

João Vitor de Lima

**Abordagem Econômica-estatística para  
Planejamento de Controle On-line por Atributo**

Juiz de Fora

2023



João Vitor de Lima

# **Abordagem Econômica-estatística para Planejamento de Controle On-line por Atributo**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Estatística

Orientador: Prof. Lupércio França Bessegato

Juiz de Fora

2023

---

João Vitor de Lima

Abordagem Econômica-estatística para Planejamento de Controle On-line por Atributo/ João Vitor de Lima. – Juiz de Fora, 2023-

75 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Lupércio França Bessegato

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Estatística, 2023.

1. Controle on-line por atributo. 2. Design Econômico-Estatístico. 3. Algoritmo genético multiobjetivo I. Bessegato, Lupércio França orientador. II. Universidade Federal de Juiz de Fora. III. Faculdade de Estatística. IV. Título

CDU 02:141:005.7

---

João Vitor de Lima

## **Abordagem Econômica-estatística para Planejamento de Controle On-line por Atributo**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística

Trabalho aprovado. Juiz de Fora, 10 de julho de 2023:

---

**Prof. Lupércio França Bessegato**  
Orientador

---

**Profa. Dra. Camila Borelli Zeller**  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

**Prof. Dr. Gustavo dos Santos Leal**  
Universidade Federal de Itajuba

Juiz de Fora  
2023



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais João Batista e Maria Aparecida, por todo apoio, amor e pelas condições proporcionadas por eles, desde a minha infância, para chegar até aqui. Agradeço também a minha irmã Maria Eduardo pela amizade, interesse no que faço e por ser fonte de inspiração para mim. Agradeço também à Joice, sem seu apoio e sua confiança em mim que muitas vezes nem eu mesmo tinha, seria muito mais difícil concluir essa etapa, obrigado por tornar isso possível.

Agradeço também ao departamento de Estatística da UFJF e seu corpo docente pelos ensinamentos e a todos que de alguma maneira estiveram nessa caminhada. Finalmente gostaria de agradecer ao meu orientador Lupércio pelas conversas, amizade e por ter sido a pessoa que me influenciou a fazer o curso.





*“Não importa o quão devagar você vá, desde que não pare”  
(Confúcio)*



# Resumo

O procedimento de controle on-line por atributo consiste em inspecionar um único item a cada  $m$  itens produzidos ( $m \geq 2$ ). Em cada inspeção, decide-se se a fração de itens não conformes produzidos aumentou. Se o item verificado for classificado como não conforme, o processo de produção é ajustado de modo a que a fração de itens conformes retorne ao seu estado original. Uma generalização observada na literatura é a consideração de erros de classificação, intervalos de inspeção variável e testes com medidas repetidas do item inspecionado. Originalmente, utiliza-se uma abordagem econômica para estabelecer os parâmetros do sistema de controle, minimizando o custo esperado do sistema. Este estudo apresenta uma breve revisão sobre o design econômico-estatístico de controle online por atributos. Os mecanismos de otimização multiobjetivo por algoritmos genéticos são discutidos e utilizados para buscar o conjunto de soluções com os parâmetros ótimos que minimizam o custo esperado e a fração de itens não-conformes enviados ao mercado. O procedimento é ilustrado por exemplos numéricos. Este método utiliza as propriedades de uma cadeia de Markov ergódica para obter a expressão do custo médio do sistema de controle.

**Palavras-chaves:** Controle on-line por atributo. Planejamento Econômico-estatístico. Erros de classificação. Intervalo Variável de Inspeção. Medidas Repetidas. Algoritmo Genético Multiobjetivo.



# Abstract

The procedure for online control by attribute consists of inspecting a single item at every  $m$  items produced ( $m \geq 2$ ). On each inspection, it is decided whether the fraction of the produced non conforming items increased. If the inspected item is classified as nonconforming, the production process is adjusted so that the conforming fraction returns to its original status. A generalization observed in the literature is to consider missclassification errors, variable inspection interval and repetitive testing of the inspected item. In general, the authors offer an economic approach to establish the search procedure for the design control system, by minimizing the control system expected cost. This study presents a short review about the economical-statistical design of online process control by attribute. The mechanisms of multiobjective optimization by genetic algorithms is discussed and used to search the set of solutions with the optimal parameters that minimizes the expected cost and fraction of nonconforming items sent to the market. The procedure is illustrated by numerical examples. This method uses the properties of an ergodic Markov chain to obtain the expression for the average cost of this control system.

**Key-words:** Online control by attributes. Economical-statistical design. Missclassification errors. Variable inspection interval. Repetitive testing. Multiobjective genetic algorithms.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma do sistema de controle do modelo $m$ . . . . .	26
Figura 2 – Fluxograma do processo do modelo $mL$ . . . . .	33
Figura 3 – Fluxograma do processo com inspeções repetidas . . . . .	39
Figura 4 – Método agregativo de otimização multiobjetivo . . . . .	47
Figura 5 – Método não-agregativo de otimização multiobjetivo . . . . .	48
Figura 6 – Exemplo sobre dominância . . . . .	49
Figura 7 – Fronteira de Pareto . . . . .	51
Figura 8 – Codificações do cromossomo . . . . .	55
Figura 9 – Tipos de cruzamento . . . . .	56
Figura 10 – Cálculo Crowding-distance. . . . .	57
Figura 11 – Procedimento NSGA2 . . . . .	58
Figura 12 – Fronteiras de Pareto dos modelos $m, mL$ e $mLr$ no Cenário 1 . . . . .	60
Figura 13 – Fronteiras de Pareto dos modelos $m, mL$ e $mLr$ no Cenário 2 . . . . .	61
Figura 14 – Fronteiras de Pareto dos modelos $m, mL$ e $mLr$ no Cenário 3 . . . . .	62





# Lista de tabelas

Tabela 1 – Bits dos modelos. . . . .	58
Tabela 2 – Parâmetros do algoritmo genético. . . . .	58
Tabela 3 – Resultados do modelo $mL$ no cenário 1 . . . . .	60
Tabela 4 – Resultados dos modelo $mL$ e $mLr$ no cenário 2 . . . . .	61
Tabela 5 – Resultados do modelo $mLr$ no cenário 3 . . . . .	63



# Lista de símbolos

$a$	quantidade mínima de declarações de conformidade em inspeção para decidir-se pela não intervenção no processo
$b_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial $(x, y)$ assumir valor $i$
$B_i(x, y)$	probabilidade de variável aleatória binomial $(x, y)$ assumir valores maiores ou iguais a $i$
$C(x)$	custo do sistema de controle por item enviado ao mercado, em função dos parâmetros de otimização $x$
$c_a$	custo de ajuste do processo
$c_d$	custo de descarte de item inspecionado
$c_{insp}$	custo de inspeção
$c_{nc}$	custo de envio de item não-conforme ao mercado
$c_{sc}$	custo de descarte de item conforme inspecionado
$c_{snc}$	custo de descarte de item não-conforme inspecionado
$E$	espaço de estados da cadeia de Markov
$I$	matriz identidade
$L$	comprimento do primeiro ciclo de monitoramento após ajuste
$L_D$	variável aleatória associada ao custo esperado de se produzir itens não-conformes
$M$	tamanho da população de indivíduos de um algoritmo genético
$m$	intervalo entre inspeções
$n$	tamanho da amostra
$P$	matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov
$p_1$	fração de itens conformes produzidos com o processo operando sob controle
$p_2$	fração de itens conformes produzidos com o processo operando fora de controle

$p_A$	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera sob controle
$p_D$	probabilidade de não se intervir no processo, dado que a produção opera fora de controle
$p_x(w, s)$	probabilidade do intervalo de inspeção do ciclo corrente ter comprimento $x$ , dado que seu estado é $(w, s)$
$q_x(t)$	probabilidade do estado do processo se modificar exatamente no $t$ -ésimo item dentre $x$ itens produzidos, dado que ocorra mudança de estado durante sua produção, $1 \leq t \leq x$
$r$	quantidade de repetições independentes de classificação de item sob inspeção
$R$	quantidade de itens produzidos durante a coleta da amostra
$s$	segundo elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado à decisão decorrente da inspeção do ciclo de monitoramento
$T$	variável aleatória associada à quantidade de itens produzidos no ciclo
$w$	primeiro elemento do par ordenado que representa o estado da cadeia de Markov, associado a situação do processo de produção
$\alpha$	probabilidade de classificar como não-conforme item realmente conforme
$\beta$	probabilidade de classificar como conforme item realmente não-conforme
$\eta(w, s)$	quantidade esperada de itens descartados e realmente no estado $x$
$\theta(w, s)$	custo esperado relacionado ao item inspecionado de ciclo cujo estado é $(w, s)$
$v(w, s)$	quantidade esperada de itens não-conformes produzidos e enviados ao mercado durante a amostragem
$\xi(w, s)$	custo de envio de itens não-conformes ao mercado de ciclo cujo estado é $(w, s)$
$\boldsymbol{\pi}$	vetor coluna das probabilidades da distribuição invariante da cadeia de Markov
$\pi$	probabilidade de mudança de estado do processo em cada item produzido (parâmetro da distribuição geométrica)

$\pi(w, s)$	elemento do vetor da distribuição invariante da cadeia relacionado com o estado $(w, s)$
$\rho(x)$	Fração média de itens não-conformes enviados ao mercado, em função dos parâmetros de otimização $x$
$\Phi$	variável aleatória associada ao custo do sistema de controle de ciclo
$\phi(w, s)$	custo esperado do sistema de controle de ciclo cujo estado é $(w, s)$
$\varphi(w, s)$	custo de ajuste do processo de produção de ciclo cujo estado é $(w, s)$



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>PLANEJAMENTO ECONÔMICO-ESTATÍSTICO</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Controle On-line por atributo com erros de classificação</b>	<b>25</b>
2.1.1	Modelagem Probabilística	25
2.1.2	Objetivos econômico e estatístico	29
<b>2.2</b>	<b>Controle On-line com Intervalo de Amostragem Variável</b>	<b>32</b>
2.2.1	Modelagem Probabilística	32
2.2.2	Objetivos Econômico e estatístico	35
<b>2.3</b>	<b>Controle On-line por atributo com erros de classificação e inspeção com medidas repetidas</b>	<b>38</b>
2.3.1	Objetivos Econômicos e Estatísticos	40
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Otimização Multiobjetivo</b>	<b>46</b>
<b>3.2</b>	<b>Conceito de Dominância</b>	<b>48</b>
<b>3.3</b>	<b>Eficiência de Pareto</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>ALGORITMO GENÉTICO MULTIOBJETIVO</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Algoritmos Genéticos</b>	<b>54</b>
<b>4.2</b>	<b>Nondominated Sorting Genetic Algorithm - II (NSGA-II)</b>	<b>56</b>
4.2.1	Funcionamento de um NSGA-II	57
<b>4.3</b>	<b>Parâmetros utilizados no Algoritmo genético multiobjetivo</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Cenário 1</b>	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>Cenário 2</b>	<b>60</b>
<b>5.3</b>	<b>Cenário 3</b>	<b>62</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E PESQUISAS FUTURAS</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS</b>	<b>75</b>





# 1 Introdução

É esperado que um processo de produção opere de maneira estável, assim a variabilidade em relação as dimensões alvo das características de qualidade do produto será mínima. O controle estatístico de processo (CEP) é um conjunto de ferramentas que são utilizadas para obter a estabilidade do processo de produção. Uma dessas ferramentas é a carta de controle, segundo [Montgomery \(2016\)](#) elas são utilizadas para estabelecer e manter o controle estatístico do processo de produção, sendo construídas através da escolha do tamanho, frequência e do intervalo amostral. A seleção desses três parâmetros é denominado planejamento das cartas de controle.

Originalmente o planejamento das cartas de controle baseava-se apenas em critérios estatísticos até que [Duncan \(1956\)](#) propôs uma formulação utilizando critérios econômicos para o planejamento da carta de controle  $\bar{X}$  de Shewhart, considerando um processo de produção com apenas uma causa atribuível. [Duncan \(1971\)](#) propôs um novo modelo com múltiplas causas atribuíveis, [Saniga \(1989\)](#) e [Lorenzen e Vance \(1986\)](#) generalizaram o modelo originalmente proposto para diferentes tipos de carta de controle. Um resumo da área pode ser encontrado em [Montgomery \(1980\)](#).

[Taguchi, Elsayed e Hsiang \(1988\)](#) propuseram uma abordagem de monitoramento em tempo real tanto para processos por variável quanto por atributo, esse modelo é conhecido por modelo de Taguchi para controle *on-line* de processos, e consiste na inspeção de apenas um item da linha de produção, se o mesmo for não-conforme o processo é parado e ajustado, focando somente o critério econômico. O modelo de Taguchi não assume uma distribuição de probabilidade para o tempo até o processo sair de controle e não há erros de classificação. [Nayebpour e Woodall \(1993\)](#) propuseram um modelo de Taguchi utilizando a distribuição geométrica como a variável aleatória que representa o tempo de espera até o processo sair de controle. [Borges, Ho e Turnes \(2001\)](#) estudaram o efeito dos erros de classificação no modelo de Taguchi. Dentre outros trabalhos que utilizaram o modelo de Taguchi, destacam-se [Trindade, Ho e Quinino \(2007\)](#), [Bessegato \(2009\)](#), [Bessegato et al. \(2011\)](#), [Bessegato et al. \(2021\)](#).

