

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Giulia Carvalho Fritis

Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não  
estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma

Juiz de Fora

2023

**Giulia Carvalho Fritis**

**Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não  
estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática aplicada

Orientador: Prof. Dr Grigori Chapiro

Coorientador: Dr. Pavel Zenon Sejas Paz

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fritis, Giulia Carvalho.

Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma / Giulia Carvalho Fritis. – 2023.

109 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Pavel Zenon Sejas Paz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2023.

1. Problema de Riemann. 2. Meio poroso. 3. Leis de conservação. 4. Existência e unicidade. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Paz, Pavel Sejas, coorient. III. Título.

Giulia Carvalho Fritis

**Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 17 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Grigori Chapiro** - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Pavel Sejas Paz** - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Frederico da Cunha Furtado**  
U. Wyoming (EUA)

**Profª. Drª. Yulia Petrova**  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio

**Prof. Dr. Adolfo Puime Pires**  
Universidade Nacional do Norte Fluminense - UENF

Juiz de Fora, 20/03/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Grigori Chapiro, Professor(a)**, em 20/03/2023, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pavel Zenon Sejas Paz, Usuário Externo**, em 21/03/2023, às 07:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Adolfo Puime Pires, Usuário Externo**, em 21/03/2023, às 10:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico da Cunha Furtado, Usuário Externo**, em 21/03/2023, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Juliia Petrova, Usuário Externo**, em 24/03/2023, às 10:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1193677** e o código CRC **2E1E945A**.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família pelo apoio oferecido durante todo o mestrado, em particular aos meus irmãos: Guilherme, Alexandre e Giovanna.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Grigori Chapiro, pela ajuda e ensinamentos passados ao longo dos últimos anos. Ao meu coorientador, Dr. Pavel Paz, sem o qual esse trabalho não teria se concretizado. Ao Dr. Luis Lozano por toda a assistência fornecida durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos membros da banca, Prof. Dr. Frederico Cunha Furtado, Prof. Dr. Adolfo Pires e Profa. Dra. Yulia Petrova, pelas diversas e valiosas contribuições que melhoraram a escrita deste texto.

Agradeço aos meus amigos, Luca Gaio e Vitor Rocha, por toda ajuda e descontração oferecida ao longo dos últimos anos.

Agradeço às demais pessoas que tornaram esse trabalho possível e não foram citadas.

Este trabalho foi realizado em associação com o projeto de P&D registrado como ANP 20715-9, “Modelagem matemática e computacional de injeção de espuma usada em recuperação avançada de petróleo” (Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF / Shell Brasil / ANP), apoiado pela Shell Brasil sob o ANP P&D como “Compromisso de Investimentos com Pesquisa e Desenvolvimento”. Este projeto foi realizado em parceria com a Petrobras.

## RESUMO

Motivado pelo deslocamento de espuma em meios porosos com adsorção linear, estendemos trabalhos já existentes para o escoamento bifásico contendo um traçador ativo descrito por um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico. Resolvemos o problema de Riemann correspondente, apresentando possíveis sequências de ondas que compõem a solução. Apresentamos condições necessárias e suficientes para garantir a compatibilidade de tais ondas, demonstrando a existência de uma solução global. Classificamos as soluções no plano de fase contendo todos os possíveis estados à esquerda e à direita conectados por uma sequência de ondas compatíveis. Indicamos onde a solução é única e onde existem duas sequências de ondas compatíveis diferentes. Apresentamos o modelo implementado no CMG-STARS descrevendo o deslocamento de espuma em meios porosos com adsorção e verificamos que ele satisfaz as propriedades necessárias para aplicar a teoria desenvolvida. Todas as soluções analíticas apresentadas neste trabalho obtiveram bons resultados quando comparadas com simulações numéricas. Apresentamos regiões de parâmetros onde o modelo do CMG-STARS possui uma falta de unicidade da solução no plano de fase, levando a uma perda de estabilidade estrutural. Mostramos também que este modelo é bem posto no sentido de Hadamard, podendo apresentar oscilações numéricas devido à perda de estabilidade estrutural. Apresentamos condições para termos um banco de surfactante ótimo, formado por dois problemas de Riemann, e avaliamos o impacto da adsorção.

Palavras-chave: Problema de Riemann. Meio poroso. Leis de Conservação. Espuma.

## ABSTRACT

Motivated by the foam displacement in porous media with linear adsorption, we extended the existing framework for the two-phase flow containing an active tracer described by a non-strictly hyperbolic system of conservation laws. We solved the corresponding Riemann problem by presenting possible wave sequences that composed this solution. We presented necessary and sufficient conditions to guarantee the compatibility of such waves demonstrating the existence of a global solution. We classify the solutions in the phase plane containing all possible left and right states connected by a compatible wave sequence. We point out where the solution is unique and where two different compatible wave sequences exist. We present the CMG-STARS model describing foam displacement in porous media with adsorption and verify that it satisfies the properties necessary for the developed theory. All analytical solutions presented in this model match with direct numerical simulation results. We show parameter regions where the CMG-STARS model presents a lack of solution uniqueness in the phase-plane, yielding the loss structural stability. We also show that this model is well-posed in the Hadamard sense, being able to presents numerical oscillations due to structural instability. We present conditions to establish a chemical optimal slug composed by two Riemann problems, and evaluating the impact of the adsorption in it.

Keywords: Riemann problem, Porous media, Conservation laws, Foam.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Interseção entre características no plano $x-t$ [76]. . . . .	25
Figura 2	– Curvas características se abrindo em $x = 0$ no plano $x-t$ . . . . .	27
Figura 3	– À esquerda temos o perfil de $f$ (2.33) e à direita o perfil de sua derivada. . . . .	30
Figura 4	– Cenário das três possíveis soluções da equação de Buckley-Leverett. No painel da esquerda, temos a ocorrência de uma rarefação; no painel central, a ocorrência de um choque; e no painel da direita, a solução é dada por uma rarefação seguida de um choque. . . . .	31
Figura 5	– Curvas características para Eq. (2.66) com $a > 0$ . . . . .	39
Figura 6	– Estrutura das bolhas. Fonte: Adaptado de Farajzadeh et al. (2012). . . . .	47
Figura 7	– Derivada segunda da $f$ em relação a $S$ para diferentes valores de $C$ . O painel da direita é um zoom do painel esquerdo para $\partial_{SS}f$ entre $-0.05$ e $0.05$ . . . . .	54
Figura 8	– Função de fluxo fracionário com o ponto de inflexão de secante ligando $(-\mathcal{A}, 0)$ a $(S^*, f(S^*, C))$ , cuja inclinação coincide com $\partial_S f(S^*, C)$ . . . . .	58
Figura 9	– Plano de fase composto pelos conjuntos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ , e separados pela curva $\mathcal{T}$ . . . . .	58
Figura 10	– Plano de fase com a curva de transição (linha preta contínua) e curvas $\lambda_C(U) = \text{constante}$ (linhas vermelhas contínuas) para três valores de $U$ . . . . .	61
Figura 11	– Representação geométrica de $S^k(U)$ para um estado $U$ fixado. É obtido através da interseção da secante tracejada conectando $(-\mathcal{A}, 0)$ a $(S, f(U))$ e a função de fluxo fracionário $f(\cdot, C)$ . . . . .	66
Figura 12	– Comparação geométrica entre a velocidade final da $C$ -onda (inclinação da reta preta tracejada) e a velocidade inicial da $S$ -onda (inclinação da reta vermelha). O painel esquerdo apresenta o caso $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ . O painel à direita representa o caso $S_R > S^k(U_M)$ . . . . .	68
Figura 13	– Representação geométrica do caso onde $S^k(U_M) = +\infty$ . A reta preta tracejada representa $\lambda_C(U_M)$ e a reta vermelha tracejada, representa a velocidade do choque $v_i^s$ . . . . .	68



Figura 14 – Função de fluxo fracionário para $C_L < C_R$ com os estados $(S_2, f(S_2, C_R))$ , $(S_R^*, f(S_R^*, C_R))$ e $(S_1, f(S_1, C_L))$ . . . . .	71
Figura 15 – Conjuntos $\mathcal{L}_i$ com $i = 1, 2, 3$ , no plano de fase seguindo as Eqs. (4.62)-(4.64). . . . .	74
Figura 16 – Solução no plano de fase para $U_R \in \mathcal{L}_1$ e a solução do estado intermediário $U_M$ definido na Eq. (4.65). . . . .	74
Figura 17 – Solução para o caso $U_R \in \mathcal{L}_2$ e a posição dos estados intermediários $U_2$ e $U_1$ definidos na Eq. (4.66) e (4.67), respectivamente. . . . .	75
Figura 18 – Construção da solução para o caso $U_R \in \mathcal{L}_3$ e a posição do estado intermediário $U_M$ definido na Eq. (4.68). . . . .	75
Figura 19 – Conjuntos $\mathcal{R}_i$ com $i = 1, 2, 3$ no plano de fase seguindo as Eqs. (4.70)-(4.72). . . . .	76
Figura 20 – Solução no plano de fase para $U_R \in \mathcal{R}_1$ e os estados intermediários $U_1 = U_T$ e $U_2$ definidos nas equações (4.73) e (4.74). . . . .	76
Figura 21 – Solução no plano de fase para $U_R \in \mathcal{R}_2$ e os estados intermediários $U_2$ e $U_1$ definidos nas equações (4.75) e (4.76). . . . .	77
Figura 22 – Construção da solução no plano de fase para $U_R \in \mathcal{R}_3$ e a posição do estado intermediário $U_M$ definido na Eq. (4.77). . . . .	77
Figura 23 – Regiões de classificação no plano de fase para $U_L = (10^{-3}, 0.1)$ . . . . .	78
Figura 24 – Regiões de classificação no plano de fase para $U_L = (0.999, 0.9)$ . . . . .	78
Figura 25 – Funções de fluxo fracionários dos estados $U_L$ e $U_R$ com a reta secante ligando $(-\mathcal{A}, 0)$ com $(S_L, f(U_L))$ . Os pontos $(S_1, f(U_1))$ e $(S_2, f(U_2))$ se encontram sobre a mesma secante (linha tracejada preta) que conecta $(-\mathcal{A}, 0)$ e $(S_L, f(U_L))$ . . . . .	79
Figura 26 – Perfil da solução para $U_L = (0.15, 0.4)$ e $U_R = (0.22, 0.1975)$ , com $U_R \in \mathcal{L}_1$ . O painel esquerda mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.4 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.1. O tempo adotado foi $t = 0.3$ . . . . .	80
Figura 27 – Duas sequências de ondas são possíveis quando temos $U_L \in \mathcal{L}$ e $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ : uma conecta $U_L$ a $U_M^1$ através de uma $C$ -onda, então $U_M^1$ a $U_R$ por uma $S$ -onda. A outra conecta $U_L$ a $U_M^2$ por uma $S$ -onda, e então $U_M^2$ a $U_R$ através de uma $C$ -onda. . . . .	81

- Figura 28 – Perfil da solução para  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ , com  $C_L < C_R$ . O painel esquerdo mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.1, e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. Essa figura foi feita considerando  $U_L = (0.15, 0.4)$ ,  $U_R = (0.3636, 0.7273)$  e tempo  $t = 0.3$ . . . . . 82
- Figura 29 – Perfil da solução para  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ , com  $C_L > C_R$ . O painel esquerdo mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.1 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. Essa figura foi feita para  $U_L = (0.15, 0.4)$ ,  $U_R = (0.3384, 0.3)$  e tempo  $t = 0.3$ . . . . . 82
- Figura 30 – Perfil da solução para  $U_L = (0.6, 0.1976)$  e  $U_R = (0.3636, 0.7273)$ , onde  $U_R \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$ . O painel esquerdo apresenta a solução descrita pela Lema 4.1.3 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. A simulação foi feita considerando o tempo  $t = 0.5$ . . . . . 83
- Figura 31 – Soluções no plano  $x-t$  para os casos apresentados nas Seções **4.3.1** (painel esquerdo), **4.3.2** (painel central) e **4.3.3** (painel direito). 83
- Figura 32 – Comparação entre as soluções numéricas (linhas tracejadas) e analíticas (linhas contínuas) da saturação de água  $S$  (azul) e concentração do surfactante  $C$  (preto). O painel esquerdo corresponde a  $U_L = (0.1, 0.05)$ ,  $U_R = (0.99, 0.5)$ , e tempo  $t = 0.5$ . O painel direito corresponde a  $U_L = (0.99, 0.5)$ ,  $U_R = (0.01, 0)$  e  $t = 0.3$ . . . . . 85
- Figura 33 – Perfis da saturação da água no tempo  $t = 3$  para o estado à esquerda  $U_L = (0.15, 0.4)$  e depois estados à direita próximos  $U_{R-} = (0.360, 0.7273)$  e  $U_{R+} = (0.367, 0.7273)$ , que se encontram em uma vizinhança da interseção  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ . . . . . 86
- Figura 34 – Representação esquemática dos problemas de Riemann  $RP_1$  e  $RP_2$ . . . . . 89
- Figura 35 – Classificação do plano de fase para  $U_L^2$ . . . . . 90
- Figura 36 – Classificação do plano de fase para o caso de imbibição para  $U_L^1 = (0.999, 0.5)$ . . . . . 91
- Figura 37 – Os perfis da saturação de água e saturação de surfactante obtida pelo RCD para os tempos  $t = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$  para  $U_L^2 = (10^{-3}, 0)$ ,  $U_R^2 = U_L^1 = (0.999, 0.1)$ ,  $U_R^1 = (0.8, 0)$ . . . . . 94

- Figura 38 – O painel esquerdo representa a função de fluxo fracionário com os pontos  $(S, f(U))$  para os estados  $U_R^2$  e  $U_R^{2'}$ , e a reta secante que os conecta a seus respectivos pontos intermediários  $(S_{CV}, f(U_{CV}))$ . Foram tomados dois valores para o estado à direita,  $S_R^2 = 0.6$  e  $S_R^{2'} = 1$  com  $C_R^2 = 0.1 = C_R^{2'}$ . O painel direito representa a velocidade da frente do gás e do surfactante como função de  $S_R^1$  para  $C_L^1 = 0.1$ . . . . . 95
- Figura 39 – Tamanho do banco de surfactante em função da concentração de surfactante. . . . . 96
- Figura 40 – Perfil da saturação da água (em azul) e da concentração do surfactante (em preto) para  $U_L^1$ ,  $U_R^1$  e  $U_L^2$ . O painel esquerdo representa as soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (linha tracejada) para os tempos de injeção  $T_2 = 0.3$  e  $T_1 = 3.2187$ . O painel direito representa a solução numérica para o tempo  $t = 0.9917$ . . . . . 96
- Figura 41 – Tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$ . . . . . 97
- Figura 42 – O painel esquerdo representa o banco de surfactante para  $K_d^a = 0$ , onde obtemos  $T_{surf} = 1.5605$ . O painel direito representa o banco de surfactante para  $K_d^a = 1$ , onde obtemos  $T_{surf} = 28.7222$ . Em ambos os painéis, o tempo de injeção da drenagem foi  $T_2 = 0.3$ . . . . . 98

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de parâmetros utilizados. Fontes: [15, 75, 36]. . . . .	53
--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EOB	Recuperação avançada de petróleo
CMC	Concentração crítica de miscelas
EDO	Equações diferenciais ordinárias
EDP	Equações diferenciais parciais
RCD	Solver Reaction Convection Diffusion Equations
LAMAP	Laboratório de matemática aplicada

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Interseção de conjuntos
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$	Derivadas parciais com respeito a $x$ e $t$
$\lambda_p$	Autovalor $p$
$r_p$	Autovetor $p$
$U_0(x)$	Condição inicial
$\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$	Classes de diferenciabilidade 1, 2 e $+\infty$
$u^-, u^+$	Estado à esquerda e à direita da descontinuidade
$U_L, U_R$	Condição à esquerda e à direita do problema de Riemann
$\nabla$	Gradiente
$w, g$	Subíndices das fases aquosa e gasosa
$S_w, S_g$	Saturações das fases
$S$	Saturação da fase aquosa adimensional e normalizada
$f_w, f_g$	Funções de fluxo fracionário das fases
$f$	Função de fluxo fracionário da fase aquosa adimensional
$C_s^w$	Concentração de surfactante na fase aquosa
$C_s^s$	Concentração de surfactante na rocha
$C$	Concentração de surfactante na fase aquosa adimensional e normalizado
$S_{wc}, S_{gr}$	Saturações residuais da fase aquosa e gasosa
$\varphi$	Porosidade
$k$	Permeabilidade do meio poroso
$k_{rw}, k_{rg}$	Permeabilidades relativas das fases
$k_{rg}^f$	Permeabilidade relativa do gás na presença de espuma
$\lambda_w, \lambda_g$	Mobilidades das fases
$P_c$	Pressão capilar
$u_w, u_g$	Velocidades superficiais das fases
$\rho_w$	Densidade da água
$\rho_s$	Densidade da rocha
$K_d^a$	Coefficiente de Henry
$FM$	Fator de redução de mobilidade

$L$	Comprimento do meio poroso
$\mu_w, \mu_g$	Viscosidade das fases
$f_{mmob}$	Fator de redução de mobilidade de referência
$epdry$	Declive dos efeitos de secagem
$fmdry$	Saturação crítica da água
$fmsurf$	Concentração crítica de surfactante
$epsurf$	Expoente
$I$	Intervalo $[0, 1]$
$\mathcal{T}$	Curva de transição
$\mathcal{L}$	Conjunto à esquerda da curva de transição
$\mathcal{R}$	Conjunto à direita da curva de transição
$\sigma$	Velocidade de propagação da descontinuidade

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1	Revisão bibliográfica . . . . .	19
1.2	Organização do texto . . . . .	21
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1	Leis de Conservação . . . . .	22
<b>2.1.1</b>	<b>Lei de Conservação escalar . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1.1.1	Ondas de choque . . . . .	24
2.1.1.2	Ondas de rarefação . . . . .	26
<b>2.1.2</b>	<b>Equação de Buckley-Leverett . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Sistema de Leis de Conservação não Linear . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1.3.1	Ondas de choque . . . . .	32
2.1.3.2	Ondas de contato . . . . .	34
2.1.3.3	Ondas de rarefação . . . . .	36
2.1.3.4	Construção da solução geral de um problema de Riemann . . . . .	37
2.2	Métodos numéricos para EDP . . . . .	38
<b>2.2.1</b>	<b>Condições de fronteira . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Esquemas de diferenças finitas . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Convergência, consistência e estabilidade . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DO TRANSPORTE DE ESPUMA EM MEIOS POROSOS COM ADSORÇÃO LINEAR DO SURFACTANTE . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1	Escoamento em meios porosos . . . . .	44
<b>3.1.1</b>	<b>Escoamento bifásico . . . . .</b>	<b>46</b>
3.2	Espumas em meio poroso . . . . .	46
3.3	Propriedades da função de fluxo fracionário . . . . .	48
3.4	Modelo do transporte de espuma em meios porosos com adsorção linear do surfactante . . . . .	49
3.5	Modelo CMG-STARS . . . . .	51
<b>3.5.1</b>	<b>Verificação das propriedades da função de fluxo fracionário . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE RIEMANN . . . . .</b>	<b>56</b>
4.1	Ondas fundamentais . . . . .	58



4.1.1	Ondas de rarefação . . . . .	59
4.1.2	Ondas de choque e de contato . . . . .	59
4.1.3	Critério de admissibilidade . . . . .	61
4.1.4	Função entropia . . . . .	63
4.2	Construção da solução do problema de Riemann . . . . .	65
4.3	Sobre a unicidade da solução . . . . .	78
4.3.1	Interseção entre os conjuntos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ . . . . .	79
4.3.2	Interseção entre os conjuntos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_3$ . . . . .	80
4.3.3	Interseção entre os conjuntos $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_3$ . . . . .	81
4.3.4	Unicidade no plano $x-t$ . . . . .	83
4.4	Comparação da solução analítica com aproximação numérica . . . . .	84
<b>5</b>	<b>BANCO DE SURFACTANTE . . . . .</b>	<b>88</b>
5.1	Drenagem/ $RP_2$ . . . . .	90
5.2	Imbibição/ $RP_1$ . . . . .	91
5.3	Banco de surfactante ótimo . . . . .	92
5.4	Impacto da adsorção . . . . .	97
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>100</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>103</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é investigar o banco de surfactante para a recuperação avançada de petróleo (Enhanced Oil Recovery - EOR). Neste estudo, descrevemos o banco de surfactante como um processo de imbibição, seguido por uma drenagem para formação de espuma. Para descrever esses processos, adotamos um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico considerando a adsorção linear do químico na rocha, também conhecida como adsorção de Henry. Os processos de drenagem e imbibição podem ser descritos por problemas de Riemann associados ao sistema de leis de conservação. Por esse motivo, dedicamos grande parte deste trabalho à obtenção da solução global do problema de Riemann. Nesse estudo, usamos a função de fluxo fracionário implementada no simulador comercial CMG-STARs, que descreve a textura da espuma em equilíbrio local como função do químico. Comparamos a solução analítica obtida com aproximações numéricas realizadas pelo Reaction Convection Diffusion Equations Solver (RCD), obtendo excelentes resultados. Além disso, foi possível avaliar o impacto da adsorção do surfactante na rocha porosa durante o banco de surfactante. Este trabalho foi motivado pelo interesse da indústria de petróleo em determinar a menor quantidade de químico/surfactante necessário para evitar a formação de *viscous fingering* e a avaliação da influência da adsorção no banco de surfactante.

O processo de recuperação de petróleo pode ser dividido em três fases: recuperação primária, recuperação secundária e recuperação terciária. A recuperação primária ocorre assim que o poço de petróleo é perfurado, onde a diferença de pressão entre o reservatório e a superfície mobiliza o petróleo. A recuperação secundária consiste na injeção de fluidos, como água ou gás, visando manter a pressão do reservatório alta o suficiente para que a recuperação de petróleo continue. Recuperação terciária pode ser descrita como qualquer técnica aplicada após a recuperação secundária. Nosso interesse neste trabalho se encontra no estudo de um método de EOR, definida como a injeção de materiais que normalmente não estão presentes no reservatório. Dessa forma, métodos de EOR não estão restritos a uma das fases de extração, podendo se enquadrar como um método secundário ou terciário [47]. Podemos destacar como métodos de EOR a injeção de gás [47], a

injeção térmica como combustão in-situ [11, 12, 20], e a injeção química como a injeção de polímero [37, 39] ou a injeção de espuma [46, 85, 41, 73, 21, 26]. Essa última é tratada neste trabalho.

Utilização de injeção de gás para EOR possui alta eficiência, porém é reduzida devido à heterogeneidade do reservatório, gradientes gravitacionais e instabilidades. O uso de espumas pode ajudar na solução de todos os três problemas encontrados na varredura do gás [3]. Em particular, o uso apropriado de espumas para EOR resulta em uma significativa redução da mobilidade da fase gasosa. Dessa forma, uma grande parcela da espuma fica presa no meio poroso, resultando em um desvio de uma parte do fluido subsequente para uma camada com permeabilidade mais baixa ou mais alta saturação de óleo, levando a uma melhor varredura da espuma por todo o meio poroso [41].

Ao tratar da utilização de espuma no auxílio do EOR, uma propriedade importante é a textura da espuma, que pode ser definida como a quantidade de bolhas por unidade de volume [33]. Existem diversas maneiras de descrever a evolução da textura de espuma, onde se classificam os modelos em dois grupos: **empíricos e mecanicistas**. Os modelos mecanicistas consideram que a textura de espuma é descrita de forma explícita, possuindo uma equação diferencial à parte responsável pela modelagem do fluxo, geração e destruição de bolhas no meio poroso. Esses modelos apresentaram bons resultados quando comparados com dados experimentais [6, 25, 45, 65] e podem ser estudados via ondas viajantes [2, 80, 53]. Nos modelos empíricos a textura da espuma aparece de forma implícita, onde seus efeitos no escoamento são representados através de uma modificação do termo responsável pela mobilidade das fases. Embora esse modelo possua uma física mais simples, em compensação obtemos uma maior estabilidade numérica [42]. A relação entre a redução da mobilidade e a saturação é obtida através de dados experimentais. Esses modelos em geral são estudados via leis de conservação, onde podemos citar como exemplos [82, 70, 61, 27]. Destacamos que o modelo adotado neste trabalho é empírico.

A espuma possui uma estrutura que não é termodinamicamente estável, sendo necessário adicionar surfactantes para possibilitar a formação de bolhas, reduzindo a tensão interfacial entre a água e o gás [77]. Após injeção de uma

solução contendo surfactante no meio poroso, ocorre o processo de adsorção do surfactante, onde suas moléculas se instalam nas paredes do meio poroso. Tais perdas têm potencial de desestabilizar a espuma, além de poder tornar tal processo economicamente inviável [9]. Portanto, é vital entender como o processo de adsorção evolui durante o EOR para determinar sob quais condições a espuma se mantém durante toda a injeção.

A obtenção de soluções analíticas é altamente valorizada na indústria do petróleo, pois possibilita a validação de simuladores, além de fornecer informações importantes sobre: a velocidade de propagação dos fluidos, o tempo de *breakthrough*, e a dependência desses valores com os parâmetros.

### 1.1 Revisão bibliográfica

O interesse no estudo da injeção de espuma em meios porosos vem aumentando nos últimos anos devido a suas aplicações: como na indústria petrolífera [60] e recuperação de solos contaminados [34, 78]. O estudo da injeção de espuma é desafiador devido à sua relação com processos químicos e ao comportamento não newtoniano da espuma [23, 44]. Na literatura existem diversos trabalhos que investigam o transporte e o processo geração e destruição de bolhas; onde podemos citar como trabalhos experimentais [65, 16, 33, 13], e entre os trabalhos numéricos [14, 41, 24]. Por outro lado, modelos matemáticos que descrevem o transporte de espuma são mais escassos, onde podemos citar [46, 85, 41, 2, 80, 53], nos quais é descrita a evolução das bolhas durante o deslocamento.

Ao investigar modelos descrevendo o transporte de químicos em meios porosos com a presença de óleo, podemos citar os trabalhos [37, 39, 38, 72], onde é apresentada a construção da solução do problema de Riemann. Nos trabalhos de Isaacson [37], Isaacson & Temple [38] e Temple [72], é modelado o fluxo bifásico de água com polímero e óleo em meios porosos sem considerar a adsorção do polímero. Dessa forma, podemos ver o atual trabalho como uma extensão dessas investigações. No trabalho de Johansen & Winter [39], é descrito o fluxo bifásico de água com polímero e óleo em meios porosos, o qual considera a adsorção não-linear de Langmuir do polímero na rocha; porém esta teoria não foi aplicada para o caso linear aqui considerado. Em ambos os modelos não há presença de

espuma, resultando em diferentes propriedades do químico sobre o fluxo, e assim em diferentes hipóteses para construir a solução do problema.

Nos restringindo à procura de trabalhos que se assemelham ao atual do ponto de vista matemático, podemos citar os trabalhos [5, 17]. Ambos apresentam a solução do problema de Riemann para o fluxo bifásico de água e óleo, onde descrevem os efeitos da temperatura da água. Apesar da diferente física considerada, tais trabalhos possuem uma estrutura similar ao aqui apresentado no contexto de leis de conservação.

Apesar das diferenças entre os trabalhos [37, 39, 17, 38, 72], todos possuem uma propriedade em comum: ao considerar que a concentração do químico ou a temperatura são constantes, recaímos na equação de Buckley-Leverett. Tal propriedade é interessante, pois possibilita utilizar a teoria apresentada no trabalho de Buckley-Leverett [8]. O trabalho atual usufrui desta propriedade.

Conforme apresentado, a principal diferença entre o atual trabalho e os citados acima são consequência da física representada pelo modelo. Tais diferenças são refletidas diretamente sobre a função de fluxo fracionário e suas propriedades. Neste trabalho, adotamos a função de fluxo fracionário implementada no simulador comercial CMG-STARS, que representa os efeitos da espuma em equilíbrio local através do termo de redução da mobilidade do gás. O simulador CMG-STARS pode ser citado como um dos melhores simuladores de reservatório para processos térmicos e químicos [74]. Também é reconhecido por sua capacidade de representar processos químicos complexos em escala experimental e de campo [57].

Nos trabalhos [63, 29] é investigado a estabilidade estrutural de problemas de Riemann associados à sistemas de leis de conservação. Nesse contexto, o problema de Riemann é dito estruturalmente estável quando perturbações nos dados iniciais e no fluxo não alteram a quantidade e o tipo de ondas que compõem a solução. Neste trabalho, mostramos que existem regiões de parâmetros onde o modelo implementado no simulador CMG-STARS para espuma apresenta uma perda de estabilidade estrutural.

Consideramos o banco de surfactante como o processo de imbibição, onde injetamos a fase aquosa no meio poroso a uma determinada concentração de surfactante, seguido por um processo de drenagem, onde injetamos gás no meio

porosos visando a formação de espuma. Na literatura, encontram-se [59, 4, 32] como trabalhos relacionados a bancos de químicos. Ribeiro [59] estudou o deslocamento de óleo por um banco de polímero, definido como um volume fixo de solução aquosa contendo polímero, considerando três tipos de adsorção de moléculas de polímero na rocha (de Henry, Côncava e de Langmuir). Em todos os casos, a introdução do banco de polímero recupera mais petróleo do que a injeção de água pura. Também é possível observar como o banco de polímero tem seu tamanho reduzido devido à adsorção do químico nas paredes da rocha. No trabalho de Bakharev [4], a mesma definição de banco de polímero é adotada, onde encontraram que seu tamanho ideal vem de uma injeção sequencial de polímero, reduzindo sua concentração à cada injeção. Esse processo visa minimizar a concentração e maximizar a eficiência de varredura.

