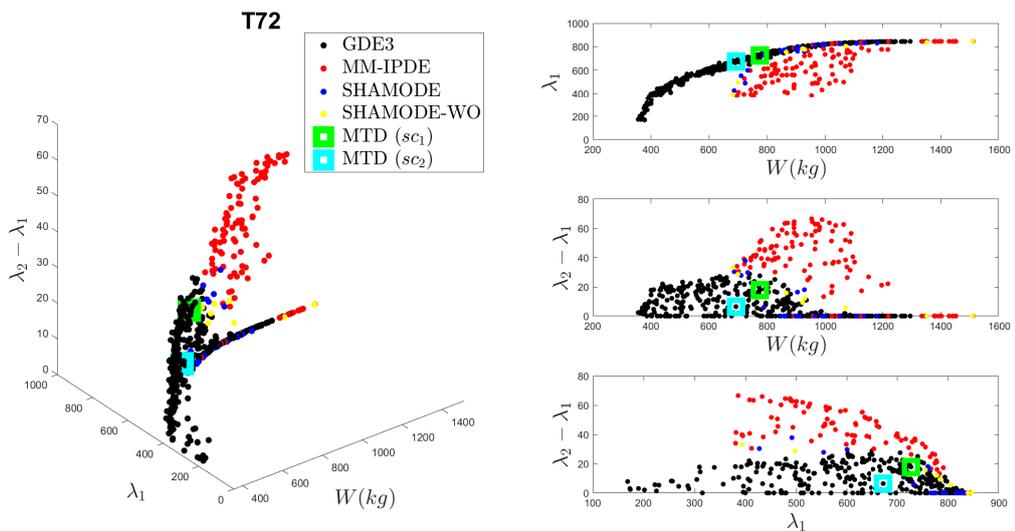
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 18 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 56 e 72 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 11.39%, 29.84%, 30.73%, 28.04% ·HV: 0.6448, 0.9167, 0.9192, 0.8969
 ·MTD (sc_1) = 2199.26 kg, 84.76, 51.15 (GDE3) ·MTD (sc_2) = 1789.23 kg, 71.76, 33.29 (GDE3)



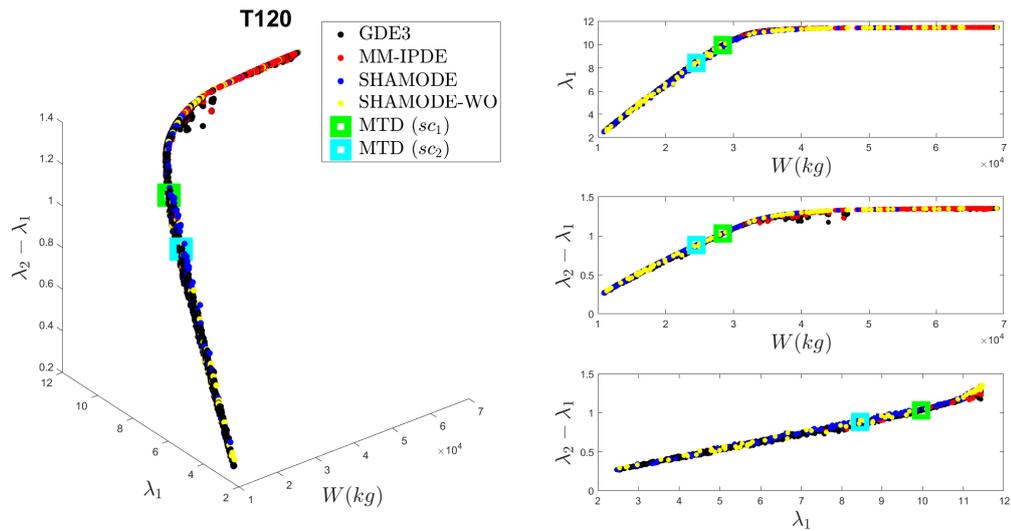
(b) ·Porcentagem: 71.76%, 22.59%, 3.98%, 1.67% ·HV: 0.5614, 0.8772, 0.4923, 0.3940
 ·MTD (sc_1) = 775.04 kg, 726.98, 17.87 (GDE3) ·MTD (sc_2) = 692.09 kg, 672.72, 6.41 (GDE3)



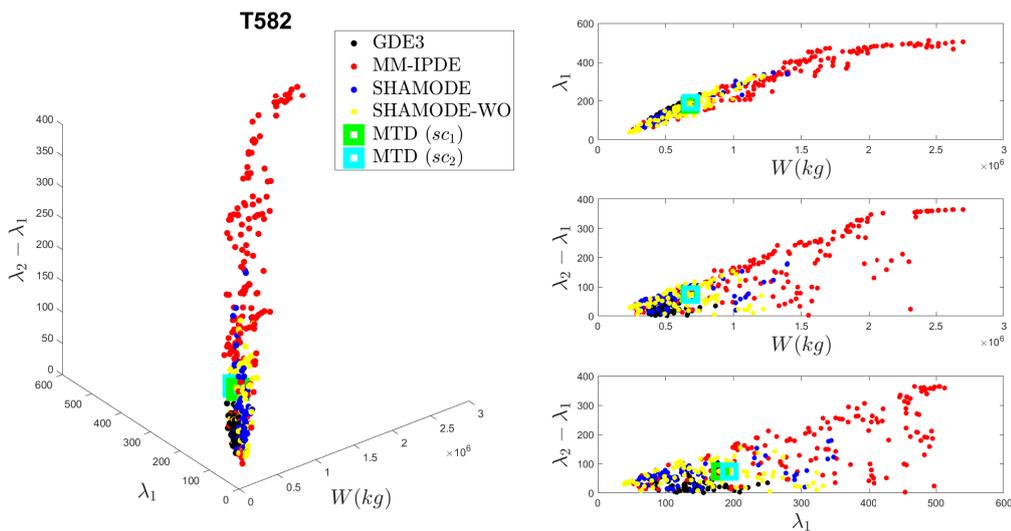
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 19 – Frentes de Pareto e soluções extraídas (MTD) na resolução do POE 3 para as treliças de 120 e 582 barras. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 71.85%, 15.23%, 7.49%, 5.43% ·HV: 0.9968, 0.9620, 0.9861, 0.9817
 ·MTD (sc_1) = 28437.43 kg, 9.96, 1.03 (GDE3) ·MTD (sc_2) = 24510.64 kg, 8.44, 0.89 (GDE3)



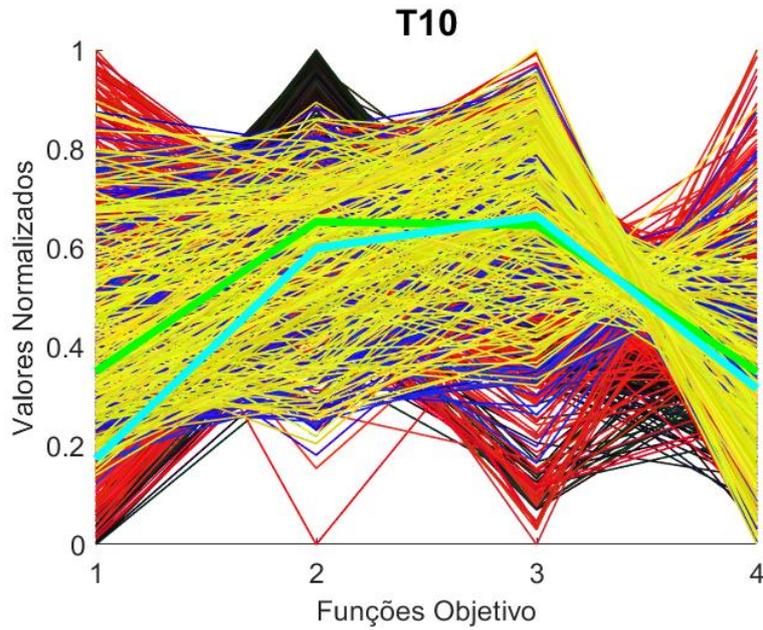
(b) ·Porcentagem: 17.53%, 39.69%, 19.58%, 23.20% ·HV: 0.1175, 0.9899, 0.4464, 0.3499
 ·MTD (sc_1) = 6.77e+05 kg, 180.38, 72.68 (SHAMODE-WO) ·MTD (sc_2) = 6.87e+05 kg, 193.88, 73.74 (SHAMODE)



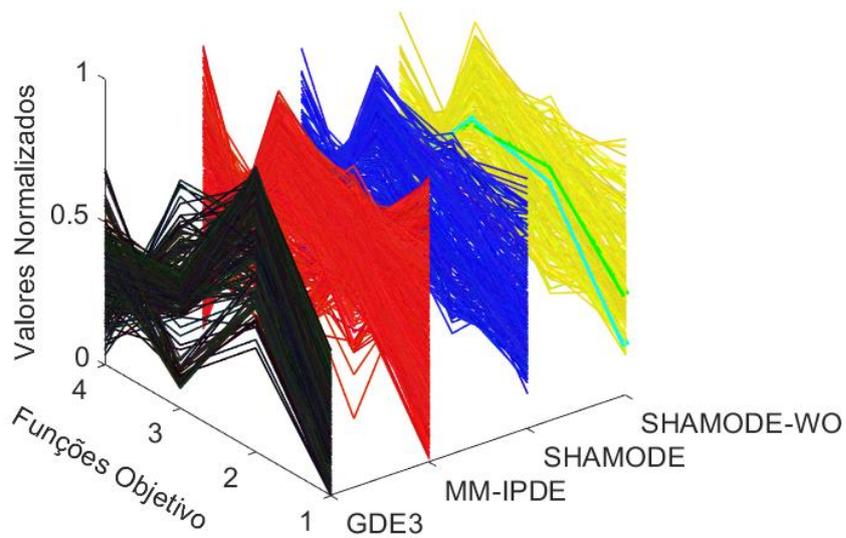
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 20 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 18.78%, 43.38%, 18.96%, 18.88% ·HV: 0.6417, 0.8913, 0.7409, 0.7503
 ·MTD (sc_1) = 3938.95 kg, 13.62 Hz, 19.70 Hz, 8.37 Hz (SHAMODE-WO)
 ·MTD (sc_2) = 3177.36 kg, 13.27 Hz, 20.15 Hz, 7.58 Hz (SHAMODE-WO)



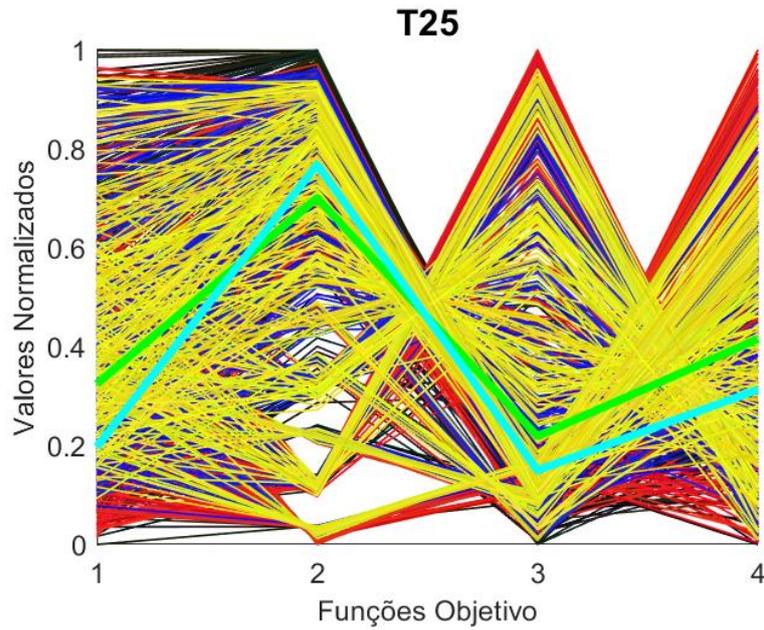
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



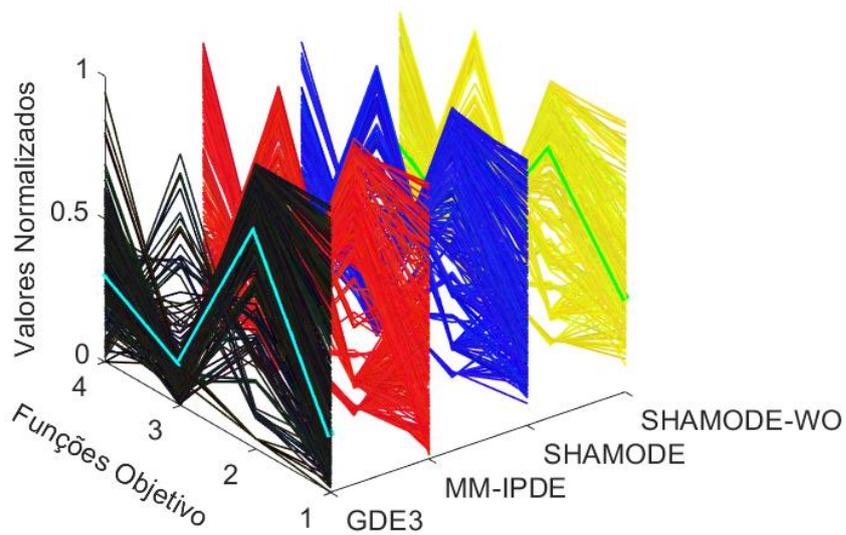
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 21 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 23.82%, 28.36%, 25.02%, 22.80% ·HV: 0.7404, 0.8035, 0.7693, 0.8355
 ·MTD (sc_1) = 298.59 kg, 37.13 Hz, 6.70 Hz, 10.42 Hz (SHAMODE-WO)
 ·MTD (sc_2) = 266.81 kg, 39.27 Hz, 4.59 Hz, 7.86 Hz (GDE3)



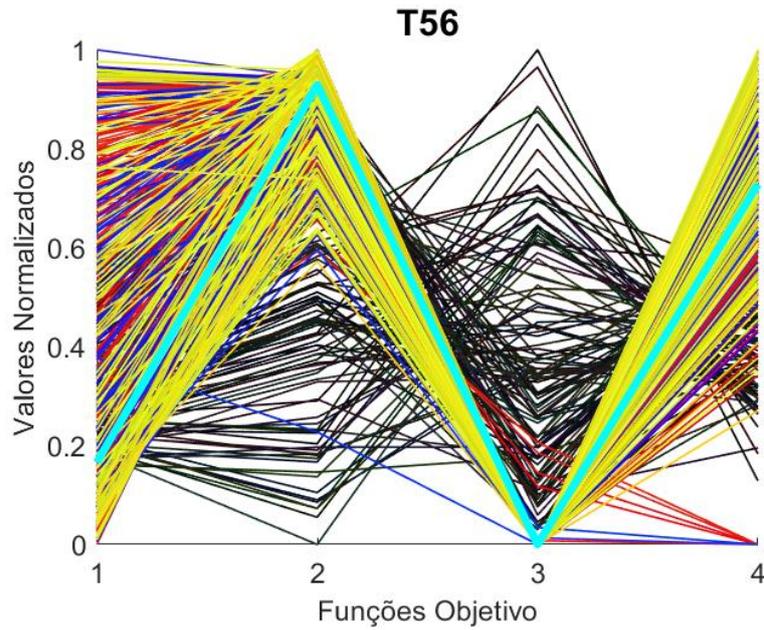
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



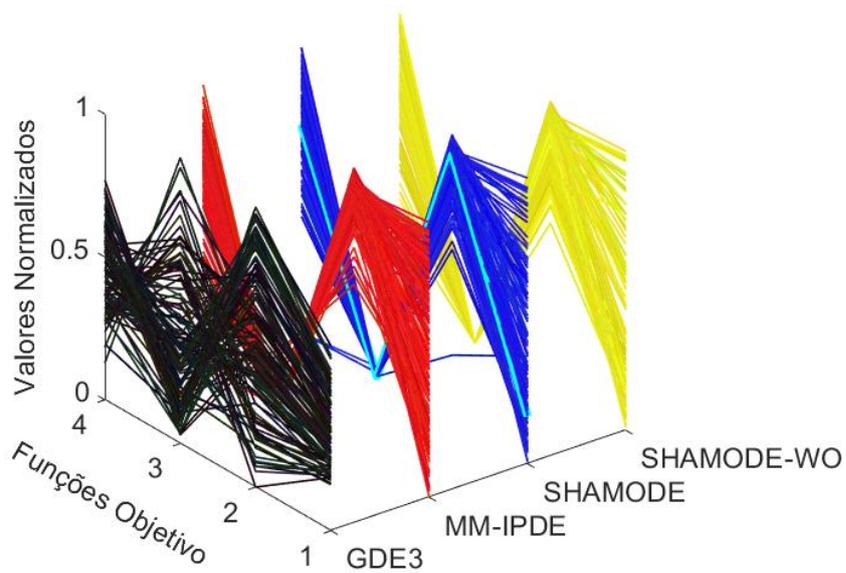
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 22 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 22.90%, 30.53%, 24.65%, 21.92% ·HV: $\cong 1, 6.2527e-13, 9.6716e-13, 8.5918e-13$
 ·MTD (sc_1) = 1039.89 kg, 26.20 Hz, 5.36e-13 Hz, 10.31 Hz (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 1039.89 kg, 26.20 Hz, 5.36e-13 Hz, 10.31 Hz (SHAMODE)



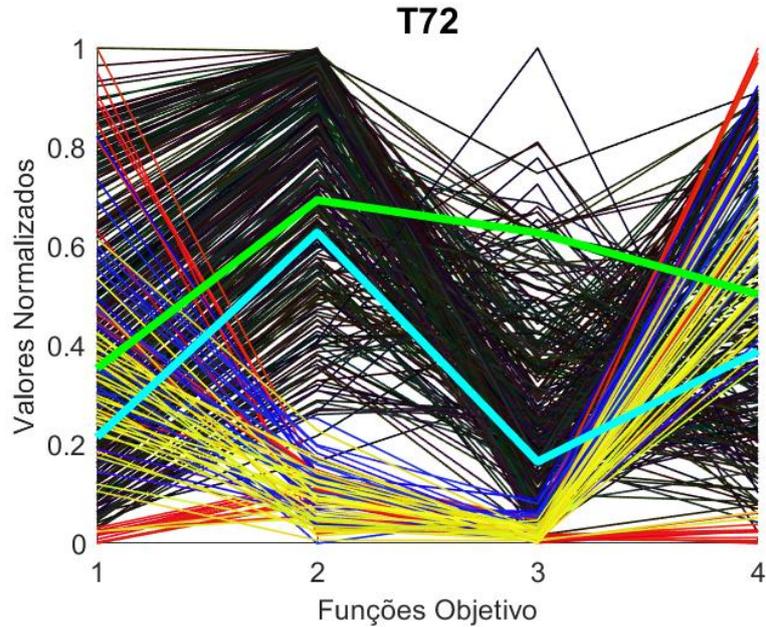
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