[Woodall, Lorenzen e Vance \(1986\)](#) apontam que ao focar somente na parte econômica do processo, o modelo de [Duncan \(1956\)](#) não possa ser utilizado em tomadas de decisão pois tem um número grande de falsos alarmes e um poder de detecção de *shifts* baixo. [Saniga \(1989\)](#) propôs um modelo de design econômico-estatístico para cartas de controle  $\bar{X}$  e  $R$ , minimizando o critério econômico juntamente com restrições ao critério estatístico. Desde então vários autores propuseram uma abordagem econômica-estatística para diversos tipos de cartas de controle de Shewart, desses ressaltam-se [Castillo, Mackin e C.Montgomery](#)

(1996), Chen e Liao (2004), Tavana et al. (2016), Ganguly e Patel (2019) e Munoz, Campuzano e Mosquera (2022)

Faraz e Saniga (2013) argumentam que a maioria dos modelos de design de carta de controle existentes pecam quanto a sua flexibilidade e adaptabilidade em problemas do mundo real e que uma das alternativas para esses problemas é a utilização de modelos multi-objetivo. Muitos modelos econômicos-estatísticos utilizam restrições em seus critérios estatísticos, como em Magalhães e Costa (2010), Franco, Costa e Machado (2012), Bessegato, Mota e Quinino (2016). Este trabalho baseou-se nos apontamentos feitos por Woodall, Lorenzen e Vance (1986) e Faraz e Saniga (2013) com o objetivo de utilizar os modelos baseados no modelo de Taguchi, que buscam a diminuição do custo total do processo, adotando uma abordagem econômica-estatística multiobjetivo, otimizando juntamente os critérios econômicos e estatísticos e comparando-os entre si.

Assim, no [Capítulo 2](#) serão discutidos os modelos de planejamento econômico-estatístico utilizados, no [Capítulo 3](#) os métodos de otimização. O [Capítulo 4](#) apresenta a estrutura de algoritmos genéticos e discute o algoritmo genético multiobjetivo NSGA-II para a otimização dos modelos de controle on-line propostos. Em sequência, no [Capítulo 5](#) são apresentadas e discutidas as aplicações numéricas dos modelos em vários cenários.

## 2 Planejamento Econômico-Estatístico

### 2.1 Controle On-line por atributo com erros de classificação

#### 2.1.1 Modelagem Probabilística

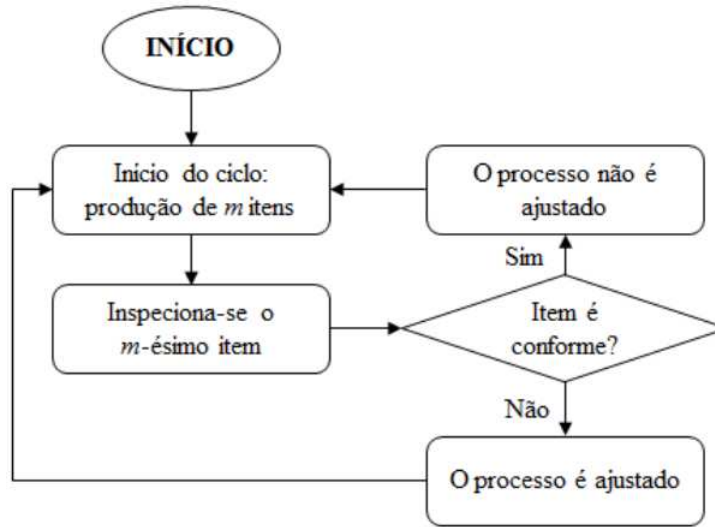
Esse modelo foi proposto por [Borges, Ho e Turnes \(2001\)](#), onde o efeito dos erros de classificação foi incluído no modelo de Taguchi, os autores concluíram que valores pequenos comprometem a determinação do intervalo ótimo entre as inspeções fazendo com que os custos e a política de inspeção sejam alteradas.

As premissas adotadas para o modelo são: que o processo inicia sob controle, com fração de itens conformes produzidos  $p_1$  e após um tempo aleatório, a ação de alguma causa especial leva esse processo para uma condição fora de controle. Nesse caso a fração de itens conformes passa a ser  $p_2$ , sendo  $p_2 < p_1$ . O tempo até o processo sair de controle segue uma distribuição geométrica de parâmetro  $\pi$ , sendo medido pela quantidade de itens produzidos até a mudança de estado. O processo é monitorado pela inspeção de um único item a cada  $m$  itens produzidos. O processo é ajustado caso o item inspecionado seja classificado como não conforme. Esse sistema de monitoramento e controle é imperfeito, sendo  $\alpha$  a probabilidade de um item conforme ser classificado como não-conforme e  $\beta$  a probabilidade de classificar um item não-conforme como conforme. A [Figura 1](#) apresenta o fluxograma do procedimento de monitoramento e controle proposto por [Borges, Ho e Turnes \(2001\)](#).

Pode-se associar três variáveis aleatórias indicadoras à inspeção do item:

- $X$ , indicando a real condição de conformidade do item sob inspeção, com  $X = 1$ , item conforme;  $X = 0$ , item não conforme.
- $Y$ , indicando o resultado da classificação do item sob inspeção, com  $Y = 1$ , item classificado como conforme;  $Y = 0$ , item classificado como não conforme.
- $Z$ , indicando a situação do processo no instante de fabricação do item sob inspeção, com  $Z = 1$ , processo de produção está sob controle;  $Z = 0$ , o processo de produção encontra-se fora de controle.

Salienta-se que as variáveis aleatórias  $X$  e  $Z$  não são observáveis. Das suposições adotadas pelo modelo tem-se que:

Figura 1 – Fluxograma do sistema de controle do modelo  $m$ 

Fonte: Bessegato (2009)

$$\begin{aligned}
 P\{Y = 1|Z = 1\} = p_1 \quad \text{e} \quad P\{X = 1|Z = 0\} = p_2 \\
 P\{Y = 1|X = 1\} = 1 - \alpha \quad \text{e} \quad P\{X = 1|X = 0\} = \beta
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim, a probabilidade de não se ajustar o processo, dado que o processo de produção esteja sob controle é:

$$\begin{aligned}
 P\{Y = 1|Z = 0\} &= \sum_{i=0}^1 P\{Y = 1, X = i|Z = 1\} \\
 &= P\{Y = 1|X = 1, Z = 1\}P\{X = 1|Z = 1\} + \\
 &\quad P\{Y = 1|X = 0, Z = 1\}P\{X = 0|Z = 1\} \\
 &= (1 - \alpha)p_1 + \beta(1 - p_1)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

similarmente, quando o processo de produção estiver sob controle, tem-se que:

$$p\{Y = 1|Z = 1\} = p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta \tag{2.3}$$

A partir desse ponto, será convencionado que  $P\{Y = 1|Z = 0\} = p_A$  e  $P\{Y = 1|Z = 1\} = p_D$

O processo de produção, o monitoramento e a regra de decisão sobre o ajuste em cada ciclo de inspeção podem ser modelados como uma cadeia de Markov em tempo discreto, onde o espaço de estados da cadeia é finito e dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1\} \quad (2.4)$$

em que  $w$  representa o estado do processo, tomando os seguintes valores:

- $w = 0$ , o processo está sob controle até o final do ciclo corrente
- $w = 1$ , o processo começa sob controle e ao final do ciclo está fora de controle, ou seja, a mudança de estado ocorreu no ciclo corrente
- $w = 2$ , ao fim do ciclo corrente, o processo está fora de controle e houve mudança de estado antes do início desse ciclo corrente.

e  $s$  representa a decisão de ajustar ou não o processo ao final de cada ciclo de inspeção:

- $s = 1$ , decide-se não ajustar o processo de produção no final do ciclo de inspeção corrente.
- $s = 0$ , o processo é ajustado no final do ciclo de inspeção corrente.

A notação utilizada para descrever as probabilidades de transição entre os estados é  $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$ , onde  $(w_i, s_i)$  é o estado da cadeia no  $i$ -ésimo ciclo de monitoramento. Para ilustrar  $P_{(1,1), (2,1)}$  é a probabilidade de não ajustar o processo dado que ocorreu mudança de estado no ciclo anterior sem que tenha ocorrido ajuste. A probabilidade do processo iniciar e terminar o ciclo de monitoramento sob controle é  $(1 - \pi)^m$ , conseqüentemente as probabilidades de transição dos estados  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2$ ,  $s = 0, 1$  para os estados  $(0,0)$  e  $(0,1)$  são:

$$\begin{aligned} P_{(w,s), (0,0)} &= (1 - \pi)^m (1 - p_A) \\ P_{(w,s), (0,1)} &= (1 - \pi)^m p_A \end{aligned} \quad (2.5)$$

Outro acontecimento possível, é a mudança de estado do processo, ou shift do processo, ocorrer no ciclo corrente, assim o item inspecionado é produzido com o processo fora de controle. A probabilidade de que isso aconteça é  $1 - (1 - \pi)^m$  e a probabilidade de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$ ;  $s = 0, 1$  para os estados  $(1,0)$  e  $(1,1)$  são:

$$\begin{aligned} P_{(w,s), (1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^m] (1 - p_D) \\ P_{(w,s), (1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^m] p_D \end{aligned} \quad (2.6)$$

As probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$  para estados onde  $w = 2$  são iguais a 0, pois como o processo foi ajustado no ciclo anterior o processo se

inicia sob controle, portanto não é possível que exista a transição citada anteriormente. Logo:

$$P_{(w,0),(2,s)} = 0, s = 0, 1 \quad (2.7)$$

Os estados onde  $w = 2$  são visitados se no ciclo anterior o processo termina fora de controle, ou seja, quando  $w = 1, 2$  e o item inspecionado foi classificado como conforme,  $s = 1$ , não ajustando o processo. Assim temos:

$$\begin{aligned} P_{(w,1),(2,0)} &= 1 - p_D \\ P_{(w,1),(2,1)} &= p_D \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para as demais probabilidades de transição partindo dos estados (1,1) e (2,1) para estados  $(w, s)$ , com  $w = 1, 2$  e  $s = 0, 1$  temos:

$$P_{(1,1),(w,s)} = P_{(2,1),(w,s)} = 0 \quad (2.9)$$

Finalmente, a matriz de probabilidade de transição  $\mathbf{P}$  é:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(2,0)} & P_{(1,1),(2,1)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Como a matriz  $\mathbf{P}$  é irredutível e aperiódica, possui distribuição invariante denotada a seguir:

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi(w, s); w = 0, 1, 2; s = 0, 1]', \text{ onde } \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) = 1 \quad (2.11)$$

Após um grande número de inspeções podemos interpretar a distribuição invariante como proporção de tempo que o processo passa por cada estado  $(w, s)$ . Além disso, o vetor  $\boldsymbol{\pi}$  pode ser obtido a partir da resolução do sistema linear  $(\mathbf{P}' - \mathbf{I})\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ , com  $\mathbf{I}$  sendo a matriz identidade,  $\mathbf{0}$  o vetor nulo e  $\mathbf{P}'$  a matriz  $\mathbf{P}$  transposta, sujeita a restrição dada em 2.11.

### 2.1.2 Objetivos econômico e estatístico

O objetivo econômico é minimizar o custo médio do sistema de monitoramento e controle que pode ser calculado a partir do custo da cadeia de Markov, adotando uma estrutura econômica com três componentes: de custo de inspeção, ajuste e envio de não-conformes ao mercado. Para isso, utiliza-se a seguinte notação:

$c_{insp}$ , é o custo de classificação do item que foi inspecionado;

$c_{nc}$ , é o custo do item não-conforme, defeituoso, que chega ao consumidor final ou em etapas posteriores do processo;

$c_{snc}$ , é o custo para descartar um item que é defeituoso;

$c_{s_c}$ , é o custo de descartar item conforme;

$c_a$ , é o custo de ajuste do processo;

os componentes  $c_{snc}$  e  $c_{s_c}$  são utilizados quando há um processo de reaproveitamento dos itens descartados com custos diferenciados, caso os itens inspecionados sejam simplesmente descartados, utiliza-se o custo unitário de produção desse item.

A expressão geral do custo para cada estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2$  e  $s = 0, 1$  é:

$$\phi(w, s) = c_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s) \quad (2.12)$$

em que:

$c_{insp}$ , é o custo da classificação do item inspecionado, presente em todos os estados da cadeia

$\xi(w, s)$ , custo esperado por ciclo dos itens não-conformes enviados ao mercado ou que prosseguiram no processo de produção

$\theta(w, s)$ , custo esperado por ciclo referente ao item inspecionado e descartado

$\varphi(w, s)$ , custo de ajuste do processo por ciclo. Para  $\forall w \in E$ , toma-se:

$$\varphi(w, s) = \begin{cases} c_a, & \text{se } s = 0. \\ 0, & \text{se } s = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

A fim de encontrar o custo esperado dos itens não-conformes não inspecionados que são enviados para o mercado, precisamos saber qual o número de itens não inspecionados

e não conformes. Para os estados onde  $w = 0$ , temos que esse número é  $(1 - p_1)(m - 1)$ . Assim temos que:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m - 1), s = 0, 1 \quad (2.14)$$

Nos estados (0,0) e (0,1), para encontrar os custos esperados de descarte é necessário levar em conta os erros na classificação do item, tanto conforme quanto não conforme. Sabendo disso temos que:

$$\begin{aligned} \theta(0, 0) &= c_{sc} \frac{p_1 \alpha}{1 - p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)(1 - \beta)}{1 - p_A} \\ \theta(0, 1) &= c_{sc} \frac{p_1(1 - \alpha)}{p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_1)\beta}{p_A} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos então chegar no custo esperado para o sistema de controle, para os estados (0,0) e (0,1):

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &= c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a \\ \phi(0, 1) &= c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Durante os estados onde  $w = 1$ , o processo passa a estar fora de controle em algum momento durante a produção dos  $m - 1$  itens. A probabilidade da mudança ocorrer em um instante  $t$  é dada por:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{1 - (1 - \pi)^m}, t = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

Utilizando  $q_m(t)$  podemos então calcular o custo esperado de itens não-conformes não inspecionados que foram enviados ao mercado, para estados com  $w = 1$ :

$$\xi(1, s) = c_{nc} \left\{ \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t - 1)(1 - p_1) + (m - t)(1 - p_2)] \right\}, s = 0, 1 \quad (2.18)$$

Os custos de descarte diferem-se da [Equação 2.15](#) somente na fração de conformidade do processo, que no caso dos estados com  $w = 1$  é  $p_D$

$$\begin{aligned} \theta(1, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D} \\ \theta(1, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D} \end{aligned} \quad (2.19)$$



Assim, os custos totais para os estados (1,0) e (1,1) são:

$$\begin{aligned}\phi(1, 0) &= c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a, \\ \phi(1, 1) &= c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Começando o cálculo dos estados (2,0) e (2,1), é sabido que o estado começa fora de controle desde o início do processo, portanto podemos afirmar que os custos desses estados se assemelham com os custos dos estados (0,0) e (0,1), a diferença aqui seria que como o processo está fora de controle a fração de itens conformes produzidos é  $p_2$ . Assim:

$$\xi(2, s) = c_{nc}(1 - p_2)(m - 1), s = 0, 1.\tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\theta(2, 0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(2, 1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\phi(2, 0) &= c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a, \\ \phi(2, 1) &= c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Após um número suficientemente grande de inspeções podemos utilizar o Teorema da Renovação segundo [Ross \(1995\)](#), considerando os ciclos de regeneração como um processo de renovação, para o cálculo do custo médio. Denotado como  $C(m)$ , é descrito como a razão entre o custo esperado e a quantidade de itens produzidos. Ou seja:

$$C(m) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{m - 1}\tag{2.24}$$

[Taguchi, Elsayed e Hsiang \(1988\)](#), [Pasha et al. \(2018\)](#) e [Abolmohammadi et al. \(2021\)](#) dentre outros autores, salientam que existe um custo de perda associado à má qualidade, sendo que o mesmo depende do quanto se afasta da característica alvo. [Giakatis, Enkawa e Washitani \(2001\)](#) apontam a existência de "custos ocultos de qualidade", ou seja, advindos de diversas fontes e vistos na má qualidade dos produtos. A partir dessas considerações, adota-se como critério estatístico a proporção média de itens não conformes enviados ao mercado por item produzido, pois além de custos explícitos associados a eles, como o custo de não conformidade, ainda existem custos que são de difícil aferição.