Podemos destacar como contribuições deste trabalho a obtenção da solução global do problema de Riemann de um modelo descrevendo uma física pouco estudada na literatura, fazendo uso da função de fluxo fracionário implementada em um dos maiores simuladores de geociência de reservatório [74]. Entre os poucos trabalhos encontrados na literatura que utilizam o modelo implementado no CMG-STARS, podemos citar [70, 71].

## 1.2 Organização do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre leis de Conservação e métodos numéricos baseados em diferenças finitas para resolver EDP. No Capítulo 3 apresentamos a modelagem matemática para escoamento de fluidos em meios porosos adotada. No Capítulo 4 é apresentado o sistema de leis de conservação adotado para descrever o fluxo de espuma em meio poroso, a construção da solução global do problema de Riemann, um estudo relacionado à perda de unicidade da solução e, finalmente, comparação entre a solução analítica com simulação numérica. No Capítulo 5 é apresentado o comportamento do banco de surfactante, e condições para se obter o banco de surfactante ótimo.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão dos principais conceitos relacionados a leis de conservação e métodos numéricos que serão usados ao longo deste trabalho.

### 2.1 Leis de Conservação

Leis de conservação são Equações Diferenciais Parciais (EDP) que representam a conservação de uma variável, podendo ser uma quantidade (como massa) ou um estado (como energia ou momento) [50]. Para o caso unidimensional, podemos descrever um sistema de  $n$  leis de conservação como

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}F(U(x, t)) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $(x, t) \in Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ,  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A função  $F$  recebe o nome de função de fluxo para o sistema (2.1).

Podemos reescrever o sistema (2.1) na forma

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad (2.2)$$

onde  $A(U) = JF(U)$  é a matriz Jacobiana de  $F$ . Denotamos por  $\lambda_i(U)$  o  $i$ -ésimo autovalor associado à matriz  $A(U)$ , de forma que  $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$ . Os autovetores correspondentes serão denotados por  $r_i(U)$  para  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ . Utilizamos o termo " $p$ -ésima família",  $1 \leq p \leq n$ , para nos referir ao par de  $p$ -ésimo autovalor/autovetor da matriz  $A(U)$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que o sistema (2.2) é **hiperbólico** se a matriz  $A(U)$  é diagonalizável com autovalores reais. Caso os autovalores sejam distintos, isto é,  $\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \dots < \lambda_n(U)$  para todo  $U(x, t)$  que satisfaz (2.2), dizemos que o sistema é **estritamente hiperbólico** [18].

Para obter uma solução para o sistema (2.1), é necessário associar o mesmo a um dado inicial e possivelmente, condições de fronteira. Em geral, trabalhamos com o problema de valor inicial (PVI), ou problema de Cauchy, no qual (2.1) vale

para todo  $(x, t) \in Q$  com a condição inicial

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

**Definição 2.2.** Dizemos que  $U(x, t)$  é uma **solução clássica para o problema de Cauchy** quando  $U(x, t)$  é de classe  $\mathcal{C}^1(Q)$  e satisfaz (2.1) e a condição (2.3) para todo  $(x, t) \in Q$  [50].

O **problema de Riemann** centrado em  $x = 0$  é um caso particular do problema de Cauchy, onde consideramos o sistema (2.1) associado ao dado inicial na Eq. (2.3) da forma:

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < 0, \\ U_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $U_L$  e  $U_R$  são constantes. A constante  $U_L$  é chamada de estado à esquerda (ou condição de injeção) e  $U_R$  de estado à direita (ou condição inicial).

**Definição 2.3.** Uma **Solução Fraca** para o problema de Cauchy (2.1), (2.3) é uma função  $U \in L^1_{Loc}(Q)$  tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(x, t)\phi_t + F(U(x, t))\phi_x] dxdt + \int_{-\infty}^\infty U_0(x)\phi(x, 0)dx = 0, \quad (2.5)$$

para toda função teste  $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $\mathcal{C}^\infty(Q)$  com suporte compacto (ver [67] para mais detalhes).

### 2.1.1 Lei de Conservação escalar

Como o nome sugere, leis de conservação escalares são um caso particular de sistemas de leis de conservação para  $n = 1$ , onde a solução  $u$  agora tem como contradomínio  $\mathbb{R}$ . Inicialmente, assumimos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  e  $f'' > 0$ . Consideramos o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde agora  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ .



Seja  $u \in C^1(Q)$  solução clássica de (2.6). Seja  $x_0$  dado inicial para o problema

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x, t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.7)$$

Uma vez que  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , temos que (2.7) possui uma única solução [68], que chamamos de **curva característica**. Ao longo dessa curva temos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + f'(u)u_x = 0. \quad (2.8)$$

Portanto,  $u$  é constante ao longo das curvas características.

Uma vez que  $u$  é constante ao longo dessas curvas,  $f(u)$  também o é, implicando que

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x(t), t)) = f'(u(x_0, 0)) = f'(u_0(x_0)). \quad (2.9)$$

Assim, as curvas características são retas no plano  $x - t$  com inclinação  $f'(u_0(x_0))$ .

### 2.1.1.1 Ondas de choque

Sejam  $u$  a densidade e  $f$  o fluxo de massa correspondente. Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  (com  $a < b$ ), temos o seguinte balanço de massa:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + [f(u(b, t)) - f(u(a, t))] = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.10)$$

Se  $u$  e  $f$  são suaves, segue do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b [u_t + (f(u))_x] dx = 0. \quad (2.11)$$

Como a equação acima vale para todo  $a < b$ , concluímos que  $u_t + (f(u))_x = 0$ .

Suponhamos agora que  $u$  é descontínuo através de uma curva suave  $x(t)$  e a equação  $u_t + (f(u))_x = 0$  é satisfeita em ambos os lados dessa curva. Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \left[ \int_a^{x(t)^-} u(x, t) dx + \int_{x(t)^+}^b u(x, t) dx \right], \\ &= \int_a^{x(t)^-} u_t dx + \frac{dx}{dt} u(x(t)^-, t) + \int_{x(t)^+}^b u_t dx - \frac{dx}{dt} u(x(t)^+, t), \\ &= \int_a^{x(t)^-} u_t dx + \int_{x(t)^+}^b u_t dx + \frac{dx}{dt} (u(x(t)^-, t) - u(x(t)^+, t)), \\ &= \int_a^b u_t dx + \frac{dx}{dt} (u^- - u^+), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $u^- = u(x(t)^-, t)$ ,  $u^+ = u(x(t)^+, t)$ ,  $f^- = f(u^-, t)$ ,  $f^+ = f(u^+, t)$ , e a igualdade com (\*) segue da integração de (2.6) nos respectivos domínios. Dessa forma

$$\frac{dx}{dt}(u^- - u^+) + f^- - f^+ = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + f(u(b, t)) - f(u(a, t)) = 0. \quad (2.13)$$

Obtemos assim a condição de **Rankine-Hugoniot** (RH),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[f]}{[u]}, \quad (2.14)$$

onde  $[f] = f^+ - f^-$  e  $[u] = u^+ - u^-$ . Essa relação nos mostra como ocorre a propagação de uma descontinuidade na solução.

**Definição 2.4.** Uma solução contínua por partes  $u(x, t)$  de (2.6) com descontinuidade ao longo de uma curva suave  $x(t)$  que satisfaz a condição RH (2.14) é chamada **onda de choque** ou **choque**.

No plano  $x-t$ , soluções na forma de choque podem ser caracterizados pela colisão das curvas características. Na Fig. 1, vemos que devido à inclinação das curvas características, ocorre um encontro entre elas para o tempo  $t = t_2$ , resultando em um salto na solução de  $u_1$  a  $u_2$ .

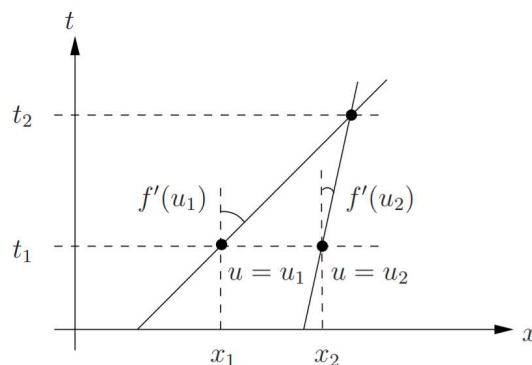


Figura 1 – Interseção entre características no plano  $x-t$  [76].

Para o problema de Riemann, um choque possui a forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < st, \\ u_r, & x > st, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde  $u_l$  e  $u_r$  representam os estados à esquerda e à direita (ver Eq. (2.4)) e  $s$  é a velocidade de propagação do choque, dada pela condição de RH (2.14).

Embora soluções fracas possibilitem encontrar soluções para problemas que não teriam uma solução clássica, existem casos em que não temos unicidade da solução fraca. Dessa forma, é necessário adicionar uma condição para determinar a solução fisicamente relevante, conhecida como **condição de entropia**.

**Definição 2.5.** (Condição de entropia de Oleinik) Temos uma solução na forma de choque entrópico se

$$\frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+}, \quad (2.16)$$

para todo  $u$  entre  $u^-$  e  $u^+$ , onde  $u^-$  e  $u^+$  representam os estados à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente [50].

Geometricamente, essa condição nos diz que

- se  $u^+ > u^-$ , devemos ter o segmento ligando  $(u^+, f(u^+))$  a  $(u^-, f(u^-))$  abaixo do gráfico de  $f$ ;
- se  $u^- > u^+$ , devemos ter o segmento ligando  $(u^-, f(u^-))$  a  $(u^+, f(u^+))$  acima do gráfico de  $f$ .

Vale ressaltar que as condições de entropia são locais, onde precisamos realizar tal análise sempre que ocorrer uma descontinuidade na solução.

### 2.1.1.2 Ondas de rarefação

Quando utilizamos o método das características para determinar a solução de uma Lei de Conservação, pode ocorrer que algumas regiões do plano  $x-t$  não possuam nenhuma característica, ou seja, não chegar nenhuma informação, como mostra a Fig. 2. Nesses casos, um tipo especial de onda ocorre, chamada **rarefação**.

Seja  $-\infty < u_l < u_r < \infty$ , e consideramos o seguinte problema de Riemann

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.17)$$

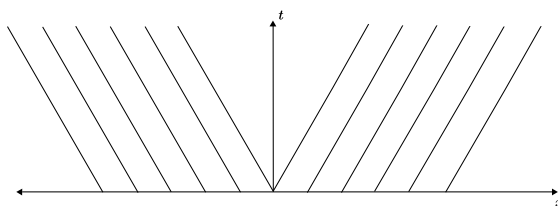


Figura 2 – Curvas características se abrindo em  $x = 0$  no plano  $x-t$ .

Seja  $u(x, t)$  única solução entrópica de (2.17). Dessa forma, para cada  $k > 0$ , as funções

$$u_k(x, t) = u(kx, kt) \quad (2.18)$$

são soluções de (2.17), que também satisfazem a condição de entropia. A unicidade suposta anteriormente nos dá

$$u(x, t) = u_k(x, t) = u(kx, kt), \quad \forall k > 0 \text{ e } \forall (x, t) \in Q. \quad (2.19)$$

Logo, para  $t = \frac{1}{k}$

$$u\left(x, \frac{1}{k}\right) = u(kx, 1) \quad \forall k > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Dessa forma, podemos concluir que  $u$  deve ser da forma

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}. \quad (2.21)$$

Substituindo  $v$  de (2.21) em (2.17) obtemos

$$-\xi \frac{dv}{d\xi} + \frac{df(v)}{d\xi} = (-\xi + f'(v)) \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

com as condições de fronteira assintóticas

$$v(-\infty) = u_l, \quad v(+\infty) = u_r. \quad (2.23)$$

Agora queremos formalizar a forma fraca para (2.22) com condição de contorno (2.23). Tomamos  $u \in L^\infty(Q)$ , onde  $L^\infty$  é o espaço das funções essencialmente limitadas,  $u_l \leq u \leq u_r$  em quase todo lugar de  $Q$ , tal que

$$\int_Q \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dx dt + u_l \int_{-\infty}^0 \phi(x, 0) dx + u_r \int_0^\infty \phi(x, 0) dx = 0, \quad (2.24)$$

para toda função teste  $\phi \in \mathcal{C}_0^1(Q)$ .

Supondo que este problema possui solução única e usando os mesmos argumentos utilizando  $u_k$  feitos anteriormente, obtemos que a solução fraca deve ser da forma

$$u(x, t) = v(\xi), \quad \text{com } \xi = \frac{x}{t}, \quad (2.25)$$

onde  $v \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . A condição inicial (2.23) será satisfeita devido à continuidade de  $v$  e a condição inicial dada em (2.17). Como feito anteriormente, agora analisamos as identidades envolvendo integrais para falar sobre soluções fracas. Escolhemos uma função teste com a forma

$$\phi(x, t) = \phi_1(\xi)\phi_2(t), \quad (2.26)$$

onde  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Uma vez que supomos (2.24), usando a compacidade dos suportes de  $\phi_1$ , segue que

$$\int_Q u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = 0. \quad (2.27)$$

Uma vez que

$$\phi_t = -\frac{d\phi_1}{d\xi} \xi \frac{1}{t} \phi_2 + \phi_1 \frac{d\phi_2}{dt}, \quad (2.28)$$

$$\phi_x = \frac{d\phi_1}{d\xi} \frac{1}{t} \phi_2, \quad (2.29)$$

substituindo  $\phi_t$  e  $\phi_x$  na Eq. (2.27) e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^\infty t \frac{d\phi_2}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} v\phi_1 d\xi \right) dt + \int_0^\infty \phi_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} (f(v) - v\xi) \frac{d\phi_1}{d\xi} d\xi \right\} dt = 0. \quad (2.30)$$

Como as integrais internas (em relação à  $\xi$ ) não dependem de  $t$ , podemos integrar a primeira parcela de (2.30) por partes, que nos dá a seguinte relação,

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ (f(v) - v\xi) \frac{d\phi_1}{d\xi} - v\phi_1 \right\} d\xi = 0. \quad (2.31)$$

**Definição 2.6.** A função  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **onda de rarefação** se

- $v \in C(\mathbb{R})$ ,
- $v \in [u_l, u_r]$  e  $v(-\infty) = u_l$ ,  $v(+\infty) = u_r$ ,
- $v$  satisfaz a relação (2.31).

### 2.1.2 Equação de Buckley-Leverett

Nesta seção apresentamos brevemente a equação de Buckley-Leverett, bem como sua aplicação para recuperação avançada de petróleo.

Após a perfuração do poço, a diferença de pressão resulta em uma primeira mobilização do óleo, conhecida como recuperação primária. Durante esse processo apenas uma pequena parcela do óleo é recuperada, onde outros métodos são necessários para complementar essa produção. Foi pensado então em injetar água no reservatório para deslocar o óleo até o poço produtor, onde temos agora um fluxo bifásico (água e óleo) no meio poroso [47]. Para um caso unidimensional, podemos representar a conservação da massa da água através da equação escalar de Buckley-Leverett

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (2.32)$$

onde  $u$  representa a saturação da água (se encontra entre 0 e 1) e  $f$  é a função de fluxo fracionário da água [8]. A construção da solução apresentada a seguir pede que a função  $f$  possua forma de S, isto é, satisfaça as seguintes condições [79, 76]:

- A função  $f \in \mathcal{C}^2$  com  $f'(u) > 0$  para todo  $u$ .
- Para  $u = 0$  e  $u = 1$ , temos  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ .
- A função  $f$  possui apenas um ponto de inflexão  $u^i$ , onde  $f''(u) > 0$  para  $u < u^i$  e  $f''(u) < 0$  para  $u > u^i$ .

Um exemplo de função de fluxo fracionário que satisfaz essas propriedades é

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \nu(1-u)^2}, \quad (2.33)$$

onde  $\nu$  é uma constante (ver [50] para mais detalhes).

Conforme apresentado anteriormente, quando a função que descrever o fluxo de uma lei de conservação escalar é côncava ou convexa, a solução é composta por apenas uma onda de rarefação ou choque. Quando não temos essa condição satisfeita, a solução pode ser composta por uma combinação dessas ondas, que é o caso da equação de Buckley-Leverett. Conforme podemos observar no painel

esquerdo da Fig. 3,  $f$  possui um ponto de inflexão, que denotamos por  $u^i$ . O painel direito da Fig. 3 ressalta que a função  $f$  é crescente à esquerda e decrescente à direita de  $u^i$ .

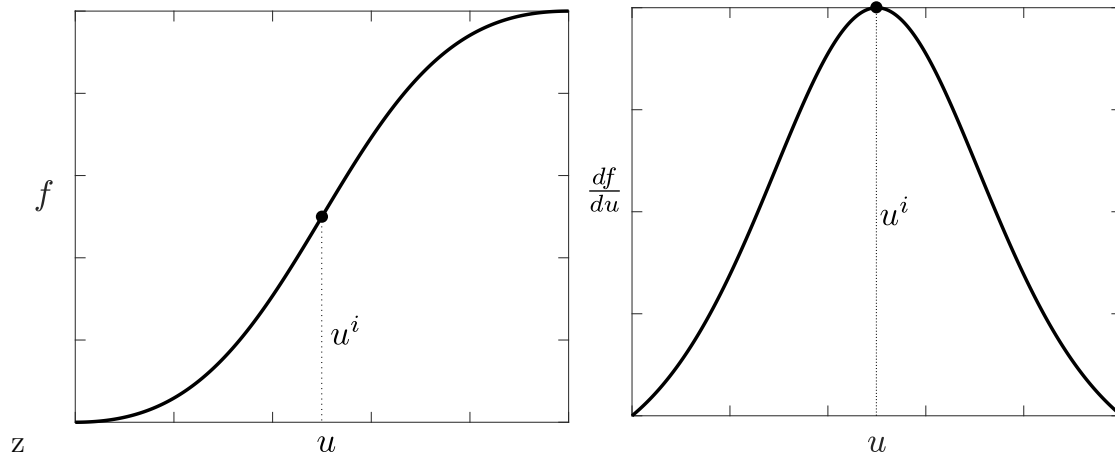


Figura 3 – À esquerda temos o perfil de  $f$  (2.33) e à direita o perfil de sua derivada.

Uma vez que nossa função de fluxo possui um ponto de inflexão, a condição de entropia a ser adotada é a condição de entropia de Oleinik (veja Eq. (2.16)). Dados os estados arbitrários à esquerda  $u_l$  e à direita  $u_r$ , temos três possibilidades para a solução entrópica segundo Oleinik da equação de Buckley-Leverett:

- **Rarefação:** conforme apresentado anteriormente, para que a solução seja composta por apenas uma rarefação é necessário termos  $f'$  crescente de  $f'(u_l)$  a  $f'(u_r)$ , conforme mostra o painel esquerdo da Fig. 4 para  $u_l < u_r$ .
- **Choque:** esse tipo de solução ocorre quando a secante conectando os pontos  $(u_l, f(u_l))$  e  $(u_r, f(u_r))$  não intersecta o perfil de  $f$  e se encontra abaixo do gráfico para  $u_l < u_r$ , ou acima do gráfico para  $u_l > u_r$ . O painel central da Fig. 4 apresenta este cenário para  $u_l < u_r$ .
- **Rarefação seguida por choque:** inicialmente, definimos  $u^*$  como o estado tal que

$$f'(u^*) = \frac{f(u_r) - f(u^*)}{u_r - u^*}. \quad (2.34)$$

Note que  $u^*$  é o ponto onde a secante que o liga com  $(u_r, f(u_r))$  coincide com a reta tangente a  $f$  em  $f(u^*)$ . A solução é dada por uma rarefação de  $u_l$  até  $u^*$  seguida por um choque até  $u_r$  quando:  $u_r < u^i$  e  $u^* < u_l$ , ou  $u_r > u^i$  e  $u_l < u^*$ . Assim, temos que as condições necessárias para ocorrer um choque ou rarefação apresentadas anteriormente são violadas. O painel direito da Fig. 4 apresenta este cenário para  $u_l < u_r$ .

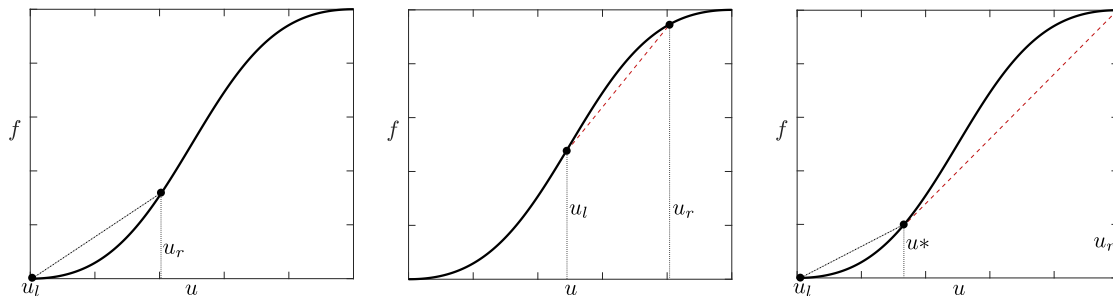


Figura 4 – Cenário das três possíveis soluções da equação de Buckley-Leverett. No painel da esquerda, temos a ocorrência de uma rarefação; no painel central, a ocorrência de um choque; e no painel da direita, a solução é dada por uma rarefação seguida de um choque.

### 2.1.3 Sistema de Leis de Conservação não Linear

Tratamos agora de sistema de Leis de Conservação não linear. Neste caso, a matriz  $A$  apresentada na eq. (2.2) não é constante, dependendo de  $U$ . Em particular, temos que os autovalores e autovetores associados à matriz  $A$  são funções de  $U$ .

A partir daqui, tratamos apenas do problema de Riemann, isto é, consideramos

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0, & \text{em } Q, \\ U_0(x) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < 0, \\ U_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.35)$$

Sistemas de leis de conservação não-lineares possuem 3 tipos de ondas que podem compor a solução: choques, rarefações e contatos. Antes de falar sobre cada tipo de onda, apresentamos algumas definições.



**Definição 2.7.** Chamamos de **curva integral** associada a um campo de vetores  $F$  a aplicação  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  com a propriedade

$$T'(\xi) = F(T(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Isto é, o vetor tangente a  $T$  em cada ponto  $\xi \in \mathbb{R}$  é exatamente  $F(T(\xi))$ .

A seguir apresentamos as definições e características das ondas que compõe a solução de um sistema de Leis de Conservação.

### 2.1.3.1 Ondas de choque

Choques são soluções fracas descontínuas para o sistema (2.2), caracterizadas por assumirem valores constantes  $U_L$  e  $U_R$  à esquerda e à direita da descontinuidade, respectivamente. A velocidade de propagação dessa descontinuidade, assim como no caso escalar, deve satisfazer a **Condição de Rankine-Hugoniot** (RH), dada por

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L). \quad (2.37)$$

Fixado um estado  $U_0 = (U_0^1, \dots, U_0^n) \in \mathbb{R}^n$ , gostaríamos de determinar todos os pontos  $\tilde{U} = (\tilde{U}^1, \dots, \tilde{U}^n) \in \mathbb{R}^n$  que podem ser conectados a  $U_0$  por uma descontinuidade que satisfaz (2.37) para algum  $s$ .

Expandindo  $F(\tilde{U})$  em torno de  $U_0$ , obtemos

$$F(\tilde{U}) = F(U_0) + A(\tilde{U} - U_0) + O(\|\tilde{U} - U_0\|^2), \quad (2.38)$$

ou equivalentemente

$$A(\tilde{U} - U_0) = F(\tilde{U}) - F(U_0) - O(\|\tilde{U} - U_0\|^2). \quad (2.39)$$

Lembrando que a condição (2.37) deve ser satisfeita, a relação (2.39) se torna

$$A(\tilde{U} - U_0) = s(\tilde{U} - U_0) - O(\|\tilde{U} - U_0\|^2). \quad (2.40)$$

Tomando  $\tilde{U}$  suficientemente próximo de  $U_0$ , é possível tornar o termo  $O(\|\tilde{U} - U_0\|^2)$  tão pequeno quanto se queira. Dessa forma, podemos negligenciar tal termo, obtendo

$$A(\tilde{U} - U_0) = s(\tilde{U} - U_0). \quad (2.41)$$

Concluimos assim que  $s$  é um autovalor de  $A$  e o vetor  $(\tilde{U} - U_0)$  um múltiplo do autovetor associado a  $s$ ,  $r_p$ . Assim, existe  $\xi \in \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{U} - U_0 = \xi r_p$ , de forma que podemos escrever  $\tilde{U}$  como função de  $U_0$  e  $\xi$ , obtendo a relação

$$\tilde{U}(\xi, U_0) = \tilde{U} + \xi r_p. \quad (2.42)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F(\tilde{U}) - F(U_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} F((1-z)U_0 + z\tilde{U}) dz \quad (2.43)$$

$$= \int_0^1 A((1-z)U_0 + z\tilde{U})(\tilde{U} - U_0) dz \quad (2.44)$$

$$= (\tilde{U} - U_0)G(\tilde{U}, U_0), \quad (2.45)$$

onde  $G(\tilde{U}, U_0) = \int_0^1 A((1-z)U_0 + z\tilde{U}) dz$ . Logo

$$s(\tilde{U} - U_0) = F(\tilde{U}) - F(U_0) = (\tilde{U} - U_0)G(\tilde{U}, U_0), \quad (2.46)$$

de onde segue que

$$[G - sI](\tilde{U} - U_0) = 0. \quad (2.47)$$

Dessa forma, os pontos que podem ser conectados através de um choque a um dado estado  $U_0$  constituem o conjunto  $\mathcal{H}$ , dado por

$$\mathcal{H}(U_0) = \{\tilde{U} \in \mathbb{R}^n; s \in \mathbb{R}, [G - sI](\tilde{U} - U_0) = 0\}. \quad (2.48)$$

Chamamos o conjunto  $\mathcal{H}$  de **Hugoniot Locus** associado ao ponto  $U_0$ .

Agora gostaríamos de mostrar que a relação (2.42) para definir  $\tilde{U}$  é única em uma vizinhança de  $U_0$  para cada valor de  $\xi$ . Para isso, definimos a função  $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por

$$R(\tilde{U}, \xi) = (\tilde{U} - U_0) - \xi r_p. \quad (2.49)$$

Visto que  $(\tilde{U} - U_0)$  é múltiplo de  $r_p$ , existe  $\xi_0$  tal que  $R(\tilde{U}, \xi_0) = 0$ . Além disso, temos que  $\frac{\partial R}{\partial \tilde{U}} = I_n$ . Assim, pelo Teorema da Função Implícita (ver [62] para mais detalhes) para cada  $\xi$  numa vizinhança de  $\xi_0$ , existe um único  $\tilde{U}(\xi)$  tal que  $R(\xi, \tilde{U}(\xi)) = 0$ .

**Observação:** Notemos que o Hugoniot Locus de um estado  $U_0$  não é uma curva integral, isto é, não é tangente ao respectivo autovetor em todos os pontos. Isso apenas ocorre no ponto  $U_0$ . Além disso, em  $\xi = 0$  a velocidade de propagação da descontinuidade será o respectivo autovalor da família avaliado em  $U_0$ .

Embora o Hugoniot Locus descrever todos os estados que podem ser conectados a um  $U_0$  fixado através de descontinuidade, nem sempre a solução resultante será entrópica. Seguindo [67], apresentamos a famosa condição de Entropia de Lax, que recorre à seguinte definição.

**Definição 2.8.** A  $p$ -ésima família associada à lei de conservação (2.2) é dita **genuinamente não linear** se

$$\nabla \lambda_p(U) \cdot r_p(U) \neq 0, \quad \forall U, \quad (2.50)$$

onde  $\nabla \lambda_p(U)$  é o gradiente do  $p$ -ésimo autovalor associado a  $JF(U)$ .

Tal relação nos diz que  $\lambda_p(U)$  varia monotonicamente sobre a curva integral de  $r_p$ .

**Definição 2.9.** Para uma família  $p$  genuinamente não linear associado ao sistema (2.2), a **condição de entropia de Lax** diz que o salto de  $U_L$  a  $U_R$  é admissível somente se

$$\lambda_p(U_L) > s > \lambda_p(U_R), \quad (2.51)$$

$$\lambda_{p-1}(U_L) < s < \lambda_{p+1}(U_R) \quad (2.52)$$

onde  $s$  denota a velocidade do choque que satisfaz RH [49].

Uma solução descontínua de (2.2) que satisfaz (2.37) e (2.51)-(2.52) é chamada de Choque.

### 2.1.3.2 Ondas de contato

Conforme apresentado anteriormente, temos a ocorrência de um choque quando a  $p$ -ésima família for genuinamente não linear. Podemos ter soluções descontínuas mesmo em famílias que não são genuinamente não lineares, onde se faz necessária a seguinte definição.

**Definição 2.10.** A  $p$ -ésima família associada ao sistema (2.2) é dita **linearmente degenerada** se

$$\nabla \lambda_p(U) \cdot r_p(U) \equiv 0, \quad \forall U. \quad (2.53)$$

A relação (2.53) nos diz que  $\lambda_p$  é constante ao longo da curva integral associada ao campo de vetores  $r_p(U)$ . Vemos que para um sistema com coeficientes constantes a condição (2.53) é satisfeita, indicando que a solução do problema de Riemann de um sistema linear é sempre na forma de uma descontinuidade de contato. O seguinte resultado nos diz que a curva de propagação de uma descontinuidade de contato coincide com a curva integral do autovetor associada à família linearmente degenerada, com velocidade de propagação sendo o autovalor da família [18].