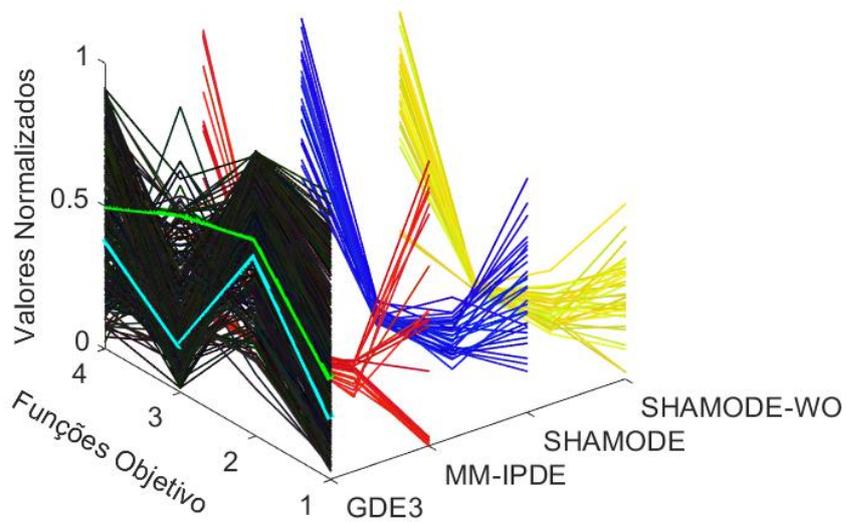
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 23 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 74.68%, 9.72%, 7.42%, 8.18% ·HV: 0.9996, 0.0048, 0.0210, 0.0087
 ·MTD (sc_1) = 612.96 kg, 4.87 Hz, 3.07e-12 Hz, 2.74 Hz (GDE3)
 ·MTD (sc_2) = 449.74 kg, 4.60 Hz, 8.11e-13 Hz, 2.23 Hz (GDE3)



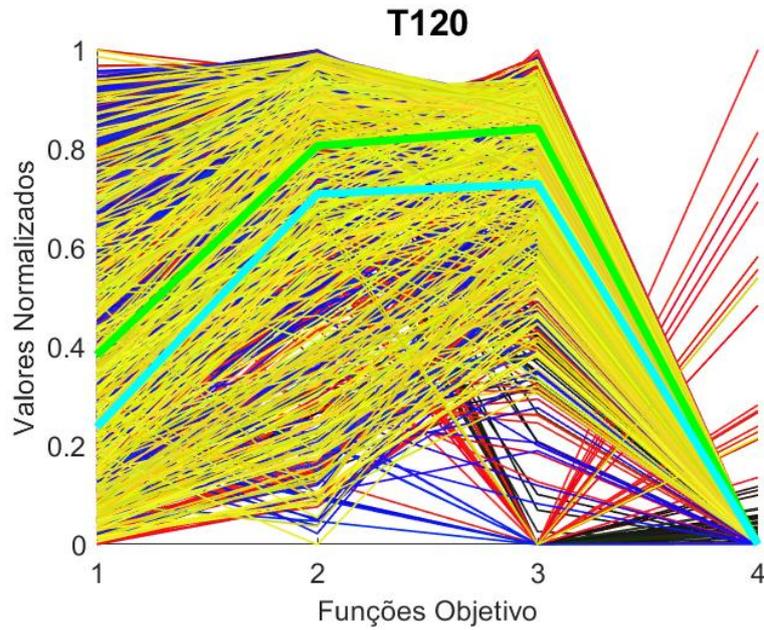
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



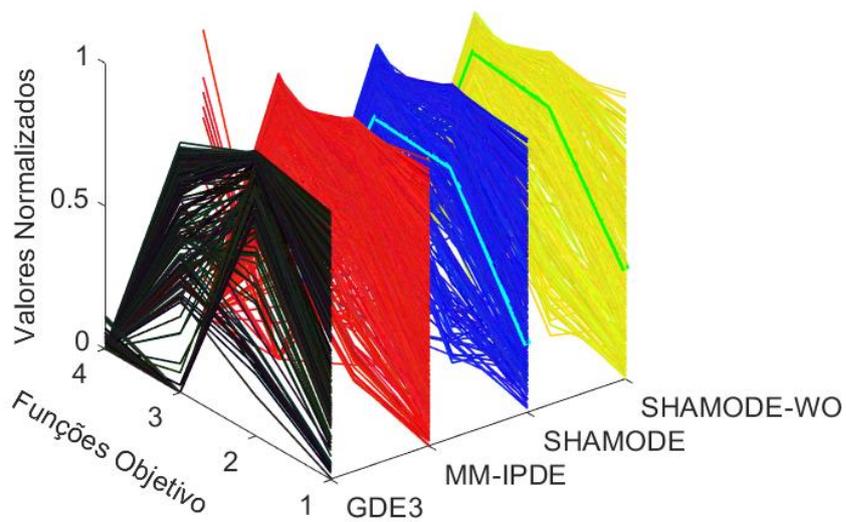
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 24 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 18.46%, 32.17%, 25.23%, 24.14% ·HV: 0.1360, 0.9547, 0.1471, 0.3267
 ·MTD (sc_1) = 28470.47 kg, 5.64 Hz, 0.12 Hz, 4.71e-13 Hz (SHAMODE-WO)
 ·MTD (sc_2) = 20748.56 kg, 5.25 Hz, 0.10 Hz, 5.29e-13 Hz (SHAMODE)



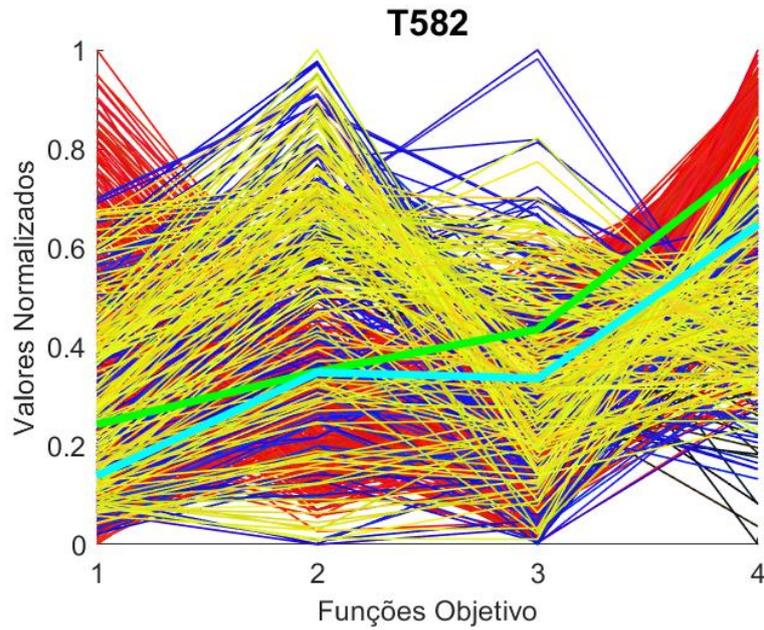
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



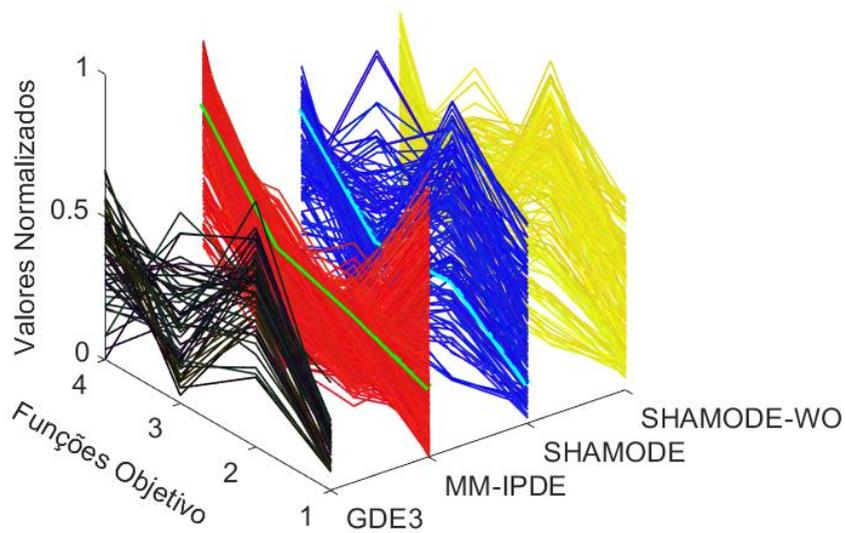
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 25 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 4 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 6.88%, 54.23%, 18.78%, 20.11% ·HV: 0.4885, 0.5821, 0.8370, 0.7501
 ·MTD (sc_1) = 7.02e+05 kg, 1.43 Hz, 0.08 Hz, 2.95 Hz (MM-IPDE)
 ·MTD (sc_2) = 4.96e+05 kg, 1.42 Hz, 0.06 Hz, 2.46 Hz (SHAMODE)



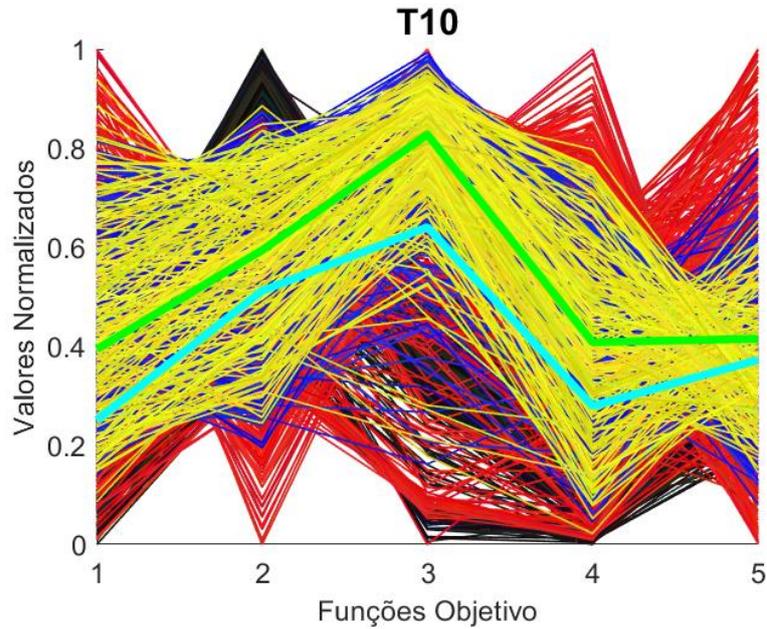
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



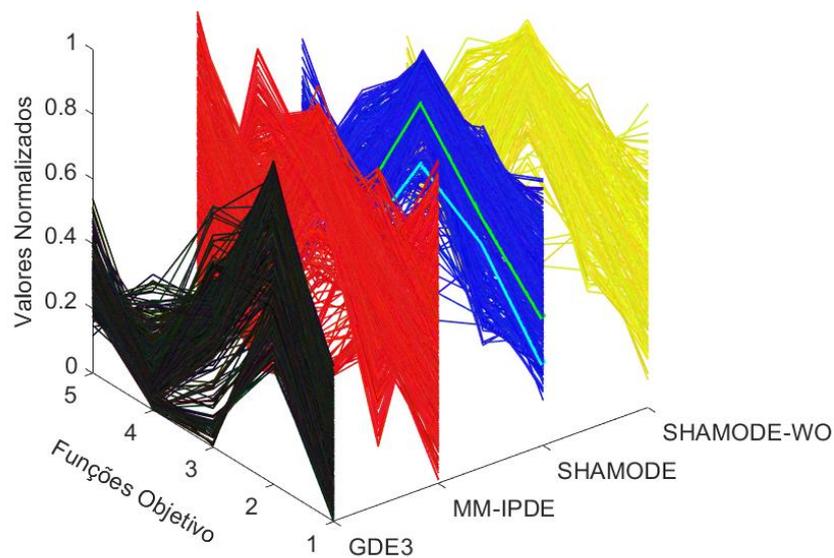
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 26 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 20.81%, 37.97%, 26.35%, 14.87% ·HV: 0.2743, 0.9101, 0.7474, 0.6670
 ·MTD (sc_1) = 4378.23 kg, 13.29 Hz, 24.12 Hz, 1437.87, 3322.20 (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 3660.65 kg, 12.75 Hz, 19.64 Hz, 1032.25, 2981.78 (SHAMODE)



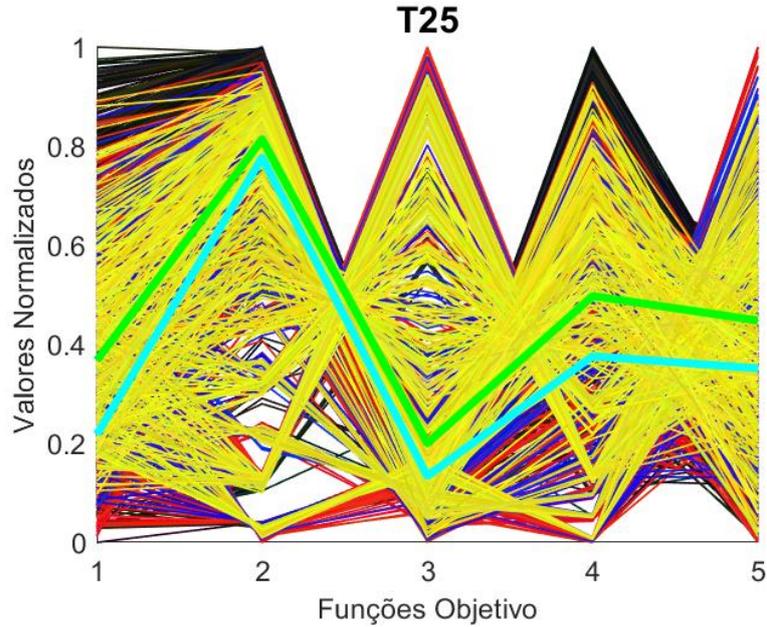
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



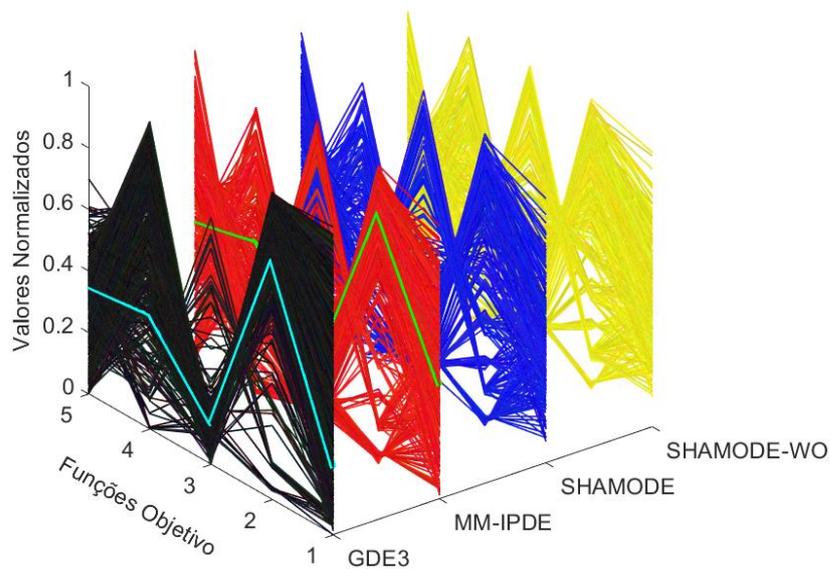
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 27 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 33.65%, 24.58%, 19.23%, 22.54% ·HV: 0.4912, 0.8954, 0.7415, 0.8145
 ·MTD (sc_1) = 318.33 kg, 40.70 Hz, 6.14 Hz, 114.72, 119.76 (MM-IPDE)
 ·MTD (sc_2) = 278.12 kg, 39.53 Hz, 4.11 Hz, 89.42, 94.98 (GDE3)



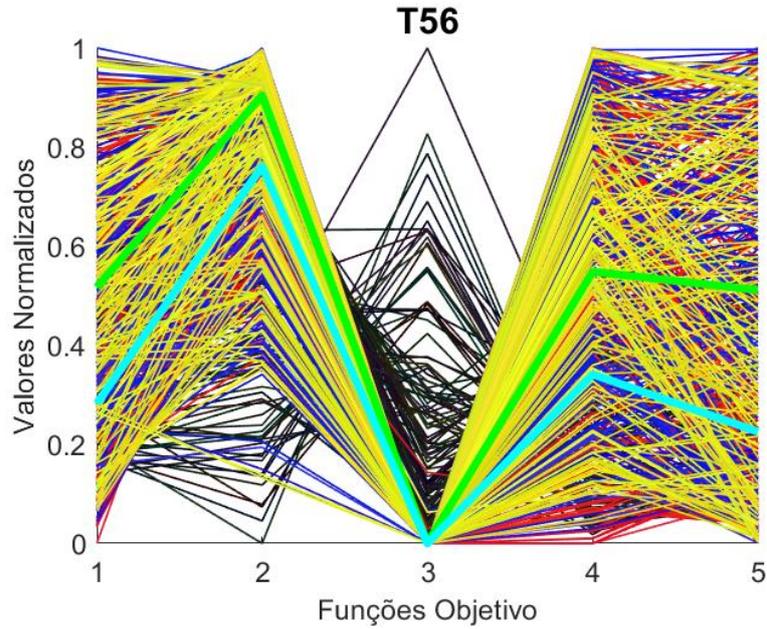
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