Verfica-se acima que  $\xi(w, s)$  é o custo esperado por ciclo de inspeção dos itens não-conformes enviados ao mercado. Assim a proporção média de itens não-conformes enviados ao mercado por item produzido é obtida por meio da expressão abaixo:

$$\varrho(m) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w,s)\xi(w,s)}{c_{nc}(m-1)} \quad (2.25)$$

Finalmente, a solução do modelo econômico-estatístico multiobjetivo será dada pelo conjunto de soluções que minimizam conjuntamente  $C(m); \varrho(m)$ , ou seja:

$$(m^*) = \arg \min_{(m)} (C(m); \varrho(m)) \quad (2.26)$$

em que  $(m^*)$  é o conjunto de argumentos das funções objetivo, ou seja, os parâmetros de planejamento do sistema de controle do modelo  $m$ , o qual oferece as soluções que dominam todas as demais e são indiferentes entre si. Esse conjunto de soluções é denominado fronteira de Pareto que será detalhada no [Capítulo 3](#).

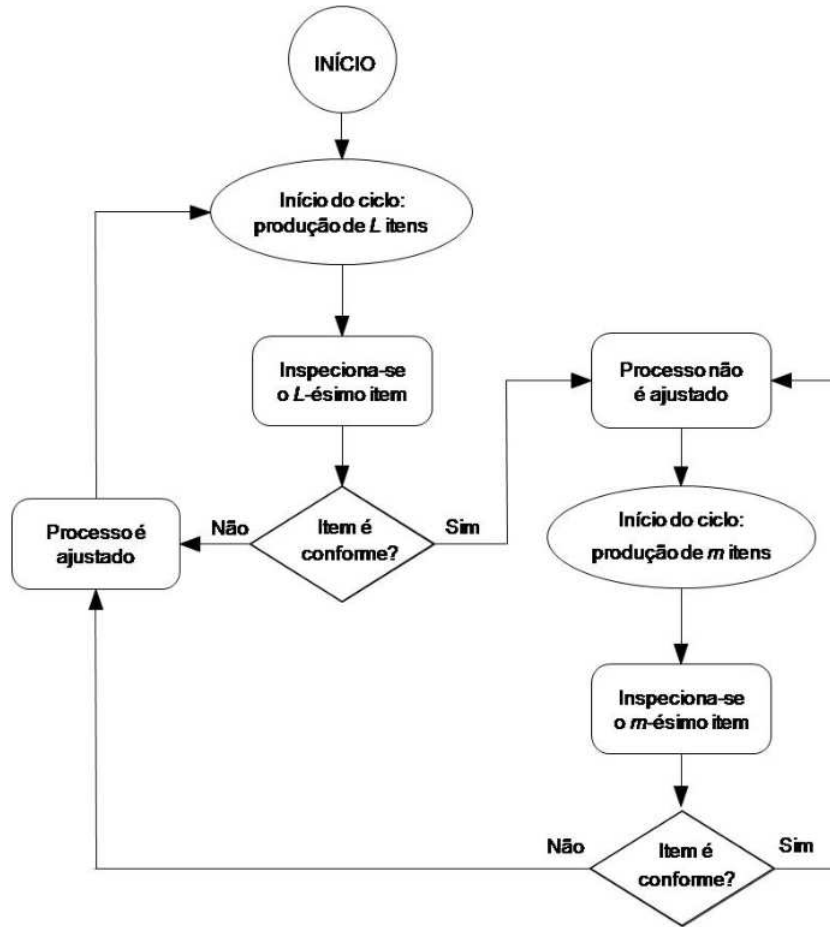
## 2.2 Controle On-line com Intervalo de Amostragem Variável

### 2.2.1 Modelagem Probabilística

Uma estratégia de monitoramento diferente foi proposta em [Bessegato et al. \(2011\)](#), com um tempo de espera até a primeira inspeção após o ajuste ( $L$ ) maior que os outros intervalos entre as inspeções ( $m$ ). Essa estratégia é proposta para um processo de produção de itens individuais e independentes produzidos a cada unidade de tempo. Inicialmente, ele está sob controle e passa para um estado fora de controle em algum instante aleatório, o processo descrito é um típico exemplo de caso discreto e por esse motivo seu tempo de falha segue uma distribuição geométrica, com parâmetro  $\pi$ ,  $0 < \pi < 1$ .

O processo de produção pode se encontrar em dois estados: sob controle e fora de controle, a proporção de itens conformes para cada um deles é denotada respectivamente por  $p_1$  e  $p_2$ , sendo que  $p_2 < p_1$  e um processo fora de controle só retorna ao seu estado sob controle quando há uma intervenção nele. A inspeção é feita somente em um único item, que é descartado, se ele for classificado como conforme é assumido que o processo está sob controle, se o item inspecionado é classificado como não-conforme o processo é classificado como fora de controle e é feita a intervenção do processo para ajuste. O tempo de inspeção é considerado desprezível e está sujeito a erros de classificação, onde  $\alpha$  é a probabilidade de classificar como não-conforme um item realmente conforme e  $\beta$  a probabilidade de classificar como conforme um item que na verdade é não-conforme. O sistema de monitoramento e controle é denominado como modelo  $mL$ , e seu fluxograma de sistema de monitoramento pode ser visto na [Figura 2](#).

As probabilidades de ajuste do processo dado a sua real situação são denotadas por  $p_A$  e  $p_D$ , onde a probabilidade de ajustar o processo dado que ele está sob controle é

Figura 2 – Fluxograma do processo do modelo  $mL$ 

Fonte: Bessegato (2009)

$p_A$  e a probabilidade de ajustar o processo dado que ele está fora de controle, é  $p_D$ . As mesmas são definidas a partir das expressões obtidas em 2.2 e 2.3:

Da mesma maneira que no modelo anterior (modelo  $m$ ) processo de produção, o monitoramento e a regra de decisão sobre o ajuste de cada ciclo de inspeção podem ser modelados como uma cadeia de Markov de tempo discreto, onde o espaço de estados da cadeia é finito e dado por:

$$E = \{(w, s); w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1\}$$

Os estados  $(w, s)$  representam as mesmas situações do modelo  $m$  (seção 2.1).

Sendo uma cadeia de Markov, as probabilidades de transição entre os estados da cadeia são denotados por  $P_{(w_{i-1}, s_{i-1}), (w_i, s_i)}$  onde  $(w_i, s_i)$  é o estado da cadeia no  $i$ -ésimo ciclo de monitoramento.

Os ciclos de tamanho  $L$  são atingidos quando o processo é ajustado,  $s = 0$ , que

é a condição inicial do processo,. As transições possíveis dadas as condições mostradas são para estados onde  $w = 0, 1$ , e a probabilidade do processo permanecer sob controle durante o ciclo corrente é  $(1 - \pi)^L$ . Portanto as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$  para os estados  $(0,0)$  e  $(0,1)$  são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(0,0)} &= (1 - \pi)^L(1 - p_A) \\ P_{(w,0),(0,1)} &= (1 - \pi)^L p_A \end{aligned} \quad (2.27)$$

Outra possibilidade é o processo sair de controle após o ajuste, a probabilidade disso acontecer é  $1 - (1 - \pi)^L$ . Assim as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2$  para os estados  $(1,0)$  e  $(1,1)$  são:

$$\begin{aligned} P_{(w,0),(1,0)} &= [1 - (1 - \pi)^L](1 - p_D) \\ P_{(w,0),(1,1)} &= [1 - (1 - \pi)^L]p_D \end{aligned} \quad (2.28)$$

Após o ajuste o processo opera sob controle, portanto não são possíveis transições onde  $s = 0$  para  $w = 2$ , ou seja,  $P_{(w,0),(2,s)} = 0$ , para  $w = 0, 1, 2$  e  $s = 0, 1$ .

Por sua vez, as probabilidades de transição do estado  $(0,1)$  para o estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1$  e  $s = 0, 1$  são dadas pelas expressões 2.5 e 2.6, já que ao final dos estados  $(0,1)$  não há ajuste e portanto o próximo ciclo de inspeção terá comprimento  $m$ .

Para os estados onde  $w = 2$ , no ciclo corrente é necessário que no ciclo anterior tenha ocorrido mudança no estado do processo, ou seja, as probabilidades de transição dos estados  $(w, 1)$ ,  $w = 1, 2$  para os estados  $(2,0)$  e  $(2,1)$  serão dadas respectivamente pelas expressões em 2.8. Para as demais probabilidades de transição, partindo dos estados  $(1,1)$  e  $(1,2)$  para os estados  $(w, s)$ ,  $w = 1, 2$  e  $s = 0, 1$ , utiliza-se a expressão 2.9.

Na mesma linha, temos que não é possível mais nenhuma transição a partir de estados onde  $w = 1, 2$  e  $s = 1$ , ou seja,  $P_{(w,1),(0,s)} = P_{(w,1),(1,s)} = 0$ , para  $w = 1, 2$  e  $s = 1$ .

A cadeia de Markov que modela o sistema de controle tem o mesmo espaço de estados dado em 2.4, a matriz de transição  $\mathbf{P}$  é a mesma vista em 2.10 e a distribuição invariante é dada em 2.11.

Além disso é necessária a determinação da proporção de ciclos de tamanho  $L$  ou  $m$  para cada estado da cadeia de Markov, após um número suficientemente grande de inspeções. Sejam  $p_L(w, s)$  a probabilidade do intervalo de amostragem ter tamanho  $L$ , dado que o estado seja  $(w, s)$  e  $p_m(w, s)$  a probabilidade do intervalo de amostragem ter tamanho  $m$ , dado que o estado seja  $(w, s)$ , onde  $p_m(w, s) = 1 - p_L(w, s)$ .

O comprimento do intervalo de amostragem é  $L$  somente quando há ajuste no processo no ciclo anterior. Essa situação corresponde as linhas de  $\mathbf{P}$ , em que  $s = 0$ . Por

exemplo,  $p_L(0,0)$  denota a probabilidade de o ciclo corrente ter comprimento  $L$ , dado que seu estado é  $(0,0)$ . É necessário que o último item inspecionado tenha sido declarado não-conforme, ou seja,  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(2,0)$  são os possíveis estados do ciclo de monitoramento imediatamente anterior. Especificamente:

$$p_L(0,0) = \sum_{k=0}^2 P\{(W_{i-1}, S_{i-1}) = (k,0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (0,0)\} \quad (2.29)$$

em que  $(W_{i-1}, S_{i-1})$  é a variável aleatória associada ao estado da cadeia de Markov da  $i$ -ésima inspeção. Aplicando o teorema de Bayes no segundo termo de 2.29 obtém-se:

$$\frac{\sum_{k=0}^2 P\{(W_i, S_i) = (0,0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k,0)\} P\{(W_{i-1}, S_{i-1}) = (k,0)\}}{P\{(W_i, S_i) = (0,0)\}} \quad (2.30)$$

sendo  $P\{(W_i, S_i) = (0,0) | (W_{i-1}, S_{i-1}) = (k,0)\}$  a probabilidade de transição  $P_{(k,0),(0,0)}$ ,  $k = 0, 1, 2$  dada por 2.5. Das propriedades da distribuição estacionária, tem-se que:

$$P\{(W_{i-1}, S_{i-1}) = (k,0)\} = P\{(W_i, S_i) = (k,0)\} = \pi(k,0)$$

Assim, de 2.30 tem-se:

$$p_L(0,0) = \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)]P_{(0,0),(0,0)}}{\pi(0,0)}$$

Similarmente, os demais valores de  $p_L(w,s)$  são obtidos:

$$\begin{aligned} p_L(0,1) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)]P_{(0,0),(0,1)}}{\pi(0,1)}, \\ p_L(1,0) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)]P_{(0,0),(1,0)}}{\pi(1,0)}, \\ p_L(1,1) &= \frac{[\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0)]P_{(0,0),(1,1)}}{\pi(1,1)}, \\ p_L(2,0) &= p_L(2,1) = 0. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Objetivos Econômico e estatístico