**Teorema 2.1.** *Suponhamos que a  $p$ -ésima família seja linearmente degenerada. Então a curva de propagação de descontinuidade nesta família passando pelo ponto  $U_L$  coincide com a curva integral de  $r_p(U)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\tilde{U}_p(\xi)$  uma parametrização da curva integral de  $r_p(U)$  que passa por  $U_L$ , com  $\tilde{U}_p(0) = U_L$ . Derivando  $F(\tilde{U}_p(\xi))$ , obtemos

$$\frac{dF(\tilde{U}_p(\xi))}{d\xi} = F'(\tilde{U}_p(\xi))\tilde{U}'_p(\xi) = \lambda_p(\tilde{U}_p(\xi))\tilde{U}'_p(\xi), \quad (2.54)$$

ou seja  $(F \circ \tilde{U}_p)'(\xi) = \lambda_p(\tilde{U}_p(\xi))\tilde{U}'_p(\xi)$ . Fixando  $\xi_0$  arbitrário, pelo Teorema Fundamental do Cálculo [62], temos que

$$F(\tilde{U}_p(\xi_0)) - F(U_L) = (F \circ \tilde{U}_p)(\xi) \Big|_0^{\xi_0} = \int_0^{\xi_0} \lambda_k(\tilde{U}_p(\xi))\tilde{U}'_p(\xi) d\xi. \quad (2.55)$$

Uma vez que a  $p$ -ésima família é linearmente degenerada,  $\lambda_p$  é constante ao longo da curva integral de  $r_p$ . Tomando  $s = \lambda_p(U_L)$ , a relação (2.55) se torna

$$F(\tilde{U}_p(\xi_0)) - F(U_L) = s \int_0^{\xi_0} \tilde{U}'_p(\xi) d\xi = s(\tilde{U}_p(\xi_0) - U_L). \quad (2.56)$$

Assim, os pontos que se encontram sobre a curva integral de  $r_p(U)$  satisfazem a condição RH para  $s = \lambda_p(U_L)$ . Concluimos então que a curva integral de  $r_p(U)$  coincide com a curva de propagação da  $p$ -descontinuidade, com velocidade de propagação  $s = \lambda_p(U_L)$ .  $\square$

Uma descontinuidade de uma família linearmente degenerada é chamada **descontinuidade de contato**. No plano  $x-t$ , esse tipo de solução será caracterizada por possuir curvas características paralelas entre os estados limites.

A condição de Entropia de Lax [67] é modificada para uma descontinuidade de contato, conforme apresentado a seguir.

**Definição 2.11** (Condição de Entropia de Lax). Se a  $p$ -ésima família é genuinamente não linear ou linearmente degenerada, uma descontinuidade que liga  $U_L$  a  $U_R$  é admissível se

$$\lambda_p(U_L) \geq s \geq \lambda_p(U_R), \quad (2.57)$$

onde  $s$  é a velocidade da descontinuidade que satisfaz a condição RH.

### 2.1.3.3 Ondas de rarefação

Dizemos que uma solução de (2.2) é uma onda de rarefação se

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & \text{para } x \leq \eta_1 t, \\ w(x/t) & \text{para } \eta_1 t \leq x \leq \eta_2 t, \\ U_R & \text{para } x \geq \eta_2 t, \end{cases} \quad (2.58)$$

onde  $-\infty \leq \eta_1, \eta_2 \leq +\infty$  e  $w : (\eta_1, \eta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função suave satisfazendo  $\lim_{\eta \searrow \eta_1} w(\eta) = U_L$  e  $\lim_{\eta \nearrow \eta_2} w(\eta) = U_R$ , onde  $\eta = x/t$ . Assumimos  $F$  suficientemente suave para os próximos cálculos. Substituindo (2.58) em (2.35) obtemos a expressão

$$DF(w(\eta))w'(\eta) = \eta w'(\eta), \quad (2.59)$$

para  $\eta_1 < \eta < \eta_2$ . Assim, vemos que  $\eta$  é um autovalor de  $DF(w(\eta))$  e  $w'(\eta)$  é um múltiplo de um autovetor  $r_p(w(\eta))$ , isto é

$$w'(\eta) = \alpha(\eta)r_p(w(\eta)), \quad (2.60)$$

$$\lambda_p(w(\eta)) = \eta, \quad (2.61)$$

para algum  $p$ , com  $1 \leq p \leq n$ .

Dessa forma, concluímos que  $w(\eta)$  se encontra sobre a curva integral do campo de vetores de  $r_p$ . Em particular, precisamos garantir que  $U_L$  e  $U_R$  estão na mesma curva integral; tal condição é necessária, mas não suficiente para garantir a existência de uma onda de Rarefação. Precisamos ainda que  $\eta$  seja monotonicamente crescente enquanto  $w(\eta)$  se move de  $U_L$  para  $U_R$  ao longo da curva integral; caso contrário (2.58) não estaria bem definida. Ressaltamos que a parametrização da curva integral por  $\eta$  não é de tudo arbitrário, uma vez que exigimos que  $\eta$  seja um autovalor de  $DF(w(\eta))$ . Tal exigência vem como consequência de definirmos  $\eta = x/t$  [50].

Para determinar uma expressão para  $w(\eta)$ , primeiro investigamos o fator  $\alpha(\eta)$  em (2.60). Diferenciando (2.61) com respeito a  $\eta$ , obtemos

$$1 = \nabla \lambda_p(w(\eta)) \cdot w'(\eta), \quad (2.62)$$

$$= \alpha(\eta) \nabla \lambda_p(w(\eta)) \cdot r_p(w(\eta)), \quad (2.63)$$

obtendo que

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\nabla \lambda_p(w(\eta)) \cdot r_p(w(\eta))}. \quad (2.64)$$

Usando essa expressão na relação (2.60), obtemos o seguinte sistema de EDOs com respeito a  $w(\eta)$

$$w'(\eta) = \frac{r_p(w(\eta))}{\nabla \lambda_p(w(\eta)) \cdot r_p(w(\eta))}, \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \quad (2.65)$$

com dado inicial  $w(\eta_1) = U_L$ . Vale ressaltar que  $\eta_1 = \lambda_p(U_L)$  e  $\eta_2 = \lambda_p(U_R)$ .

A expressão (2.65) está bem definida se  $\nabla \lambda_p(w(\eta)) \neq 0$ , de onde concluímos que ondas de rarefação ocorrem apenas em famílias genuinamente não linear. Dessa forma, uma rarefação só é possível se  $U_L$  e  $U_R$  estão sobre a mesma curva integral de  $r_p$  e  $\lambda_p$  é crescente de  $U_L$  a  $U_R$ .

#### 2.1.3.4 Construção da solução geral de um problema de Riemann

A solução típica para um problema de Riemann é composta por estados constantes separados pelas ondas apresentadas anteriormente. Para obter a solução do Problema de Riemann entre os estados  $U_L$  e  $U_R$ , devemos plotar as curvas de

propagação das ondas de rarefação, choque e contato, e procurar interseção entre elas. Tais interseções representam os estados intermediários que compõe nossa solução. Em geral, temos mais de um caminho conectando os estados  $U_L$  e  $U_R$ , onde a seguinte definição se faz necessária para garantir que a solução escolhida possui sentido físico, ou seja, que não ocorre sobreposição das ondas.

**Definição 2.12.** Uma sequência de ondas é dita **compatível** se a velocidade final da  $i$ -ésima onda é menor ou igual à velocidade inicial da onda subsequente.

No contexto de um sistema de leis de conservação estritamente hiperbólico, para garantirmos que a sequência de ondas é compatível, devemos pedir que as ondas que compõe a solução estejam associadas a famílias características em ordem crescente, i.e., se a primeira onda é da família  $p$ , devemos ter a segunda onda pertencente à família  $q$  para  $p < q$ , e assim por diante. Destacamos que para os casos onde os estados  $U_L$  e  $U_R$  se encontram sobre uma mesma curva de propagação, é possível conectá-los através de apenas uma onda.

## 2.2 Métodos numéricos para EDP

Nesta seção apresentamos uma breve revisão relacionada a esquemas de diferenças finitas para resolver numericamente sistemas de equações diferenciais parciais, tendo como objetivo apresentar o teorema de equivalência de Lax-Richtmyer. Iremos nos restringir ao caso unidimensional.

### 2.2.1 Condições de fronteira

Ao resolver uma EDP onde o domínio espacial é toda a reta real basta associar um dado inicial. Se limitarmos nosso domínio a um intervalo da reta, precisamos adicionar condições de fronteira, que determinam o comportamento da solução nos extremos do intervalo adotado. Em geral, a condição de fronteira adequada está diretamente ligada às curvas características associadas ao problema [69]. Para exemplificar isso, consideremos a lei de conservação escalar

$$u_t + au_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (2.66)$$

Se  $a$  é positivo, a informação se propagada da esquerda para a direita, conforme mostrado na Fig. 5. Notamos assim que é necessário informar o valor de  $u$  em

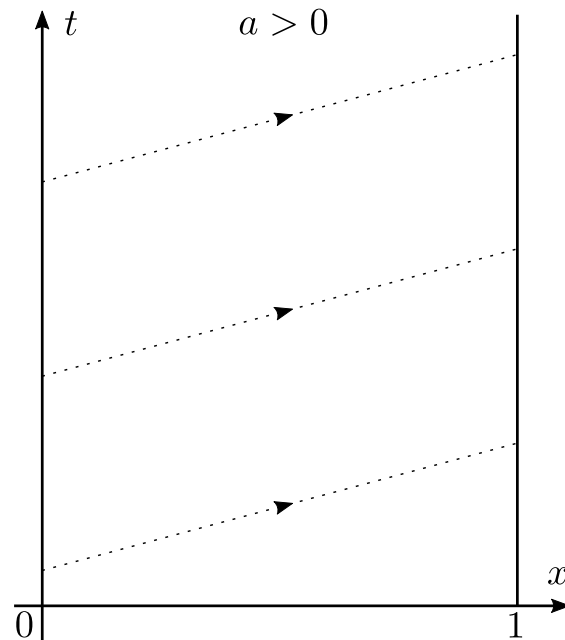


Figura 5 – Curvas características para Eq. (2.66) com  $a > 0$ .

$x = 0$  para todo  $t$ . De maneira análoga, caso  $a < 0$  seria necessário informar  $u$  em  $x = 1$  para todo  $t$ .

Destacamos duas condições de fronteira:

- A **condição de fronteira de Dirichlet** determina o valor da solução na fronteira do domínio espacial para todo  $t$ .
- A **condição de fronteira de Neumann** determina o valor da derivada da solução na fronteira do domínio espacial para todo  $t$ .

### 2.2.2 Esquemas de diferenças finitas

Ao resolvermos um sistema de equações diferenciais de maneira numérica, passamos de um problema contínuo para um discreto. Dessa forma, é necessário discretizar nosso domínio, onde definimos uma grade de pontos no plano  $t$ - $x$ . Tomando  $h$  e  $k$  valores positivos, a grade de pontos é formada pelos pares  $(t_n, x_m) =$



$(nk, mh)$ , para  $n, m$  inteiros arbitrários. Usamos a notação  $u_m^n$  para  $u(t_n, x_m)$  quando  $u$  varia continuamente em  $(t, x)$ .

A ideia básica de um esquema de diferenças finitas é substituir as derivadas por diferenças finitas. Isso pode ser feito de várias maneiras, como por exemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_m) \equiv \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n, x_m)}{k}. \quad (2.67)$$

Note que essa aproximação vem da seguinte fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon}. \quad (2.68)$$

Outros exemplos de esquemas de diferenças finitas podem ser encontrados em [69]. Quando um esquema envolve apenas dois níveis temporais, como por exemplo, os níveis  $n$  e  $n + 1$ , dizemos que é de passo único.

### 2.2.3 Convergência, consistência e estabilidade

Antes de procurarmos soluções numéricas para problema matemáticos, é importante verificar se o problema original possui solução e de fato está bem-posto.

**Definição 2.13.** Dizemos que um problema de valor inicial é **bem-posto no sentido de Hadamard** [31] se

- possui solução;
- a solução é única;
- a solução depende continuamente do dado inicial.

Esta definição foi proposta em um contexto matemático, onde mais tarde foi notado que seria importante verificar essa boa colocação de um problema antes de procurar soluções numéricas. Na literatura é possível encontrar referências que consideram que um problema é bem-posto se segue a definição 2.13, como por exemplo [66] e [1]. Neste trabalho estamos seguindo [69], onde a seguinte definição é adotada

**Definição 2.14.** O problema de valor inicial para uma equação diferencial de primeira ordem é **bem-posto** se para cada  $t$  positivo existir uma constante  $C_t$  tal que

$$\|u(t, \cdot)\| \leq C_t \|u(0, \cdot)\| \quad (2.69)$$

para todo dado inicial  $u(0, \cdot)$ .

Na Eq. (2.69) podemos considerar a norma usual do  $L^1$ ,  $L^2$  ou  $L^\infty$ , onde em geral a norma do  $L^2$  é adotada.

Uma das propriedades básicas que esperamos de um esquema de diferenças finitas é que ele aproxime a solução da EDP em questão, e que essa aproximação melhore à medida que refinamos a malha, isto é, à medida que  $k$  e  $h$  tendem a zero. Quando isso ocorre, dizemos que o esquema é **convergente**. Consideremos a EDP linear da forma

$$P(\partial_t, \partial_x)u = f(t, x), \quad (2.70)$$

que é de primeira ordem em relação a  $t$  e associada ao dado inicial  $u_0(x)$ . A seguir formalizamos a definição de convergência.

**Definição 2.15.** Um esquema de diferenças finitas de passo único aproximando uma EDP é convergente se para qualquer solução da EDP,  $u(t, x)$ , e solução do esquema,  $v_m^n$ , tal que  $v_m^0$  converge para  $u_0(x)$  quando  $mh$  converge para  $x$ , então  $v_m^n$  converge para  $u(t, x)$  à medida que  $(nk, mh)$  converge para  $(t, x)$  e  $h, k$  convergem para 0.

Em geral, provar que um esquema de diferenças finitas é convergente é uma tarefa difícil. Porém, existem dois conceitos que podem ser usados para obter a convergência de um esquema: consistência e estabilidade [69].

**Definição 2.16.** Dado uma EDP,  $Pu = f$ , e um esquema de diferenças finitas,  $P_{k,h}v = f$ , dizemos que o esquema é **consistente** com a EDP se para qualquer função suave  $\phi(t, x)$

$$P\phi - P_{k,h}\phi \rightarrow 0, \quad k, h \rightarrow 0, \quad (2.71)$$

onde a convergência é pontual para cada  $(t, x)$ .

Consistência de um esquema de diferenças finitas nos diz que a solução da EDP, se suave, é aproximada pela solução do esquema de diferenças finitas. Analogamente, convergência significa que a solução do esquema de diferenças finitas se aproxima da solução da EDP. Destacamos que consistência é uma condição necessária para garantir a convergência, porém não é suficiente.

A propriedade que falta para garantirmos a convergência é chamada estabilidade. Para introduzir este conceito, notemos que se o esquema é convergente, à medida que  $v_m^n$  converge para  $u(t, x)$ , devemos ter  $v_m^n$  limitado em algum sentido. Essa limitação é a essência da estabilidade. Antes de apresentarmos a definição de estabilidade, é necessário definir **região de estabilidade**. Para vários esquemas existem restrições na escolha de  $h$  e  $k$  para garantir a estabilidade do esquema. A região de estabilidade é uma região limitada e não vazia do primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$  que possui a origem como ponto de acumulação. Isso significa que a região de estabilidade deve conter seqüências  $(h_\gamma, k_\gamma)$  que convergem para a origem à medida que  $\gamma$  tende a infinito.

**Definição 2.17.** Um esquema de diferenças finitas  $P_{h,k}v_m^n = 0$  para uma EDP de primeira ordem é estável na região de estabilidade se existir um número natural  $J$  tal que, para qualquer tempo positivo  $T$ , existir uma constante  $C_T$  tal que

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2, \quad (2.72)$$

para  $0 \leq nk \leq T$ , com  $(k, h)$  na região de estabilidade.

A desigualdade (2.72) expressa a ideia que a norma da solução para qualquer tempo  $t$ , com  $0 \leq t \leq T$ , é limitada pela quantidade de crescimento que pode ocorrer. Esse crescimento é no máximo uma constante multiplicando a soma das normas da solução nos primeiros  $J + 1$  passos.

Finalmente, temos todas as definições necessárias para enunciar um dos teoremas mais importantes para realizar a análise de métodos de diferenças finitas: o Teorema de equivalência de Lax–Richtmyer.

**Teorema 2.2.** *Um esquema de diferenças finitas de passo único e consistente para um problema de valor inicial de uma EDP é convergente se, e somente se, é estável.*

A importância desse teorema vem da simplificação para demonstrar que um esquema é convergente. Conforme comentado anteriormente, provar a convergência de um esquema pode ser um trabalho complexo seguindo a definição apresentada. Por outro lado, mostrar que o esquema é consistente e estável é mais simples que demonstrar a convergência. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [69].

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO TRANSPORTE DE ESPUMA EM MEIOS POROSOS COM ADSORÇÃO LINEAR DO SURFACTANTE

Apresentamos neste capítulo as principais características do fluxo multifásico em meio poroso, bem como os modelos matemáticos que serão utilizados para descrever o transporte de espuma com adsorção linear do surfactante em meio poroso.

#### 3.1 Escoamento em meios porosos

No contexto de fluxo bifásico multifásico em meios porosos, é necessário apresentar alguns conceitos.

Uma vez que estamos considerando injeção em um meio poroso, é importante determinar a fração do volume total por onde ocorrerá o fluxo, isto é, o volume de poros, espaços vazios. Tal fração é chamada **porosidade**, representada por

$$\varphi = \frac{V_{poros}}{V}, \quad (3.1)$$

onde  $V$  é o volume total do meio poroso e  $V_{poros}$  é o volume dos espaços vazios.

A razão entre o volume ocupado por uma fase  $j$  e o volume poroso é chamada **saturação** da fase  $j$ , representada por

$$S_j = \frac{V_j}{V_{poros}}, \quad (3.2)$$

onde  $V_j$  representa o volume da fase  $j$ . Neste trabalho assumimos que o meio está completamente saturado, isto é

$$\sum_{j \in J} S_j = 1, \quad (3.3)$$

onde  $J$  representa o conjunto de fases presentes no meio. Dependendo das propriedades do meio poroso e dos fluidos injetados, nem sempre será possível deslocar completamente uma fase de uma determinada região. A quantidade que não é possível deslocar é chamada **saturação residual**.

Devido à sua complexa geometria e propriedades geológicas, o meio poroso apresenta resistências ao transporte de fluidos injetados. Relacionado a essa

resistência temos a **permeabilidade** do meio poroso, denotada por  $k$ , que descreve a capacidade do meio em permitir o escoamento de fluidos em seu interior. Assim, a permeabilidade é inversamente proporcional à dificuldade de deslocamento de um fluido no meio poroso. Para o caso de um meio homogêneo, temos que  $k$  é constante.

Em geral, um meio poroso contém pelo menos dois fluidos em seu interior, de forma que a permeabilidade não é suficiente para descrever a dificuldade que um determinado fluido encontra durante o fluxo. A facilidade que a fase  $j$  apresenta durante o fluxo é chamada **permeabilidade efetiva**, e denotada por  $k_j$ . Destacamos que a permeabilidade efetiva da fase  $j$  depende de  $S_j$ , onde se torna maior que zero apenas quando estamos acima da saturação residual.

Definimos como **permeabilidade relativa** de uma fase a razão entre a permeabilidade efetiva de um fluido e a permeabilidade do meio poroso, expressa por

$$k_{rj} = \frac{k_j}{k}. \quad (3.4)$$

Dessa forma, ao passo em que a permeabilidade efetiva se encontrava entre 0 e  $k$ , a permeabilidade relativa é normalizada e se encontra entre 0 e 1.

A **mobilidade** da fase  $j$ , descreve a capacidade da fase de se deslocar no meio, definida como

$$\lambda_j = \frac{k_{rj}}{\mu_j}, \quad (3.5)$$

onde  $\mu_j$  é a viscosidade da fase  $j$ , que representa a resistência que um fluido apresenta ao escoamento.

A função que descreve a parcela do fluxo composta pela fase  $j$  é chamada **função de fluxo fracionário** [47], dada por

$$f_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_t}, \quad (3.6)$$

onde  $\lambda_t$  representa a mobilidade total, ou seja, a soma das mobilidades de todos os fluidos injetados e presentes no meio poroso.

A pressão que ocorre entre as interfaces dos fluidos não miscíveis é chamada **pressão capilar**, denotada por  $P_c$ .

Para um deslocamento horizontal onde o gradiente de pressão capilar é negligenciada, a velocidade superficial da fase  $j$  segue a lei de Darcy [19] sendo expressa por

$$u_j = -\frac{kk_{rj}}{\mu_j}\nabla p, \quad (3.7)$$

onde  $\nabla p$  é o gradiente de pressão. A velocidade superficial total,  $u$ , é dada pela soma de todas as velocidades superficiais.

### 3.1.1 Escoamento bifásico

Para descrever o deslocamento de espuma em meio poroso, adotamos um modelo de fluxo bifásico de água e gás. Dessa forma, temos  $j = \{w, g\}$  para representar a fase aquosa e gasosa, respectivamente. Conforme o feito na seção anterior, segue que

$$S_w + S_g = 1, \quad f_w + f_g = 1, \quad \text{e } u_w + u_g = u. \quad (3.8)$$

Para o caso onde o gradiente de pressão capilar é negligenciado, podemos relacionar as velocidades superficiais, as funções de fluxo fracionário e a velocidade total da seguinte forma [14]:

$$u_w = uf_w, \quad u_g = uf_g. \quad (3.9)$$

## 3.2 Espumas em meio poroso

Nesta seção temos como objetivo revisar brevemente alguns conceitos relacionada à espuma em um meio poroso. Para modelar o fluxo de espuma em meio poroso, os conceitos usados anteriormente serão amplamente usados, onde podemos ver essa investigação como uma extensão da teoria de fluxo bifásico de água e gás.

Podemos definir **espuma** em um meio poroso como uma dispersão de gás em líquido, onde a fase aquosa é contínua e a fase gasosa é descontínua, onde as bolhas de gás são separadas por finos filmes de líquido chamados lamelas [22]. Quando as lamelas são formadas apenas por água, a tensão interfacial entre a água e o gás torna difícil a geração de bolhas. Surfactante é adicionado à solução aquosa

visando reduzir a tensão interfacial, e assim possibilitando a formação de bolhas [77]. As moléculas de surfactante possuem uma estrutura que é hidrofílica em uma extremidade e hidrofóbica na outra, fazendo com que tenha a tendência de se instalar nas interfaces entre a solução aquosa e gasosa, permitindo a redução da tensão superficial do filme líquido, conforme apresentado na Fig. 6. Apesar da adição de surfactante tornar as bolhas mais estáveis, ainda temos um processo contínuo de geração e destruição de bolhas durante toda a injeção no meio poroso. Esse complexo processo pode ser investigado via experimentos, como por exemplo experimentos de microfluídica [21, 30].

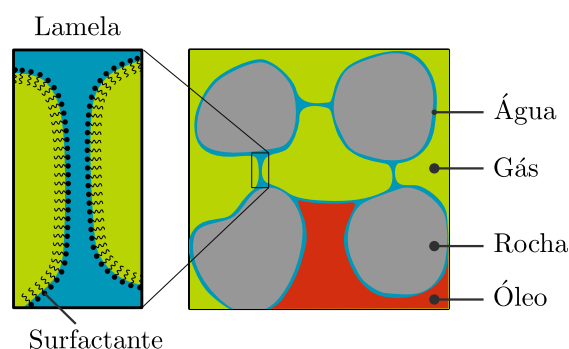


Figura 6 – Estrutura das bolhas. Fonte: Adaptado de Farajzadeh et al. (2012).

A redução da tensão superficial é proporcional à concentração de surfactante, uma vez que temos uma maior quantidade de moléculas de surfactante na superfície aquosa. Porém, a partir de uma determinada concentração, a superfície do meio poroso se encontra completamente saturada e as moléculas de surfactante formam aglomerados chamados de micelas. A concentração onde temos a formação de micelas é chamada de concentração crítica de micelas (CMC). O CMC é um parâmetro central nesse contexto de injeção de espuma, uma vez que apenas acima desse valor temos a formação de micelas, fundamentais para definir as propriedades da espuma [55].

Ao injetarmos soluções contendo surfactante em meios porosos, é comum ocorrer a adsorção das moléculas de surfactante nas paredes do meio poroso. Esse processo pode ocorrer devido a diversos motivos. Em geral, é considerado que o surfactante é adsorvido em uma superfície carregada com uma carga oposta, devido a uma combinação de forças eletrostáticas e de Van der Waals [64]. As perdas de



surfactante devido à adsorção, além de terem potencial para desestabilizar a espuma, podem tornar o processo envolvendo injeção de surfactante economicamente inviável [9].

### 3.3 Propriedades da função de fluxo fracionário

O objetivo deste trabalho é construir a solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação descrevendo o fluxo de espuma em meio porosos com adsorção linear do surfactante. Nesse contexto, temos que a função de fluxo fracionário da fase aquosa depende da saturação de água e da concentração de surfactante, isto é,  $f_w = f_w(S_w, C_s^w)$  onde  $C_s^w$  representa a concentração de surfactante na fase aquosa. Para possibilitar a construção da solução assumimos que  $f_w$  satisfaz as seguintes propriedades:

- a) A função  $f_w \in \mathcal{C}^2$ ,  $f_w(0, C_s^w) = 0$  e  $f_w(1, C_s^w) = 1$  para todo  $C_s^w$  no domínio físico. Além disso,  $\partial_S f_w(0, C_s^w) = 0 = \partial_S f_w(1, C_s^w)$  para cada  $C_s^w$ .
- b) Para cada  $C_s^w$ ,  $f_w(S_w, C_s^w)$  é estritamente crescente em relação a  $S_w$  com um único ponto de inflexão, que denotaremos por  $S_w^i$ , tal que

$$\partial_{SS} f_w(S_w, C_s^w) \begin{cases} > 0, & S_w < S_w^i, \\ = 0, & S_w = S_w^i, \\ < 0, & S_w > S_w^i. \end{cases} \quad (3.10)$$

- c) A derivada parcial  $\partial_C f_w(S_w, C_s^w) > 0$ , para  $S_w$  e  $C_s^w$  no domínio físico.

Tais hipóteses são análogas às adotadas nos trabalhos [37, 39, 38, 72], onde consideraram que  $f_w$  é uma função decrescente em relação a  $C_s^w$ . Nestes trabalhos é modelado o fluxo bifásico de uma fase aquosa, composta por água e polímero, e uma fase oleica. A adição de polímero age aumentando a viscosidade da fase aquosa, fazendo com que  $f_w$  decresça com o aumento de  $C_s^w$ . Neste estudo, consideramos que a adição de surfactante age possibilitando a formação de bolhas, levando a uma redução da permeabilidade relativa da fase gasosa e conseqüentemente, no aumento de  $f_w$  em função de  $C_s^w$ . Apesar da diferente física, podemos recair em

um cenário similar através da mudança de variável  $\overline{C_s^w} = 1 - C_s^w$ , onde a diferença permanece devido à presença da constante de adsorção, que será apresentada na próxima seção.

Destacamos que durante esse trabalho, embora uma função de fluxo fracionário específica seja adotada, todas as demonstrações a serem apresentadas precisam apenas que a função de fluxo fracionário da fase aquosa satisfaça as condições *a)*, *b)* e *c)* apresentadas acima.

### 3.4 Modelo do transporte de espuma em meios porosos com adsorção linear do surfactante

Nesta seção, apresentamos o modelo adotado para descrever o fluxo de espuma em meio poroso com adsorção linear do surfactante. Para isso, assumimos:

- meio poroso homogêneo;
- fluxo bifásico de água e gás;
- fluxo unidimensional;
- viscosidades Newtonianas;
- ausência de gradiente de pressão capilar;
- efeitos gravitacionais desprezíveis;
- ausência do fenômeno de dispersão;
- fases incompressíveis;
- ausência de *viscous fingering*;
- atingimos imediatamente o comportamento de equilíbrio local.

Ressaltamos que hipóteses análogas foram adotadas em outros trabalhos para obter soluções analíticas, onde podemos citar [70, 71, 84, 2]. Sob essas hipóteses, é

possível descrever nosso problema através do seguinte sistema de leis de conservação

$$\phi \partial_t S_w + \partial_x u_w = 0, \quad (3.11)$$

$$\partial_t [\phi \rho_w S_w C_s^w + (1 - \phi) \rho_s C_s^s] + \partial_x [\rho_w C_s^w u_w] = 0, \quad (3.12)$$

onde  $\rho_w$  é a densidade da água,  $\rho_s$  é a densidade da rocha,  $C_s^w$  é a concentração do surfactante na água (como definido na seção anterior). A concentração de surfactante adsorvido no meio poroso seguindo a adsorção de Henry é dada por

$$C_s^s = K_d^a C_s^w, \quad (3.13)$$

onde  $K_d^a$  é conhecido como o coeficiente de Henry[81]. A Eq. (3.11) representa a conservação da massa da água. Já a Eq. (3.12) representa a conservação do surfactante, adsorvido de maneira linear no meio poroso.

A permeabilidade relativa da fase  $j$  segue a relação de Brooks-Corey [7], dada por:

$$k_{rj}(S_w) = k_{rj}^0 \left( \frac{S_j - S_{jr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_j}, \quad j = \{w, g\}, \quad (3.14)$$

onde  $k_{rj}^0$  é o ponto final da permeabilidade relativa,  $n_j$  é o expoente de Corey relacionado com a molhabilidade,  $S_{wc}$  e  $S_{gr}$  são as saturações residuais de cada fase. A permeabilidade relativa do gás na presença de espuma é dada por

$$k_{rg}^f(S_w, C_s^w) = k_{rg}(S_w) \cdot FM(S_w, C_s^w), \quad (3.15)$$

onde  $FM$  é o fator de redução de mobilidade. Ao passo que as permeabilidades relativas das fases aquosa e gasosa dependem apenas das saturações, para representar o efeito do aumento da concentração de surfactante na espuma, o termo  $FM$  dentro de  $k_{rg}^f$  depende também da concentração de surfactante.