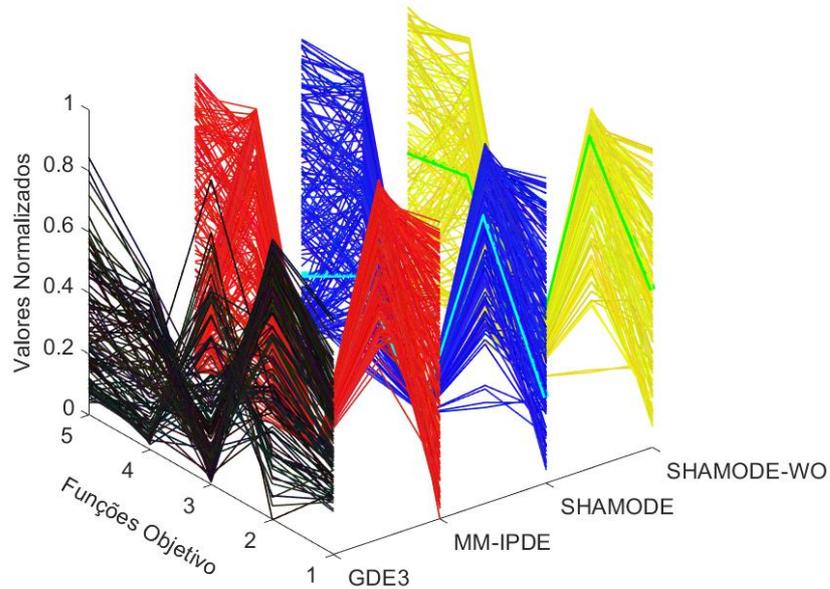
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 28 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 17.72%, 30.03%, 27.33%, 24.92% ·HV: 0.9995, 0.0175, 0.0132, 0.0089
 ·MTD (sc_1) = 2352.41 kg, 26.00 Hz, 6.29e-13 Hz, 77.99, 62.57 (SHAMODE-WO)
 ·MTD (sc_2) = 1469.10 kg, 24.34 Hz, 8.63e-13 Hz, 53.49, 27.74 (SHAMODE)



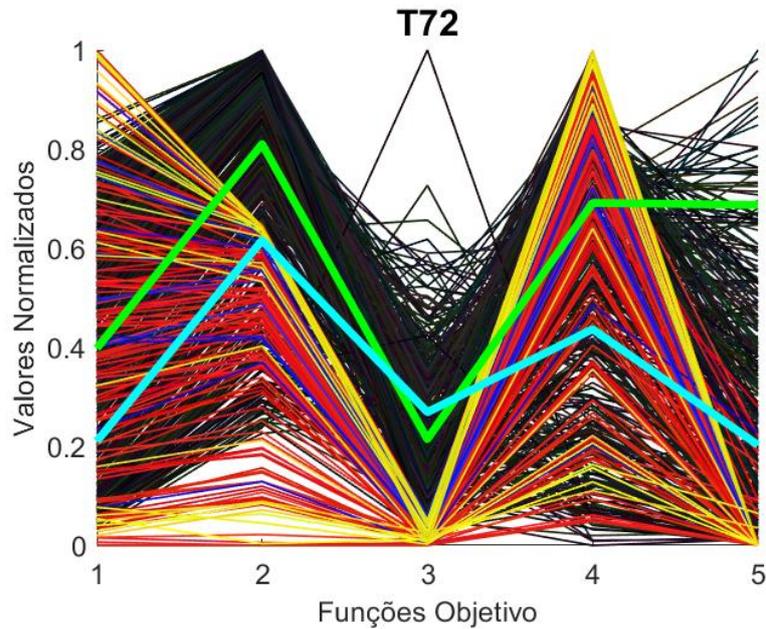
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



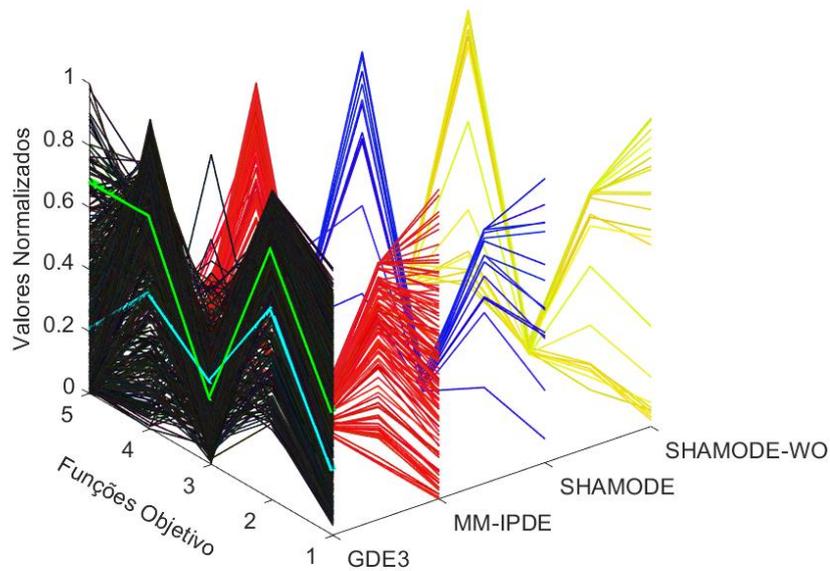
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 29 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 74.96%, 19.24%, 2.14%, 3.66% ·HV: $\cong 1, 0.0061, 9.57e-04, 5.49e-05$
 ·MTD (sc_1) = 719.90 kg, 5.39 Hz, 1.37e-12 Hz, 608.90, 27.24 (GDE3)
 ·MTD (sc_2) = 473.77 kg, 4.59 Hz, 1.72e-12 Hz, 412.89, 8.03 (GDE3)



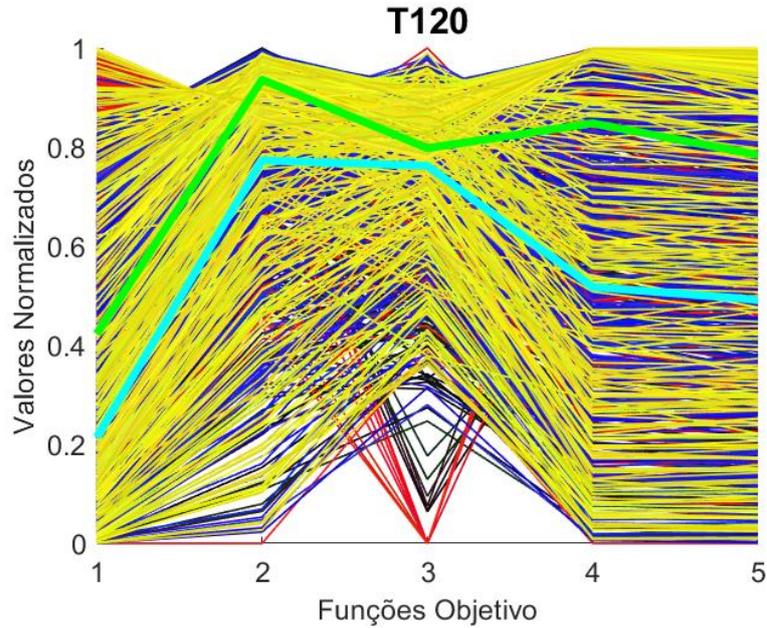
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



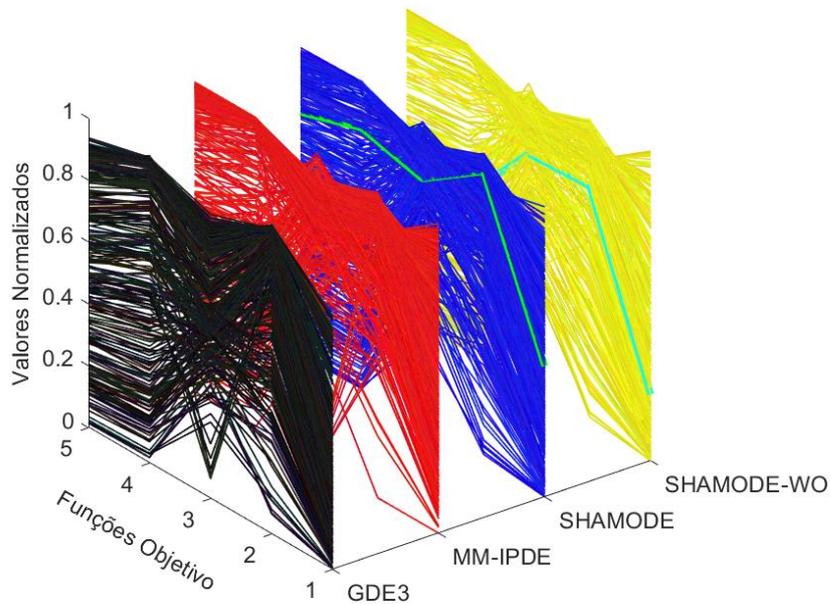
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 30 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 22.84%, 32.96%, 24.83%, 19.37% ·HV: 0.8823, 0.9700, 0.9354, 0.9270
 ·MTD (sc_1) = 33749.55 kg, 6.15 Hz, 0.11 Hz, 9.81, 1.08 (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 21033.87 kg, 5.45 Hz, 0.10 Hz, 6.22, 0.71 (SHAMODE-WO)



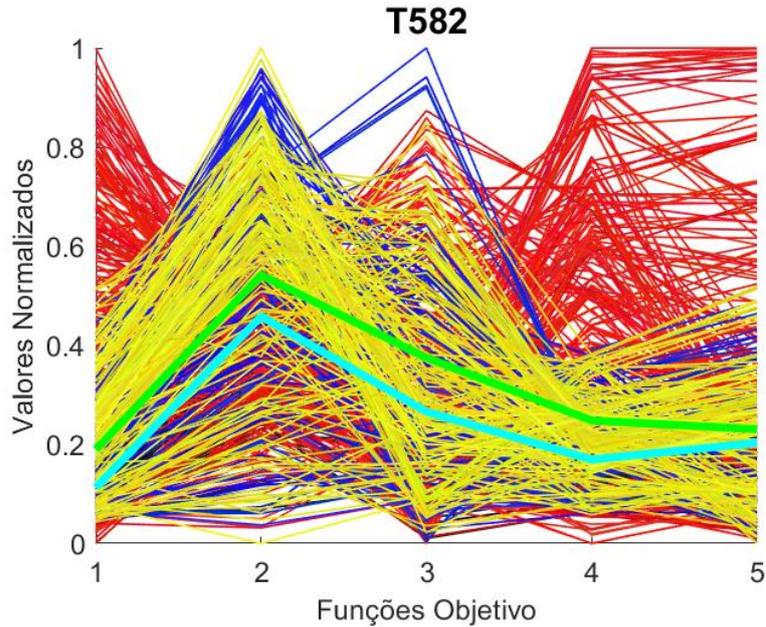
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



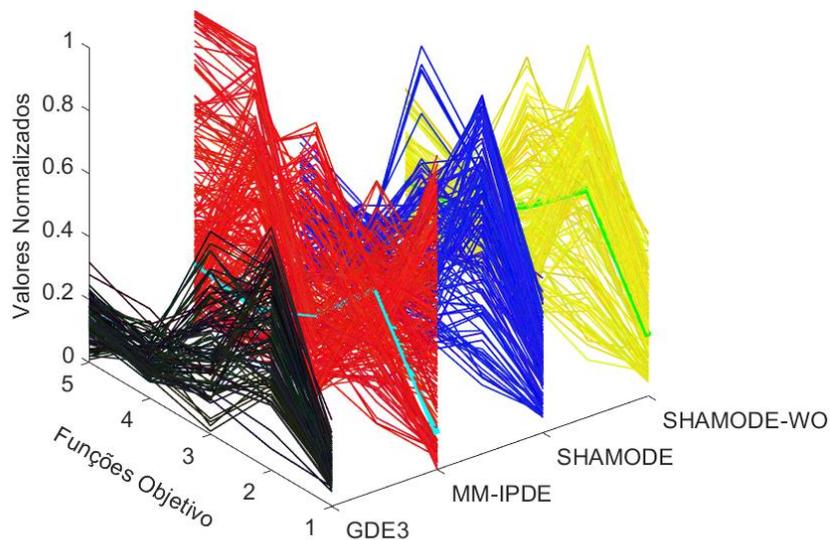
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 31 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 5 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 5: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 15.27%, 36.18%, 21.06%, 27.49% ·HV: 0.1587, 0.8152, 0.4539, 0.4587
 ·MTD (sc_1) = 7.46e+05 kg, 1.78 Hz, 0.06 Hz, 145.49, 83.19 (SHAMODE-WO)
 ·MTD (sc_2) = 5.21e+05 kg, 1.64 Hz, 0.04 Hz, 107.61, 73.50 (MM-IPDE)



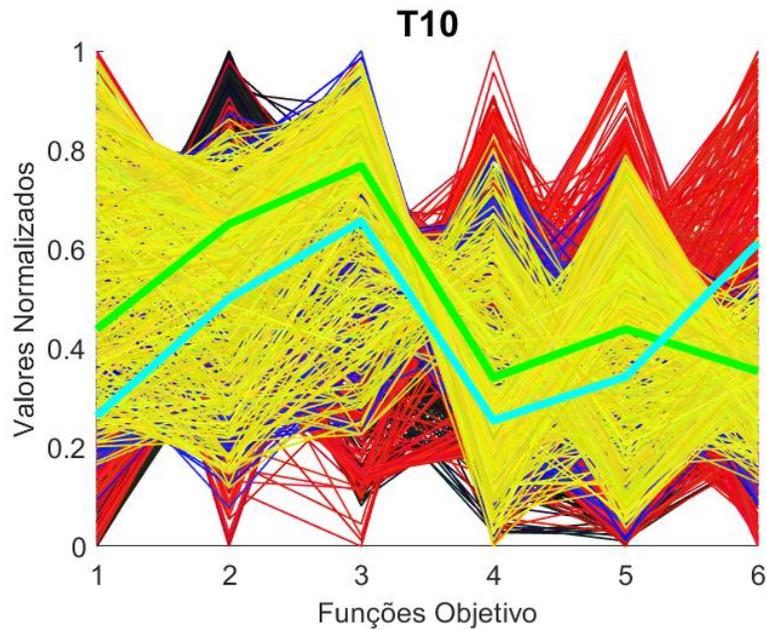
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



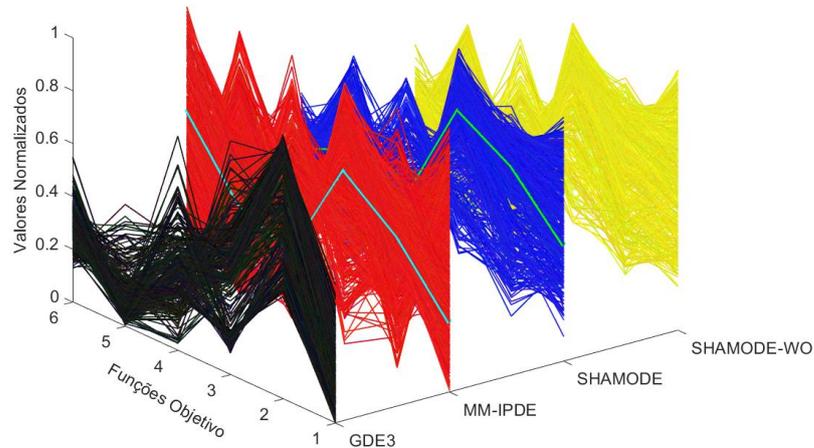
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 32 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 10 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 13.03%, 38.28%, 25.48%, 23.21% ·HV: 0.2828, 0.9145, 0.5412, 0.4820
 ·MTD (sc_1) = 4639.62 kg, 13.44 Hz, 21.79 Hz, 8.07 Hz, 1546.57, 2824.25 (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 3770.79 kg, 12.39 Hz, 18.99 Hz, 6.06 Hz, 1238.16, 4892.62 (MM-IPDE)



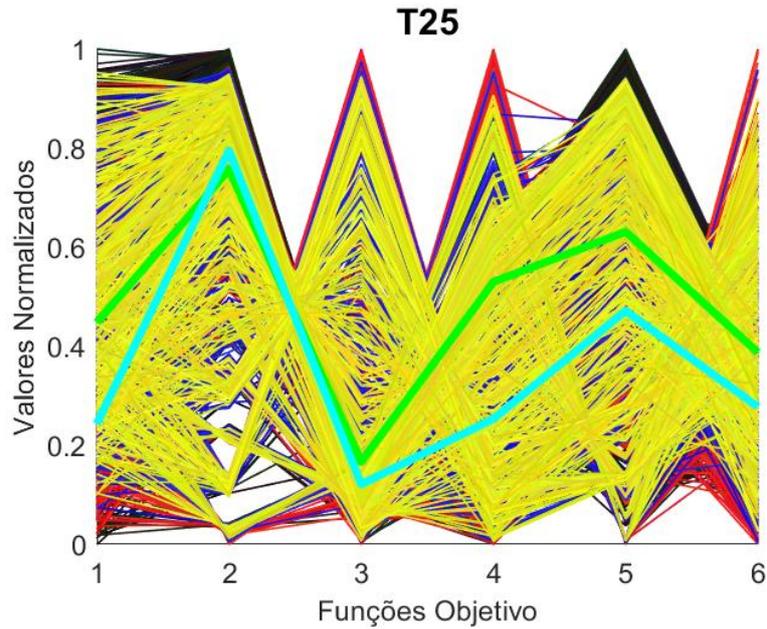
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



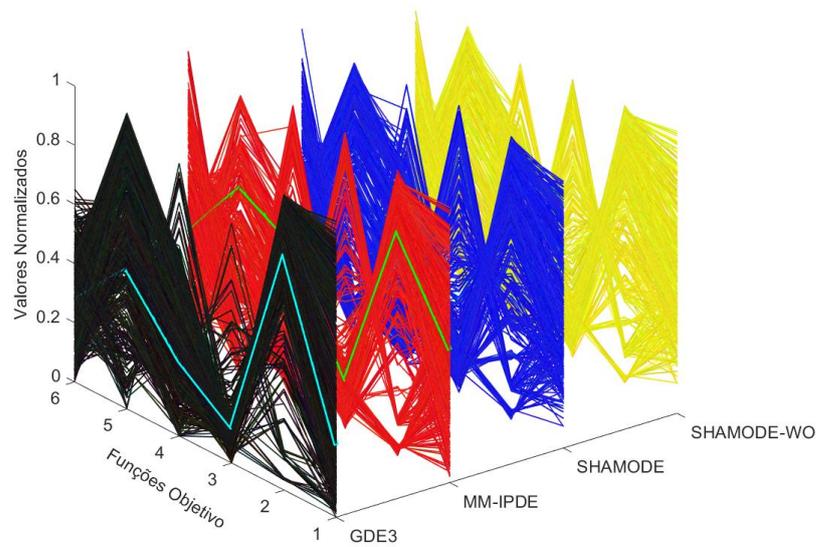
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 33 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 25 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 29.17%, 24.41%, 22.98%, 23.44% ·HV: 0.4534, 0.7481, 0.8087, 0.7997
 ·MTD (sc_1) = 338.51 kg, 38.88 Hz, 5.08 Hz, 13.24 Hz, 142.66, 103.80 (MM-IPDE)
 ·MTD (sc_2) = 283.48 kg, 40.11 Hz, 3.70 Hz, 6.34 Hz, 109.34, 75.52 (GDE3)



