UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Enmanuel José Nava Zambrano

Comportamento assintótico para sistemas de Timoshenko com dissipações na fronteira : Boa colocação e estabilidade

Juiz de Fora

2022

Enmanuel José Nava Zambrano

Comportamento assintótico para sistemas de Timoshenko com dissipações na fronteira : Boa colocação e estabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Professor Dr. Hugo D. Fernández Sare

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nava Zambrano, Enmanuel José.
Comportamento assintótico para sistemas de Timoshenko com dissipações na fronteira : Boa colocação e estabilidade / Enmanuel José Nava Zambrano . – 2022.
106 f. : il.

Orientador: Hugo D. Fernández Sare
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. Sistemas de Timoshenko. 2. Dissipação na fronteira. 3. Existência e unicidade 4. Decaimento exponencial. I. Fernández Sare, Hugo D., orient. II. Título.

Enmanuel Jose Nava Zambrano

Comportamento assintótico para sistemas de Timoshenko com dissipações na fronteira: Boa colocação e estabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em 28 de julho de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hugo Danilo Fernandez Sare - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eduard Toon

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera

Universidade Federal do Rio de Janeiro/Laboratório Nacional de Computação Científica

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

Universidade Federal do Paraná

Juiz de Fora, 28/07/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Hugo Danilo Fernandez Sare**, **Professor(a)**, em 01/08/2022, às 10:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **higidio Portillo Oquendo**, **Usuário Externo**, em 08/08/2022, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Eduard Toon**, **Professor(a)**, em 14/09/2022, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jaime Edilberto Munoz Rivera**, **Usuário Externo**, em 26/09/2022, às 11:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0886361** e o código CRC **C7FC7E10**.

Dedico este trabalho aos meus pais e às minhas irmãs.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, à vida e suas possibilidades. Agradeço aos meus pais, Rosa X. Zambrano Rivas e José Gregorio Nava, por acreditar em mim sem dúvida em todo momento.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Hugo D. Fernández Sare, por toda sua paciência, seus ensinamentos, apoio, conselhos, por ter aceitado a árdua tarefa de me orientar e fornecer o suporte que precisei diante das dificuldades neste trabalho.

Agradeço aos meus professores de graduação por todos os seus ensinamentos, apoio e conselhos, também aos professores de pós-graduação que apesar da pandemia estavam dando o melhor para nossa formação.

Agradeço à Paula Mara dos Reis e a todos os responsáveis pela gestão do departamento de matemática pelo bom trabalho e dedicação.

Agradeço a minhas irmãs e a todos aqueles amigos que de alguma forma contribuíram para a minha vida, principalmente os da minha infância e os que foram colegas nos meus estudos.

Finalmente agradeço ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), tendo financiado meus estudos.

RESUMO

Neste trabalho, analisaremos a existência, unicidade e comportamento assintótico para um sistema de Timoshenko com distintos tipos de dissipação, empregando a técnica de semigrupos de operadores lineares. Ao longo do trabalho, estudaremos a boa colocação para três tipos de dissipação na fronteira e vamos impor condições sobre o sistema para garantir estabilidade exponencial. Para existência e unicidade, vamos fazer uma abordagem estudando o sistema como um problema de Cauchy Abstrato na teoria de semigrupos de operadores, fazendo uso de ferramentas como: espaços de Sobolev, Espaços de Hilbert e análise funcional, isto para cada um dos casos estudados. Para a estabilidade exponencial das soluções do Problema abstrato de Cauchy, vamos utilizar distintas técnicas incluindo: imersões nos espaços de Sobolev, teoria espectral de operadores lineares e algumas desigualdades clássicas da análise funcional.

Palavras-chave: 1. Sistemas de Timoshenko. 2. Dissipação na fronteira. 3. Existência e unicidade 4. Decaimento exponencial.

ABSTRACT

In this work, we will analyze the existence, uniqueness and asymptotic behavior for a Timoshenko System with distinct types of dissipation, employing the technique of semigroups of linear operators. Throughout the work, we will study well-posedness for three types of dissipation on the boundary and we will impose conditions on the system to ensure exponential stability. For existence and uniqueness, we will take an approach by studying the system as an Abstract Cauchy problem in the semigroup theory of operators, making use of tools such as: Sobolev spaces, Hilbert spaces and functional analysis, this for each case studied. For the exponential stability of the solutions of the Abstract Cauchy Problem, we will use different techniques included: immersions in Sobolev spaces, spectral theory of linear operators and some classical inequalities of functional analysis.

Keywords: 1. Timoshenko Systems. 2. Dissipation. 3. Existence and uniqueness 4. Exponential decay.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Obs.	Observação.
Just.	Justificação.
D. Poincaré	Desigualdade de Poincaré.
D. Holder	Desigualdade de Hölder.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{K}$	O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ ou o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.
Ω	Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$
$med(\Omega)$	Medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto Ω.
$\\|\cdot\\|_X$	Norma de um espaço normado X.
$(\cdot,\cdot)_X$	Produto interno de um espaço X.
U^T	O vector transposto de $U \in \mathbb{R}^m$.
$\overline{A}$	Fecho de um conjunto A.
$\mathcal{D}(\mathcal{A})$	Domínio do operador $\mathcal{A}$.
$im(\mathcal{A})$	Imagem do operador $\mathcal{A}$ em todo seu domínio.
$img(z)$	Parte imaginaria de un número complexo z.
$\mathcal{R}e(z)$	Parte real de un número complexo z.
$\overline{z}$	Conjugado de um número complexo z.
$R(\mathcal{A};\lambda)$	Operador resolvente de $\mathcal{A}$ com valor regular λ.
$\rho(T)$	Conjunto resolvente do operador T, isto é, o conjunto de todos os valores regulares de T.
$\sigma(T)$	Espectro do operado T, isto é, o conjunto complementar do resolvente.
$supp(\varphi)$	O fecho do subconjunto do domínio de φ tal que seus elementos tem imagem distinta de 0.
C_0^∞	Espaço das funções infinitamente diferenciais com todas as derivadas contínuas com suporte compacto.
$L_p(\Omega)$	O espaço da classe de funções f mensuráveis, definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $\|f\|^p$ é integrável no sentido Lebesgue em Ω.
$\\|\cdot\\|_{L_p(\Omega)}$	Norma usual do espaço $L_p(\Omega)$
D^α	Operador derivação de ordem α dado por $D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{\|\alpha\|}\varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, com $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espaço das funções teste.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espaço das distribuições.
$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle$	Derivada de ordem α no sentido das distribuições.
$W^{m,p}$	Espaço de Sobolev. Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ e $m \in \mathbb{N}$ o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um subespaço de $L_p(\Omega)$ formado pelas classes de funções $f \in L_p(\Omega)$ tais que, para todo multi-índice α com $\|\alpha\| \le m$, $D^\alpha f$ existe (no sentido fraco) e está em $L_p(\Omega)$.
H^m	Espaço de Sobolev com $p = 2$
H_0^m	O fecho espaço de Sobolev com $p = 2$ em C_0^∞
V_0^m	O subespaço de $\mathcal{H}^m$ tal que seus elementos em 0 são 0.
$\mathcal{L}(X)$	O espaço das transformações lineares limitadas sobre X.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, vamos estudar o comportamento assintótico de um sistema de Timoshenko, o qual modela as vibrações de uma corda de comprimento finito, e que é objeto de pesquisa principalmente por: engenheiros, físicos e matemáticos, porque tem aplicações em áreas como: aeronáutica, robótica, estruturas, entre outras. Mais especificamente, trabalharemos no estudo qualitativo do sistema de Timosheko a seguir:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0, \end{aligned}$$

onde $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho$, $b = EI$ e $\kappa = kAG$, são contantes positivas dadas pelo fenômeno. As especificações deste sistema, vamos estudá-las no capítulo 2, na seção 2.5, onde iremos fazer uma abordagem breve sobre este modelo. O modelo de acima foi desenvolvido no ano 1921, por Stephen Prokfievich Timosheko (ver [1]) e desde então foram estudados uma grande quantidade de casos para o mesmo sistema, sejam em casos de dissipação da energia ou outras propriedades associadas ao estudo das vigas, dentre estas referências podemos citar: casos de dissipação do tipo friccional ver [2], casos de dissipações do tipo térmico ver [3], elásticos e combinações destes ver [4], ou para efeito de memória parcial ver [5]. Para o estudo do sistema, vamos fazer uma abordagem desde a teoria de semigrupo, estudando o problema, desde um problema abstrato de Cauchy associado (ver [6]);

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} &= \mathcal{A}V(t) \quad t > 0 \\ V(0) &= V_0, \end{cases}$$

onde $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador associado ao sistema, *não necessariamente limitado* e definido em $\mathcal{H}$, um espaço de Hilbert. Então, em virtude de: o método da energia, ferramentas da análise funcional na teoria de operadores, teoria de semigrupos de operadores, baseado em teoremas como: o Teorema de Hille-Yosida e o Teorema de Lummer-Phillips, podemos obter, resultados de existência e unicidade de soluções. Adicionalmente, o estudo da estabilidade das soluções do sistema de Timoshenko, também é equivalente ao estudo da estabilidade da solução do problema abstrato de Cauchy, então, dependendo do tipo de dissipação, podem ser usadas distintas técnicas, no estudo do comportamento assintótico.

A estrutura deste trabalho é a seguinte: No capítulo 2, vamos dar noções das ferramentas usadas para desenvolver o problema abordado, dividido em 5 seções: espaços normados e operadores lineares, espaços L_p, espaços de Sobolev, semigrupos de operadores e sobre o modelo de Timoshenko, isto para conduzir a uma compreensão sequencial com definições, propriedades e teoremas, enquadrado em uma estrutura completa, mas sem demonstrações.

No capítulo 3, estudaremos o sistema de Timoshenko apresentado aqui, com dissipação na fronteira: Dirichlet num extremo da viga e dissipação do tipo Neumman no outro, ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi(0,t) = \psi(0,t) &= 0 \\ \kappa(\varphi_x + \psi)(L,t) &= \alpha\varphi_t(L,t) \\ b\psi_x(L,t) &= \beta\psi_t(L,t). \end{aligned}$$

Aqui, vamos abordar o sistema desde a teoria de semigrupos, isto é, estudaremos o problema de Cauchy equivalente na teoria de semigrupos, veremos que o operador $\mathcal{A}$ associado ao sistema, verifica as condições para o teorema de existência e unicidade para o problema Abstrato de Cauchy, vamos fazer isso, a partir de técnicas da análise funcional, mais especificamente, propriedades de operadores lineares e espaços de Hilbert. Neste caso, para a estabilidade exponencial das soluções, vamos proceder de forma direta, seguindo as ideias apresentadas em [7], esta prova será dada de forma geral (isto é, para qualquer relação entre os coeficientes do sistema) servindo de exemplo e motivação para o seguinte caso de dissipação no próximo capítulo, onde não é possível mostrar em geral o decaimento exponencial.

No capítulo 4, vamos estudar o sistema de Timoshenko apresentado aqui, com um segundo caso de dissipação na fronteira: Num dos extremos da viga Dirichlet, e no outro extremos Neumman apenas na função ψ e Dirichlet em φ, ou seja;

$$\begin{aligned} b\psi_x(L,t) &= \gamma\psi_t(L,t) \\ \varphi(0,\cdot) = 0, \quad \varphi(L,\cdot) &= 0, \quad \psi(0,\cdot) = 0. \end{aligned}$$

Neste caso, vamos estudar o problema baseado em [8], com a diferença que a dissipação trabalhada neste artigo é no outro extremo da viga. Além disso, diferentemente do caso anterior, temos que impor a condição

$$\frac{b}{\rho_2} = \frac{\kappa}{\rho_1},$$

para garantir a estabilidade exponencial, porque no caso geral é apenas possível mostrar estabilidade polinomial, ver [9]. Vamos provar estabilidade exponencial por a caracterização dada pelo Teorema de Prüss, ver Teorema 2.4.6. Assim, analisaremos propriedades do conjunto resolvente e do operador resolvente da $\mathcal{A}$. Os resultados expõem em detalhes as condições para que o sistema possua decaimento.

Para finalizar, no capítulo 5, consideramos sistema de Timoshenko do capítulo anterior e introduzimos um efeito térmico, aumentando o grau de dificuldade com respeito a sua abordagem. Vamos impor condições nas constantes do sistema, para que tenha energia associada dissipativa e assim garantir a existência e unicidade a partir da teoria de semigrupo. O sistema é,

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x &= 0 \\ a\vartheta_{tt} - \kappa_0\vartheta_{xx} + \beta\psi_{xt} &= 0, \end{aligned}$$

onde a temperatura θ e o deslocamento térmico ϑ estão relacionados pela equação

$$\vartheta_t(t,x) = \theta(t,x)\,,$$

com as condições iniciais (Timosheko)

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1 \;\; \psi(0,\cdot) = \psi_0, \;\; \psi_t(0,\cdot) = \psi_1$$

e (efeito térmico)

$$\vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0(x), \;\; \vartheta_t(0,\cdot) = \theta_0(x),$$

considerando a dissipação

$$b\psi_x(t,L) = -\gamma\psi_t(t,L),$$

onde γ é um coeficiente viscoso estritamente positivo, e as seguintes condições de contorno:

$$\varphi(\cdot,0) = 0, \quad \varphi(\cdot,L) = 0, \quad \psi(\cdot,0) = 0,.$$

e (Dirichlet) para θ, ou seja,

$$\theta(\cdot,0) = 0, \quad \theta(\cdot,L) = 0.$$

Na última seção, vamos mencionar os problemas encontrados no desenvolvimento do trabalho, possíveis abordagens a problemas que surgem a partir dos apresentados aqui e mencionamos, uma breve análise e comparação sobre os resultados obtidos.

2 PRELIMINARES

A seguir apresentaremos definições e resultados básicos, que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Introduziremos conceitos como: espaços L_p, distribuição e espaços de Sobolev. Também apresentaremos uma parte fundamental da teoria básica de semigrupos, conceitos da análise funcional e alguns exemplos simples.

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de espaço de Banach, propriedades de operadores lineares e bilineares, e algumas desigualdades clássicas, esses conceitos vamos usar posteriormente na seção da teoria de semigrupos de operadores.

Definição 2.1.1. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:*

1. $\|x\|_X = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$
2. $\|\lambda x\|_X = |\lambda|\|x\|_X$ *para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e todo* $x \in X$
3. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ *para todos* $x, y \in X$.

Observação 2.1.1. Ao par $(X, \|\cdot\|_X)$ chamamos de espaço normado. Usualmente chamaremos só de X.

Definição 2.1.2. *Seja X um espaço normado. Dizemos que X é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X é convergente, na métrica induzida pela norma.*

Definição 2.1.3. *Seja X um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ duas normas em X. Vamos dizer que a norma $\|\cdot\|_1$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $a > 0$ e $b > 0$, tais que:*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \text{ para todos } x, y \in X.$$

Definição 2.1.4. *Sejam X um espaço vetorial normado e $(x_n)_n$ uma sequência em X. Considere $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ a sequência de somas parciais da série $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Se existir o limite $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$, dizemos que a série $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é convergente e s o chamamos soma da série. Se $(s_n)_n$ não convergir, vamos dizer que a série $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é divergente e dizemos que uma série $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é absolutamente convergente, se a série numérica $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_X$ converge.*

Proposição 2.1.1. *Seja $(x_n)_n$ um sequência em X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um número real $M_n \geq 0$ satisfazendo $\|x_n\|_X \leq M_n$. Se $\sum_{i=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é absolutamente convergente.*

Demonstração. Ver [10] seção 12 página 175. □

Proposição 2.1.2. *Suponha que $(f_n : A \to X)_n$ é uma sequência de funções definidas em um conjunto A e que exista uma sequência de números positivos $(M_n)_n$ satisfazendo que para todo $n \in \mathbb{N}$ cumpre para todo $x \in A$, $\|f_n(x)\|_X \leq M_n$. Se $\sum_{i=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente e uniformemente.*

Demonstração. Ver [10] pagina 179, Teorema 5. □

Vamos introduzir noções sobre operadores lineares e bilineares.

Definição 2.1.5. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. vamos dizer que um operador $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ é linear quando:*

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e todos } x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Definição 2.1.6. *(Forma Sesquilinear). Seja V um espaço vetorial complexo. Uma forma sesquilinear de V é uma aplicação*

$$a : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$(u, v) \mapsto a(u, v)$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$ *para todo* $u, v, w \in V$.
2. $a(\lambda u, w) = \lambda a(u, w)$ *para todos* $u, w \in V$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$ *dados* $u, w \in V$. *para todo*
4. $a(u, \lambda w) = \bar{\lambda} a(u, w)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 2.1.7. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado X. $a(\cdot, \cdot)$ é denominada limitada, se existe uma constante $c > 0$ tal que:*

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|_X \|v\|_X, \text{ para todo } u, v \in X.$$

Definição 2.1.8. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado X. $a(\cdot, \cdot)$ chamaremos de coerciva, se existe uma constante $c > 0$ tal que:*

$$\mathcal{R}e(a(u, v)) \geq c\|v\|_X^2, \text{ para todo } v \in X.$$

Definição 2.1.9. *Sejam X e Y espaços normados. Chamaremos uma transformação linear $T : X \to Y$ de limitada, se existe uma constante $c > 0$ tal que:*

$$\|T(v)\| \leq c\|v\|_X \text{ para todo } u \in X.$$

Definição 2.1.10. *Seja V um espaço vetorial complexo. chamamos de antilinear um funcional $T : V \to \mathbb{C}$ se:*

1. *$T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v, w \in V$.*

2. *$T(\lambda u) = \bar{\lambda} T(u)$ para todo $u \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Definição 2.1.11. *Se X é um espaço vetorial normado, denotamos por X' o espaço de Banach $\mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = \{T : X \to \mathbb{C} | T$ é um operador linear e limitado$\}$ e vamos chamá-lo dual topológico de X.*

Teorema 2.1.1. ***(Lax-Milgran)**. Sejam H um espaço de Hilbert e*

$$a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

uma forma sesquilinear limitada e coerciva. Então, para todo funcional antilinear limitado $T : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ existe um único $u \in \mathcal{H}$. tal que

$$a(u, v) = T(v) \text{ para todo } v \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. Ver [11], Corolário 6.6.2, página 529. □

Observação 2.1.2. Este teorema será uma ferramenta muito útil na busca de soluções fracas de sistemas de equações parciais elípticas.

Definição 2.1.12. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ um operador linear. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que:*

1 Existe o operador $(T - \lambda I)^{-1}$

2 $(T - \lambda I)^{-1}$ é um operador limitado

3 O domínio de $(T - \lambda I)^{-1}$ é denso em X.

Definição 2.1.13. *Definimos o conjunto resolvente de T como o conjunto de todos os valores regulares de T e escrevemos*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é um valor regular } \}.$$

Ao conjunto complementar o denotamos por $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ e chamamos de espectro T.

Observação 2.1.3. O espectro de um operador T pode ser decomposto em três partes disjuntas:

1. Espectro pontual, representado por $\sigma_p(T)$, são formados por todos os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ não é injetor. Os valores em $\sigma_p(T)$ são chamados de autovalores.

2. Espectro contínuo, representado por $\sigma_c(T)$ formado por todos os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ é injetor, tem imagem densa e não é sobrejetor.

3. Espectro residual, representado por $\sigma_r(T)$ formado por todos os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ é injetor, não é sobrejetor e tem imagem que não é densa.

Definição 2.1.14. *Um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é compacto se para cada sequência $(x_n)_n$ limitada em X, a sequência $(T(x_n))_n$ tem uma subsequência convergente em Y.*

Definição 2.1.15. *(Operador com resolvente compacto). Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente não vazio. Dizemos que, $\mathcal{A}$ possui resolvente compacto, se existe $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ tal que o operador $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto.*

Definição 2.1.16. *Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y.*

Definição 2.1.17. *Sejam X um espaço vetorial e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que $0 \neq x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ é autovetor de $\mathcal{A}$ quando existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{A}x = \lambda x$. Nesse caso dizemos que λ é autovalor de $\mathcal{A}$ associado a x.*

Proposição 2.1.3. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente compacto. Então, $\sigma(\mathcal{A})$ é composto apenas por autovalores de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Ver [12] , Corolário 1.15. □

Lema 2.1.1. *Sejam X um espaço de Banach e $S : X \to X$ um operador linear contínuo com inversa contínua. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ satisfaz*

$$\|B\|_L \leq \frac{1}{\|S^{-1}\|_L},$$

então $S + B$ é um operador linear inversível, com inversa contínua.

Demonstração. Ver [6] , página 90, Lema 2.12.1. □

Lema 2.1.2. *Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então existe $\lambda > 0$, tal que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Temos que mostrar $(\lambda I - \mathcal{A})$ é invertível e sua inversa é contínua, ou seja, o operador $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ existe e é contínuo.
Então, como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que $\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I)$, no domionio de $\mathcal{A}$. Mais ainda, $\lambda = \dfrac{1}{2\|(\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}} > 0$. Logo, escrevemos $S = -I$ e $\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}^{-1}$, então, notamos que

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{H}} = \|\lambda \mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{H}}}.$$

Além disso, em virtude de que $S+\mathcal{B}=\lambda\mathcal{A}^{-1}-I$, então, do Lema 2.1.1, temos que $\lambda\mathcal{A}^{-1}-I$ é invertível e com sua inversa contínua, novamente, como $0\in\rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1}-I)$ é invertível, portanto $\lambda I-\mathcal{A}$ é invertível, com inversa contínua $(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}=(\mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1}-I))^{-1}$. □

Definição 2.1.18. *Operador dissipativo. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um operador linear $\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset X\to X$ é dissipativo, se para todo $x\in\mathcal{A}$ existe $x^*\in\{x^*\in X^*\,|\langle x^*,x\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|_*\}$, tal que $\mathcal{R}e\langle x^*,x\rangle\leq 0$.*

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach. Considere $\mathcal{A}$ um operador dissipativo em $\mathcal{H}$. Se para algum $\lambda_0>0$ se cumpre que $im(\lambda_0 I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$, então $im(I\lambda-\mathcal{A})=\mathcal{H}$ para todo $\lambda>0$.*

Demonstração. Ver teorema 4.5, página 15, em [13]. □

Teorema 2.1.3. *Considere A um operador dissipativo em $\mathcal{H}$ cumpre que $im(I-A)=\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ é reflexivo então $\overline{D(A)}=\mathcal{H}$.*

Demonstração. Ver teorema 4.6, página 16 em [13]. □

As seguintes desigualdades são fundamentais, para construção dos espaços L_p e o cálculo de estimativas.

Proposição 2.1.4. *Sejam números reais $a,b\geq 0$ e $p\geq 1$. Então*

$$(a+b)^p\leq 2^p(a^p+b^p)$$

Demonstração. Ver [14], página 87, Lema 5.2.3. □

Proposição 2.1.5. *Sejam números reais $a,b\geq 0$ e $p,q>1$. São tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ então*

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^p}{q}.$$

Demonstração. Ver [14], página 171, Lema 8.2.12. □

Lema 2.1.3. *Sejam a e b números reais não negativos e $0<\lambda<1$ Então,*

$$a^\lambda b^{1-\lambda}\leq\lambda a+(1-\lambda)b$$

Demonstração. Ver [14], página 171, Lema 8.2.12. □

Proposição 2.1.6. *Sejam números reais $a,b\geq 0$ e $p,q>1$. São tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e dado $\varepsilon>0$ temos que*

$$ab\leq c(\varepsilon)a^p+\varepsilon b^q.$$

Demonstração. Ver [14], página 171, Lema 8.2.12. □

2.2 ESPAÇOS L_p

Nesta seção, vamos apresentar conceitos básicos e propriedades, sobre os espaços L_p, estes serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, devido a que estaremos trabalhando tanto nestes espaços, como em subespaços deles.

Definição 2.2.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e seja* $0 < p < \infty$. *Seja* $\mathscr{L}_p(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $|f|^p$ *é integrável (no sentido Lebesgue) em* Ω. *vamos dizer que duas funções* $f, g \in \mathscr{L}_p(\Omega)$ *são equivalentes* ($f \sim g$), *se* $f = g$ *quase sempre em* Ω. *Indicamos por* L_p *o conjunto* $L_p = \mathscr{L}_p(\Omega)/\sim$.

Observação 2.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $1 < p < \infty$.
Então $L_p(\Omega)$ é um espaço vetorial.
$L_p(\Omega)$ é um espaço de Banach, com norma

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.1}$$

Ver [15].

Teorema 2.2.1. *(Desigualdade de Hölder). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e sejam* p *e* q *expoentes conjugados, se* $1 \leq p \leq \infty$. *Se* $f \in L_p(\Omega)$ *e* $g \in L_q(\Omega)$ *, então* $fg \in L_1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [15], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 2.2.2. *(Desigualdade de Minkowski). Sejam* $f, g \in L_p(\Omega)$ *e,* $1 \leq p \leq \infty$ *então*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [16], páginas 13-15. □

Definição 2.2.2. *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$. *Um produto interno sobre* X *é uma aplicação* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ *que cumpre com*

1. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$.
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ *dados* $x, y \in X$. *para todos* $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(z, y) = \overline{(y, z)}$ *para todos* $z, y \in X$.
4. $(x, x) > 0$ *se* $x \in X \backslash \{0\}$.

Definição 2.2.3. *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *(reais ou complexos) e* $(\cdot,\cdot)_\mathcal{H}$ *um produto interno, então* $\mathcal{H}$ *é um espaço de Hilbert se for completo (Espaço de Banach) com a norma induzida pelo produto interno:*

$$\|x\|^2_\mathcal{H} = (x, x)_\mathcal{H}$$

Teorema 2.2.3. *O espaço $L_2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por:*

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx, \text{ para qualquer } f,g \in L_2(\Omega).$$

Demonstração. Ver [17], Corolário 2.18, página 31. □

Observação 2.2.2. A norma usual em L_2 é a norma que provem do produto interno apresentado aqui, mais precisamente a norma na equação (2.2.1).

Definição 2.2.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função continua. O Suporte de φ é o conjunto*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Denota-se por $C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : supp(\varphi)$ é um conjunto compacto $\}$.

Observação 2.2.3. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$, ao espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

Proposição 2.2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [17], Teorema 2.30, página 38. □

Teorema 2.2.4. *(Du Bois Raymond) Seja $f \in L_p(\Omega)$ tal que:*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $f = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Ver [18], Proposição 4, página 20. □

2.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção, vamos a dar noções sobre: espaço das distribuições, derivada fraca, espaços de Sobolev, imersões contínuas nos espaços de Sobolev e algumas desigualdades importantes. Esta seção é fundamental, pois as soluções dos sistemas que abordaremos, serão soluções fracas nos espaços de Sobolev.

Agora, se num sistemas equações diferencias parciais os dados inicias ou as condições de fronteira, não tem suficiente regularidade, podemos ter dificuldades na busca de soluções, o que nos leva a dar um novo conceito de derivada, que permita a abordagem desses problemas. Então, vamos introduzir algumas definições preliminares a este conceito.

Definição 2.3.1. *Seja $(\varphi_\mu)_\mu \subset C_0^\infty$. Dizemos que $(\varphi_\mu)_\mu$ é convergente a $\varphi \in C_0^\infty$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existe um compacto K, tal que $supp(\varphi_\mu - \varphi) \subset K$*

2. *Para cada* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *e* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *a sequencia* $D^\alpha \varphi_\mu$ *converge uniformemente para* $D^\alpha \varphi$ *em* K, *onde* D^α *representa o operador derivação de ordem* α *dado por* $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, *com* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Observação 2.3.1. O espaço C_0^∞ com esta noção de convergência o chamaremos de espaço das funções teste e o denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definemos distribuição sobre Ω, a toda transformação linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual o representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que uma sucessão $(T_\mu)_\mu \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, é convergente para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sucessão numérica $(\langle T_\mu, \varphi\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, onde $\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi)$ e $\langle T_\mu, \varphi\rangle = T_\mu(\varphi)$.

Observação 2.3.2. Se consideramos uma distribuição T, sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada de ordem α de T no sentido das distribuições, a definimos por,

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Além disso, podemos verificar que a aplicação $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por $T \mapsto D^\alpha T$, é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 2.3.2. *(Derivada fraca). Sejam* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, *um multi-índice* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $1 \le p \le \infty$ *e* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *vamos dizer que uma função* $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ *é a derivada parcial fraca de ordem* α *de* f *quando*

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observação 2.3.3. Se $f \in C^k(\Omega)$, então f possui derivada parcial fraca de ordem α e esta coincide com sua derivada parcial clássica de ordem α, para todo α satisfazendo $|\alpha| \le k$. Ver [19].

Definição 2.3.3. *(Espaços de Sobolev* $W^{m,p}$*). Sejam* Ω *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *O espaço* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um subespaço de* $L_p(\Omega)$ *formado pelas classes de funções* $f \in L_p(\Omega)$ *tais que, para todo multi-índice* α *com* $|\alpha| \le m$, $D^\alpha f$ *existe (no sentido fraco) e está em* $L_p(\Omega)$.

Observação 2.3.4. Se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, então f possui derivada distribucional de ordem α e esta coincide com sua derivada parcial fraca de ordem α, para todo α satisfazendo $|\alpha| \le m$.

No espaço $W^{m,p}(\Omega)$ definimos $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ por

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_{L_p},$$

então, podemos mostrar que $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$, define uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 2.3.1. *$W^{m,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [17], Teorema 3.3. □

Observação 2.3.5. O espaço $W^{m,2}(\Omega)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$ é um espaço de Hilbert, denotado por $H^m(\Omega)$ e no qual o produto interno é dado por

$$(f,g)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2}.$$

Observação 2.3.6. Notemos que $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$ provem de $(f,g)_{H^m}$.

Definição 2.3.4. *(Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$). Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial formado pelo fecho de C_0^∞ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observação 2.3.7. Da definição de $W_0^{m,p}(\Omega)$, temos que $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ é um espaço de Banach. Denotamos $W_0^{m,2}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$.

Observação 2.3.8. Agora, vamos introduzir um teorema que é muito útil e vamos usar neste trabalho diversas vezes no momento de fazer estimativas que estão relacionadas com a função e sua derivada.

Teorema 2.3.2. *(Desigualdade de Poincaré) Sejam Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$, então existe uma constante $C_p > 0$, tal que*

$$\|f\|_{L_p} \leq C_p \|\nabla f\|_{L_p} \text{ para todo } f \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

Demonstração. Ver [19], Teorema 1. pagina 275. □

Teorema 2.3.3. *Seja Ω um conjunto aberto conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$. Se a identidade de $H^1(\Omega)$ em $L_2(\Omega)$ é compacta, então temos que para todo $u \in H^1(\Omega)$, se cumpre*

$$\|u\|_{L_2}^2 - \frac{1}{med(\Omega)} \left| \int_\Omega u(x)dx \right|^2 \leq C \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2}^2,$$

onde $C = C(\Omega) > 0$ é uma constante positiva dependente de Ω.

Demonstração. Ver [20] , página 127, proposição 2. □

Corolario 2.3.1. *Vamos supor que Ω é um conjunto aberto conexo e limitado com fronteira Γ clase C^1, onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e Γ_2 têm medida positiva, além disso, se cumpre que*

$$V_{\Gamma_2} = \{u \in H^1(\Omega) : u\Big|_{\Gamma_2} = 0\}$$

é fechado no espaço $H^1(\Omega)$, então

$$\|u\|_{V_{\Gamma_2}} = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2}$$

é uma norma equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [20], página 129, Remark 4. □

Teorema 2.3.4. *(Integração por partes). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u, v \in W^{1,p}$, então $u\,v \in W^{1,p}$. Além disso $\dfrac{\partial(u\,v)}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} v + u \dfrac{\partial v}{\partial x}$ e*

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial u}{\partial x}(x)\, v(x)\, dx = u(\beta)\, v(\beta) - u(\alpha)\, v(\alpha) - \int_\alpha^\beta u(x)\, \frac{\partial v}{\partial x}(x)\, dx$$

quaisquer sejam $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}$.

Demonstração. Ver Lema 8.2. em [15] □

Observação 2.3.9. Este teorema é muito útil para conseguir a derivada fraca quando conhecemos condições de anulação nos limites da integral.