A velocidade superficial da água é a mesma que apresentada em (3.7), porém a velocidade superficial da fase gasosa é modificada devido à presença da espuma, tomando a seguinte forma

$$u_g(S_w, C_s^w) = - \frac{k k_{rg}^f(S_w, C_s^w)}{\mu_g} \nabla p. \quad (3.16)$$

Para tornar nosso sistema adimensional e normalizado, adotamos as seguintes variáveis independentes:

$$t' = \frac{u t}{(1 - S_{wc} - S_{gr}) \phi L}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad (3.17)$$

onde  $L$  é o comprimento do reservatório. A saturação de água e concentração de surfactante normalizados e adimensionais podem ser expressas como:

$$S = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{gr}}, \quad C = \frac{C_s^w}{C_{max}}, \quad (3.18)$$

onde  $C_{max}$  representa uma concentração de referência. Usando (3.17) e (3.18) é possível reescrever a função de fluxo fracionário da água como

$$f(S, C) = \frac{k_{rw}(S)}{k_{rw}(S) + (\mu_w/\mu_g)k_{rg}^f(S, C)}. \quad (3.19)$$

Dessa forma, podemos reescrever (3.11)-(3.12) nas variáveis adimensionais (3.17) e (3.18), obtendo o seguinte sistema

$$\partial_t S + \partial_x f(S, C) = 0, \quad (3.20)$$

$$\partial_t [(S + \mathcal{A})C] + \partial_x [f(S, C)C] = 0, \quad (3.21)$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma constante positiva dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \left( S_{wc} + \frac{(1 - \phi)\rho_s K_d^a}{\rho_w \phi} \right). \quad (3.22)$$

Note que essa constante contém informações sobre a normalização do modelo e adsorção do surfactante no meio poroso.

Uma vez que estamos considerando que  $f$  satisfaz as propriedades apresentadas na Seção 3.3, quando  $C$  é constante temos que o sistema (3.20)-(3.21) se reduz à equação de Buckley-Leverett (ver Seção 2.1.2).

De agora em diante, estudamos o problema de Riemann do sistema (3.20)-(3.21) considerando o seguinte dado inicial

$$(S(x, 0), C(x, 0)) = \begin{cases} (S_L, C_L), & \text{se } x < 0, \\ (S_R, C_R), & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Denotamos os pares  $(S_L, C_L)$  e  $(S_R, C_R)$  por  $U_L$  e  $U_R$ , respectivamente.

### 3.5 Modelo CMG-STARS

Nesta seção apresentamos o modelo implementado no simulador CMG-STARS [15, 82], que será utilizado durante esse trabalho. Também mostramos

que a função de fluxo fracionário da água implementada nesse modelo, para um determinado conjunto de parâmetros, satisfaz as condições apresentadas na Seção 3.3, possibilitando a aplicação da teoria aqui desenvolvida.

A permeabilidade relativa adimensional do gás na presença da espuma pode ser expressa como na Eq. (3.15), onde  $FM$  é o fator de redução da mobilidade dado por

$$FM(S, C) = (1 + fmmob F_1(C) \cdot F_2(S))^{-1}. \quad (3.24)$$

Aqui,  $fmmob$  representa o fator de redução de mobilidade de referência (se esse parâmetro é zero, não temos espuma). A função  $F_2$  representa os efeitos da saturação da água:

$$F_2(S) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(epdry((1 - S_{wc} - S_{gr})S + S_{wc} - fmdry))}{\pi}, \quad (3.25)$$

onde  $fmdry$  é a saturação crítica da água (abaixo da qual temos a coalescência das bolhas) e  $epdry$  representa o declive dos efeitos de secagem [83, 54]. A função  $F_1$  descreve os efeitos da concentração de surfactante, dada por

$$F_1(C) = \begin{cases} \left( \frac{C_{max} C}{fmsurf} \right)^{epsurf}, & \text{se } C_{max} C < fmsurf, \\ 1, & \text{se } C_{max} C \geq fmsurf, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $fmsurf$  é a concentração crítica de surfactante e  $epsurf$  um expoente.

### 3.5.1 Verificação das propriedades da função de fluxo fracionário

Nesta subseção, mostramos que a função de fluxo fracionário implementada CMG-STARs com os parâmetros da Tabela 1 satisfaz as condições *a*), *b*) e *c*) apresentada na seção 3.3.

- a*) Neste item queremos mostrar que  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $f(0, C_s^w) = 0$ ,  $f(1, C_s^w) = 1$  e  $\partial_S f(0, C) = 0 = \partial_S f(1, C)$ . Uma vez que  $f$  é dada pela Eq. (3.19) e as funções  $k_{rw}$  e  $k_{rg}^f$  são  $\mathcal{C}^2$ , concluímos que  $f \in \mathcal{C}^2$ . Além disso, mantendo em mente que  $k_{rw}(0) = 0$ , para todo  $C \in I$  temos

$$f(0, C) = \lim_{S \rightarrow 0} f(S, C) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{k_{rw}(S)}{k_{rw}(S) + \mu k_{rg}^f(S, C)} = 0. \quad (3.27)$$

Tabela 1 – Valores de parâmetros utilizados. Fontes: [15, 75, 36].

Símbolo	Parâmetro	Valor
$k_{rw}^0$	Ponto final da permeabilidade relativa da água	0.302
$k_{rg}^0$	Ponto final da permeabilidade relativa do gás	0.004
$n_w$	Expoente de Corey para a água	2
$n_g$	Expoente de Corey para o gás	2
$\mu_w$	Viscosidade da água	1e-03 [Pa · s]
$\mu_g$	Viscosidade do gás	5e-05 [Pa · s]
$\phi$	Porosidade	0.21
$\rho_w$	Densidade da rocha	2000
$fmmob$	Fator de redução de mobilidade	293.27
$fmdry$	Saturação crítica da água	0.437
$epdry$	Declive dos efeitos de secagem	359.33
$S_{wc}$	Saturação de água conata	0.43
$S_{gr}$	Saturação de gás residual	0.293
$fmsurf$	Concentração crítica de surfactante	2 [g/L]
$epsurf$	Coefficiente de força da espuma	1 [g/L]
$C_{max}$	Concentração máxima de surfactante	2 [g/L]
$K_d^a$	Constante de adsorção	0.05

Analogamente, como  $k_{rg}^f(1, C) = 0$  para todo  $C \in I$ , obtemos que  $f(1, C) = 1$  para todo  $C \in I$ .

Agora resta mostrar que  $\partial_S f(0, C) = 0 = \partial_S f(1, C)$ . Para isso, precisamos apresentar a expressão para  $\partial_S f(S, C)$ . Uma vez que  $f$  pode ser expressa como uma razão entre expressões envolvendo  $k_{rw}(S)$  e  $k_{rg}^f(S, C)$ , usando as regras de derivação [51] segue que

$$\partial_S f(S, C) = -\mu f(S, C)^2 \frac{k_{rw}(S) \partial_S k_{rg}^f(S, C) - k'_{rw}(S) k_{rg}^f(S, C)}{k_{rw}(S)^2}. \quad (3.28)$$

Uma vez que  $f(0, C) = 0$  e  $k_{rg}^f(1, C) = 0 = \partial_S k_{rg}^f(1, C)$ , concluímos que  $\partial_S f(0, C) = 0 = \partial_S f(1, C)$  para todo  $C \in I$ .

- b) Queremos mostrar que  $\partial_S f(\cdot, C) > 0$  e que  $f(\cdot, C)$  possui um único ponto de inflexão para cada  $C \in I$ . Da Eq. 3.28, notamos que para concluir que  $\partial_S f(\cdot, C) > 0$  basta mostrarmos que  $k_{rw}(S) \partial_S k_{rg}^f(S, C) - k'_{rw}(S) k_{rg}^f(S, C)$  é negativo para todo  $S \in I$  e  $C \in I$ . Uma vez que  $k_{rw}(S) > 0$ ,  $\partial_S k_{rg}^f(S, C) < 0$ ,  $k'_{rw}(S) > 0$  e  $k_{rg}^f(S, C) > 0$  para todos  $(S, C) \in I \times I$ , segue que

$k_{rw}(S)\partial_S k_{rg}^f(S, C) - k'_{rw}(S)k_{rg}^f(S, C)$  é negativo para todos  $S$  e  $C$  em  $I$ . Dessa forma, segue que  $\partial_S f(\cdot, C)$  é positivo.

Devido à complexidade da função  $f$ , não foi possível calcular  $\partial_{SS} f(S, C)$  explicitamente. Por esse motivo, realizamos simulações numéricas visando confirmar que  $\partial_{SS} f(S, C)$  possui um único ponto de inflexão. A Fig. 7 apresenta a derivada segunda de  $f$  em relação a  $S$  para todo  $S$  e alguns valores de  $C$ . Para os valores de  $C$  adotados, a função  $\partial_{SS} f(\cdot, C)$  possui apenas um ponto de inflexão, onde é positiva à esquerda e negativa à direita desse ponto. Destacamos ainda esse resultado vale com a utilização dos expoentes de Corey, consistentes com resultados laboratoriais [36], e para os parâmetros apresentados na Tabela 1. Uma verificação rigorosa sobre a existência de um único ponto de inflexão ainda é um problema em aberto [10].

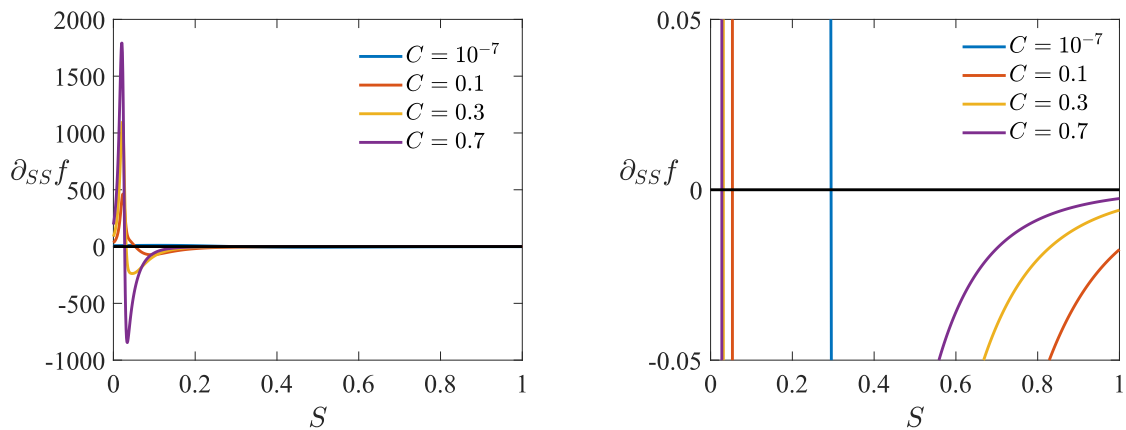


Figura 7 – Derivada segunda da  $f$  em relação a  $S$  para diferentes valores de  $C$ . O painel da direita é um zoom do painel esquerdo para  $\partial_{SS} f$  entre  $-0.05$  e  $0.05$ .

- c) Finalmente, mostramos neste item que a derivada de  $f$  em relação a  $C$  é positiva para todos  $(S, C) \in I \times I$ . Temos que a função  $\partial_C f(S, C)$  é dada por

$$\partial_C f(S, C) = -\frac{\mu_w}{\mu_g} f(S, C) \left( \frac{\partial_C k_{rg}^f(S, C)}{k_{rw}(S) + \mu_w/\mu_g k_{rg}^f(S, C)} \right). \quad (3.29)$$

Uma vez que  $fmsurf = C_{max}$  e  $epsurf = 1$ , segue que  $\partial_C k_{rg}^f(S, C) < 0$  para todos  $C \in I$  e  $S \in (0, 1)$ . Uma vez que  $k_{rw}(S) > 0$ ,  $f(S, C) > 0$  e

$k_{rg}^f(S, C) > 0$  para todos  $S \in (0, 1)$  e  $C \in I$ , concluimos que  $\partial_C f(S, C) > 0$  para todos  $C \in I$  e  $S \in (0, 1)$ .



#### 4 SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE RIEMANN

Neste capítulo apresentamos como construir a solução para o problema de Riemann associado ao sistema (3.20)-(3.21). Os resultados apresentados neste capítulo se encontram em [28], e um caso particular em [27]. Podemos reescrever nosso sistema na forma geral:

$$G(U)U_t + F(U)U_x = 0, \quad (4.1)$$

onde  $U = (S, C)^T$  e as matrizes  $G(U)$  e  $F(U)$  são dadas por

$$G(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & S + \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \partial_S f & \partial_C f \\ C\partial_S f & f + C\partial_C f \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Notemos que a matriz  $G(U)$  é não singular  $\forall U \in I \times I$ , uma vez que  $\det(G(U)) = S + \mathcal{A} \neq 0$ . Dessa forma,  $G(U)$  é uma matriz inversível (para mais detalhes ver [35]). Multiplicando (4.1) pela matriz inversa de  $G(U)$ ,  $G^{-1}(U)$ , obtemos o seguinte sistema

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad (4.3)$$

onde a matriz  $A(U) = G^{-1}(U) \cdot F(U)$  é dada por

$$A(U) = \begin{bmatrix} \partial_S f & \partial_C f \\ 0 & f/(S + \mathcal{A}) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Os autovalores e autovetores associado à matriz  $A(U)$  são:

$$\lambda_S = \partial_S f, \quad r_S = (1, 0)^T, \quad (4.5)$$

$$\lambda_C = f/(S + \mathcal{A}), \quad r_C = (\partial_C f, f/(S + \mathcal{A}) - \partial_S f)^T. \quad (4.6)$$

Denotaremos por:

- $S$ -família característica o par composto pelo autovalor  $\lambda_S(U)$  e autovetor  $r_S(U)$ .
- $C$ -família característica o par composto pelo autovalor  $\lambda_C(U)$  e autovetor  $r_C(U)$ .

A seguir é mostrado que existe um conjunto de pontos onde  $\lambda_S(U) = \lambda_C(U)$ , e além disso, esse conjunto forma uma curva no plano  $S$ - $C$ .

**Proposição 4.1.** Para cada  $C \in I$ , existe um único  $S^* = S^*(C)$  no interior do intervalo  $I$  tal que

$$\lambda_C(S^*, C) = \lambda_S(S^*, C). \quad (4.7)$$

*Demonstração.* Fixado  $C \in I$ , definimos

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.8)$$

$$S \mapsto f(S, C)/(S + \mathcal{A}) - \partial_S f(S, C) \quad (4.9)$$

Das Eqs. (4.6)-(4.5) e das propriedades de  $f$ , segue que  $\phi \in \mathcal{C}^1$  e temos  $\phi(S) = 0$  se, e somente se  $\lambda_S(U) = \lambda_C(U)$ . Dessa forma, para concluir que existe um único valor de  $S^* \in (0, 1)$  tal que a relação (4.7) é satisfeita, basta mostrar que  $\phi$  possui uma única raiz em  $(0, 1)$ . A derivada de  $\phi$  em relação a  $S$  é dada por

$$\phi'(S) = -\partial_{SS} f(S, C)(S + \mathcal{A}). \quad (4.10)$$

Dessa forma, temos que

$$\phi'(S) < 0 \text{ se } S < S^i, \quad \phi'(S) = 0 \text{ se } S = S^i, \quad \phi'(S) > 0 \text{ se } S > S^i, \quad (4.11)$$

onde  $S^i$  é o ponto de inflexão de  $f(\cdot, C)$ . Uma vez que  $\phi(0) = 0$ , a relação acima nos diz que  $\phi$  possui um ponto de mínimo em  $S^i(C)$  e  $\phi(S^i) < 0$ . Além disso, como  $\phi(1) = 1$  e para  $S < S^i$  temos  $\phi'(S) > 0$ ; pelo Teorema do Valor Intermediário segue que existe um único  $S^* = S^*(C)$  tal que  $\phi(S^*) = 0$ , como mostra a Fig. 8.  $\square$

O conjunto de pontos  $S^*(C)$  para  $C \in I$  apresentado na Proposição 4.1 é chamado de **curva de Transição**, e denotada por  $\mathcal{T}$ . Uma vez que para cada  $C$  temos um ponto sobre  $\mathcal{T}$ , segue que essa curva divide o plano de fase. Dessa forma, consideramos o plano de fase como a união de três conjuntos (ver Fig. 9):

$$\mathcal{T} = \{U = (S, C) \in I \times I : \lambda_S(U) = \lambda_C(U)\}, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L} = \{U = (S, C) \in I \times I : \lambda_S(U) > \lambda_C(U)\}, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{R} = \{U = (S, C) \in I \times I : \lambda_S(U) < \lambda_C(U)\}. \quad (4.14)$$

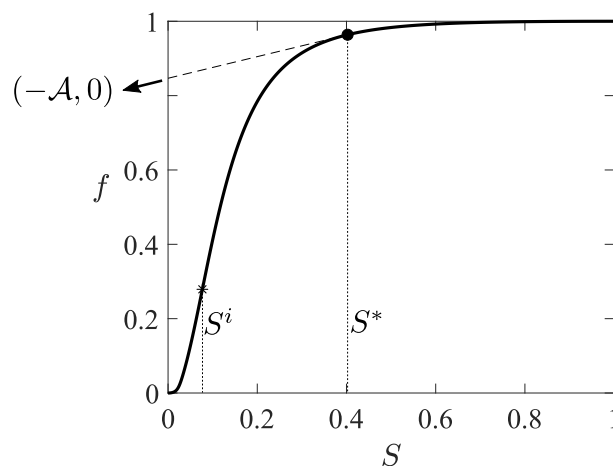


Figura 8 – Função de fluxo fracionário com o ponto de inflexão de secante ligando  $(-\mathcal{A}, 0)$  a  $(S^*, f(S^*, C))$ , cuja inclinação coincide com  $\partial_S f(S^*, C)$ .

Temos que sobre  $\mathcal{T}$  os autovalores  $r_S$  e  $r_C$  são linearmente dependentes (ver Eq. (4.5)-(4.6)). Dessa forma, a matriz  $A(U)$  não é diagonalizável em  $\mathcal{T}$ , implicando que o sistema (3.20)-(3.21) não é estritamente hiperbólico.

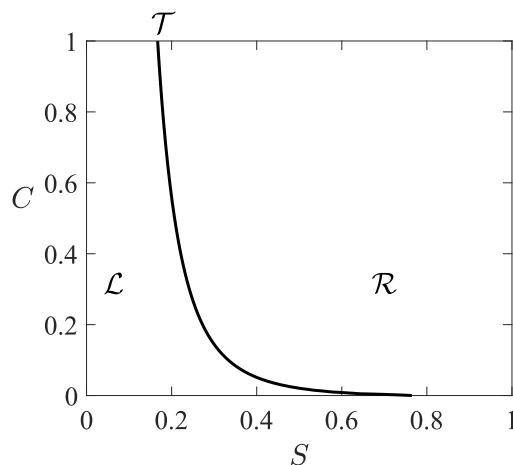


Figura 9 – Plano de fase composto pelos conjuntos  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$ , e separados pela curva  $\mathcal{T}$ .

#### 4.1 Ondas fundamentais

Nesta seção temos como objetivo obter algumas propriedades relacionadas às ondas que vão compor a solução do problema de Riemann associado ao sistema

(3.20)-(3.21). Para isso, primeiro classificamos nossas famílias características, conforme apresentado na Seção **2.1.3**.

Notemos que

$$\nabla\lambda_C \cdot r_C = 0, \quad (4.15)$$

o que implica que a  $C$ -família característica é linearmente degenerada, possuindo soluções na forma de descontinuidades de contato. Por outro lado, temos que a  $S$ -família característica satisfaz a seguinte relação

$$\nabla\lambda_S \cdot r_S = \partial_{SS}f. \quad (4.16)$$

Uma vez que  $f$  possui um único ponto de inflexão para cada  $C$  fixo, concluímos que essa família não é linearmente degenerada nem genuinamente não linear. Diremos que esta possui uma **degeneração linear local** [5] no ponto de inflexão (onde  $\nabla\lambda_S \cdot r_S = 0$ ). A seguir analisamos o comportamento de cada onda que compõe nossa solução.

#### 4.1.1 Ondas de rarefação

Uma vez que a  $C$ -família característica é genuinamente não linear, ondas de rarefação podem ocorrer na  $C$ -família característica. Conforme apresentado na Seção 2.1.3.3, as curvas de propagação de uma  $S$ -rarefação são dadas pelas curvas integrais associadas ao autovetor  $r_S$ . Uma vez que  $r_S = (1, 0)$ , segue que sua curva integral é dada por uma reta mantendo  $C$  constante. Concluímos assim que as ondas de rarefação mantêm o valor de  $C$  fixo, logo seguem a solução da equação de Buckley-Leverett.

#### 4.1.2 Ondas de choque e de contato

Conforme apresentado nas Seções 2.1.3.1-2.1.3.2, descontinuidade de choque e contato devem satisfazer a condição RH. Para o sistema (4.1), a condição RH para uma descontinuidade conectando  $U_L$  a  $U_R$  com velocidade de propagação  $\sigma$  é dada por

$$f(U_R) - f(U_L) = \sigma(S_R - S_L), \quad (4.17)$$

$$f(U_R)C_R - f(U_L)C_L = \sigma((S_R + \mathcal{A})C_R - (S_L + \mathcal{A})C_L). \quad (4.18)$$

Isolando  $\sigma$  em cada equação do sistema (4.17) e igualando as expressões obtidas, segue que

$$\frac{f(U_R) - f(U_L)}{S_R - S_L} = \frac{C_R(f(U_R) - C_L f(U_L))}{C_R(S_R + \mathcal{A}) - C_L(S_L + \mathcal{A})}. \quad (4.19)$$

Após algumas operações algébricas, obtemos

$$0 = (C_R - C_L)(S_R f(U_L) - S_L f(U_R) - \mathcal{A}(f(U_R) - f(U_L))). \quad (4.20)$$

Tal relação é válida se, e somente se

$$C_L = C_R \quad \text{ou} \quad \lambda_C(U_L) = \frac{f(U_L)}{S_L + \mathcal{A}} = \frac{f(U_R)}{S_R + \mathcal{A}} = \lambda_C(U_R). \quad (4.21)$$

No primeiro caso, temos a ocorrência de um choque, que mantêm o valor de  $C$  fixo e segue a equação de Buckley-Leverett. Já no segundo caso temos a ocorrência de um contato.

Gostaríamos agora de determinar o comportamento das curvas  $\lambda_C = \text{constante}$ , sendo as curvas de propagação do contato no plano de fase. Escrevendo  $C = C(S)$  e tomando  $K$  uma constante arbitrária, temos que

$$0 = \frac{dK}{dS} = \frac{d\lambda_C}{dS} = \frac{\lambda_C - \lambda_S}{\partial_C f}. \quad (4.22)$$

Das definições dos conjuntos  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$ , segue que

$$d_S C(S) < 0 \text{ em } \mathcal{L}, \quad d_S C(S) > 0 \text{ em } \mathcal{R}. \quad (4.23)$$

Portanto, a curva  $\lambda_C = \text{constante}$  é decrescente em  $\mathcal{L}$  e crescente em  $\mathcal{R}$ . Destacamos que nem sempre temos essa curva intersectando a curva de transição  $\mathcal{T}$ , conforme mostra a Fig. 10. Para os casos em que essa interseção ocorre, temos  $d\lambda_C/dS = 0$  em  $\mathcal{T}$ , implicando que o mínimo da curva  $\lambda_C = \text{constante}$  se encontra sobre a curva de transição  $\mathcal{T}$ .

**Observação.** Conforme apresentado acima, temos duas possibilidades para a velocidade de propagação da descontinuidade. Para o caso  $C_L = C_R$ , um choque ocorre e sua velocidade é dada por

$$\sigma = \frac{f(U_R) - f(U_L)}{S_R - S_L}, \quad (4.24)$$

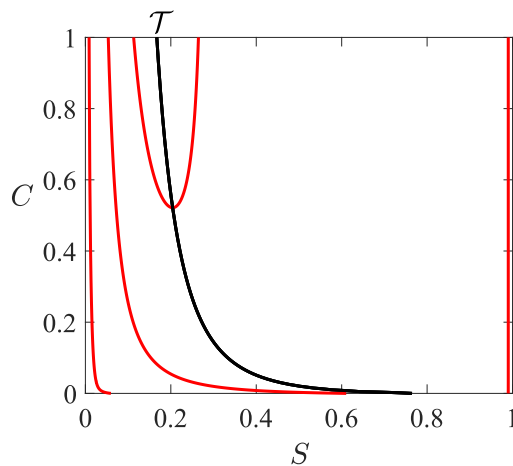


Figura 10 – Plano de fase com a curva de transição (linha preta contínua) e curvas  $\lambda_C(U) = \text{constante}$  (linhas vermelhas contínuas) para três valores de  $U$ .

que é a velocidade de propagação de um choque seguindo a equação de Buckley-Leverett. Já assumindo que  $C_L \neq C_R$ , temos a ocorrência de um contato com velocidade de propagação dada por

$$\sigma = \lambda_C(U_L) = \lambda_C(U_R). \quad (4.25)$$

#### 4.1.3 Critério de admissibilidade

Conforme apresentado na Seção 2.1.3, é necessário adotar condições de entropia para determinar a solução entrópica do problema de Riemann. Nessa seção temos como objetivo fazer uma breve revisão sobre as condições de entropia encontradas na literatura e apresentar a condição de admissibilidade que será adotada durante esse trabalho. Para isso, a seguinte definição se faz necessária:

**Definição 4.1.** Seja  $\sigma$  a velocidade de propagação de uma descontinuidade conectando  $U_L$  e  $U_R$  que satisfaz a condição RH. Dizemos que a velocidade característica  $\lambda_P$  associada à  $P$ -família:

- **entra na descontinuidade**, se  $\lambda_P(U_L) > \sigma$  ou  $\lambda_P(U_R) < \sigma$ ;
- **deixa a descontinuidade**, se  $\lambda_P(U_L) < \sigma$  ou  $\lambda_P(U_R) > \sigma$ .

Geometricamente, dizer que uma velocidade característica entra na descontinuidade significa que a reta com inclinação  $\lambda_P(U_L)$  (ou  $\lambda_P(U_R)$ ) colide com

a reta de propagação da descontinuidade. Já a velocidade característica deixa a descontinuidade se a reta com inclinação  $\lambda_P(U_L)$  (ou  $\lambda_P(U_R)$ ) se afasta da reta de propagação da descontinuidade.

É possível descrever a condição de entropia de Lax em termos da definição apresentada acima:

**Definição 4.2.** Para uma  $P$ -família característica genuinamente não linear associada ao sistema (2.2), a **condição de entropia de Lax** diz que o salto de  $U_L$  a  $U_R$  é admissível somente se as características da  $P$ -família característica entram na descontinuidade e exatamente uma das características das demais famílias deixam a descontinuidade. Se a  $P$ -família característica é linearmente degenerada, a condição de entropia de Lax diz que o salto de  $U_L$  a  $U_R$  é entrópico se as  $P$ -características são tangentes à descontinuidade, enquanto exatamente uma das características das demais famílias deixam a descontinuidade.

Uma vez que a condição de entropia de Lax pede por sistemas estritamente hiperbólicos, não é possível aplicar tal condição para o sistema (4.3). Liu [52] generalizou essa condição para problemas estritamente hiperbólico com famílias características que possuem degenerações. Já para sistemas não estritamente hiperbólicos com uma família genuinamente não linear e outra linearmente degenerada, Keyfitz & Kranzer [43] apresentaram a condição de entropia de Lax generalizada, onde em adição aos estados que satisfazem a condição de entropia de Lax, considera-se os limites desses pontos. No trabalho de Barkve [5] temos a presença de duas curvas de transição e não há restrição a respeito da quantidade de pontos de inflexão de  $f$ , onde a condição de entropia adotada é equivalente à condição de entropia de Lax generalizada na ausência de degenerações locais. Nos trabalhos [37, 38, 72] foi tratada a inundação de polímero, descrito por um modelo com as mesmas propriedades que o sistema (4.3), onde apesar de uma das famílias possuir degenerações, a condição de entropia de Lax generalizada ou uma condição similar foi adotada. Ainda no contexto de inundação de polímero podemos citar o trabalho de Petrova *et al* [58], que apresentam um critério mais físico e mostram que este implica nas condições de entropia adotadas em [43, 37, 38]. Por simplicidade, adotamos neste trabalho a condição de entropia apresentada por Isaacson & Temple [38], definida como segue.

**Definição 4.3.** Uma  $C$ -onda é admissível se conecta estados que se encontram no mesmo lado curva de transição  $\mathcal{T}$  no plano de fase. Uma  $S$ -onda é admissível se satisfaz uma condição de entropia usual para leis de conservação escalares.

Uma vez que a função  $f$  possui um ponto de inflexão, adotamos a condição de entropia de Oleinik (análogo à Eq. 2.16) para a família  $S$ , dada por

$$\frac{f(U) - f(U_L)}{S - S_L} \geq \sigma \geq \frac{f(U) - f(U_R)}{S - S_R}, \quad (4.26)$$

para todo  $U$  entre  $U_L$  e  $U_R$ .

Fazendo  $S$  tender a  $S_L$  e  $S_R$  na Eq. (4.26), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\lambda_S(U_L) = \partial_S f(U_L) \geq \sigma \geq \partial_S f(U_R) = \lambda_S(U_R). \quad (4.27)$$

Uma vez que uma  $S$ -onda é composta por um choque, rarefação ou uma sequência de ambos, a Eq. (4.27) implica que a velocidade inicial de uma  $S$ -onda é no máximo  $\lambda_S(U_L)$  e a velocidade final no mínimo  $\lambda_S(U_R)$ .