As expressões das componentes de custo dos estados assim como a estrutura de custo do modelo com intervalo de inspeção variável (modelo  $mL$ ) são as mesmas apresentadas na seção 2.1 e a expressão do custo esperado de cada de cada estado  $(w,s) \in E$  é:

$$\phi(w,s) = c_{insp} + \xi(w,s) + \theta(w,s) + \varphi(w,s) \quad (2.31)$$

O processo opera sob-controle durante todo o ciclo quando atinge os estados (0,0) e (0,1), nesses casos a quantidade de itens não-conformes que não foram inspecionados que foram produzidos quando  $s = 0, 1$  é  $p_m(0, s)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, s)(L - 1)(1 - p_1)$ . A partir dessa quantidade esperada podemos afirmar que o custo esperado por ciclo para itens não-conformes, para os estados (0,0) e (0,1) são:

$$\begin{aligned}\xi(0, 0) &= c_{nc}\{p_m(0, 0)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 0)(L - 1)(1 - p_1)\}, \\ \xi(0, 1) &= c_{nc}\{p_m(0, 1)(m - 1)(1 - p_1) + p_L(0, 1)(L - 1)(1 - p_1)\}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Os custos de descarte do item inspecionado para os estados (0,0) e (0,1) são os mesmos de 2.15. Portanto os custos para os estados (0,0) e (0,1) são:

$$\begin{aligned}\phi(0, 0) &= c_{insp} + \xi(0, 0) + \theta(0, 0) + c_a, \\ \phi(0, 1) &= c_{insp} + \xi(0, 1) + \theta(0, 1).\end{aligned}\quad (2.33)$$

Quando vemos os estados onde  $w = 1$ , (1,0) e (1,1), como explicado anteriormente, o processo sofre mudança durante o ciclo de inspeção. Essa mudança pode acontecer em qualquer momento do ciclo, do primeiro ao último item produzido, portanto a probabilidade da mudança acontecer em um instante  $t$  qualquer, para o ciclos com intervalos de tamanho  $m$  é:

$$q_m(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1}\pi}{1 - (1 - \pi)^m}, \quad t = 1, \dots, m. \quad (2.34)$$

De forma semelhante, temos a probabilidade de mudança em um instante  $t$  qualquer, para os ciclos com intervalos de tamanho  $L$  é:

$$q_L(t) = \frac{(1 - \pi)^{t-1}\pi}{1 - (1 - \pi)^L}, \quad t = 1, \dots, L. \quad (2.35)$$

Assim, o custo médio dos itens não-conformes enviados ao mercado para o estado  $w = 1$  é:

$$\begin{aligned}\xi(1, s) &= c_{nc}\left\{p_m(1, s)\sum_{t=1}^m q_m(t)[(t - 1)(1 - p_1) + (m - t)(1 - p_2)] + \right. \\ &\quad \left. + p_L(1, s)\sum_{t=1}^L q_L(t)[(t - 1)(1 - p_1) + (L - t)(1 - p_2)]\right\}, \quad s = 0, 1\end{aligned}\quad (2.36)$$

Para os estados (1,0) e (1,1) os custos de descarte do item inspecionado são os mesmos que os mostrados em 2.15 para os estados (0,0) e (0,1), com a diferença da fração de conformidade, que nesse caso é  $p_2$ . Então temos:

$$\begin{aligned}\theta(1,0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_A}, \\ \theta(1,1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_A} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_A}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Portanto o custo esperado para os estados (1,0) e (1,1) são;

$$\begin{aligned}\phi(1,0) &= c_{insp} + \xi(1,0) + \theta(1,0) + c_a, \\ \phi(1,1) &= c_{insp} + \xi(1,1) + \theta(1,1).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Os estados (2,0) e (2,1) tem os custos esperados similares aos estados (0,0) e (0,1) mas com o processo operando fora de controle desde o início do ciclo e por isso com tamanho fixo  $m$ . Assim, os custos esperados para os estados (2,0) e (2,1) são:

$$\begin{aligned}\xi(2,0) &= c_{nc}(1 - p_2)(m - 1), \\ \xi(2,1) &= \xi(2,0).\end{aligned}\tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\theta(2,0) &= c_{sc} \frac{p_2 \alpha}{1 - p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)(1 - \beta)}{1 - p_D}, \\ \theta(2,1) &= c_{sc} \frac{p_2(1 - \alpha)}{p_D} + c_{snc} \frac{(1 - p_2)\beta}{p_D}\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\phi(2,0) &= c_{insp} + \xi(2,0) + \theta(2,0) + c_a, \\ \phi(2,1) &= c_{insp} + \xi(2,1) + \theta(2,1).\end{aligned}\tag{2.41}$$

Pelo Teorema da Renovação, pode-se afirmar que após a produção de uma quantidade suficientemente grande de itens, o custo esperado por item produzido, denominado como  $C(m, L)$ , é a razão entre o custo esperado por ciclo,  $E(L) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)$  e o número esperado de itens produzidos e enviados ao mercado,  $E(T) = \sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)[(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]$ . Assim

$$C(m, L) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)\phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s)[(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]}\tag{2.42}$$

O critério estatístico adotado aqui é o mesmo que o adotado na [seção 2.1](#), mas para um cenário onde temos  $(m, L)$ . Assim:

$$\varrho_{(m,L)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w,s) \xi(w,s)}{c_{nc} E(T)} \quad (2.43)$$

Assim a solução do modelo econômico-estatístico multiobjetivo deve ser resolvido de maneira que:

$$(m^*, L^*) = \arg \min_{(m,L)} (C(m, L); \varrho_{(m,L)}) \quad (2.44)$$

sendo  $(m^*, L^*)$  o conjunto de argumentos das funções objetivo, ou seja, os parâmetro que geram as soluções da fronteira de Pareto que será detalhada no [Capítulo 3](#).

## 2.3 Controle On-line por atributo com erros de classificação e inspeção com medidas repetidas

Esse modelo foi descrito em [Bessegato, Mota e Quinino \(2016\)](#) e [Bessegato \(2009\)](#), e é uma generalização dos modelos em [seção 2.1](#) e [seção 2.2](#), onde é considerado um processo que produz peças individuais independentes a cada unidade de tempo, o processo começa sob controle com a fração de itens conformes igual a  $p_1$ . Sob essas condições, o processo opera durante determinado tempo, tempo esse mensurado pelo número de unidades produzidas antes do *shift*, e modelado por uma distribuição geométrica. O fato das distribuições geométrica exponencial não terem memória facilita a análise matemática, além disso outros autores também utilizaram a distribuição geométrica para descrever processos onde a *shift* de um estado sob-controle para um estado fora de controle, dentre esses autores podem ser citados [Trindade, Ho e Quinino \(2007\)](#) e [Dasgupta \(2003\)](#). O atual estudo adota um processo em que o *shift* acontece devido a uma causa especial e em um instante de tempo aleatório de acordo com uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi$  onde  $0 > \pi > 1$ . Após a mudança de estado o processo passa a produzir itens conformes com uma fração  $p_2$ , sendo que  $p_2 < p_1$ . O processo volta a produzir itens conformes com fração  $p_1$  se houver uma intervenção no mesmo.

Para monitorar o processo um único item é inspecionado de acordo com os seguintes critérios: o primeiro item inspecionado ocorre após a produção de  $L$  itens. Se o item inspecionado é tido como conforme a nova inspeção se dará após a produção de  $m$  itens, caso contrário, a próxima inspeção ocorrerá após a produção de  $L$  unidades. Nesse estudo foi adotado que a inspeção pode ser acometida por erros, onde  $\alpha$  é a probabilidade de se classificar um item conforme como não conforme e  $\beta$  é a probabilidade de classificar um item não conforme como conforme. O item inspecionado é submetido a  $r$  classificações independentes, novamente sendo classificado como conforme ou não-conforme. Assume-se que o processo está fora de controle, caso a quantidade de classificações conformes desse



item forem menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq r$ . Como resultado da sua não-conformidade o processo é ajustado e a próxima inspeção será feita após a produção de  $L$  itens. A Figura 3 mostra o processo de monitoramento.

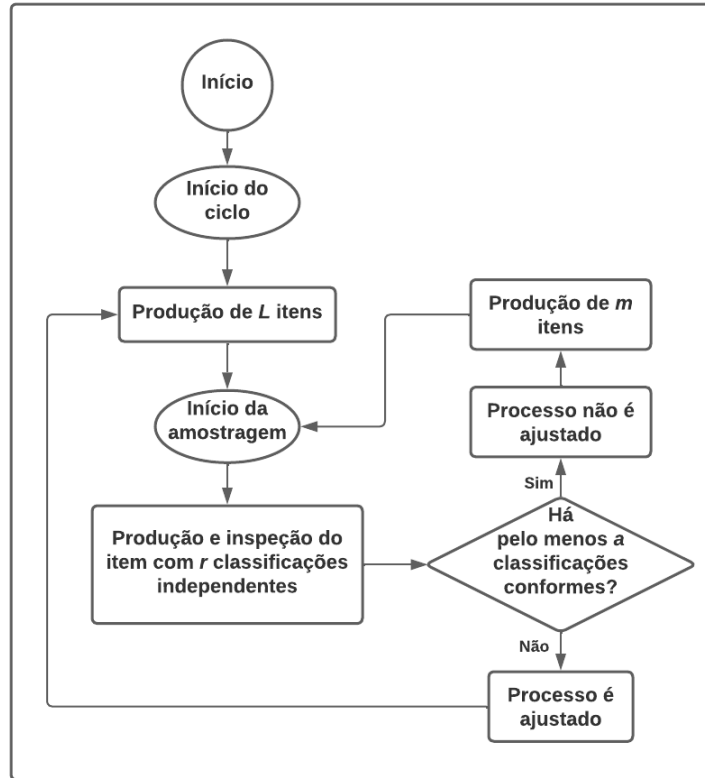


Figura 3 – Fluxograma do processo com inspeções repetidas

A nomenclatura adotada para os sucessivos ajustes no processo é ciclo de regeneração, e cada ciclo é independente do outro. Ciclo de monitoramento é o nome do período de tempo entre duas inspeções sucessivas e a sequência de ciclos de regeneração é chamada de processo de renovação.

Três variáveis aleatórias são associadas ao item inspecionado:

- $X$ , uma variável aleatória que indica a real conformidade do item ( $X = 1$ : item realmente conforme;  $X = 0$ : item realmente não-conforme)
- $Y$  é a variável aleatória que indica o resultado da classificação do item ( $Y = 1$ : Item classificado como conforme;  $Y = 0$ : Item classificado como não-conforme)
- $Z$ , é a variável aleatória que indica o real estado do processo. ( $Z = 1$ : Processo sob controle,  $Z = 0$ : Processo fora de controle)

No modelo considerado aqui, toda vez que o processo é classificado como fora de controle ele é instantaneamente parado e ajustado, ou seja, quando  $\sum_{j=1}^r Y_j < a$ , tendo  $j =$

$1, 2, \dots, r$  e  $1 \leq a \leq r$ . As  $r$  classificações são independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição binomial, isto é, se um item inspecionado é conforme,  $\sum_j Y_j \sim \text{binomial}(r, 1 - \alpha)$  e se o item inspecionado é não conforme,  $\sum_j Y_j \sim \text{binomial}(r, \beta)$ . Assim, a probabilidade condicional de não ajustar o processo é dada por:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{j=1}^r Y_j \geq a | X = 1 \right\} &= \sum_{i=a}^r \binom{r}{i} (1 - \alpha)^i \alpha^{r-i} = B_a(r, 1 - \alpha) \text{ e} \\ P \left\{ \sum_{j=1}^r Y_j \geq a | X = 0 \right\} &= \sum_{i=a}^r \binom{r}{i} \beta^i (1 - \beta)^{r-i} = B_a(r, \beta) \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde  $i$  representa as classificações conformes que foram obtidas durante a inspeção do item.

Pode-se então calcular as probabilidades de não ajustar o processo, sendo elas:

$$\begin{aligned} p_A &= P \left\{ \sum_{j=1}^r Y_j \geq a | Z = 1 \right\} = p_1 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_1) B_a(r, \beta), \\ p_D &= P \left\{ \sum_{j=1}^r Y_j \geq a | Z = 0 \right\} = p_2 B_a(r, 1 - \alpha) + (1 - p_2) B_a(r, \beta) \end{aligned} \quad (2.46)$$

O sistema pode ser modelado por uma cadeia de Markov, sendo ela a mesma vista na [subseção 2.2.1](#), com matriz de transição  $\mathbf{P}$  vista em [2.10](#), as probabilidades de transição são as mesmas da [subseção 2.2.1](#), utilizando os termos  $p_A$  e  $p_D$  de [2.46](#) pode-se obter, para todo estado  $(w, s) \in E$ , os elementos do vetor estacionário  $\pi(w, s)$  e as probabilidades do ciclo ter comprimento  $L$ , condicionadas ao estado  $(w, s)$ ,  $p_L(w, s)$ .

### 2.3.1 Objetivos Econômicos e Estatísticos

A estrutura de custos para medidas repetidas é a mesma da [2.2](#), a expressão do custo pode ser vista a seguir:

$$\phi(w, s) = rc_{insp} + \xi(w, s) + \theta(w, s) + \varphi(w, s) \quad (2.47)$$

onde  $rc_{insp}$  é o custo de inspecionar um item  $r$  vezes, sendo que esse custo está presente em todos os estados da cadeia.