2.4 SEMIGRUPOS DE OPERADORES

Nesta seção, apresentaremos, a teoria básica de semigrupos de operadores, na qual será baseada a abordagem dos problemas apresentados neste trabalho. Vamos introduzir um exemplo de motivação, para destacar as propriedades que eles tem em operadores limitados e estenderemos estes conceitos a operadores não necessariamente limitados. Esta teoria é bem utilizada em problemas de equações diferenciais parciais, entre os exemplos mas famosos podemos citar, equação do calor, equação da onda e mistura destas.

Definição 2.4.1. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados se:*

(i) $S(0) = I$.

(ii) $S(s+t) = S(s)S(t)$ *para todos* $s, t \in \mathbb{R}^+$.

e chamaremos de semicontínuo ou classe C_0, se

(iii) $\lim_{t \to 0^+} (\|(S(t) - I)x\|_X) = 0. \qquad \forall x \in X$

Definição 2.4.2. *(Gerador Infinitesimal). Considere*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x \in X : \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{S(t) - I}{t} x \right) \text{ existe } \}.$$

O operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{S(t) - I}{t} x \right)$$

chamamos de gerador infinitesimal do semigrupo S.

Exemplo 2.4.1. *Se $\mathcal{A}$ é um operador limitado, então $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é um semigrupo, onde*

$$e^{\mathcal{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n \mathcal{A}^n}{n!} = \frac{t_0 \mathcal{A}^0}{0!} + \frac{t_1 \mathcal{A}^1}{1!} + \dots$$

Demonstração. ver [21], Teorema 1.57, página 43. □

Proposição 2.4.1. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t > 0$ definimos*

$$T(t) = e^{At} = I_X + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n A^n}{n!}.$$

Então

1. $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\|T(t)\|_{\mathcal{L}_X} \leq e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}_X}}$.
2. $\lim\limits_{t \to 0}(\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}_X}) = 0$.
3. $\lim\limits_{t \to 0} \left\| \frac{T(t)-I}{t} - \mathcal{A} \right\|_{\mathcal{L}_X} = 0$.

Demonstração. Para provar 1. Primeiramente, lembremos que, se $A, B \in \mathcal{L}(X)$, então se cumpre que $A\,o\,B \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\,o\,B\|_{\mathcal{L}_X} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_X} \|B\|_{\mathcal{L}_X}$, portanto para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{\|t^n \mathcal{A}^n\|_{\mathcal{L}_X}}{n!} \leq \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X} := M_n.$$

Agora, como a serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_n$ converge para $e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}_X}}$, em virtude da Proposição 2.1.1, obtemos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{t^n \mathcal{A}^n}{n!}$ é absolutamente convergente e

$$\begin{aligned}
\|T(t)\|_{\mathcal{L}_X} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}_X} \\
&= \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{t_n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}_X} \\
&\leq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X} \\
&= e^{t\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}_X}}.
\end{aligned}$$

Provemos 2.
Notamos que,

$$T(t) - I_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n A^n}{n!} - I_X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n A^n}{n!}.$$

Logo, como tomaremos limite de t para 0, sem perda de generalidade podemos considerar $t \leq 1$ e definimos para cada n a função $fn : [0, 1] \to \mathcal{L}(X)$ por

$$f_n(t) = \frac{t^n \mathcal{A}^n}{n!},$$

logo, para $t \in [0,1]$, podemos ver que

$$\|f_n(t)\|_{\mathcal{L}_X} = \|\frac{t^n \mathcal{A}^n}{n!}\|_{\mathcal{L}_X} \leq \frac{\|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X}}{n!} = M_n,$$

daí, como a serie $\sum_{i=1}^{\infty} M_n$ é convergente, em virtude da Proposição 2.1.2, concluimos que $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente e uniformemente. Por outro lado, fixado $n \in \mathcal{N}$, temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^n \|\mathcal{A}^n\|_{\mathcal{L}_X}}{n!} = 0,$$

mais ainda

$$0 \leq \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}_X} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}_X} \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X}. \tag{2.4.1}$$

Logo, tendo em conta que a serie é convergente, podemos observar que

$$\lim_{t\to 0} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lim_{t\to 0} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{A}\|^n_{\mathcal{L}_X} = 0.$$

Então, tomando limite e substituindo igualdad acima em (2.4.1), podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}_X} = 0.$$

Finalmente, mostremos 3.
Notamos que

$$\lim_{t\to 0} \left(\left\| \frac{T(t) - I}{t} - \mathcal{A} \right\|_{\mathcal{L}_X} \right) = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t_n A^{n-1}}{n!} \right\|_{\mathcal{L}_X}.$$

Então, é somente útilizar um argumento análogo ao que usamos em 2. □

Esta proposição é motivação para o seguinte teorema e proposição, onde $\mathcal{A}$ é um operador arbitrário.

Teorema 2.4.1. *Se $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então existe uma constante $\omega \geq 0$ e $M \geq 0$, tal que, $\|S(t)\|_X \leq Me^{\omega}$ para todo $0 \leq t < \infty$.*

Demonstração. Ver [13] Teorema 2.2. pagina 4. □

Corolario 2.4.1. *Se $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo classe C_0, então para todo $x \in X$, $t \mapsto S(t)x$ é uma função contínua de $\mathbb{R}_0^+$ (os reais não negativos) em X.*

Demonstração. Ver [13] Corolário 2.3. pagina 4. □

Lema 2.4.1. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo S classe C_0 dado por $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, então é valida a contenção*

$$e^{\sigma(S(t))} \subset \sigma(S(t)).$$

Demonstração. Ver [22] Lema 2.3.1. pagina 21. □

Proposição 2.4.2. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$*

(i) Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $t \geq 0$ e

$$\mathcal{A}x = \frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x.$$

(ii) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x\mathrm{d}\tau = \int_s^t S(\tau)Ax\mathrm{d}\tau.$$

(iii) Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $\int_0^t S(\tau)x\mathrm{d}\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e

$$S(t)x - x = \mathcal{A}\int_0^t S(\tau)x\mathrm{d}\tau.$$

Demonstração. [13] página 4, Teorema 2.4. □

Proposição 2.4.3. *(i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

(ii) Um operador linear $\mathcal{A}$, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo um semigrupo de classe C_0.

Demonstração. Ver [13] pagina 5, Corollary 2.5. □

Agora apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0 e dos semigrupos de contrações.

Teorema 2.4.2. ***(Hille-Yosida)***. *Para que um operador linear $\mathcal{A}$, definido no subespaço vetorial $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X$ e com valores em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ de classe C_0 tal que $\|S(t)\|_X \leq 1$, $t > 0$ é necessário e suficiente que:*

(i) $\mathcal{A}$ seja fechado e seu domínio seja denso em X.

(ii) Que o conjunto resolvente contenha os reais positivos, $\mathbb{R}^+ \subseteq \rho(\mathcal{A})$, e cumpra com a estimativa
$\|R(\mathcal{A} : \lambda)\|_X \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Ver [13] página 8, Theorem 3.1. □

Lema 2.4.2. *Seja $\mathcal{A}$ satisfazendo as propriedades (i) e (ii) no teorema anterior e seja $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda : \mathcal{A})x = x \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração. Ver [13] página 9, Lema 3.2. □

Agora, definimos para todo $\lambda > 0$, a *Aproximação de Yosida* de $\mathcal{A}$ por

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda \mathcal{A} R(\lambda : \mathcal{A}) = \lambda^2 R(\lambda : \mathcal{A}) - \lambda I.$$

Esta família de operadores é muito importante, pois cumpre propriedades, que vão permitir aproximar o operador $\mathcal{A}$. Segue o seguinte lema,

Lema 2.4.3. *Seja $\mathcal{A}$ satisfazendo as propriedades (i) e (ii) no Teorema 2.4.2 Se $\mathcal{A}_\lambda$ é a aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{A}_\lambda x = \mathcal{A}x \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Ver [13] página 10, Lema 3.3. □

Segue do Teorema 2.4.2 o seguinte corolário.

Corolario 2.4.2. *Seja $\mathcal{A}$ o operador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$ de classe C_0. Se $\mathcal{A}_\lambda$ é a Aproximação de Yosida de $\mathcal{A}$, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{t\mathcal{A}_\lambda} x = T(t)x \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Ver [13] página 11, Lema 3.5. □

Lema 2.4.4. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ atuando num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $\mathcal{B}$ um operador linear e contínuo de $\mathcal{H}$. Então, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)e^{\mathcal{B}t}$.*

Demonstração. Ver [13] seção 1.5. página 17-22. □

Definição 2.4.3. *Dizemos que o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$ é dissipativo num espaço de Hilbert X, se $\mathcal{R}e(\mathcal{A}u, u) \leq 0$, $\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Agora, apresentamos um importante resultado, que estabelece quais são as condições para que um operador linear, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Este resultado o vamos usar na prova da existência e unicidade de soluções, de todos os problemas deste trabalho.

Teorema 2.4.3. ***(Lummer-Phillips)****. Um operador linear $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_X \leq 1$ se, e somente se,* *(i)* *o operador* $\mathcal{A}$ *é dissipativo,*

(ii) *o operador* $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ *é um operador sobrejetor, para algum* $\lambda_0 > 0$*,*

(iii) *o operador* $\mathcal{A}$ *é densamente definido.*

Demonstração. Ver [13] página 14, Theorem 4.2. □

Teorema 2.4.4. ***(Existência e unicidade)*** *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e o operador linear* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0*. Considere o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} & = \mathcal{A}U(t) \quad t > 0 \\ U(0) & = U_0 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

(i) *se* $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$*, então o problema (2.4.2) tem uma única solução* $U(t) = S(t)U_0$*, satisfazendo*

$$U \in C^1([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C([0,\infty);D(\mathcal{A}))$$

(ii) *se* $U_0 \in \mathcal{H}$*, então o problema (2.4.2) tem uma única solução* $U(t) = S(t)U_0$ *satisfazendo*

$$U \in C((0,\infty);\mathcal{H}).$$

Demonstração. Ver Teorema 2.2.2. em [23]. □

Teorema 2.4.5. *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\mathcal{A}$ *o gerador infinitesimal do semigrupo* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$*. Então* $S(t)$ *é de contrações se, e somente se* $\mathcal{A}$ *é dissipativo.*

Demonstração. Suponha que $S(t)$ é de contrações. notamos que, em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos,

$$(S(t)U,U) \leq \|S(t)U\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)\|_{\mathcal{H}}\|U\|^2_{\mathcal{H}},$$

daí, como $S(t)$ é de contrações, obtemos que

$$(S(t)U,U) \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}},$$

então,

$$(S(t)U,U) \leq (U,U),$$

portanto, temos que

$$((S(t)-I)U,U) = (S(t)U-U,U) \leq 0,$$

logo, tomado limite, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{(S(t)-I)U}{t},U\right) \leq 0,$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}U, U) \leq 0,$$

para todo $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Reciprocamente, Seja $U = S(t)w; \quad w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dS(t)w}{dt},$$

assim, em vista do Teorema 2.4.4, segue que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{AS(t)w}{dt}; \qquad U_0 = w.$$

Além disso, como sabemos que $\left(\dfrac{dU}{dt}, U\right) = (AU, U)$. e $\dfrac{d}{dt}(U(t), U(t)) = 2\left(\dfrac{dU}{dt}, U(t)\right)$, mais ainda, pelo fato de $\mathcal{A}$ ser dissipativo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 0,$$

portanto, podemos concluir

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|U(s)\|_{\mathcal{H}}^2\, ds = \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \|U(0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 0,$$

ou equivalente

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U(0)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

ou seja,

$$\|S(t)w\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|w\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Agora, vamos introduzir conceitos, que vamos usar ao longo do trabalho, no estudo do comportamento assintótico para o sistema de Timoshenko em questão.

Definição 2.4.4. *(Semigrupo exponencialmente estável.) Um semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ dizemos que é exponencialmente estável, quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 2.4.5. *Seja $S(t)_{t\geq 0}$ um semigrupo definido sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que*

$$\|S(t_0)U\|_{\mathcal{H}} < 1,$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então o semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ decai exponencialmente para zero.

Demonstração. Assumimos que existe $t_0 > 0$, tal que

$$\alpha = \|S(t_0)U\|_{\mathcal{H}} < 1,$$

então, aplicamos o algoritmo da divisão em $t > 0$ fixo, ou seja,

$$t = t_0 m + r$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < t_0$, agora, como o operador $S(t)$ é continuo em intervalos limitados, então, existe M, tal que

$$\|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M \text{ para todo } t \in [0, t_0].$$

Logo, em virtude de que $S(t)_{t\geq 0}$ é semigrupo, temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|S(t_0 m + r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|S(t_0 m)S(r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|S(t_0)^m S(r)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

daí, como $S(t)$ é contínuo, segue que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M \|S(t_0)^m\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

isto é,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M\alpha^m$$

então, como temos que $m = \dfrac{t-r}{t_0}$, podemos concluir

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M\alpha^{\frac{t-r}{t_0}} := M\alpha^{\frac{-r}{t_0}}\alpha^{t\gamma}$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{t_0}$. Logo, lembramos que

$$\alpha^\gamma = e^{\gamma ln(\alpha)} = e^{-\beta} \text{ onde } \beta > 0,$$

porque, se $\alpha < 1$, então $ln(\alpha) < 0$. portanto

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M_1 e^{-\beta},$$

isto é, o semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ decai exponencialmente para zero. □

Corolario 2.4.3. *Se $S(t)_{t\geq 0}$ decai uniformente para zero em $\mathcal{H}$, então decai exponencialmente para zero, isto é, $S(t)_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. Como $S(t)_{\geq 0}$ decai uniformemente para zero em $\mathcal{H}$, temos que

$$\lim_{t\to 0} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0$$

então, existe t_0, tal que

$$\|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1.$$

Logo, do Lema 2.4.5, segue que $S(t)_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável. □

Observação 2.4.1. No corolário anterior foi possível conseguir decaimento exponencial porque o limite era uniforme em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, porém em [9] a estabilidade se estuda em $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha}), \mathcal{H}))$ com $\alpha > 0$ e o resultado de decaimento que obtemos e do tipo

$$\|S(t)U\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t}\|U\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha})}$$

e neste caso não conseguimos o limite uniforme em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e assim não é possivél usar o colorario anterior, mais ainda, se prova que não tem decaimento exponencial.

Agora, introduziremos condições necessárias e suficientes para garantir estabilidade exponencial de um semigrupo classe C_0. Usaremos essa caracterização no capítulo 4, para provar a estabilidade exponencial da solução do problema apresentado.

Teorema 2.4.6. *(Prüss) Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo de contrações classe $\mathcal{C}_0$ num espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se ocorrem as seguintes duas condições:*

(i) $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$,

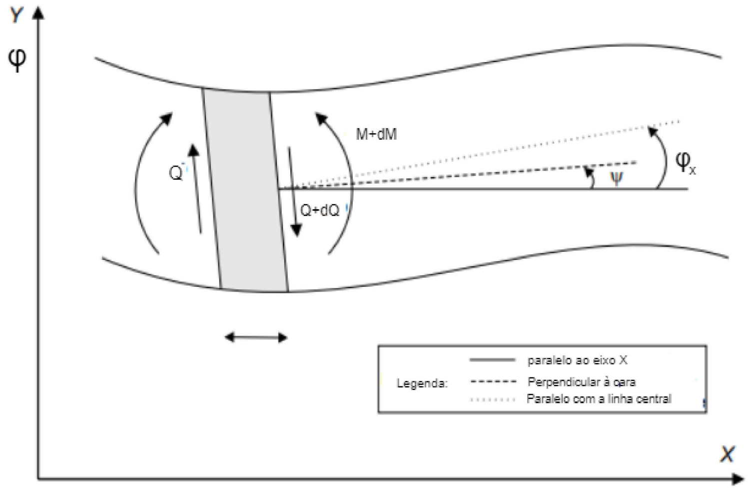
(ii) $\overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}}\|(i\lambda\mathbb{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$

Demonstração. Ver Teorema em [24] ou ver Teorema 3.5.5. em [6]. □

2.5 MODELO TIMOSHENKO

A teoria da viga de Timoshenko, foi desenvolvida pelo engenheiro ucraniano-americano Stephen Timoshenko, estabelecendo-se como um modelo matemático rigoroso amplamente utilizado para descrever a vibração transversal de vigas, foi apresentado no ano 1921, ver [1]. Historicamente, o primeiro modelo de viga importante foi a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, criada no ano de 1744. Timoshenko propôs uma melhoria adicionando o efeito de deformação por cisalhamento. Ele mostrou, através do exemplo de uma viga simples apoiada, que a correção de cisalhamento é quatro vezes mais importante devido à inércia rotacional em comparação com a teoria de Euler-Bernoulli. Ver [25].

Modelo de Timoshenko: A vibração transversal da viga depende da sua geometria e das propriedades do seu material assim como da aplicação de forças externas e torque. Entre a propriedades geométricas usuais consideradas, temos: o comprimento da viga L, área da secção transversal A, o momento de inércia da secção transversal I, com respeito ao eixo central de torção, e coeficiente laminar de Timoshenko k que é um fator mudança ($k < 1$) que influi na distribuição do estresse laminar de tal forma que a área efetiva da lâmina é igual a kA. Por outro lado, as propriedades do material consideradas são: a densidade da massa do material ρ, o módulo de rigidez G e o Módulo de Young ou Módulo de elasticidade E. Assumimos que ρ, E, G, k, A e I são todos definidos positivos, e de classe C^2.



– Figura 1:Viga Timosheko

Para a formulação, definimos φ o deslocamento transversal do eixo central numa distância x do extremo esquerdo da barra num instante t. Devido ao efeito da lâmina, o elemento originalmente retangular muda sua forma para algo parecido com um paralelogramo com lados ligeiramente curvados. O ângulo de inclinação laminar ϑ é agora igual à inclinação da curvatura ψ menos a inclinação do eixo central φ_x na forma

$$\vartheta = \psi - \varphi_x$$

e a força de cisalhamento Q é inversa à força na lâmina interna na forma

$$Q = -kAG\vartheta = -kAG(\psi - \varphi_x).$$

De forma semelhante, o momento de torção M é inverso à inércia elástica interna na forma

$$M = -EI\psi_x.$$

além disso, en vista à Figura 1, podemos descrever a força transversal e a inércia rotacional do elemento diferencial da barra através das seguintes equações diferenciais parciais:

$$M + EI\psi_x = 0 \tag{2.5.1}$$

$$Q + kAG(\psi - \varphi_x) = 0 \tag{2.5.2}$$

$$M_x - Q + \rho I\psi_{tt} = 0 \tag{2.5.3}$$

$$Q_x - \rho A\varphi_{tt} = 0. \tag{2.5.4}$$

Assim, as equações (2.5.1) e (2.5.3) envolvem movimento rotacional enquanto as equações (2.5.2) e (2.5.4) envolvem deslocamento transversal do elemento diferencial da viga. Eliminando M e Q das equações (2.5.1)-(2.5.4) obtemos duas equações diferenciais simultâneas em φ e ψ:

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{2.5.5}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{2.5.6}$$

onde $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho$, $b = EI$ e $\kappa = kAG$.
A equação (2.5.5) descreve o equilíbrio da força transversal por unidade de comprimento junto com o gradiente da força na lâmina interna, enquanto a equação (2.5.6) descreve o equilíbrio do torque rotacional por unidade de comprimento transformando-a em momento de torção interna junto com a força laminar interna. Este formulação é conveniente para encontrar o modo normal e a frequência de vibrações livres, cuja solução é dada na forma de (φ, ψ). Ver detalhes em [26, 1, 27].

3 TIMOSHENKO COM DUAS DISSIPAÇÕES NA FRONTEIRA

Neste capítulo, vamos apresentar um sistema de Timoshenko com condições, Dirichlet num extremo da viga e dissipação tipo Neumann no outro. Vamos dividir este capítulo em duas seções, numa vamos mostrar a boa colocação do sistema e na outra provaremos a estabilidade do sistema.

Consideramos um efeito de vibração de uma viga homogênea de Timoshenko de comprimento $L > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x \quad &= 0 \text{ em } \ (0, L) \times (0, \infty) && (3.0.1)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) \quad &= 0 \ \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), && (3.0.2) \end{aligned}$$

onde $\rho_1, \rho_2, b, \kappa$, são constantes positivas dadas pelo fenômeno estudado neste problema, com condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \ \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \text{ em } (0, L). \tag{3.0.3}$$

Assumimos efeito de dissipação em $x = L$ para ψ e φ do tipo Neumann

$$\begin{aligned} b\psi_x(L, t) \quad &= -\gamma\psi_t(L, t) \ t \in (0, \infty) && (3.0.4)\\ \kappa(\varphi_x + \psi)(L, t) \quad &= -\alpha\varphi_t(L, t) \ t \in (0, \infty), && (3.0.5) \end{aligned}$$

onde γ e α, são constantes positivas. E as condições de contorno

$$\varphi(0, \cdot) = 0, \quad \varphi(L, \cdot) = 0, \quad \psi(0, \cdot) = 0, \text{ em } (0, \infty). \tag{3.0.6}$$

3.1 BOA COLOCAÇÃO

Vamos estudar a boa colocação do problema (3.0.1)-(3.0.6), via o Teorema 2.4.4, então, precisamos considerar um problema equivalente na teoria de semigrupos. Este problema equivalente tem a forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} &= \ \mathcal{A}V(t) \quad t > 0 \\ V(0) &= V_0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador associado ao sistema, *não necessariamente limitado* e definido em $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Agora, para conseguir o candidato para $\mathcal{A}$, trabalharemos formalmente. Considere o vetor $V = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$, então, temos que $\dfrac{dV}{dt} = (\varphi_t, \varphi_{tt}, \psi_t, \psi_{tt})^T$, logo, em virtude do sistema (3.0.1) – (3.0.2), ao fazer manipulações algébricas, obtemos que

$$\frac{dV}{dt} = (\ \varphi_t \ , \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x, \ \psi_t \ , \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi))^T.$$

Daí, denotemos $V = (\,\varphi\,,\,\phi_1,\,\psi,\,\phi_2)^T$, onde $\phi_1 = \varphi_t$ e $\phi_2 = \psi_t$, então, em vista a igualdade acima, temos que

$$\frac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi_1 \\ \psi \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\dfrac{dV}{dt} = \mathcal{A}V(t)$, onde $\mathcal{A}$ vem dado por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix}.$$

A ideia que vamos seguir, é a seguinte, decompomos $\mathcal{A}$, como a soma de duas expressões, ($\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$) específicas (que mostraremos em breve), ou seja, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, e provaremos que $\mathcal{A}_2$, é um operador contínuo e que $\mathcal{A}_1$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Logo, do Lema 2.4.4, vamos concluir que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. Então, escrevemos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

onde

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & -\frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, para definir o domínio de $\mathcal{A}$, para isso, vamos utilizar o método da energia, no problema (3.0.1)-(3.0.5). Então, multiplicando a equação (3.0.1) por φ_t e integramos com respeito à variável espacial em $(0, L)$, obtemos formalmente que

$$\int_0^L (\rho_1\varphi_{tt}\varphi_t - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\varphi_t)\mathrm{d}x = 0.$$

Em virtude da regra da cadeia, integração por partes, podemos ver que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1\varphi_t^2\,dx - \kappa(\varphi_x + \psi)(L,t)\varphi_t(L,t) + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\,dx = 0,$$

Assim, em vista de (3.0.5), temos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1\varphi_t^2\,dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\,dx = -\alpha\varphi_t^2(L,t). \tag{3.1.2}$$

Logo, multiplicamos em (3.0.2) por ψ_t e integrando em $(0, L)$, ou seja,

$$\int_0^L (\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi))\psi_t\mathrm{d}x = 0,$$

então, na igualdade anterior, integramos por parte, e usamos $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\psi_t^2 = \psi_{tt}\psi_t$ e $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\psi_x^2 = \psi_{xt}\psi_x$, portanto, podemos conclir

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2)\,dx - b\psi_x(L,t)\psi_t(L,t) + \kappa\int_0^L (\psi+\varphi_x)\psi_t \mathrm{d}x = 0,$$

além disso, em virtude de (3.0.4), segue que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2)\mathrm{d}x + \kappa\int_0^L (\psi+\varphi_x)\psi_t\,dx = -\gamma|\psi_t(L,t)|^2. \tag{3.1.3}$$

Portanto, somando (3.1.2) e (3.1.3), obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \int_0^L \kappa(\psi+\varphi_x)(\psi_t+\varphi_{tx})\,dx + \,dx = -\gamma\psi_t(L,t)^2 - \alpha\varphi_t^2(L,t),$$

daí, em vista de $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\psi+\varphi_x)^2 = (\psi+\varphi_x)(\psi_t+\varphi_{tx})$, e da igualdade anterior, segue que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\psi+\varphi_x)^2\,dx = -\gamma\psi_t(L,t)^2 - \alpha\varphi_t^2(L,t).$$

Portanto, a energia associada ao sistema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L ((b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)^2))\,dx.$$

Agora, vamos impor condições para que todas as operações feitas façam sentido, ou seja, temos que pedir que

$$\psi_x \in L_2(0,L), \psi_t \in L_2(0,L), \varphi_t \in L_2(0,L) \text{ e } \varphi_x + \psi \in L_2(0,L). \tag{3.1.4}$$

Logo, consideremos

$$V_0^1(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}.$$

Tomando em conta as condições de contorno (3.0.3) − (3.0.5) e (3.1.4), basta pedir que

$$\varphi \in V_0^1(0,L)\ ,\ \varphi_t \in L_2(0,L)\ ,\ \psi \in V_0^1(0,L) \text{ e } \psi_t \in L_2(0,L).$$

Então, definimos o espaço $\mathcal{H}$ por

$$\mathcal{H} = V_0^1(0,L) \times L_2(0,L) \times V_0^1(0,L) \times L_2(0,L).$$

Logo, precisamos definir um produto interno, este é sugerido pela energia. Então, sejam $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ e $V = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathcal{H}$. Definimos

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

por

$$(U,V) = \int_0^L (\rho_1 u_2\overline{v_2} + \rho_2 u_4\overline{v_4} + bu_{3x}\overline{v_{3x}} + \kappa(u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\mathrm{d}x.$$

Vamos ver que de fato é um produto interno em $\mathcal{H}$.

Proposição 3.1.1. $(\cdot,\cdot)$ *é um produto interno em* $\mathcal{H}$.

Demonstração. Vejamos que cumpre as quatro condições na Definição 2.1.6.

1. Sejam $U, V, W \in \mathcal{H}$, notamos que

$$\begin{aligned}(U+W,V) &= \int_0^L (\rho_1(u_2+w_2)\overline{v_2} + \rho_2(u_4+w_4)\overline{v_4} + b(u_{3x}+w_{3x})\overline{v_{3x}} \\ &\quad + \kappa(u_{1x}+u_3+w_{1x}+w_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\,dx \\ &= \int_0^L \rho_1 w_2\overline{v_2} + \rho_2 w_4\overline{v_4} + b w_{3x}\overline{v_{3x}} + \kappa(w_{1x}+z_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\,dx \\ &\quad + \int_0^L \rho_1 u_2\overline{v_2} + \rho_2 u_4\overline{v_4} + b u_{3x}\overline{v_{3x}} + \kappa(u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\,dx \\ &= (W,V) + (U,V).\end{aligned}$$

2. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}(\lambda U,V) &= \int_0^L \rho_1\lambda u_2\overline{v_2} + \rho_2\lambda u_4\overline{v_4} + b\lambda u_{3x}\overline{v_{3x}} + \kappa\lambda(u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\,dx \\ &= \lambda\int_0^L \rho_1 u_2\overline{v_2} + \rho_2 u_4\overline{v_4} + b u_{3x}\overline{v_{3x}} + \kappa(u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)})\,dx \\ &= \lambda(U,V).\end{aligned}$$

3. Análogo a 1. e usar $\overline{\lambda Z_1 + Z_2} = \bar{\lambda}\overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, para $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$.

4. Suponha que $(U,U) = 0$, vamos ver que $U = 0$. De fato, tenhamos em conta que se

$$(U,U) = \int_0^L \rho_1 u_2^2 + \rho_2 u_4^2 + b u_{3x}^2 + \kappa(u_{1x}+u_3)^2\,dx = 0,$$

portanto $u_2, u_4 = 0$, $u_{3x} = 0$ e $u_{1x} + u_3 = 0$. Então, primeiramente notamos que, como $u_{3x} = 0$, segue $u_3 = c$, em que c é uma constante, além disso, como $u_3 \in L_2$, exite $(u_3^n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge q.t.p para c, ou seja, $u_3^n(0) \to c$ q.t.p, em virtude de que $u_3 \in V_0^1$ $(u_3(0) = 0)$ e pela unicidade do limite, concluimos que $u_3 = 0$. Finalmente, em virtude de $u_{1x} = -u_3$, obtemos $u_1 = c$, mas como $u_1 \in V_0^1$, podemos concluir que $u_1 = 0$, portanto $U = 0$. □

Logo, consideremos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = (U,U) = \kappa\|\varphi_x + \psi\|_{L_2}^2 + b\|\psi_x\|_{L_2}^2 + \rho_1\|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2\|\phi_2\|_{L_2}^2,$$

onde $U = (\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2) \in \mathcal{H}$. Levamos em conta que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ é a norma em $\mathcal{H}$ que provém de $(\cdot,\cdot)$. Agora, vamos mostrar que $(\mathcal{H}, \|U\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert. Para isso vamos ver que $\|U\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente à norma natural $\|\cdot\|_*$ em $\mathcal{H}$, dada por

$$\|U\|_* = \|\varphi_x\|_{L_2} + \|\psi_x\|_{L_2} + \|\phi_1\|_{L_2} + \|\phi_2\|_{L_2}.$$

Proposição 3.1.2. *$(\mathcal{H}, \|U\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Similar à demostração da Proposição 4.1.2 do seguinte capítulo. $\square$

Agora, vamos definir o domínio de $\mathcal{A}$, notamos que, se $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T \in D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$, então $U \in \mathcal{H}$, ou seja,

$$\varphi \in H_0^1(0,L), \phi_1 \in L_2(0,L), \psi \in V_0^1(0,L) \text{ e } \phi_2 \in L_2(0,L).$$

Da definição 2.4.2, precisamos que $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, que é equivalente a resolver, dado $(f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, o problema

$$\phi_1 = f_1 \in H_0^1(0,L),\ \ \phi_2 = f_3 \in V_0^1(0,L)$$

e

$$\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \in L_2(0,L) \tag{3.1.5}$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) = f_1 \in L_2(0,L), \tag{3.1.6}$$

Junto as condições (3.0.4)-(3.0.6), para isto usaremos o Teorema de 2.1.1 e propriedades de regularidade do espaço das distribuições. De fato, sejam $\overline{\Psi}$ e $\overline{\Phi}$ em $V_0^1(0,L)$. Logo, multiplicamos por $\overline{\Phi}$ e $\overline{\Psi}$ em (3.1.5) e (3.1.6) respectivamente e integrado em $(0,L)$, portanto, obtemos

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = \int_0^L \hat{f}_2 \overline{\Phi}\, dx \tag{3.1.7}$$

e

$$\int_0^L (b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi))\overline{\Psi}\, dx = \int_0^L \hat{f}_4 \overline{\Psi}\, dx, \tag{3.1.8}$$

onde $\hat{f}_2 = \rho_1 f_2$ e $\hat{f}_4 = \rho_1 f_4$. Agora, tenhamos em conta que

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}\Big|_0^L - \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x\, dx,$$

em vista que $\overline{\Phi} \in V_0^1$, temos que

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = -\kappa(\varphi_x + \psi)(L)\overline{\Phi}(L) - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x\, dx.$$

Logo, em virtude (3.0.5), obtemos

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = \alpha f_1(L)\overline{\Phi}(L) - \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x\, dx. \tag{3.1.9}$$

Por outro lado $\overline{\Psi} \in V_0^1$, assim,

$$\int_0^L b\varphi_{xx}\overline{\Psi}\, dx = -b\psi_x(L)\overline{\Psi}(L) - \int_0^L \psi_x \overline{\Psi_x}\, dx.$$

Além disso, como $b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L) = -\gamma f_3(L)$, segue

$$\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\Psi}\,dx = \gamma f_3(L)\overline{\Psi}(L) - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\,dx. \tag{3.1.10}$$

Logo, somando (3.1.7) e (3.1.8), substituindo (3.1.9) e (3.1.10), podemos concluir

$$\begin{aligned}\int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Psi+\Phi_x)}\,dx \;&= \int_0^L (\hat{f}_4\overline{\Psi} + \hat{f}_2\overline{\Phi})\,dx + \gamma f_3(L,t)\overline{\Psi}(L)\\ &+\alpha f_1(L)\Phi(L).\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Então, escrevemos $a(W,V) = T_1(V) + N(V)$ onde $W = (\varphi,\psi)$, $V = (\Phi,\Psi)$ e

$$a(W,V) = \int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx\ ,\ \ N(V) = \gamma f_3(L,t)\overline{\Psi}(L,t) + \alpha f_1(L)\Phi(L)$$

e

$$T_1(V) = \int_0^L (\hat{f}_4\overline{\Psi} + \hat{f}_2\overline{\Phi})\,dx.$$

Logo, escrevemos $T(V) = T_1(V)+N(V)$, portanto, o problema (3.1.5)-(3.1.6) é equivalente a resolver

$$a(W,V) = T(V). \tag{3.1.12}$$

Agora, consideremos

$$\mathcal{F} = V_0^1(0,L)\times V_0^1(0,L),$$

podemos mostrar que

$$a(\cdot,\cdot):\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{C}$$

dada por

$$a(W,V) = \int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)},$$

é um produto interno em $\mathcal{F}$, mais ainda, contínua e coerciva e que $T:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ dada por

$$T(V) = \int_0^L (\hat{f}_4\overline{\Psi} + \hat{f}_2\overline{\Phi}) + \gamma f_3(L,t)\overline{\Psi}(L) + \alpha f_1(L)\overline{\Phi}(L)\,dx$$

é um funcional contínuo em $\mathcal{F}$, então, em virtude do Teorema de 2.1.1, o problema (3.1.5)-(3.1.6), tem solução. Assim, devido à arbitrariedade de Φ e Ψ, passando pelo espaço das distribuições, segue que:

$$\varphi\in V_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\quad,\ \psi\in V_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\quad,\ \phi_1\in V_0^1(0,L)\ \text{ e } \phi_2\in V_0^1(0,L).$$

Portanto

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}) = \{U\in\mathcal{H} : \varphi\in V_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), \phi_1\in V_0^1(0,L), \psi\in V_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),\\ \phi_2\in V_0^1(0,L)\,,\ \kappa(\varphi_x+\psi)(L) = -\alpha\phi_1(L) \text{ e } b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)\}\end{aligned}$$

onde $U = (\varphi,\phi_1,\psi,\phi_2)^T$.