Da condição de RH apresentada em (2.37), segue que

$$\sigma = \frac{f(U_R)C_R - f(U_L)C_L}{(S_R + \mathcal{A})C_R - (S_L + \mathcal{A})C_L}. \quad (4.28)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação acima na seguinte forma:

$$\frac{C_R (S_R + \mathcal{A})}{C_L (S_L + \mathcal{A})} [\sigma - \lambda_C(U_R)] = \sigma - \lambda_C(U_L). \quad (4.29)$$

Uma vez que  $(S + \mathcal{A})$  e  $C$  são positivos para todos  $(S, C) \in I \times I$ , para  $\sigma \neq \lambda_C(U_L)$  e  $\sigma \neq \lambda_C(U_R)$ , a relação acima nos dá que  $\sigma - \lambda_C(U_L)$  e  $\sigma - \lambda_C(U_R)$  possuem o mesmo sinal. Dessa forma, quando um choque ocorre já temos uma característica da  $C$ -família característica entrando e uma saindo, implicando que é necessário analisar o comportamento apenas das características pertencentes à família  $S$ .

#### 4.1.4 Função entropia

Uma função entropia  $E$  para um sistema de leis de conservação hiperbólico é uma função escalar das variáveis dependentes, que possuem as seguintes propriedades [50, 5]:



1.  $E$  é convexa, i.e., sua Hessiana é positiva definida.
2. Existe uma função escalar  $F$  tal que  $dF = dE \cdot A$ , onde  $A$  é a matriz associada ao fluxo do sistema de leis de conservação.

Da condição (2) apresentada acima, juntamente com a expressão da matriz  $A$  (ver Eq. (4.4)), obtemos que as funções  $E$  e  $F$  devem satisfazer a seguinte relação

$$\partial_S F = \partial_S E \partial_S f, \quad (4.30)$$

$$\partial_C F = \partial_S E \partial_C f + g \partial_C E, \quad (4.31)$$

onde tomamos  $g = \lambda_C$  para facilitar a notação (ver Eq. (4.6)). Derivando a Eq. (4.30) com respeito a  $C$  e a Eq. (4.31) com respeito a  $S$ , segue que

$$\partial_{SC} F = \partial_{SC} E \partial_S f + \partial_S E \partial_{SC} f, \quad (4.32)$$

$$\partial_{CS} F = \partial_{SS} E \partial_C f + \partial_S E \partial_{CS} f + \partial_{CS} E g + \partial_C E \partial_S g. \quad (4.33)$$

Assumindo  $E, F \in \mathcal{C}^2$ , podemos igualar as expressões (4.32) e (4.33), obtendo

$$\partial_{SC} E \partial_S g (S + \mathcal{A}) - \partial_{SS} E \partial_C g (S + \mathcal{A}) - \partial_C E \partial_S g = 0. \quad (4.34)$$

Consideremos as coordenadas polares  $(r, \theta)$  dadas por

$$r = (S + \mathcal{A})\sqrt{C^2 + 1}, \quad \theta = C. \quad (4.35)$$

Introduzindo as variáveis polares, podemos reescrever a Eq. (4.34) como

$$\partial_{rr} E \partial_\theta g r - \partial_{r\theta} E \partial_r g r + \partial_\theta E \partial_r g = 0, \quad (4.36)$$

ou de maneira equivalente

$$(\partial_\theta g, -\partial_r g) \cdot \nabla(r \partial_r E - E) = 0. \quad (4.37)$$

Como o vetor  $(\partial_\theta g, -\partial_r g)$  é tangente à curva de nível de  $g$ , segue que

$$r \partial_r E - E = \phi(g), \quad (4.38)$$

onde  $\phi(g)$  é uma função arbitrária de  $g$ . Multiplicando a Eq. (4.38) por  $1/r^2$  e integrando com respeito a  $r$ , obtemos

$$E = r \int \frac{\phi}{r^2} dr + r\psi \quad (4.39)$$

onde  $\psi$  é uma função arbitrário de  $\theta$ . Dessa forma, é possível calcular a derivada segunda da função entropia  $E$ , dada por

$$\partial_{rr}E = \frac{\phi'}{r} \partial_r g, \quad (4.40)$$

onde  $\phi'$  representa a derivada de  $\phi$  com respeito a  $g$ . Para  $E$  ser convexa precisamos que  $E_{rr}$  seja positiva em  $I \times I$ . Retornando às variáveis  $(S, C)$ , a Eq. (4.40) assume a forma

$$\partial_{rr}E = \frac{\partial_{SS}E}{C^2 + 1} = \frac{\phi'}{C^2 + 1} \frac{\partial_S g}{S + \mathcal{A}}. \quad (4.41)$$

Uma vez que

$$\frac{\partial_S g}{S + \mathcal{A}} = \frac{\lambda_S - \lambda_C}{(S + \mathcal{A})^2}, \quad (4.42)$$

concluimos que  $\partial_{rr}E$  troca de sinal ao atravessar a curva de transição. Assim, não é possível construir uma função entropia contínua convexa em  $I \times I$ , e na curva de transição não é possível construir uma função localmente convexa. Em adição ao feito acima, em [5] foram adicionados comentários sobre a produção de entropia proveniente das funções  $E$  e  $F$ . Notou-se que, para descontinuidades completamente contidas em apenas um dos lados da curva de transição, a condição de admissibilidade de choque (ver Definição 4.3) é equivalente ao aumento ou decrescimento da produção de entropia. Já descontinuidades que cruzam a curva de transição podem ter uma produção de entropia nula, possibilitando a perda de unicidade da solução (que será apresentada na Seção 4.3). Destacamos que no trabalho [5] é comentado que a falta de uma entropia bem comportada pode refletir falhas no modelo.

## 4.2 Construção da solução do problema de Riemann

Nesta seção temos como objetivo apresentar condições necessárias e suficientes para descrever a solução do problema de Riemann (3.20)-(3.21), (3.23) como uma sequência de  $S$  e  $C$  ondas compatíveis. Tal resultado é enunciado na forma do seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *Para estados arbitrários  $U_L \in I \times I$  e  $U_R \in I \times I$ , existe uma quantidade finita de sequências de ondas compatíveis de  $S$  e  $C$  ondas que resultam na solução do problema de Riemann (3.20)-(3.21) com estado à esquerda  $U_L$  e estado à direita  $U_R$ . A solução não é única no plano de fase, mas é única no plano  $x-t$ .*

A demonstração do Teorema 4.1 se dá como consequência de Lemas auxiliares, que serão demonstrados abaixo. Antes, apresentamos uma definição que auxiliará nas demonstrações que seguem.

**Definição 4.4.** Dado um estado  $U = (S, C)$ , definimos por  $S^k = S^k(U)$  o conjunto de possíveis valores de  $S$  satisfazendo

$$\lambda_C(U) = \lambda_C(S^k, C). \quad (4.43)$$

Geometricamente, a relação (4.43) implica que os estados  $U$  e  $(S^k, C)$  se encontram sobre a mesma função de fluxo fracionário, e a mesma secante que os liga ao ponto  $(-\mathcal{A}, 0)$ . Dessa forma,  $S^k$  pode ser obtido pela interseção entre a função de fluxo fracionário  $f(\cdot, C)$  e a reta que liga  $(-\mathcal{A}, 0)$  a  $U$  (ver Fig. 11). Caso  $S = S^*(C)$ , tomamos  $S^k(U) = S^*(C)$ . E para os demais casos onde tal interseção ocorre apenas em  $U$ , tomamos  $S^k(U) = +\infty$ .

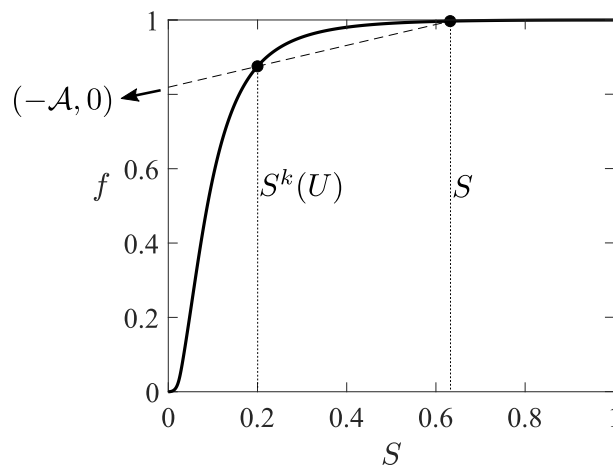


Figura 11 – Representação geométrica de  $S^k(U)$  para um estado  $U$  fixado. É obtido através da interseção da secante tracejada conectando  $(-\mathcal{A}, 0)$  a  $(S, f(U))$  e a função de fluxo fracionário  $f(\cdot, C)$ .

Vemos então que

- Se  $U \in \mathcal{R}$ , então  $S^k(U)$  sempre existe e se encontra em  $\mathcal{L}$ .
- Se  $U \in \mathcal{T}$ , então  $S^k(U)$  sempre existe e se encontra em  $\mathcal{T}$ .
- Se  $U \in \mathcal{L}$ , podemos ter  $S^k(U) = +\infty$ . Caso  $S^k(U) \neq +\infty$ , temos  $S^k(U) \in \mathcal{R}$ .

Para facilitar notação, denotamos por  $v_i^P$  a velocidade inicial de uma  $P$ -onda, e  $v_f^P$  a velocidade final de uma  $P$ -onda. Finalmente, temos as definições e notações necessárias para apresentar os lemas que serão utilizados para demonstrar o Teorema 4.1.

**Lema 4.1.1.** *Consideremos a sequência de ondas*

$$U_L \xrightarrow{C} U_M \xrightarrow{S} U_R, \quad (4.44)$$

com  $U_L \neq U_R$ . Esta onda é compatível se, e somente se,  $U_M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$  e  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ .

*Demonstração.* Uma vez que o valor de  $C$  é alterado apenas através de uma  $C$ -onda, podemos identificar  $U_M = (S_M, C_R)$ . Queremos determinar condições para garantir que a sequência de ondas seja compatível, ou seja, queremos que

$$\lambda_C(U_M) = v_f^c \leq v_i^s \leq \lambda_S(U_M), \quad (4.45)$$

onde a última desigualdade vem de (4.27). Dessa forma, uma condição necessária é  $U_M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ . Assumindo que  $U_M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ , temos duas possibilidades para a velocidade inicial da  $S$ -onda:

- $v_i^s$  é a velocidade de um choque. Assumindo a existência de  $S^k = S^k(U_M)$ , segue que

$$\lambda_C(U_M) = \frac{f(S^k, C_R) - f(U_M)}{S^k - S_M}, \quad v_i^s = \frac{f(U_R) - f(U_M)}{S_R - S_M}. \quad (4.46)$$

Portanto  $\lambda_C(U_M) \leq v_i^s$  se, e somente se,  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ . Tal fato pode ser visto geometricamente na Fig. 12.

Se, por outro lado  $S^k(U_M) = +\infty$ , a sequência de ondas sempre é compatível e  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ , como podemos observar na Fig. 13.

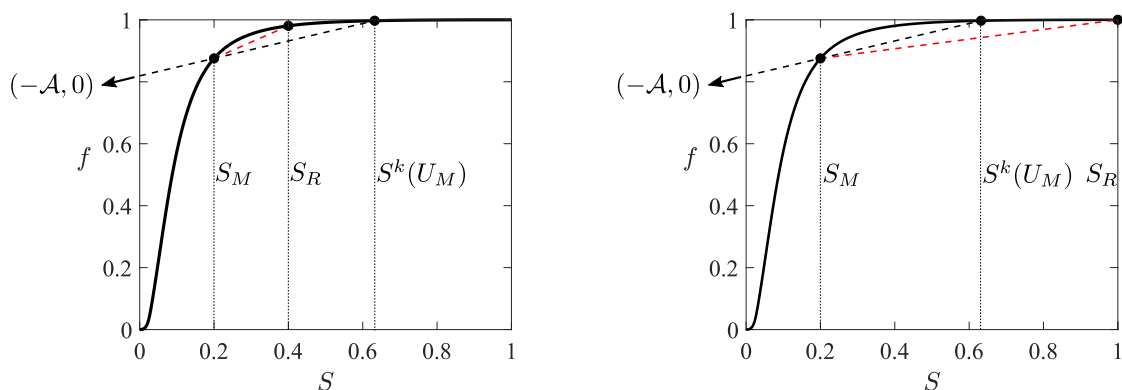


Figura 12 – Comparação geométrica entre a velocidade final da  $C$ -onda (inclinação da reta preta tracejada) e a velocidade inicial da  $S$ -onda (inclinação da reta vermelha). O painel esquerdo apresenta o caso  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ . O painel à direita representa o caso  $S_R > S^k(U_M)$ .

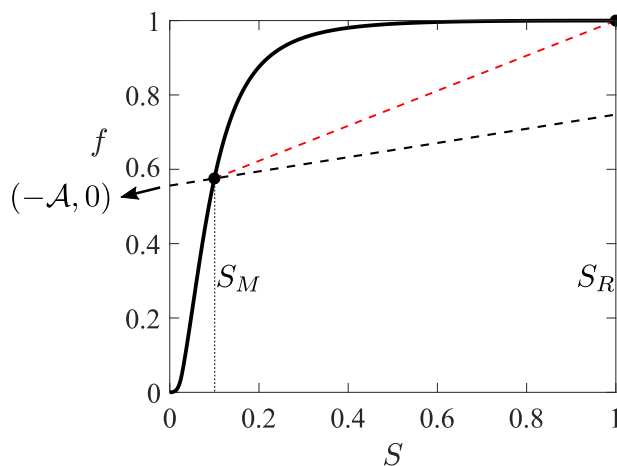


Figura 13 – Representação geométrica do caso onde  $S^k(U_M) = +\infty$ . A reta preta tracejada representa  $\lambda_C(U_M)$  e a reta vermelha tracejada, representa a velocidade do choque  $v_i^s$ .

- $v_i^S$  é a velocidade de uma rarefação. Neste caso, a seguinte desigualdade

$$\lambda_C(U_M) = v_f^C \leq v_i^S = \lambda_C(U_M) \quad (4.47)$$

é satisfeita se, e somente se  $U_M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ . Destacamos que, embora não seja uma condição necessária, assumindo que uma rarefação ocorre e  $U_M \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ , por (4.26) sempre temos  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ .

Logo, a sequência é compatível se, e somente se,  $U_M \in \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$  e  $0 \leq S_R \leq S^k(U_M)$ .

□

Como um contato não conecta estados em lados opostos da curva de transição e o Lema 4.1.1 pede que  $U_M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ , concluímos que  $U_L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ .

**Lema 4.1.2.** *Consideremos a seguinte sequência de ondas*

$$U_L \xrightarrow{S} U_M \xrightarrow{C} U_R, \quad (4.48)$$

com  $U_L \neq U_R$ . A sequência é compatível se, e somente se,  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  e  $S^k(U_M) \leq S_L \leq 1$ .

*Demonstração.* A demonstração desse lema é análoga à do Lema 4.1.1, e por esse motivo alguns detalhes serão omitidos. Uma vez que o valor de  $C$  é alterado apenas através de uma  $C$ -onda, podemos identificar  $U_M = (S_M, C_L)$ . Para que a sequência de ondas seja compatível, é necessário que

$$\lambda_S(U_M) \leq v_f^S \leq v_i^C = \lambda_C(U_M), \quad (4.49)$$

onde a primeira desigualdade vem de (4.27). Dessa forma, devemos ter  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ . Assumindo  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ , realizamos agora uma análise das possíveis velocidades final para a  $S$ -onda:

- $v_f^S$  é a velocidade de um choque. Uma vez que  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ , temos que  $S^k(U_M)$  sempre existe e se encontra em  $\mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ . Dessa forma, a Eq. (4.49) é satisfeita se, e somente se,  $S^k(U_M) \leq S_L \leq 1$ .
- $v_f^S$  é a velocidade de uma rarefação. Nesse caso,  $v_f^S = \lambda_S(U_M)$ ,  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  é a condição necessária e suficiente para garantir a compatibilidade das ondas. Embora não seja necessário, segue que  $S^k(U_M) \leq S_L \leq 1$ .

Dessa forma, a sequência de ondas é compatível se, e somente se,  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  e  $S^k(U_M) \leq S_L \leq 1$ . □

Como o Lema 4.1.2 pede que  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ , o fato de um contato não conectar estados em lados opostos da curva de transição  $\mathcal{T}$  implica que  $U_R \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ .

A seguir, apresentamos os lemas com condições necessárias e suficientes para termos uma sequência composta por três ondas compatível. Para isso, será preciso dividir a análise em dois casos:  $C_L < C_R$  e  $C_R < C_L$ .

**Lema 4.1.3.** *Consideremos  $C_L < C_R$  e a sequência de ondas*

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_1 \xrightarrow{C} U_2 \xrightarrow{S_2} U_R, \quad (4.50)$$

com  $U_L \neq U_R$ . *A sequência de ondas é compatível se, e somente se todas as seguintes condições são satisfeitas*

- i.*  $U_L \in \mathcal{R}$ ,
- ii.*  $U_1 \in \mathcal{T}$ ,
- iii.*  $U_2 \in \mathcal{L}$ ,
- iv.*  $0 \leq S_R \leq S^k(U_2)$ .

*Demonstração.* Uma vez que o valor de  $C$  é alterado apenas através de uma  $C$ -onda, podemos identificar os estados intermediários como  $U_1 = (S_1, C_L)$  e  $U_2 = (S_2, C_R)$ . Para obter uma sequência de ondas compatível, é necessário e suficiente que

$$v_f^1 \leq v_i^C \leq v_f^C \leq v_i^2, \quad (4.51)$$

ou, substituindo seus respectivos valores e utilizando (4.27)

$$\lambda_S(U_1) \leq \lambda_C(U_1) = \lambda_C(U_2) \leq \lambda_S(U_2). \quad (4.52)$$

Dessa forma, devemos ter  $U_1 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  e  $U_2 \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ .

Uma vez que assumimos  $C_L < C_R$ , não podemos ter  $U_2$  em  $\mathcal{T}$ . Se assumirmos por absurdo que  $U_2 \in \mathcal{T}$ , segue que  $\lambda_C(U_1) \neq \lambda_C(U_2)$  para todo  $U_1 = (S_1, C_L)$ , contradizendo que  $U_1$  e  $U_2$  são conectados através de uma  $C$ -onda. Tal fato decorre de termos a secante que liga  $(-\mathcal{A}, 0)$  a  $(S_2, f(U_2))$  não intersectando  $f(\cdot, C_L)$ , como mostra a Fig. 14. Concluímos assim que  $U_2 \in \mathcal{L}$ . Como uma  $C$ -onda não conecta estados em lados opostos da curva de transição, segue que  $U_1 \in \mathcal{T}$ .

Como  $U_1 \in \mathcal{T}$ , segue que  $S^*(C_L) = S^k(U_1)$ . Assim, do Lema 4.1.1 obtemos

$$S^*(C_L) = S^k(U_1) \leq S_L \leq 1. \quad (4.53)$$

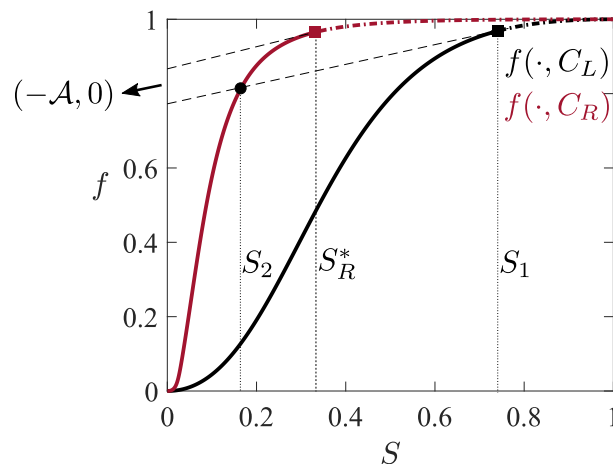


Figura 14 – Função de fluxo fracionário para  $C_L < C_R$  com os estados  $(S_2, f(S_2, C_R))$ ,  $(S_R^*, f(S_R^*, C_R))$  e  $(S_1, f(S_1, C_L))$ .

Portanto,  $U_L \in \mathcal{R}$ .

Por outro lado, pelo Lema 4.1.2, é necessário e suficiente que

$$0 \leq S_R \leq S^k(U_2). \quad (4.54)$$

A última equação conclui a demonstração.  $\square$

**Lema 4.1.4.** Consideremos  $C_R < C_L$  e a sequência de ondas

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_1 \xrightarrow{C} U_2 \xrightarrow{S_2} U_R, \quad (4.55)$$

com  $U_L \neq U_R$ . A sequência de ondas é compatível se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas

- i.  $S^k(U_1) \leq S_L \leq 1$ ,
- ii.  $U_1 \in \mathcal{R}$ ,
- iii.  $U_2 \in \mathcal{T}$ ,
- iv.  $U_R \in \mathcal{L}$ .

*Demonstração.* A demonstração desse lema é análoga a do Lema 4.1.3, por esse motivo alguns detalhes serão omitidos. Uma vez que o valor de  $C$  é alterado



apenas através de uma  $C$ -onda, podemos identificar os estados intermediários como  $U_1 = (S_1, C_L)$  e  $U_2 = (S_2, C_R)$ . Para obter uma sequência de ondas compatível, é necessário e suficiente que

$$v_f^1 \leq v_i^C \leq v_f^C \leq v_i^2, \quad (4.56)$$

ou substituindo seus respectivos valores e aplicando a condição de entropia de Oleinik (4.27),

$$\lambda_S(U_1) \leq \lambda_C(U_1) = \lambda_C(U_2) \leq \lambda_S(U_2). \quad (4.57)$$

Dessa forma, devemos ter  $U_1 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  e  $U_2 \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ .

Como  $C_R < C_L$ , realizando uma análise análoga à apresentada no Lema 4.1.3, concluímos que  $U_1 \notin \mathcal{T}$ . Logo,  $U_1 \in \mathcal{R}$  e  $U_2 \in \mathcal{T}$ . Uma vez que  $U_2 \in \mathcal{T}$  segue que  $S^*(C_R) = S^k(U_2)$ , e do Lema 4.1.1 obtemos

$$0 \leq S_R \leq S^k(U_2) = S^*(C_R). \quad (4.58)$$

Portanto,  $U_R \in \mathcal{L}$ .

Por outro lado, do Lema 4.1.2, é necessário e suficiente para garantir a compatibilidade de ondas que

$$S^k(U_1) \leq S_L \leq 1. \quad (4.59)$$

Dessa forma, a demonstração está concluída.  $\square$

Com os Lemas 4.1.1-4.1.4, é possível classificar todo o plano de fase em conjuntos nos quais apenas uma das sequências apresentadas acima é compatível. Tal resultado recorre à seguinte definição

**Definição 4.5.** Dado um estado  $U \in I \times I$ , definimos o conjunto dos estados com o mesmo  $\lambda_C$  que  $U$  como

$$\Gamma(V) = \{U \in I \times I : \lambda_C(U) = \lambda_C(V)\}. \quad (4.60)$$

Destacamos que devido à suavidade de  $\lambda_C$ ,  $\Gamma(U)$  forma uma curva no plano de fase. Agora apresentamos o lema de classificação do plano de fase.

**Lema 4.1.5.** *Seja  $U_L$  um estado à esquerda no plano de fase  $S$ - $C$ . Então, para cada estado à direita  $U_R$ , existe uma solução para o problema de Riemann (3.20)-(3.21), (3.23), dado por uma sequência compatível de  $S$  e  $C$  ondas.*

*Demonstração.* Ao dividir o plano de fase em regiões, foi considerada a maior sequência que pode conectar os estados  $U_L$  e  $U_R$ . Dessa forma, é possível que menos ondas sejam necessárias para conectar tais estados. Por exemplo, para o caso  $C_L = C_R$ , a construção da solução segue a equação Buckley-Leverett; e para os casos em que  $\lambda_C(U_L) = \lambda_C(U_R)$  e  $U_L$  e  $U_R$  não estão em lados opostos da curva de transição, a solução é dada por um contato.

Dado  $U_L \in I \times I$ , consideramos dois casos:  $U_L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$  e  $U_L \in \mathcal{R}$ .

1.  $U_L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}$ .

Definimos o estado  $U_{\mathcal{T}_1}$  como a interseção da curva  $\Gamma(U_L)$  com a curva de transição  $\mathcal{T}$ , dado por

$$U_{\mathcal{T}_1} = \Gamma(U_L) \cap \mathcal{T}. \quad (4.61)$$

Como comentado na Seção 4.1.2, nem sempre a curva  $\Gamma(U_L)$  intersecta a curva de transição  $\mathcal{T}$ . Para os casos em que essa interseção não ocorre, definimos  $U_{\mathcal{T}_1} = (1, 0)$ . Destacamos que para a classificação do plano de fase, é necessário apenas termos  $C_{\mathcal{T}_1} = 0$ , o valor de  $S_{\mathcal{T}_1}$  não interfere, onde foi tomado igual a 1 por simplicidade.

Analisando as condições necessárias e suficiente para garantir uma sequência de ondas compatível apresentadas nos Lemas 4.1.1-4.1.4, é possível dividir o plano de fase  $S$ - $C$  em conjuntos onde apenas a condição de um dos Lemas é satisfeita. Conforme mostrado na Fig. 15, tais conjuntos são definidos como segue

$$\mathcal{L}_1 = \{U \in I \times I : \lambda_C(U) \geq \lambda_C(U_L)\} \cup \{U \in \mathcal{L} : C \geq C_{\mathcal{T}_1}\}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{L}_2 = \{U \in \mathcal{L} : C \leq C_{\mathcal{T}_1}\}, \quad (4.63)$$

$$\mathcal{L}_3 = \{U \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T} : \lambda_C(U) \leq \lambda_C(U_L)\}. \quad (4.64)$$

O primeiro conjunto,  $\mathcal{L}_1$  (conjunto branco na Fig. 15), toma os estados com  $C \geq C_{\mathcal{T}_1}$  sendo limitado à direita pela curva  $\Gamma(U_L)$ . O segundo conjunto,  $\mathcal{L}_2$

(conjunto com ondas horizontais cinzas na Fig. 15), contém todos os estados à esquerda da curva de transição  $\mathcal{T}$  com  $C \leq C_{\mathcal{T}1}$ . Finalmente, o conjunto  $\mathcal{L}_3$  (conjunto com retas verticais cinzas na Fig. 15) é composto pelos pontos  $U$  em  $\mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  que possuem  $\lambda_C(U)$  menor ou igual que  $\lambda_C(U_L)$ .

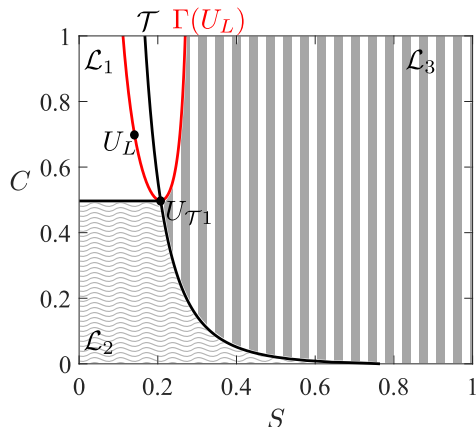


Figura 15 – Conjuntos  $\mathcal{L}_i$  com  $i = 1, 2, 3$ , no plano de fase seguindo as Eqs. (4.62)-(4.64).

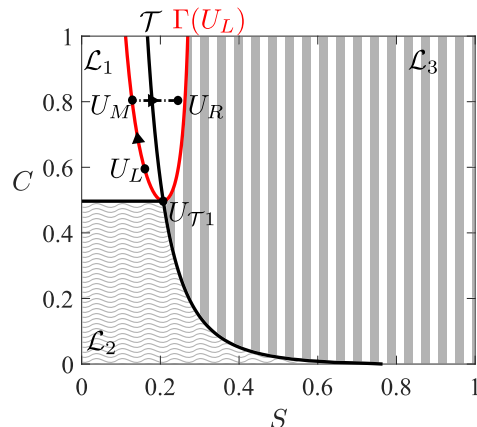


Figura 16 – Solução no plano de fase para  $U_R \in \mathcal{L}_1$  e a solução do estado intermediário  $U_M$  definido na Eq. (4.65).

Caso  $U_R \in \mathcal{L}_1$ , a solução segue o Lema 4.1.1. Dessa forma, nossa solução é composta por um contato indo de  $U_L$  a  $U_M$ , seguido por uma  $S$ -onda ligando  $U_M$  e  $U_R$ . O estado  $U_M$  é definido como

$$U_M = \Gamma(U_L) \cap \{U \in \mathcal{L} : C = C_R\}. \quad (4.65)$$

Tal interseção sempre ocorre, uma vez  $U_R \in \mathcal{L}_1$  implica que a reta  $C = C_R$  intersecta a curva  $\Gamma(U_L)$  em  $\mathcal{L}$ . Além disso, como primeiro temos um contato, o estado  $U_M$  se encontra sobre a curva  $\Gamma(U_L)$  em  $\mathcal{L}$ , implicando que o conjunto  $S^k(U_M)$  está em  $\mathcal{R}$  e sobre a curva  $\Gamma(U_L)$ . Dessa forma,  $S_R \leq S^k(U_M)$  e temos todas as condições do Lema 4.1.1 satisfeitas. Tal construção é representada no plano de fase na Fig. 16.