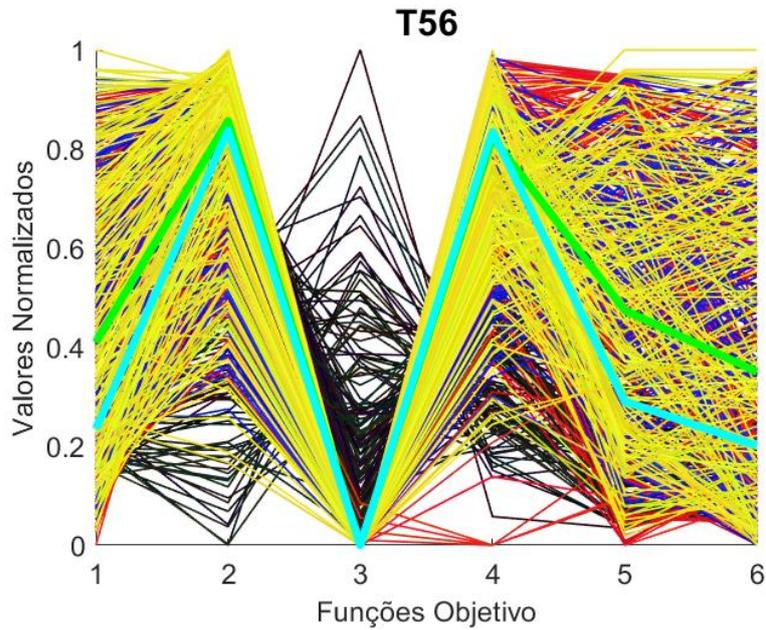
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



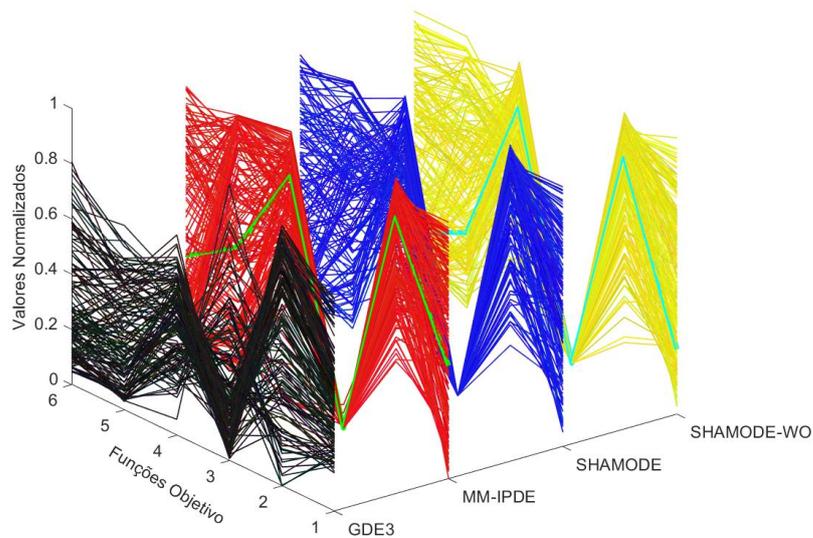
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 34 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 56 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 20.65%, 28.43%, 23.06%, 27.86% ·HV: $\cong 1, 1.23e-12, 1.10e-12, 1.14e-12$
 ·MTD (sc_1) = 2023.91 kg, 25.41 Hz, 3.73e-13 Hz, 11.62 Hz, 72.25, 44.20 (MM-IPDE)
 ·MTD (sc_2) = 1333.76 kg, 25.18 Hz, 2.84e-13 Hz, 11.78 Hz, 49.34, 25.39 (SHAMODE-WO)



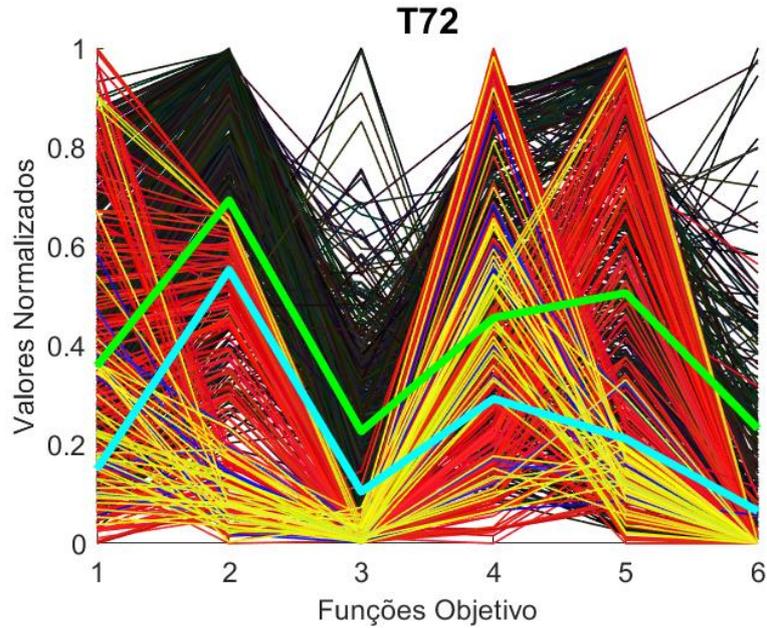
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



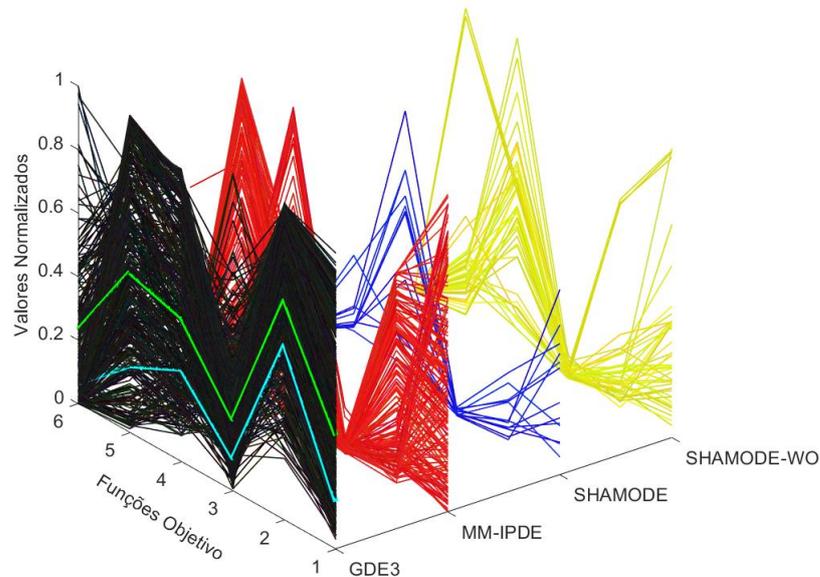
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 35 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 72 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 65.76%, 26.25%, 1.85%, 6.14% ·HV: $\cong 1, 9.63e-04, 1.53e-06, 6.70e-15$
 ·MTD (sc_1) = 671.43 kg, 4.84 Hz, 1.12e-12 Hz, 2.39 Hz, 468.26, 8.88 (GDE3)
 ·MTD (sc_2) = 399.40 kg, 4.24 Hz, 5.16e-13 Hz, 1.61 Hz, 243.42, 2.50 (GDE3)



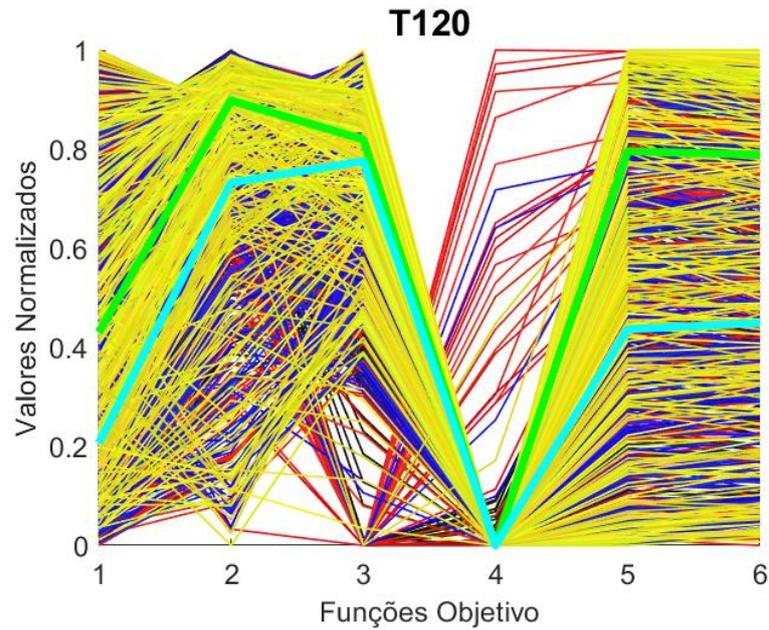
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



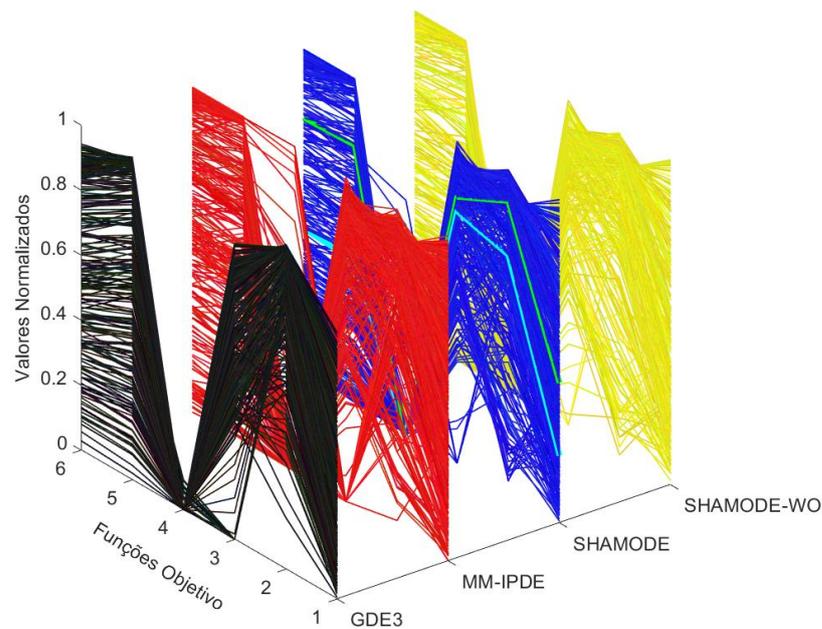
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 36 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 120 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 19.49%, 34.21%, 25.71%, 20.59% ·HV: 0.0821, 0.9278, 0.2949, 0.4148
 ·MTD (sc_1) = 34037.23 kg, 5.90 Hz, 0.11 Hz, 5.36e-13 Hz, 9.19, 1.08 (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 20340.20 kg, 5.05 Hz, 0.11 Hz, 4.01e-13 Hz, 5.20, 0.63 (SHAMODE)



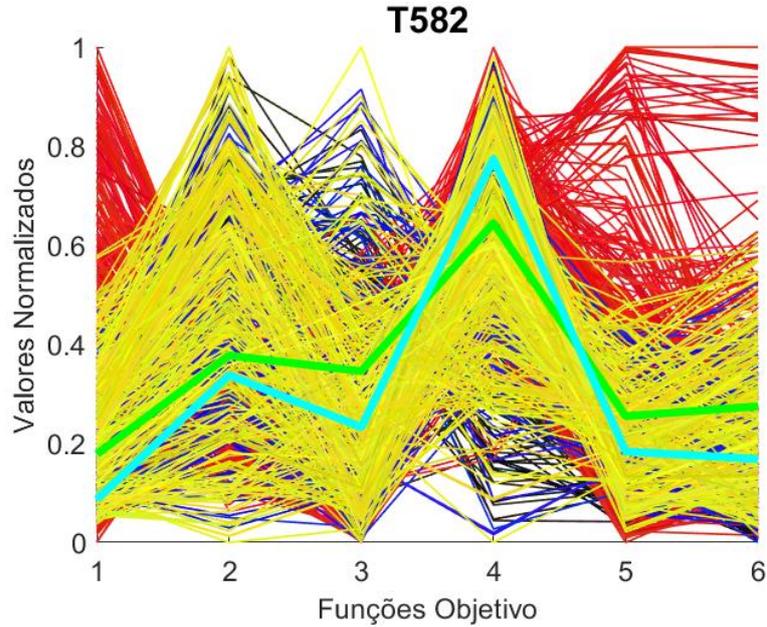
(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



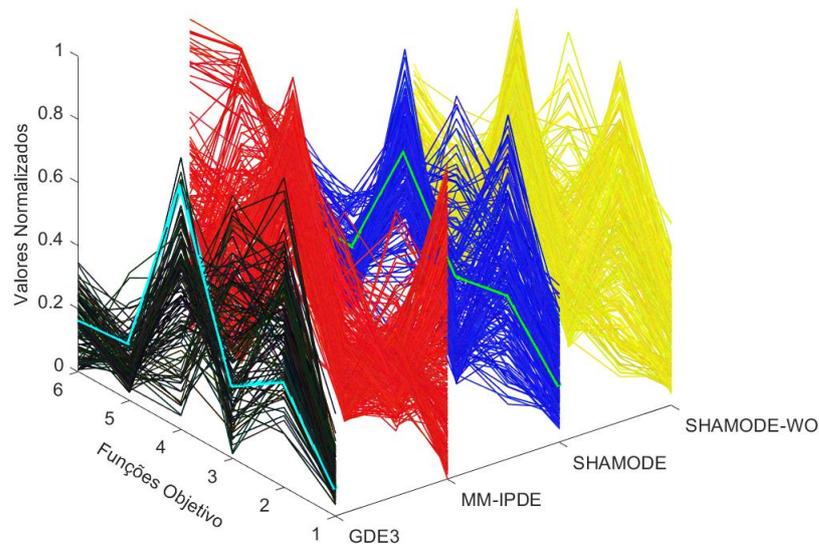
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 37 – Gráficos de coordenadas paralelas normalizadas do POE 6 para a treliça de 582 barras. As funções objetivo são 1: $\min W(\mathbf{x})$, 2: $\max f_1(\mathbf{x})$, 3: $\max f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, 4: $\max f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$, 5: $\max \lambda_1(\mathbf{x})$ e 6: $\max \lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. As porcentagens de contribuição e os hipervolumes estão na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) ·Porcentagem: 12.15%, 36.24%, 23.12%, 28.49% ·HV: 0.2224, 0.5079, 0.5192, 0.7425
 ·MTD (sc_1) = 7.27e+05 kg, 1.36 Hz, 0.05 Hz, 2.04 Hz, 135.81, 76.25 (SHAMODE)
 ·MTD (sc_2) = 4.64e+05 kg, 1.28 Hz, 0.03 Hz, 2.41 Hz, 107.56, 47.05 (GDE3)



(b) Gráfico de coordenadas paralelas em três dimensões



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 3 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 1

$A_i(cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	SHAMODE	SHAMODE	GDE3	GDE3	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	GDE3	GDE3	GDE3	GDE3	SHAMODE	MM-IPDE
1	254.9347	228.6569	0.6452	0.6452	8.8487	6.9001	6.8646	4.7906	138.9825	114.7966	94.8385	110.3224
2	83.5828	147.2775	12.9032	10.9677	13.8332	11.2889	11.6861	7.7988	80.6868	63.0365	1264.5136	651.6116
3	182.8649	211.5352	14.8387	16.7742	10.2157	6.5766	5.0285	5.0209	16.5100	14.7855	227.0963	159.9997
4	44.6622	37.2910	9.0322	4.5161	-	-	0.6450	1.7610	35.9152	32.4538	589.6762	637.4181
5	248.4289	211.0575	1.2903	0.6452	-	-	25.8060	17.2931	41.0132	47.5657	136.1288	108.3869
6	24.9603	21.3736	10.9677	10.3226	-	-	12.3462	9.2430	3.7661	4.2164	226.4512	127.0965
7	162.8104	161.0413	16.7742	15.4838	-	-	2.2417	1.8306	10.2367	10.3001	176.1287	359.9993
8	202.9726	144.6831	21.9354	21.9354	-	-	1.7186	0.6450	-	-	212.2576	136.1288
9	95.7649	76.9462	-	-	-	-	25.3453	25.8060	-	-	227.0963	45.6773
10	113.8422	107.0212	-	-	-	-	10.7349	9.6145	-	-	231.6124	307.7413
11	-	-	-	-	-	-	10.0401	4.3003	-	-	257.4188	94.8385
12	-	-	-	-	-	-	0.7697	0.6803	-	-	487.7410	1148.3848
13	-	-	-	-	-	-	25.8060	25.4493	-	-	806.4500	864.5144
14	-	-	-	-	-	-	10.6806	10.4594	-	-	178.7093	250.3221
15	-	-	-	-	-	-	0.7272	0.6450	-	-	1148.3848	864.5144
16	-	-	-	-	-	-	1.1416	0.6450	-	-	159.3545	90.9676
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	864.5144	1148.3848
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	197.4190	127.0965
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.8385	62.6450
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	806.4500	537.4183
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68.3870	57.0321
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64.5160	53.2257
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	359.9993	197.4190
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53.2257	110.3224
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	118.0643	45.6773
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	183.8706	138.7094
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49.0967	90.9676
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	117.4191	66.4515
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53.2257	305.8058
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66.4515	85.1611
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87.0966	45.6773
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	101.9353	206.4512
$W(kg)$	4081.45	3826.07	318.78	302.59	2170.78	1606.44	541.82	441.43	24565.22	20755.41	694860.34	606968.40
$f_1(Hz)$	14.28	13.98	44.01	43.43	26.21	25.32	5.10	4.75	6.07	5.73	1.99	2.01
λ_1	1795.55	1598.40	155.86	144.20	74.56	59.45	486.13	337.06	8.73	7.07	205.38	179.66

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.2 VARIÁVEIS DE PROJETO DAS SOLUÇÕES MTD

Como mencionado no Capítulo 4, as variáveis de projeto dos POEs, em todas as treliças analisadas, são as áreas das seções transversais de suas barras. As Tabelas 3 a 8 constituem um compilado das soluções extraídas através do método MTD nos problemas de otimização resolvidos.