Lema 3.1.1. *$\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.*

Demonstração. Em vista que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, então, é suficiente ver que $\mathcal{A}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 e que $\mathcal{A}_2$ é um operador contínuo. Logo, pelo Lema 2.4.4, obtemos que, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

Observação 3.1.1. Sea $T(t)_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, cumprindo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq e^{\omega t}$, $\omega \geq 0$, se consideramos $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, então este é um semigrupo semicontínuo de contrações. Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de T, então $\mathcal{A} - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $S(t)$. Por outro lado, se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $S(t)$, então $\mathcal{A} + \omega I$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq e^{\omega t}$. Ver [13] página 12.

Então, primeiro vejamos que $\mathcal{A}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. De fato, basta ver pela observação anterior, o Teorema 2.4.5 e em virtude do teorema 2.4.3, que as seguintes condições são verificadas:

1. Para todo $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, existe $C > 0$, tal que $\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \leq C\|U\|_*^2$, onde $(\cdot,\cdot)_*$ é dado por
$$(U,V)_* = \int_0^L \frac{\kappa}{\rho_1} u_{1x}\overline{v_{1x}} + \frac{b}{\rho_2} u_{3x}\overline{v_{3x}} + u_2\overline{v_2} + u_4\overline{v_4}\, dx,$$
para todos $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ e $V = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathcal{H}$

   Observação 3.1.2. Caso $\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \leq C\|U\|_*^2$, seja verdadeira, como $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a $\|\cdot\|_*$, podemos deduzir que, para alguma constante $C > 0$, se verifica que,
$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* &\leq C\|U\|_*^2 \\ &= C(U,U)_* \\ &= (C\,U,U)_*, \end{aligned}$$
e daí, segue que
$$\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* - (C\,U,U)_* \leq 0,$$
portanto, obtemos
$$\mathcal{R}e((\mathcal{A}_1 - C\,I)U,U)_* \leq 0,$$
ou seja, $(\mathcal{A}_1 - C\,I)$ é dissipativo.

2. e $ima\,(\mathcal{A}_1 - \lambda I) = \mathcal{H}$, para algum $\lambda > C$.

Verifiquemos primeiro 1. Isto é, vamos mostrar, que para todo $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, existe $C > 0$, tal que $\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \leq C\|U\|_*^2$. De fato, seja $(\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)' = U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, então,

$$\mathcal{A}_1 U = (\phi_1, \frac{\kappa \varphi_{xx}}{\rho_1}, \phi_2, \frac{b\psi_{xx}}{\rho_2}),$$

portanto, ao aplicar produto interno com U, obtemos

$$(\mathcal{A}_1 U, U)_* \quad = \int_0^L \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \phi_{1x} \overline{\varphi_x} + \frac{b}{\rho_2} \phi_{2x} \overline{\psi_x} + \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_{xx} \overline{\phi_1} + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} \overline{\phi_2} \right) dx,$$

logo, usamos integração por partes, que $z - \bar{z} = 2img(z)i$ e que $\varphi, \psi \in V_0^1$, temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_1 U, U)_* \quad &= \int_0^L \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \phi_{1x} \overline{\varphi_x} + \frac{b}{\rho_2} \phi_{2x} \overline{\psi_x} - \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x \overline{\phi_{1x}} - \frac{b}{\rho_2} \psi_x \overline{\phi_{2x}} \right) dx \\
&+ \frac{b}{\rho_2} \psi_x(L) \overline{\phi_2}(L) + \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x(L) \overline{\phi_1}(L) \\
&= 2\,img \left(\int_0^L \left(\frac{\kappa}{\rho_1} \phi_{1x} \overline{\varphi_x} + \frac{b}{\rho_2} \phi_{2x} \overline{\psi_x} \right) dx \right) i + \frac{b}{\rho_2} \psi_x(L) \overline{\phi_2}(L) \\
&+ \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x(L) \overline{\phi_1}(L).
\end{aligned}$$

Então, consideramos parte real na igualdade acima, podemos ver que

$$\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* = \frac{b}{\rho_2} \psi_x(L) \overline{\phi_2}(L) + \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x(L) \overline{\phi_1}(L).$$

Assim, substituindo as condições (3.0.4) e (3.0.5) na igualdade anterior, concluímos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \quad &= \frac{b}{\rho_2} \psi_x(L) \overline{\phi_2}(L) + \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x(L) \overline{\phi_1}(L) \\
&= \frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_x(L) \overline{\phi_1}(L) - \frac{\gamma}{\rho_1} |\overline{\phi_2}(L)|^2 \\
&= \frac{1}{\rho_1} \left(-\kappa \psi(L) - \alpha \phi_1(L) \right) \overline{\phi_1}(L) - \frac{\gamma}{\rho_1} |\overline{\phi_2}(L)|^2.
\end{aligned}$$

Logo, na igualdade anterior, distribuímos, removemos os termos quadráticos, aplicamos módulo, usamos a Proposição 2.1.6 e substituímos (3.0.5), então, temos que

$$\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \leq \frac{\kappa^2 c(\varepsilon)}{\alpha \rho_1} |\psi(L)|^2 + \varepsilon\, C(\alpha, \kappa) |\phi_1(L)|^2, \tag{3.1.13}$$

em que $\varepsilon > 0$ é arbitrário e $C(\alpha, \kappa) > 0$ é uma constante dependendo de α e κ. Logo, notamos que, como $\psi \in V_0^1$ e $(0, L)$ é um aberto classe C^1 limitado, segue do teorema de imersão contínua, que

$$|\psi(L)|^2 \leq \int_0^L |\psi_x|^2\, dx,$$

e substituindo esta equação em (3.1.13) e escolhendo ε suficientemente pequeno, obtemos que

$$\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}_1 U, U)_* \leq C\|U\|_*^2.$$

Verifiquemos 2. Para isto, temos que conseguir $\lambda > 0$, tal que o operador $(\lambda I - \mathcal{A}_1)$ é sobrejetor, isto é equivalente a conseguir uma solução ao seguinte problema: dados $(f_1, f_2, f_3, f_4)^T = F \in \mathcal{H}$ e $\lambda > 0$ mostrar que, para algum $U \in \mathcal{D}$, se verifica que

$$(\lambda I - \mathcal{A}_1)U = F,$$

que por sua vez é equivalente a, achar $(\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T = U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, tal que

$$\lambda\varphi - \phi_1 = f_1 \tag{3.1.14}$$
$$\lambda\phi_1 - \frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} = f_2 \tag{3.1.15}$$
$$\lambda\psi - \phi_2 = f_3 \tag{3.1.16}$$
$$\lambda\phi_2 - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} = f_4. \tag{3.1.17}$$

Logo, das equações (3.1.16) e (3.1.17), obtemos que

$$\lambda\left(\lambda\psi - f_3\right) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} = f_4,$$

como F é fixo, é suficiente resolver a seguinte equação diferencial de segunda ordem com valores de fronteira,

$$\lambda^2\psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} = f_4 + \lambda f_3, \tag{3.1.18}$$

junto à condição $\psi(0) = 0$ e a condição

$$b\psi_x(L) = -\gamma\left(\lambda\psi - f_3\right)(L), \tag{3.1.19}$$

que vem da condição (3.0.4) e a equação (3.1.16). Logo, o polinômio caraterístico do problema homogêneo de (3.1.18) é

$$-\frac{b}{\rho_2}m^2 + \lambda^2,$$

e como $\lambda > 0$, temos que as raízes são, $m_1 = \lambda\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $m_2 = -\lambda\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{2}}$, além disso, como as raízes do polinômio caraterístico são, reais e diferentes, pelo método de variação de parâmetros, temos que a solução vem dada por

$$\psi(x) = c\, sinh\,(m_1\, x) - \frac{\rho_2}{bm_1}\int_0^x \frac{(f_4(s) + \lambda f_3(s))\, sinh\,(m_1\, x)}{e^{m_1 s}}\, ds, \tag{3.1.20}$$

onde c é uma constante unicamente determinada pela condição $b\psi_x(L) = -\gamma\left(\lambda\psi - f_3\right)(L)$. Logo, em virtude de (3.1.16), podemos conseguir ϕ_2, a partir de ψ e como $f_3 \in V_0^1$ e (3.1.20), obtemos que $\phi_2 \in H^1$, $\phi_2(0) = 0$ e de (3.1.19), finalmente, temos que $b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)$.

Agora, tendo em conta (3.1.14) e (3.1.15), obtemos

$$\lambda\left(\lambda\varphi - f_1\right) - \frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} = f_2,$$

como F é fixo, surge o problema com condições de contorno:

$$\lambda^2\varphi - \frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} = f_2 + \lambda f_1,$$

junto com a condição $\varphi(0) = 0$ e de (3.1.14) e (3.0.5) segue a condição

$$\kappa(\varphi_x + \psi)(L) = -\alpha(\lambda\varphi - f_1)(L).$$

Analogamente ao problema (3.1.18)-(3.1.19), achamos $\varphi \in H^2$, e em virtude de (3.1.14), obtemos $\phi_1 \in H^1$, além disso, podemos verificar que $\phi_1(0) = 0$ e $\kappa(\varphi_x+\psi)(L) = -\alpha\phi_1(L)$, ou seja, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ como queriamos, assim provamos a condição 2.

Logo, do Teorema 2.1.2 e do Teorema 2.1.3, obtemos que $\mathcal{A}_1$, tem dominio denso em $\mathcal{H}$ e do Teorema 2.4.3, segue que $\mathcal{A}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0. Agora, vamos ver que $\mathcal{A}_2$ é limitado. De fato, seja $(\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)' = U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\mathcal{A}_2 U = (0, \frac{k}{\rho_1}\psi_x, 0, \frac{k}{\rho_2}\varphi_x - \frac{k}{\rho_2}\psi),$$

e como $\varphi, \psi \in V_0^1(0, L)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_2 U\|_* &= \int_0^1 \frac{k^2}{\rho_1^2}\psi_x^2\, dx + \int_0^1 \frac{k^2}{\rho_2^2}\left(\varphi_x - \psi\right)^2\, dx \\ &\leq C_0\left(\int_0^1 b\psi_x^2\, dx + \int_0^1 \kappa\left(\varphi_x - \psi\right)^2\, dx\right) \\ &\leq C_0\|U\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

além disso, como $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, são equivalentes, existe $C > 0$, tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|U\|_*$, e daí, segue que $\mathcal{A}_2$ é limitado.

Finalmente, como $\mathcal{A}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo classe C_0, $\mathcal{A}_2$ é limitado e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, então do Lema 2.4.4, segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo classe C_0. $\square$

A existência e unicidade do problema (3.1.1), segue do Teorema 2.4.4 e portanto o problema (3.0.1)-(3.0.6) tem uma única solução.

3.2 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Na seção anterior, foi mostrado que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo classe C_0. Nesta seção, vamos provar a estabilidade desse semigrupo. Para isso, vamos fazer uma abordagem direta, desde a Definição 2.4.4, ou seja, se $S(t)_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$, então, temos que ver, que existem $\omega > 0$ e $M \geq 1$, satisfazendo

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{-\omega t}, \tag{3.2.1}$$

para todo $t \geq 0$. Primeiro vamos fazer observações que permitirão simplificar algumas operações, *Observação* 3.2.1. Sejam $\Phi \in V_0^1$ e $\Psi \in H^1$, então da desigualdade de Minkowski e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\int_0^L 2\Psi_x \, dx \leq 2\int_0^L (\Phi + \Psi_x)^2 \, dx + 2C_p \int_0^L \Phi_x^2 \, dx. \tag{3.2.2}$$

Observação 3.2.2. Vamos supor sem perdida de generalidade que $L = 1$, isto para simplificar algumas das estimativas, no caso L qualquer, basta com escolher apropriadamente as constantes de controle que aparecem mais na frente.

Observação 3.2.3. Lembremos que a energia associada ao sistema, esta dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L ((b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\varphi_x + \psi)^2))\mathrm{d}x.$$

Mais ainda,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma|\phi_2(L,t)|^2 - \alpha|\phi_1(L,t)|^2. \tag{3.2.3}$$

Agora, vamos dar um esboço, de como vamos abordar o problema. Sejam $S(t)_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ e $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $S(t)U_0 = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$. Logo, construímos uma aplicação

$$F(t) = \mu t E(t) + G(S(t)U_0), \tag{3.2.4}$$

onde $\mu = \mu(\rho_1, \rho_2, b, \kappa)$ é uma constate positiva, que depende só das constantes no sistema (3.0.1)-(3.0.2), $E(t)$ é a energia associada com $S(t)U_0$, e $G(\cdot)$ é um funcional adequado no espaço $\mathcal{H}$, tal que

$$|G(U)| \leq C\|U\|_*^2 \text{ para todo } U \in \mathcal{H}. \tag{3.2.5}$$

Agora, notamos que, como $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_H$ são equivalentes, então, existem $d_1 = d_1(\rho_1, \rho_2, b, \kappa)$ e $d_2 = d_2(\rho_1, \rho_2, b, \kappa)$ constantes positivas, que dependem só das constastes do sistema (3.0.1)-(3.0.2), tais que

$$d_1\|S(t)U_0\|_*^2 \leq E(t) \leq d_2\|S(t)U_0\|_*^2 \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.2.6}$$

Provaremos que a aplicação F tem a seguinte estimativa uniforme em $\mathcal{H}$,

$$|F(t)| \leq M_1\|U_0\|_*^2, \tag{3.2.7}$$

onde $M_1 = M_1(\gamma, \alpha)$ é uma constante positiva unicamente dependendo das constantes da dissipação (3.0.4) e (3.0.5). Agora, tenhamos em conta que, para $t \geq 0$ temos

$$td_1\mu\|S(t)U_0\|_*^2 \leq |\mu t E(t)|,$$

pela desigualdade triangular, obtemos

$$td_1\mu\|S(t)U_0\|_*^2 \leq |\mu t E(t) + G(S(t)U_0)| + |G(S(t)U_0)|,$$

e substituindo as estimativas (3.2.7), (3.2.3) e (3.2.5) na desigualdade anterior, segue que

$$td_1\|S(t)U_0\|_*^2 \leq M_2\|U_0\|_*^2,$$

onde $M_2 = M_2(\gamma,\alpha)$ é uma constante positiva, dependendo unicamente das constantes da dissipação (3.0.4) e (3.0.5), e vale para todo $t \geq 0$, isto é, temos uma estimativa uniforme em $\mathcal{H}$ da solução, mais ainda, tem decaimento polinomial. Finalmente, de $td_1\|S(t)U_0\|_*^2 \leq M_2\|U_0\|_*^2$, usando densidade e do Corolário 2.4.3, segue a estabilidade exponencial, pois a solução decai polinomialmente no mesmo espaço $\mathcal{H}$. Agora, vamos enunciar e provar o resultado de estabilidade exponencial do semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$.

Teorema 3.2.1. *O semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. Seja $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, do Teorema 2.4.4 temos que, existe uma única solução do problema (3.1.1), tal que

$$S(t)U_0 \in C^1([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C([0,\infty);\mathcal{D}(\mathcal{A})), \tag{3.2.8}$$

e

$$\frac{d}{dt}S(t)U_0 = \mathcal{A}S(t)U_0 \text{ para todo } t \geq 0, \tag{3.2.9}$$

onde

$$S(t)U_0 = (\varphi(x,t), \varphi_t(x,t), \psi(x,t), \psi_t(x,t))^T, \tag{3.2.10}$$

e φ e ψ satisfazem (3.0.1)-(3.0.6). Logo, vamos construir a aplicação F da equação (3.2.4). Pela Observação 3.0.2, podemos considerar $L = 1$. Definimos $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} F(t) &= t\mu\frac{1}{2}\int_0^1 ((b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)^2))\mathrm{d}x + \underbrace{\rho_1\int_0^1 x\varphi_t\varphi_x\,dx}_{I_0} \\ &\quad + \underbrace{\rho_2\int_0^1 x\psi_t\psi_x\,dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2+\nu}\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi\,dx}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2+\nu}\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi\,dx}_{I_3}, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

onde μ e ν, são constantes a serem determinadas mais tarde. Consideramos $G : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dado por

$$G(U) = \sum_{n=0}^{3} I_n,$$

podemos mostrar que $G \in \mathcal{H}'$ e que cumpre (3.2.5), para $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T \in \mathcal{H}$. Por outro lado, em virtude de (3.2.8) e o fato que

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} &= \kappa(\varphi_x+\psi)_x \\ \rho_2\psi_{tt} &= b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x+\psi), \end{aligned}$$

onde $\kappa(\varphi_x+\psi)_x$ e $b\psi_{xx}-\kappa(\varphi_x+\psi)$, estão em L_2, concluímos que $\varphi_{tt},\psi_{tt}\in L_2$. Além disso, usando o fato anterior e (3.2.8), obtemos que $F(t)$ é derivável e usando (3.2.3), temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= \mu\, E(t)+\mu\, t\frac{d}{dt}E(t)+\sum_{n=0}^{3}D_tI_n\\ &= \mu\, E(t)-t\mu\gamma\psi_t^2(L,t)-t\mu\alpha\varphi_t^2(L,t)+\sum_{n=0}^{3}D_tI_n,\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

onde D_t denota a derivada com respeito t, isto é, $D_t=\dfrac{d}{dt}$. Assim, vamos calcular D_tI_n para $n=0,1,2,3$. Primeiramente, consideremos $n=0$, temos que

$$D_tI_0=\rho_1\int_0^1 x\varphi_{tt}\varphi_x\,dx+\rho_1\int_0^1 x\varphi_t\varphi_{xt}\,dx.\tag{3.2.13}$$

Como sabemos que $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\varphi_t^2}{2}=\varphi_x\varphi_{xt}$, então, aplicando integração por partes em (3.2.13) obtemos,

$$D_tI_0=\rho_1\int_0^1 x\varphi_{tt}\varphi_x\,dx+\frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2(1,t)-\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\varphi_t^2\,dx.\tag{3.2.14}$$

Logo, substituindo a equação (3.0.1) em (3.2.14), temos que

$$D_tI_0=\int_0^1 x\left(\kappa(\varphi_{xx}+\psi_x)\right)\varphi_x\,dx+\frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2(1,t)-\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\varphi_t^2\,dx,$$

além disso, como sabemos que $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\varphi_x^2}{2}=\varphi_x\varphi_{xx}$ e $\varphi_t(0,t)=0$, podemos concluir ao integrar por partes a equação acima, que

$$\begin{aligned}D_tI_0 &= \tfrac{k}{2}\varphi_x^2(1,t)-\tfrac{1}{2}\int_0^1\kappa\varphi_x^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 2x\kappa\varphi_x\psi_x\,dx+\frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2(1,t)\\ &-\tfrac{\rho_1}{2}\int_0^1\varphi_t^2\,dx.\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

Agora, vamos calcular D_tI_1, notamos que

$$D_tI_1=\rho_2\int_0^1 x\psi_{tt}\psi_x\,dx+\rho_2\int_0^1 x\psi_t\psi_{xt}\,dx.$$

Além disso, de forma análoga aos cálculos feitos para obter (3.2.14), podemos concluir que

$$D_tI_1=\rho_2\int_0^1 x\psi_{tt}\psi_x\,dx+\frac{\rho_2}{2}\psi_t^2(1,t)-\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2\,dx,$$

logo, da equação (3.0.2), podemos ver que

$$\begin{aligned}D_tI_1 &= \int_0^1 x\left(b\psi_{xx}-\kappa\varphi_x-\kappa\psi\right)\psi_x\,dx+\frac{\rho_2}{2}\psi_t^2(1,t)-\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2\,dx\\ &= \int_0^1\left(xb\psi_{xx}\psi_x-\kappa x\varphi_x\psi_x-\kappa x\psi\psi_x\right)dx+\frac{\rho_2}{2}\psi_t^2(1,t)-\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2\,dx,\end{aligned}$$

daí, em virtude de que $\psi(0,t)=0$, $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\psi_x^2}{2}=\psi_x\psi_{xx}$, $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\psi^2}{2}=\psi\psi_x$ ao aplicar integração por partes na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} D_tI_1 &= \frac{b}{2}\psi_x^2(1,t)-\frac{b}{2}\int_0^1\psi_x^2\,dx+\frac{\kappa}{2}\psi^2(1,t)+\frac{\kappa}{2}\int_0^1\psi^2\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 2\kappa x\varphi_x\psi_x\,dx \\ &+\frac{\rho_2}{2}\psi_t^2(1,t)-\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Calculemos D_tI_2. Notemos que, tendo em conta (3.0.2), temos que

$$\begin{aligned} D_tI_2 &= \frac{\rho_2}{2+\nu}\int_0^1\psi_{tt}\psi\,dx+\frac{\rho_2}{2+\nu}\int_0^1\psi_t^2\,dx \\ &= \frac{1}{2+\nu}\int_0^1(b\psi_{xx}-\kappa\varphi_x-\kappa\psi)\,\psi\,dx+\frac{\rho_2}{2+\nu}\int_0^1\psi_t^2\,dx \qquad , \\ &= \frac{1}{2+\nu}\int_0^1\left(b\psi_{xx}\psi-\kappa\varphi_x\psi-\kappa\psi^2\right)\,dx+\frac{\rho_2}{2+\nu}\int_0^1\psi_t^2\,dx \end{aligned}$$

aplicamos integrando por partes na igualdade anterior, assim obtemos

$$\begin{aligned} D_tI_2 &= \frac{b}{2+\nu}\psi_x(1,t)\psi(1,t)-\frac{b}{2+\nu}\int_0^1\psi_x^2-\frac{k}{2+\nu}\varphi(1,t)\psi(1,t) \\ &+\frac{\kappa}{2+\nu}\int_0^1\varphi\psi_x\,dx-\frac{k}{2+\nu}\int_0^1\psi^2\,dx+\frac{\rho_2}{2+\nu}\int_0^1\psi_t^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Finalmente, calculemos D_tI_3, notamos que

$$\begin{aligned} D_tI_3 &= -\frac{\rho_1}{2+\nu}\int_0^1\varphi_{tt}\varphi\,dx-\frac{\rho_1}{2+\nu}\int_0^1\varphi_t^2\,dx \\ &= -\frac{\kappa}{2+\nu}\int_0^1(\varphi_{xx}+\psi_x)\,\varphi\,dx-\frac{\rho_1}{2+\nu}\int_0^1\varphi_t^2\,dx \\ &= -\frac{\kappa}{2+\nu}\int_0^1(\varphi_{xx}\varphi+\psi_x\varphi)\,dx-\frac{\rho_1}{2+\nu}\int_0^1\varphi_t^2\,dx, \end{aligned}$$

como $\varphi(0)=0$, então, ao aplicar integração por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} D_tI_3 &= -\frac{\kappa}{2+\nu}\varphi_x(1,t)\varphi(1,t)+\frac{\kappa}{2+\nu}\int_0^1\varphi_x^2\,dx-\frac{\kappa}{2+\nu}\int_0^1\varphi\psi_x\,dx \\ &-\frac{\rho_1}{2+\nu}\int_0^1\varphi_t^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Observação 3.2.4. ν e μ são constantes positivas a determinar e sua escolha vai depender das constantes no sistema (3.0.1)-(3.0.5).

As constantes ν e μ, serão escolhidas para que a derivada de F seja negativa a partir de certo T, ou seja, para que F seja decrescente fora de um compacto e no compacto $[0,T]$ vamos ter controle, e logo a conclusão do Teorema 3.2.1, segue do fato que $F(t)$ nestas condições, cumpre (3.2.7), para todos os valores de t.

Observação 3.2.5. Note que

$$-\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2\,dx = -\frac{b}{4}\int_0^1 \psi_x^2\,dx - \frac{b}{4}\int_0^1 \psi_x^2\,dx.$$

e

$$\|\psi\|_{L_2} \leq C\|\nabla\psi\|_{L_2}$$

Usando a obsevação acima, podemos escolher $\nu > 0$, tal que cumpra

$$\frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{2+\nu} - \frac{b}{4} \leq 0. \tag{3.2.19}$$

Esta condição é para garantir controle no sinal da soma dos termos com fator $\displaystyle\int_0^1 \psi^2\,dx$ em $\dfrac{d}{dt}F(t)$, que não acompanham μ.

Agora, desenvolvendo o produto notável na energia e agrupando todos os termos de $\dfrac{d}{dt}F(t)$ com fator $\displaystyle\int_0^1 \varphi_x^2\,dx$, temos que

$$\left(2\kappa\mu - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2+\nu}\right)\int_0^1 \varphi_x^2\,dx,$$

como precisamos que esta expressão seja negativa, vamos impor, que μ, seja tal que

$$2\kappa\mu - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2+\nu} \leq 0 \tag{3.2.20}$$

Finalmente, vamos impor uma segunda condição em μ, para que a soma de todos os termos, que faltam por controlar em $\dfrac{d}{dt}F(t)$ com fator $\displaystyle\int_0^1 \psi_x^2\,dx$ seja negativa, isto é,

$$\left(-\frac{b}{2+\nu} - \frac{b}{4} + b\mu + 2\mu\,\kappa\right)\int_0^1 \psi_x^2\,dx,$$

então, para garantir o número acima seja negativo, pedimos que

$$-\frac{b}{2+\nu} - \frac{b}{4} + b\mu + 2\mu\,\kappa \leq 0. \tag{3.2.21}$$

Em resumo, escolhemos ν, que cumpra (3.2.19) e escolhemos μ, tal que cumpra (3.2.20)-(3.2.21), então a soma dos termos integrais em $\dfrac{d}{dt}F(t)$ é negativa.

Observação 3.2.6. Como φ, ψ se anulam no ponto extremo $(0,t)$, da desigualdade de Poincaré, segue que

$$\varphi(1,t)^2 \leq \int_0^1 \varphi_x^2\,dx \tag{3.2.22}$$

e

$$\psi(1,t)^2 \leq \int_0^1 \psi_x^2\,dx. \tag{3.2.23}$$

Agora, queremos controlar o signal dos termos pontuais em $\dfrac{d}{dt}F(t)$, então, de (3.0.5), temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa}{2+\nu}\varphi_x(1,t)\varphi(1,t)-\frac{k}{2+\nu}\varphi(1,t)\psi(1,t) &= -\frac{\kappa}{2+\nu}\left(\varphi_x(1,t)+\psi(1,t)\right)\varphi(1,t)\\
&= \frac{\alpha}{2+\nu}\varphi_t(1,t)\varphi(1,t),
\end{aligned}$$

logo, dado $\varepsilon > 0$. Usando a dissipação e em virtude desigualdade de Young 2.1.6 e a equação (3.2.22), então da igualdade anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left|-\frac{\kappa}{2+\nu}\varphi_x(1,t)\varphi(1,t)-\frac{k}{2+\nu}\varphi(1,t)\psi(1,t)\right| &\leq \frac{\alpha C(\varepsilon)}{2+\nu}\varphi_t^2(1,t)\\
&\quad +\frac{\alpha\varepsilon}{2+\nu}\int_0^1\varphi_x^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Por outro lado, notamos que, para $\dfrac{b}{2+\nu}\psi_x(1,t)\psi(1,t)$ em D_tI_2, usando a desigualdade de Young 2.1.6 e (3.2.23), conluímos que

$$\left|\frac{b}{2+\nu}\psi_x(1,t)\psi(1,t)\right| \leq \frac{\gamma C(\varepsilon)}{2+\nu}\psi_t^2(1,t)+\frac{\gamma\varepsilon}{2+\nu}\int_0^1\psi_x^2\,dx. \tag{3.2.25}$$

Então, como ε é arbitrário o escolhemos suficientemente pequeno para a soma dos termos integrais em $\dfrac{d}{dt}F(t)$ permaneça sendo negativa.

Agora, tenhamos em conta que, para $T = T(\rho_1,\rho_2,\kappa,b,\gamma,\alpha) > 0$ suficientemente grade, podemos garantir o sinal negativo do resultado da soma de todos os termos pontuais de $\dfrac{d}{dt}F(t)$, isto é,

$$\begin{aligned}
0 \;\geq\; & \frac{k}{2}\varphi_x^2(1,t)+\frac{\kappa}{2}\psi^2(1,t)-t\mu\gamma\psi_t^2(L,t)-t\mu\alpha\varphi_t^2(L,t)+\frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2(1,t)\\
&+\frac{b}{2}\psi_x^2(1,t)+\frac{\rho_2}{2}\psi_t^2(1,t)+\frac{\alpha\, C(\varepsilon)}{(2+\nu)}\varphi_t^2(1,t)+\frac{\gamma\, C(\varepsilon)}{(2+\nu)}\varphi_t^2(1,t)
\end{aligned}$$

para todo $t > T$. Por outro lado, para $t > T$, temos que

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq 0,$$

ou seja, para todo $t > T$, $F(t)$ é decrescente, então, tendo em conta (3.2.5), obtemos

$$F(0) = G(S(t)U_0) \leq |G(S(t)U_0)| \leq C_1\|U_0\|_*^2\ ,$$

assim, segue que para todo $t > T$,

$$F(t) \leq C_1\|U_0\|_*^2,$$

isto é, (3.2.7) se cumpre, para o intervalo (T,∞). Além disso, para ter controle no compacto $[0,T]$, notamos que, como F e contínua, atinge um máximo, isto é,

$$F(t) \leq TE(t)+|G(S(t)U_0)| \leq C_2\|U_0\|_*^2,$$

então, obtemos a limitação tomando o máximo entre as contantes C_1 e C_2.