Caso  $U_R \in \mathcal{L}_2$ , a solução segue o Lema 4.1.4. Assim, a solução é dada por uma  $S$ -onda, seguido por uma  $C$ -onda e novamente uma  $S$ -onda. Os estados

intermediários,  $U_1$  e  $U_2$ , podem ser definidos como

$$U_2 = \mathcal{T} \cap \{U \in I \times I : C = C_R\}, \quad (4.66)$$

$$U_1 = \Gamma(U_2) \cap \{U \in \mathcal{R} : C = C_L\}. \quad (4.67)$$

Até agora temos  $U_1 \in \mathcal{R}$ ,  $U_2 \in \mathcal{T}$ ,  $U_R \in \mathcal{L}$ . Como  $\lambda_C(U_1) < \lambda_C(U_L)$ , segue que  $S_L \geq S^k(U_M)$ . Dessa forma, todas as condições apresentadas no Lema 4.1.4 são satisfeitas. A solução desse caso pode ser vista no plano de fase na Fig. 17.

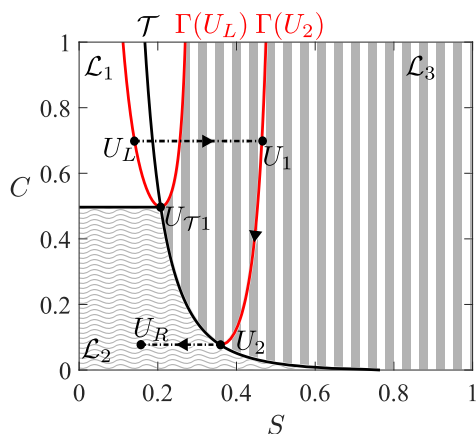


Figura 17 – Solução para o caso  $U_R \in \mathcal{L}_2$  e a posição dos estados intermediários  $U_2$  e  $U_1$  definidos na Eq. (4.66) e (4.67), respectivamente.

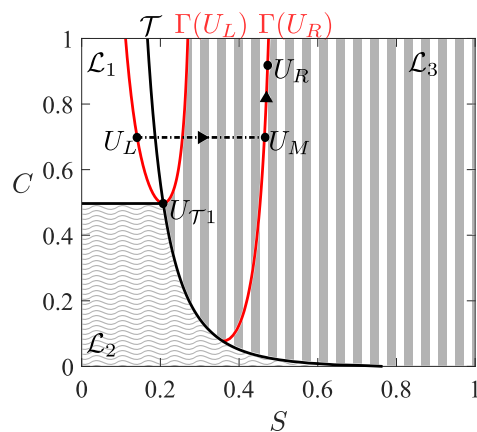


Figura 18 – Construção da solução para o caso  $U_R \in \mathcal{L}_3$  e a posição do estado intermediário  $U_M$  definido na Eq. (4.68).

Caso  $U_R \in \mathcal{L}_3$ , a solução segue o Lema 4.1.2. A solução é dada por uma  $S$ -onda seguida por um  $C$ -onda, com estado intermediário dado por

$$U_M = \Gamma(U_R) \cap \{U \in \mathcal{R}; C = C_L\}. \quad (4.68)$$

Assim,  $U_M$  está bem definido e se encontra em  $\mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ . Além disso, como  $\lambda_C(U_M) \leq \lambda_C(U_L)$  e  $C_L = C_M$ , segue que  $S^k(U_M) \leq S_L$ . Portanto, temos todas as condições do Lema 4.1.2 satisfeitas. Tal construção é apresentada na Fig. 18.

2.  $U_L \in \mathcal{R}$ . Definimos o estado  $U_{T2}$  como a interseção da curva de transição  $\mathcal{T}$  e a reta  $C = C_L$ , descrito como

$$U_{T2} = \mathcal{T} \cap \{U \in I \times I : C = C_L\}. \quad (4.69)$$

Destacamos que como a curva de transição divide o plano de fase,  $U_{\mathcal{T}_2}$  sempre está bem definido. Analisando as condições apresentadas nos Lemas 4.1.1-4.1.4, podemos classificar o plano de fase em três conjuntos:

$$\mathcal{R}_1 = \{U \in I \times I : \lambda_C(U) \geq \lambda_C(U_{\mathcal{T}_2})\} \cup \{U \in \mathcal{L} : C > C_L\}, \quad (4.70)$$

$$\mathcal{R}_2 = \{U \in \mathcal{L} : C < C_L\}, \quad (4.71)$$

$$\mathcal{R}_3 = \{U \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T} : \lambda_C(U) \leq \lambda_C(U_{\mathcal{T}_2})\} \cup \{\Gamma(U_{\mathcal{T}_2}) \cap \mathcal{L}\}. \quad (4.72)$$

O primeiro conjunto,  $\mathcal{R}_1$  (conjunto branco na Fig. 19), é composto por todos os estados com  $C > C_L$  e limitados à direita pela curva  $\Gamma(U_{\mathcal{T}_2})$ . O conjunto  $\mathcal{R}_2$  (conjunto com ondas cinzas horizontais na Fig. 19) toma todos os estados em  $\mathcal{L}$  com  $C < C_L$ . Finalmente, o conjunto  $\mathcal{R}_3$  (conjunto com retas verticais cinzas na Fig. 19) é formado pelos pontos  $U$  em  $\mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  que possuem  $\lambda_C(U)$  menor ou igual que  $\lambda_C(U_{\mathcal{T}_2})$ .

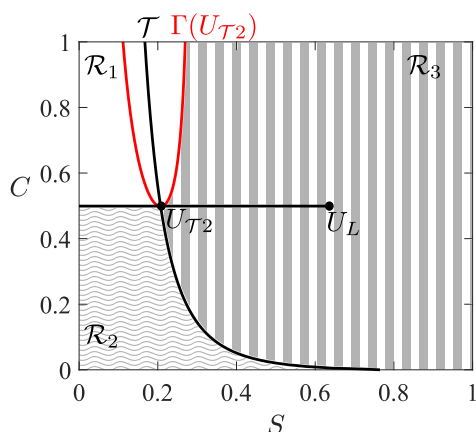


Figura 19 – Conjuntos  $\mathcal{R}_i$  com  $i = 1, 2, 3$  no plano de fase seguindo as Eqs. (4.70)-(4.72).

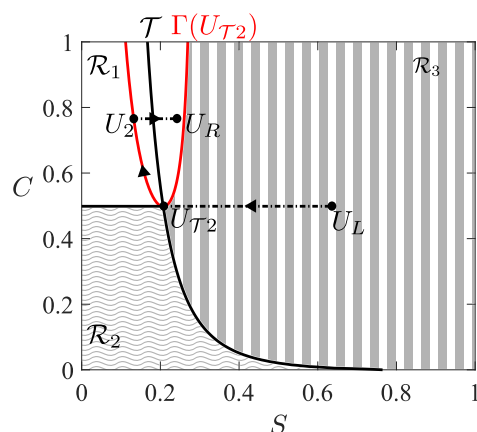


Figura 20 – Solução no plano de fase para  $U_R \in \mathcal{R}_1$  e os estados intermediários  $U_1 = U_{\mathcal{T}}$  e  $U_2$  definidos nas equações (4.73) e (4.74).

Se  $U_R \in \mathcal{R}_1$ , a solução segue o Lema 4.1.3 e possui dois estados intermediários, dados por

$$U_1 = U_{\mathcal{T}_2}, \quad (4.73)$$

$$U_2 = \Gamma(U_1) \cap \{U \in \mathcal{L} : C = C_R\}. \quad (4.74)$$

Devido à posição de  $U_R$ , temos que esses estados intermediários sempre estão bem definidos. Até então, temos  $U_L \in \mathcal{R}$ ,  $U_1 \in \mathcal{T}$  e  $U_2 \in \mathcal{L}$ . Uma vez que  $\mathcal{R}_1$

é limitado a direita pela curva  $\Gamma(U_{T2})$ ,  $U_R \in \mathcal{R}_1$  implica que  $S_R \leq S^k(U_2)$ . Portanto, todas as condições do Lema 4.1.3 são satisfeitas. Tal construção é representado no plano de fase na Fig. 20.

Caso  $U_R \in \mathcal{R}_2$ , a solução é dada pelo Lema 4.1.4 e possui dois estados intermediários, dados por:

$$U_2 = \mathcal{T} \cap \{U \in I \times I : C = C_R\}, \quad (4.75)$$

$$U_1 = \Gamma(U_2) \cap \{U \in \mathcal{R} : C = C_L\}. \quad (4.76)$$

Como  $U_1 \in \mathcal{R}$ , segue que  $(S^k(U_1), C_L) \in \mathcal{L}$ . Dessa forma, como  $U_L \in \mathcal{R}$ , temos  $S_k(U_1) < S_L$ . Portanto, todas as condições do Lema 4.1.4 são satisfeitas. Essa construção é representada no plano de fase na Fig. 21.

Se  $U_R \in \mathcal{R}_3$ , a solução segue o Lema 4.1.2. Dessa forma, nossa solução é composta por uma  $S$ -onda seguida por uma  $C$ -onda, com estado intermediário dado por

$$U_M = \Gamma(U_R) \cap \{U \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T} : C = C_L\}. \quad (4.77)$$

Uma vez que  $U_M \in \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ , segue que  $(S^k(U_M), C_L) \in \mathcal{L}$ . Como  $U_L \in \mathcal{R}$ , concluímos que  $S^k(U_M) \leq S_L$ . Portanto, todas as condições do Lema 4.1.2 são satisfeitas. A construção desse caso é representada na Fig. 22.

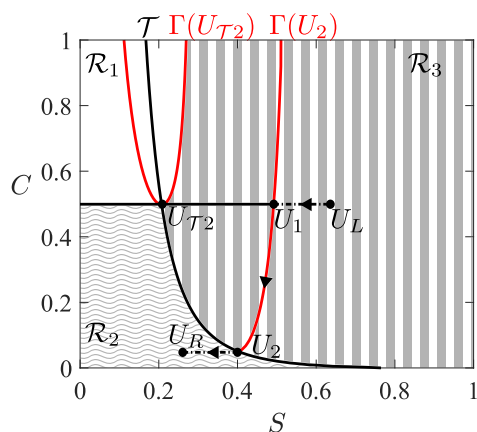


Figura 21 – Solução no plano de fase para  $U_R \in \mathcal{R}_2$  e os estados intermediários  $U_2$  e  $U_1$  definidos nas equações (4.75) e (4.76).

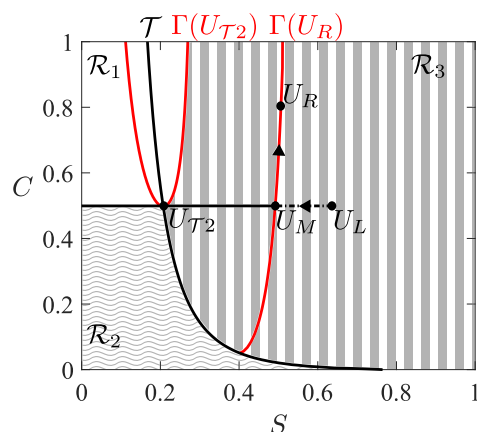


Figura 22 – Construção da solução no plano de fase para  $U_R \in \mathcal{R}_3$  e a posição do estado intermediário  $U_M$  definido na Eq. (4.77).

□

**Observação.** A classificação do plano de fase nas regiões  $\mathcal{L}_{1,2,3}$  e  $\mathcal{R}_{1,2,3}$  depende fortemente da localização do estado  $U_L$ . Dessa forma, existem casos limites ( $S$  próximo de zero,  $C$  próximo de zero ou um) onde alguns desses conjuntos podem estar vazios. As Figs. 23, 24 apresentam dois exemplos onde foi possível classificar o plano de fase em menos de três conjuntos.

Apesar de pequenas mudanças na demonstração, o resultado principal se mantém válido, incluindo o fato que é possível descrever a solução para quaisquer estados  $U_L$  e  $U_R$  no plano de fase  $S$ - $C$ .

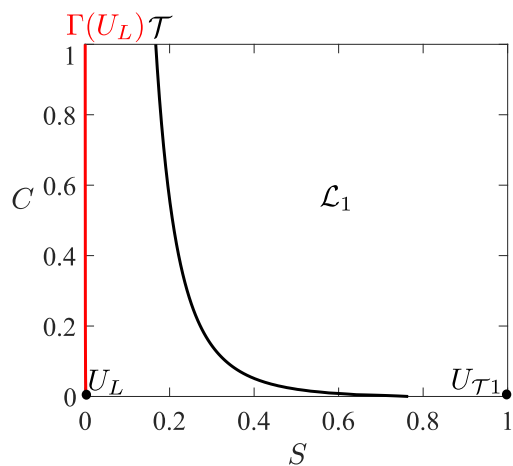


Figura 23 – Regiões de classificação no plano de fase para  $U_L = (10^{-3}, 0.1)$ .

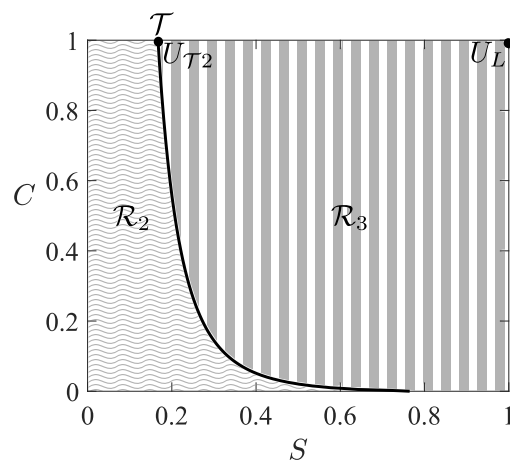


Figura 24 – Regiões de classificação no plano de fase para  $U_L = (0.999, 0.9)$ .

### 4.3 Sobre a unicidade da solução

Neste trabalho, a unicidade da solução para o problema de Riemann é considerada no seguinte sentido: dados estados à esquerda  $U_L$  e à direita  $U_R$  no plano de fase  $S$ - $C$ , existe uma única sequência de ondas compatível os conectando, seguindo os Lemas 4.1.1-4.1.4. No Lema 4.1.5, classificamos o plano de fase em conjuntos onde apenas um dos Lemas 4.1.1-4.1.4 tem duas condições satisfeitas. Para os estados localizados em apenas um desses conjuntos, temos a unicidade da

solução garantida. Já para os estados na interseção entre esses conjuntos, não é possível garantir a unicidade da solução, pois mais de uma sequência de ondas compatível é possível. Temos interseções entre os conjuntos:  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$  (ver Fig. 15);  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$  (ver Fig. 19).

### 4.3.1 Interseção entre os conjuntos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$

Neste caso, temos  $U_L \in \mathcal{L}$  e  $U_R$  na interseção entre os conjuntos  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  (ver Fig. 15), onde temos  $U_R \in \mathcal{L}$  e  $C_R = C_{\mathcal{T}_1}$ . As possíveis soluções seguem os Lemas 4.1.1 e 4.1.4. A solução referente ao Lema 4.1.4 possui dois estados intermediários,  $U_1$  e  $U_2$ . Neste cenário, temos que  $U_2 = U_{\mathcal{T}_1}$  e  $U_1$  se encontra sobre  $\Gamma(U_L)$ . Dessa forma, obtemos que

$$\lambda_C(U_L) = \lambda_C(U_1) = \lambda_C(U_2). \quad (4.78)$$

Geometricamente, esta relação implica que os pontos  $(S_L, f(U_L))$ ,  $(S_1, f(U_1))$  e  $(S_2, f(U_2))$  se encontram sobre a mesma secante conectando  $(S_L, f(U_L))$  a  $(-\mathcal{A}, 0)$ , como mostra a Fig. 25.

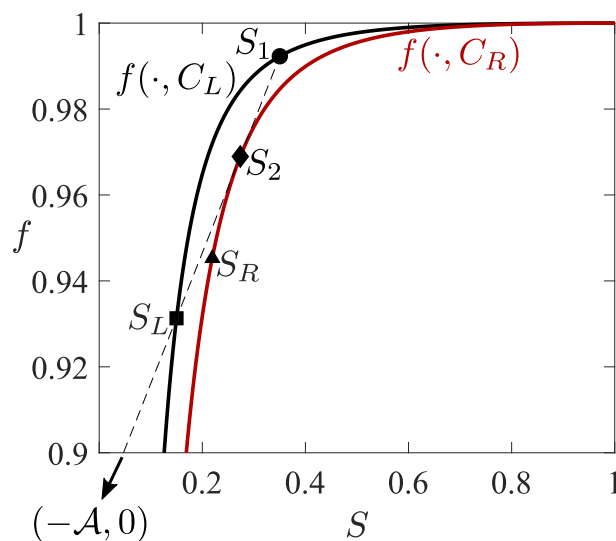


Figura 25 – Funções de fluxo fracionários dos estados  $U_L$  e  $U_R$  com a reta secante ligando  $(-\mathcal{A}, 0)$  com  $(S_L, f(U_L))$ . Os pontos  $(S_1, f(U_1))$  e  $(S_2, f(U_2))$  se encontram sobre a mesma secante (linha tracejada preta) que conecta  $(-\mathcal{A}, 0)$  e  $(S_L, f(U_L))$ .

Como  $U_L \in \mathcal{L}$ , e do Lema 4.1.4 temos que  $U_1 \in \mathcal{R}$  e  $U_2 \in \mathcal{T}$ , vale que

$$S_L \leq S_2 \leq S_1, \quad (4.79)$$



onde a igualdade ocorre quando  $U_L \in \mathcal{T}$ . Estados  $U_L$  e  $U_1$  satisfazendo a Eq. 4.79 são conectados por uma secante localizada abaixo da função de fluxo fracionário de  $C_L$ . Dessa forma, pela condição de entropia de Oleinik 4.26,  $U_L$  e  $U_1$  são conectados através de um choque. Dessa forma, como mostra a Fig. 25, temos que o choque e o contato possuem a mesma velocidade.

Por outro lado, a solução seguindo o Lema 4.1.1 possui apenas um estado intermediário, onde  $U_M = U_{\mathcal{T}1} = U_2$ . A velocidade da  $C$ -onda conectando  $U_L$  a  $U_M$  é  $\lambda_C(U_L)$ , possuindo a mesma velocidade da sequência  $C$ -onda e choque da solução seguindo o Lema 4.1.4. Apesar disso, como  $S_M = S_2 < S_1$ , os perfis de saturações para cada sequência de ondas não são iguais, como mostra a Fig. 26.

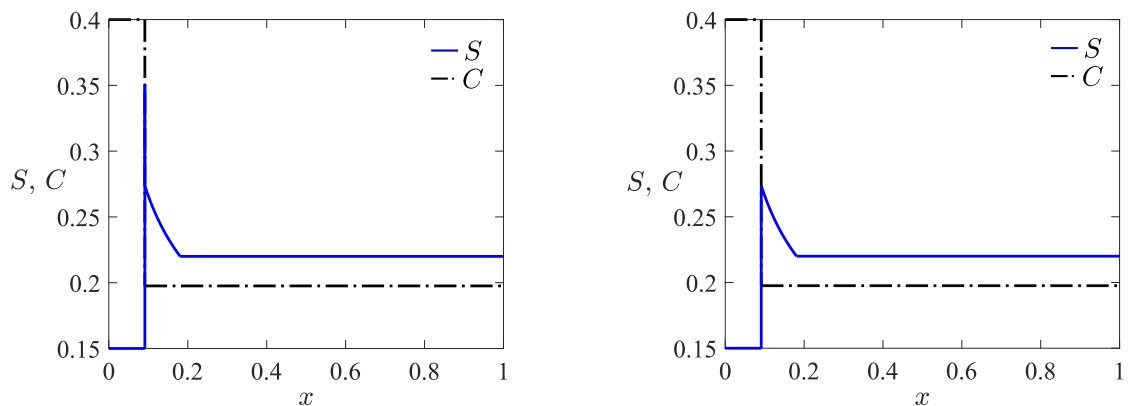


Figura 26 – Perfil da solução para  $U_L = (0.15, 0.4)$  e  $U_R = (0.22, 0.1975)$ , com  $U_R \in \mathcal{L}_1$ . O painel esquerda mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.4 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.1. O tempo adotado foi  $t = 0.3$ .

### 4.3.2 Interseção entre os conjuntos $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_3$

Neste caso, temos  $U_L \in \mathcal{L}$  e  $U_R$  se encontra na interseção dos conjuntos  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_3$  (ver Fig. 15), isto é,  $U_R \in \mathcal{R}$  e  $\lambda_C(U_L) = \lambda_C(U_R)$ . Figura 27 mostra as duas possíveis sequências de ondas no plano de fase: uma seguindo o Lema 4.1.1 com estado intermediário  $U_M^1$ , e a outra seguindo o Lema 4.1.2 com estado intermediário  $U_M^2$ . Uma vez que temos  $U_L, U_M^1 \in \mathcal{L}$  e  $U_R, U_M^2 \in \mathcal{R}$ , segue que

$$S_L < S_M^2 \quad \text{e} \quad S_M^1 < S_R. \quad (4.80)$$

Geometricamente, esse cenário ocorre quando os estados  $U_L, U_M^1, U_M^2$  e  $U_R$  se encontram sobre a mesma secante ligando  $(-\mathcal{A}, 0)$  a  $(S_L, f(U_L))$  (estão sobre a

curva  $\Gamma(U_L)$ ). Como todos esses estados se encontram sobre a mesma secante, a relação (4.80) implica que a  $S$ -onda para ambas as sequências é um choque, uma vez que tal secante se encontra abaixo do perfil de  $f$  (pois  $U_R, U_M^2 \in \mathcal{R}$ ). Além disso, a velocidade de propagação do choque coincide com a velocidade da  $C$ -onda.

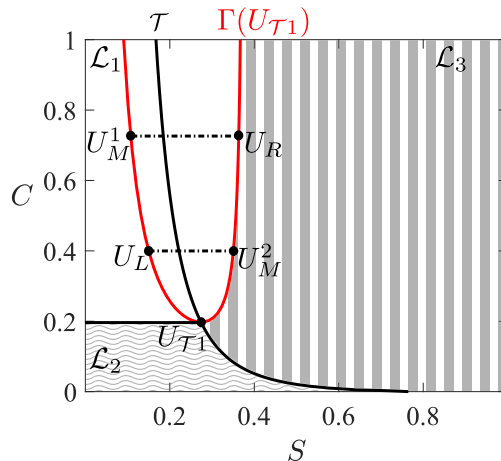


Figura 27 – Duas sequências de ondas são possíveis quando temos  $U_L \in \mathcal{L}$  e  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ : uma conecta  $U_L$  a  $U_M^1$  através de uma  $C$ -onda, então  $U_M^1$  a  $U_R$  por uma  $S$ -onda. A outra conecta  $U_L$  a  $U_M^2$  por uma  $S$ -onda, e então  $U_M^2$  a  $U_R$  através de uma  $C$ -onda.

Se  $C_L < C_R$ , temos  $S_M^1 < S_L$  e  $S_L < S_M^2$  (conforme mostrado na Fig. 27). Dessa forma, mesmo que as ondas que compõem ambas as soluções possuam mesma velocidade, os perfis são diferentes pois  $S_M^1 < S_L < S_M^2$ , como mostra a Fig. 28.

Por outro lado, se  $C_L > C_R$  obtemos  $S_M^1 < S_R < S_M^2$ . Análogo ao caso anterior, temos que as velocidades das ondas que compõem a solução são as mesmas, porém os perfis diferem, como mostra a Fig. 29.

#### 4.3.3 Interseção entre os conjuntos $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_3$

Neste caso temos  $U_L \in \mathcal{R}$  e  $U_R$  na interseção entre os conjuntos  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_3$  (ver Fig. 19), ou seja,  $U_R \in \mathcal{R}$  e  $\lambda_C(U_R) = \lambda_C(U_{T2})$ . As possíveis soluções seguem os Lemas 4.1.2, 4.1.3. A solução dada pelo Lema 4.1.3 possui dois estados intermediários:  $U_1 = U_{T2}$  e  $U_2 \in \mathcal{L}$ , implicando que  $S_2 < S_1 < S_R$ . Além disso, temos  $\lambda_C(U_2) = \lambda_C(U_1) = \lambda_C(U_R)$ , que geometricamente indica que os pontos  $(S_1, f(U_1))$  e  $(S_2, f(U_2))$  se encontram sobre a mesma secante que liga  $(-\mathcal{A}, 0)$  a

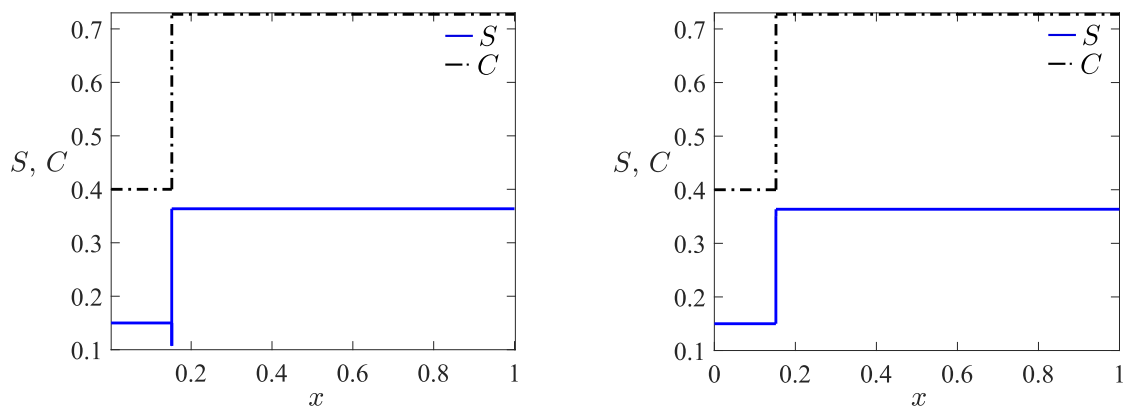


Figura 28 – Perfil da solução para  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ , com  $C_L < C_R$ . O painel esquerdo mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.1, e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. Essa figura foi feita considerando  $U_L = (0.15, 0.4)$ ,  $U_R = (0.3636, 0.7273)$  e tempo  $t = 0.3$ .

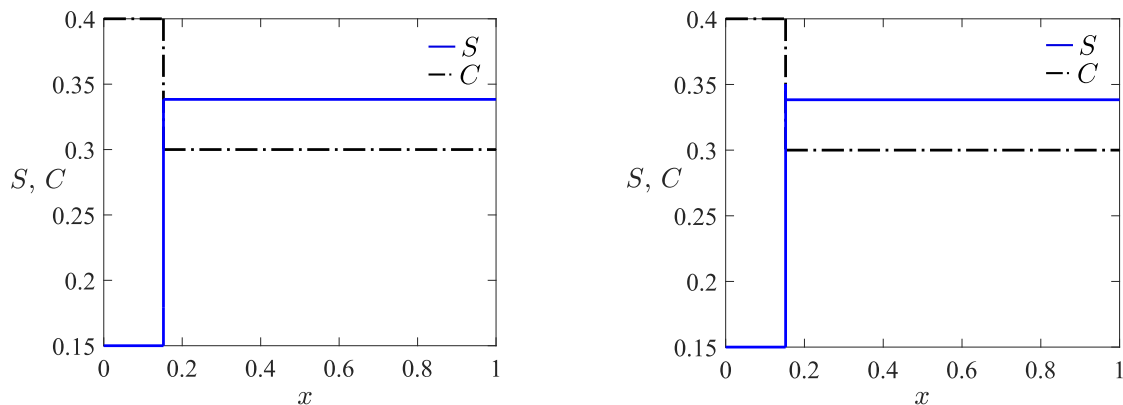


Figura 29 – Perfil da solução para  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ , com  $C_L > C_R$ . O painel esquerdo mostra a solução descrita pelo Lema 4.1.1 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. Essa figura foi feita para  $U_L = (0.15, 0.4)$ ,  $U_R = (0.3384, 0.3)$  e tempo  $t = 0.3$ .

$(S_R, f(U_R))$ . Uma vez que  $U_2 \in \mathcal{L}$  e  $U_R \in \mathcal{R}$ , a secante ligando esses pontos se encontra sobre o perfil de  $f$ , implicando que a  $S$ -onda que os conecta é um choque que possui a mesma velocidade que a  $C$ -onda conectando  $U_1$  a  $U_2$ .

A solução que segue o Lema 4.1.2 possui apenas um estado intermediário,  $U_M = U_{\mathcal{T}2}$ . Uma vez que a velocidade da sequência de  $S$  e  $C$ -ondas apresentadas anteriormente é a mesma da  $C$ -onda para esse caso, ambas as soluções se deslocam juntas com o tempo. Porém, como  $S_2 < S_1 = S_M$ , os perfis das soluções são

diferentes, como mostra a Fig. 30.

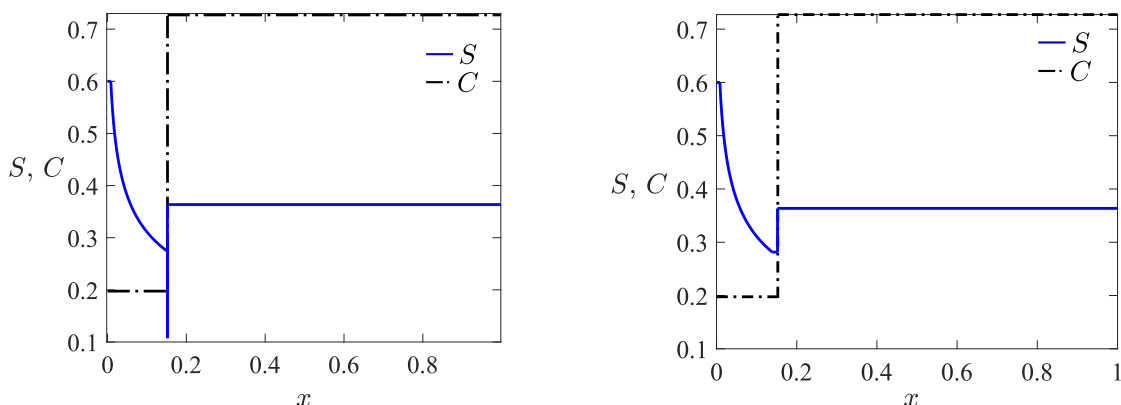


Figura 30 – Perfil da solução para  $U_L = (0.6, 0.1976)$  e  $U_R = (0.3636, 0.7273)$ , onde  $U_R \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$ . O painel esquerdo apresenta a solução descrita pela Lema 4.1.3 e o painel direito a solução seguindo o Lema 4.1.2. A simulação foi feita considerando o tempo  $t = 0.5$ .