Cada Tabela está associada a um POE, apresentando as soluções MTD obtidas com os pesos de sc_1 e sc_2 na resolução do problema em cada treliça. Além dos valores das funções objetivo e do algoritmo gerador dessas soluções, apresentam-se agora os valores obtidos para as variáveis de projeto, ou seja, as áreas das seções transversais das barras. Esses dados fornecem ao projetista indicações das seções transversais das barras a serem utilizadas na execução dessas estruturas, para que as treliças possuam a configuração e as características desejadas.

Tabela 4 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 2

$A_i (cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	MM-IPDE	MM-IPDE	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	MM-IPDE	MM-IPDE	GDE3	GDE3	SHAMODE-WO	SHAMODE	MM-IPDE	MM-IPDE
1	253.0063	248.5118	1.2903	0.6452	2.0000	2.0000	21.8013	8.0311	94.6982	77.0982	113.5482	159.3545
2	73.2037	60.3126	5.1613	4.5161	7.2021	7.8457	12.7765	9.8334	33.3855	28.7609	1045.1592	589.6762
3	242.8131	251.7860	16.7742	13.5484	9.2982	8.2799	1.5562	2.2376	17.4147	21.0270	216.1286	66.4515
4	91.1876	73.1138	2.5806	1.9355	-	-	0.8654	1.1988	89.5422	75.7539	1264.5136	703.2244
5	32.9849	24.4368	0.6452	0.6452	-	-	25.6873	23.3527	66.5219	45.6710	149.6771	113.5482
6	21.2437	19.3591	12.2580	8.3871	-	-	15.0645	14.0083	13.3076	27.3901	210.9673	90.9676
7	169.2534	126.8533	18.0645	19.3548	-	-	1.5149	0.8557	28.4242	8.3135	399.9992	754.8372
8	169.4352	178.5181	20.6451	20.6451	-	-	0.6450	2.7538	-	-	138.7094	156.7739
9	80.8418	82.7307	-	-	-	-	25.6616	25.8060	-	-	167.0964	45.6773
10	71.5657	56.1042	-	-	-	-	15.3390	10.7066	-	-	528.3860	441.9346
11	-	-	-	-	-	-	0.6450	0.6450	-	-	76.1289	104.5159
12	-	-	-	-	-	-	4.8610	0.6450	-	-	1148.3848	1387.0940
13	-	-	-	-	-	-	25.8060	25.8060	-	-	637.4181	478.0636
14	-	-	-	-	-	-	16.0089	13.5557	-	-	156.7739	94.8385
15	-	-	-	-	-	-	0.6450	0.9252	-	-	703.2244	703.2244
16	-	-	-	-	-	-	0.6450	1.3271	-	-	117.4191	278.7091
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	322.5800	337.4187
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90.9676	53.2257
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	193.5480	276.7736
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53.2257	56.7096
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53.2257	45.6773
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81.2902	92.9030
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41.8709	56.7096
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	45.6773
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	41.8709
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41.8709	41.8709
$W(kg)$	3478.54	3223.67	305.26	279.04	1268.01	1219.11	629.24	519.83	27135.74	21424.29	604663.55	522118.68
$f_1(Hz)$	14.93	14.71	39.06	37.78	24.31	24.53	5.50	5.16	5.78	5.46	2.55	2.52
$f_2 - f_1(Hz)$	23.04	21.57	8.45	8.03	0.20	0.02	2.33e-12	8.54e-13	0.11	0.10	0.13	0.13

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 5 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 3

$A_i (cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	SHAMODE	SHAMODE	SHAMODE	SHAMODE	GDE3	GDE3	GDE3	GDE3	GDE3	GDE3	SHAMODE-WO	SHAMODE
1	250.6082	222.4096	10.9677	1.2903	12.7528	8.5831	11.9794	10.5380	140.0000	118.0783	115.4836	129.0320
2	122.3901	120.4552	16.7742	6.4516	14.6580	8.5872	24.0854	19.5629	109.9007	90.7069	145.8062	145.8062
3	170.6703	168.1981	14.1935	18.0645	6.9361	9.9176	4.3944	4.1094	13.2731	17.0710	167.0964	206.4512
4	175.2470	175.1510	11.6129	20.6451	-	-	0.8373	5.4116	37.8413	39.3414	589.6762	589.6762
5	257.4708	206.1407	0.6452	3.2258	-	-	25.8060	21.6767	48.0557	45.3754	170.9674	189.677
6	67.8599	67.1125	19.3548	13.5484	-	-	20.8023	14.8184	5.4574	2.6557	193.5480	276.7736
7	69.4577	70.8914	13.5484	14.8387	-	-	8.2581	6.9159	8.3438	7.7602	578.0634	578.0634
8	230.6874	216.7503	18.0645	19.3548	-	-	4.0171	7.0046	-	-	178.7093	178.7093
9	11.5197	21.0560	-	-	-	-	25.8060	25.8060	-	-	155.4836	109.6772
10	243.1872	171.1623	-	-	-	-	15.9257	12.7244	-	-	140.6449	140.6449
11	-	-	-	-	-	-	6.1952	6.4520	-	-	123.2256	123.2256
12	-	-	-	-	-	-	1.2716	2.9203	-	-	637.4181	637.4181
13	-	-	-	-	-	-	25.5649	25.6893	-	-	637.4181	637.4181
14	-	-	-	-	-	-	8.7153	11.0222	-	-	703.2244	703.2244
15	-	-	-	-	-	-	9.8295	7.9510	-	-	478.0636	478.0636
16	-	-	-	-	-	-	3.3743	3.0243	-	-	66.4515	66.4515
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	478.0636	651.6116
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	129.0320	129.0320
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	138.7094	138.7094
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1045.1592	1045.1592
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	189.677	104.5159
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.19336	248.3866
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	948.3852	948.3852
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58.90311	58.90311
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75.48372	75.48372
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	301.2897	301.2897
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100.6450	100.6450
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	221.9350	221.9350
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	183.8706	183.8706
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.19336	94.19336
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	159.9997	159.9997
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	589.6762	200.6448
$W(kg)$	4515.40	4044.25	358.19	320.93	2199.26	1789.23	775.04	692.09	28437.43	24510.64	677035.35	686539.92
λ_1	2002.35	1685.99	147.55	132.01	84.76	71.76	726.98	672.72	9.96	8.44	180.38	193.88
$\lambda_2 - \lambda_1$	3470.28	3204.74	95.57	93.90	51.15	33.29	17.87	6.41	1.03	0.89	72.68	73.74

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 6 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 4

$A_i (cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	GDE3	SHAMODE	SHAMODE	GDE3	GDE3	SHAMODE	SHAMODE	MM-IPDE	SHAMODE
1	248.4315	126.4348	4.5161	3.8710	5.2029	5.2029	13.6808	5.2939	87.6014	66.3098	45.6773	74.1934
2	109.4150	65.8127	5.8064	7.7419	4.9074	4.9074	13.1554	10.3679	28.9132	36.6147	487.741	227.0963
3	162.9084	231.6579	20.6451	16.1290	5.1576	5.1576	10.0767	0.6450	17.8502	8.2896	178.7093	136.1288
4	83.3270	138.8040	4.5161	7.7419	-	-	9.4501	0.6450	119.8795	65.7004	948.3852	277.4188
5	22.0894	43.7908	1.2903	9.6774	-	-	20.4371	25.8060	42.5822	44.8341	129.0320	221.9350
6	113.1199	24.9769	15.4838	7.0968	-	-	15.4372	9.7052	23.1121	30.2806	58.90311	113.5482
7	226.2449	192.5889	14.1935	14.1935	-	-	4.6280	0.6450	22.4666	23.2408	1148.385	334.1929
8	175.8134	85.1640	14.8387	18.0645	-	-	5.6950	4.4893	-	-	337.4187	74.1934
9	111.8350	79.4474	-	-	-	-	14.4107	11.2623	-	-	277.4188	366.4509
10	91.4954	106.2996	-	-	-	-	10.4581	10.0679	-	-	170.9674	478.0636
11	-	-	-	-	-	-	3.5420	0.6450	-	-	337.4187	129.6772
12	-	-	-	-	-	-	0.6450	0.6450	-	-	864.5144	578.0634
13	-	-	-	-	-	-	21.5572	25.8060	-	-	167.0964	187.7416
14	-	-	-	-	-	-	14.3371	11.8136	-	-	278.7091	200.6448
15	-	-	-	-	-	-	1.9154	0.6450	-	-	436.7733	528.386
16	-	-	-	-	-	-	0.6450	2.9104	-	-	322.5800	226.4512
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	359.9993	441.9346
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.19336	109.6772
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	104.5159
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	578.0634	178.7093
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	68.38696
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	62.64504
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	436.7733	322.5800
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	87.0966
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45.6773	57.0321
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	441.9346	441.9346
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	159.3545	94.83852
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	307.7413	85.80628
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	193.5480	250.3221
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	159.9997	156.7739
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83.8708	138.7094
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	250.3221	176.1287
$W(kg)$	3938.95	3177.36	298.59	266.81	1039.89	1039.89	612.96	449.74	28470.47	20748.56	701651.09	495932.33
$f_1(Hz)$	13.62	13.27	37.13	39.27	26.20	26.20	4.87	4.60	5.64	5.25	1.43	1.42
$f_2 - f_1(Hz)$	19.70	20.15	6.70	4.59	5.36e-13	5.36e-13	3.07e-12	8.11e-13	0.12	0.10	0.08	0.06
$f_3 - f_2(Hz)$	8.37	7.58	10.42	7.86	10.31	10.31	2.74	2.23	4.71e-13	5.29e-13	2.95	2.46

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 7 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 5

$A_i (cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	SHAMODE	SHAMODE	MM-IPDE	GDE3	SHAMODE-WO	SHAMODE	GDE3	GDE3	SHAMODE	SHAMODE-WO	SHAMODE-WO	MM-IPDE
1	193.6490	209.6966	0.6452	16.7742	11.9587	8.9295	5.6740	6.1801	128.3657	76.1879	127.0965	307.7413
2	101.9915	45.9993	6.4516	9.0322	11.8229	7.7298	17.2276	7.3529	46.6196	33.5062	864.5144	250.3221
3	232.2493	233.9381	18.0645	16.1290	11.0385	5.3955	3.2340	3.7565	24.5484	15.4217	227.0963	118.0643
4	173.6400	249.8949	12.9032	9.6774	-	-	0.9355	1.4616	111.6278	80.2344	754.8372	337.4187
5	170.0424	118.6722	14.8387	14.1935	-	-	23.2204	13.4036	66.0967	41.7726	193.5480	123.2256
6	70.8184	76.4685	16.1290	10.3226	-	-	12.9823	8.4667	12.1280	12.9257	197.4190	276.7736
7	77.8932	133.9480	11.6129	7.7419	-	-	6.0312	2.6103	36.5019	9.5922	806.4500	651.6116
8	258.0639	103.7484	20.6451	20.6451	-	-	3.4348	4.0309	-	-	216.1286	127.0965
9	138.5528	73.2798	-	-	-	-	25.4886	23.7713	-	-	118.0643	227.7415
10	113.0795	76.5515	-	-	-	-	10.3077	10.0164	-	-	155.4836	101.9353
11	-	-	-	-	-	-	5.3683	3.5930	-	-	64.5160	187.7416
12	-	-	-	-	-	-	1.9471	3.0323	-	-	537.4183	305.8058
13	-	-	-	-	-	-	25.8060	24.2971	-	-	864.5144	277.4188
14	-	-	-	-	-	-	22.0674	8.5730	-	-	193.5480	210.9673
15	-	-	-	-	-	-	14.4734	16.7117	-	-	305.8058	1045.1592
16	-	-	-	-	-	-	7.1817	0.6450	-	-	178.7093	221.9350
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1045.1592	212.2576
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	276.7736	145.8062
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56.70956	41.80637
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	301.2897	322.5800
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	143.8707	66.4515
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	806.4500	57.0967
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	216.1286	212.2576
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100.6450	49.5483
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	178.7093	45.6773
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	167.0964	181.9351
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	129.0320	64.5160
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57.0321	76.1289
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90.9676	163.2255
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66.4515	90.9676
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	231.6124	145.8062
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	129.6772	231.6124
$W(kg)$	4378.23	3660.65	318.33	278.12	2352.41	1469.10	719.90	473.77	33749.55	21033.87	745556.40	520843.91
$f_1(Hz)$	13.29	12.75	40.70	39.53	26.00	24.34	5.39	4.59	6.15	5.45	1.78	1.64
$f_2 - f_1(Hz)$	24.12	19.64	6.14	4.11	6.29e-13	8.63e-13	1.37e-12	1.72e-12	0.11	0.10	0.06	0.04
λ_1	1437.87	1032.25	114.72	89.42	77.99	53.49	608.90	412.89	9.81	6.22	145.49	107.61
$\lambda_2 - \lambda_1$	3322.20	2981.78	119.76	94.98	62.57	27.74	27.24	8.03	1.08	0.71	83.19	73.50

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 8 – Valores obtidos para as variáveis de projeto e funções objetivo das soluções MTD extraídas das execuções do POE 6

$A_i(cm^2)$	T10		T25		T56		T72		T120		T582	
Cenário (MTD)	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2	sc_1	sc_2
Origem	SHAMODE	MM-IPDE	MM-IPDE	GDE3	MM-IPDE	SHAMODE-WO	GDE3	GDE3	SHAMODE	SHAMODE	SHAMODE	GDE3
1	195.4086	233.1723	5.1613	8.3871	10.6703	6.8962	7.9531	7.5927	108.5844	57.7505	250.3221	94.1934
2	94.5129	50.6641	7.0968	9.0322	11.2182	7.9560	17.3977	6.3816	64.0473	38.5897	337.4187	178.7093
3	251.6098	210.9102	20.6451	16.1290	8.4912	5.3520	2.4809	1.5502	22.5998	14.7962	398.7089	129.0320
4	257.1553	223.0154	11.6129	5.8064	-	-	6.5759	1.8940	124.6330	81.5626	76.1289	337.4187
5	120.9216	197.6995	3.2258	14.8387	-	-	23.9215	9.0129	91.9922	52.0283	149.6771	117.4191
6	45.5160	39.2296	20.6451	12.2580	-	-	9.8176	7.4151	25.6924	17.0301	478.0636	104.5159
7	206.1961	12.2783	16.1290	10.3226	-	-	3.1319	1.6406	12.9912	4.6710	322.5800	337.4187
8	142.9843	208.1325	14.1935	18.0645	-	-	20.4956	0.6450	-	-	181.9351	178.7093
9	64.1866	76.2629	-	-	-	-	25.8060	17.2462	-	-	136.1288	156.7739
10	233.0106	108.2429	-	-	-	-	15.0654	9.6289	-	-	301.2897	123.2256
11	-	-	-	-	-	-	8.1115	2.1345	-	-	216.1286	176.1287
12	-	-	-	-	-	-	4.9967	2.2368	-	-	948.3852	143.8707
13	-	-	-	-	-	-	17.1209	21.2057	-	-	806.4500	257.4188
14	-	-	-	-	-	-	8.8882	7.8872	-	-	127.0965	113.5482
15	-	-	-	-	-	-	5.7912	12.2449	-	-	1264.5136	478.0636
16	-	-	-	-	-	-	14.0854	4.0104	-	-	110.3224	226.4512
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	210.9673	178.7093
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	159.3545	113.5482
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	192.2577	66.4515
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	589.6762	754.8372
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	212.2576	39.7419
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.8385	143.8707
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	441.9346	305.8058
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.1934	178.7093
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	129.0320	176.1287
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	104.5159	366.4509
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	129.6772	85.8063
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94.1934	83.8708
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	210.9673	123.2256
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	101.9353	138.7094
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	651.6116	149.6771
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	115.4836	39.7419
$W(kg)$	4639.62	3770.79	338.51	283.48	2023.91	1333.76	671.43	399.40	34037.23	20340.20	727230.19	463899.01
$f_1(Hz)$	13.44	12.39	38.88	40.11	25.41	25.18	4.84	4.24	5.90	5.05	1.36	1.28
$f_2 - f_1(Hz)$	21.79	18.99	5.08	3.70	3.73e-13	2.84e-13	1.12e-12	5.16e-13	0.11	0.11	0.05	0.03
$f_3 - f_2(Hz)$	8.07	6.06	13.24	6.34	11.62	11.78	2.39	1.61	5.36e-13	4.01e-13	2.04	2.41
λ_1	1546.57	1238.16	142.66	109.34	72.25	49.34	468.26	243.42	9.19	5.20	135.81	107.56
$\lambda_2 - \lambda_1$	2824.25	4892.62	103.80	75.52	44.20	25.39	8.88	2.50	1.08	0.63	76.25	47.05

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analisando inicialmente os resultados do POE 1 para as treliças propostas (Figuras 11, 12 e 13), observa-se as tendências de aumento de $f_1(\mathbf{x})$ e $\lambda_1(\mathbf{x})$ com o crescimento do peso das estruturas. Esse comportamento é consequência da maior rigidez associada às soluções estruturais de maior massa. Observa-se que, para T10, T56 e T582, o MM-IPDE é o algoritmo que fornece o maior número de soluções não-dominadas às frentes de Pareto e possui os maiores hipervolumes, enquanto para T25, T72 e T120, o GDE3 é o líder nesses mesmos quesitos. Em relação às soluções extraídas pelo método MTD, observa-se que aquelas obtidas com sc_2 fornecem estruturas consideravelmente mais leves do que as de sc_1 , enquanto as outras grandezas, na maioria dos casos, apresentam variações menos significativas. Destacam-se também os valores elevados de $\lambda_1(\mathbf{x})$ para as soluções MTD fornecidas, mostrando que as treliças obtidas não estão suscetíveis a problemas de estabilidade global, dadas as cargas indicadas para cada estrutura no Capítulo 4.