Finalmente a conclusão do teorema, segue de fazer os passos como no esboço, no começo da seção, a partir da equação (3.2.7). Isto é, $S(t)_{t\leq 0}$ é exponencialmente estável. $\square$

4 TIMOSHENKO COM UMA DISSIPAÇÃO NA FRONTEIRA

Neste capítulo, vamos a provar a existência, unicidade e estabilidade exponencial para um sistema de Timosheko, com condições de contorno: Para φ Dirichlet e para ψ Dirichlet num extremo da viga e dissipação do tipo Neumann no outro. Consideramos um efeito de vibração numa viga homogênea de Timoshenko de comprimento $L>0$, ou seja,

$$\rho_1\varphi_{tt}-\kappa(\varphi_x+\psi)_x \quad =0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L) \tag{4.0.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+\kappa(\varphi_x+\psi) \quad =0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.0.2}$$

onde, ρ_1,ρ_2,b,κ são constantes positivas, dadas pelo fenômeno estudado neste problema. Junto com as condições iniciais,

$$\varphi(0,\cdot)=\varphi_0\,,\varphi_t(0,\cdot)=\varphi_1,\quad \psi(0,\cdot)=\psi_0,\;\; \psi_t(0,\cdot)=\psi_1 \text{ em } (0,L), \tag{4.0.3}$$

assumimos o efeito dissipativo agindo no extremo $x=L$, dado por

$$b\psi_x(t,L)=-\gamma\psi_t(t,L) \text{ em } (0,\infty), \tag{4.0.4}$$

onde γ é um coeficiente viscoso estritamente positivo. E no extremo $x=0$, consideremos as condições de contorno:

$$\varphi(\cdot,0)=0,\quad \varphi(\cdot,L)=0,\quad \psi(\cdot,0)=0, \text{ em } (0,\infty). \tag{4.0.5}$$

4.1 BOA COLOCAÇÃO

Agora, a ideia é estudar o problema via o Teorema 2.4.4, para isto, precisamos considerar um problema equivalente com a forma do problema de Cauchy (2.4.2.)
Então, precisamos definir um candidato ao operador $\mathcal{A}$ do problema (2.4.2), para este objetivo, vamos seguir um procedimento similar ao usado no estudo de EDO para sistemas lineares, com a diferença que agora estamos trabalhando com operadores não necessariamente limitados.
Seja $V=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t)^T$. Queremos ver o problema (4.1.2)-(4.0.5) da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} & = \mathcal{A}V(t) \quad t>0 \\ V(0) & = V_0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

onde $V_0=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1)^T$.
Então, notamos que,

$$\frac{dV}{dt}=(\varphi_t,\varphi_{tt},\psi_t,\psi_{tt})^T,$$

em virtude do sistema $(4.0.1)-(4.0.2)$, obtemos

$$\frac{dV}{dt}=(\;\varphi_t\;,\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x,\;\psi_t\;,\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi))^T.$$

Logo, usando a notação $V = (\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2)^T$, onde $\phi_1 = \varphi_t$ e $\phi_2 = \psi_t$. Assim, temos que o problema de Cauchy é da forma,

$$\frac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi_1 \\ \psi \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o candidato a operador $\mathcal{A}$, é

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, precisamos definir um espaço $\mathcal{H}$ e o domínio de $\mathcal{A}$ nesse espaço $\mathcal{H}$, para assim poder afirmar que $\mathcal{A}$ está bem definido. Para isso, usamos o método da energia. De fato, multiplicamos a equação (4.0.1), por φ_t e integrado com respeito à variável espacial em $(0, L)$, obtemos formalmente que

$$\int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt}\varphi_t - \kappa(\varphi_x + \psi)_x \varphi_t)\, dx = 0,$$

daí, ao separa a integral, temos que

$$\underbrace{\int_0^L \rho_1 \varphi_{tt}\varphi_t\, dx}_{I} - \underbrace{\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \varphi_t\, dx}_{II} = 0. \tag{4.1.2}$$

Agora, vamos trabalhar estas duas integrais por separado, tenhamos em conta que

$$I = \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t\, dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \varphi_t^2\, dx, \quad \text{pois } \frac{d}{dt}\varphi_t^2 = 2\varphi_{tt}\varphi_t.$$

Por outro lado, para II, podemos ver que

$$II = \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \varphi_t\, dx = \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_t - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\, dx,$$

como $-\kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_t\Big|_0^L = 0$, por (4.0.5), segue na igualdade acima que

$$II = \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \varphi_t = -\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\, dx.$$

Logo, ao substituir I e II em (4.1.2), obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 \varphi_t^2\, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\, dx = 0. \tag{4.1.3}$$

Posteriormente, multiplicamos (4.0.2), por ψ_t e integrando em $(0, L)$, então, obtemos que

$$\int_0^L (\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi))\psi_t\, dx = 0,$$

então, temos que

$$\int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi_t\,dx - \underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\psi_t\,dx}_{III} + \kappa\int_0^L (\psi+\varphi_x)\psi_t\,dx = 0. \tag{4.1.4}$$

Resolvemos a integral III separadamente, ou seja,

$$III = b\int_0^L \psi_{xx}\psi_t\mathrm{d}x = b\psi_x(t,L)\psi_t(t,L) - b\psi_x(t,0)\psi_t(t,0) - \int_0^L b\psi_x\psi_{tx}\,dx,$$

e pela condição (4.0.5), que $b\psi_x(t,L) = -\gamma\psi_t(t,L)$ e que $\psi_t(t,0) = 0$, obtemos que

$$b\int_0^L \psi_{xx}\psi_t\,dx = \gamma|\psi_t(t,L)|^2 - \int_0^L b\psi_x\psi_{tx}\,dx,$$

então, ao substituir a igualdade acima em (4.1.4), podemos ver que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2)\,dx + \kappa\int_0^L (\psi+\varphi_x)\psi_t\,dx = -\gamma|\psi_t(t,L)|^2. \tag{4.1.5}$$

Assim, somando (4.1.3) , (4.1.5) e reagrupando, obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L 2\kappa(\psi+\varphi_x)(\psi_t + \Phi tx)\,dx = -\gamma|\psi_t(t,L)|^2.$$

Agora, em virtude de que $2\kappa(\varphi_x+\psi)(\varphi_{xt}+\psi_t) = \frac{d}{dt}(\varphi_x+\psi)^2$, temos da igualdade acima, que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2)\,dx + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \kappa(\psi+\varphi_x)^2\,dx = -\gamma|\psi_t(t,L)|^2,$$

portanto,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\psi+\varphi_x)^2\,dx = -\gamma|\psi_t(t,L)|^2.$$

Finalmente, concluímos da igualdade anterior que, a energia associada ao sistema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \kappa(\varphi_x+\psi)^2)\,dx.$$

Agora, lembremos, que todas essas contas foram feitas formalmente, portanto, vamos impor condições, para que tenham sentido. De fato, para que E esteja vem definida, precisamos impor as condições

$$\psi_x \in L_2(0,L), \psi_t \in L_2(0,L), \varphi_t \in L_2(0,L) \text{ e } \varphi_x + \psi \in L_2(0,L).$$

Consideremos

$$V_0^1(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\},$$

como precisamos que se compran as condiçoes de contorno (4.0.5), pedimos que,

$$\varphi \in H_0^1(0,L)\ ,\ \varphi_t \in L_2(0,L)\ ,\ \psi \in V_0^1(0,L) \text{ e } \psi_t \in L_2(0,L).$$

Portanto nosso espaço é

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L_2(0,L) \times V_0^1(0,L) \times L_2(0,L).$$

Logo, temos que ver $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, assim, precisamos definir um produto interno, este vem sugerido pela energia, isto é, dados $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{H}$, definimos

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

por

$$(U,V) = \int_0^L (\rho_1 u_2 \overline{v_2} + \rho_2 u_4 \overline{v_4} + b u_{3x} \overline{v_{3x}} + \kappa (u_{1x} + u_3)\overline{(v_{1x} + v_3)})\mathrm{d}x.$$

Proposição 4.1.1. $(\cdot,\cdot)$ *é um produto interno* $\mathcal{H}$*.*

Demonstração. Análoga a da Proposição 3.1.1. □

Então, consideremos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = (U,U) = \kappa \|\varphi_x + \psi\|_{L_2}^2 + b\|\psi_x\|_{L_2}^2 + \rho_1 \|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2 \|\phi_2\|_{L_2}^2,$$

onde $U = (\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2) \in \mathcal{H}$. Notamos que, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ é a norma em $\mathcal{H}$ que provém de $(\cdot,\cdot)$, queremos ver que $(\mathcal{H}, \|U\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert, para isso, vamos ver que $\|U\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a uma norma natural em $\mathcal{H}$.

Proposição 4.1.2. $(\mathcal{H}, \|U\|_{\mathcal{H}})$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2) \in \mathcal{H}$. Basta ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a $\|\cdot\|_*$, onde

$$\|U\|_* = \|\varphi_x\|_{L_2} + \|\psi_x\|_{L_2} + \|\phi_1\|_{L_2} + \|\phi_2\|_{L_2}. \tag{4.1.6}$$

De fato, podemos observar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa (\|\varphi_x\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2})^2 + b\|\psi_x\|_{L_2}^2 + \rho_1 \|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2 \|\phi_2\|_{L_2}^2,$$

então, em virtude da Proposição 2.1.4, temos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq 4\kappa (\|\varphi_x\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2) + b\|\psi_x\|_{L_2}^2 + \rho_1 \|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2 \|\phi_2\|_{L_2}^2,$$

logo, como $\psi \in V_0^1(0,L))$, temos pelo Corolário 2.3.1 que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq 4\kappa (\|\varphi_x\|_{L_2}^2 + C_1^2 \|\psi_x\|_{L_2}^2) + b\|\psi_x\|_{L_2}^2 + \rho_1 \|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2 \|\phi_2\|_{L_2}^2.$$

Fazendo distributiva, agrupando, e escolhendo C_M o máximo das contantes (em vista de que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$) obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_M^{\frac{1}{2}} \|U\|_*.$$

Por outro lado, vemos que:

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L_2} &\leq \|\varphi_x + \psi - \psi\|_{L_2}\\ &\leq \|\varphi_x + \psi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2},\end{aligned}$$

então, como $\psi \in V_0^1(0,L)$, pelo Corolário 2.3.1, temos

$$\|\varphi_x\|_{L_2} \leq \|\varphi_x + \psi\|_{L_2} + C_1\|\psi_x\|_{L_2}.$$

Portanto, da desigualadade e a definição de $\|\cdot\|_*$, obtemos

$$\begin{aligned}\|U\|_* &\leq \|\varphi_x + \psi\|_{L_2} + (1 + C_1)\|\psi_x\|_{L_2} + \|\phi_1\|_{L_2} + \|\phi_2\|_{L_2}\\ &\leq (1 + C_1)(\|\varphi_x + \psi\|_{L_2} + \|\psi_x\|_{L_2} + \|\phi_1\|_{L_2} + \|\phi_2\|_{L_2})\\ &\leq (1 + C_1)(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_1}}\|U\|_{\mathcal{H}}).\end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que

$$c\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_* \leq C\|U\|_{\mathcal{H}},$$

isto é, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a $\|\cdot\|_*$, portanto $(\mathcal{H}, \|U\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert. $\square$

Agora, vamos definir o domínio de $\mathcal{A}$. Então, seja $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T \in D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$, Assim $U \in \mathcal{H}$, ou seja,

$$\varphi \in H_0^1(0,L), \phi_1 \in L_2(0,L), \psi \in V_0^1(0,L) \text{ e } \phi_2 \in L_2(0,L).$$

Logo, pela Definição 2.4.2, devemos ter que $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, em outras palavras,

$$\phi_1 \in H_0^1(0,L),\ \ \phi_2 \in V_0^1(0,L)$$

e

$$\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \in L_2(0,L) \tag{4.1.7}$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{-\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \in L_2(0,L). \tag{4.1.8}$$

Logo, usando o Teorema 2.1.1 e propriedades no espaço das distribuições, obtemos de (4.1.7)-(4.1.8) que

$$\varphi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \quad , \psi \in V_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \quad , \phi_1 \in H_0^1(0,L) \text{ e } \phi_2 \in V_0^1(0,L),$$

e portanto

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} : \varphi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L), \phi_1 \in H_0^1(0,L), \psi \in V_0^1(0,L) \cap H^2(0,L),\\ \phi_2 \in V_0^1(0,L) \text{ e } b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)\},\end{aligned}$$

onde $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)$.

Proposição 4.1.3. *$\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.*

Demonstração. temos que ver

$$\mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U) \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

De fato, notamos que, se $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então, temos que

$$(\mathcal{A}U, U) = \left(\left(\phi_1 \ , \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x, \ \phi_2 \ , \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{-\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi)\right)^T \ , (\varphi, \phi_1, \psi, \ \phi_2)^T\right),$$

isto é,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U, U) = &\int_0^L \left(\rho_1\left(\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x\right)\overline{\phi_1} + \rho_2\left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{-\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi)\right)\overline{\phi_2}\right)dx\\ &+ \int_0^L (b\phi_{2x}\overline{\psi_x} + \kappa(\phi_{1x} + \phi_2)\overline{(\varphi_x + \psi)})\, dx,\end{aligned}$$

logo, fazendo distributiva e separando a integral, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U, U) \ &= \underbrace{\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\phi_1}\mathrm{d}x}_{IV} + \underbrace{\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\phi_2}\, dx}_{V} - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\phi_2}\, dx\\ &+ \int_0^L b\phi_{2x}\overline{\psi_x}\, dx_{dx} + \int_0^L \kappa(\phi_{1x} + \phi_2)\overline{(\varphi_x + \psi)}dx.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Agora, resolvemos as integrais IV e V separadamente, primeiramente, para IV, temos que

$$IV = \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\phi_1}\, dx = \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\phi_1}\Big|_0^L - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\phi_{1x}}\, dx,$$

assim, como $\overline{\phi_1} \in H_0^1$, então $\kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\phi_1}\Big|_0^L = 0$, e portanto, temos na igualdade anterior que

$$IV = \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\phi_1}\, dx = -\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\phi_{1x}}\, dx.$$

Posteriormente, para V, notamos que

$$V = \int_0^L b\psi_{xx}\overline{\phi_2}\, dx = b\psi_x(L)\overline{\phi_2}(L) - b\psi_x(0)\overline{\phi_2}(0) - \int_0^L b\psi_x\overline{\phi_2 x}\, dx = -\gamma|\phi_2(L)|^2 - \overline{\int_0^L b\overline{\psi_x}\phi_2 x\, dx},$$

esta última desigualdade é justificada por, $\overline{\phi_2} \in V_0^1$, $b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)$ e propriedade dos números complexos. Portanto, substituindo IV e V em (4.1.9) e reagrupando, temos que

$$\begin{aligned}(AU, U) &= -\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{(\phi_{1x} + \phi_2)}\, dx + \int_0^L b\phi_{2x}\overline{\psi_x}\, dx - \overline{\int_0^L b\overline{\psi_x}\phi_2 x\, dx}\\ &+ \int_0^L \kappa(\phi_{1x} + \phi_2)\overline{(\varphi_x + \psi)}\, dx - \gamma|\phi_2(L)|^2\\ &= -\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{(\phi_{1x} + \phi_2)}\, dx + \overline{\int_0^L \kappa\overline{(\phi_{1x} + \phi_2)}(\varphi_x + \psi)\, dx}\\ &+ \int_0^L b\phi_{2x}\overline{\psi_x}\mathrm{d}x - \overline{\int_0^L b\overline{\psi_x}\phi_2 x\, dx} - \gamma|\phi_2(L)|^2\\ &= 2img(\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{(\phi_{1x} + \phi_2)}\, dx)i + 2img(\int_0^L b\phi_{2x}\overline{\psi_x}\, dx)i - \gamma|\phi_2(L)|^2.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U) \leq 0$, isto é, $\mathcal{A}$ é dissipativo. $\square$

Agora, lembremos que queremos provar a existência e unicidade de solução, então, vamos primeiro provar que, $0 \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, basta provar que $-\mathcal{A}$ é invertível com sua inversa contínua.

Proposição 4.1.4. $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Primeiro vamos ver que $-\mathcal{A}$ é invertível, mostremos que $-\mathcal{A}$ é sobrejetor, isto é, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, existe $U \in D(\mathcal{A})$, tal que $\mathcal{A}U = F$. De fato, tenhamos em conta que resolver, $\mathcal{A}U = F$, que é equivalente a resolver $-\phi_1 = f_1 \in H_0^1(0, L)$, $-\phi_2 = f_3 \in V_0^1$ e o problema elíptico:

$$-\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \quad = f_2 \in L_2(0, L) \tag{4.1.10}$$

$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \quad = f_4 \in L_2(0, L), \tag{4.1.11}$$

Junto às condições de contorno (4.0.5). Para achar a solução de (4.1.10)-(4.1.11), usaremos o Teorema de Lax-Milgran e propriedades de regularidade do espaço das distribuições, isto para ver que essa solução esta em $D(\mathcal{A})$. De fato, seja $\overline{\Psi} \in V_0^1(0, L)$ e $\overline{\Phi} \in H_0^1(0, L)$. Multiplicamos por $\overline{\Phi}$ e $\overline{\Psi}$ en (4.1.10) e (4.1.11) respectivamente e integramos em $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = \int_0^L \hat{f}_2 \overline{\Phi}\, dx \tag{4.1.12}$$

e

$$\int_0^L (-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi))\overline{\Psi}\, dx = \int_0^L \hat{f}_4 \overline{\Psi}\, dx, \tag{4.1.13}$$

onde $\hat{f}_2 = \rho_1 f_2$ e $\hat{f}_2 = \rho_2 f_4$. Logo, note que

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}\Big|_0^L - \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x\, dx,$$

então, como $\overline{\Phi} \in H_0^1$, temos que

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx = -\int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x\, dx.$$

Logo, somando as equações (4.1.12) e (4.1.13), e em virtude de que $b\psi_x(L) = \gamma\phi_2(L) = \gamma f_3(L)$, obtemos

$$\int_0^L b\psi_x \overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{(\Psi + \Phi_x)}\, dx = \int_0^L (\hat{f}_4 \overline{\Psi} + \hat{f}_2 \overline{\Phi})\, dx + \gamma f_3(L, t)\overline{\Psi}(L, t). \tag{4.1.14}$$

Então, escrevemos $a(W, V) = T_1(V) + N(V)$, onde $W = (\varphi, \psi)$, $V = (\Phi, \Psi)$ e

$$a(W, V) = \int_0^L b\psi_x \overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{(\Phi_x + \Psi)}\, dx\ , \quad N(V) = \gamma f_3(L, t)\overline{\Psi}(L, t),$$

e

$$T_1(V) = \int_0^L (\hat{f}_4 \overline{\Psi} + \hat{f}_2 \overline{\Phi})\mathrm{d}x.$$

Logo, denotamos $T(V) = T_1(V) + N(V)$, assim, o problema (4.1.14) é equivalente a resolver

$$a(W,V) = T(V) \tag{4.1.15}$$

com as condições de fronteira (4.0.5). Então, conseguir uma solução para (4.1.10) − (4.1.11) é equivalente a conseguir uma solução para (4.1.15), portanto, temos que achar $(\varphi,\psi) \in H_0^1 \times V_0^1(0,L)$, tal que cumpra (4.1.15). Como queremos usar o teorema de Lax-Milgran, precisamos definir um espaço $\mathcal{F}$, uma aplicação $a(\cdot,\cdot)$ sesquilinear, contínua e coerciva e T um funcional antilinear em $\mathcal{F}'$. De fato, definimos o espaço $\mathcal{F} = H_0^1 \times V_0^1$ e consideremos a aplicação

$$a(\cdot,\cdot) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{C},$$

dada por

$$a(W,V) = \int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx,$$

onde $W = (\varphi,\psi)$ e $V = (\Phi,\Psi)$. Podemos observar que $a(\cdot,\cdot)$ é sesquilinear, além disso, é um produto interno em $\mathcal{F}$, mais ainda, seja $\|V\|_{\mathcal{F}}^2 = a(V,V)$, podemos verificar que $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ é Banach. Agora, vamos ver que $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva e contínua. De fato, para ver que $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, note que

$$\int_0^L b|\psi_x|^2\,dx + \int_0^L \kappa|(\varphi_x+\psi)|^2\,dx \geq 1\|V\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Logo, provemos que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, de fato, notamos que

$$\begin{aligned}|a(W,V)| &= \left|\int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx\right| \\ &\leq \sqrt{\kappa}\|\varphi_x+\psi\|_{L_2}\sqrt{\kappa}\|\overline{\Phi_x+\Psi}\|_{L_2} + \sqrt{b}\|\Psi_x\|_{L_2}\sqrt{b}\|\overline{\Psi_x}\|_{L_2},\end{aligned}$$

além disso, como se cumpre que $\sqrt{\kappa}\|\varphi_x+\psi\|_{L_2} \leq \|W\|_{\mathcal{F}}$, $\sqrt{\kappa}\|\overline{\varphi_x+\psi}\|_{L_2} \leq \|V\|_{\mathcal{F}}$, $\sqrt{b}\|\overline{\Psi_x}\|_{L_2} \leq \|V\|_{\mathcal{F}}$ e $\sqrt{b}\|\Psi_x\|_{L_2} \leq \|W\|_{\mathcal{F}}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}|a(W,V)| &= \left|\int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \|W\|_{\mathcal{F}}\|V\|_{\mathcal{F}} + \|W\|_{\mathcal{F}}\|V\|_{\mathcal{F}} \\ &= 2\|W\|_{\mathcal{F}}\|V\|_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

Portanto $a(\cdot,\cdot)$ é contínua. Logo, tendo em conta o Corolário 2.3.1, temos

$$|\overline{\Psi}(L)|^2 \leq \int_0^L |\overline{\Psi_x(x)}|^2\,dx \text{ e } \int_0^L |\overline{\Psi}(x)|^2 \leq \int_0^L |\overline{\Psi_x}(x)|^2 \qquad \forall \Psi \in V_0^1(0,l). \tag{4.1.16}$$

Então, verificar que $T : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$, dado por $T(V) = T_1(V) + N(V)$, é um funcional antilinear de $\mathcal{F}$. De fato, podemos observar que $T_1(V)$ é antilinear, isto pelas propriedades de linearidade da integral e propriedades dos números complexos e para veficar a antilinearidade de $N(V)$, basta observar que a avaliação é uma aplicação antilinear, assim, T é soma de operadores antilineares e portanto é antilinear. Logo, verifiquemos que T é contínuo. De fato, notamos que

$$|T(V)| \leq |T_1(V)| + |N(V)|. \tag{4.1.17}$$

Como $V \in V_0^1(0, L)$, então da definição de T_1 e do Corolário 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned} |T_1(V)| &\leq \|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\overline{\Psi}\|_{L_2} + \|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\Phi\|_{L_2} \\ &\leq C_M(\|\overline{\Psi}\|_{L_2} + \|\overline{\Phi}\|_{L_2}) \\ &\leq C_M(C_p\|\overline{\Phi}_x\|_{L_2} + \|\overline{\Psi}\|_{L_2}) \\ &\leq C_M(C_p\|\overline{\Psi + \overline{\Phi}_x}\|_{L_2} + C_p\|\overline{\Psi}\|_{L_2} + \|\overline{\Psi}\|_{L_2}) \\ &\leq C_M(C_p\|\overline{\Psi + \overline{\Phi}_x}\|_{L_2} + (C_p + 1)C_p\|\overline{\Psi}_x\|_{L_2}) \\ &\leq C(\|\overline{\Psi + \overline{\Phi}_x}\|_{L_2} + \|\overline{\Psi}_x\|_{L_2}) \\ &\leq C\|V\|_{\mathcal{F}}, \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

logo, em virtude de (4.1.16), obtemos

$$|N(V)| \leq C_3\|V\|_{\mathcal{F}}, \tag{4.1.19}$$

então, substituindo as estimativas (4.1.18) e (4.1.19) em (4.1.17), temos que

$$|T(V)| \leq C'\|V\|_{\mathcal{F}},$$

onde $C' = C_3 + C$. Isto é T é contínuo. Logo, pelo Teorema 2.1.1, existe um único $W = (\varphi, \psi) \in \mathcal{F}$, tal que $a(W, V) = T(V)$ para todo $V \in \mathcal{F}$. Mas ainda, para mostrar que $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2) \in D(\mathcal{A})$, então, somente falta verificar a regularidade $\varphi, \psi \in H^2$. Para isso, vamos usar o conceito de derivada fraca nos espaços de Sobolev. Então, como (φ, ψ), satisfaz (4.1.15) para todo $V \in \mathcal{F}$, em particular podemos escolher $V = (\Phi, 0) \in C_0^\infty \times C_0^\infty \subseteq \mathcal{F}$, assim de (4.1.15), obtemos

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\Phi}_x \, dx = -\int_0^L \hat{f}_2\overline{\Phi} \, dx.$$

Logo, pela definição de derivada fraca, $\kappa(\varphi_x + \psi)_x = \hat{f}_2$ no espaço das distribuições e como $\hat{f}_2 \in L$, concluímos que $\kappa(\varphi_x + \psi) \in H^1$. Assim, temos que $\varphi \in H^2$. Agora, para ver que $\psi \in H^2$, basta notar que $\overline{V} = (0, \Psi) \in C_0^\infty \times C_0^\infty \subseteq \mathcal{F}$, então de 4.1.15, obtemos que

$$\int_0^L b\psi_x\overline{\Psi_x} \, dx = \int_0^L (\hat{f}_4 + \kappa(\varphi_x + \psi))\overline{\Psi} \, dx.$$

Assim, pela definição de derivada fraca $(b\psi_x)_x = \hat{f}_4 + \kappa(\varphi_x + \psi)$ no espaço das distribuições e como $\hat{f}_4 + \kappa(\varphi_x + \psi) \in L_2$ conclimos que $b\psi_x \in H^1$. Logo, segue que $\psi \in H^2$. Portanto, temos que $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, Assim, $-\mathcal{A}$ é invertível.
Agora, vamos ver que $-\mathcal{A}^{-1}$ é contínua. Para isso, é suficiente mostrar que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$,

pois se $-\mathcal{A}U = F$, então $U = -\mathcal{A}^{-1}F$. Logo, como temos que $-\phi_1 = f_1 \in H_0^1(0,L)$, $-\phi_2 = f_3 \in V_0^1(0,L)$ e em virtude de (4.1.16), segue que

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2\|\phi_2\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\leq \rho_1\|f_1\|_{L_2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_p\rho_1\|f_{1x}\|_{L_2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_p\rho_1\|f_{1x} + f_3 - f_3\|_{L_2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_p\rho_1(\|f_{1x} + f_3\|_{L_2} + \|f_3\|_{L_2})^2 + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 \\
&\leq 4C_p\rho_1(\|f_{1x} + f_3\|_{L_2}^2 + \|f_3\|_{L_2}^2) + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 \\
&\leq 4C_p\rho_1(\|f_{1x} + f_3\|_{L_2}^2 + Cp\|f_{3x}\|_{L_2}^2) + \rho_2 Cp\|f_{3x}\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_M(\|f_{1x} + f_3\|_{L_2}^2 + \|f_{3x}\|_{L_2}^2) \\
&\leq C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Além disso, substituindo $\overline{\Phi}$ por $\overline{\varphi}$ em (4.1.12) e $\overline{\Psi}$ por $\overline{\psi}$ em (4.1.13), seguindo de maneira análoga como foi feito para chegar a (4.1.14), obtemos que

$$\int_0^L b\psi_x\overline{\psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}\mathrm{d}x + |\gamma\psi_x(L)|^2 \leq \int_0^L (\hat{f}_4\overline{\psi} + \hat{f}_2\overline{\varphi})\,dx,$$

logo, aplicando Corolário 2.3.1, os Teoremas 2.3.2, 2.2.1 e a definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L b\psi_x\overline{\psi_x} + \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}\mathrm{d}x &\leq \int_0^L (\hat{f}_4\overline{\psi} + \hat{f}_2\overline{\varphi})\,dx \\
&\leq \|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\overline{\psi_x}\|_{L_2} + \|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\overline{\varphi}\|_{L_2} \\
&\leq \|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\overline{\psi_x}\|_{L_2} + C_p\|\hat{f}_2\|_{L_2}^2\|\overline{\varphi_x}\|_{L_2} \\
&\leq C_p\|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\varphi_x + \psi - \psi\|_{L_2}^2 \\
&\quad +\|\hat{f}_4\|_{\mathcal{L}_2}\|\psi_x\|_{L_2} \\
&\leq \|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\psi_x\|_{L_2} + C_p\|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\varphi_x+\psi\|_{L_2} \\
&\quad +C_p^2\|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\psi_x\|_{L_2} \\
&\leq C_{M_1}(\|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\psi_x\|_{L_2} + \|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\varphi_x+\psi\|_{L_2} \\
&\quad +\|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\psi_x\|_{L_2}) \\
&\leq C_{M_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Assim, somando (4.1.20) e (4.1.21), concluimos que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_{M_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C_{M_1}(\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C(\varepsilon)\|F\|_{\mathcal{H}}^2) + C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, em virtude da Proposição 2.1.6, temos que para ε suficientemente pequeno, se verifica que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, $0 \in \rho(-\mathcal{A})$. $\square$

Por fim só falta mostrar que o $D(\mathcal{A})$ e denso em $\mathcal{H}$, isto é, $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

Proposição 4.1.5. *$D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Queremos ver que, $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Para isso, lembremos que $\overline{D(\mathcal{A})}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, e como $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{H} = \overline{D(\mathcal{A})} \oplus \overline{D(\mathcal{A})}^{\perp}$.

Assim, basta ver que $\overline{D(\mathcal{A})}^{\perp} = \{0\}$. De fato, seja $U \in \overline{D(\mathcal{A})}^{\perp}$, portanto $(U, V) = 0$ para todo $V \in \overline{D(\mathcal{A})}$, em particular $(U, V) = 0$ para todo $V \in D(\mathcal{A})$, então, como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, segue do Lema 2.1.2, que existe $\lambda > 0$, tal que $\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{H}$. Em particular, existe $V_0 \in D(\mathcal{A})$, tal que $U = \lambda V_0 - \mathcal{A}V_0$, assim, como $V_0 \in D(\mathcal{A})$, então temos que

$$\begin{aligned}(U, V_0) &= (\lambda V_0 - \mathcal{A}V_0, V_0)\\ &= \lambda(V_0, V_0) - (\mathcal{A}V_0, V_0)\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $(U, V) = 0$, para toda $V \in \overline{D(\mathcal{A})}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(V_0, V_0) &= (\mathcal{A}V_0, V_0)\\ &= Re(\mathcal{A}V_0, V_0).\end{aligned}$$

Daí $\lambda(V_0, V_0) \leq 0$, ou seja, $V_0 = 0$ e assim, $U = 0$. Isto é o que queriamos mostrar. Assim, temos que $\overline{D(\mathcal{A})}^{\perp} = \{0\}$, e portanto $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. □

Logo, do fato que $\mathcal{A}$ é dissipativo, densamente definido e em virtude do Lema 2.1.2, temos pelo Teorema 2.4.3, que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 e do Teorema 2.4.4, segue que, o Problema Abstrato de Cauchy (4.1.1), tem uma única solução.

4.2 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Nesta seção, vamos mostrar a estabilidade exponencial da solução do sistema (4.0.1)-(4.0.5), que é equivalente a provar estabilidade exponencial do problema (4.1.1). Vamos dividir a seção em duas subseções, com o objetivo de provar as duas condições da caracterização para estabilidade exponencial de um semigrupo de classe C_0, dada no Teorema 2.4.6. Primeiramente, vamos introduzir um resultado, que será de importância no desenvolvimento da primeira subseção.