As expressões de custo também já foram apresentadas na [seção 2.2](#) exceto aquelas relacionadas ao descarte do item inspecionado, por conta das diferentes probabilidades condicionais que foram usadas em seu cálculo. Nos estados onde  $w = 0$ , o item inspecionado

foi produzido com o processo sob controle e para que esse item seja realmente conforme, dado que ele foi declarado como conforme, sua probabilidade tem de ser:

$$P \left\{ X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j \geq a, Z = 1 \right\} = \frac{p_1 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_A} \quad (2.48)$$

O cenário oposto, onde o item inspecionado declarado como não conforme sendo que ele é conforme, tem probabilidade igual a:

$$P \left\{ X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j < a, Z = 1 \right\} = \frac{p_1 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_A} \quad (2.49)$$

Portanto os custos de descarte dos estados (0,0) e (0,1), em relação ao item inspecionado, são respectivamente:

$$\theta(0,0) = c_{s\_c} \frac{p_1 [1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_A} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_1) [1 - B_a(r, \beta)]}{1 - p_A} \quad (2.50)$$

$$\theta(0,1) = c_{s\_c} \frac{p_1 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_A} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_1) B_a(r, \beta)}{p_A}$$

As expressões de custo  $\xi(0,0)$  e  $\xi(0,1)$  são as mesmas mostradas em 2.32. Além disso, de 2.13 observa-se que  $\varphi(0,0) = c_a$  e  $\varphi(0,1) = 0$ . Finalmente, para os custos médios do sistema de controle nos estados (0,0) e (0,1) são, respectivamente:

$$\phi(0,0) = r c_{insp} + \xi(0,0) + \theta(0,0) + c_a \quad (2.51)$$

$$\phi(0,1) = r c_{insp} + \xi(0,1) + \theta(0,1)$$

Nos estados onde ( $w = 1, 2$ ), o item a ser inspecionado é produzido em um processo que está fora de controle. A probabilidade desse item ser de fato conforme, dado que o mesmo tenha sido atestado conforme é:

$$P \left\{ X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j \geq a, Z = 0 \right\} = \frac{p_2 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_D} \quad (2.52)$$

A probabilidade do item inspecionado ser de veras conforme, sendo que tenha sido atestado como não-conforme é:

$$P \left\{ X = 1 \mid \sum_{j=1}^r Y_j < a, Z = 0 \right\} = \frac{p_2[1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_D} \quad (2.53)$$

Os custos de descarte dos itens inspecionados para os estados  $(w, 0)$  e  $(w, 1)$ ,  $w = 1, 2$  são:

$$\theta(w, 0) = c_{s\_c} \frac{p_2[1 - B_a(r, 1 - \alpha)]}{1 - p_D} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_2)[1 - B_a(r, \beta)]}{1 - p_D} \quad (2.54)$$

$$\theta(w, 1) = c_{s\_c} \frac{p_2 B_a(r, 1 - \alpha)}{p_D} + c_{s\_nc} \frac{(1 - p_2) B_a(r, \beta)}{p_D}$$

Pode-se então demonstrar, utilizando as expressões em 2.13 e 2.36, que os custos médios do sistema para os estados  $(1,0)$  e  $(1,1)$ , são:

$$\phi(1, 0) = r c_{insp} + \xi(1, 0) + \theta(1, 0) + c_a \quad (2.55)$$

$$\phi(1, 1) = r c_{insp} + \xi(1, 1) + \theta(1, 1)$$

Para os estados  $(2,0)$  e  $(2,1)$ , tem-se que  $\xi(2, 0) = \xi(2, 1)$ , visto em 2.39. Os custos médios do sistema de controle dos estados  $(2,0)$  e  $(2,1)$  são:

$$\phi(2, 0) = r c_{insp} + \xi(2, 0) + \theta(2, 0) + c_a \quad (2.56)$$

$$\phi(2, 1) = r c_{insp} + \xi(2, 1) + \theta(2, 1)$$

Assim como na seção anterior, pode-se afirmar que o custo médio para cada item produzido e enviado ao consumidor ( $C(m, L, r, a)$ ) é a razão entre o custo esperado por ciclo de inspeção e quantidade de itens enviados ao mercado, que pode ser expresso a partir de:

$$C(m, L, r, a) = \frac{E(\Phi)}{E(T)} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \phi(w, s)}{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) [(L - 1)p_L(w, s) + (m - 1)p_m(w, s)]} \quad (2.57)$$

Os valores ótimos dos comprimentos  $m, L$ , da quantidade de repetições de classificação  $r$  e o valor mínimo para a conformidade do item  $a$ , são os que minimizam.

O critério estatístico utilizado é o mesmo adotado na seção 2.1, assim temos:

$$\varrho(m, L, r, a) = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi(w, s) \xi(w, s)}{c_{nc} E(T)} \quad (2.58)$$

Assim a solução do modelo econômico-estatístico multiobjetivo deve ser resolvido de maneira que:

$$(m^*, L^*, r^*, a^*) = \arg \min_{(m, L, r, a)} (C(m, L, r, a); \varrho_{(m, L, r, a)}) \quad (2.59)$$

sendo  $(m^*, L^*, r^*, a^*)$  o conjunto de argumentos das funções objetivo, ou seja, os parâmetro que geram as soluções da fronteira de Pareto que será detalhada no [Capítulo 3](#).



## 3 Otimização

Neste capítulo, serão introduzidos conceitos de otimização, suas definições e também os tipos existentes. Ele será dividido em duas partes: na inicial serão apresentados os conceitos básicos e quais são os elementos que compõem um problema de otimização; na segunda será definido a otimização multiobjetivo e dentro dela o importante conceito de dominância além dos tipos de otimização multiobjetivo existentes.

Em várias áreas do pensamento, ou puramente práticas, decisões devem ser tomadas, sendo que elas podem ser modeladas a partir das variáveis presentes no problema, visando sempre obter o melhor resultado possível, como encontrar qual seria o valor mínimo de custo para uma função. [Burke e Kendall \(2014\)](#) definem que a otimização pode ser pensada como o processo de busca da melhor solução possível dentre todas as disponíveis. [Deb \(2001\)](#) demonstra que além de encontrar a solução mais viável, elas correspondem aos valores extremos de um ou mais objetivos.

Segundo [Engelbrecht \(2007\)](#), o objetivo de um problema de otimização é atribuir valores, dentro do domínio permitido, para que a função objetivo seja otimizada e todas as restrições satisfeitas. Um problema de otimização têm as seguintes características:

- **Função objetivo** que representa a quantidade a ser otimizada, ou seja, a quantidade a ser maximizada ou minimizada,
- **Conjunto de variáveis** que afetam diretamente o valor da função objetivo,
- **Conjunto de restrições** que restringem os valores que podem ser utilizados como variáveis,
- **Espaço de Busca** região do domínio que respeita as restrições impostas onde as soluções da função objetivo serão procuradas.

Tendo como base as características citadas anteriormente, classificam-se os problemas multiobjetivo a partir de:

- **Número de variáveis:** Um problema com uma variável a ser otimizado é referido como univariado, com mais de uma variável é classificado como multivariado.
- **Tipos de variável:** classificados a partir das variáveis contínuas, inteiras ou misto das duas. No primeiro caso leva o mesmo nome do tipo da variável, já o segundo caso é classificado como inteiro ou discreto e o último citado é referido como problemas de otimização combinatória.

- **Grau de não-linearidade da função objetivo:** Problemas lineares tem funções objetivo com variáveis lineares, assim como funções quadráticas. Quando uma função objetivo não-linear é usada o problema é tido como um problema não-linear.
- **Número de critérios de Otimização:** Se a quantidade a ser otimizada é expressa usando apenas uma função objetivo, o problema é referido como mono-objetivo. Um problema multi-objetivo é um problema onde mais de uma função objetivo deve ser otimizada ao mesmo tempo.

Os modelos de planejamento Econômico-Estatístico descritos anteriormente apresentam mais de uma função objetivo a ser otimizada simultaneamente, uma econômica e outra estatística como diz o próprio nome. Como o objetivo desse trabalho é comparar os modelos verificando como eles se comportam e qual seria o melhor, necessita-se o entendimento de técnicas de otimização multiobjetivo que será melhor discutida no próximo tópico.

### 3.1 Otimização Multiobjetivo

Os problemas multiobjetivo são mais complexos, pois não podem ser medidos a partir de apenas um aspecto do sistema, e muitas vezes esses aspectos (ou funções objetivo) são conflitantes. Isso faz com que eles sejam mais próximos à realidade e também aumentam sua relevância.

Para ilustrar esse cenário podemos imaginar o processo de compra de um carro, o principal fator de escolha geralmente é o preço, mas não o único, o conforto do veículo pode ser levado em conta pelo cliente que busca um modelo. É claro que numa situação real de compra existiriam muitas outras variáveis a serem escolhidas, mas tendo as duas citadas, preço e conforto, configura-se um problema multiobjetivo e uma boa noção desse tipo de otimização, pois temos dois objetivos conflitantes: minimizar o preço e maximizar o conforto.

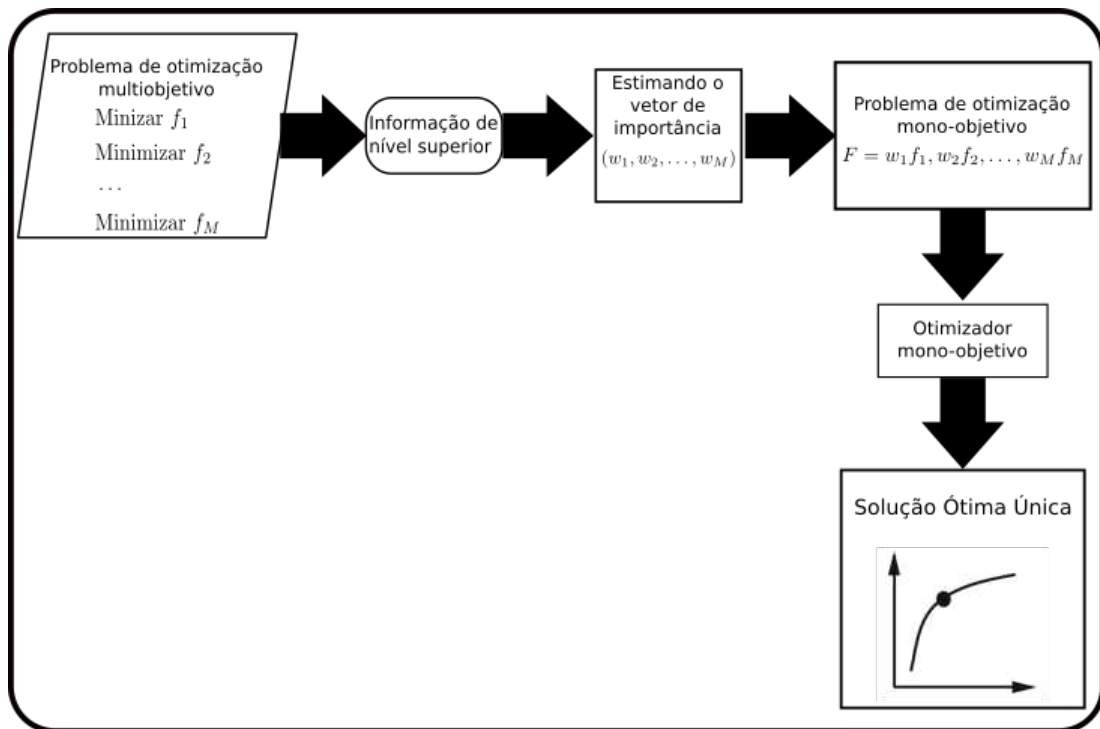
Coello et al. (2007) nos diz que os problemas multiobjetivo (MOPs) são problemas onde a finalidade é otimizar  $k$  funções objetivo simultaneamente. Isso pode envolver a maximização de todas as  $k$  funções, a minimização de todas as  $k$  funções ou uma combinação de maximização e minimização das mesmas. Engelbrecht (2007) define um problema de otimização multiobjetivo a partir de:  $S \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ , sendo  $S$  o espaço de busca com  $n_x$  dimensões e  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$  o espaço viável. Sem restrições, o espaço viável é o mesmo que o espaço de busca. Tendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) \in \mathcal{S}$ , referido como vetor de decisão. Uma função mono-objetivo  $f_k(x)$  é definida como  $f_k : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sendo  $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n_k}(x)) \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$  um vetor objetivo contendo  $n_k$  avaliações da função objetivo;  $\mathcal{O}$  é referido como espaço objetivo. O espaço de busca  $\mathcal{S}$  também é chamado de espaço de decisão.



$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \mathbf{f}(x) \\
& \text{sujeito a } g_m(x) \leq 0, \quad m = 1, \dots, n_g \\
& \quad h_m(x) = 0, \quad m = 1, \dots, n_g + n_h \\
& \quad x \in [x_{min}, x_{max}]^{n_x}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Segundo Deb (2014) e Bashiri et al. (2013) existem dois métodos para resolução de problemas multiobjetivo: agregativo e não-agregativo. No método agregativo, todas as funções objetivo são levadas em conta em uma única função ponderada, onde esses pesos são obtidos a partir de informações prévias e utilizando um otimizador mono-objetivo, somente uma solução é obtida. Já no método não-agregativo são encontradas múltiplas soluções com trade-off e a partir das informações prévias, uma única solução é escolhida dentre as encontradas.

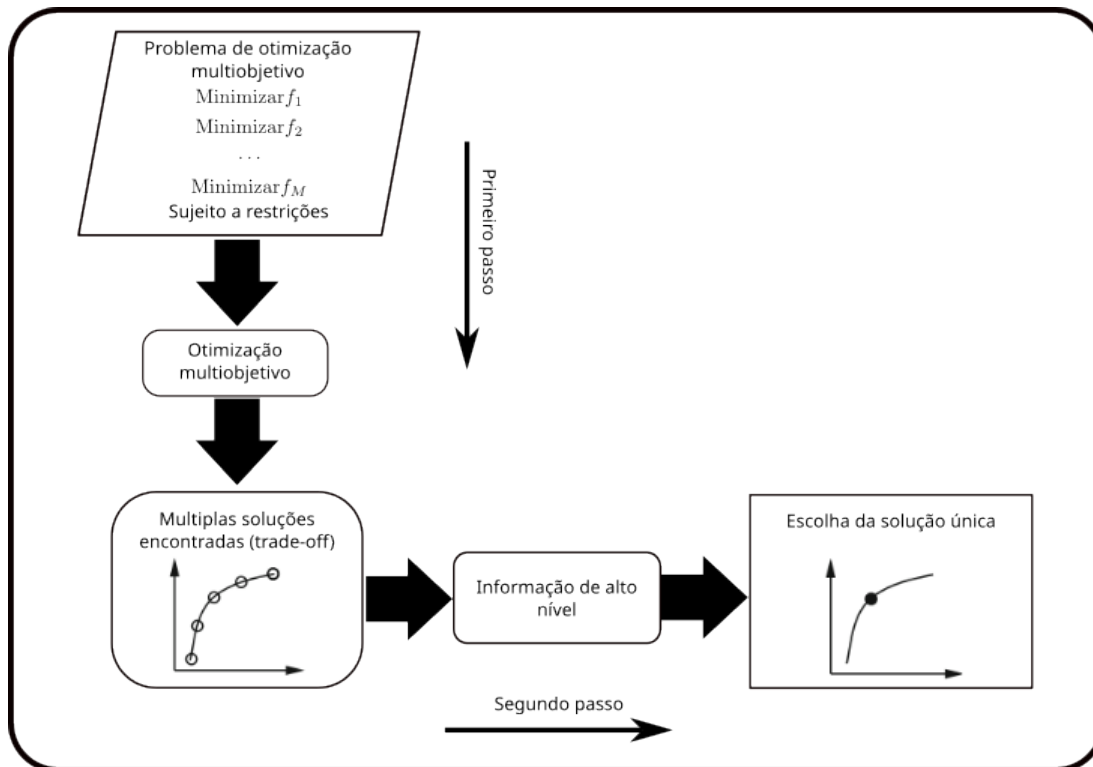
Figura 4 – Método agregativo de otimização multiobjetivo



Fonte:(DEB, 2014) traduzido pelo autor.