#### 4.3.4 Unicidade no plano $x-t$

Para os casos apresentados nas Seções 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3, a perda de unicidade está relacionada às sequências de ondas envolvendo choque e contato que possuem a mesma velocidade de propagação. No plano  $x-t$ , a Fig. 31 apresenta as soluções referentes às Figs. 26, 28 e 30.

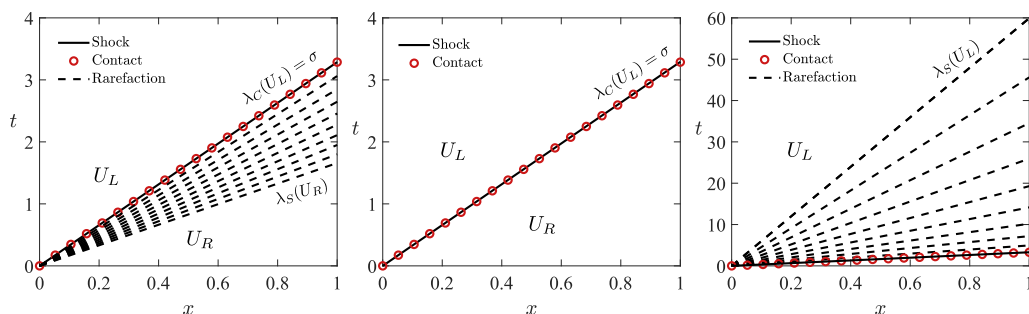


Figura 31 – Soluções no plano  $x-t$  para os casos apresentados nas Seções 4.3.1 (painel esquerdo), 4.3.2 (painel central) e 4.3.3 (painel direito).

Uma vez que no plano das características não temos distinção de estados, apenas de velocidades, em cada caso apresentado acima temos unicidade ao representar tais soluções no plano  $x-t$ . Dessa forma, demonstramos o seguinte lema

**Lema 4.1.6.** *Para dados estados à esquerda e à direita ( $U_L$  e  $U_R$ ) em  $I \times I$ , existe uma solução para o sistema (3.20)-(3.21) com dado inicial (3.23). Essa solução é única para todo  $U_L$  e  $U_R$  em  $I \times I$ , exceto na interseção dos conjuntos  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$  e  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$ , onde são possíveis duas soluções no plano de fase. Em qualquer caso, a solução é única no plano  $x-t$ .*

#### 4.4 Comparação da solução analítica com aproximação numérica

Nesta seção temos como objetivo comparar a solução analítica para o sistema (3.20)-(3.21) com dado inicial (3.23) com uma aproximação numérica realizada pelo solver RCD [48]. Tal comparação é realizada visando destacar que, mesmo com a utilização de um solver validado e uma boa concordância entre as soluções para diversos dados iniciais, não é possível prever seu comportamento em uma vizinhança dos dados iniciais onde se tem a perda da unicidade da solução.

O RCD é um solver baseado no esquema implícito, Crank-Nicolson [14, 56], e possui segunda ordem de precisão temporal e espacial. Para realizar as simulações foi adotado à esquerda a condição de fronteira de Dirichlet, e à direita a condição de fronteira de Neumann. Para a discretização espacial, utilizamos uma malha formada por 7000 pontos, e para a discretização temporal, foi considerado o tamanho de passo de  $10^{-6}$ . Não foi adicionada difusão artificial.

Inicialmente, apresentamos dois exemplos comparando o perfil analítico e numérico da saturação de água e a concentração de surfactante, representados na Fig. 32. O painel esquerdo da Fig. 32 representa o processo de drenagem, onde é injetado gás no reservatório saturado de água com surfactante. A solução desse caso segue o Lema 4.1.1, sendo composto por uma  $C$ -onda seguida por uma  $S$ -onda (choque). O painel direito da Fig. 32 apresenta o caso de imbibição, onde água com surfactante é injetada no meio poroso saturado com gás. A solução desse caso segue o Lema 4.1.4, onde a solução é dada por uma  $S$ -onda (rarefação seguida por um choque), uma  $C$ -onda e novamente uma  $S$ -onda (rarefação seguida de choque). Em ambas as simulações, obtemos uma excelente concordância entre a simulação numérica e a solução analítica.

A seguir, apresentamos o efeito numérico resultante da perda de unicidade

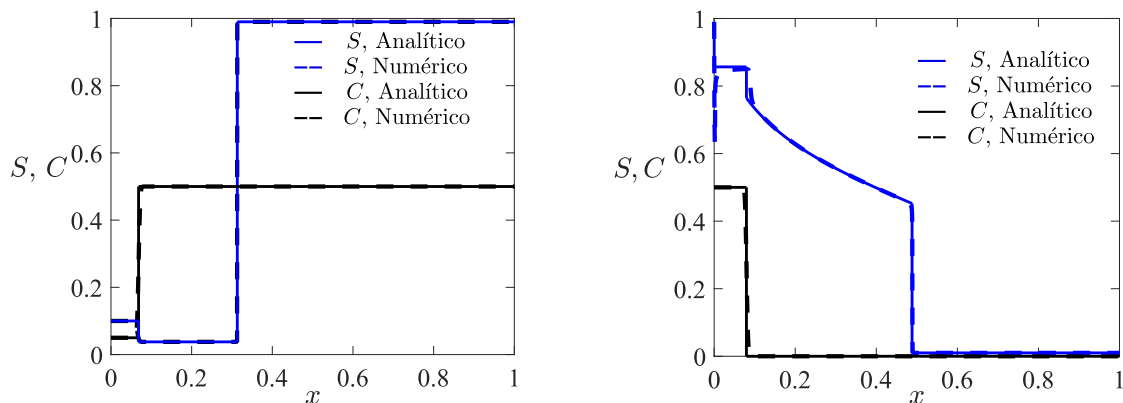


Figura 32 – Comparação entre as soluções numéricas (linhas tracejadas) e analíticas (linhas contínuas) da saturação de água  $S$  (azul) e concentração do surfactante  $C$  (preto). O painel esquerdo corresponde a  $U_L = (0.1, 0.05)$ ,  $U_R = (0.99, 0.5)$ , e tempo  $t = 0.5$ . O painel direito corresponde a  $U_L = (0.99, 0.5)$ ,  $U_R = (0.01, 0)$  e  $t = 0.3$ .

apresentada na Seção 4.3. A Fig. 33 mostra o perfil da saturação de água para  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$  (referente à Fig. 27 no plano de fase, e aos perfis apresentados na Fig. 28). Devido à complexidade relacionada à função  $\lambda_C(U)$ , numericamente é extremamente difícil determinar o ponto que se encontra sobre a interseção. Por esse motivo tomamos valores de  $S_R$  em uma vizinhança da interseção:  $U_{R+} = (0.367, 0.7273)$  e  $U_{R-} = (0.360, 0.7273)$ . Note que, para pequenas variações em  $S_R$  o perfil da saturação da água apresentou comportamentos qualitativamente diferentes, seguindo a teoria apresentada na Seção 4.3.2. Os casos onde  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$  e  $U_R \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$  são análogos.

Conforme apresentado na Seção 4.3, a perda de unicidade está associada a igualdade entre a velocidade das ondas que compõem a solução. Pequenas perturbações em  $U_R$  resultam no distanciamento dessas velocidades, fazendo com que apenas uma das soluções seja compatível. Assim, nas vizinhanças do ponto localizado na interseção, a solução varia continuamente até que ocorre a coincidência das velocidades, resultando na perda de unicidade no plano de fase. Portanto, o comportamento numérico apresentado na Fig. 33 reflete propriedades do modelo, não limitações do simulador utilizado. Nesse contexto, a definição de estabilidade estrutural apresentada em [63, 29] descreve o cenário obtido.

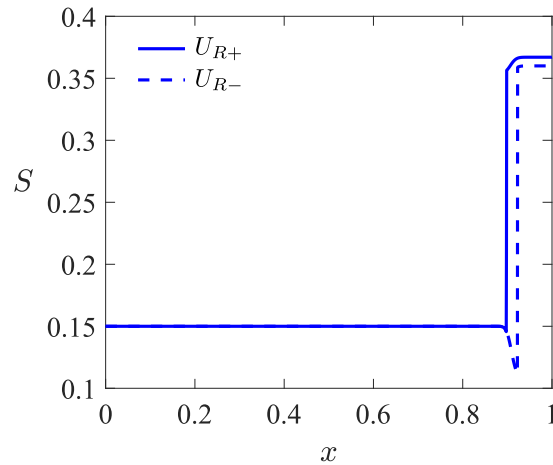


Figura 33 – Perfis da saturação da água no tempo  $t = 3$  para o estado à esquerda  $U_L = (0.15, 0.4)$  e depois estados à direita próximos  $U_{R-} = (0.360, 0.7273)$  e  $U_{R+} = (0.367, 0.7273)$ , que se encontram em uma vizinhança da interseção  $U_R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$ .

**Definição 4.6.** Dizemos que a solução de um problema de Riemann é **estruturalmente estável** se o número e tipo de ondas que compõem a solução são preservadas quando o dado inicial e a função de fluxo são perturbadas.

Dessa forma, temos que pequenas variações em  $U_R$  resultam em soluções qualitativamente diferentes, onde podemos ter diferentes sequências de ondas e até mesmo mudanças na quantidade de ondas que compõem a solução. Podemos reunir estas ideias no seguinte resultado:

**Teorema 4.2.** *O problema de Riemann (3.20)-(3.21), (3.23) apresenta uma perda de estabilidade estrutural quando tomamos condições iniciais pertencentes aos conjuntos  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3$  e  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_3$ .*

Apesar da perda de unicidade no plano de fase, o perfil da solução é único adotando a norma do  $L^p$  (para  $p \in \mathbb{N}$ ) e possui uma dependência contínua em relação aos dados iniciais. A dependência contínua com dados iniciais é consequência da perda de unicidade ocorrer em apenas um ponto e uma variação contínuas das velocidades. Temos assim o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.** *O problema de Riemann (3.20)-(3.21), (3.23) é bem posto no sentido de Hadamard, adotando a norma do  $L^p$  para  $p \in \mathbb{N}$ .*

Observações análogas foram obtidas nos trabalhos [63, 29].



## 5 BANCO DE SURFACTANTE

A motivação para o estudo da solução do problema de Riemann para o sistema (3.20)-(3.21) foi o **banco de surfactante**, também conhecido como *slug*. Na literatura [59, 4], o banco de químico é comumente definido como o volume de químico injetado no meio poroso. Como neste trabalho estamos interessados na formação de espuma *in-situ*, consideramos o banco de surfactante como um processo de imbibição seguido por um processo de drenagem. Uma vez que o objetivo do uso da espuma é frear o gás subsequente, visamos determinar sob quais condições a espuma desempenhará melhor esse papel e quais os efeitos da adsorção no banco de surfactante. A solução do problema de Riemann é essencial para realizar esse estudo, pois fornece informações sobre as ondas que compõem a solução e expressões analíticas das velocidades. Devido ao alto custo do surfactante e as perdas decorrentes da adsorção no meio poroso, o estudo do banco de surfactante é essencial para determinar sob quais condições é possível garantir a formação de bolhas durante toda a extração, além de possibilitar a avaliação econômica deste processo.

Nesse contexto queremos resolver dois problemas de Riemann,  $RP_1$  e  $RP_2$ , descritos a seguir:

- $RP_1$ : é um processo de imbibição, onde injetamos água com surfactante no meio poroso a uma condição inicial arbitrária. Denotamos o estado à esquerda desse problema de Riemann por  $U_L^1$ , e estado à direita por  $U_R^1$ . O tempo de injeção será denotado por  $T_1$ .
- $RP_2$ : é um processo de drenagem, onde após o  $RP_1$ , injetamos gás no meio poroso. Denotamos o estado à esquerda desse problema de Riemann por  $U_L^2$ , e o estado à direita por  $U_R^2$ . O tempo de injeção será denotado por  $T_2$ .

Estamos considerando que inicialmente temos o reservatório a uma condição inicial arbitrária sem surfactante, onde em seguida é realizado a imbibição (representado por  $RP_1$ ). Após o tempo  $T_1$ , ocorre a injeção de gás (representado por  $RP_2$ ), que visa a formação de espuma *in-situ*. Uma vez que o  $RP_2$  ocorre subsequente ao

$RP_1$ , temos  $U_L^1 = U_R^2$ . Os problemas de Riemann  $RP_1$  e  $RP_2$  são representados esquematicamente na Figura 34.

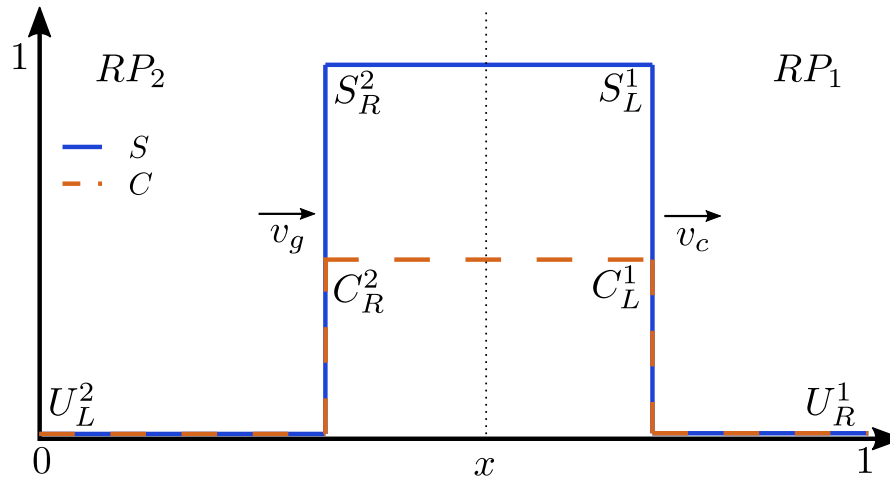


Figura 34 – Representação esquemática dos problemas de Riemann  $RP_1$  e  $RP_2$ .

Visando tornar essa análise o mais geral possível, não fixamos todas as condições iniciais e de injeção dos problemas de Riemann, apenas pedimos que satisfaçam as seguintes condições:

- i.  $S_L^2 = 10^{-3}$  e  $C_L^2 = 0$ .
- ii.  $S_R^2 = S_L^1 \in \mathcal{R}$  e  $C_L^1 = C_R^2 > 0$ .
- iii.  $C_R^1 = 0$ .

Como o  $RP_2$  é um processo de drenagem, faz sentido tomarmos  $S_L^2 = 0$ , porém, devido às limitações numéricas tomamos  $S_L^2 = 10^{-3}$ . As demais condições estão diretamente ligadas com a descrição de cada problema de Riemann.

A seguir, apresentamos o comportamento da solução de cada problema de Riemann, bem como a velocidade da frente do gás (velocidade final do  $RP_2$ ) e a velocidade da frente do surfactante (velocidade inicial do  $RP_1$ ). Do ponto de vista de aplicação para EOR, não seria um problema a onda de gás *furar* a onda de água sem ultrapassar a frente do surfactante. Porém, esse cenário representa a colisão entre os problemas de Riemann, que está fora do escopo deste trabalho. Por

esse motivo consideramos a velocidade da frente do surfactante como a velocidade inicial do  $RP_1$ , visando restringir nosso estudo para garantir que não ocorra a sobreposição dos dois problemas de Riemann.

### 5.1 Drenagem/ $RP_2$

Nesse caso temos  $U_L^2 = (10^{-3}, 0)$  e  $U_R^2 \in \mathcal{R}$ . A classificação do plano de fase seguindo a notação apresentada no Lema 4.1.5 é representada na Fig. 35.

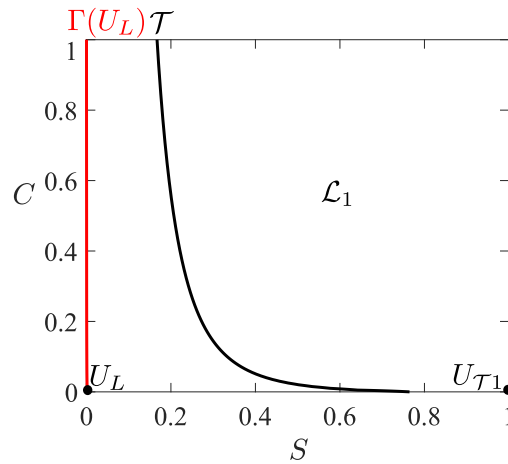


Figura 35 – Classificação do plano de fase para  $U_L^2$ .

A solução é composta por uma  $C$ -onda seguida por uma  $S$ -onda, como segue

$$U_L^2 \xrightarrow{C} U_M^2 \xrightarrow{S} U_R^2. \quad (5.1)$$

Como  $S_L^2 \approx 0$  e  $U_R^2 \in \mathcal{R}$ , a  $S$ -onda é formada por uma rarefação seguida de um choque, e a solução é dada por

$$U_L^2 \xrightarrow{C} U_M^2 \xrightarrow{Rar} U_{CV}^2 \xrightarrow{Choque} U_R^2, \quad (5.2)$$

onde  $U_{CV}^2 = (S_{CV}^2, C_R^2)$  representa o ponto entre a rarefação e o choque (ver Seção 2.1.2). Dessa forma, a velocidade da frente do gás é dada por

$$v_g = \frac{f(U_R^2) - f(U_{CV}^2)}{S_R^2 - S_{CV}^2}, \quad (5.3)$$

onde essa velocidade é a inclinação da secante ligando  $U_R^2$  a  $U_{CV}^2$ .

## 5.2 Imbibição/ $RP_1$

Neste caso temos fixados  $U_L^1 \in \mathcal{R}$  e  $C_L^1 > C_R^1 = 0$ . A classificação do plano de fase para esse caso seguindo a notação apresentada no Lema 4.1.5 é representada na Fig. 36.

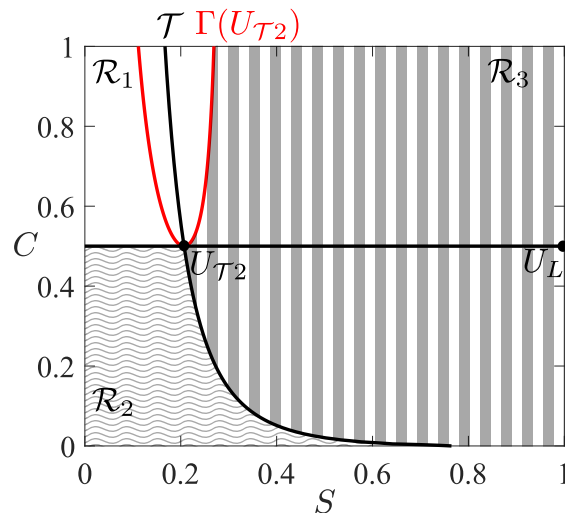


Figura 36 – Classificação do plano de fase para o caso de imbibição para  $U_L^1 = (0.999, 0.5)$ .

Uma vez que pedimos apenas que  $C_L^1 > C_R^1 = 0$ , temos duas possibilidades:

- $U_R^1 \in \mathcal{L}$ .

Neste cenário, a condição inicial do meio poroso é com maior quantidade de gás que água. Assim  $U_R^1 \in \mathcal{R}_2$  e a solução é dada por

$$U_L^1 \xrightarrow{S} U_1 \xrightarrow{C} U_2 \xrightarrow{S} U_R^1, \quad (5.4)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  podem ser obtidos seguindo os passos apresentados no Lema 4.1.5.

Como  $U_L^1$  e  $U_1$  estão em  $\mathcal{R}$ , ambos se encontram no *platô* que  $f$  possui próximo de 1 (ver Fig. 8). Dessa forma, a  $S$ -onda conecta  $U_L^1$  a  $U_1$  possui uma velocidade pequena e conecta estados com saturações próximas. Como queremos analisar a sequência de imbibição e drenagem, a primeira onda na imbibição ter velocidade pequena impossibilita essa análise. Por esse motivo,

desprezamos a primeira  $S$ -onda e consideramos que essa sequência começa na  $C$ -onda subsequente. Assim, a velocidade inicial do  $RP_1$  é dada por

$$v_c = \frac{f(U_2)}{S_2 + \mathcal{A}}. \quad (5.5)$$

- $U_R^1 \in \mathcal{R}$ .

Nesse cenário, inicialmente temos o meio poroso com maior quantidade de água (sem surfactante) que gás. Assim  $U_R^1 \in \mathcal{R}_3$  e a solução é dada por

$$U_L^1 \xrightarrow{S} U_M^1 \xrightarrow{C} U_R^1. \quad (5.6)$$

Dependendo da posição relativa entre  $S_M^1$  e  $S_R^1$ , podemos ter a ocorrência de um choque ou uma rarefação. Em qualquer caso, como ambos os estados se encontram sobre o *platô* que a função de fluxo fracionário apresenta próximo de 1, a velocidade da  $S$ -onda é pequena e possui baixa amplitude. Por esse motivo, consideramos que a velocidade do contato que ocorre em seguida é a velocidade inicial da solução. A velocidade do contato é dada por

$$v_c = \frac{f(U_R^1)}{S_R^1 + \mathcal{A}}. \quad (5.7)$$

### 5.3 Banco de surfactante ótimo

O objetivo dessa seção é determinar sob quais condições é possível aumentar a eficiência da espuma sem grandes aumentos na quantidade de surfactante injetada. Dentro das hipóteses apresentadas, queremos determinar os melhores valores para  $U_L^1$ ,  $U_R^1$  e  $U_L^2$ , com base no comportamento de cada solução.

Antes de apresentar como escolher os estados iniciais e de injeção, precisamos definir o tamanho do banco de surfactante. Conforme comentado anteriormente, este estudo é possível apenas até o encontro entre as ondas dos dois problemas de Riemann ocorrer. Visando reduzir a quantidade de surfactante injetada, queremos determinar condições onde esse encontro ocorre apenas no poço produtor, ou seja, em  $x = 1$  (ver (3.17)). Assim, consideramos o tamanho do banco de surfactante como o tempo que a imbibição deve ocorrer antes da injeção de gás para termos a

chegada da frente do surfactante e do gás no poço produtor simultaneamente. O tamanho do banco de surfactante pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$T_{surf} = \frac{1}{v_c} - \frac{1}{v_g}. \quad (5.8)$$

As quantidades  $1/v_c$  e  $1/v_g$  representam o tempo até a chegada no poço produtor da frente do surfactante e do gás, respectivamente. Dessa forma, o tamanho do banco de surfactante representa o menor tempo de injeção da imbibição necessário para garantir que a formação de *viscous fingering* não ocorra, isto é, o gás ultrapassando a frente do surfactante. Apesar do tamanho do banco de surfactante ser uma medida de tempo, como a velocidade total é constante, podemos facilmente recuperar o volume de surfactante injetado a partir dessa medida. Mantendo em mente que um maior tamanho de banco de surfactante implica em uma maior quantidade de surfactante injetada, nosso objetivo agora é determinar valores de  $S_L^1$ ,  $S_R^1$  e  $C_L^1$  de maneira a reduzir  $T_{surf}$  sem grandes aumentos na concentração injetada.

Inicialmente, gostaríamos de determinar qual erro é adicionado ao negligenciar a primeira  $S$ -onda do  $RP_1$ . Para isso, realizamos simulações numéricas utilizando o RCD, onde dados iniciais e de injeção arbitrários foram escolhidos. Nesta simulação, o dado inicial adicionado foi o perfil da solução analítica do processo de imbibição, onde foi adicionado próximo de  $x = 0$  a injeção de gás (ver Fig. 37). Observamos que, devido à baixa amplitude da primeira  $S$ -onda, após um tempo pequeno a  $S$ -onda não aparecia mais na solução. A partir desse ponto, a velocidade do gás não mais depende de  $U_R^2$ , mas sim do estado final da  $S$ -onda. Devido aos resultados numéricos, temos indícios que não adicionamos grandes erros ao negligenciarmos a primeira  $S$ -onda do  $RP_1$ , onde é necessário apenas evoluir a solução como se o  $U_R^2 = U_L^1$  fosse na verdade o estado final da  $S$ -onda.

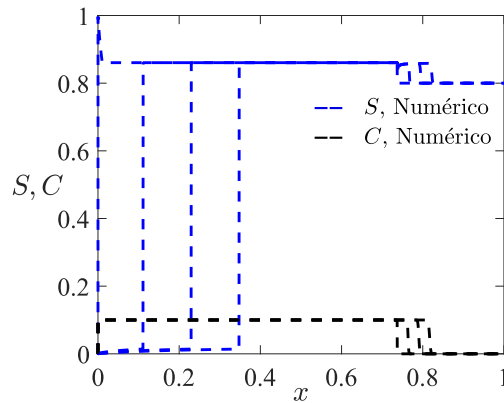


Figura 37 – Os perfis da saturação de água e saturação de surfactante obtida pelo RCD para os tempos  $t = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$  para  $U_L^2 = (10^{-3}, 0)$ ,  $U_R^2 = U_L^1 = (0.999, 0.1)$ ,  $U_R^1 = (0.8, 0)$ .

De acordo com a Seção 5.2, o estado final da primeira  $S$ -onda da imbibição não depende de  $U_L^1$ , sendo constante se  $U_R^1 \in \mathcal{L}$  ou depende de  $U_R^1$  quando este se encontra em  $\mathcal{R}$ . Uma vez que a velocidade da frente do gás é a inclinação da secante ligando  $U_R^2$  a  $U_{CV}^2$ , nosso objetivo é diminuir a inclinação dessa reta, reduzindo a velocidade do gás. Conforme mostra o painel esquerdo da Fig. 38, para diminuir essa velocidade devemos escolher  $S_R^1$  de maneira que a saturação final da  $S$ -onda seja a maior possível. Seguindo a construção apresentada no Lema 4.1.5, vemos que tomando  $S_L^1 = 1 = S_R^1$  a solução para o  $RP_1$  é dada por apenas um contato. Assim, além de conseguirmos reduzir a velocidade do gás o máximo possível, não é necessário negligenciar nenhuma  $S$ -onda. Resta agora verificar se aumentar o valor de  $S_R^1$  causa grandes reduções na velocidade do surfactante, e assim um aumento no tamanho do banco de surfactante. O painel direito da Fig. 38 mostra que, embora um aumento de  $S_R^1$  cause uma redução na velocidade do surfactante, a redução da velocidade do gás é mais significativa, resultando em um menor tamanho do banco de surfactante. Devido a restrições numéricas não podemos tomar  $S_L^1 = 1 = S_R^1$ , e fixamos  $S_L^1 = S_R^1 = 0.9999$ . Destacamos que a injeção de água ( $S = 1$ ) é comumente utilizada pela indústria, uma vez que injeção simultânea de fluidos diferentes resulta em utilização de diversos equipamentos, além de um aumento na dificuldade relacionada ao controle de pressão.

Para determinar o melhor valor para  $C_L^1$ , analisamos como a concentração

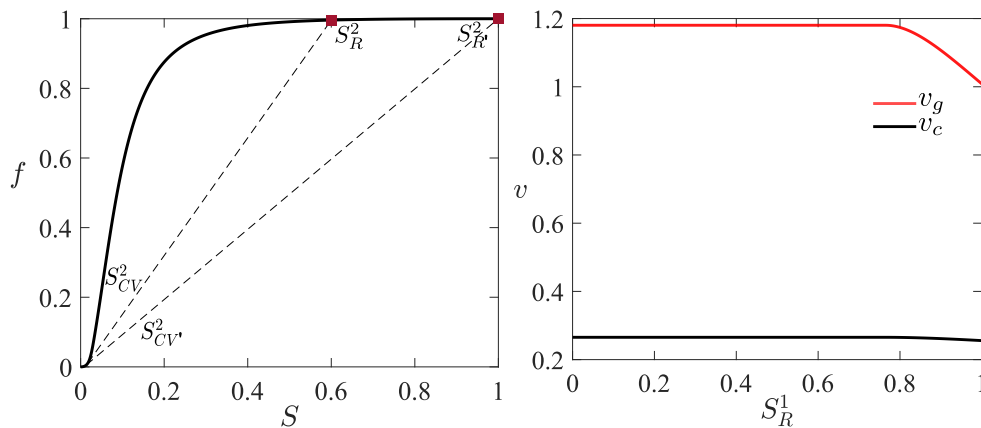


Figura 38 – O painel esquerdo representa a função de fluxo fracionário com os pontos  $(S, f(U))$  para os estados  $U_R^2$  e  $U_R^{2'}$ , e a reta secante que os conecta a seus respectivos pontos intermediários  $(S_{CV}, f(U_{CV}))$ . Foram tomados dois valores para o estado à direita,  $S_R^2 = 0.6$  e  $S_R^{2'} = 1$  com  $C_R^2 = 0.1 = C_R^{2'}$ . O painel direito representa a velocidade da frente do gás e do surfactante como função de  $S_R^1$  para  $C_L^1 = 0.1$ .

de surfactante impacta no tamanho do banco de surfactante, conforme mostra a Fig. 39. Notamos que a redução no tamanho do banco de surfactante é significativa para valores mais baixos de  $C$ , onde a partir de  $C = 0.2$  não há grandes mudanças. Visando utilizar uma concentração que apresenta uma boa redução no tamanho do banco de surfactante sem grandes adições de custo, adotamos  $C_L^1 = 0.1$ . Destacamos que na Fig. 39 não foi possível representar o tamanho do banco de surfactante para  $C = 0$ , uma vez que  $C$  constante e  $S_L^1 = S_R^1$  implica nenhuma onda ocorre.