Proposição 4.2.1. *O operador $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto, onde $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal associado ao sistema (4.0.1)-(4.0.2).*

Demonstração. A ideia é fixar uma sequencia $(F_i)_i$ limitada em $\mathcal{H}$, então, como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que $U_i = \mathcal{A}^{-1}F_i$. Logo, basta mostrar, que existe uma subsequencia $(U_{i_k})_k$

convergente para algum $U \in \mathcal{H}$. Assim, podemos concluir que, $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto. De fato, seja $(F_i)_i \subset \mathcal{H}$ uma sequencia limitada em $\mathcal{H}$, como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então

$$\|U_j\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F_j\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.2.1}$$

onde $F_i = (f_1^i, f_2^i, f_3^i, f_4^i)^T$ e $U_i = (\varphi^i, \phi_1^i, \psi^i, \phi_2^i)^T$, Logo, da definição da norma em $\mathcal{H}(0, L)$, temos que $(\psi^i)_i$ é limitada em $L_2(0, L)$. Assim, em virtude de (4.1.10), temos que $(\varphi_x^i)_i$ é limitada para cada $i \in \mathbb{N}$ em $L_2(0, L)$, então, em vista de (4.1.11), temos que $(\psi_{xx}^i)_i$ é limitada em $L_2(0, L)$, além disso, usando ferramentas de regularidade, como foi feito para a solução de (4.1.10)-(4.1.11), obtemos que $(\psi^i)_i$ é limitada em $H^2(0, L)$. Daí, em virtude dos teoremas de imersão, sabemos que $H^2(0, L) \hookrightarrow H^1(0, L)$ é uma imersão compacta, portanto, existe uma subsequência de $(\psi^i)_i$ (que ainda denotaremos por $(\psi^i)_i$) e $\psi \in H_1(0, L)$, tal que, $(\psi^i)_i$ é convergente para ψ em $H_1(0, L)$, mais ainda, como $(\psi^i)_i(0) \to \psi(0)$ e em virtude da imersão de H_1 no espaço das funções contínuas, obtemos

$$\|\psi^i - \psi\|_{V_0^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \longrightarrow \infty.$$

Agora, maneira análoga, usando que $H^2(0, L) \hookrightarrow H^1(0, L)$ é uma imersão compacta e que $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L_2(0, L)$ é também uma imersão compacta, provamos que, existe uma subsequência de $(\varphi^i)_i$ e $\varphi \in H_0^1$, tais que

$$\|\varphi^i - \varphi\|_{H_0^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \longrightarrow \infty,$$

Logo, como $\mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U) = -\gamma|\phi_2(L)|^2$, temos $\gamma||\phi_2(L)|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$, além disso, em virtude de (4.2.1), segue que, $(\phi_2^i)_i$ é limitada en $L_2(0, L)$, mais ainda, temos que, é limitada em $H^2(0, L)$, isto em virtude de a regularidade da solução do problema $\mathcal{A}U_i = F_i$, então, analogamente, como foi feito para ψ, concluímos que, $(\phi_1^i)_i$ é limitada em $H^2(0, L)$ e como $H^2(0, L) \hookrightarrow H^1(0, L)$, então, existe uma subsequência $(\phi_1^i)_i$ e $\phi_1 \in H_1(0, L)$, mais ainda, pelas convergências pontuais $(\phi_1^i)_i(0) \to \phi_1(0)$ e $(\phi_1^i)_i(L) \to \phi_1(L)$ e imersão de $H_1(0, L)$, no espaço das funções contínuas, obtemos que

$$\|\phi_1^i - \phi_1\|_{H_0^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \longrightarrow \infty,$$

e analogamente para ϕ_2^i, existe uma subsequência $(\phi_2^i)_i$ e $\phi_2 \in H_1(0, L)$, tal que

$$\|\phi_2^i - \phi_2\|_{V_0^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \longrightarrow \infty.$$

Finalmente, seja $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)$, então, temos que a subsequencia $U_i = (\varphi^i, \phi_1^i, \psi^i, \phi_2^i)'$ satisfaz

$$\|U^i - U\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \text{ quando } i \longrightarrow \infty.$$

Portanto, concluimos, que o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é compacto. $\square$

Proposição 4.2.2. *O espectro de $\mathcal{A}$ é constituído apenas de autovalores de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 4.2.1 e da Proposição 2.1.3. □

Agora, para mostrar a condição (i) do Teorema 2.4.6, vamos usar a caracterização para o espectro de um semigrupo $S(t) = e^{At}$ de contrações de classe $\mathcal{C}_0$ num espaço de Hilbert (esta caracterização está desenvolvida em [24]).

Observação 4.2.1. Para a condição (ii) do Teorema 2.4.6, vamos precisar impor a condição de igualdade sobre as velocidades de onda, isto é,

$$b\rho_1 = \kappa\rho_2. \tag{4.2.2}$$

No caso geral não é possível mostrar que a estabilidade exponencial (ver [9]), é apenas possível mostrar estabilidade polinomial.

Então, primeiro vamos provar a condição (i) do Teorema 2.4.6, sobre as condições apropriadas nas constantes do sistema (4.0.1)-(4.0.2).
Por simplicidade, definimos algumas condições associadas às constantes do sistema

- *Condição* (P_0) :

$$\frac{\kappa L^2}{\rho_2} \neq \frac{\left(\frac{b}{\rho_2}m_1^2 - \frac{\kappa}{\rho_1}m_2^2\right)\left(\frac{\kappa}{\rho_1}m_1^2 - \frac{b}{\rho_2}m_2^2\right)}{\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)(m_1^2 + m_2^2)}\pi^2 , \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z} , \quad m_1 \neq m_2. \tag{4.2.3}$$

- *Condição* (P_2) :

$$\frac{\kappa L^2}{b} \neq \frac{4(\kappa\rho_2 - \rho_1 b)\, m}{3b\,\rho_1 + \kappa\rho_2}\pi^2, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{4.2.4}$$

Observação 4.2.2. Observe que, no caso de igualdade da velocidade de propagação das ondas, isso é $\dfrac{\rho_2}{b} = \dfrac{\rho_1}{\kappa}$, *Condição* (P_0) se reduz

- *Condição* (P_1) :

$$\frac{\kappa L^2}{b} \neq \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{m_1^2 + m_2^2}\pi^2, \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad m_1 \neq m_2, \quad m_1^2 + m_2^2 \in 2\mathbb{Z}.$$

Teorema 4.2.1.

(a) Suponha que $\dfrac{\rho_2}{b} > \dfrac{\rho_1}{\kappa}$. *Então*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow (P_0) \text{ e } (P_2) \text{ são satisfeitas.}$$

(b) Suponha que $\dfrac{\rho_2}{b} \leq \dfrac{\rho_1}{\kappa}$. *Então*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow (P_0) \text{ é satisfeita.}$$

Demonstração. Em virtude da Proposição 4.2.2 é suficiente caraterizar o espectro, então, seja $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, então, existe $U \in D(\mathcal{A})\backslash\{0\}$, tal que $\mathcal{A}U = i\lambda U$, isto é

$$i\lambda\varphi = \phi_1 \tag{4.2.5}$$

$$i\lambda\psi = \phi_2 \tag{4.2.6}$$

$$\frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x = i\lambda\phi_1 \tag{4.2.7}$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}\varphi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi = i\lambda\phi_2. \tag{4.2.8}$$

Substituindo (4.2.5) e (4.2.6) em (4.2.7) e (4.2.8) respetivamente, obtemos que

$$\frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x + \lambda^2\varphi = 0 \tag{4.2.9}$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}\varphi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi + \lambda^2\psi = 0, \tag{4.2.10}$$

além disso, como $b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)$ e pelo fato que $\mathcal{R}e(i\lambda U, U) = \mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U) = -\gamma|\phi_2(L)|^2$, temos que, $\phi_2(L) = 0$, assim $\psi_x(L) = 0$, e de (4.2.6), concluimos que $\psi(L) = 0$. Então, com as condições $\psi_x(L) = 0$, $\psi(L) = 0$ e as condições (4.0.4)-(4.0.5), obtemos as condições de fronteira

$$\psi_x(L) = 0, \varphi(L) = 0,\ \psi(L) = 0,\ \varphi(0) = 0 \text{ e } \psi(0) = 0. \tag{4.2.11}$$

Logo, denotamos $\mu = \lambda^2 > 0$. Para estudar o sistema (4.2.9)-(4.2.11), primeiro vamos conseguir uma base da solução fundamental do sistema (4.2.9)-(4.2.10). Para isso, escrevemos o operador diferencial associado às equações do sistema (4.2.9)-(4.2.10), avaliado em φ e ψ, isto é,

$$\left[\frac{\kappa}{\rho_1}D^2 + I\mu\right](\varphi) + \frac{\kappa}{\rho_1}D(\psi) = 0 \text{ e } \left[\frac{b}{\rho_2}D^2 - \frac{\kappa}{\rho_2}I + \mu I\right](\psi) - \frac{\kappa}{\rho_2}D(\varphi) = 0.$$

que é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\rho_1}t^2 + \mu & \frac{\kappa}{\rho_1}t \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}t & \frac{b}{\rho_2}t^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos calcular o determinante desta matriz para conseguir o polinômio característico, isto é,

$$\left(\frac{\kappa}{\rho_1}t^2 + \mu\right)\left(\frac{b}{\rho_2}t^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} + \mu\right) + \frac{\kappa^2}{\rho_1\rho_2}t^2 = 0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}t^4 - \frac{\kappa^2}{\rho_1\rho_2}t^2 + \frac{\kappa\mu}{\rho_1}t^2 + \frac{\mu\, b}{\rho_2}t^2 + \mu^2 - \mu\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\kappa^2}{\rho_1\rho_2}t^2 = 0$$

Portanto, temos que

$$\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}t^4+\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu t^2+\mu^2-\mu\frac{\kappa}{\rho_2}=0.$$

Agora, consideremos o polinômio associado a esta expressão (ver [28], Teorema 2.7, onde se resolve um sistema similar "sendo diferente apenas nas condições de contorno"com uma abordagem alternativa à que vamos apresentar aqui), ou seja,

$$P(t)=At^4+Bt^2+C \quad \text{onde} \quad A=\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}, \quad B=\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu, \quad C=\mu^2-\mu\frac{\kappa}{\rho_2},$$

fazemos uma mudança de variável $n=t^2$, então P assume a forma

$$P(n)=An^2+Bn+C.$$

Logo, estudaremos o discriminante para conhecer a natureza das raízes do polinômio. Então, notamos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= B^2-4AC\\
&=\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2\mu^2-4\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\left(\mu^2-\mu\frac{\kappa}{\rho_2}\right)\\
&=\frac{b^2}{\rho_2^2}\mu^2+2\frac{\kappa b\mu^2}{\rho_2\rho 1}+\frac{\kappa^2}{\rho_1^2}\mu^2-4\frac{\kappa b\mu^2}{\rho_2\rho_1}+4\frac{\kappa b\mu}{\rho_2\rho_1}\frac{\kappa}{\rho_2}\\
&=\left(\frac{b}{\rho_2}-\frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2\mu^2+4\frac{\kappa b\mu}{\rho_2\rho_1}\frac{\kappa}{\rho_2}>0.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos duas raízes reais diferentes, as quais são

$$n_1=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}<0 \tag{4.2.12}$$

e

$$n_2=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}. \tag{4.2.13}$$

Logo, para estudar o sinal de n_2, tenhamos em conta que

$$\Delta-B^2=4\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\mu\left(\frac{\kappa}{\rho_2}-\mu\right),$$

assim, da equação acima e do fato que

$$\Delta-B^2=\left(\sqrt{\Delta}-B\right)\left(\sqrt{\Delta}+B\right),$$

temos que, o sinal de n_2 depende de $\dfrac{\kappa}{\rho_2}$ com respeito a μ. Portanto, temos os seguinte casos:

1. Se $\mu < \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então $n_2 > 0$.
2. Se $\mu = \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então $n_2 = 0$.
3. Se $\mu > \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então $n_2 < 0$.

Estudemos o **Caso 1.** Isto é, $\mu < \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então $n_2 > 0$. Assim, temos duas raízes reais e duas complexas. Logo, voltando a mudança de variável, obtemos $t_1 = \sqrt{-n_1}$ e $t_2 = \sqrt{n_2}$. Assim, as raízes do polinômio P são as seguintes $it_1, t_2, -it_1$ e $-t_2$, obtemos que, a solução geral (através da matriz fundamental, usando o método de eliminação ver [29] pag. 264) do sistema (4.2.9)-(4.2.10), vêm dada por $(\varphi(x), \psi(x))^T$ em que

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3 senh(t_2(L-x)) + a_4 cosh(t_2(L-x))$$

e

$$\psi(x) = a_1' cos(t_1(L-x)) + a_2' sen(t_1(L-x)) + a_3' cosh(t_2(L-x)) + a_4' senh(t_2(L-x)),$$

em que a_j, a_j' são números complexos para $j = 1, 2, 3, 4$. Agora, para determinar uma relação entre as constastes de φ e ψ, note que, φ e ψ satisfazem (4.2.9), portanto, ao substituir φ e ψ em (4.2.9) concluímos que

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_1 t_1^2 + a_1 \mu + \frac{\kappa}{\rho_1} a_1' t_1 = 0,$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_2 t_1^2 + a_2 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_2' t_1 = 0,$$

$$\frac{\kappa}{\rho_1} a_3 t_2^2 + a_3 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_3' t_2 = 0,$$

e

$$\frac{\kappa}{\rho_1} a_4 t_2^2 + a_4 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_4' t_2 = 0.$$

Então, temos que

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3 senh(t_2(L-x)) + a_4 cosh(t_2(L-x))$$

e

$$\psi(x) = -a_1 d_1 cos(t_1(L-x)) + a_2 d_1 sen(t_1(L-x)) - a_3 d_2 cosh(t_2(L-x)) - a_4 d_2 senh(t_2(L-x)),$$

onde

$$d_1 = \frac{\mu \rho_1}{t_1 \kappa} - t_1 \text{ e } d_2 = -\frac{\mu \rho_1}{t_2 \kappa} - t_2. \tag{4.2.14}$$

Observação 4.2.3. Note que $d_1 \neq 0$, caso contrário, se $d_1 = 0$, teríamos $\frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1 = 0$, então, $\frac{\mu\rho_1}{\kappa} = t_1^2$, assim, temos que, $\frac{\mu\rho_1}{\kappa} = -n_1$, isto é, $\frac{\mu\rho_1}{\kappa} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A}$, portanto $\frac{2A\mu\rho_1}{\kappa} = B+\sqrt{\Delta}$,

daí, em virtude da definição de A e pela equação (4.2.2), obtemos que, $\frac{2\kappa^2\mu}{\rho_1\kappa} = B+\sqrt{\Delta}$, então, da definição de B, segue que $B = B+\sqrt{\Delta}$, finalmente, temos $\sqrt{\Delta} = 0$, isto é uma contradição, pois sabemos que $\Delta \neq 0$. Mais ainda, note que, não é preciso usar (4.2.2), pois se,

$$\frac{\mu\rho_1}{\kappa} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2A},$$

então $(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1})\mu = \sqrt{\Delta}$, como todas estas constantes são positivas e

$$\Delta = \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2 \mu^2 + 4\frac{\kappa b\mu}{\rho_2\rho 1}\frac{\kappa}{\rho_2},$$

temos uma contradição.

Logo, note que,

$$\begin{aligned}\psi_x(x) &= -a_1d_1t_1\, sen(t_1(L-x)) - a_2d_1t_1cos(t_1(L-x)) + a_3d_2t_2\, senh(t_2(L-x)) \\ &\quad + a_4d_2t_2\, cosh(t_2(L-x)),\end{aligned}$$

então, pelas condições de contorno, temos $\psi_x(L) = 0$, portanto

$$0 = \psi_x(L) = -a_1d_1t_1sen(t_1(0)) - a_2d_1t_1cos(t_1(0)) + a_3d_2t_2senh(t_2(0)) + a_4d_2t_2cosh(t_2(0)),$$

assim

$$0 = a_2d_1t_1 - a_4d_2t_2. \tag{4.2.15}$$

Também, note que

$$0 = \varphi(L) = a_1sen(t_1(0)) + a_2cos(t_1(0)) + a_3senh(t_2(0)) + a_4cosh(t_2(0)),$$

assim, temos que, $0 = a_2 + a_4$, portanto , $-a_2 = a_4$, então, substituindo em (4.2.15), obtemos que, $0 = a_4d_1t_1 + a_4d_2t_2$, logo, usando as definições de d_1 e d_2, temos que

$$0 = a_4d_1t_1 + a_4d_2t_2 = a_4\left(\left(\frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1\right)t_1 + \left(-\frac{\mu\rho_1}{t_2\kappa} - t_2\right)t_2\right),$$

mais ainda, como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1\right)t_1 + \left(-\frac{\mu\rho_1}{t_2\kappa} - t_2\right)t_2 &= \frac{\mu\rho_1}{\kappa} - t_1^2 - \frac{\mu\rho_1}{\kappa} - t_2^2 \\ &= -t_1^2 - t_2^2 = n_1 - n_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{A} < 0,\end{aligned}$$

podemos concluir que $a_4 = a_2 = 0$. Portanto, a solução fica da forma $(\varphi(x),\, \psi(x))^T$, em que

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_3 senh(t_2(L-x)) \tag{4.2.16}$$

e

$$\psi(x) = -a_1 d_1 cos(t_1(L-x)) - a_3 d_2 cosh(t_2(L-x)). \tag{4.2.17}$$

Agora, substituindo a condição $\psi(L) = 0$ em (4.2.17), obtemos

$$0 = -a_1 d_1 - a_3 d_2. \tag{4.2.18}$$

Além disso, en vista que $\psi(0) = 0$, temos que,

$$0 = -a_1 d_1 cos(t_1 L) - a_3 d_2 cosh(t_2 L). \tag{4.2.19}$$

Portanto, usando (4.2.18) em (4.2.19), obtemos,

$$0 = a_3 d_2 cos(t_1 L) - a_3 d_2 cosh(t_2 L),$$

logo, como $d_2 < 0$, temos que, se $a_3 \neq 0$, então $cos(t_1 L) = cosh(t_2 L)$, isto é impossível. Assim, $a_3 = 0$ e do fato que $d_1 \neq 0$, em virtude de (4.2.18), concluimos que $a_1 = 0$, isto é, $(\varphi(x), \psi(x))^T = (0,0)^T$, consequentemente o sistema (4.2.9)-(4.2.10), no caso 1, tem apenas a solução trivial.

Agora, estudemos o **Caso 2.** Ou seja, se $\mu = \dfrac{\kappa}{\rho_2}$ então $n_2 = 0$. Neste caso, temos dois raízes complexas e uma real repetida, que são, $it_1, -it_1$ e 0 respectivamente. Então, como tem dois raízes complexas e uma real que é repetida, aplicando o método do operador diferencial ou método de eliminação, [29], concluimos que, a solução geral do sistema (4.2.9)-(4.2.10), é da forma

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3$$

e

$$\psi(x) = a_1' cos(t_1(L-x)) + a_2' sen(t_1(L-x)) + a_3'(L-x) + a_4.$$

Logo, substituindo φ e ψ em (4.2.9) e em vista que $\mu = \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, obtemos

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_1 t_1^2 + a_1 \mu + \frac{\kappa}{\rho_1} a_1' t_1 = 0,$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_2 t_1^2 + a_2 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_2' t_1 = 0,$$

e

$$\frac{\kappa}{\rho_2} a_3 - \frac{\kappa}{\rho_1} a_3' = 0.$$

Portanto, concluímos que

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3$$

e

$$\psi(x) = -a_1 d_1 cos(t_1(L-x)) + a_2 d_1 sen(t_1(L-x)) + a_3(L-x)\frac{\kappa\rho_1}{\rho_2\kappa} + a_4,$$

onde

$$d_1 = \frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1,$$

daí, em virtude das condições (4.2.11), obtemos $0 = \varphi(L) = a_2 + a_3$, ou equivalentemente

$$-a_2 = a_3, \tag{4.2.20}$$

então, pela condição de contorno $0 = \psi_x(L)$, temos

$$0 = \psi_x(L) = -a_2 d_1 t_1 - a_3\frac{\kappa\rho_1}{\rho_2\kappa}. \tag{4.2.21}$$

Portanto, substituindo (4.2.20) em (4.2.21), obtemos

$$0 = -a_2\left(d_1 t_1 - \frac{\kappa\rho_1}{\rho_2\kappa}\right) = -a_2\left(\left(\frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1\right)t_1 - \frac{\kappa\rho_1}{\rho_2\kappa}\right).$$

Além disso, pelo fato que $\mu = \frac{\kappa}{\rho_2}$, segue que

$$\left(\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\rho_1}{t_1\kappa} - t_1\right)t_1 - \frac{\kappa\rho_1}{\rho_2\kappa} = -t_1^2 = n_1 \neq 0,$$

do qual concluímos, pela desigualdade anterior $a_2 = a_3 = 0$. Assim a solução é da forma

$$\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 sen(t_1(L-x)) \\ -a_1 d_1 cos(t_1(L-x)) + a_4\end{pmatrix}.$$

Logo, como $\psi(0) = 0$, então, $a_4 = a_1 d_1 cos(t_1 L)$ e em virtude que $\psi(L) = 0$, obtemos que $a_1 \neq 0$ (caso contrário a solução seria trivial). Logo, como
$0 = \varphi(0) = a_1 sen(t_1 L)$ podemos concluir que, (4.2.9)-(4.2.11) tem solução não trivial se, e somente se, $sen(t_1 L) = 0$, mas isto é impossível, pois caso que

$$sen(t_1 L) = 0,$$

então $t_1 L = m_1\pi$. Assim, como $\mu = \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então, da definição de C, temos que $C = 0$, assim

$$t_1 = \sqrt{-n_1} = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\rho_1}{b}}, \tag{4.2.22}$$

Logo, assumindo *Condição* (P_0), temos ao substituir $m_2 = 0$ em (4.2.3) e manipulando algebricamente a equação resultante, obtemos

$$\frac{\kappa}{b} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{m_1^2\pi^2}{L^2},$$

que contradiz (4.2.22). Assim, o sistema tem apenas a solução trivial, pois $a_1 = 0$. Agora, se a *Condição* (P_0) não for satisfeita, então, escolhendo (a_1, a_4), tal que satisfaça $a_4 = a_1 d_1 cos(t_1 L)$, conseguimos um autovalor do sistema (4.2.9)-(4.2.11). De fato, considere $(a_1, a_4) = (1, d_1 cos(t_1 L))$, substituindo em (4.2.16) e (4.2.17), temos que esta solução de sistema (4.2.9)-(4.2.11) não é trivial, portanto, o sistema tem um valor próprio.
Finalmente, estudemos o **Caso 3.** Isto é, se $\mu > \dfrac{\kappa}{\rho_2}$, então $n_2 < 0$. Portanto, notamos que, retornando a mudança de variável, obtemos $t_1 = \sqrt{-n_1}$ e $t_2 = \sqrt{-n_2}$. Logo, as raízes do polinômio P, são as seguintes $it_1, it_2, -it_1$ e $-it_2$, assim, aplicando o método clássico do operador diferencial ou método de eliminação, obtemos que, a solução geral do sistema (4.2.9)-(4.2.10), é da forma:

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3 sen(t_2(L-x)) + a_4 cos(t_2(L-x))$$

e

$$\psi(x) = a_1' cos(t_1(L-x)) + a_2' sen(t_1(L-x)) + a_3' cos(t_2(L-x)) + a_4' sen(t_2(L-x)).$$

Portanto, substituindo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ em (4.2.9), obtemos

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_1 t_1^2 + a_1 \mu + \frac{\kappa}{\rho_1} a_1' t_1 = 0,$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_2 t_1^2 + a_2 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_2' t_1 = 0,$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_3 t_2^2 + a_3 \mu + \frac{\kappa}{\rho_1} a_3' t_2 = 0,$$

e

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} a_4 t_2^2 + a_4 \mu - \frac{\kappa}{\rho_1} a_4' t_2 = 0.$$

Assim, podemos concluir que

$$\varphi(x) = a_1 sen(t_1(L-x)) + a_2 cos(t_1(L-x)) + a_3 sen(t_2(L-x)) + a_4 cos(t_2(L-x))$$

e

$$\psi(x) = -a_1 d_1 cos(t_1(L-x)) + a_2 d_1 sen(t_1(L-x)) - a_3 d_2 cos(t_2(L-x)) + a_4 d_2 sen(t_2(L-x)),$$

onde

$$d_1 = \frac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1 \text{ e } d_2 = \frac{\mu\rho_1}{t_2\kappa} - t_2. \tag{4.2.23}$$

tenhamos em conta que

$$\begin{aligned}\psi_x(x) &= -a_1 d_1 t_1 sen(t_1(L-x)) - a_2 d_1 t_1 cos(t_1(L-x)) - a_3 d_2 t_2 sen(t_2(L-x)) \\ &\quad -a_4 d_2 t_2 cos(t_2(L-x)).\end{aligned}$$

Por outro lado, em vista de que $\varphi(L)$, obtemos

$$0 = a_1 sen(t_1(0)) + a_2 cos(t_1(0)) + a_3 sen(t_2(0)) + a_4 cos(t_2(0)),$$

então, $a_2 = -a_4$. Logo, como $\psi_x(L) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 = -a_4 d_1 t_1 + a_4 d_2 t_2 = -a_4(d_1 t_1 - d_2 t_2) &= -a_4 \left(\left(\tfrac{\mu\rho_1}{t_1\kappa} - t_1 \right) t_1 - \left(\tfrac{\mu\rho_1}{t_2\kappa} - t_2 \right) t_2 \right) \\ &= -a_4(-t_1^2 + t_2^2). \end{aligned}$$

Além disso, tendo em conta que

$$-t_1^2 + t_2^2 = n_1 - n_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{A} \neq 0,$$

então $-a_2 = a_4 = 0$. Assim, podemos concluir que

$$\varphi(x) \quad = a_1 sen(t_1(L - x)) + a_3 sen(t_2(L - x)), \tag{4.2.24}$$

e

$$\psi(x) \quad = -a_1 d_1 cos(t_1(L - x)) - a_3 d_2 cos(t_2(L - x)). \tag{4.2.25}$$

Mais ainda, como $\psi(L) = 0$, obtemos

$$0 = -\psi(L) = a_1 d_1 cos(t_1(0)) + a_3 d_2 cos(t_2(0)) = a_1 d_1 + a_3 d_2. \tag{4.2.26}$$

Logo, substituindo $\varphi(0) = 0$ e $\psi(0) = 0$, em (4.2.24) e (4.2.25) respectivamente, seguem as seguintes equações:

$$0 = \varphi(0) = a_1 sen(t_1 L) + a_3 sen(t_2 L), \tag{4.2.27}$$

$$0 = -\psi(0) = a_1 d_1 cos(t_1 L) + a_3 d_2 cos(t_2 L). \tag{4.2.28}$$

Agora, como estamos assumindo que $(\varphi, \psi)^T \neq (0, 0)^T$, em virtude de (4.2.27), segue $(a_1, a_3)^T \neq (0, 0)^T$. Então, substituindo (4.2.26) em (4.2.28), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 d_1 cos(t_1 L) + a_3 d_2 cos(t_2 L) \\ &= a_3 d_2 cos(t_2 L) - a_3 d_2 cos(t_1 L). \end{aligned}$$

Portanto, $cos(t_2 L) - cos(t_1 L) = 0$. Assim, podemos concluir que

$$cos(t_1 L) = cos(t_2 L). \tag{4.2.29}$$

Logo, em vista que $sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x)$, podemos verificar que

$$sen(t_2 L) = \varepsilon\, sen(t_1 L), \tag{4.2.30}$$

onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$ Agora, notamos que, multiplicando por d_1 em (4.2.27), temos que, $d_1 a_1 sen(t_1 L) + d_1 a_3 sen(t_2 L) = 0$, daí, em virtude de (4.2.26), segue que $d_1\, a_3\, sen(t_2 L) - a_3\, d_2\, sen(t_1 L) = 0$, logo, de (4.2.30), temos $d_1 a_3\, \varepsilon\, sen(t_1 L) - a_3 d_2 sen(t_1 L) = 0$, isto é,

$$a_3 sen(t_1 L)(d_2 - \varepsilon d_1) = 0.$$

Então, vamos estudar os casos para os que o produto anterior é zero, ou seja:

i. $sen(t_1L) = 0$.

ii. $d_2 - \varepsilon d_1 = 0$.

Para o *caso i,* temos que $sen(t_1L) = 0$. Logo, pela igualdade (4.2.30), concluimos que, $sen(t_2L) = 0$, além disso, como $t_1L, t_2L > 0$, então, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tais que $t_1L = m_1\pi$ e $t_2L = m_2\pi$, portanto, segue que

$$(m_1^2 + m_2^2)\frac{\pi^2}{L^2} = t_1^2 + t_2^2 = -n_1 - n_2 = \frac{B}{A} = \frac{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu}{\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}. \tag{4.2.31}$$

Por outro lado, temos

$$(m_1^2 m_2^2)\frac{\pi^4}{L^4} = t_1^2 t_2^2 = n_1 n_2 = \frac{C}{A} = \frac{\mu^2 - \mu\frac{\kappa}{\rho_2}}{\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}. \tag{4.2.32}$$

Em resumo,

$$(m_1^2 + m_2^2)\frac{\pi^2}{L^2} = \frac{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu}{\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}} \tag{4.2.33}$$

e

$$(m_1^2 m_2^2)\frac{\pi^4}{L^4} = \frac{\mu^2 - \mu\frac{\kappa}{\rho_2}}{\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}. \tag{4.2.34}$$

Logo, resolvendo μ, na equação (4.2.33), obtemos

$$\mu = \frac{(m_1^2 + m_2^2)\pi^2\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}{L^2\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)}.$$

Portanto, substituindo a igualdade acima na equação (4.2.34), segue

$$\begin{aligned}
\mu^2 - \mu\frac{\kappa}{\rho_2} &= \frac{m_1^2 m_2^2 \pi^2 \pi^2 \left(\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\right)}{L^2 L^2} \\
&= \frac{m_1^2 m_2^2 \pi^2 \left(m_1^2 + m_2^2\right) \pi^2 \left(\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\right)\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)}{L^2\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\left(m_1^2 + m_2^2\right)L^2} \\
&= \frac{m_1^2 m_2^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu}{\left(m_1^2 + m_2^2\right)L^2},
\end{aligned}$$

simplificando esta última igualdade, temos que

$$\mu - \frac{\kappa}{\rho_2} = \frac{m_1^2 m_2^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)}{\left(m_1^2 + m_2^2\right)L^2},$$

ou equivalentemente

$$\frac{\kappa}{\rho_2} = \mu - \frac{m_1^2 m_2^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)}{\left(m_1^2 + m_2^2\right)L^2}.$$

Logo, substituindo o valor de μ, temos

$$\frac{\kappa}{\rho_2}=\frac{(m_1^2+m_2^2)\pi^2\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}{L^2\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)}-\frac{m_1^2m_2^2\pi^2\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)}{(m_1^2+m_2^2)\,L^2},$$

desta forma, obtemos que

$$\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}=\frac{(m_1^2+m_2^2)\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)}-\frac{m_1^2m_2^2\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)}{(m_1^2+m_2^2)},$$

então, somando as frações na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}&=\frac{(m_1^2+m_2^2)^2\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}-m_1^2m_2^2\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}\\&=\frac{\frac{\kappa b m_1^4}{\rho_1\rho_2}+2\frac{\kappa b m_1^2m_2^2}{\rho_1\rho_2}+\frac{\kappa b m_2^4}{\rho_1\rho_2}-\frac{b^2m_1^2m_2^2}{\rho_2^2}-2\frac{b\kappa m_1^2m_2^2}{\rho_2\rho_1}-\frac{\kappa^2m_1^2m_2^2}{\rho_1^2}}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}.\end{aligned}$$

Finalmente, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}&=\frac{\frac{\kappa b m_1^4}{\rho_1\rho_2}-\frac{b^2m_1^2m_2^2}{\rho_2^2}+\frac{\kappa b m_2^4}{\rho_1\rho_2}-\frac{\kappa^2m_1^2m_2^2}{\rho_1^2}}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}\\&=\frac{\left(\frac{bm_1^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}-\frac{bm_2^2}{\rho_2}\right)+\left(\frac{\kappa m_2^2}{\rho_1}\right)\left(\frac{bm_2^2}{\rho_2}-\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}\right)}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}\\&=\frac{\left(\frac{bm_1^2}{\rho_2}\right)\left(\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}-\frac{bm_2^2}{\rho_2}\right)-\left(\frac{\kappa m_2^2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}-\frac{bm_2^2}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}\\&=\frac{\left(\frac{bm_1^2}{\rho_2}-\frac{\kappa m_2^2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}-\frac{bm_2^2}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)}.\end{aligned}$$

Em resumo

$$\frac{\kappa L^2}{\rho_2}=\frac{\left(\frac{\kappa}{\rho_1}m_1^2-\frac{b}{\rho_2}m_2^2\right)\left(\frac{b}{\rho_2}m_1^2-\frac{\kappa}{\rho_1}m_2^2\right)}{\left(\frac{\kappa}{\rho_1}+\frac{b}{\rho_2}\right)(m_1^2+m_2^2)}\pi^2.$$

Então, se a *Condição* (P_0) for satisfeita, para este caso, existe apenas a solução trivial, ou seja, $\mathcal{A}$ não possui autovalores. Agora, se assumirmos que (4.2.3) não é satisfeita, então, escolhendo (a_1,a_3), tal que satisfaça (4.2.28), então, obtemos um autovalor. De fato, considere

$$(a_1,a_3)=(-d_2cos(t_2L),d_1cos(t_1L)),$$

substituindo isso em (4.2.16) e (4.2.17), temos que esta solução do sistema (4.2.9)-(4.2.11) é não trivial, portanto, o sistema tem um autovalor.