O modelo ideal apontado por Deb (2014) é o método não-agregativo mostrado na Figura 5, pois ele é direto em encontrar soluções e a informação obtida de maneira qualitativa e/ou quantitativa ainda é utilizada para escolha dentre as soluções ótimas encontradas, ainda que métodos de otimização multiobjetivo sejam mais complexos. O método agregativo, exemplificado pela Figura 4, utiliza um método de otimização mono-objetivo que é mais simples, mas carrega alguns problemas, dentre eles a determinação da

Figura 5 – Método não-agregativo de otimização multiobjetivo



Fonte: (DEB, 2014) traduzido pelo autor.

qualidade das informações qualitativa e quantitativa utilizadas *a priori*, que tem de ser alta, pois interfere no resultado da otimização. Outro problema seria a retirada da opção de escolha pelo tomador de decisão, que não o torna ciente de outras opções de solução para o problema que poderiam ser interessantes. O método utilizado nesse trabalho é o não-agregativo.

## 3.2 Conceito de Dominância

Em uma otimização mono-objetivo é simples enxergar numa comparação entre duas soluções qual delas é a melhor, pois só existe uma dimensão do problema a ser resolvido, mas quando temos um problema multiobjetivo a dificuldade de comparar as soluções aumenta assim como o número de objetivos a serem otimizados.

Muitos dos algoritmos de otimização multiobjetivo utilizam o conceito de dominância para comparação entre as soluções. Em Deb (2014) assume-se que existem  $M$  funções objetivo, cada função é maximizada ou minimizada, para ambas operações utiliza-se o operador  $\triangleleft$  entre as mesmas para mostrar que uma solução é melhor que a outra, por exemplo,  $i \triangleleft j$  denota que a solução  $i$  é melhor que a solução  $j$ . De maneira semelhante, temos que  $i \triangleright j$  denota a solução  $i$  é pior que a solução  $j$ .

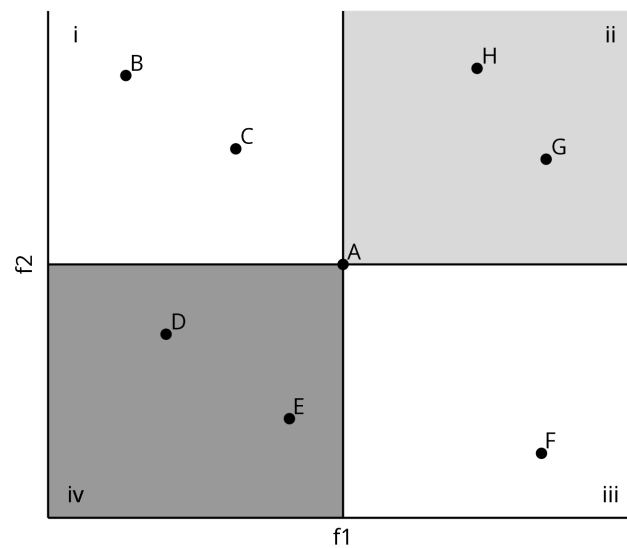
**Definição 1** Uma solução  $\mathbf{x}^{(1)}$  domina uma outra solução  $\mathbf{x}^{(2)}$  se as seguintes condições forem verdadeiras:

- i A solução  $\mathbf{x}^{(1)}$  não é pior que a solução  $\mathbf{x}^{(2)}$  em todos os objetivos, ou  $f_j(\mathbf{x}^{(1)}) \nlessdot f_j(\mathbf{x}^{(2)})$  para todo  $j = 1, 2, \dots, M$ .
- ii A solução  $\mathbf{x}^{(1)}$  é estritamente melhor que a solução  $\mathbf{x}^{(2)}$  em pelo menos um objetivo, ou  $f_{\bar{j}}(\mathbf{x}^{(1)}) \lessdot f_{\bar{j}}(\mathbf{x}^{(2)})$  para pelo menos um  $\bar{j} \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Com as duas condições satisfeitas dizemos que a solução  $\mathbf{x}^{(1)}$  domina  $\mathbf{x}^{(2)}$ , ou  $\mathbf{x}^{(1)} \leq \mathbf{x}^{(2)}$ . Portanto, com o conceito de dominância podemos afirmar que uma solução é melhor que outra.

A figura a seguir mostra as possíveis ocorrências quando deseja-se minimizar duas funções objetivo ( $f_1$  e  $f_2$ ), a partir do conceito de dominância

Figura 6 – Exemplo sobre dominância



Fonte: Autor.

No gráfico mostrado na [Figura 6](#) existem quatro quadrantes que resumem três situações referentes ao ponto  $A$ .

1. Os pontos presentes no quadrante  $iv$  dominam o ponto  $A$ , ou seja,  $\{D, E\} \leq A$
2. Os pontos presentes no quadrante  $ii$  são dominados por  $A$ , ou seja,  $\{H, G\} \geq A$
3. As soluções nos quadrantes  $i$ ,  $iii$  e o ponto  $A$  são indiferentes entre si.

No terceiro caso, isso acontece, pois em pelo menos uma das funções objetivo, a solução  $A$  não é melhor que as soluções nos quadrantes  $i$  e  $iii$ . A partir do que foi exposto, podemos seguir com a explicação do conceito de Eficiência de Pareto.

### 3.3 Eficiência de Pareto

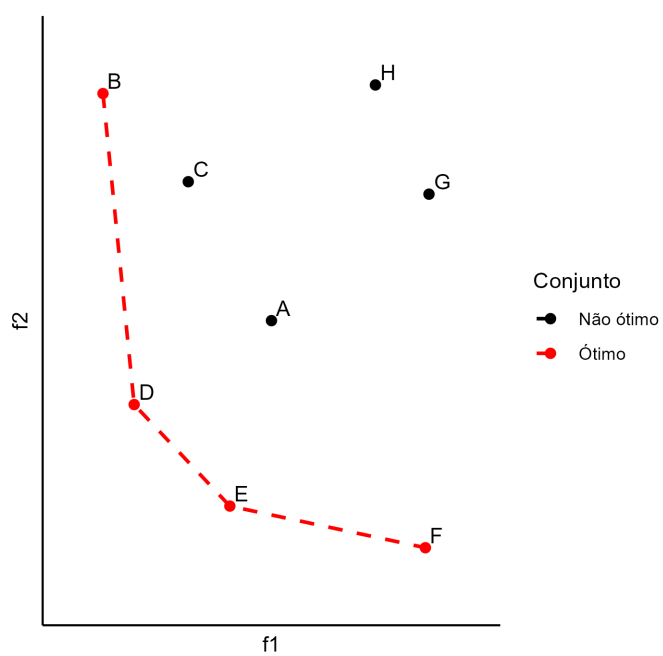
Retomando o que foi dito na seção anterior, quando comparam-se duas soluções temos que uma solução domina, é dominada ou as duas são indiferentes entre si. Dado um número finito de soluções, podemos afirmar que ao compararmos todas essas soluções par a par saberemos para cada uma delas quais soluções ela domina, é dominada ou é indiferente. Dentre essas soluções existirá um conjunto que é indiferente entre si e que não é dominado por nenhuma outra solução, além disso, esse conjunto tem a característica de que para uma solução externa sempre existirá uma solução dentro do conjunto que a dominará. Esse conjunto é denominado **Conjunto ótimo de Pareto**, conjunto não-dominado ou Fronteira de Pareto.

**Definição 2** *O conjunto não-dominado para todo o espaço de busca viável é dito o conjunto ótimo de Pareto global.*

Tendo como base os pontos da [Figura 6](#), a Fronteira de Pareto pode ser vista na [Figura 7](#).

Métodos de otimização que se baseiam em encontrar a fronteira de Pareto são populares, principalmente pelas características citadas anteriormente. Para encontrar a fronteira de Pareto muitos métodos foram desenvolvidos e estudados durante os anos, a maioria deles referentes à Computação Evolutiva, como algoritmos genéticos, ou à Inteligência de Enxame, como a otimização por enxame de partículas. Esse trabalho baseou-se em [Zitzler e Thiele \(1999\)](#) que comparou vários algoritmos evolutivos, dentre eles: Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) e o Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA), onde ele mostra que o melhor Algoritmo Genético Multiobjetivo é o NSGA. [Deb \(2014\)](#) diz que o "Estado da arte" para os Algoritmos Genéticos Multi-objetivo (AGMO) é o Fast Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA2) proposto em [Deb et al. \(2000\)](#), uma evolução do NSGA, e o algoritmo escolhido para ser utilizado neste trabalho.

Figura 7 – Fronteira de Pareto



Fonte: Autor.



## 4 Algoritmo Genético Multiobjetivo

Algoritmos Genéticos (AG) são algoritmos baseados na teoria da evolução das espécies de Charles Darwin, sendo utilizados para a otimização de modelos matemáticos de maneira ótima ou quase-ótima. Mas antes de focar na explicação desses algoritmos gostaria de tratar um pouco sobre os Algoritmos Evolucionários, um grupo que engloba os AG's e também sobre a Inteligência Computacional, que seria o grande grupo que engloba os Algoritmos Evolucionários.

[Blum et al. \(2012\)](#) define uma meta-heurística como um método computacional onde progressivamente busca-se melhorar uma ou mais soluções enquanto busca pelo resultado ótimo. [Engelbrecht \(2007\)](#) refere-se à Inteligência computacional como o conjunto de paradigmas para resolução de problemas complexos, muitas vezes incapazes de serem resolvidos matematicamente, baseados em sistemas biológicos. Podemos então afirmar que a Inteligência Computacional abrange algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza, alguns exemplos desses paradigmas são os algoritmos de sistemas imunes, algoritmos de enxame de partículas, redes neurais artificiais e finalmente os algoritmos evolutivos.

Segundo [Cortez \(2014\)](#) a computação evolucionária é formada pelos algoritmos evolutivos, ou seja, algoritmos de otimização populacionais inspirados no processo de seleção natural da teoria evolutiva de Charles Darwin. Esses algoritmos são populacionais, pois diferente dos algoritmos de otimização clássicos, que utilizam um ponto de busca, eles utilizam um conjunto de soluções e como são baseados na seleção natural, os indivíduos com melhores características (mais adaptados ao meio) têm mais chances de passá-las para as próximas gerações.

Os algoritmos evolutivos apresentam algumas características gerais, [Engelbrecht \(2007\)](#) as divide da seguinte forma:

- **Codificação:** A codificação do algoritmo pode ser binária ou real.
- **Função de avaliação:** Função que determina qual o nível de adequação dos indivíduos, chamarei de função fitness.
- **Inicialização:** A população inicial, aleatória.
- **Seleção:** Operadores de seleção dos "pais".
- **Reprodução:** Operadores de reprodução geram novos indivíduos para a próxima geração.

Os diferentes modos que essas características são implementadas, resultam em diferentes paradigmas da computação evolucionária, ou seja, diferentes algoritmos. Dentre eles temos os algoritmos genéticos, programação genética e evolução diferencial onde, por exemplo, a programação genética é baseada nos algoritmos genéticos com os indivíduos sendo programas e a evolução diferencial que também é baseada nos algoritmos genéticos tendo como diferença o mecanismo de reprodução utilizado. Os algoritmos genéticos serão explicados no próximo tópico.

## 4.1 Algoritmos Genéticos

A partir do que foi exposto anteriormente, podemos dizer que os algoritmos genéticos são meta-heurísticas baseados na seleção natural de Charles Darwin. [Mitchell \(1998\)](#) e [Goldberg \(1989\)](#) mostram que não há um consenso em uma definição mais rigorosa do que é um algoritmo genético, mas geralmente eles têm as seguintes características:

- População de cromossomos.
- Seleção dos indivíduos após serem avaliados em uma função fitness.
- Crossover (reprodução) dos indivíduos selecionados para produzir descendentes.
- Mutação aleatória desses descendentes.

Essas características também são utilizadas por [Engelbrecht \(2007\)](#).

Para entender melhor os algoritmos genéticos será preciso explicar alguns conceitos além das suas características gerais mostradas anteriormente, que seriam o conceito de cromossomo, a função fitness e o critério de parada.

### Cromossomo

O cromossomo seria o indivíduo em um algoritmo genético e cada indivíduo representa uma solução candidata para um problema de otimização. Outro ponto importante dos cromossomos é como eles serão representados, ou seja, qual será a codificação utilizada. Ela pode ser de duas formas: codificação binária ou codificação real, cada uma delas depende da função objetivo e existem operadores de seleção e reprodução específicos para cada tipo. Os exemplos de cromossomo com codificação binária e codificação real podem ser vistos nas Figuras [8a](#) e [8b](#), respectivamente.

### Função *Fitness*

A função Fitness é a função objetivo a qual deseja-se otimizar, ela é responsável por quantificar quão boa é a solução (cromossomo).