Considerando as Figuras 14, 15 e 16 para o POE 2, observa-se novamente a tendência de crescimento da primeira frequência de vibração com o aumento do peso das soluções representadas. O MM-IPDE foi o algoritmo com maior HV e maior fornecimento de soluções não-dominadas para as treliças de 10, 25, 120 e 582 barras, enquanto o GDE3 obteve os maiores valores de soluções fornecidas e HV nas treliças de 56 e 72 barras. Em relação às soluções MTD, constata-se também reduções mais significativas dos pesos estruturais obtidos com sc_2 em relação aos extraídos com sc_1 , enquanto as demais grandezas apresentam pouca variação. Dessa forma, fornecendo treliças mais leves e com diminuições pequenas de $f_1(\mathbf{x})$ e de $f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$, as soluções MTD(sc_2) são consideradas mais vantajosas em relação às de MTD(sc_1). Por fim, notam-se também os valores pequenos da diferença $f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ para as soluções obtidas em T56, T120, T582 e, principalmente, T72, indicando que tais treliças estão mais suscetíveis à problemas relacionados à ressonância entre essas frequências, fenômeno que pode prejudicar a integridade e uso da estrutura.

Analisando os resultados do POE 3 representados nas Figuras 17, 18 e 19, observa-se, assim como no POE 1, o crescimento do primeiro fator de carga crítica com o aumento do peso e, conseqüentemente, da rigidez das soluções estruturais obtidas. Verifica-se também que o MM-IPDE possui altos valores do HV relativo para todas as treliças, sendo superado apenas para a T56 pelo SHAMODE e na T120, onde está levemente abaixo dos demais algoritmos. o GDE3 é o algoritmo que fornece a maior porcentagem de soluções para as treliças de 25, 72 e 120 barras, mas possui o maior HV apenas para a T120. Em relação às soluções MTD obtidas para cada treliça, observa-se que aquelas obtidas com sc_2 se mostram mais vantajosas, já que possuem menor massa (reduzindo gastos, consumo de materiais e carregamentos devido ao peso-próprio) e não apresentam riscos significativos quanto à instabilidade, com valores ainda elevados de $\lambda_1(\mathbf{x})$ para as cargas aplicadas. Por fim, constata-se que a treliça mais suscetível a problemas de estabilidade relacionados à

sobreposição dos dois primeiros modos de flambagem é a T120, cujas soluções apresentam os menores valores da diferença $\lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$.

Nos gráficos de coordenadas paralelas obtidos para o POE 4 (Figuras 20 a 25), observa-se a variação dos quatro objetivos analisados em cada solução obtida. O MM-IPDE foi o algoritmo com os maiores HVs para a resolução do problema em T10 e T120, o SHAMODE na T582 e o SHAMODE-WO na T25. Já o GDE3 apresentou HVs muito elevados para as treliças T56 e T72, enquanto foi o de menores valores nas demais. Interessante observar que os cenários sc_1 e sc_2 forneceram a mesma solução MTD provinda do SHAMODE para a T56. Nas demais treliças, as soluções MTD(sc_2) apresentam uma redução considerável no peso e diminuições pouco expressivas das demais grandezas analisadas, quando comparadas às soluções MTD(sc_1). Observando as diferenças $f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e $f_3(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$ das soluções MTD, constata-se que aquelas extraídas de T56, T72 e T120 são as mais suscetíveis à problemas relacionados à sobreposição de seus modos de vibração.

Nas soluções obtidas para o POE 5 (Figuras 26 a 31), analisando-se conjuntamente a minimização de $W(\mathbf{x})$ e as maximizações de $f_1(\mathbf{x})$ e $\lambda_1(\mathbf{x})$, enfatiza-se como a primeira função é conflitante em relação às outras duas, já que soluções mais pesadas e rígidas tendem a valores maiores da primeira frequência de vibração e do primeiro fator de carga crítica. O MM-IPDE apresenta os maiores valores de HV para as treliças de 10, 25, 120 e 582 barras, mostrando um bom desempenho na resolução desse problema de 5 objetivos. Já nas treliças de 56 e 72 barras, os maiores HVs são calculados para o GDE3. Pelo exemplo do GDE3, pode-se notar também como uma maior quantidade de soluções fornecidas não está necessariamente atrelada ao melhor desempenho quanto ao Hipervolume, já que esse algoritmo apresenta a maior porcentagem para a T25 e o pior valor de HV, enquanto apresenta a menor contribuição em T56 e um grande HV. Isso ocorre porque o valor de HV não depende diretamente da quantidade de soluções não-dominadas, e sim da área coberta por elas no espaço de busca. Analisando as soluções MTD, observa-se, assim como no POEs 2 e 4, que as treliças de 56 e 72 barras são muito suscetíveis à ressonância entre suas duas primeiras frequências naturais de vibração. Em concordância com o que foi observado no POE 3, as soluções extraídas para a T120 apresentam os menores valores da diferença $\lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$, mostrando-se mais suscetíveis a problemas relacionados à sobreposição de seus modos de flambagem.

Finalmente, nas Figuras 32 a 37, relacionadas ao POE 6, observam-se os resultados obtidos quando todas as funções objetivo propostas neste estudo foram otimizadas conjuntamente nas treliças. No POE 6, o MM-IPDE apresentou os resultados mais elevados do cálculo de HV nas treliças T10 e T120, o GDE3 nas treliças T56 e T72, o SHAMODE em T25 e o SHAMODE-WO na T582. O MM-IPDE é o algoritmo que fornece o maior número de soluções não-dominadas nas treliças T10, T56, T120 e T582. Essa meta-heurística também apresentou as maiores taxas de contribuição em cinco treliças do POE 4 e em

quatro treliças no POE 5, o que exalta a sua boa capacidade em encontrar soluções não-dominadas nesses problemas com mais de 3 objetivos. A vantagem obtida ao se analisar todas as funções objetivo em um só problema é encontrar de forma mais rápida e direta soluções que atendam simultaneamente a todos os critérios visados pelo tomador de decisões, evitando a necessidade de executar vários POEs separadamente.

5.4 PERFORMANCE DOS ALGORITMOS - HIPERVOLUME E IGD+

Com a resolução dos POEs nas treliças analisadas, os desempenhos das meta-heurísticas são comparados através de dois indicadores consagrados da literatura: o Hipervolume, cujos valores relativos também foram apresentados e discutidos nas seções anteriores, e o IGD+.

As Tabelas 9 a 14 apresentam a média e o desvio padrão dos valores obtidos para o HV e IGD+ das execuções independentes dos POEs 1 a 6 em cada treliça. Os melhores valores estão destacados em negrito. O símbolo (+) significa que existe diferença estatisticamente significativa (p -valor < 0.05) entre os resultados dos algoritmos em relação àquele de melhor desempenho, segundo o teste não-paramétrico de Wilcoxon.

Tabela 9 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE1.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.15907(+)	0.04131	0.48648	0.00682	0.41499(+)	0.01292	0.40237(+)	0.01934
25	0.63328	0.01915	0.63156	0.01015	0.56448(+)	0.02593	0.56118(+)	0.03015
56	0.27321(+)	0.04181	0.50225	0.00417	0.47664(+)	0.01489	0.46741(+)	0.01231
72	0.62467	0.01636	0.39139(+)	0.00702	0.39066(+)	0.01155	0.38983(+)	0.00512
120	0.76289	0.00226	0.74334(+)	0.00471	0.75077(+)	0.00398	0.74592(+)	0.00386
582	0.11142(+)	0.02469	0.37602	0.06995	0.23620(+)	0.04468	0.24033(+)	0.03643
	IGD+							
10	0.29773(+)	0.04302	0.04515	0.00579	0.07751(+)	0.01263	0.09650(+)	0.01994
25	0.03946	0.01188	0.04668(+)	0.00722	0.07880(+)	0.02001	0.08420(+)	0.02085
56	0.24938(+)	0.04050	0.04404	0.00499	0.05930(+)	0.00959	0.05597(+)	0.00384
72	0.02318	0.00604	0.21781(+)	0.00546	0.22409(+)	0.00495	0.22631(+)	0.00408
120	0.00690	0.00117	0.01843(+)	0.00262	0.01107(+)	0.00200	0.01336(+)	0.00159
582	0.28409(+)	0.03026	0.09941	0.03569	0.17906(+)	0.02730	0.17452(+)	0.02522

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.5 PERFIS DE DESEMPENHO

Como mencionado em 3.6.3, a área sob a curva $\rho_s(\tau)$ do perfil de desempenho é um indicador da performance geral do algoritmo s na resolução do conjunto de problemas P (número de problemas $n_p = 36$, como são 6 POEs para cada uma das 6 treliças). Quanto maior o valor da área, mais alta é a eficiência do algoritmo analisado.

Tabela 10 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE2.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.40638(+)	0.02947	0.58791	0.01586	0.56253(+)	0.01538	0.56150(+)	0.01415
25	0.18366(+)	0.08374	0.36154	0.01665	0.31443(+)	0.05894	0.28814(+)	0.09308
56	0.33612	0.06817	0.09038(+)	0.00169	0.05422(+)	0.01846	0.06544(+)	0.01280
72	0.44196	0.08467	0.02872(+)	0.00258	0.02250(+)	0.00548	0.02691(+)	0.00351
120	0.61054(+)	0.01113	0.68723	0.01076	0.67512(+)	0.01224	0.68219	0.00985
582	0.05502(+)	0.01578	0.32942	0.10648	0.13792(+)	0.02511	0.13438(+)	0.02452
	IGD+							
10	0.18439(+)	0.03158	0.05258	0.00928	0.06210(+)	0.00950	0.06724(+)	0.01040
25	0.20369(+)	0.08091	0.06390	0.00730	0.10382(+)	0.05265	0.12300(+)	0.08021
56	0.16844	0.04568	0.16421	0.00172	0.19335(+)	0.01204	0.18657(+)	0.01143
72	0.03296	0.01054	0.35143(+)	0.00230	0.35899(+)	0.00661	0.36569(+)	0.00551
120	0.07048(+)	0.00753	0.03664	0.00458	0.03575	0.00479	0.03577	0.00345
582	0.30957(+)	0.03761	0.07887	0.03941	0.19462(+)	0.03276	0.19355(+)	0.03007

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 11 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE3.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.16199(+)	0.02661	0.42066	0.00724	0.30583(+)	0.03439	0.31651(+)	0.02472
25	0.18711(+)	0.01946	0.31344	0.00925	0.26054(+)	0.01785	0.26223(+)	0.02023
56	0.17705(+)	0.04514	0.31890	0.00618	0.30831(+)	0.01158	0.30780(+)	0.00845
72	0.23552(+)	0.03111	0.41785	0.05686	0.15639(+)	0.05481	0.14835(+)	0.04636
120	0.70737	0.00294	0.69445(+)	0.00474	0.68950(+)	0.01281	0.69733(+)	0.00219
582	0.04384(+)	0.01030	0.29970	0.10947	0.12291(+)	0.03583	0.14662(+)	0.03356
	IGD+							
10	0.17906(+)	0.02699	0.04675	0.00557	0.07661(+)	0.01505	0.07659(+)	0.00895
25	0.15158(+)	0.02368	0.08046	0.00577	0.10713(+)	0.01253	0.10675(+)	0.01367
56	0.18058(+)	0.05337	0.04688	0.00326	0.04821	0.00501	0.04779	0.00307
72	0.08636	0.01317	0.08602	0.01486	0.15135(+)	0.02704	0.15650(+)	0.02154
120	0.00605	0.00120	0.01591(+)	0.00302	0.01513(+)	0.00411	0.01312(+)	0.00144
582	0.24274(+)	0.01594	0.09278	0.03995	0.16735(+)	0.02590	0.14705(+)	0.02332

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As figuras 38 e 39 representam os perfis de desempenho referentes aos valores de HV e IGD+, respectivamente, apresentados nas Tabelas 9 a 14. Cada gráfico está relacionado aos resultados de seu indicador de performance na resolução do respectivo POE para todas as treliças em estudo. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, na ordem: GDE3, MM-IPDE, SHAMODE e SHAMODE-WO, indicando o desempenho dos algoritmos na resolução dos problemas.

Tabela 12 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE4.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.17803(+)	0.02215	0.25986	0.01356	0.20874(+)	0.01868	0.20591(+)	0.02519
25	0.05498(+)	0.01782	0.07392	0.01478	0.07341	0.02414	0.07058	0.02712
56	0.16288	0.03289	1.2391e-13(+)	2.5385e-14	1.6635e-13(+)	3.5893e-14	1.7319e-13(+)	2.7319e-14
72	0.24126	0.03751	0.01249(+)	0.00160	0.01228(+)	0.00247	0.01289(+)	0.00199
120	1.6071e-13(+)	4.9155e-14	6.6016e-13	5.5454e-13	2.8113e-13(+)	2.3573e-14	3.1852e-13	1.1160e-13
582	0.08823(+)	0.02582	0.14049(+)	0.02880	0.17835	0.03723	0.16710	0.03421
	IGD+							
10	0.19775(+)	0.03735	0.09799	0.01021	0.14007(+)	0.02497	0.13559(+)	0.01868
25	0.22830(+)	0.05503	0.11414	0.01261	0.18862(+)	0.05262	0.19864(+)	0.05877
56	0.20781(+)	0.02316	0.10483	0.00680	0.10774	0.01072	0.10509	0.00798
72	0.07543	0.01312	0.35366(+)	0.00673	0.35854(+)	0.01276	0.36040(+)	0.01218
120	0.08525(+)	0.01123	0.03974	0.00556	0.04451	0.00861	0.04445(+)	0.00597
582	0.25775(+)	0.05027	0.13467	0.02799	0.14534	0.02410	0.15164(+)	0.02498

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 13 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE5.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.03082(+)	0.01050	0.16936	0.00739	0.12545(+)	0.02050	0.11638(+)	0.01609
25	0.02671(+)	0.00629	0.05152	0.01244	0.03099(+)	0.02196	0.04356	0.02378
56	0.02493	0.00737	0.00149(+)	0.00069	0.00014(+)	0.00043	0.00026(+)	0.00081
72	0.09062	0.03862	0.00052(+)	0.00041	0.00011(+)	0.00024	0.00012(+)	0.00043
120	0.47764(+)	0.01825	0.51617	0.01897	0.49801(+)	0.01848	0.49603(+)	0.01897
582	0.00914(+)	0.00303	0.03915	0.02602	0.02148	0.01151	0.02684	0.01086
	IGD+							
10	0.36309(+)	0.05146	0.11317	0.01126	0.15287(+)	0.03153	0.15740(+)	0.02538
25	0.22538(+)	0.02949	0.12523	0.01094	0.22089(+)	0.06382	0.19749(+)	0.05421
56	0.27011(+)	0.04660	0.09453	0.00798	0.10530(+)	0.00575	0.10671(+)	0.00699
72	0.07909	0.03817	0.31693(+)	0.01943	0.35846(+)	0.01289	0.36216(+)	0.01643
120	0.07128(+)	0.01176	0.04209	0.00663	0.04262	0.00756	0.04273	0.00485
582	0.24772(+)	0.02386	0.20495	0.06435	0.20697(+)	0.03161	0.18913	0.03155

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

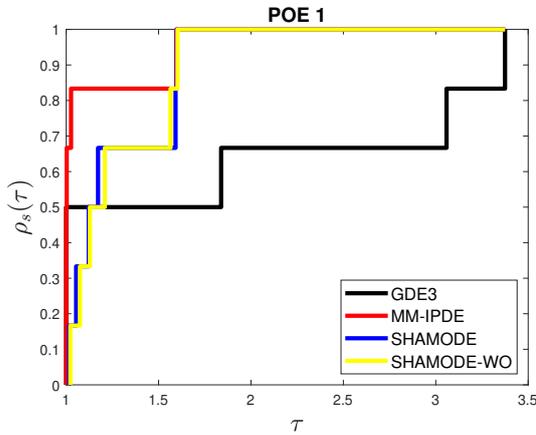
Tabela 14 – Média e Desvio Padrão (DP) dos valores obtidos para o Hipervolume (HV) e IGD+ das execuções independentes do POE6.

Nº de Barras	GDE3		MM-IPDE		SHAMODE		SHAMODE-WO	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
	HV							
10	0.01165(+)	0.00538	0.05784	0.00524	0.03101(+)	0.00584	0.02792(+)	0.00499
25	0.01013	0.00216	0.01242	0.00348	0.01306	0.00742	0.01459	0.00763
56	0.01362	0.00404	1.8010e-14(+)	2.5542e-15	1.5664e-14(+)	3.1416e-15	1.7396e-14(+)	2.7515e-15
72	0.03540	0.02746	0.00009(+)	0.00026	2.1237e-08(+)	9.4977e-08	1.7036e-15(+)	4.2009e-16
120	8.2942e-14(+)	3.1970e-14	4.8679e-13	5.1913e-13	1.9629e-13(+)	1.3883e-13	2.0381e-13(+)	1.9771e-13
582	0.00611(+)	0.00281	0.01204(+)	0.00661	0.01320	0.00863	0.01824	0.01154
	IGD+							
10	0.35236(+)	0.05747	0.12679	0.01534	0.18741(+)	0.02452	0.19926(+)	0.03012
25	0.23832(+)	0.04028	0.15174	0.01671	0.24028(+)	0.05784	0.22663(+)	0.05267
56	0.30089(+)	0.05975	0.12136	0.01008	0.14320(+)	0.01642	0.12082	0.00788
72	0.09805	0.02599	0.32224(+)	0.01214	0.35953(+)	0.01024	0.35960(+)	0.01122
120	0.08336(+)	0.01337	0.06080	0.01468	0.05713	0.01201	0.06400	0.01163
582	0.26649(+)	0.03748	0.21089	0.02572	0.20192	0.04132	0.18981	0.03576

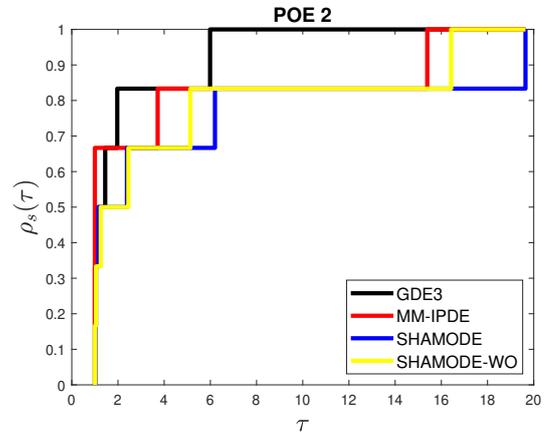
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 38 – Perfis de desempenhos referentes aos valores de Hipervolume apresentados nas Tabelas 9-14. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

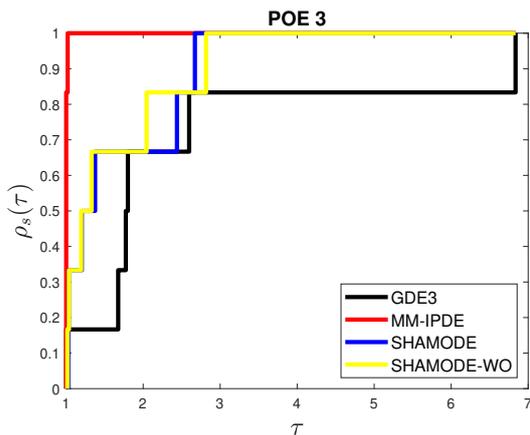
(a) 0.6590; 1; 0.9317; 0.9283.