Observação 4.2.4. Consideremos válida a igualdade das velocidades de propagação. tendo em conta que,

$$\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}=\frac{\left(\frac{bm_1^2}{\rho_2}-\frac{\kappa m_2^2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\kappa m_1^2}{\rho_1}-\frac{bm_2^2}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)(m_1^2+m_2^2)},$$

é equivalente a

$$\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)=\frac{\frac{\kappa}{\rho_1}\left(m_1^2\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}-m_2^2\right)\frac{b}{\rho_2}\left(m_1^2\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}-m_2^2\right)}{(m_1^2+m_2^2)},$$

então, em virtude de (4.2.2), obtemos

$$\frac{\left(m_1^2\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}-m_2^2\right)\left(m_1^2\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}-m_2^2\right)}{(m_1^2+m_2^2)}=\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\rho_1}{\kappa}\frac{\rho_2}{b},$$

assim, novamente usando (4.2.2), temos

$$\begin{aligned}\frac{\left(m_1^2\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}-m_2^2\right)\left(m_1^2\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}-m_2^2\right)}{(m_1^2+m_2^2)}&=\frac{\kappa L^2}{\rho_2\pi^2}\left(\frac{2\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\rho_1}{\kappa}\frac{\rho_2}{b}\\&=\frac{2\kappa L^2}{\pi^2 b},\end{aligned}$$

logo, segue que

$$\frac{\kappa L^2}{b}=\frac{(\frac{\rho_1 b}{\rho_2\kappa}m_1^2-m_2^2)(\frac{\rho_2\kappa}{\rho_1 b}m_1^2-m_2^2)}{m_1^2+m_2^2}\pi^2,\quad \begin{array}{l}\forall m_1,m_2\in\mathbb{Z},\\ m_1\neq m_2,\quad m_1^2+m_2^2\in 2\mathbb{Z}\end{array}.$$

Finalmente, em virtude de que $\dfrac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}=\dfrac{\kappa\rho_2}{b\rho_1}=1$, temos que

$$\frac{\kappa L^2}{b}=\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{m_1^2+m_2^2}\pi^2,\quad \forall m_1,m_2\in\mathbb{Z},\quad m_1\neq m_2,\quad m_1^2+m_2^2\in 2\mathbb{Z}.$$

Esta observação, justifica solicitar que (P_1) seja satisfeito no caso quando temos velocidades de propagação de onda iguais.

Agora, estudemos o caso *caso ii,* neste caso, temos que $d_2-\varepsilon d_1=0$, então, temos que considerar, dois sub-casos

ii.1 $d_1=d_2$ se $\varepsilon=1$.

ii.2 $d_1=-d_2$ se $\varepsilon=-1$.

Provemos o **Caso ii.1,** isto é, quando se verifica que $d_1=d_2$. Vamos ver que para este caso o sistema (4.2.9)-(4.2.10) não tem solução distinta à trivial. Denotemos $d=d_1=d_2$.

Logo, observe que, em virtude de (4.2.23), temos

$$\begin{aligned} d(t_1 - t_2) &= d\,t_1 - d\,t_2 = d_1 t_1 - d_2 t_2 \\ &= \left(\frac{\mu\rho_1}{\kappa t_1} - t_1\right) t_1 - \left(\frac{\mu\rho_1}{\kappa t_2} - t_2\right) t_2 \\ &= t_2^2 - t_1^2 \\ &= (t_2 - t_1)(t_2 + t_1), \end{aligned}$$

Assim, como $t_2 - t_1 \neq 0$, temos que

$$-d = (t_2 + t_1)$$

Portanto, en vista de que $d = d_1$ e (4.2.23), obtemos

$$t_1 - \frac{\mu\rho_1}{\kappa t_1} = t_2 + t_1,$$

daí, concluímos que

$$-\frac{\mu\rho_1}{\kappa} = t_2 t_1,$$

mas a igualdade acima é uma clara contradição, pois $\mu, \rho_1, \kappa, t_2, t_1$ são números estritamente positivos. Logo, o **Caso ii.1** é impossível.

Agora, estudemos o **Caso ii.2,** isto é, se verifica $d_1 = -d_2$. Então, observe que em virtude de (4.2.23), temos

$$\begin{aligned} d_2(t_1 + t_2) &= d_2\,t_1 + d_2\,t_2 = -d_1 t_1 + d_2 t_2 \\ &= \left(-\frac{\mu\rho_1}{\kappa t_1} + t_1\right) t_1 + \left(\frac{\mu\rho_1}{\kappa t_2} - t_2\right) t_2 \\ &= t_1^2 - t_2^2 \\ &= (t_1 - t_2)(t_2 + t_1), \end{aligned}$$

como sabemos que $t_1 + t_2 \neq 0$ e en vista de (4.2.23), podemos concluir

$$t_1 - t_2 = d_2 = \frac{\mu\rho_1}{\kappa t_2} - t_2.$$

ou equivalentemente

$$t_1 t_2 = \frac{\mu\rho_1}{\kappa}. \tag{4.2.35}$$

Por outro, de (4.2.32), sabemos que

$$t_1^2 t_2^2 = \frac{\mu^2 - \mu\dfrac{\kappa}{\rho_2}}{\dfrac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}},$$

então, da equação acima e (4.2.35), temos que

$$\frac{\mu^2\rho_1^2}{\kappa^2} = \frac{\mu^2 - \mu\dfrac{\kappa}{\rho_2}}{\dfrac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}},$$

portanto

$$\frac{\mu^2\rho_1\, b}{\kappa\rho_2} = \mu^2 - \mu\frac{\kappa}{\rho_2},$$

isso implica que

$$\mu^2\rho_1\, b = \mu^2\kappa\rho_2 - \mu\kappa^2,$$

assim, podemos concluir que

$$\mu^2\left(\rho_1\, b - \kappa\rho_2\right) = -\mu\kappa^2.$$

Além disso, como $\mu \neq 0$, então, obtemos

$$\mu\left(\rho_1\, b - \kappa\rho_2\right) = -\kappa^2. \tag{4.2.36}$$

Portanto, se $\rho_1\, b \geq \kappa\rho_2$ for satisfeito, a equação acima é impossível, pois $\kappa > 0$, ou seja, o sistema (4.2.9)-(4.2.11) não tem outra solução além da trivial.

Por outro lado, se $\rho_1\, b < \kappa\rho_2$, então, em virtude de (4.2.31), temos

$$\mu = \frac{\kappa^2}{\kappa\rho_2 - \rho_1\, b}. \tag{4.2.37}$$

Logo, notamos que, de (4.2.29), temos $sen(t_2L) = -sen(t_1L)$, e usando (4.2.30) e a identidade $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sin(\beta)$, concluimos que

$$cos(t_1L + t_2L) = 1.$$

Então, a igualdae acima vale para os valores $t_1L + t_2L = 2\pi\, m$, com $m \in \mathbb{Z}$, em virtude de (4.2.35) e (4.2.36) obtemos

$$(t_1+t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1\, t_2 = \frac{\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\mu}{\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}} + 2\frac{\mu\rho_1}{\kappa},$$

assim, substituindo (4.2.37) na igualdade anterior e fazendo os cálculos apropriados, temos

$$(t_1+t_2)^2 = \frac{\kappa}{b}\left(\frac{3b\,\rho_1 + \kappa\rho_2}{\kappa\rho_2 - \rho_1\, b}\right). \tag{4.2.38}$$

Agora, como $t_1L + t_2L = 2\pi\, m$, obtemos,

$$(t_1+t_2)^2 = \frac{4\pi^2\, m^2}{L^2},$$

então, substituindo a igualdade acima em (4.2.38), temos que

$$\frac{\kappa\, L^2}{b} = \frac{\kappa\rho_2 - \rho_1\, b}{3b\,\rho_1 + \kappa\rho_2}\, 4\pi^2 m^2.$$

Assumindo *Condição* (P_2). Então, em virtude de (4.2.4), o sistema (4.2.9)-(4.2.11), para este caso tem apenas a solução trivial, ou seja, $\mathcal{A}$ não tem autovalores. Agora, se assumirmos que (4.2.4) não é satisfeita, então escolhendo (a_1, a_3) tal que satisfaça (4.2.26), então obtemos um autovalor. de fato, considere $(a_1, a_3) = (1, 1)$, substituindo em (4.2.24)-(4.2.25), temos que esta solução de sistema (4.2.9)-(4.2.11) é não trivial e, portanto, o sistema tem um autovalor. □

Nosso objetivo agora é provar o item (ii) do Teorema 2.4.6, onde $\mathcal{A}$ é o operador diferencial definido na boa colocação deste capítulo, (ver [30], onde se dá uma expressão explícita para o resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ e se mostram algumas estimativas úteis). Para isto, vamos mostrar alguns lemas prévios e logo vamos enunciar o resultado final, ou seja, a estabilidade da solução do sistema (4.0.1)-(4.0.5), a partir da estabilidade do problema equivalente (4.1.1). Nos lemas a seguir, apresentaremos algumas estimativas para o operador resolvente com valores regulares no eixo complexo ($i\mathbb{R}$). Então, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $U = (\varphi, \phi_1, \psi, \phi_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, vamos estudar a equação resolvente

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})\, U = F,$$

que pode ser escrita na suas coordenadas como:

$$i\lambda\varphi - \phi_1 = f_1, \tag{4.2.39}$$

$$i\lambda\rho_1\phi_1 - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2, \tag{4.2.40}$$

$$i\lambda\psi - \phi_2 = f_3, \tag{4.2.41}$$

$$i\lambda\rho_2\phi_2 - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_4. \tag{4.2.42}$$

Então, aplicando produto interno de $(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})\, U = F$ com U, obtemos

$$(F, U)_{\mathcal{H}} = (i\lambda U - \mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}\,,$$

portanto, tomando a parte real e em virtude da condição de dissipação, temos $-\gamma|\phi_2(L)|^2 = \mathcal{R}e\,(F, U)_{\mathcal{H}}$, o qual implica pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que $\gamma|\phi_2(L)|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$. Logo, como $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então, $\gamma\phi_2(L) = b\psi_x(L)$, assim, temos que

$$\gamma|\psi_x(L)|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Agora, vamos introduzir notações, para facilitar a compressão das estimativas que vamos fazer, estas notações são:

$$2\mathcal{I}_\psi(\alpha) = \rho_2|\phi_2(\alpha)|^2 + b|\psi_x(\alpha)|^2 \quad , \quad 2\mathcal{I}_\varphi(\alpha) = \rho_1|\phi_1(\alpha)|^2 + \kappa|\varphi_x(\alpha)|^2$$

e

$$\mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}_\psi(\alpha) + \mathcal{I}_\varphi(\alpha) \quad , \quad \mathcal{J}(s) = \rho_1\rho_2\phi_2(s)\bar{\phi}_1(s) + \rho_2\kappa\psi_x(s)\bar{\varphi}_x(s).$$

Notamos que, as notações anteriores estão relacionadas com a energia associada ao sistema, ou seja, $\|U\|_* = \int_0^L \mathcal{I}_\psi(x) + \mathcal{I}_\varphi(x)\, dx$, onde $\|\cdot\|_*$ é a norma definida na equação (4.1.6), além disso, $\mathcal{J}(s)$ está relacionada com termos que aparecem na norma $\|U\|_{\mathcal{H}}$. Além disso, denotemos por $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{Q}$ à classe de funções que satisfazem o seguinte:

$$\mathcal{R} = \int_0^L |\mathfrak{R}|\, dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$$

e

$$\mathcal{Q} = \int_0^L |\mathfrak{Q}|\, dx \leq \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Tenhamos en conta que, estas notações estão associadas à estimativa ((ii) do Teorema 2.4.6) procurada.

Observação 4.2.5. 1. Seja $\Omega = (0, L)$. Notemos que, em virtude equação (4.2.39), temos

$$\|\psi_x\overline{\varphi}\|_{L_1(\Omega)} = \|\frac{\psi_x\,(\phi_1 + f_1)}{\lambda}\|_{L_1(\Omega)},$$

logo, segue usando a Desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned}\|\psi_x\overline{\varphi}\|_{L_1(\Omega)} &= \|\frac{\psi_x\phi_1}{|\lambda|}\|_{L_1(\Omega)} + C_p\|\frac{\psi_x f_{1x}}{\lambda}\|_{L_1(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\|\psi_x\phi_1\|_{L_1(\Omega)} + \frac{C_p}{|\lambda|}\|\psi_x(f_{1x} + f_3)\|_{L_1(\Omega)} + \frac{C_P}{|\lambda|}\|f_{3x}\psi_x\|_{L_1(\Omega)},\end{aligned}$$

então, se $|\lambda| > C_p$, em vista da Desigualdade Hölder e da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, temos

$$\|\kappa\psi_x\overline{\varphi}\|_{L_1(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Além disso, de forma análoga podemos mostrar, que os termos de U que multiplicam $\overline{\varphi}$ ou $\overline{\phi}$, são funções de classe $\mathfrak{Q}$, isto pode ser verificado usando (4.2.39) ou (4.2.41) respectivamente, como no caso estudado nesta observação.
Agora, apresentaremos alguns lemas úteis para a demostração de nosso resultado. No seguinte lema, conseguiremos estabelecer uma relação entre as equações (4.2.39)-(4.2.42) com as funções de classe $\mathfrak{Q}$.

Antes de enunciar o lema, vamos a introduzir as seguintes notações, para indicar que uma função Φ, é de classe $\mathfrak{Q}$, usaremos a notação:

$$\underbrace{\Phi}_{\mathfrak{Q}}$$

e para indicar que uma função Ψ, é de classe $\mathfrak{R}$, usaremos a notação:

$$\underbrace{\Psi}_{\mathfrak{R}}$$

Lema 4.2.1. *A solução do sistema (4.2.39)-(4.2.42) satisfaz,*

$$\rho_1|\phi_1|^2 = \kappa|\varphi_x|^2 - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) + \mathfrak{Q}, \tag{4.2.43}$$

$$\rho_2|\phi_2|^2 = b|\psi_x|^2 - b\frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi}) + \mathfrak{Q}, \tag{4.2.44}$$

$$\rho_1\mathcal{R}e(\phi_1\bar{\phi}_2) = \kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\bar{\psi}_x) - \kappa\frac{d}{dx}\mathcal{R}e(\varphi_x\bar{\psi}) + \mathfrak{Q}. \tag{4.2.45}$$

Demonstração. Provemos (4.2.43), para isto, multiplicamos por $\bar{\varphi}$ na equação (4.2.40), então, temos que $i\lambda\rho_1\phi_1\bar{\varphi} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\bar{\varphi} = \rho_1 f_2\bar{\varphi}$. Logo, usando (4.2.39), na igualdade anterior, obtemos $-\rho_1\phi_1\left(\bar{\phi}_1 + \bar{f}_1\right) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\bar{\varphi} = \rho_1 f_2\bar{\varphi}$, portanto, podemos concluir que

$$-\rho_1|\phi_1|^2 - \rho_1\phi_1\bar{f}_1 - \kappa\varphi_{xx}\bar{\varphi} - \kappa\psi_x\bar{\varphi} = \rho_1 f_2\bar{\varphi}. \tag{4.2.46}$$

Daí, substituindo $\dfrac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) = \varphi_{xx}\bar{\varphi} + \varphi_x\bar{\varphi}_x$ em (4.2.46), obtemos

$$-\rho_1|\phi_1|^2 - \rho_1\phi_1\bar{f}_1 - \kappa(\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\varphi}) - \varphi_x\overline{\varphi_x}) - \kappa\psi_x\bar{\varphi} = \rho_1 f_2\bar{\varphi},$$

ou equivalente

$$-\rho_1|\phi_1|^2 - \rho_1\phi_1\bar{f}_1 - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) + \kappa\varphi_x\bar{\varphi}_x - \kappa\psi_x\overline{\varphi} = \rho_1 f_2\bar{\varphi},$$

assim, a igualdade acima, implica que

$$\rho_1|\phi_1|^2 = -\underbrace{\rho_1\phi_1\bar{f}_1}_{\mathfrak{R}} - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\varphi}) + \kappa\varphi_x\bar{\varphi}_x - \underbrace{\kappa\psi_x\overline{\varphi}}_{\mathfrak{Q},\text{ Obs 1.}} - \underbrace{\rho_1 f_2\overline{\varphi}}_{\mathfrak{R},\text{ D. poincare}},$$

ou seja, verificámos (4.2.43). De forma análoga, se prova (4.2.44).
Agora, vamos mostrar a igualdade (4.2.45), para isso, multiplicamos por $\overline{\psi}$ em (4.2.40), assim temos

$$i\lambda\rho_1\phi_1\overline{\psi} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\psi} = \rho_1 f_2\overline{\psi}.$$

Além disso, usando (4.2.41), na igualdade anterior, obtemos

$$-\rho_1\phi_1\left(\overline{\phi_2} + \overline{f_3}\right) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\psi} = \rho_1 f_2\overline{\psi},$$

ou equivalente

$$-\rho_1\phi_1\overline{\phi_2} - \rho_1\phi_1\overline{f_3} - \kappa\varphi_{xx}\overline{\psi} - \kappa\psi_x\overline{\psi} = \rho_1 f_2\overline{\psi}. \tag{4.2.47}$$

Assim, substituindo $\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi}) = \varphi_{xx}\overline{\psi} + \varphi_x\overline{\psi_x}$ na equação (4.2.47), temos

$$-\rho_1\phi_1\overline{\phi_2} - \underbrace{\rho_1\phi_1\bar{f}_3}_{\mathfrak{R},\text{ D. Poincaré}} - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi}) + \kappa\varphi_x\overline{\psi_x} - \underbrace{\kappa\psi_x\overline{\psi}}_{\mathfrak{Q},\text{ Obs 1.}} = \underbrace{f_2\overline{\psi}}_{\mathfrak{R},\text{ D.Poincaré}}, \tag{4.2.48}$$

daí, podemos concluir (4.2.45). $\square$

Além disso, do lema anterior podemos verificar as seguintes igualdades:

$$\kappa|\varphi_x|^2 = \mathcal{I}_\varphi + \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) + \mathfrak{Q}, \tag{4.2.49}$$

$$b|\psi_x|^2 = \mathcal{I}_\psi + \frac{b}{2}\frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi}) + \mathfrak{Q}, \tag{4.2.50}$$

$$\mathcal{R}e(\mathcal{J}) = 2\kappa\rho_2\mathcal{R}e(\varphi_x\bar{\psi}_x) - \rho_2\kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\psi}) + \mathfrak{Q}. \tag{4.2.51}$$

De fato, para provar (4.2.49), vamos somar $-\kappa|\varphi_x|^2$ em (4.2.43), ou seja,

$$-\kappa|\varphi_x|^2 = -\rho_1|\phi_1|^2 - \kappa|\varphi_x|^2 - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) + \mathfrak{Q},$$

portanto, podemos concluir que

$$-2\kappa|\varphi_x|^2 = -2\mathcal{I}_\varphi - \kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi}) + \mathfrak{Q}.$$

Logo, de forma análoga obtemos (4.2.50), ou seja, somando $-b|\psi_x|^2$ em (4.2.44). Finalmante, para provar (4.2.51), multiplicamos por ρ_2 em (4.2.48), isto é,

$$-\rho_2\rho_1\mathcal{R}e(\phi_1\overline{\phi_2}) - \rho_2\kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi}) + \rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) = \mathfrak{Q},$$

daí, somando e restando $\rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x})$, na igualdade acima, temos que

$$-\rho_2\rho_1\mathcal{R}e(\phi_1\overline{\phi_2}) - \rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) - \rho_2\kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi}) + 2\rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) = \mathfrak{Q}.$$

Assim, ao substituir $\mathcal{R}e(\mathcal{J})$, na igualdade anterior, podemos concluir

$$-\mathcal{R}e(\mathcal{J}) - \rho_2\kappa\frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi}) + 2\rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) = \mathfrak{Q},$$

ou seja, (4.2.51) é verificada.

O seguinte lema carateriza as derivadas de $\mathcal{I}_\varphi$, $\mathcal{I}_\psi$ e $\mathcal{J}$, além disso, estaremos a utilizá-lo, várias vezes quando estimamos a energia, isto pela relação de $\mathcal{I}_\varphi$, $\mathcal{I}_\psi$ e $\mathcal{J}$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Lema 4.2.2. *A solução do sistema (4.2.39)-(4.2.42) satisfaz:*

$$\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\varphi = -\kappa\mathcal{R}e\psi_x\bar{\varphi}_x + \mathfrak{R}, \tag{4.2.52}$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\psi = \kappa\mathcal{R}e\varphi_x\bar{\psi}_x + \mathfrak{Q}. \tag{4.2.53}$$

Além disso, se temos que as velocidades de propagação de onda são iguais, então

$$\frac{d}{dx}\mathcal{J} = \rho_1\mathcal{I}_\varphi - \rho_1\mathcal{I}_\psi + \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dx}(\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\bar{\varphi}) - b\mathcal{R}e(\psi_x\bar{\psi})) + \mathfrak{Q}. \tag{4.2.54}$$

Demonstração. Vamos provar (4.2.52), para isso, multiplicamos por $\overline{\varphi_x}$, na igualdade (4.2.40), ou seja,

$$i\lambda\rho_1\phi_1\overline{\varphi_x} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\varphi_x} = \rho_1 f_2\overline{\varphi_x}.$$

Por outro lado, em virtude de (4.2.39), temos que $-i\lambda\overline{\varphi_x} = \overline{f_{1x}} + \overline{\phi_{1x}}$, portanto, ao substituir $-i\lambda\overline{\varphi_x} = \overline{f_{1x}} + \overline{\phi_{1x}}$, na equeção acima, temos que

$$-\rho_1\phi_1(\overline{f_{1x}} + \overline{\phi_{1x}}) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\overline{\varphi_x} = \rho_1 f_2\overline{\varphi_x},$$

ou equivalente

$$-\rho_1\phi_1\overline{\phi_{1x}} - \kappa\varphi_{xx}\overline{\varphi_x} = \rho_1 f_2\overline{\varphi_x} + \rho_1\phi_1\overline{f_{1x}} + \kappa\psi_x\overline{\varphi_x}.$$

Logo, aplicando parte real na útima equação, podemos concluir que

$$-\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\varphi = \kappa\mathcal{R}e(\psi_x\overline{\varphi_x}) + \underbrace{\mathcal{R}e(\rho_1 f_2\overline{\varphi_x} + \rho_1\phi_1\overline{f_{1x}})}_{\mathfrak{R}}.$$

Agora, provemos (4.2.53). Para isso, vamos multiplicar por $\overline{\psi_x}$ em (4.2.42), ou seja,

$$i\lambda\rho_2\phi_2\overline{\psi_x} - b\psi_{xx}\overline{\psi_x} + \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\psi_x} = \rho_2 f_4\overline{\psi_x}.$$

Daí, em vista de (4.2.41), temos $-i\lambda\overline{\psi_x} = \overline{f_{3x}} + \overline{\phi_{2x}}$, assim, substituindo $-i\lambda\overline{\psi_x} = \overline{f_{3x}} + \overline{\phi_{2x}}$, na igualdade acima, temos que

$$-\rho_2\phi_2(\overline{f_{3x}} + \overline{\phi_{2x}}) - b\psi_{xx}\overline{\psi_x} + \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\psi_x} = \rho_2 f_4\overline{\psi_x},$$

o que também podemos ver como

$$-b\psi_{xx}\overline{\psi_x} - \rho_2\phi_2\overline{\phi_{2x}} \ = -\kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\psi_x} + \rho_2\overline{f_4\psi_x} + \rho_2\phi_2\overline{f_{3x}},$$

portanto, tomando parte real, obtemos que

$$-\frac{d}{dx}I_\psi = -\kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) - \kappa\mathcal{R}e(\psi\overline{\psi_x}) + \underbrace{\rho_2\mathcal{R}e(f_4\overline{\psi_x})}_{\mathfrak{R}} + \underbrace{\rho_2\mathcal{R}e(\phi_2\overline{f_{3x}})}_{\mathfrak{R}},$$

ou equivalente

$$\frac{d}{dx}I_\psi = \kappa\mathcal{R}e(\varphi_x\overline{\psi_x}) + \underbrace{-\kappa\mathcal{R}e(\psi\overline{\psi_x}) + \mathfrak{R}}_{\mathfrak{Q}}.$$

Finalmente, provemos (4.2.54), para isto, vamos multiplicar por $\rho_2\bar{\psi_x}$ em (4.2.40), ou seja,

$$i\lambda\rho_1\rho_2\phi_1\bar{\psi_x} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\rho_2\bar{\psi_x} = \rho_1\rho_2 f_2\bar{\psi_x}, \tag{4.2.55}$$

logo, em virtude de (4.2.39), temos que $i\lambda\psi - \phi_2 = f_3$, assim, obtemos $i\lambda\psi_x - \phi_{2x} = f_{3x}$, ou equivalentemente $-i\lambda\bar{\psi_x} - \bar{\phi_{2x}} = \bar{f_{3x}}$, portanto, substituindo esta última igualdade em (4.2.55), obtemos que

$$-\rho_1\rho_2\phi_1(\overline{f_{3x}} + \overline{\phi_{2x}}) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x\rho_2\bar{\psi_x} = \rho_2\rho_1 f_2\bar{\psi_x},$$

que é equivalente a

$$-\underbrace{\rho_1\rho_2\phi_1\overline{f_{3x}}}_{\mathfrak{R}}-\rho_1\rho_2\phi_1\overline{\phi_{2x}}-\kappa\rho_2\varphi_{xx}\bar{\psi}_x-\kappa\rho_2|\psi_x|^2=\underbrace{\rho_1\rho_2f_2\bar{\psi}_x}_{\mathfrak{R}},$$

portanto, podemos concluir que

$$-\rho_1\rho_2\phi_1\overline{\phi_{2x}}-\rho_2\kappa\varphi_{xx}\bar{\psi}_x-\kappa\rho_2|\psi_x|^2=\mathfrak{R}.$$

Mais ainda, como $\kappa\rho_2=b\rho_1$, obtemos

$$-\rho_1\rho_2\phi_1\overline{\phi_{2x}}-\rho_2\kappa\varphi_{xx}\bar{\psi}_x-b\rho_1|\psi_x|^2=\mathfrak{R}.$$

Logo, em vista de (4.2.50), podemos deduzir que

$$-\rho_1\rho_2\mathcal{R}e(\phi_1\overline{\phi_{2x}})-\rho_2\kappa\mathcal{R}e(\varphi_{xx}\bar{\psi}_x)-\rho_1\mathcal{I}_\psi-\frac{\rho_1 b}{2}\frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})=\mathfrak{Q}. \tag{4.2.56}$$

Por outro lado, vamos multiplicar por $\rho_1\bar{\varphi}_x$ em (4.2.42), ou seja,

$$i\lambda\rho_2\phi_2\rho_1\bar{\varphi}_x-b\psi_{xx}\rho_1\bar{\varphi}_x+\kappa(\varphi_x+\psi)\rho_1\bar{\varphi}_x=\rho_1\rho_2f_4\bar{\varphi}_x. \tag{4.2.57}$$

Logo, como temos (4.2.39), segue que $i\lambda\overline{\varphi_x}=-\overline{\phi_{1x}}-\overline{f_{1x}}$. Assim, substituindo esta última igualdade em (4.2.57), obtemos

$$-\rho_2\rho_1\phi_2(\overline{\phi_{1x}}+\overline{f_{1x}})-b\rho_1\psi_{xx}\bar{\varphi}_x+\rho_1\kappa(\varphi_x+\psi)\bar{\varphi}_x=f_4\rho_1\bar{\varphi}_x,$$

ou equivalente

$$-\rho_2\rho_1\phi_2\overline{\phi_{1x}}-\rho_2\rho_1\phi_2\overline{f_{1x}}-b\rho_1\psi_{xx}\bar{\varphi}_x+\rho_1\kappa\varphi_x\bar{\varphi}_x+\rho_1\psi\bar{\varphi}_x=f_4\rho_1\bar{\varphi}_x.$$

Portanto, em vista de $\rho_1 b=\rho_2\kappa$, temos que

$$-\rho_2\rho_1\phi_2\overline{\phi_{1x}}-\underbrace{\rho_2\rho_1\phi_2\overline{f_{1x}}}_{\mathfrak{R}}-\kappa\rho_2\psi_{xx}\bar{\varphi}_x+\rho_1\kappa|\varphi_x|^2+\underbrace{\rho_1\psi\overline{\varphi_x}}_{\mathfrak{Q},Obs1.}=\underbrace{\rho_1f_4\overline{\varphi_x}}_{\mathfrak{R}},$$

ou seja,

$$-\rho_2\rho_1\phi_2\overline{\phi_{1x}}-\kappa\rho_2\psi_{xx}\bar{\varphi}_x+\rho_1\kappa|\varphi_x|^2=\mathfrak{Q},$$

mais ainda, substituindo (4.2.49), na igualdade acima, obtemos

$$-\rho_2\rho_1\mathcal{R}e(\phi_2\overline{\phi_{1x}})-\kappa\rho_2\mathcal{R}e(\psi_{xx}\bar{\varphi}_x)+\rho_1\mathcal{I}_\varphi+\rho_1\kappa\frac{d}{dx}\varphi_x\bar{\varphi}=\mathfrak{Q}. \tag{4.2.58}$$

Por outro lado, ao derivar $\mathcal{R}e(\mathcal{J})$, obtemos o seguinte (evitar acumulação de notação usaremos somente $\mathcal{J}$, invés de parte real de $\mathcal{J}$)

$$\frac{d}{dx}\mathcal{J}=\rho_1\rho_2\mathcal{R}e(\phi_1\overline{\phi_{2x}})+\rho_2\rho_1\mathcal{R}e(\phi_2\overline{\phi_{1x}})+\kappa\rho_2\mathcal{R}e(\varphi_{xx}\overline{\psi_x})+\kappa\rho_2\mathcal{R}e(\psi_{xx}\overline{\varphi_x}).$$

Portanto, tendo em conta a igualdade acima e somado as equações (4.2.56) e (4.2.58), podemos concluir (4.2.54). $\square$

Lema 4.2.3. *Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $q = x - \alpha$ ou $q = x - \beta$. Então, temos*

$$\int_\alpha^\beta \mathcal{I}(x)\,dx = q(x)\mathcal{I}(x)\Big|_\alpha^\beta + \mathcal{Q}. \tag{4.2.59}$$

Demonstração. Multiplicamos por $q(x) = x - \beta$ a equação (4.2.53) e integramos em (α, β), ou seja,

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta q\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\psi\,dx}_{I} = \kappa\int_\alpha^\beta q\mathcal{R}e\varphi_x\overline{\psi_x}\,dx + \mathcal{Q}. \tag{4.2.60}$$

Notemos que, integrando por partes I, obtemos

$$I = \int_\alpha^\beta q\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\psi\,dx = q(x)\mathcal{I}_\psi(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathcal{I}_\psi\,dx,$$

então, substituindo I em (4.2.60), podemos concluir

$$q(x)\mathcal{I}_\psi(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathcal{I}_\psi = \kappa\int_\alpha^\beta q\mathcal{R}e\varphi_x\overline{\psi_x}\,dx + \mathcal{Q}. \tag{4.2.61}$$

Por outro lado, de forma análoga ao acima referido, multiplicamos a equação (4.2.52) por $q(x) = x - \beta$ e integramos em (α, β), isto é,

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta q\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\varphi\,dx}_{II} = -\kappa\int_\alpha^\beta q\mathcal{R}e\overline{\varphi_x}\psi_x\,dx + \mathcal{Q}. \tag{4.2.62}$$

Então, integrado por partes II, temos

$$q(x)\mathcal{I}_\varphi(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathcal{I}_\varphi\,dx = -\kappa\int_\alpha^\beta q\mathcal{R}e\overline{\varphi_x}\psi_x\,dx + \mathcal{Q}. \tag{4.2.63}$$

Finalmente, o resultado segue de somar (4.2.61) e (4.2.63). □

Observação 4.2.6. 2. Desses últimos dois lemas, notemos que, ao integrar sobre (τ, β), em (4.2.49) e (4.2.50), temos

$$\int_\tau^\beta \kappa|\varphi_x|^2\,dx = \int_\tau^\beta \mathcal{I}_\varphi\,dx + \int_\tau^\beta \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi})\,dx + \mathcal{Q} \tag{4.2.64}$$

e também

$$\int_\tau^\beta b|\psi_x|^2\,dx = \int_\tau^\beta \mathcal{I}_\psi\,dx + \int_\tau^\beta \frac{b}{2}\frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx + \mathcal{Q}, \tag{4.2.65}$$

mais ainda, vejamos agora que a integral $\displaystyle\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx$, pode ser estimada por

$$\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Observação 4.2.7. Quando uma função verifica essa propriedade, diremos que é absorvida por $\mathcal{Q}'$, mais ainda, se Φ é uma função que cumpre a estimativa acima, então denotamos esta propriedade por:

$$\underbrace{\Phi}_{\mathcal{Q}'}.$$

Agora, vamos ver que de fato $\frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx$ é absorvida por $\mathcal{Q}'$. Então, notemos que

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx\right| = \left|\psi_x(x)\bar{\psi}(x)\Big|_\tau^\beta\right|,$$

en vista de (4.2.41), temos que

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx\right| = \left|\frac{\psi_x(\phi_2+f_3)}{i\lambda}\Big|_\tau^\beta\right|.$$

Logo, tendo em conta que

$$\left|\frac{\psi_x(\phi_2+f_3)}{i\lambda}\Big|_\tau^\beta\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\,|(\psi_x\phi_2)(\beta)| + \frac{1}{|\lambda|}\,|(\psi_x\phi_2)(\tau)| + \frac{1}{|\lambda|}(|(\psi_x f_3)(\beta)| + |(\psi_x f_3)(\tau)|),$$

podemos concluir em virtude da Proposição 2.1.6, que

$$\left|\frac{\psi_x(\phi_2+f_3)}{i\lambda}\right|\Big|_\tau^\beta \le \frac{C_2}{|\lambda|}(\mathcal{I}_\psi(\beta)+\mathcal{I}_\psi(\tau)) + \frac{C}{|\lambda|}\left(|f_3(\beta)|^2+|f_3(\tau)|^2\right),$$

além disso, como $f_3 \in V_0^1$, pela de desigualdade de Poincaré, temos

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx\right| = \left|\frac{\psi_x(\phi_2+f_3)}{i\lambda}\right|\Big|_\tau^\beta \le \frac{C_2}{|\lambda|}(\mathcal{I}_\psi(\beta)+\mathcal{I}_\psi(\tau)) + \frac{C_1}{|\lambda|}\|f_{3x}\|_{L_2}^2$$

assim, de acordo com a Just. 1. (ver ao final da prova) e em vista de $\|f_{3x}\|_{L_2} \le C\|F\|_{\mathcal{H}}$, podemos constatar que

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\psi_x\bar{\psi})\,dx\right| \le \frac{C_4}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_1}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

isto prova a afirmação.