Dessa forma, obtemos  $U_L^1 = (0.9999, 0.1)$ ,  $U_R^1 = (0.9999, 0)$  e  $U_L^2 = (10^{-3}, 0)$ . Sob tais condições temos que a velocidade da frente do gás é  $v_g = 1.0084$ , a velocidade da frente do surfactante é  $v_c = 0.2557$  e o tamanho do banco de surfactante é  $T_{surf} = 2.9186$ . O painel esquerdo da Fig. 40 apresenta o perfil do banco de surfactante analítico e numérico considerando as condições de injeção e iniciais obtidas. Nesse cenário, primeiro foi injetada água com surfactante durante  $T_1 = T_{surf}$ , seguido pela injeção de gás por  $T_2 = 0.3$ . Dessa forma, o tempo de simulação da imbibição é, na verdade  $T_{surf} + 0.3$ , uma vez que devemos representar a evolução simultânea do surfactante já injetado e do gás. A condição inicial adicionada no RCD foi o perfil da imbibição após o tempo  $T_1$  com a injeção da



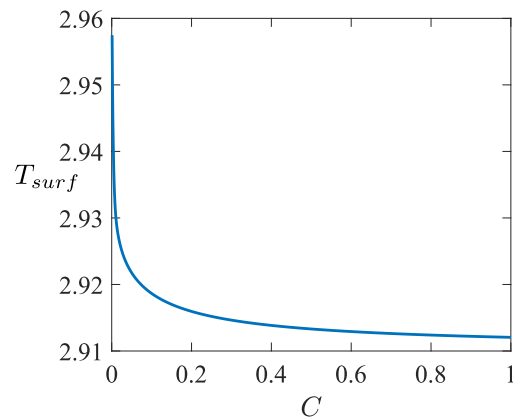


Figura 39 – Tamanho do banco de surfactante em função da concentração de surfactante.

drenagem ocorrendo em  $x = 0$ . Visando verificar que injetamos surfactante durante o menor tempo para garantir que os problemas de Riemann se encontram apenas em  $x = 1$ , realizamos uma simulação considerando o tempo de *breakthrough* do gás. Conforme mostra o painel direito da Fig. 40, a frente do gás e do surfactante se encontram em  $x = 1$ , indicando que de fato injetamos o surfactante durante o menor tempo necessário.

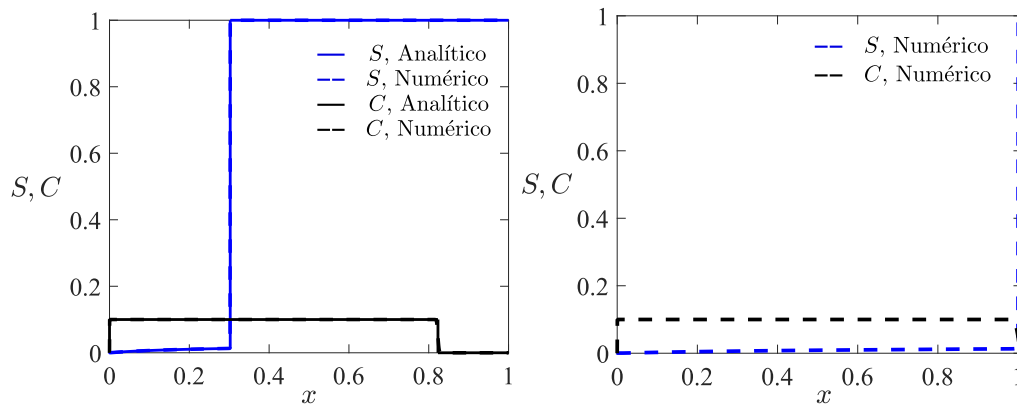


Figura 40 – Perfil da saturação da água (em azul) e da concentração do surfactante (em preto) para  $U_L^1$ ,  $U_R^1$  e  $U_L^2$ . O painel esquerdo representa as soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (linha tracejada) para os tempos de injeção  $T_2 = 0.3$  e  $T_1 = 3.2187$ . O painel direito representa a solução numérica para o tempo  $t = 0.9917$ .

#### 5.4 Impacto da adsorção

Nesta seção investigamos os efeitos da adsorção do surfactante no tamanho do banco de surfactante. Conforme apresentado na Seção 3.4, o termo responsável pela parcela de surfactante adsorvido é o  $K_d^a$ , que se encontra na constante  $\mathcal{A}$  (ver Eq. (3.22)). Assim, fixados os valores encontrados na seção anterior, queremos analisar como mudanças no valor de  $K_d^a$  tem impacto no tamanho do banco de surfactante. A Fig. 41 representa o tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$  para  $U_L^1 = (0.999, 0.5) = U_R^2$ ,  $U_R^1 = (0.8, 0)$  e  $U_L^2 = (10^{-3}, 0)$ , onde o painel esquerdo representa  $K_d^a$  variando de 0 a 1, e o painel direito de 0 a 1000.

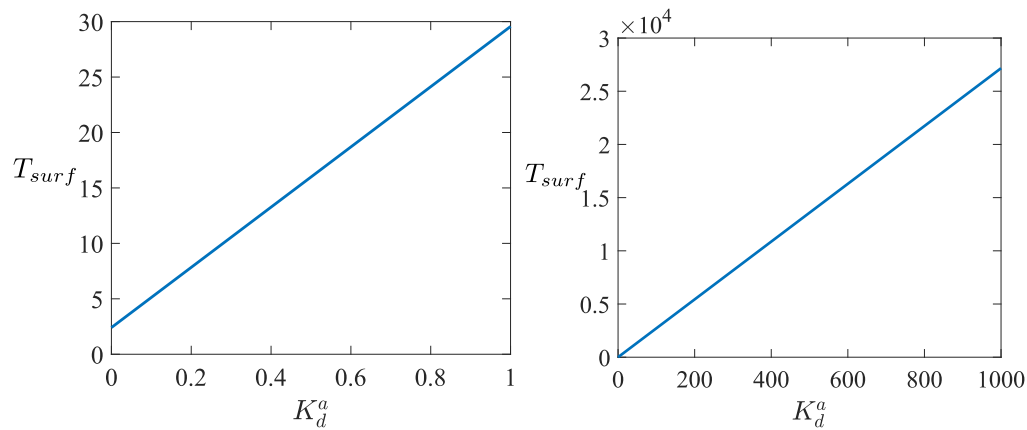


Figura 41 – Tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$ .

Aumentar o valor de  $K_d^a$  implica em uma maior quantidade de surfactante adsorvida no meio poroso, e assim em uma redução no surfactante presente na solução injetada. Isso resulta em uma alteração da velocidade do gás e do surfactante, que dependem fortemente do valor de  $C$ . Conforme apresentado na Eq. (5.8), temos então uma alteração no tamanho do banco de surfactante. É interessante notar como o fato do modelo representar o fenômeno de adsorção de maneira linear, resultou em um aumento linear do tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$ .

A Fig. 42 representa dois bancos de surfactante, onde no painel esquerdo foi tomado  $K_d^a = 0$  e no painel direito  $K_d^a = 1$ . Em ambas as figuras foram consideradas as condições iniciais e de injeção obtidas na seção anterior. Para

evoluir a imbibição/ $RP_1$ , foi calculado o tamanho do banco de surfactante para cada caso, onde para  $K_d^a = 0$  temos  $T_{surf} = 1.5605$ , e para  $K_d^a = 1$  obtemos  $T_{surf} = 28.7222$ . Conforme o esperado, um aumento na constante de Henry resultou em um aumento no tamanho do banco de surfactante. Podemos ver ainda que esse aumento teve pouca influência na velocidade da frente do gás, onde o aumento no tamanho do banco de surfactante foi resultado da redução da velocidade da frente do surfactante. Como a velocidade da frente do surfactante é a velocidade de um contato, o aumento em  $K_d^a$  causa uma redução na velocidade (ver Eq. (5.7)). Já a velocidade da frente do gás é dada pela velocidade de um choque, que não é alterado pelo valor de  $K_d^a$ . Apesar da onda inicial do  $RP_2$  ser um contato, como temos  $S_L^2 \approx 0$ , a alteração do  $K_d^a$  tem pouca influência na velocidade do contato de  $RP_2$ .

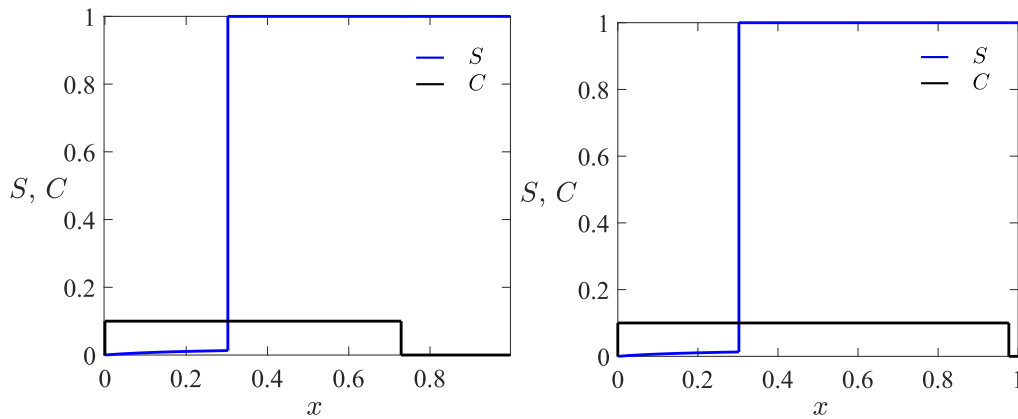


Figura 42 – O painel esquerdo representa o banco de surfactante para  $K_d^a = 0$ , onde obtemos  $T_{surf} = 1.5605$ . O painel direito representa o banco de surfactante para  $K_d^a = 1$ , onde obtemos  $T_{surf} = 28.7222$ . Em ambos os painéis, o tempo de injeção da drenagem foi  $T_2 = 0.3$ .

No painel esquerdo da Fig. 41 notamos que o comportamento do tamanho do banco de surfactante se mantém mesmo para valores grandes de  $K_d^a$ . Voltando à Eq. (3.12)-(3.13), gostaríamos de entender como o limite  $K_d^a \rightarrow +\infty$  impacta nosso problema. Ao aumentarmos ilimitadamente o valor de  $K_d^a$ , temos que apenas os termos que o acompanham influenciarão nossa solução, onde os demais podem ser desprezados. Dessa forma, obtemos que  $\partial_t C_s^w = 0$  no limite  $K_d^a \rightarrow +\infty$ , implicando que  $C_s^w$  é constante no tempo. Isso nos diz que ao injetarmos o banco de surfactante

em um meio poroso inicialmente sem surfactante com  $K_d^a$  tendendo a infinito, temos o valor de  $C_s^w$  permanecendo igual a zero, ou seja, todo o surfactante injetado é instantaneamente adsorvido pelo meio poroso.

## 6 CONCLUSÃO

Visando descrever o banco de surfactante em meios porosos, adotamos um sistema de leis de conservação modelando o fluxo de espuma em equilíbrio e o transporte de surfactante com adsorção linear no meio poroso. Para representar o impacto da espuma na fase gasosa, utilizamos o modelo de textura de espuma implícita implementado em um dos maiores simuladores de geociência de reservatórios, o CMG-STARs. Devido à complexidade relacionada ao sistema e a função de fluxo fracionário adotadas, condições de entropia usuais não podem ser aplicadas, onde usamos a condição de admissibilidade proposta em [38]. Isso possibilitou a classificação do plano de fase em função da sequência de ondas que compõem a solução, resultando na solução global do problema de Riemann. Foi destacado que existem conjuntos de dados iniciais que resultam na perda da unicidade da solução. Essa perda de unicidade é caracterizada pela existência de mais de uma sequência de ondas no plano de fase, resultando em perfis de solução diferentes. Apesar disso, temos que no plano  $x-t$  a solução é única. Visando estudar o impacto da perda de unicidade em esquemas de diferenças finitas, realizamos aproximações numéricas utilizando o RCD. Para as condições iniciais onde não há perda de unicidade da solução, obtemos excelentes resultados ao comparar as soluções analíticas e numéricas. Devido à dificuldade em determinar com precisão os pontos onde há perda de unicidade, aproximamos um estado no conjunto de interesse e realizamos perturbações ao seu redor. Como resultado, o solver apresentou mudanças qualitativas no comportamento da solução para pequenas variações, refletindo a perda de estabilidade estrutural do problema. Apesar disso, notamos que a solução é única na norma do espaço  $L^p$  (para  $p \in \mathbb{N}$ ) e depende continuamente dos dados iniciais, indicando que o problema é bem posto no sentido de Hadamard. Dessa forma, mesmo o problema sendo bem posto podemos ter oscilações em simulações devido à perda de estabilidade estrutural.

Possuindo a solução do problema de Riemann em mãos, foi possível montar um banco de surfactante através da sequência de dois problemas de Riemann. Apresentamos as expressões analíticas para a velocidade da frente do gás e do surfactante, bem como seus respectivos tempos de *breakthrough*. Essas expressões

possibilitaram obter condições onde a espuma apresenta um melhor desempenho sem grandes aumentos na concentração de surfactante injetado. Embora o modelo de adsorção linear seja simples, para baixas concentrações de surfactante representa a física do problema corretamente [40]. Uma vez que a concentração ótima de surfactante encontrada neste trabalho foi baixa, temos indícios que esse modelo é adequado para descrever a inundação de surfactante para EOR. Finalmente, analisamos o impacto da adsorção do surfactante no banco de surfactante, onde foi possível descrever o tempo de injeção do surfactante em função da constante Henry. Dessa forma, é possível avaliar sob quais condições do reservatório injeção de surfactante é economicamente vantajoso.

A partir desse trabalho, existem diversos caminhos a serem tomados visando evoluir o feito até agora. Inicialmente, é possível obter a solução para o problema de Riemann para um modelo considerando a adsorção não linear como, por exemplo, adsorção de Langmuir ou Côncava. Podemos também investigar sobre a sobreposição dos problemas de Riemann, seguindo a teoria de leis de conservação. Dessa forma, o estudo do banco de surfactante seria mais realista, uma vez que não haveria necessidade de ignorar ondas de nenhum dos problemas de Riemann, além de entender como a interação entre essas ondas ocorre. Embora a solução analítica aqui construída já foi comparada com o solver RCD, ainda é possível comparar diretamente com o simulador comercial CMG-STARS. Além do CMG-STARS, também é possível realizar comparações com o simulador FOSSIL, atualmente em desenvolvimento no LAMAP. Finalmente, um objetivo mais ambicioso, seria estudar o modelo de adsorção linear trifásico, composto por água com surfactante, gás e óleo.

Com base na teoria desenvolvida aqui, realizamos:

- Apresentação no evento semana da matemática 2021 da UFJF, intitulado “Modelagem matemática do transporte do surfactante em meio poroso com adsorção linear”.
- Apresentação no evento XLII CILAMCE em 2022 com publicação em anais do evento [27], intitulado “Solution construction for a drainage process for a system modeling the foam flow with linear surfactant adsorption”

(<https://cilamce.com.br/anais/index.php?ano=2022>).

- Artigo submetido em 2023 no arXiv, intitulado “On the Riemann problem for the foam displacement in porous media with linear adsorption” [28].

Durante o período do mestrado, também houve a colaboração nos seguintes trabalhos:

- Publicação na Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão, intitulado “Traveling waves for in-situ combustion in porous media” [20].
- Publicação no Journal of Petroleum Science and Engineering, intitulado “Bubble-growth regime for confined foams: Comparison between  $N_2-CO_2$ /foam and  $CO_2$ /foam stabilized by silica nanoparticles” [21].
- Apresentação no evento Rio Oil & Gas com publicação em anais do evento [27], intitulado “Solution construction for a drainage process for a system modeling the foam flow with linear surfactant adsorption” (<https://biblioteca.ibp.org.br/pt-BR/search/43667>)

## REFERÊNCIAS

- 1 W. F. Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic press, 2014.
- 2 E. Ashoori, D. Marchesin, and W. R. Rossen. Roles of transient and local equilibrium foam behavior in porous media: traveling wave. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 377:228–242, 2011.
- 3 E. Ashoori, D. Marchesin, and W. R. Rossen. Stability analysis of uniform equilibrium foam states for EOR processes. *Transport in Porous Media*, 92(3):573–595, 2012.
- 4 F. Bakharev, A. Enin, K. Kalinin, Y. Petrova, N. Rastegaev, and S. Tikhomirov. Optimal polymer slugs injection profiles. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 425:115042, 2023.
- 5 T. Barkve. The Riemann problem for a nonstrictly hyperbolic system modeling nonisothermal, two-phase flow in a porous medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(03):784–798, 1989.
- 6 H. J. Bertin, M. Y. Quintard, and L. M. Castanier. Development of a bubble-population correlation for foam-flow modeling in porous media. *SPE Journal*, 3(04):356–362, 1998.
- 7 R. H. Brooks and A. T. Corey. *Hydraulic Properties of Porous Media*. Colorado State University Hydrology Paper. Colorado State University, 1964.
- 8 S. E. Buckley and M. Leverett. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, 146(01):107–116, 1942.
- 9 I. Cantat, S. Cohen-Addad, F. Elias, F. Graner, R. Höhler, O. Pitois, F. Rouyer, and A. Saint-Jalmes. *Foams: structure and dynamics*. OUP Oxford, 2013.
- 10 P. Castañeda. Dogma: S-shaped. *The Mathematical Inteligencer*, 38:10–13, 2016.
- 11 G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A. Souza, D. Marchesin, and J. Bruining. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Comput. Geosciences*, 16:799–808, 2012.
- 12 G. Chapiro, D. Marchesin, and S. Schecter. Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 11(02):295–328, 2014.



- 13 Q. Chen, M. G. Gerritsen, and A. R. Kavscek. Modeling foam displacement with the local-equilibrium approximation: theory and experimental verification. *SPE Journal*, 15(01):171–183, 2010.
- 14 Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. SIAM, 2006.
- 15 C. M. G. (CMG). *STARS Users Manual; Version 2019.10*, 2019.
- 16 A. Colin, J. Giermanska-Kahn, D. Langevin, and B. Desbat. Foaming properties of modified ethoxylated nonionic surfactants. *Langmuir*, 13(11):2953–2959, 1997.
- 17 J. C. Da-Mota. The Riemann problem for a simple thermal model for two phase flow in porous media. *Mat. Apl. Comput.*, 11:117–145, 1992.
- 18 C. M. Dafermos and C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer, 2005.
- 19 H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, 1856.
- 20 T. de Assis, M. Bispo, Y. Santa Cruz Cardenas, G. Fritis, A. Gutiérrez, and G. Chapiro. Traveling waves for in-situ combustion in porous media. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão*, 5, 08 2020.
- 21 J. M. Façanha, L. F. Lopes, G. Fritis, P. Godoy, R. W. dos Santos, G. Chapiro, and A. Perez-Gramatges. Bubble-growth regime for confined foams: Comparison between  $N_2$ - $CO_2$ /foam and  $CO_2$ /foam stabilized by silica nanoparticles. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 218:111006, 2022.
- 22 A. H. Falls, G. J. Hirasaki, T. W. Patzek, D. A. Gauglitz, D. D. Miller, and T. Ratoukowski. Development of a mechanistic foam simulator: The population balance and generation by snap-off. *SPE Reservoir Engineering*, 3:884–892, 1988.
- 23 A. H. Falls, J. J. Musters, and J. Ratulowski. The apparent viscosity of foams in homogeneous bead packs. *SPE Reservoir Engineering*, 4(02):155–164, 1989.
- 24 R. Farajzadeh, A. A. Eftekhari, H. Hajibeygi, S. Kahrobaei, J. M. Van der Meer, S. Vincent-Bonnieu, and W. R. Rossen. Simulation of instabilities and fingering in surfactant alternating gas (SAG) foam enhanced oil recovery. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 34:1191–1204, 2016.

- 25 F. Friedmann, W. H. Chen, and P. A. Gauglitz. Experimental and simulation study of high-temperature foam displacement in porous media. *SPE Reservoir Engineering*, 6:37–45, 1991.
- 26 G. Fritis, L. Lozano, and G. Chapiro. Análise avançada de petróleo usando espumas através de novas ferramentas analíticas. In *Rio Oil & Gas 2022: Sessões Técnicas Digitais e Presenciais / Technical Sessions (Video Presentations + Technical Papers in PDF)*, 2022.
- 27 G. Fritis, P. Z. S. Paz, and G. Chapiro. Solution construction for a drainage process for a system modeling the foam flow with linear surfactant adsorption. In *XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, 2022.
- 28 G. C. Fritis, P. S. Paz, L. F. G. Lozano, and G. Chapiro. On the riemann problem for the foam displacement in porous media with linear adsorption. *arXiv preprint arXiv:2304.07414*, 2023.
- 29 F. Furtado. *Structural Stability of Nonlinear Waves for Conservation Laws*. PhD thesis, New York University, 1989.
- 30 S. Gogoi and S. B. Gogoi. Review on microfluidic studies for eor application. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 9:2263–2277, 2019.
- 31 J. Hadamard. Princeton university bulletin. 1902, 13:49–52, 1902.
- 32 S. A. A. Hamid and A. H. Muggeridge. Analytical solution of polymer slug injection with viscous fingering. *Computational Geosciences*, 22(3):711–723, 2018.
- 33 G. J. Hirasaki and J. B. Lawson. Mechanisms of foam flow in porous media: apparent viscosity in smooth capillaries. *SPE Journal*, 25(02):176–190, 1985.
- 34 G. J. Hirasaki, C. A. Miller, R. Szafranski, J. B. Lawson, and N. Akiya. Surfactant/foam process for aquifer remediation. In *International symposium on oilfield chemistry*. SPE, 1997.
- 35 K. Hoffmann and R. A. Kunze. *Linear algebra*. Prentice-Hall New Jersey, 1971.
- 36 E. Isaacson, D. Marchesin, B. Plohr, and B. Temple. Multiphase flow models with singular Riemann problems. *Comput. Appl. Math.*, 11(2):147–166, 1992.
- 37 E. L. Isaacson. Global solution of the Riemann problem for a non-strictly hyperbolic system of conservation laws arising in enhanced oil recovery. Technical report, Rockefeller University, 1981.

- 38 E. L. Isaacson and J. B. Temple. Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws. *Journal of Differential Equations*, 65(2):250–268, 1986.
- 39 T. Johansen and R. Winther. The solution of the riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(3):541–566, 1988.
- 40 S. Kalam, S. A. Abu-Khamsin, M. S. Kamal, and S. Patil. Surfactant adsorption isotherms: A review. *ACS omega*, 6(48):32342–32348, 2021.
- 41 S. I. Kam. Improved mechanistic foam simulation with foam catastrophe theory. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 318(1):62–77, 2008.
- 42 S. I. Kam, Q. P. Nguyen, Q. Li, and W. R. Rossen. Dynamic simulations with an improved model for foam generation. *SPE Journal*, 12(1):35–48, 2007.
- 43 B. L. Keyfitz and H. C. Kranzer. A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 72(3):219–241, 1980.
- 44 Z. I. Khatib, G. J. Hirasaki, and A. H. Falls. Effects of capillary pressure on coalescence and phase mobilities in foams flowing through porous media. *SPE Reservoir Engineering*, 3(3):919–926, 1988.
- 45 A. R. Kovscek, T. W. Patzek, and C. J. Radke. A mechanistic population balance model for transient and steady-state foam flow in Boise sandstone. *Chemical Engineering Science*, 50(23):3783–3799, 1995.
- 46 A. R. Kovscek and C. J. Radke. Fundamentals of foam transport in porous media. In L. L. Schramm, editor, *Foams: Fundamentals and Applications in the Petroleum Industry*. American Chemical Society, Washington, USA, 1994.
- 47 L. Lake. *Enhanced oil recovery*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- 48 W. Lambert, A. Alvarez, I. Ledoino, D. Tadeu, D. Marchesin, and J. Bruining. Mathematics and numerics for balance partial differential-algebraic equations (PDAEs). *Journal of Scientific Computing*, 84(2):1–56, 2020.
- 49 P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 10(4):537–566, 1957.
- 50 R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, Basel, 1990.

- 51 E. L. Lima. *Análise real*, volume 1. Impa Rio de Janeiro, 2004.
- 52 T. P. Liu. The Riemann problem for general  $2 \times 2$  conservation laws. *Transactions of the American Mathematical Society*, 199:89–112, 1974.
- 53 L. F. Lozano, R. Q. Zavala, and G. Chapiro. Mathematical properties of the foam flow in porous media. *Computational Geosciences*, 25(1):515–527, 2021.
- 54 K. Ma, J. Lopez-Salinas, M. Puerto, C. Miller, S. Biswal, and G. Hirasaki. Estimation of parameters for the simulation of foam flow through porous media. Part 1: the dry-out effect. *Energy & fuels*, 27(5):2363–2375, 2013.
- 55 T. Majeed, T. I. Sølling, and M. S. Kamal. Foamstability: The interplay between salt-, surfactant-and critical micelle concentration. *JPSE*, 187:106871, 2020.
- 56 M. Muskat and M. W. Meres. The flow of heterogeneous fluids through porous media. *Physics*, 7(9):346–363, 1936.
- 57 U. L. Norris. Core-scale simulation of polymer flow through porous media. Master’s thesis, University of Stavanger, Norway, 2011.
- 58 Y. Petrova, B. J. Plohr, and D. Marchesin. Vanishing adsorption admissibility criterion for contact discontinuities in the polymer model. *arXiv preprint arXiv:2211.10326*, 2022.
- 59 P. M. Ribeiro and A. P. Pires. The displacement of oil by polymer slugs considering adsorption effects. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. OnePetro, 2008.
- 60 W. R. Rossen. Foams in enhanced oil recovery. In R. K. Prud’homme and S. Khan, editors, *Foams: Theory, Measurements and Applications*. Marcel Dekker, New York, 1996.
- 61 W. R. Rossen and J. Bruining. Foam displacements with multiple steady states. *SPE Journal*, 12(01):5–18, 2007.
- 62 W. Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- 63 S. Schecter, D. Marchesin, and B. J. Plohr. Structurally stable riemann solutions. *journal of differential equations*, 126(2):303–354, 1996.
- 64 L. L. Schramm. *Surfactants: fundamentals and applications in the petroleum industry*. Cambridge university press, 2000.

- 65 M. Simjoo and P. L. J. Zitha. Modeling of foam flow using stochastic bubble population model and experimental validation. *Transport in Porous Media*, 107(3):799–820, 2015.
- 66 G. D. Smith, G. D. Smith, and G. D. S. Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- 67 J. Smoller. *Shock waves and reaction–diffusion equations*. Springer-Verlag New York, 1994.
- 68 J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 1979.
- 69 J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Other Titles in Applied Mathematics. SIAM, Madison, USA, 2004.
- 70 J. Tang, P. Castañeda, D. Marchesin, and W. R. Rossen. Three-phase fractional-flow theory of foam-oil displacement in porous media with multiple steady states. *Water Resources Research*, 55(12):10319–10339, 2019.
- 71 J. Tang, P. Castaneda, D. Marchesin, and W. R. Rossen. Foam-oil displacements in porous media: Insights from three-phase fractional-flow theory. In *ADIPEC*. OnePetro, 2022.
- 72 B. Temple. Global solution of the cauchy problem for a class of  $2 \times 2$  nonstrictly hyperbolic conservation laws. *Advances in Applied Mathematics*, 3(3):335–375, 1982.
- 73 R. Thorat and H. Bruining. Foam flow experiments. I. Estimation of the bubble generation-coalescence function. *Transport in Porous Media*, 112(1):53–76, 2016.
- 74 A. Tunnish, E. Shirif, and A. Henni. History matching of experimental and cmg-stars results. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 9(1):341–351, 2019.
- 75 A. R. Valdez, B. M. Rocha, G. Chapiro, and R. W. dos Santos. Assessing uncertainties and identifiability of foam displacement models employing different objective functions for parameter estimation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 214:110551, 2022.
- 76 C. J. van Duijn. *An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow*. Eindhoven University of Technology, 2003.
- 77 C. Wang and H. A. Li. Stability and mobility of foam generated by gas-solvent/surfactant mixtures under reservoir conditions. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 34:366–375, 2016.

- 78 S. Wang and C. N. Mulligan. An evaluation of surfactant foam technology in remediation of contaminated soil. *Chemosphere*, 57(9):1079–1089, 2004.
- 79 H. J. Welge. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. *Journal of Petroleum Technology*, 4(04):91–98, 1952.
- 80 R. Q. Zavala, L. F. Lozano, P. L. Zitha, and G. Chapiro. Analytical solution for the population-balance model describing foam displacement. *Transport in Porous Media*, 144:1–17, 2022.
- 81 S. Zendehboudi, M. A. Ahmadi, A. R. Rajabzadeh, N. Mahinpey, and I. Chatzis. Experimental study on adsorption of a new surfactant onto carbonate reservoir samples—application to EOR. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 91(8):1439–1449, 2013.
- 82 Y. Zeng, K. Ma, R. Farajzadeh, M. Puerto, S. L. Biswal, and G. J. Hirasaki. Effect of surfactant partitioning between gaseous phase and aqueous phase on CO<sub>2</sub> foam transport for enhanced oil recovery. *Transport in Porous Media*, 114(3):777–793, 2016.
- 83 Z. F. Zhang, V. L. Freedman, and L. Zhong. Foam transport in porous media – A review. Technical report, Pacific Northwest National Lab.(PNNL), Richland, WA (USA), 2009.
- 84 P. L. J. Zitha. A new stochastic bubble population model for foam in porous media. In *SPE/DOE Symposium on Improved Oil Recovery*. SPE, 2006.
- 85 P. L. J. Zitha, Q. P. Nguyen, P. K. Currie, and M. A. Buijse. Coupling of foam drainage and viscous fingering in porous media revealed by X-ray computed tomography. *Transport in Porous Media*, 64(3):301–313, 2006.