Figura 8 – Codificações do cromossomo

0	1	1	0	1
---	---	---	---	---

(a) Codificação binária.

0,25	1,2	2,31	0,39	0,215
------	-----	------	------	-------

(b) Codificação real.

Fonte: Autor

## Seleção

Seleção é o processo de escolha de cromossomos para serem usados como pais e reproduzirem, gerando assim os cromossomos filhos que serão utilizados como a próxima geração, podemos dizer que seu propósito é evidenciar quais são os indivíduos mais aptos na população, na esperança de que os filhos gerados serão tão bons ou melhores que os pais.

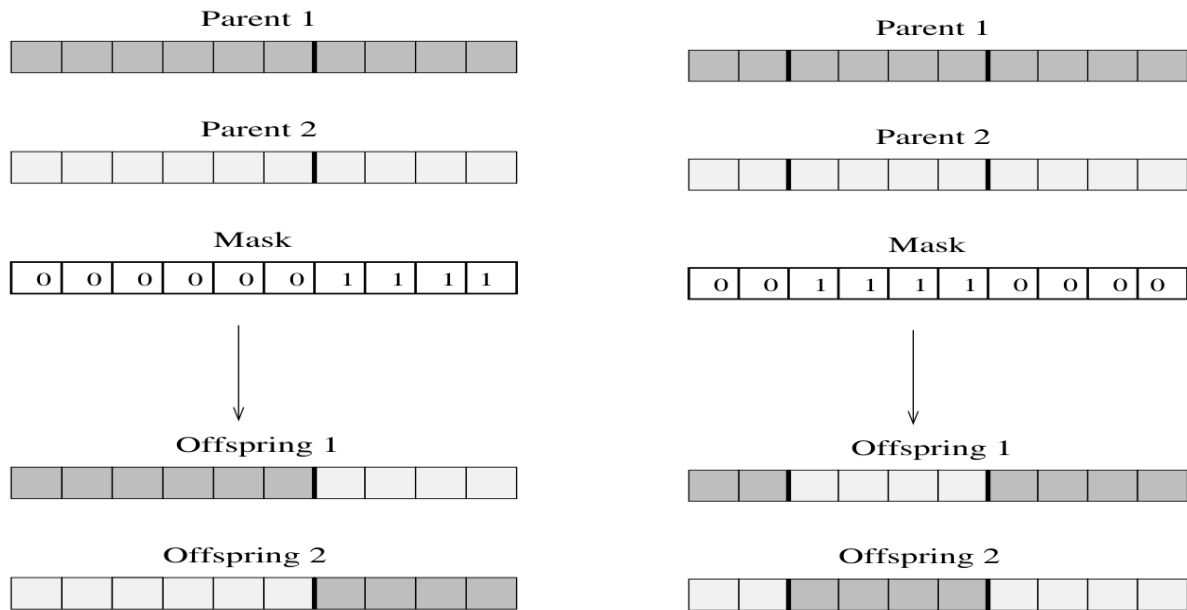
A seleção independe da codificação, alguns exemplos são:

- **Seleção por torneio:** na seleção por torneio é selecionado um grupo de indivíduos aleatoriamente da população, a performance dos indivíduos é comparada entre eles e o melhor é escolhido como um dos pais. O processo é repetido para o número de pais necessário.
- **Seleção por roleta:** a seleção por roleta se baseia nas roletas convencionais, mas nesse caso há uma diferença, pois aqui quanto maior a performance do indivíduo maior é a chance dele ser selecionado.
- **Elitismo:** Elitismo é um processo que garante que os melhores indivíduos de uma população estarão na geração subsequente.

## Cruzamento ou *Crossover*

O operador de *Crossover* é o processo de reprodução dos pais selecionados, nesse caso depende da codificação. *Crossover* combina os genes dos cromossomos pais a fim de gerar um ou mais indivíduos. Dois tipos de cruzamento são comumente utilizados para cromossomos de codificação binária, com um ponto de corte e com dois, eles são exemplificados nas Figuras 9a e 9b. Nelas pode-se ver que no cruzamento com um ponto, para gerar um descendente, ele ficaria com os genes de um pai até o ponto e do outro a partir daí. No cruzamento com dois pontos acontece o mesmo só que com mais um ponto de troca envolvido

Figura 9 – Tipos de cruzamento



(a) Cruzamento com um ponto de corte.

(b) Cruzamento com dois pontos de corte.

Fonte: Engelbrecht (2007)

## Mutação

A mutação é o processo de mudança na carga genética dos indivíduos feita de maneira aleatória. O processo é importante para que haja variabilidade genética, para que as populações vasculhem mais do espaço de busca e também para que os resultados gerados pelas populações não fiquem estagnados.

A mutação é um dos processos mais importantes no AG, mas não deve ser utilizado levemente, pois pode fazer com que os melhores indivíduos percam carga genética que os beneficia, fazendo com que sua avaliação seja diminuída. Os indivíduos menos bem avaliados podem se beneficiar mais da mudança genética, pois assim podem vir a ser melhores avaliados.

## 4.2 Nondominated Sorting Genetic Algorithm - II (NSGA-II)

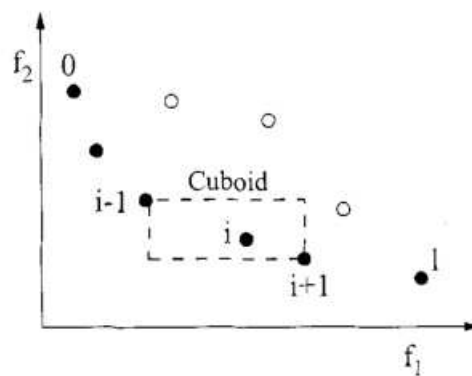
O Nondominated Sorting Genetic Algorithm - II é um algoritmo genético multiobjetivo com uma abordagem baseada em Pareto, ou seja, utilizando as relações de dominância descritas anteriormente, podendo ser visto em Deb et al. (2000). O NSGA-II vem como uma versão melhorada do NSGA proposto em Srinivas e Deb (1994), que tinha como principais críticas a falta de elitismo, a utilização de um parâmetro  $\sigma_{share}$  que é um mecanismo para garantia de diversidade dentro de uma população e também a sua alta complexidade computacional.

### 4.2.1 Funcionamento de um NSGA-II

Inicialmente é gerada uma população aleatória  $P_t$  de tamanho  $N$  e todos os seus indivíduos são comparados entre si utilizando a dominância de Pareto para a formação de conjuntos, também chamados de fronts. O primeiro nível é formado pelas soluções que não são dominadas por nenhuma outra solução. Essas soluções são retiradas e as soluções que estão no segundo nível são aquelas que não são dominadas por nenhuma outra solução. O processo se repete até que todas as soluções estejam em algum nível.

Uma das críticas ao NSGA foi a utilização de um parâmetro  $\sigma_{share}$  determinado pelo usuário, a saída adotada pelos autores foi a utilização de um operador de diversidade chamado *crowding-distance*, calculado a partir das distancias dos valores anterior e posterior ao da solução, como mostrado na [Figura 10](#).

Figura 10 – Cálculo Crowding-distance.



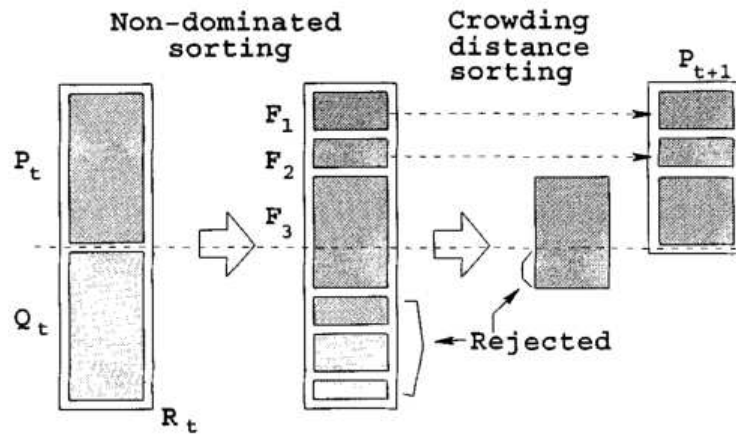
Fonte: [Deb et al. \(2000\)](#)

Após ranqueadas, selecionam-se os cromossomos pais e são feitos os processos de seleção, cruzamento e mutação, gerando assim a descendência  $Q_t$  de mesmo tamanho ao da população inicial ( $N$ ), os resultados são novamente ranqueados e os indivíduos com o melhor ranking são os escolhidos para a próxima geração, resolvendo assim o problema do elitismo. O esquema pode ser visto em [Figura 11](#).

## 4.3 Parâmetros utilizados no Algoritmo genético multiobjetivo

Esse trabalho foi feito baseado em uma produção de itens, variando o intervalo de amostragem dos mesmos, sendo assim, um número inteiro, portanto a codificação utilizada foi a binária. Na [Tabela 1](#) encontra-se o número de bits para os intervalos de amostragem e repetições de cada modelo. A [Tabela 2](#) mostra quais foram os parâmetros do algoritmo genético utilizado para os cálculos feitos nesse trabalho, os mesmos utilizados em [Bessegato et al. \(2011\)](#).

Figura 11 – Procedimento NSGA2



Fonte: Deb et al. (2000)

Tabela 1 – Bits dos modelos.

modelo	Bits			
	$m$	$L$	$r$	$a$
$m$	18	-	-	-
$mL$	8	10	-	-
$mLr$	8	10	5	4

Fonte: Autor.

Tabela 2 – Parâmetros do algoritmo genético.

Descrição do Parâmetro	Valor ou método
Tamanho da População	150
Seleção	Torneio
Taxa de cruzamento	0.8
Cruzamento	Cruzamento com um ponto de corte
Taxa de mutação	0.05
Elitismo	TRUE
Condição de parada	120 gerações

Fonte: Autor.

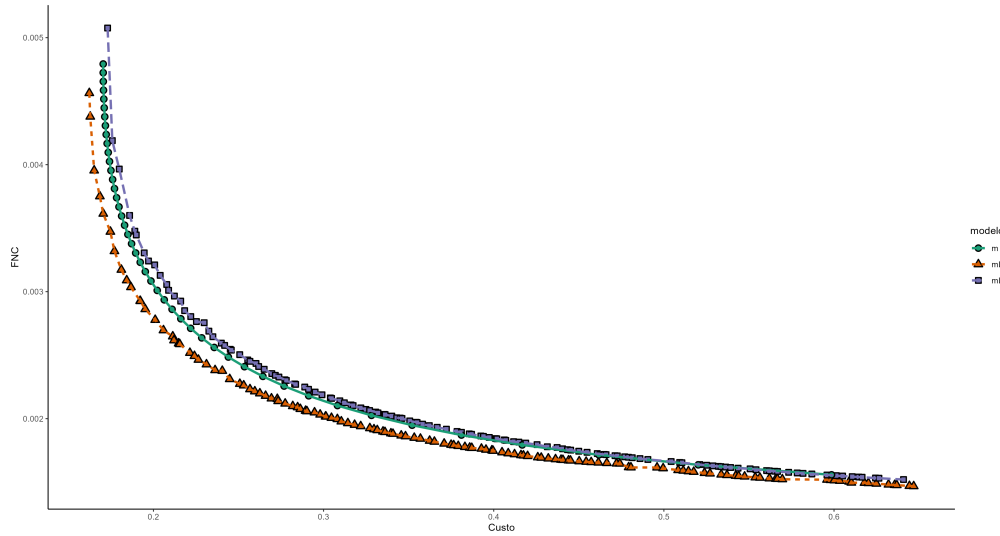
## 5 Aplicação numérica

Para a aplicação numérica serão utilizados três cenários distintos para a verificação dos modelos propostos, além de verificar como cada um deles se sai nesses cenários para assim determinar se existe um modelo único que tenha performance superior aos outros ou se cada um se destaca dependendo da situação apresentada. Todo o desenvolvimento computacional utilizou a linguagem R (R Core Team, 2022), sendo que as otimizações multiobjetivo foram conduzidas por algoritmo genético NSGA-II, por meio do pacote *rmoo* (BENITEZ; ROA, 2022). Por outro lado a visualização gráfica foi efetuada com o pacote *ggplot2* (WICKHAM, 2016), em que modelo *m* representa o modelo da seção 2.1, modelo *mL* referencia o modelo apresentado na seção 2.2, finalmente modelo *mLr* representa o modelo da seção 2.3.

### 5.1 Cenário 1

O primeiro cenário é o mesmo utilizado em Bessegato et al. (2011), Bessegato, Quinino e Pereira (2014) e Trindade, Ho e Quinino (2007), que dentre outras motivações, foi adotada por ser de fácil adequação em aplicações como a manutenção preventiva da produção de semicondutores. A partir de dados históricos do processo de solda, que é um dos componentes da fabricação de circuitos integrados, temos que a probabilidade de se produzir um item conforme dado que o processo está sob-controle é  $p_1 = 0,999$  e ainda utilizar uma distribuição geométrica de parâmetro  $\pi = 0,0001$  para descrever a mudança de estado do processo, e quando o processo está fora de controle a probabilidade de produzir um item conforme é dada por  $p_2 = 0,95$ . Nesse cenário o sistema de inspeção é automático, mas ainda assim é imperfeito, para os erros de inspeção do mesmo adota-se  $\alpha = \beta = 0,01$ . Finalmente, temos os componentes de custo, são eles  $c_{insp} = \$0,25$ ,  $c_{nc} = \$20$ ,  $c_{s_{nc}} = \$2$ ,  $c_{s_c} = \$2$  e  $c_a = \$100$ .

As curvas de Pareto dos modelos em análise estão apresentadas na Figura 12, em que percebe-se que o modelo *mL* domina todos os demais nesse cenário. Por outro lado, a Tabela 3 dispõe as dez primeiras soluções em ordem crescente de custo do modelo *mL* (soluções dominantes). Percebe-se vantagem na utilização de otimização multiobjetivo, pois permite observar que a fração média de itens não conformes enviados ao mercado encontra-se em ordem decrescente. O conjunto de soluções agora pode ser analisada considerando o *trade-off* entre o custo e a fração de itens não conformes. Como por exemplo, na prática, pode ser interessante aumentar em 0,35% o custo unitário do sistema de controle, para permitir a diminuição em 4,07% da fração média de itens não conformes enviados ao mercado. Com análises similares os especialistas podem tomar decisões de maneira similar.