Just. 1. Notemos que, considerando $q(x) = x-\beta$ e o intevalo de integração $(0,\beta)$ em (4.2.61), temos que

$$\begin{aligned}
\beta\mathcal{I}_\psi(\beta) &= \int_0^\beta \mathcal{I}_\psi\,dx + \kappa\int_0^\beta q\mathcal{R}e\varphi_x\overline{\psi_x}\,dx + \mathcal{Q} \\
&\le \int_0^\beta \mathcal{I}_\psi\,dx + \beta\kappa\|\varphi_x\overline{\psi_x}\|_{L_1} + \mathcal{Q} \\
&\le C'\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \beta\kappa\|\varphi_x\|_{L_2}\|\overline{\psi_x}\|_{L_2} + \mathcal{Q} \quad \text{por D. Hölder} \\
&\le C'\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_M\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathcal{Q} \\
&\le C_3\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{pela definição de } \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

Logo, de forma semelhante, se consideramos $q(x) = x-\tau$, conseguimos limitar $\mathcal{I}_\psi(\tau)$, isso conclui Just. 1. Por outro lado, de uma forma similar, podemos provar, em virtude de (4.2.63), que $\frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\varphi})$, é absorvida $\mathcal{Q}'$.

Agora, notemos que, $\dfrac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\psi})$ é também absorvida por $\mathcal{Q}'$. De fato, para fazer a estimativa, consideramos

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi})\,dx\right| = \left|(\varphi_x\overline{\psi})(x)\Big|_\tau^\beta\right|,$$

logo, usando (4.2.41), segue que

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\psi})\,dx\right| = \left|\frac{\varphi_x(\overline{\phi_2+f_3})}{i\lambda}\Big|_\tau^\beta\right|,$$

então, em virtude da Proposição 2.1.6, temos

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\psi})\,dx\right| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\mathcal{I}_\psi(\beta)+\mathcal{I}_\psi(\tau)) + \frac{C}{|\lambda|}(\mathcal{I}_\varphi(\beta)+\mathcal{I}_\varphi(\tau)) + \frac{C}{|\lambda|}\|f_{3x}\|_{L_2}^2.$$

Por outro lado, de forma semelhante à Just. 1, conseguimos provar que $\beta\mathcal{I}_\varphi(\beta) \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$ e $\tau\mathcal{I}_\varphi(\tau) \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$ portanto, concluímos da equação acima, que

$$\left|\int_\tau^\beta \frac{d}{dx}(\varphi_x\bar{\psi})\,dx\right| \leq \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Agora, apresentaremos dois lemas, que vamos utilizar, para estimar a norma de U em termos da dissipação na fronteira.

Novamente, na próxima estimativa denotaremos a parte real de $\mathcal{J}$ somente por $\mathcal{J}$, isto para simplificar notação.

Lema 4.2.4. *Para todo $\varepsilon > 0$ e α variando entre 0 e L, temos*

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon) - \mathcal{I}_\psi(\alpha) \leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2} + \frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(\alpha)| + \frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(\alpha) + \frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \mathcal{I}\,dx + \mathcal{Q}'. \quad (4.2.66)$$

Demonstração. Vamos usar as caracterizações das derivadas do Lema 4.2.2. Primeiro, vejamos que

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \frac{d}{dx}\mathcal{I}_\psi\,dx = \int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \kappa\mathcal{R}e\varphi_x\bar{\psi}_x\,dx + \int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \mathfrak{Q},$$

logo, em virtude do teorema fundamental do cálculo, podemos ver que

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha) - \mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon) = \int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \kappa\mathcal{R}e\varphi_x\bar{\psi}_x\,dx + \int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \mathfrak{Q},$$

daí, tendo em conta (4.2.51), temos que

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha) - \mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon) = \frac{1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \mathcal{J}(x)\,dx + \underbrace{\frac{\kappa}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \frac{d}{dx}(\varphi_x\overline{\psi})\,dx}_{\mathcal{Q}',\ Obs.2} + \mathcal{Q},$$

portanto, da igualdade acima, segue

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha) - \mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon) = \frac{1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^\alpha \mathcal{J}(x)\,dx + \mathcal{Q}',$$

assim, aplicando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(\alpha)-\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)&=\frac{1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{J}(x)\,dx+\mathcal{Q}'\\&=\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)-\frac{1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,\frac{d}{dx}\mathcal{J}(x)dx+\mathcal{Q}'.\end{aligned}$$

Logo, em vista da condição $\rho_1 b=\rho_2\kappa$, podemos substituir (4.2.54), na igualdade acima, então, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(\alpha)-\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)&=\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)-\frac{1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,(\rho_1\mathcal{I}_\varphi-\rho_1\mathcal{I}_\psi)\,dx\\&\quad+\underbrace{\frac{1}{4\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,(\rho_1\frac{d}{dx}(\kappa\varphi_x\bar{\varphi}-b\psi_x\bar{\psi})+\mathfrak{Q})dx}_{\mathcal{Q}',\ \text{Obs. 2.}}+\mathcal{Q}'\\&=\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)-\frac{\rho_1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,(\mathcal{I}_\varphi-\mathcal{I}_\psi)\,dx+\mathcal{Q}',\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha)-\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)+\frac{\rho_1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,(\mathcal{I}_\psi-\mathcal{I}_\varphi)\,dx+\mathcal{Q}'.$$

daí, notemos que $f(x)=x-\alpha+\varepsilon\geq 0$, para todo $x\in[\alpha-\varepsilon,\alpha]$, então, aplicando este fato na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(\alpha)-\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)&\geq\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)-\frac{\rho_1}{2\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)\,\mathcal{I}_\varphi\,dx+\mathcal{Q}'\\&=\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\mathcal{J}(\alpha)-\frac{\rho_1}{4\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{I}_\varphi d(x-\alpha+\varepsilon)^2+\mathcal{Q}',\end{aligned}$$

assim, podemos concluir que

$$\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)-\mathcal{I}_\psi(\alpha)\leq\frac{\varepsilon}{2\rho_2}|\mathcal{J}(\alpha)|+\left|\frac{\rho_1}{4\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{I}_\varphi d(x-\alpha+\varepsilon)^2\right|+\mathcal{Q}',$$

logo, ao integrar por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(\alpha-\varepsilon)-\mathcal{I}_\psi(\alpha)\quad&\leq\frac{\varepsilon}{2\rho_2}|\mathcal{J}(\alpha)|+\frac{\rho_1\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(\alpha)+\left|\underbrace{\frac{\rho_1}{4\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)^2\frac{d}{dx}\mathcal{I}_\varphi}_{I}\right|\\&\quad+\mathcal{Q}'.\end{aligned}\tag{4.2.67}$$

Agora, vamos estimar I, notemos que, em virtude de (4.2.52), podemos constatar que

$$I=\left|\frac{\rho_1}{4\rho_2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)^2(\kappa\mathcal{R}e\psi_x\bar{\varphi}_x+\mathfrak{R})\,dx\right|,$$

daí, de (4.2.51), temos

$$I=\left|\frac{\rho_1}{8\rho_2^2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}(x-\alpha+\varepsilon)^2(\mathcal{J}(x)+\kappa\frac{d}{dx}\varphi_x\bar{\psi})\,dx\right|+\mathcal{Q},$$

portanto, tendo em conta a desigualdade triangular, obtemos

$$I \leq \left| \frac{\rho_1}{8\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} (x-\alpha+\varepsilon)^2 \mathcal{J}(x)\, dx \right| + \left| \underbrace{\frac{\kappa\rho_1}{8\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} (x-\alpha+\varepsilon)^2 \frac{d}{dx} \varphi_x \bar{\psi}\, dx}_{\mathcal{Q}',\ \text{Obs. 2.}} \right| + \mathcal{Q}$$
$$= \left| \frac{\rho_1}{8\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} (x-\alpha+\varepsilon)^2 \mathcal{J}(x)\, dx \right| + \mathcal{Q}',$$

assim, aplicando integração por partes, temos que

$$I \leq \frac{\varepsilon^3 \rho_1}{24\rho_2^2} |\mathcal{J}(\alpha)| + \left| \frac{\rho_1}{24\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} (x-\alpha+\varepsilon)^3 \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x)\, dx \right| + \mathcal{Q}',$$

logo, em virtude de (4.2.54), podemos ver que

$$I \leq \frac{\varepsilon^3 \rho_1}{24\rho_2^2} |\mathcal{J}(\alpha)| + \left| \frac{\rho_1^2}{24\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} (x-\alpha+\varepsilon)^3 (\mathcal{I}_\varphi + \mathcal{I}_\psi)\, dx \right| + \mathcal{Q}',$$

daí, como $f(x) = (x-\alpha+\varepsilon)^3 \geq 0$, mais ainda, atinge o máximo em $f(\alpha) = \varepsilon^3$, podemos concluir que

$$I \leq \frac{\varepsilon^3 \rho_1}{24\rho_2^2} |\mathcal{J}(\alpha)| + \frac{\rho_1^2 \varepsilon^3}{24\rho_2^2} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \mathcal{I}\, dx + \mathcal{Q}'.$$

Finalmente, ao substituir I em (4.2.67), obtemos o resultado. □

No seguinte lema estimamos $\int_0^L \mathcal{I}_\psi\, dx$, por uma função que é absorvida por $\mathcal{Q}'$ e apenas um termo pontual.

Lema 4.2.5. *Suponhamos válidas as condições anteriores, então podemos verificar que*

$$\int_0^L \mathcal{I}_\psi\, dx \leq \frac{L^2}{4\rho_2} |\mathcal{J}(L)| + \mathcal{Q}'. \tag{4.2.68}$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Consideremos a partição do intervalo $(0, L)$ em m partes, tal que $\alpha_j = (m-j)\varepsilon$, onde j vai de 0 até m e cumpre que $m\varepsilon = L$. Logo, integramos sobre $(\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j)$ em (4.2.54), ou seja,

$$\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j} \frac{d}{dx} \mathcal{J}\, dx = \int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j} (\rho_1 \mathcal{I}_\varphi - \rho_1 \mathcal{I}_\psi)\, dx + \underbrace{\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j} \rho_1 \frac{d}{dx} (\kappa \varphi_x \bar{\varphi} - b\psi_x \bar{\psi})\, dx}_{\leq \mathcal{Q}} + \mathcal{Q},$$

assim, temos que

$$\mathcal{J}(\alpha_j) - \mathcal{J}(\alpha_j - \varepsilon) = \int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j} (\rho_1 \mathcal{I}_\varphi - \rho_1 \mathcal{I}_\psi)\, dx + \mathcal{Q},$$

daí, aplicando propriedades de módulo, podemos ver que

$$|\mathcal{J}(\alpha_j - \varepsilon)| - |\mathcal{J}(\alpha_j)| \leq |\mathcal{J}(\alpha_j - \varepsilon) - \mathcal{J}(\alpha_j)| = \left| \int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j} (\rho_1 \mathcal{I}_\varphi - \rho_1 \mathcal{I}_\psi)\, dx + \mathcal{Q} \right|.$$

Além disso, como

$$\left|\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j}(\rho_1\mathcal{I}_\varphi-\rho_1\mathcal{I}_\psi)\,dx+\mathcal{Q}\right|\leq\rho_1\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q},$$

então, podemos conluir,

$$|\mathcal{J}(\alpha_j-\varepsilon)|\leq|\mathcal{J}(\alpha_j)|+\int_{\alpha_j-\varepsilon}^{\alpha_j}(\rho_1\mathcal{I})\,dx+\mathcal{Q}. \tag{4.2.69}$$

Por outro lado, consideramos $j=0$ em (4.2.66), então $\alpha_0=m\varepsilon=L$ e a estimativa (4.2.66), fica da forma,

$$\mathcal{I}_\psi(L-\varepsilon)-\mathcal{I}_\psi(L)\leq\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L)|+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L)+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}'.$$

Agora, sabemos que $\mathcal{R}e\left((\mathcal{A}(U)\,,\,U)\right)=-|\gamma\phi_2(L)|^2$, então, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que $|\phi_2(L)|^2\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$, além disso, tendo em conta que $b\psi_x(L)=-\gamma\phi_2(L)$ e que $2\mathcal{I}_\psi(L)=\rho_2|\phi_2(L)|^2+b|\psi_x(L)|^2$, podemos concluir que $|\mathcal{I}_\psi(L)|\leq\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$. Portanto, em vista à estimativa $|\mathcal{I}_\psi(L)|\leq\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$ e a estimativa acima, podemos ver que

$$\mathcal{I}_\psi(L-\varepsilon)\leq\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L)|+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L)+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}'. \tag{4.2.70}$$

Agora, vamos considerar $j=1$ em (4.2.66), então $\alpha_1=(m-1)\varepsilon=L-\varepsilon$ e a estimativa (4.2.66), é como segue

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(L-\varepsilon-\varepsilon)-\mathcal{I}_\psi(L-\varepsilon)\leq&\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L-\varepsilon)|+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L-\varepsilon)\\&+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-\varepsilon-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}',\end{aligned}$$

ou equivalente

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(L-2\varepsilon)-\mathcal{I}_\psi(L-\varepsilon)\ \leq&\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L-\varepsilon)|+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L-\varepsilon)\\&+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-2\varepsilon}^{L-\varepsilon}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}'.\end{aligned} \tag{4.2.71}$$

Por outro lado, substituindo $\alpha_0=L$ em (4.2.69), podemos ver que

$$|\mathcal{J}(L-\varepsilon)|\leq|\mathcal{J}(L)|+\rho_1\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q},$$

consequentemente, em virtude da estimativa acima e substituindo (4.2.70) em (4.2.71), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\psi(L-2\varepsilon)\leq&\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L)|+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L)+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\\&+\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)\left(|\mathcal{J}(L)|+\rho_1\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\mathcal{I}_\varphi(L-\varepsilon)\\&+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-2\varepsilon}^{L-\varepsilon}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}',\end{aligned}$$

logo, a estimativa acima implica que

$$\mathcal{I}_\psi(L-2\varepsilon) \leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)\left(2|\mathcal{J}(L)|+2\rho_1\int_{L-\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\left(\mathcal{I}_\varphi(L)+\mathcal{I}_\varphi(L-\varepsilon)\right)$$

$$+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-2\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx+\mathcal{Q}'.$$

Então, continuando este processo indutivamente, com j começando em 1, temos

$$\mathcal{I}_\psi(L-j\varepsilon) \leq \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{4\rho_2}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\mathcal{I}_\varphi(L-k\varepsilon)\right)+\frac{\rho_1^2\varepsilon^3}{24\rho_2^2}\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx}_{\Upsilon_j}$$

$$+\left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)\left(j|\mathcal{J}(L)|+\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\mathcal{Q}'.$$

Daí, tomando soma desde $j=1$ até $j=m$, podemos observar que

$$\sum_{j=1}^{m}\mathcal{I}_\psi(L-j\varepsilon) \leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^3}{24\rho_2^2}+\frac{\varepsilon}{2\rho_2}\right)\left(\frac{m(m+1)}{2}|\mathcal{J}(L)|+m\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j+m\mathcal{Q}'$$

$$\leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^2}{24\rho_2^2}+\frac{1}{2\rho_2}\right)\left(\frac{\varepsilon\, m(m+1)}{2}|\mathcal{J}(L)|+\varepsilon\, m\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j$$

$$+L\mathcal{Q}'.$$

Finalmente, multiplicando a estimativa acima por ε e em vista de que $m\,\varepsilon=L$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{m}\mathcal{I}_\psi(L-j\varepsilon)\varepsilon \leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^2}{24\rho_2^2}+\frac{1}{2\rho_2}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\, m(m+1)}{2}|\mathcal{J}(L)|+\varepsilon^2\, m\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}_\psi\,dx\right)+\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j$$

$$+\varepsilon\, m\mathcal{Q}'$$

$$\leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^2}{24\rho_2^2}+\frac{1}{2\rho_2}\right)\left(\frac{(\varepsilon\, m)^2+\varepsilon\,\varepsilon m}{2}|\mathcal{J}(L)|+\varepsilon\,\varepsilon m\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}_\psi\,dx\right)+\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j$$

$$+L\mathcal{Q}'$$

$$\leq \left(\frac{\rho_1\varepsilon^2}{24\rho_2^2}+\frac{1}{2\rho_2}\right)\left(\frac{L^2+\varepsilon\, L}{2}|\mathcal{J}(L)|+\varepsilon\, L\rho_1\int_{L-j\varepsilon}^{L}\mathcal{I}\,dx\right)+\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j+L\mathcal{Q}',$$

logo, o resultado segue ao tomar limite de $m\to\infty$, $(\varepsilon\to 0)$ na desigualdade anterior.

Observação 4.2.8. Notemos que, $\sum_{k=0}^{j-1}\mathcal{I}_\varphi(L-k\varepsilon)\varepsilon$ é uma soma de Riemann,então ao tomar o limite $m\to\infty$, $(\varepsilon\to 0)$, torna-se uma integral de Riemann no intervalo $(0,L)$, isto porque, se $m\to\infty$, então $j\to\infty$. Daí, $\varepsilon\sum_{k=0}^{j-1}\mathcal{I}_\varphi(L-k\varepsilon)\varepsilon$ converge a zero, se $m\to\infty$ e $(\varepsilon\to 0)$, portanto $\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\Upsilon_j\to 0$ quando $m\to\infty$ e $(\varepsilon\to 0)$.

□

Para finalizar o capítulo enunciaremos um último resultado, isto para garantir a estabilidade exponencial do sistema (4.1.1) e portanto a estabilidade exponencial de (4.0.1)-(4.0.5). Para isto vamos usar as ferramentas provadas até agora nesta seção e o Teorema 2.4.6.

Teorema 4.2.2. *O Sistema (4.0.1)-(4.0.5) é exponencialmente estável, desde que as velocidades de propagação de ondas sejam iguais e a condição* (P_1) *do Teorema 4.2.1 seja satisfeita.*

Demonstração. Em virtude de que as velocidades de propagação de ondas são iguais, podemos integrar (4.2.54) sobre $(0, L)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^L \rho_1 \mathcal{I}_\varphi \, dx &= \int_0^L \frac{d}{dx}\mathcal{J}\, dx + \int_0^L \rho_1 \mathcal{I}_\psi \, dx + \mathcal{Q}\\ &= \int_0^L \rho_1 \mathcal{I}_\psi \, dx - \mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(L) + \mathcal{Q},\end{aligned}$$

daí, ao dividir entre ρ_1 e somar $\displaystyle\int_0^L \mathcal{I}_\psi \, dx$, temos que

$$\int_0^L \mathcal{I}\, dx = 2\int_0^L \mathcal{I}_\psi \, dx + \frac{1}{\rho_1}\mathcal{J}(0) - \frac{1}{\rho_1}\mathcal{J}(L) + \mathcal{Q},$$

logo, aplicando módulo, podemos ver que

$$\int_0^L \mathcal{I}\, dx \leq 2\int_0^L \mathcal{I}_\psi \, dx + \frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| + \frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(L)| + \mathcal{Q}. \tag{4.2.72}$$

Por outro lago, da definição de $\mathcal{J}$, segue

$$\frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| \leq \rho_2 |\phi_2(0)||\overline{\phi_1}(0)| + \frac{\rho_2\kappa}{\rho_1}|\psi_x(0)||\overline{\varphi_x}(0)|,$$

então, em virtude da Proposição 2.1.6 $\left(\text{tomando } \varepsilon = \dfrac{\rho_2}{\rho_1 L}\right)$, temos

$$\frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| \leq \rho_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1 L}|\phi_2(0)|^2 + \frac{1}{\frac{4\rho_2}{\rho_1 L}}|\overline{\phi_1}(0)|^2\right) + \frac{\rho_2\kappa}{\rho_1}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1 L}|\psi_x(0)|^2 + \frac{1}{\frac{4\rho_2}{\rho_1 L}}|\overline{\varphi_x}(0)|^2\right),$$

ou equivalente

$$\frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| \leq \frac{\rho_2\rho_2}{\rho_1 L}|\phi_2(0)|^2 + \frac{L\rho_1}{4}|\overline{\phi_1}(0)|^2 + \frac{\kappa\rho_2^2}{\rho_1^2 L}|\psi_x(0)|^2 + \frac{\kappa L}{4}|\overline{\varphi_x}(0)|^2,$$

logo, fazemos uma reordenação e tomando em conta que $\rho_1 b = \kappa\rho_2$, podemos ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| &\leq C_1\rho_2|\phi_2(0)|^2 + \frac{\rho_2 b}{\rho_1 L}|\psi_x(0)|^2 + \frac{L\rho_1}{4}|\overline{\phi_1}(0)|^2 + \frac{\kappa L}{4}|\overline{\varphi_x}(0)|^2\\ &\leq C\mathcal{I}_\psi(0) + \frac{L}{4}\mathcal{I}(0).\end{aligned}$$

Portanto, em virtude do Lema 4.2.3 (considerando $q = x - L$), obtemos da estimativa acima que

$$\frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(0)| \quad \leq C\mathcal{I}_\psi(0) + \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q}. \tag{4.2.73}$$

Agora, vamos estimar $C\mathcal{I}_\psi(0)$, para isso, fazemos $\alpha = 0$, $\beta = L$ e $q = x - L$ em (4.2.61), ou seja,

$$\begin{aligned} C\mathcal{I}_\psi(0) &= \frac{C}{L}\int_0^L \mathcal{I}_\psi - \frac{C}{L}\int_0^L (x-L)\kappa\mathcal{R}e\varphi_x\overline{\psi_x}\,dx + \mathcal{Q} \\ &\leq \frac{C}{L}\int_0^L \mathcal{I}_\psi + C\int_0^L \kappa|\varphi_x||\overline{\psi_x}|\,dx + \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

daí, usando a Proposição 2.1.6 em $|\varphi_x||\overline{\psi_x}|$, (com $\varepsilon = C$) obtemos

$$\begin{aligned} C\mathcal{I}_\psi(0) &\leq \frac{C}{L}\int_0^L \mathcal{I}_\psi + C_0\int_0^L \mathcal{I}_\psi(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q} \\ &\leq \left(\frac{C}{L} + C_0\right)\int_0^L \mathcal{I}_\psi(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo a estimativa acima junto com (4.2.73), em (4.2.72), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx &\leq 2\int_0^L \mathcal{I}_\psi\,dx + \left(\frac{C}{L} + C_0\right)\int_0^L \mathcal{I}_\psi(x)\,dx + \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(L)| + \mathcal{Q} \\ &= C_M\int_0^L \mathcal{I}_\psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \frac{1}{\rho_1}\mathcal{J}(L) + \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 4.2.5, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx &\leq \frac{C_M L^2}{4\rho_2}|\mathcal{J}(L)| + \frac{1}{\rho_1}|\mathcal{J}(L)| + \frac{1}{2}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q} \\ &= \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{C_M L^2}{4\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L)| + \frac{1}{2}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q}', \end{aligned}$$

então, pela definição de $\mathcal{J}$, em virtude da Proposição 2.1.6 e pelo Lema 4.2.3 (considerando $q = x - L$), podemos concluir que

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{C_M L^2}{4\rho_2}\right)|\mathcal{J}(L)| \leq C_4\mathcal{I}_\psi(L) + \frac{L}{4}\mathcal{I}(L) \leq \frac{1}{4}\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx + \mathcal{Q}',$$

isto porque o termo pontual $\mathcal{I}_\psi(L)$ é absorvido por $\mathcal{Q}$. Finalmente, em vista das duas últimas estimativas, temos que

$$\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx \leq \mathcal{Q}'.$$

Então, lembrando que $\mathcal{Q}'$ é estimado por

$$\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

podemos concluir que

$$\int_0^L \mathcal{I}(x)\,dx \leq \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, como sabemos que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente à $\|\cdot\|_*$ e em virtude da definição de $\mathcal{I}(x)$, usando a Proposição 2.1.6 e aplicando o limite $\lambda \to \infty$, concluímos que

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\|(i\lambda\mathbb{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Portanto, do Teorema 2.4.6, temos a conclução do teorema. $\square$

Observação 4.2.9. Temos provado que a solução do problema abstrato de Cauchy (4.1.1) com $\mathcal{A}$ o operador associado ao sistema (4.0.1)-(4.0.2), decai exponencialmente, o que é equivalente a ter mostrado a estabilidade exponencial do sistema (4.0.1)-(4.0.5).

5 TIMOSHENKO COM EFEITO TÉRMICO DO TIPO II- DISSIPAÇÃO NA FRONTEIRA

Neste capítulo, vamos introduzir um efeito térmico ao sistema de Timoshenko trabalhado nos capítulos anteriores. O efeito térmico que vamos introduzir não propaga a energia, pelo que consideramos a dissipação num extremo da fronteira que considerámos no capítulo 4, a fim de utilizar a teoria clássica dos semigrupos de operadores para resolver problemas dissipativos. Para uma breve abordagem da dedução do sistema, ver [31]. O sistema em questão é o seguinte:

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x \quad = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L) \tag{5.0.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x \quad = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L) \tag{5.0.2}$$

$$a\vartheta_{tt} - \kappa_0\vartheta_{xx} + \beta\psi_{xt} \quad = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{5.0.3}$$

onde a temperatura θ e o deslocamento térmico ϑ, estão relacionados pela equação,

$$\vartheta_t(t,x) = \theta(t,x) \text{ em } \quad (0,\infty)\times(0,L). \tag{5.0.4}$$

Junto às condições iniciais (Timosheko)

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1 \;\; \psi(0,\cdot) = \psi_0, \;\; \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \text{ em } (0,L) \tag{5.0.5}$$

e (efeito térmico)

$$\vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0(x), \;\; \vartheta_t(0,\cdot) = \theta_0(x), \tag{5.0.6}$$

com dissipação

$$b\psi_x(t,L) = -\gamma\psi_t(t,L) \text{ em } (0,\infty), \tag{5.0.7}$$

onde γ é um coeficiente viscoso estritamente positivo, e as seguintes condições de contorno:

$$\varphi(\cdot,0) = 0, \quad \varphi(\cdot,L) = 0, \quad \psi(\cdot,0) = 0, \text{ em } (0,\infty). \tag{5.0.8}$$

e (Dirichlet) para ϑ, ou seja,

$$\vartheta(\cdot,0) = 0, \quad \vartheta(\cdot,L) = 0. \tag{5.0.9}$$

5.1 BOA COLOCAÇÃO

Estudemos a existência e unicidade do sistema (5.0.1)-(5.0.9), para isso, vamos fazer uma abordagem desde a teoria de semigrupos, mais especificamente, utilizaremos o teorema de caracterização para o operador infinitesimal de um semigrupos de classe C_0 de contrações, ou seja, o Teorema 2.4.3, daí, aplicando o Teorema 2.4.4, podemos garantir a existência e unicidade do problema (5.0.1)-(5.0.9). De fato. Seja

$$V = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \vartheta, \vartheta_t)^T,$$

então, temos que

$$\frac{d}{dt}V = (\varphi_t, \varphi_{tt}, \psi_t, \psi_{tt}, \vartheta_t, \vartheta_{tt})^T. \tag{5.1.1}$$

Logo, em virtude das equações (5.0.1)-(5.0.3), podemos substituir φ_{tt}, ψ_{tt} e ϑ_{tt} em (5.1.1), ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\varphi_t, \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x,\, \psi_t\,, \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2}\theta_x,\, \vartheta_t\,, \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx} - \frac{\beta}{a}\psi_{xt}\right)^T, \tag{5.1.2}$$

ou equivalente

$$\frac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_{xx}} - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{a}\frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\kappa_0}{a}\frac{\partial}{\partial_{xx}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi_1 \\ \psi \\ \phi_2 \\ \vartheta \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Daí, o candidato para o operador infinitesimal é

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial_x^2} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_{xx}} - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{a}\frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\kappa_0}{a}\frac{\partial}{\partial_{xx}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos calcular formalmente a energia associada ao sistema (5.0.1)-(5.0.3), para isso, multiplicamos por φ_t a equação (5.0.1) e integramos sobre $(0, L)$, respeito a x, isto é,

$$\int_0^L \rho_1\varphi_{tt}\varphi_t \mathrm{d}x - \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)_x\varphi_t\, dx = 0$$

Logo, como $\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0$, então, aplicando integração por partes e propriedades de derivada, temos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1\varphi_t^2\, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_{tx}\, dx = 0. \tag{5.1.3}$$

Por outro lado, na equação (5.0.2), vamos multiplicar por ψ_t e integrando sobre $(0, L)$, respeito a x, ou seja,

$$\int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi_t\, dx - \int_0^L b\psi_{xx}\psi_t\, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\psi_t\, dx + \int_0^L \beta\theta_x\psi_t\, dx = 0,$$

daí, aplicando integrando por partes e em virtude de (5.0.7), podemos conluir que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2\, dx + \gamma|\psi_t(t, L)|^2 + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\psi_t\, dx - \int_0^L \beta\theta\psi_{tx}\, dx + \theta(t, x)\psi_t(x, t)\Big|_0^L = 0,$$

logo, em vista de (5.0.9), obtemos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \rho_2\psi_t^2 \ + b\psi_x^2\, dx + \gamma|\psi_t(t,L)|^2 + \int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)\psi_t\, dx - \int_0^L \beta\theta\psi_{tx}\, dx = 0. \quad (5.1.4)$$