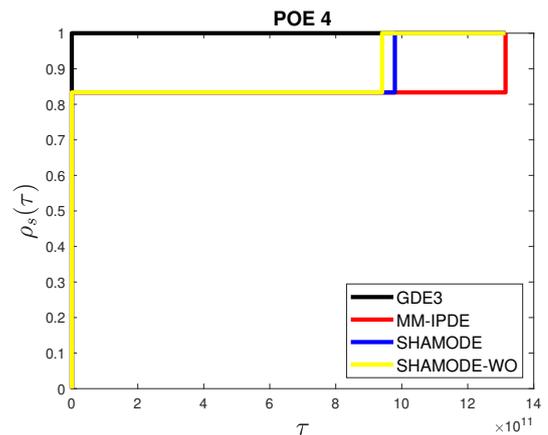
(b) 1; 0.8996; 0.8204; 0.8596.



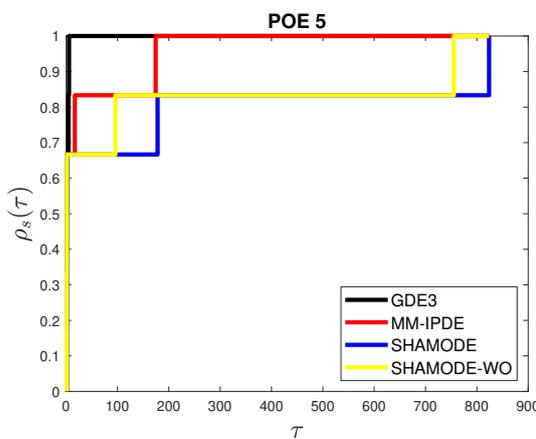
(c) 0.7238, 1, 0.8934, 0.9024.



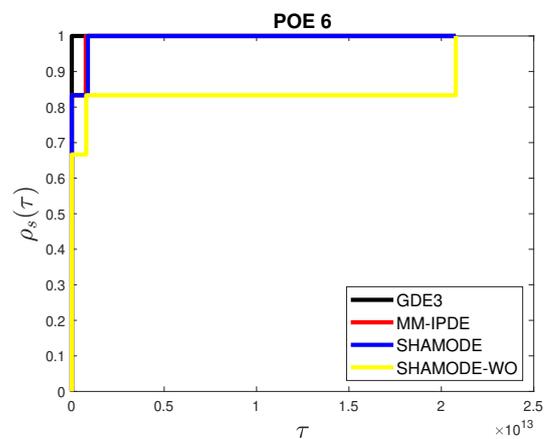
(d) 1, 0.8333, 0.8759, 0.8808.



(e) 1, 0.9634, 0.7985, 0.8294.



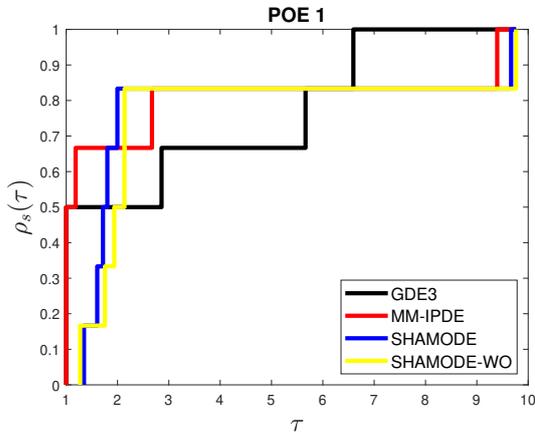
(f) 1, 0.9939, 0.9930, 0.8271.



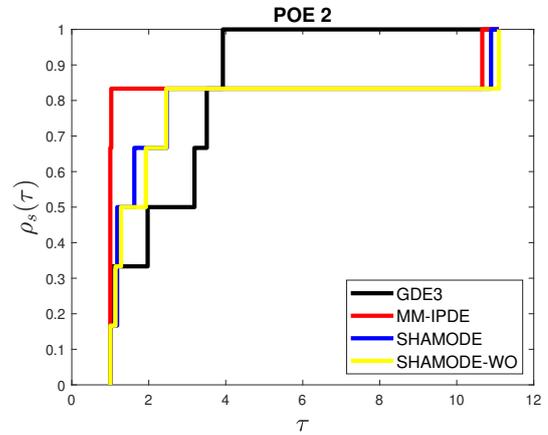
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 39 – Perfis de desempenhos referentes aos valores de IGD+ apresentados nas Tabelas 9-14. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

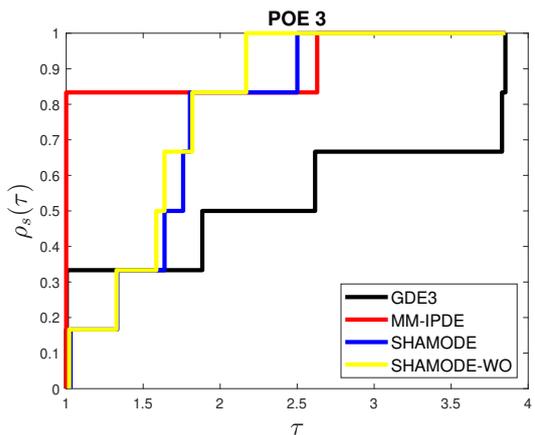
(a) 0.9560, 1, 0.9555, 0.9351.



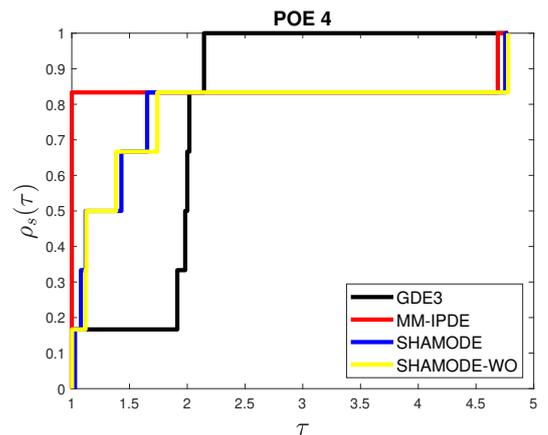
(b) 1, 0.9794, 0.9283, 0.9178.



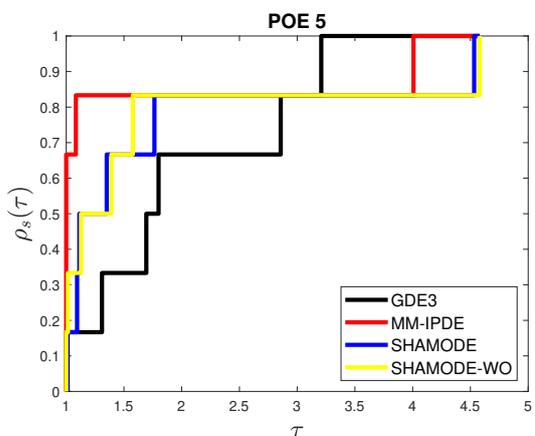
(c) 0.5765, 1, 0.8429, 0.8755.



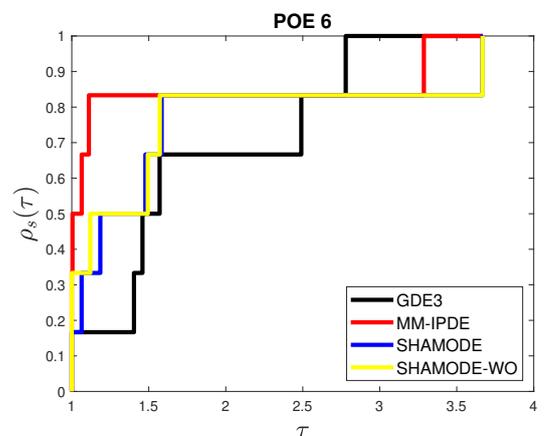
(d) 0.9278, 1, 0.9276, 0.9231.



(e) 0.8489, 1, 0.9033, 0.9130.



(f) 0.8348, 1, 0.8884, 0.8976.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

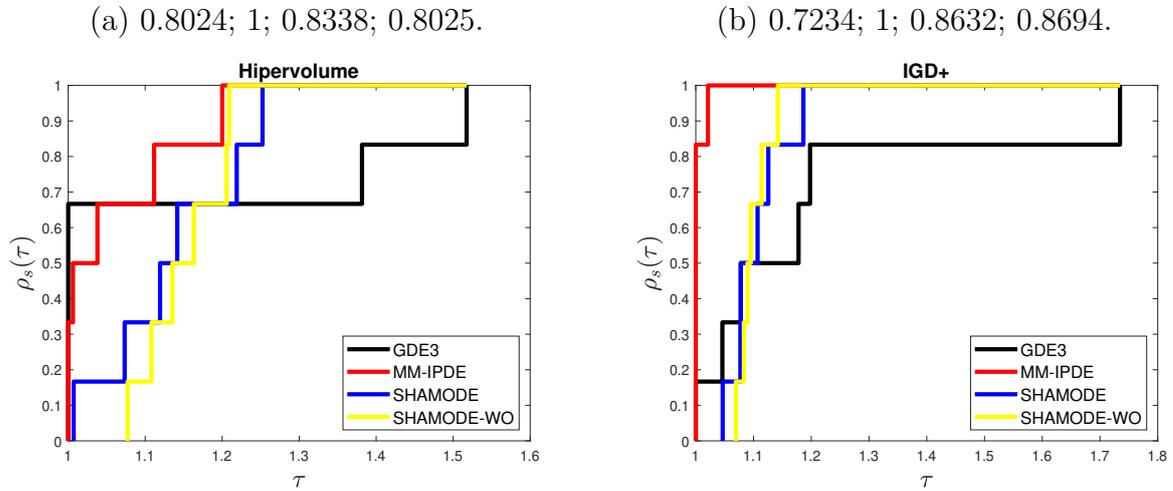
Observa-se que, para os POEs 1 e 3, ambas as métricas indicaram o MM-IPDE como o algoritmo de melhor performance. Para o POE 2, o GDE3 foi considerado o mais eficiente nas duas análises. Entretanto, para os POEs 4, 5 e 6, com mais de três funções objetivo, enquanto o HV apontou o GDE3 como o algoritmo de melhor desempenho, o IGD+ indicou o MM-IPDE como aquele que melhor performou nesses problemas. Em relação à definição do algoritmo mais eficiente para dado problema de otimização, a diferença entre resultados fornecidos por métricas distintas já havia sido mencionada por Carvalho et al. em [6].

Analisando os perfis de HV, é possível observar que, apesar do melhor desempenho nos POEs 2, 4, 5 e 6, o GDE3 apresentou as piores performances na resolução dos problemas 1 e 3. O MM-IPDE apresentou resultados competitivos de HV na maioria dos POEs, mas foi indicado como o melhor apenas em 1 e 3. Enquanto isso, nos perfis do IGD+, o GDE3 apresentou o melhor desempenho na resolução do POE 2, mas o pior nos POEs 3, 5 e 6, com uma performance insatisfatória especialmente no POE 3. Já os demais algoritmos apresentaram valores mais estáveis da área sob as curvas dos perfis, mostrando-se relativamente competitivos para a resolução de todos os problemas abordados, de acordo com essa métrica.

Para avaliar, de acordo com cada métrica, a performance das meta-heurísticas na resolução do conjunto total de POEs propostos, a Figura 40 representa os perfis de desempenho gerais relacionados aos valores de HV e IGD+ obtidos neste estudo. Para a criação desses perfis, consideraram-se as áreas sob as curvas dos perfis de cada POE (indicadas nas Figuras 38 para o HV e 39 para o IGD+) como a métrica de desempenho $t_{p,s}$. Assim, foi possível traçar os perfis de desempenho gerais de cada algoritmo tanto para o HV (Figura 40-a) quanto para o IGD+ (Figura 40-b). Novamente, as áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição dos gráficos na ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE e SHAMODE-WO.

Observa-se que os perfis de desempenho globais de ambas as métricas apontam o MM-IPDE como o algoritmo de melhor performance geral na resolução dos POEs nas treliças propostas. Tanto no HV quanto no IGD+, as áreas sob os perfis do SHAMODE e SHAMODE-WO apresentam resultados muito próximos, indicando que a adição do operador de movimento espiral do WOA ao algoritmo original não ocasionou diferenças significativas na resolução desses problemas. Os perfis fornecidos pelo GDE3 apresentam os menores valores da área sob a curva. Apesar de ter apresentado os melhores desempenhos nos POEs 2, 4, 5 e 6 quanto ao HV (Figura 38), e no POE 2 para o IGD+ (Figura 39), seu desempenho notadamente inferior nos demais problemas faz com que o GDE3 seja classificado como o de menor eficiência nas análises gerais de ambas as métricas utilizadas. Ainda assim, nos perfis de HV da Figura 40-a, o GDE3 apresentou uma área sob a curva próxima às do SHAMODE e SHAMODE-WO, indicando, para os três algoritmos, desempenhos satisfatórios na resolução dos POEs. Já na Figura 40-b, sob a perspectiva

Figura 40 – Perfis de desempenho gerais referentes ao Hipervolume e IGD+. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição de cada figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

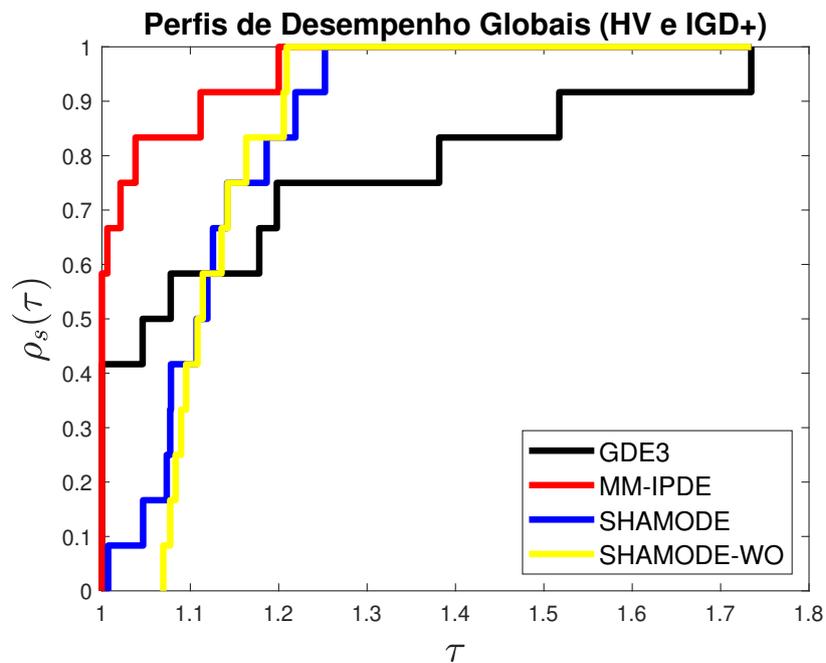
do IGD+, o SHAMODE e o SHAMODE-WO apresentam performances competitivas em relação ao MM-IPDE, enquanto o GDE3 apresenta uma eficiência consideravelmente inferior na solução dos problemas propostos.

Por fim, com o objetivo de apresentar uma conclusão definitiva quanto aos algoritmos que melhor performaram nos POEs deste estudo, a Figura 41 exibe os perfis de desempenho globais referentes à análise conjunta do HV e do IGD+. Para realizar essa análise e obter tais perfis, utilizaram-se novamente as áreas sob as curvas dos perfis de cada POE (Figura 38 para o HV e Figura 39 para o IGD+) como a métrica de desempenho $t_{p,s}$. Desta vez, entretanto, as áreas relativas ao HV e aquelas obtidas dos gráficos do IGD+ são analisadas em conjunto, fornecendo uma perspectiva global acerca do desempenho das meta-heurísticas quanto a ambas as métricas utilizadas.

Portanto, observa-se na Figura 41 que, como esperado, o MM-IPDE também apresentou o melhor desempenho global na resolução dos POEs para as treliças propostas. A segunda melhor performance geral é fornecida pelo SHAMODE, novamente com uma área muito próxima à do SHAMODE-WO, que ocupa a terceira colocação. Assim como nas análises independentes das métricas, a análise conjunta também apontou o GDE3 como o algoritmo com a pior performance geral na resolução dos problemas de otimização abordados no trabalho.

Figura 41 – Perfis de desempenho globais referentes à análise conjunta do Hipervolume e IGD+. As áreas abaixo das curvas (normalizadas pela maior delas) estão na descrição da figura, nessa ordem: GDE3; MM-IPDE; SHAMODE; SHAMODE-WO

(a) 0.7918; 1; 0.8748; 0.8678.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

A resolução de POEs com funções objetivo e restrições relacionadas às frequências naturais de vibração e aos fatores de carga crítica é de grande valia para evitar o efeito da ressonância no comportamento dinâmico das estruturas e garantir sua estabilidade global, auxiliando o projetista a encontrar soluções estruturais que atendam a seus requisitos de peso, segurança, utilização e conforto aos usuários.

O objetivo principal estabelecido para este trabalho de dissertação se refere à formulação e aplicação de POEs multi-objetivo em treliças planas e espaciais, envolvendo objetivos e restrições relacionadas a aspectos dinâmicos e de estabilidade global. É possível afirmar que esse objetivo foi atingido, com a resolução de POEs com 3 a 6 funções objetivos, aplicados em 6 treliças distintas, que forneceram uma grande quantidade de soluções não-dominadas, possibilitando que o tomador de decisões escolha aquelas que melhor atendam às suas necessidades e intenções. Além disso, como aspecto inovador deste estudo, foram consideradas funções objetivo visando a maximização das diferenças entre frequências naturais de vibração e entre fatores de carga crítica das estruturas, possibilitando ao projetista encontrar soluções menos suscetíveis a problemas relacionados à ressonância entre seus modos de vibração e à sobreposição de seus modos de flambagem.