Finalmente, na equação (5.0.3), multiplicamos por θ e integramos sobre $(0, L)$ respeito a x, e em vista de (5.0.9), podemos ver que

$$\int_0^L a\vartheta_{tt}\vartheta_t\, dx - \int_0^L \kappa_0\vartheta_{xx}\,\theta\, dx + \int_0^L \beta\psi_{xt}\theta\, dx = 0,$$

daí, aplicando integração por partes e propriedades da integral, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L a\vartheta_t^2\, dx + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \kappa_0\vartheta_x^2\, dx - \vartheta_x(t,x)\theta(t,x)\Big|_0^L + \int_0^L \beta\psi_{xt}\theta\, dx = 0,$$

então, em vista de (5.0.4) e de (5.0.9), temos que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L (a\theta^2 + \kappa_0\vartheta_x^2) + \int_0^L \beta\psi_{xt}\theta\, dx = 0. \quad (5.1.5)$$

Além disso, notamos que

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\varphi_x+\psi)^2 = 2(\varphi_x+\psi)(\varphi_{xt}+\psi_t), \quad (5.1.6)$$

Portanto, ao somar as equações (5.1.3),(5.1.4) e (5.1.5), e tendo em conta (5.1.6), podemos conluir,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 \ + b\psi_x^2 + (\varphi_x+\psi)^2 + a\theta^2 + \kappa_0\vartheta_x^2\right)\, dx = -\gamma|\psi_t(t,L)|^2. \quad (5.1.7)$$

Portanto, a energia associada ao sistema vem dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 \ + b\psi_x^2 + (\varphi_x+\psi)^2 + a\theta^2 + \kappa_0\vartheta_x^2\right)\, dx. \quad (5.1.8)$$

Agora, vamos impor condições para que o cálculo da energia seja válido, então, em vista da equação (5.1.8), devemos pedir que

$$\psi_x, \psi_t \in L_2(0,L), \varphi_t \in L_2(0,L), \varphi_x + \psi \in L_2(0,L) \text{ e } \theta, \vartheta_x \in L_2(0,L).$$

Além disso, consideramos

$$V_0^1(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}.$$

Então, para satisfazer as condições de fronteira (5.0.5), exigimos que

$$\vartheta, \varphi \in H_0^1(0,L)\ ,\ \varphi_t \in L_2(0,L)\ ,\ \psi \in V_0^1(0,L) \text{ e } \psi_t \in L_2(0,L).$$

Logo, em vista às condições acima, definimos o espaço

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L_2(0,L) \times V_0^1(0,L) \times L_2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L_2(0,L).$$

Por outro lado, introduzimos a aplicação bilinear

$$(\cdot,\cdot):\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$$

dada por

$$(U,V)=\int_0^L\left(\rho_1u_2\overline{v_2}+\rho_2u_4\overline{v_4}+bu_{3x}\overline{v_{3x}}+\kappa(u_{1x}+u_3)\overline{(v_{1x}+v_3)}+au_6\overline{v_6}+\kappa_0u_{5x}\overline{v_{5x}}\right)dx,$$

onde $U=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)^T$, $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)^T\in\mathcal{H}$. Então, afirmamos que, a aplicação $(\cdot,\cdot)$ define um produto interno em $\mathcal{H}$, notemos que, $(\cdot,\cdot)$ é bilinear , além disso, os axiomas de produto interno seguem facilmente, com excepção de $(U,U)=0\Rightarrow U=0$ (as provas são análogas a da Proposição 3.1.1). Então, vejamos que $(U,U)=0\Rightarrow U=0$. De fato, seja $U=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\in\mathcal{H}$. vamos supor que $(U,U)=0$. Assim, pelas propriedades da integral, temos $u_2,u_6=0$ e $u_4=0$, além disso, $u_{3x},u_{5x}=0$ e $u_{1x}=-u_3$. Então, primeiro notamos que, como $u_{3x}=0$, podemos ver que $u_3=c$, onde c uma constante, mais ainda, em virtude de que $u_3(0)=0$ (pois $u_3\in\mathcal{V}_0^1$), temos que, usando convergência pontual (q.t.p) e continuidade (isto porque os espaços estão definidos em I limitado), podemos concluir que $u_3(x)=0$, para todo x, mais ainda, temos que $u_1(x)=c_1$, onde c_1 é uma contante, então, como $u_1\in H_0^1(0,L)$, obtemos que $u_1=0$. Finalmente, em vista que $u_5(x)=c_2$, onde c_2 é constante, em virtude de $u_5\in H_0^1(0,L)$, temos que $u_5(x)=0$ para todo x, ou seja $U=0$. Consideremos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}=(U,U)=\kappa\|\varphi_x+\psi\|^2_{L_2}+b\|\psi_x\|^2_{L_2}+\rho_1\|\phi_1\|^2_{L_2}+\rho_2\|\phi_2\|^2_{L_2}+a\|\theta\|^2_{L_2}+\kappa_0\|\vartheta_x\|^2_{L_2},$$

onde $U=(\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2,\vartheta,\theta)^T\in\mathcal{H}$. Então, $\|\cdot\|_H$ é a norma em $\mathcal{H}$ que provém de $(\cdot,\cdot)$. Queremos ver que $(\mathcal{H},\|U\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert. Para isso, vamos ver que $\|U\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a uma norma natural em $\mathcal{H}$. De forma semelhante ao que foi feito na Proposição 4.1.2, podemos afirmar o seguinte resultado,

Proposição 5.1.1. $(\mathcal{H},\|U\|_{\mathcal{H}})$ *é um espaço de Hilbert.*

Agora, vamos definir um subespaço $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{H}$, em que definiremos o operador $\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A})\to\mathcal{H}$ com a expressão antes dada. Faremos isto a partir das condições (5.0.7)-(5.0.9) e a definição de domínio de um operador, ou seja, dado $U=(\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2,\vartheta,\theta)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, como $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, então em particular $U\in\mathcal{H}$ (pela Definição 2.4.2), isto é,

$$\varphi,\vartheta\in H_0^1(0,L)\cap H_2(0,L),\ \ \phi_1,\phi_2,\theta\in L_2(0,L)\ \text{ e }\psi\in V_0^1(0,L),$$

e como temos que ter $\mathcal{A}U\in\mathcal{H}$, (pela Definição 2.4.2), onde

$$\mathcal{A}U=\left(\phi_1,\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x,\ \phi_2\ ,\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\frac{\beta}{\rho_2}\theta_x,\ \theta\ ,\frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx}-\frac{\beta}{a}\phi_{2x}\right)^T,$$

então, deve estar satisfeito que

$$\phi_1,\theta\in H_0^1\text{ e }\phi_2\in V_0^1,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x &= f_1\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\frac{\beta}{\rho_2}\theta_x, &= f_2\\ \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx}-\frac{\beta}{a}\phi_{2x} &= f_3,\end{aligned}$$

onde $f_1, f_2, f_3 \in L_2(0, L)$. Então, podemos resolver o problema acima referido, estudamos problema equivalente integral usando o Teorema 2.1.1 e teoria clássica como no espaço das distribuições, isto analogamente como foi feito para resolver (4.1.10)-(4.1.11). Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \ &: \vartheta, \varphi \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), \phi_1 \in H_0^1(0,L), \psi \in V_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),\\ &\phi_2 \in V_0^1(0,L), b\psi_x(L) = -\gamma\phi_2(L)\ , \theta \in H_0^1(0,L)\},\end{aligned}$$

onde $U = (\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2, \vartheta, \theta)$. Agora, definimos

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$$

por

$$\mathcal{A}U = \left(\phi_1, \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x,\ \phi_2\ , \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\frac{\beta}{\rho_2}\theta_x,\ \theta\ , \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx}-\frac{\beta}{a}\phi_{2x}\right)^T.$$

Lema 5.1.1. *$\mathcal{A}$ é um operado dissipativo.*

Demonstração. Seja $U = (\ \varphi\ ,\ \phi_1,\ \psi,\ \phi_2, \vartheta, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos de ver que $\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}U, U) \le 0$. De fato, Notamos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U) \ &= \int_0^L \left(\rho_1\left(\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x\right)\overline{\phi_1}+\rho_2\left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{-\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)\overline{\phi_2}\right)\right)dx\\ &+\int_0^L (b\phi_{2x}\overline{\psi_x}+\kappa(\phi_{1x}+\phi_2)\overline{(\varphi_x+\psi)})\,dx+\int_0^L \overline{\theta}a\left(\frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx}-\frac{\beta}{a}\phi_{2x}\right)dx\\ &+\int_0^L \kappa_0\overline{\vartheta_x}\theta_x\,dx-\int_0^L \frac{\beta}{\rho_2}\theta_x\overline{\phi_2}\,dx,\end{aligned}$$

logo, tendo em conta que, se $z \in \mathbb{C}$, então $z - \overline{z} = 2img(z)i$, e que $\theta \in H_0^1(0, L)$ e em virtude de (5.0.7), então, ao integrando por partes a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U) \ &= 2img\left(\int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{(\phi_{1x}+\phi_2)}\mathrm{d}x\right)i+2img\left(\int_0^L b\phi_{2x}\overline{\psi_x}\mathrm{d}x\right)i-\gamma|\phi_2(L)|^2\\ &+2\,img\left(\int_0^L \kappa_0\overline{\theta_x}\vartheta_x\,dx\right)i+2\,img\left(\int_0^L \beta\phi_2\overline{\theta_x}\,dx\right)i,\end{aligned}$$

daí, ao tomar parte real, podemos ver que $\mathcal{R}e\,(\mathcal{A}U, U) \le 0$. $\square$

Vamos agora apresentar uma proposição com o objectivo de mostrar a condição (ii) do reciproco do Teorema 2.4.3. Primeiro, vamos verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto para mostrar que o operador tem posto completo e que tem domínio denso em $\mathcal{H}$.

Proposição 5.1.2. $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Queremos ver que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, que o operador $0I - \mathcal{A}$, seja invertível com inversa contínua. Primeiro, provemos que é sobrejetora. De fato, seja $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$, queremos achar $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que $-\mathcal{A}U = F$, para isso, notamos que, isto é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \quad &= f_2, \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2}\theta_x, \quad &= f_4, \\ \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx} - \frac{\beta}{a}\phi_{2x} \quad &= f_6, \end{aligned}$$

onde $f_2, f_4, f_6 \in L_2(0, L)$, junto às condições

$$\phi_1 = f_1 \in H_0^1, \phi_2 = f_3 \in V_0^1, \text{ e } \theta = f_5 \in H_0^1$$

e as condições de contorno (5.0.6)-(5.0.9). Mais ainda, equivalentemente, substituindo ϕ_2 e θ, no sistema anterior, podemos ver que o sistema simplifica a

$$\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \tag{5.1.9}$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) = f_4 + \frac{\beta}{\rho_2}f_{5x} \tag{5.1.10}$$

$$\frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx} = f_6 + \frac{\beta}{a}f_{3x}, \tag{5.1.11}$$

junto às condições de contorno (5.0.6)-(5.0.9). Depois para resolver o sistema acima referido, vamos resolver um problema integral equivalente usando o Teorema Lax-Milgran, ou seja, a partir do sistema (5.1.9)-(5.1.11), colocamos um problema integral. Então, na equação (5.1.9), multiplicamos por $\Phi_1 \in H_0^1$ e integramos sobre $(0, L)$, ou seja,

$$\int_0^L \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi_1}\, dx = \int_0^L f_2 \overline{\Phi_1}\, dx,$$

logo, aplicando integração por partes, podemos observar que

$$-\int_0^L \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)\overline{\Phi_{1x}}\, dx = \int_0^L f_2 \overline{\Phi_1}\, dx, \tag{5.1.12}$$

isto porque $\Phi_1 \in H_0^1$. Daí, multiplicamos por $\Phi_2 \in V_0^1$ em (5.1.10) e integramos sobre $(0, L)$, ou seja,

$$\int_0^L \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}\overline{\Phi_2}\, dx - \int_0^L \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi)\overline{\Phi_2}\, dx = \int_0^L \left(f_4 + \frac{\beta}{\rho_2}f_{5x}\right)\overline{\Phi_2}\, dx,$$

então, fazendo integração por partes, obtemos

$$-\int_0^L \frac{b}{\rho_2}\psi_x\overline{\Phi_{2x}}\,dx+\int_0^L \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)\overline{\Phi_2}\,dx \;=\int_0^L \left(f_4+\frac{\beta}{\rho_2}f_{5x}\right)\overline{\Phi_2}\,dx \qquad (5.1.13)$$

$$+\frac{\gamma}{\rho_2}\Phi_2(L)f_3(L).$$

Por outro lado, multiplicamos por $\Theta\in H_0^1$ em (5.1.11) e integrando sobre $(0,L)$, isto é,

$$\int_0^L \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_{xx}\overline{\Theta}\,dx=\int_0^L \left(f_6+\frac{\beta}{a}f_{3x}\right)\overline{\Theta}\,dx,$$

Assim, aplicando integração por partes, temos que

$$-\int_0^L \frac{\kappa_0}{a}\vartheta_x\overline{\Theta_x}\,dx=\int_0^L \left(f_6+\frac{\beta}{a}f_{3x}\right)\overline{\Theta}\,dx. \qquad (5.1.14)$$

Logo, para simplificar, denotemos $\hat{f_{5x}}=\frac{\beta}{b}f_{5x}$, $\hat{f_{3x}}=\frac{\beta}{\kappa}f_{3x}$, $\hat{f}_2=\rho_1 f_2$, $\hat{f}_4=\rho_2 f_4$ e $\hat{f}_6=af_6$. Portanto, somando (5.1.12),(5.1.13) e (5.1.14), podemos concluir que

$$a(U_1,V_1)=T(V_1)$$

onde $U_1=(\varphi,\psi,\vartheta)$, $V_1=(\Phi_1,\Phi_2,\Theta)$,

$$a(U_1,V_1)=\int_0^L \kappa_0\vartheta_x\overline{\Theta_x}\,dx+\int_0^L b\psi_x\overline{\Phi_{2x}}\,dx+\int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)\left(\overline{\Phi_{1x}+\Phi_2}\right)\,dx\;, \qquad (5.1.15)$$

$$T(V_1)=T_1(V_1)+N(V_1), \qquad (5.1.16)$$

em que

$$T_1(V_1)=\int_0^L \left(\hat{f}_6+\beta\hat{f_{3x}}\right)\overline{\Theta}\,dx+\int_0^L \left(\hat{f}_4+\beta\hat{f_{5x}}\right)\overline{\Phi_2}\,dx+\int_0^L \hat{f}_2\overline{\Phi_1}\,dx, \qquad (5.1.17)$$

e

$$N(V_1)=\gamma\Phi_2(L)f_3(L)\;. \qquad (5.1.18)$$

Daí, consideremos o espaço

$$\mathcal{F}=H_0^1(0,L)\times V_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L),$$

definimos a aplicação

$$a(\cdot,\cdot):\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{K}$$

dada por a equação (5.1.15), podemos verificar que $(\mathcal{F},a(\cdot,\cdot))$ é um espaço de Hilbert, mais ainda $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva e contínua. De fato, da definição de $a(\cdot,\cdot)$ e propriedade do valor absoluto da integral, segue que, $|a(U_1,U_1)|\geq 1\,\|U_1\|_{\mathcal{F}}^2$, ou seja, $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva. Agora, vamos ver que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, notamos que

$$|a(U_1,V_1)|=\left|\int_0^L \kappa_0\vartheta_x\overline{\Theta_x}\,dx+\int_0^L b\psi_x\overline{\Phi_{2x}}\,dx+\int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)\left(\overline{\Phi_{1x}+\Phi_2}\right)\,dx\right|,$$

portanto, em virtude da desigualdade de Hölder

$$|a(U_1,V_1)| \leq \kappa_0\|\vartheta_x\|_{L_2}\|\overline{\Theta_x}\|_{L_2} + b\|\psi_x\|_{L_2}\|\overline{\Phi_{2x}}\|_{L_2} + \kappa\|(\varphi_x+\psi)\|_{L_2}\|\left(\overline{\Phi_{1x}+\Phi_2}\right)\|_{L_2},$$

daí, pela definição de $\|\cdot\|_F$, podemos ver que

$$|a(U_1,V_1)| \leq 3\|U_1\|_{\mathcal{F}}\|V_1\|_{\mathcal{F}} \ ,$$

isto é, $a(. , .)$ é contínua. Agora, definimos

$$T(\cdot) : \mathcal{F} \to \mathbb{K}$$

por (5.1.16), ou seja, $T(V_1) = T_1(V_1) + N(V_1)$, vamos ver que T está no dual de $\mathcal{F}$. De fato, notamos que, T é um funcional antilinear, vamos ver que é contínuo, então, em virtude da desigualdade triángular, temos que

$$|T(V_1)| \leq |T_1(V_1)| + |N(V_1)|.$$

Assim, vamos estimar primeiramente $|T_1(V_1)|$. Para isso notamos que

$$\begin{aligned} |T_1(V_1)| &\leq \|\hat{f}_6 + \beta\hat{f_{3x}}\|_{L_2}\|\overline{\Theta}\|_{L_2} + \|\hat{f}_4 + \beta\hat{f_{5x}}\|_{L_2}\|\overline{\Phi_2}\|_{L_2} + \|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\overline{\Phi_1}\|_{L_2} \\ &\leq C_F\left(C_P\|\overline{\Phi_{1x}}+\Phi_2\|_{L_2} + C_P^2\|\Phi_2\|_{L_2} + C_{p_1}\|\overline{\Phi_{2x}}\|_{L_2} + C_{p_2}\|\overline{\Theta_x}\|_{L_2}\right) \\ &\leq C\|V_1\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, vamos estimar $|N(V_1)|$, então, pela imersão do espaço de Sobolev, no espaço das funções contínuas (isto pois I é limitado), obtemos que

$$|N(V_1)| \leq C\|V_1\|_{\mathcal{F}}.$$

Portanto, do acima exposto temos que , T esta no dual de $\mathcal{F}$. Daí, como $a(\cdot,\cdot)$ é contínua e coerciva e T esta no dual de $\mathcal{F}$, então pelo Teorema Lax-Milgran, existe um único $U_1 \in \mathcal{F}$, tal que

$$T(V_1) = a(U_1, V_1),$$

para todo $V_1 \in \mathcal{F}$. Vejamos que U_1 é solução ao problema (5.1.9)-(5.1.10), ou seja, temos verificar a regularidade de φ, ψ e θ. De fato, como pelo Teorema Lax-Milgran, temos que

$$T(V_1) = a(U_1, V_1) \tag{5.1.19}$$

para todo $V_1 \in \mathcal{F}$, em particular para $V_1 = (\Phi_1, 0, 0)^T \in C_0^\infty(0,L)\times C_0^\infty(0,L)\times C_0^\infty(0,L)$. Então, substituindo V_1 em (5.1.19), podemos ver que

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)\overline{\Phi_{1x}}\,dx = \int_0^L \hat{f}_2\overline{\Phi_1}\,dx,$$

onde $\Phi_1 \in C_0^\infty(0,L)$ é arbitrário, ou seja, $\varphi_x+\psi$ tem derivada fraca, onde sua derivada é $\hat{f}_2$, isto é, $(\varphi_x+\psi)_x = -\frac{1}{\kappa}\hat{f}_2$, daí, como $\hat{f}_2 \in L_2$, então podemos concluir que , $(\varphi_x+\psi) \in H^1$, portanto $\varphi \in H^2$. Por outro lado, notamos que para $V_1 = (0, \Phi_2, 0)^T \in C_0^\infty(0,L) \times C_0^\infty(0,L) \times C_0^\infty(0,L)$. Daí, Como $\Phi_2 \in C_0^\infty(0,L)$, temos que $N(V_1) = 0$ e em virtude de (5.1.19), obtemos

$$\int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\Phi_2}\, dx + \int_0^L b\psi_x \overline{\Phi_{2x}}\, dx = \int_0^L \left(\hat{f}_4 + \beta \hat{f_{5x}}\right) \overline{\Phi_2}\, dx,$$

ou equivalente

$$\int_0^L b\psi_x \overline{\Phi_{2x}}\, dx = \int_0^L \left(\hat{f}_4 + \beta \hat{f_{5x}} - \kappa(\varphi_x + \psi)\right) \overline{\Phi_2}\, dx,$$

onde $\Phi_2 \in C_0^\infty(0,L)$ é arbitrário, ou seja, $b\psi_x$ tem derivada fraca, onde sua derivada é $-b\psi_{xx} = \hat{f}_4 + \beta \hat{f_{5x}} - \kappa(\varphi_x + \psi)$, logo, como $\kappa(\varphi_x + \psi) \in L_2$ e $\hat{f}_4 + \beta \hat{f_{5x}} \in L_2$, então $b\psi_{xx} \in L_2$, assim, podemos ver que $\psi_x \in H^1$, ou seja $\psi \in H^2$. Finalmente, para $V_1 = (0, 0, \Theta)^T \in C_0^\infty(0,L) \times C_0^\infty(0,L) \times C_0^\infty(0,L)$, em virtude de (5.1.19), temos que

$$\int_0^L \left(\hat{f}_6 + \beta \hat{f_{3x}}\right) \overline{\Theta}\, dx = -\int_0^L \kappa_0 \vartheta_x \overline{\Theta_x}\, dx,$$

novamente, da definição de derivada fraca e que $\hat{f}_6 + \beta \hat{f_{3x}} \in L_2$, podemos concluir que $\vartheta \in H^2$. Portanto, temos que $U = (\varphi, \phi_1, \phi, \psi_2, \vartheta, \theta)^T$ cumpre $\mathcal{A}U = F$, como F foi dado arbitrariamente, temos que $\mathcal{A}$ é sobrejetor, mais ainda, é injetor, porque para $F = 0$ o sistema (5.1.9)-(5.1.11), tem apenas uma solução, como o 0 é solução, temos que $ker\mathcal{A} = 0$, isto é, injetividade. Agora, vamos ver que $\mathcal{A}^{-1}$ é contínuo, basta mostrar que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$, porque se $\mathcal{A}U = F$, então $U = \mathcal{A}^{-1}F$. Então, vejamos que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$. De fato, notamos que, $\mathcal{A}U = F$ é equivalente ao sistema (5.1.9)-(5.1.11) e

$$\phi_1 = f_1 \in H_0^1, \phi_2 = f_3 \in V_0^1, \text{ e } \theta = f_5 \in H_0^1. \tag{5.1.20}$$

Então, primeiramente observe que em virtude de (5.1.20), Proposição 2.1.4 e a desigualdade Poincaré, temos que

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\phi_1\|_{L_2}^2 + \rho_2\|\phi_2\|_{L_2}^2 + a\|\theta\|_{L_2}^2 &\leq \rho_1\|f_1\|_{L_2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L_2}^2 + a\|f_5\|_{L_2}^2 \\
&\leq \rho_1 C_p \left(\|f_{1x} + f_3\|_{L_2} + C_p\|f_{3x}\|_{L_2}\right)^2 \\
&\quad + \rho_2 C_p\|f_{3x}\|_{L_2}^2 + aC_p\|f_{5x}\|_{L_2}^2 \\
&\leq 4\rho_1 C_p\|f_{1x} + f_3\|_{L_2}^2 + 4\rho_1 C_p^2\|f_{3x}\|_{L_2}^2 \\
&\quad + \rho_2 C_p\|f_{3x}\|_{L_2}^2 + aC_p\|f_{5x}\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Logo, somando (5.1.12) com (5.1.13) e substituindo Φ_1 por φ, e Φ_2 por ψ, podemos ver que

$$\int_0^L b\psi_x^2\, dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi)^2\, dx \leq \int_0^L |\hat{f}_4 \overline{\varphi}|\, dx + \int_0^L |\left(\hat{f}_2 + \beta f_{5x}\right) \overline{\psi}|\, dx,$$

daí, em vista da desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_0^L b\psi_x^2\,dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)^2\,dx \le \|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\overline{\varphi}\|_{L_2} + \|\hat{f}_2\|_{L_2}\|\overline{\psi}\|_{L_2} + \beta\|f_{5x}\|_{L_2}\|\overline{\psi}\|_{L_2},$$

Logo, tomando em conta a desigualdade de Poincaré, podemos observar que

$$\begin{aligned}\int_0^L b\psi_x^2\,dx + \int_0^L \kappa(\varphi_x+\psi)^2\,dx &\le C_P\|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\varphi_x\|_{L_2} + C_p\left(\|\hat{f}_2\|_{L_2} + \beta\|f_{5x}\|_{L_2}\right)\|\overline{\psi_x}\|_{L_2}\\ &\le C_P\|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\varphi_x+\psi\|_{L_2} + C_P\|\hat{f}_4\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}\\ &\quad +C_{M_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\le C_P\|\hat{f}_4\|_{L_2}\left(\|\varphi_x+\psi\|_{L_2} + C_P^2\|\psi_x\|_{L_2}\right)\\ &\quad +C_{M_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\le C_{M_2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_{M_1}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\le C_{M_3}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

Finalmente, tomando em conta (5.1.14), substituindo Θ por $\vartheta \in H_0^1(0,L)$, podemos ver que

$$\begin{aligned}\int_0^L \kappa_0\vartheta_x^2\,dx &\le \int_0^L |\left(\hat{f}_6 + \beta f_{3x}\right)\overline{\vartheta}|\,dx\\ &\le \|\hat{f}_6\|_{L_2}\|\overline{\vartheta}\|_{L_2} + \beta\|f_{3x}\|_{L_2}\|\overline{\vartheta}\|_{L_2}\\ &\le C_P\|\vartheta_x\|_{L_2}\left(\|\hat{f}_6\|_{L_2} + \beta\|f_{3x}\|_{L_2}\right)\\ &\le C_{M_4}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Logo, ao somar (5.1.21),(5.1.22) e (5.1.23), temos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{M_5}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

daí, em virtude da Proposição 2.1.6, podemos observar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le C_M\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{M_5}\left(\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C(\varepsilon)\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right),$$

assim, tomando ε suficientemente pequeno, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \le C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou seja, $-\mathcal{A}^{-1}$ é continua, portanto $0 \in \rho(\mathcal{A})$. $\square$

Agora, do Lema 4.1.2, existe $\lambda > 0$, tal que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, além disso, como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, em virtude do Teorema 2.1.3, temos que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Logo, dos lemas 5.1.1 e 5.1.2, e que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, estamos nas três hipóteses do Teorema 2.4.3, portanto, o operador linear $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\leq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Finalmente, do Teorema 2.4.4, o problema abstrato de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} & = \mathcal{A}V(t) \quad t > 0 \\ V(0) & = V_0 \end{cases}$$

onde $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \vartheta_0, \theta_0)^T$, tem uma única solução.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, estudamos qualitativamente um sistema de Timoshenko com distintos tipos de dissipação na fronteira. Fizemos uma abordagem via teoria de semigrupos de operadores de classe C_0, considerando modificações específicas nas condições de contorno para cada caso, a fim aplicar a teoria clássica de semigrupos. Baseado nos resultados dos capítulos 3 e 4, é possível observar que a teoria de semigrupos oferece uma forma efetiva, no estudo de existência e unicidade da solução do sistema de Timoshenko e do comportamento assintótico da solução, além de oferecer mais de um abordagem ao estudo mencionado.

Além disso, como é possível observar no Capítulo 3, a teoria de semigrupos permite resolução construtiva do problema, de forma eficaz e bastante compreensível. Conseguimos provar a existência e unicidade da solução ao problema estudado e garantir a estabilidade exponencial, sendo o resultado mais importante neste capítulo, o Teorema 3.2.1, onde estudamos desde a Definição 2.4.4 a estabilidade exponencial da solução do problema correspondente ao capítulo.

As principais contribuições desde trabalho são, os teoremas 4.2.1 e 4.2.2 no Capítulo 4. No primeiro de eles, se estabelece condições nas constantes do sistema para que o conjunto resolvente do gerador infinitesimal contenha a faixa complexa e o segundo é o teorema onde se verifica a estabilidade exponencial da solução do sistema, sujeito as condições de dissipação na fronteira (4.0.4)-(4.0.5).

Outra contribuição importante é a existência e unicidade da solução do sistema de Timoshenko com efeito térmico do tipo II (Capítulo 5), sendo este um problema novo, essencialmente introduzimos um efeito térmico, que não dissipa a energia no sistema apresentado no capítulo 4.

Em trabalhos futuros, pretendemos abordar a estabilidade exponencial do problema apresentado no Capítulo 5, inclusive com mais de um caso de dissipação nas condições de fronteira. Pretendemos abordar também um caso de dissipação para o problema apresentado no Capítulo 3, onde alteramos uma das condições de dissipação com a constante de controle não necessariamente positiva.

REFERÊNCIAS

1 Timoshenko SP. **On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars**, Philosophical Magazine (1921), 41:744-746.

2 A. Soufyane, **Stabilisation de la poutre de Timoshenko**, C. R. Acad. Sci., Paris I 328 (8) (1999) 731–734.

3 J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, **Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability**, J. Math. Anal. Appl. 276 (1) (2002) 248–278.

4 S.A. Messaoudi, B. Said-Houari, **Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III**, J. Math. Anal. Appl. 348 (1) (2008) 298–307.

5 J.E. Muñoz Rivera, H.D. Fernández Sare, **Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation**, Adv. Differential Equations 13 (7–8) (2008) 733–752.

6 Muñoz Rivera, J. E.; **Estabilização de semigrupos e aplicações.** Série de métodos matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

7 Kim, J.U., Renardy, Y.: **Boundary control of the Timoshenko beam.** SIAM J. Control and Optimization 25(6) (1987).

8 Jaime E. Muñoz Rivera, Maria Grazia Naso, **About the stability to Timoshenko system with one boundary dissipation**, Applied Mathematics Letters 86 (2018) 111-118.

9 Maya Bassam, Denis Mercier, Serge Nicaise, Ali Wehbe, **Polynomial stability of the Timoshenko system by one boundary damping**, J. Math. Anal. Appl. 425 (2015) 1177-1203.

10 Lima E. L.; **Espaços Métricos.** Projeto Euclides-IMPA. Edição 3, Volume 1, 1993.

11 Demkowick, L.F, Oden, J.T. **Applied Functional Analysis.** Crc Press, Boca Raton, 1996.

12 Engel,K, Nagel, R. **A short Course on Operator Semigroups. Springer.** New York, 2006.

13 Pazy, A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations** , Springer-Verlag, New York, 1983.

14 Carvalho A. N.; **Análise Funcional II. Notas de aula**- Universidade de São Paulo, 2007.

15 Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Universitext, Springer New York, 2010.

16 Kreysizg, E.; **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley Classics Library, 1989.

17 Adams, R.A, Fournier, J.J.F. **Sobolev Spaces.** Vol. 140, Pure and Applied Mathematics. (2003). Science, 2003.

18 Cavalcanti, M.M, Cavalcanti, V.N.D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**.Eduem, Maringá, 2009.

19 Lawrence C. Evans, **Partial differential equations, second ed.**, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002).

20 J-L. Lions, R.**Functional and Variational Methods-Springer** Dautray - Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 2 (2000).

21 Lilian Paola Romero Paredes, Semigrupos de operadores e aplicações, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" 2022.

22 Félix Gregorio Pariona Vilca, **Estabilidad lineal del sistema de Timoshenko Lima** – Perú 2015.

23 Zheng S. **Nonlinear Evolutions Equations**, Chapman Hall/CRC , 2004.

24 J. Prüss, **On the spectrum of C_0-semigroups.** Trans. AMS 184 (1984), 847-857.

25 Loudini, Malik. **Timoshenko Beam Theory based Dynamic Modeling of Lightweight Flexible Link Robotic Manipulators.** Advances in Robot Manipulators, Ernest Hall (Ed.), ISBN 978-953-307-070-4, ano 2010.

26 Socorro Rangel. **Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira**.

27 Hugo D. Fernández Sare, **Propriedades Assintóticas e problemas inversos para sistemas de Timosheko.** Rio de Janeiro. 2006.

28 Mohammad A., Yacine C., Mouhammad G and Ali W. **Stability and controllability results for a Timosheko system.** arXiv:1901.03303v2 [math.AP], 2019.

29 C. Henry, David E. Penney, **Ecuaciones diferenciales y problemas com valores en la frontera**, cuarta idición, ISBN: 978-970-26-1285-8.

30 Denis M. Virginie R. **Decay Rate Of The Timoshenko System with one boundary damping.** 2019. doi:10.3934/eect.2019021.

31 M. Carme Leseduarte, Antonio Magaña and Ramón Quintanilla, **On the time decay of solutions in porous-thermo-elasticity of type II**. Departament de Matemàtica Aplicada 2, ETSEIAT–UPC, C. March 2010, 13(2): 375-391.