Nas frentes de Pareto obtidas nos POEs 1 a 3, observa-se, em grande parte dos gráficos gerados, como a redução do peso ($W(\mathbf{x})$) das soluções está relacionada à diminuição da primeira frequência natural de vibração ($f_1(\mathbf{x})$) e do primeiro fator de carga crítica relacionado à estabilidade global nessas estruturas ($\lambda_1(\mathbf{x})$). Esse comportamento se deve à menor rigidez das treliças que apresentaram configurações mais leves. Dessa forma, percebe-se claramente que a função objetivo referente à minimização de $W(\mathbf{x})$ é conflitante em relação às funções objetivo de maximização de $f_1(\mathbf{x})$ e de $\lambda_1(\mathbf{x})$, o que torna a resolução desses problemas não-trivial. Quanto às diferenças $f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})$ e $\lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$, seus comportamentos não demonstraram tendências tão claras com a variação das outras funções. Já nos POEs 4 a 6, com mais de 3 funções objetivo, a representação das soluções não-dominadas foi feita através de gráficos de coordenadas paralelas normalizadas, técnica que demonstrou boa capacidade na apresentação de tais resultados, mostrando com clareza a variação das funções objetivo dos indivíduos, assim como os intervalos de grandeza onde se concentraram as soluções obtidas no espaço de busca.

Como mencionado anteriormente, a principal vantagem da resolução de POEs multi-objetivo é encontrar soluções que atendam, simultaneamente, às necessidades e expectativas do projetista quanto a diversos aspectos estruturais, sem a necessidade de resolver vários problemas mono-objetivo individualmente. Em vista disso, o método de decisão de torneio multicritério (MTD) se mostrou muito eficiente em encontrar, no conjunto de soluções não-dominadas, aquelas que atendessem aos critérios do tomador de

decisão de acordo com a importância (peso) atribuída a cada função objetivo. De forma prática e rápida, o método MTD extraiu de cada problema as soluções indicadas pelos 2 cenários de comparação propostos. Em geral, observou-se que as soluções extraídas com os pesos de sc_2 se mostraram mais vantajosas em relação às obtidas no cenário sc_1 , fornecendo treliças mais leves (devido ao peso maior atribuído à minimização de $W(\mathbf{x})$) e com variações pouco relevantes das demais grandezas, relacionadas às funções de maximização.

Observando as soluções MTD extraídas para cada estrutura, pode-se concluir que as treliças T56, T72 e T120 são as mais suscetíveis a problemas causados pela sobreposição de seus modos de vibração, já que apresentam diversas soluções com valores muito reduzidos das diferenças entre suas frequências naturais. Já a treliça mais propensa a problemas relacionados à estabilidade global e à sobreposição de seus modos de flambagem é a T120, cujas soluções MTD nos POEs 1, 3, 5 e 6 apresentam os menores valores de $\lambda_1(\mathbf{x})$ e da diferença $\lambda_2(\mathbf{x}) - \lambda_1(\mathbf{x})$. Por se tratar de um domo “abatido”, sensível aos efeitos de segunda ordem e à não-linearidade geométrica, a maior vulnerabilidade da T120 a problemas de instabilidade era um resultado previamente esperado.

Outro objetivo alcançado por este trabalho foi estabelecer uma comparação entre os desempenhos das quatro meta-heurísticas abordadas na resolução dos POEs propostos. Além das representações gráficas das Figuras 11 a 37, nas quais é possível observar quais soluções não-dominadas foram fornecidas por cada algoritmo, eles foram comparados através dos indicadores de performance IGD+ e HV. Foi observado, nas Figuras 38 e 39, que indicadores diferentes podem indicar algoritmos distintos como os mais eficientes na resolução de determinado problema. Entretanto, em uma análise geral registrada na Figura 40, ambas as métricas indicaram o MM-IPDE como a meta-heurística mais eficiente nos POEs analisados. Tanto na análise geral de HV quando de IGD+, observam-se diferenças pequenas entre as performances de SHAMODE e SHAMODE-WO, levando à conclusão de que a adição do operador de movimento espiral do WOA não forneceu mudanças significativas no processo de resolução desses POEs. Apesar de possuir a melhor performance em alguns problemas individualmente, os desempenhos inferiores nos demais POEs justificam a indicação do GDE3 como o algoritmo de pior performance em ambas as métricas, especialmente no IGD+. Por fim, na comparação global estabelecida na Figura 41, envolvendo ambas os indicadores, conclui-se que a classificação final dos algoritmos, do melhor ao pior desempenho na resolução dos POEs deste estudo, é dada por: 1º MM-IPDE, 2º SHAMODE, 3º SHAMODE-WO e 4º GDE3.

Portanto, ao final desta dissertação, pode-se afirmar que o trabalho atingiu todos os objetivos propostos, fornecendo inúmeros resultados interessantes que permitiram análises quanto à aplicação dos POEs multi-objetivo apresentados e quanto à performance das meta-heurísticas de busca utilizadas. Além disso, há diversas possibilidades de extensões do tema para trabalhos futuros, entre elas:

- a) Proposição de POEs como mais de 6 funções objetivo, do tipo *many-objective*. Entre os possíveis novos objetivos a serem abordados, pode-se citar a minimização da energia de deformação da estrutura, a minimização das amplitudes dos modos de vibração referentes às primeiras frequências naturais de vibração, assim como a minimização das amplitudes dos modos de instabilidade referentes aos primeiros fatores de carga crítica;
- b) Resolução de POEs multi-objetivo em estruturas com comportamento não-linear geométrico expressivo, como domos ou treliças “abatidas” (*shallow trusses*), nas quais a análise exclusivamente linear estática pode comprometer a definição de seus comportamentos, colocando em risco sua integridade, uso e estabilidade. Tendo como base trabalhos anteriores, como os referenciados em [65–72], pode-se expandir o tema da otimização de estruturas com comportamento não-linear através da aplicação dos POEs do tipo *many-objective* a serem formulados. Destaca-se ainda a possibilidade de proposição de estratégias baseadas em similaridade via metamodelos (*surrogate models*) para solucionar os problemas de alto custo computacional demandados na análise das estruturas com comportamento não-linear geométrico;
- c) Aplicação dos POEs propostos em estruturas formadas por barras em situações mais realistas de aplicação, com treliças e cargas que simulem situações reais de projeto, indo além dos exemplos *benchmark* analisados nesta dissertação;
- d) Análise de sensibilidade e desempenho de algoritmos evolutivos recentemente encontrados na literatura projetados especificamente para lidar com problemas com múltiplos objetivos, como o NSGA-III (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) [73] e o MOEA/D (*Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition*) [74], além da proposição de novos algoritmos hibridizando características dos anteriores.

REFERÊNCIAS

- 1 KRIPKA, M. Discrete optimization of trusses by simulated annealing. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, ABCM, v. 26, No.2, p. 170–173, 2004.
- 2 CARVALHO, J. P. G. *et al.* Truss optimization with multiple frequency constraints and automatic member grouping. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, p. 547–577, 2017.
- 3 KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. Gde3: The third evolution step of generalized differential evolution. In: **IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2005)**. [S.l.]: IEEE, 2005. p. 443–450.
- 4 PANAGANT, N. *et al.* A novel self-adaptive hybrid multi-objective meta-heuristic for reliability design of trusses with simultaneous topology, shape and sizing optimisation design variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 60, n. 5, p. 1937–1955, 2019.
- 5 WANSASUEB, K. *et al.* Multiobjective meta-heuristic with iterative parameter distribution estimation for aeroelastic design of an aircraft wing. **Engineering with Computers**, Springer, p. 1–19, 2020.
- 6 CARVALHO, J. P. G. *et al.* Multi-objective optimum design of truss structures using differential evolution algorithms. **Computers & structures**, v. 252, p. 106544, 2021.
- 7 LEMONGE, A. C. *et al.* Multi-objective truss structural optimization considering natural frequencies of vibration and global stability. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, n. 165, p. 113777, 2021.
- 8 PHOLDEE, N. *et al.* Many-objective optimisation of trusses through meta-heuristics. In: SPRINGER. **International Symposium on Neural Networks**. [S.l.], 2017. p. 143–152.
- 9 MOKARRAM, V.; BANAN, M. R. A new pso-based algorithm for multi-objective optimization with continuous and discrete design variables. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 57, n. 2, p. 509–533, 2018.
- 10 GREINER, D. *et al.* Gray coding in evolutionary multicriteria optimization: Application in frame structural optimum design. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2005. p. 576–591.
- 11 GREINER, D. *et al.* Introducing reference point using g-dominance in optimum design considering uncertainties: an application in structural engineering. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2011. p. 389–403.
- 12 NOILUBLAO, N.; BUREERAT, S. Simultaneous topology, shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective evolutionary algorithms. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 89, n. 23-24, p. 2531–2538, 2011.

- 13 SU, R. *et al.* Multi-objective topology and sizing optimization of truss structures based on adaptive multi-island search strategy. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 43, n. 2, p. 275–286, 2011.
- 14 KAVEH, A.; LAKNEJADI, K. A novel hybrid charge system search and particle swarm optimization method for multi-objective optimization. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 15475–15488, 2011.
- 15 RICHARDSON, J. N. *et al.* Multiobjective topology optimization of truss structures with kinematic stability repair. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 46, n. 4, p. 513–532, 2012.
- 16 KAVEH, A. *et al.* Performance-based multi-objective optimization of large steel structures. **Acta Mechanica**, Springer, v. 223, n. 2, p. 355–369, 2012.
- 17 GREINER, D.; HAJELA, P. Truss topology optimization for mass and reliability considerations - Co-evolutionary multiobjective formulations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 45, n. 4, p. 589–613, 2012.
- 18 KAVEH, A.; LAKNEJADI, K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures. **Acta Mechanica**, Springer, v. 224, n. 2, p. 343–364, 2013.
- 19 KAVEH, A.; FARHOUDI, N. A new optimization method: Dolphin echolocation. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 59, p. 53–70, 2013.
- 20 KAVEH, A.; LAKNEJADI, K. A new multi-swarm multi-objective optimization method for structural design. **Advances in Engineering Software**, v. 58, p. 54 – 69, 2013.
- 21 ANGELO, J. S. *et al.* Ant colony approaches for multiobjective structural optimization problems with a cardinality constraint. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 80, p. 101–115, 2015.
- 22 XIE, L. *et al.* An adaptive multi-objective immune algorithm for optimal design of truss structures. **Journal of Asian Architecture and Building Engineering**, Taylor & Francis, v. 15, n. 3, p. 557–564, 2016.
- 23 KAVEH, A.; BAKHSHPOORI, T. An efficient multi-objective cuckoo search algorithm for design optimization. **Advances in Computational Design**, Techno-Press, v. 1, n. 1, p. 87–103, 2016.
- 24 TEJANI, G. G. *et al.* Multiobjective adaptive symbiotic organisms search for truss optimization problems. **Knowledge-based systems**, Elsevier, v. 161, p. 398–414, 2018.
- 25 MOKARRAM, V.; BANAN, M. R. An improved multi-objective optimization approach for performance-based design of structures using nonlinear time-history analyses. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 73, p. 647–665, 2018.
- 26 VARGAS, D. E. *et al.* Differential evolution with the adaptive penalty method for structural multi-objective optimization. **Optimization and Engineering**, Springer, v. 20, n. 1, p. 65–88, 2019.

- 27 KAVEH, A.; MAHDAVI, V. R. Multi-objective colliding bodies optimization algorithm for design of trusses. **Journal of Computational Design and Engineering**, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 49–59, 2019.
- 28 TEJANI, G. G. *et al.* Structural optimization using multi-objective modified adaptive symbiotic organisms search. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 125, p. 425–441, 2019.
- 29 TEJANI, G. G. *et al.* Multi-objective heat transfer search algorithm for truss optimization. **Engineering with Computers**, Springer, p. 1–22, 2019.
- 30 ASSIMI, H. *et al.* Multi-objective sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming based on a new adaptive mutant operator. **Neural Computing and Applications**, Springer, v. 31, n. 10, p. 5729–5749, 2019.
- 31 TECHASEN, T. *et al.* Simultaneous topology, shape, and size optimization of trusses, taking account of uncertainties using multi-objective evolutionary algorithms. **Engineering with Computers**, Springer, v. 35, n. 2, p. 721–740, 2019.
- 32 KUMAR, S. *et al.* Multi-objective modified heat transfer search for truss optimization. **Engineering with Computers**, Springer, p. 1–16, 2020.
- 33 VO-DUY, T. *et al.* An effective couple method for reliability-based multi-objective optimization of truss structures with static and dynamic constraints. **International Journal of Computational Methods**, World Scientific, v. 17, n. 06, p. 1950016, 2020.
- 34 KUMAR, S. *et al.* Hybrid heat transfer search and passing vehicle search optimizer for multi-objective structural optimization. **Knowledge-Based Systems**, Elsevier, p. 106556, 2020.
- 35 MOTTA, J. C. **Otimização espacial multi-objetivo de pórticos espaciais em aço com variáveis de projeto não usuais**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2022.
- 36 BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. [S.l.]: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2006.
- 37 MCGUIRE, W. *et al.* **Matrix structural analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, New York, 2014. 2nd edition.
- 38 BLUM C.; ROLI, A. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. **ACM Comput. Surv.**, ACM, New York, NY, USA, v. 35, n. 3, p. p. 268–308, 2003.
- 39 STORN, R.; PRICE, K. **Differential evolution A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces**. Berkeley, CA, 1995.
- 40 PRICE, R. M. S. K. V.; A.LAMPINEN, J. **Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization**. [S.l.]: Springer, 2005.
- 41 LEMONGE, A. C.; BARBOSA, H. J. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 59, n. 5, p. 703–736, 2004.

- 42 VARGAS, D. **A Differential Evolution Algorithm with Adaptive Penalty for Multiobjective Structural Optimization (in portuguese)**. Tese (Doutorado) — Modelagem Computacional/UFJF, 2015.
- 43 TANABE R.; FUKUNAGA, A. Success-history based parameter adaptation for differential evolution. **IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**, p. 71–78, 2013.
- 44 DEB, K. *et al.* A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-ii. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.
- 45 MIRJALILI S.; LEWIS, A. The whale optimization algorithm. **Advances in Engineering Software**, v. 95, p. 51–67, 2016.
- 46 BUREERAT, S.; SRIWORAMAS, K. Population-based incremental learning for multiobjective optimisation. In: **Soft Computing in Industrial Applications**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 223–232.
- 47 BALUJA, S. Population-based incremental learning. a method for integrating genetic search based function optimization and competitive learning. Pittsburgh, 1994.
- 48 SRISOMPORN S.; BUREERAT, S. Geometrical design of plate-fin heat sinks using hybridization of moea and rsm. **IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies**, v. 31, n. 2, p. p. 351–360, 2008.
- 49 PARREIRAS, R.; VASCONCELOS, J. Decision making in multiobjective optimization aided by the multicriteria tournament decision method. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 71, n. 12, p. e191–e198, 2009.
- 50 ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - a comparative case study. In: **Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature**. London, UK, UK: Springer-Verlag, 1998. (PPSN V), p. 292–304. ISBN 3-540-65078-4. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=645824.668610>>.
- 51 H. MASUDA H., N. Y. I. Sensitivity of performance evaluation results by inverted generational distance to reference points. **IEEE. 2016 IEEE Congress on evolutionary computation (CEC)**., p. p. 1107–1114, Vancouver, 2016.
- 52 DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. **Mathematical Programming**, v. 91, p. 201–213, 2002.
- 53 ZITZLER, E. *et al.* Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 7(2), p. 117–132, 2003.
- 54 COELLO C. A. C.; SIERRA, M. R. A study of the parallelization of a coevolutionary multi-objective evolutionary algorithm. **SPRINGER. Mexican international conference on artificial intelligence**, p. p. 688–697, 2004.
- 55 BARBOSA, H. J. C. *et al.* Using performance profiles to analyze the results of the 2006 cec constrained optimization competition. In: **IEEE. Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on**. [S.l.], 2010. p. 1–8.

- 56 GELLATLY, R.; BERKE, L. **Optimal Structural Design**. [S.l.], 1971.
- 57 KRISHNAMOORTY, C.; RAJEEV, S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 5, 1992.
- 58 VENKAYYA, V. B. Design of optimum structures. **Journal of Computers & Structures**, v. 1, n. 1-2, p. 265–309, 1971.
- 59 SAKA, M.; ULKER, M. Optimum design of geometrically non-linear space trusses. **Computers and Structures**, v. 41, p. 1387–1396, 1991.
- 60 EBENAU, C. *et al.* An advanced evolutionary strategy with an adaptive penalty function for mixed-discrete structural optimisation. **Advances in Engineering Software**, v. 36, p. 29–38, 2005.
- 61 CAPRILES, P. *et al.* Rank-based ant colony algorithms for truss weight minimization with discrete variables. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 6, p. 553–576, 2007.
- 62 LEMONGE, A. C. C. *et al.* A genetic algorithm for topology optimization of dome structures. In: **Proceedings of the 2nd International Conference on Engineering Optimization – EngOpt, Lisbon, Portugal**. [S.l.: s.n.], 2010.
- 63 HASANÇEBİ, O. *et al.* Performance evaluation of metaheuristic search techniques in the optimum design of real size pin jointed structures. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 87, n. 5, p. 284–302, 2009.
- 64 AISC. **American Institute of Steel Construction. Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design**. 9th. ed. [S.l.]: AISC, 1989.
- 65 SULEMAN, A.; SEDAGHATI, R. Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 30, p. 273–296, 2005.
- 66 MAI, H. T. *et al.* A machine learning-based surrogate model for optimization of truss structures with geometrically nonlinear behavior. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 196, p. 103572, 2021.
- 67 MAI, H. T. *et al.* A robust unsupervised neural network framework for geometrically nonlinear analysis of inelastic truss structures. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 107, p. 332–352, 2022.
- 68 MAI, H. T. *et al.* Optimum design of nonlinear structures via deep neural network-based parameterization framework. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 98, p. 104869, 2023.
- 69 THAI, H.-T. *et al.* Review of nonlinear analysis and modeling of steel and composite structures. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, World Scientific, v. 20, n. 04, p. 2030003, 2020.
- 70 MATA, P. *et al.* Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 196, n. 45-48, p. 4458–4478, 2007.

- 71 VO, T. P.; LEE, J. Geometrical nonlinear analysis of thin-walled composite beams using finite element method based on first order shear deformation theory. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, v. 81, p. 419–435, 2011.
- 72 GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite elements in analysis and design**, Elsevier, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.
- 73 DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 18, n. 4, p. 577–601, 2014.
- 74 ZHANG, Q.; LI, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 11, n. 6, p. 712–731, 2007.