Figura 12 – Fronteiras de Pareto dos modelos  $m$ ,  $mL$  e  $mLr$  no Cenário 1

Fonte: Autor

Tabela 3 – Resultados do modelo  $mL$  no cenário 1

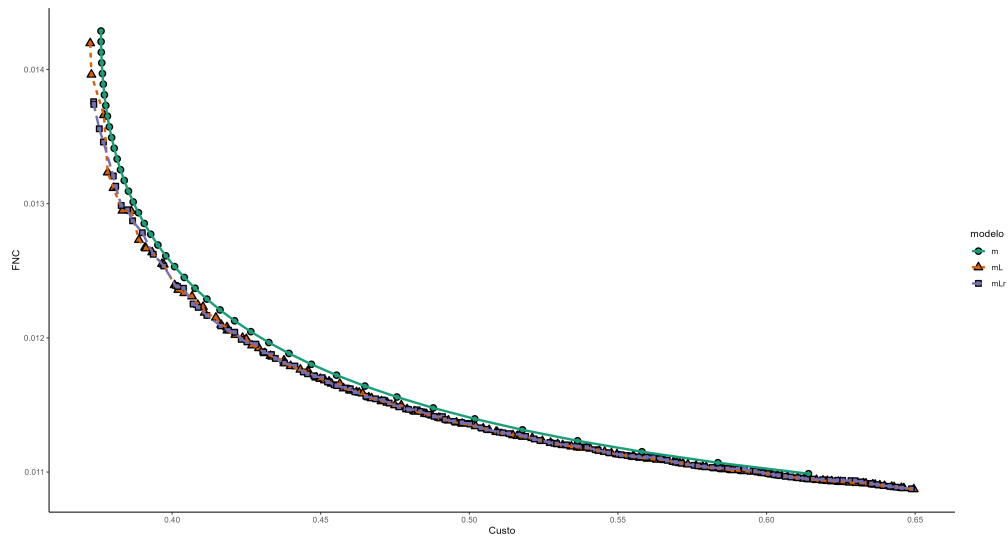
	m	L	Custo	FNC	$\Delta$ Custo(%)	$\Delta$ FNC(%)
1	41	895	0.16231	0.00456	0.00	0.00
2	41	685	0.16288	0.00438	0.35	-4.07
3	35	648	0.16517	0.00395	1.76	-13.35
4	34	468	0.16851	0.00375	3.82	-17.81
5	32	468	0.17051	0.00361	5.05	-20.81
6	31	352	0.17471	0.00347	7.63	-23.93
7	28	440	0.17708	0.00332	9.10	-27.27
8	25	511	0.18115	0.00317	11.60	-30.49
9	24	493	0.18429	0.00309	13.54	-32.30
10	24	429	0.18678	0.00304	15.07	-33.48

Fonte: Autor

## 5.2 Cenário 2

O segundo cenário descrito nessa seção é baseado em [Taguchi, Elsayed e Hsiang \(1988\)](#), [Nandi e Sreehari \(1999\)](#), [Dasgupta \(2003\)](#) e [Bessegato, Mota e Quinino \(2016\)](#). Os mesmos argumentos utilizados no cenário 1, são utilizados no presente caso. Os dados históricos também corroboram o cenário em voga, havendo uma mudança de parâmetros probabilísticos  $p_1$  e  $p_2$ , com  $p_1 = 0,99$  e  $p_2 = 0,8$ . Os demais parâmetros probabilísticos e de custo são os mesmos utilizados na [seção 5.1](#). O NSGA2 foi utilizado para determinação das fronteiras de Pareto de cada um dos modelos. Os resultado estão apresentados na [Figura 13](#):

Diferentemente do caso analisado na [seção 5.1](#), observa-se na [Figura 13](#) que não

Figura 13 – Fronteiras de Pareto dos modelos  $m$ ,  $mL$  e  $mLr$  no Cenário 2

Fonte: Autor

há um modelo que domine os outros. Inicialmente os modelos  $mL$  e  $mLr$  alternam-se até certo valor de custo (aproximadamente 0,57). Após esse ponto não há uma distinção clara de dominância entre os três modelos.

A Tabela 4 dispõe os dez menores valores de custo levando em consideração apenas os modelos  $mL$  e  $mLr$ , pois na faixa dos menores custos, esses dominam o modelo  $m$ . Percebe-se que, ainda que o modelo  $mL$  tenha em geral o menor custo, dependendo da estratégia a ser utilizada pelo especialista, o modelo  $mLr$  pode ser utilizado para uma diminuição na fração de itens não-conformes enviados ao mercado por item produzido.

Tabela 4 – Resultados dos modelo  $mL$  e  $mLr$  no cenário 2

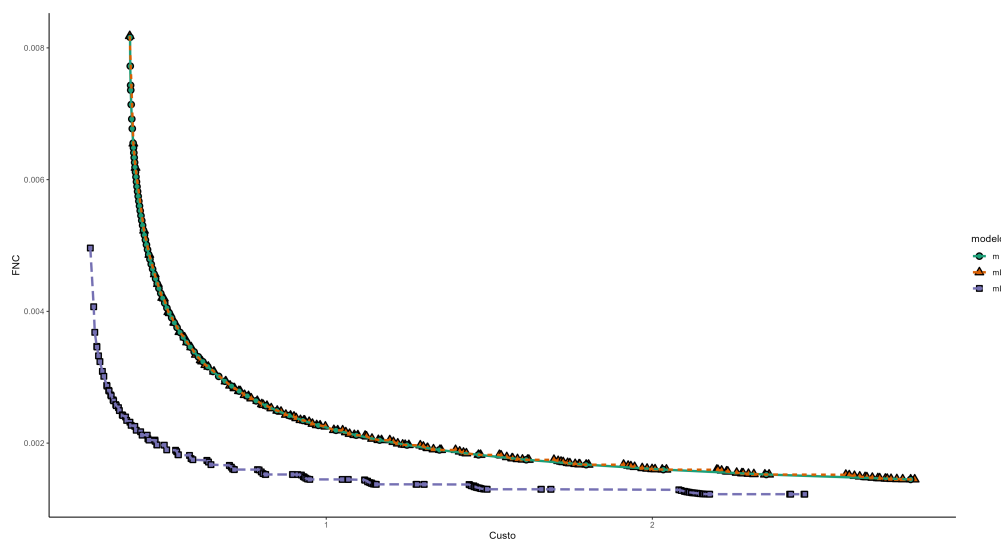
	m	L	r	a	Custo	FNC	$\Delta$ Custo(%)	$\Delta$ FNC(%)
1	49	260	-	-	0.37246	0.0142	0.00	0.00
2	47	212	-	-	0.37285	0.01396	0.10	-1.65
3	43	253	4	2	0.3736	0.01376	0.31	-3.07
4	43	237	4	2	0.37367	0.01374	0.32	-3.21
5	42	127	4	2	0.3755	0.01356	0.82	-4.49
6	41	95	4	2	0.3769	0.01346	1.19	-5.19
7	45	71	-	-	0.37706	0.01366	1.24	-3.78
8	38	185	-	-	0.37833	0.01323	1.58	-6.78
9	38	79	4	2	0.38022	0.01321	2.08	-6.97
10	37	160	-	-	0.38028	0.01312	2.10	-7.60

Fonte: Autor

### 5.3 Cenário 3

O cenário 3 foi baseado em Bessegato (2009), em que o processo em análise tem alta capacidade ( $p_1 = 0,999$ ), quando estiver sob-controle estatístico, com queda significativa de capacidade quando estiver fora de controle ( $p_2 = 0,5$ ). Além disso, o custo de ajuste do processo é significativamente maior em relação ao dos outros cenários ( $c_a = 1000$ ), os demais custos permanecem os mesmos daqueles considerados no seção 5.1. As curvas de Pareto foram calculadas pelo algoritmo genético NSGA-II. Da Figura 14, pode-se perceber uma clara dominância do modelo  $mLr$  nesse caso.

Figura 14 – Fronteiras de Pareto dos modelos  $m$ ,  $mL$  e  $mLr$  no Cenário 3



Fonte: Autor

A Tabela 5 contém os dez menores custos calculados para o modelo  $mLr$ . Percebe-se que um pequeno aumento no custo médio implica em uma diminuição significativa na fração de itens não conformes enviados ao mercado. Por exemplo, quando utilizam-se  $m = 53$ ,  $L = 117$ ,  $r = 4$ ,  $a = 2$  obtém-se o custo mínimo de \$0,27653, com aproximadamente uma peça não conforme enviada ao mercado para cada 202 peças conformes. Por sua vez, utilizando-se  $m = 53$ ,  $L = 117$ ,  $r = 4$ ,  $a = 2$ , o custo é aumentado em 3,75% diminuindo entretanto o envio de itens não conformes ao mercado, para aproximadamente uma peça não conforme para cada 246 itens conformes.

Dos três modelos, estudados em três cenários percebe-se que o modelo  $m$  não se sobressaiu em nenhum deles. Um fato interessante a ser apontado é que no primeiro cenário em que trata-se de um processo de alta capacidade com baixo impacto decorrente de causas especiais ( $p_1 = 0,999$ ,  $p_2 = 0,95$ ) o modelo  $m$  é ligeiramente melhor que o modelo de medidas repetidas ( $mLra$ ), sendo que o modelo de intervalo variável ( $mL$ ) domina todos os demais.



Tabela 5 – Resultados do modelo  $mLr$  no cenário 3

	m	L	r	a	Custo	FNC	$\Delta$ Custo(%)	$\Delta$ FNC(%)
1	53	117	4	2	0.27653	0.00496	0.00	-0.00
2	39	79	4	1	0.28689	0.00407	3.75	-17.97
3	36	29	4	2	0.29024	0.00368	4.96	-25.79
4	33	69	4	2	0.29627	0.00347	7.14	-30.10
5	33	23	4	2	0.29689	0.00346	7.36	-30.27
6	31	81	4	2	0.30167	0.00333	9.09	-32.99
7	30	9	4	2	0.30598	0.00324	10.65	-34.76
8	28	9	4	2	0.31352	0.00309	13.37	-37.75
9	27	5	4	2	0.31799	0.00301	14.99	-39.24
10	25	69	4	2	0.32682	0.00288	18.18	-42.03

Fonte: Autor

No segundo cenário percebe-se uma melhoria de desempenho do modelo generalizado  $mLr$ , não havendo entretanto uma diferença significativa com o modelo  $mL$  (um não domina o outro). Em determinadas condições os três modelos são quase indistinguíveis, salientando no cenário 2 que ocorre uma menor probabilidade de produzir itens conformes, nos dois estados do processo (sob controle ou fora de controle), com probabilidade respectivamente de 99% e 80%.

O cenário três aponta para a robustez do modelo de medidas repetidas. Nesse cenário o processo tem uma alta probabilidade de produzir itens não conformes, com o processo fora de controle ( $p_2 = 0,8$ ). As medidas repetidas auxiliam na diminuição do custo médio e, principalmente, na redução da fração de não conformes enviados ao mercado.

Percebe-se que a utilização da otimização multiobjetivo oferece uma visão mais ampla para o procedimento de escolha dos parâmetros de planejamento de sistemas de monitoramento e controle on-line por atributo. O princípio de dominância de Pareto permite também o sistema de controle mais adequado para diversos cenários, auxiliando na determinação da sensibilidade de cada modelo em relação as incertezas dos parâmetros probabilísticos e de custo do modelo. Essa abordagem de buscar otimizar mais de uma função permite também ao especialista tomar decisões levando em consideração os *trade-offs*, que sejam adequados as políticas de qualidade de cada empresa. Faraz e Saniga (2013) sugerem também que essa abordagem de otimização e escolha oferece uma maior flexibilidade e adaptabilidade na busca da melhoria contínua dos processos industriais.



## 6 Conclusão e pesquisas futuras

Como uma situação natural presente no trabalho, pode-se explorar outros critérios estatísticos tais como, a taxa de falsos alarmes juntamente com a proporção de não-conformes enviados ao mercado. Uma área que também pode ser estudada é utilização da função-perda de Taguchi, em conjunto com o custo médio do sistema de controle. A função perda de Taguchi considera que há sempre uma perda associada ao desvio da característica de qualidade do produto de seu valor alvo. Essa função busca detalhar as implicações envolvidas com a má qualidade e é amplamente creditada pelo maior foco em melhoria contínua de qualidade.



## Referências

ABOLMOHAMMADI, M. et al. Economic statistical design of adaptive  $\bar{X}$  control charts based on quality loss functions. *Operational Research*, Springer, v. 21, p. 1041–1080, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12351-019-00467-3>>. Citado na página 31.

BASHIRI, M. et al. Multi-objective genetic algorithm for economic statistical design of  $\bar{X}$  control chart. *Scientia Iranica*, v. 20, n. 3, p. 909–918, 2013. ISSN 1026-3098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1026309813000904>>. Citado na página 47.

BENITEZ, F.; ROA, D. P. *rmoo: Multi-Objective Optimization in R*. [S.l.], 2022. R package version 0.2.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=rmoo>>. Citado na página 59.

BESSEGATO, L. et al. Variable interval sampling in economical designs for online process control of attributes with misclassification errors. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 62, n. 7, p. 1365–1375, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/jors.2010.79>>. Citado 4 vezes nas páginas 23, 32, 57 e 59.

BESSEGATO, L. F. *Extensão para controle on-line por atributo com erros de classificação: intervalo de inspeção variável, amostragem não-unitária, horizonte finito e infinito*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/BIRC-85CPT5>>. Citado 5 vezes nas páginas 23, 26, 33, 38 e 62.

BESSEGATO, L. F.; MOTA, L. S.; QUININO, R. C. Online control by attributes in the presence of classification errors with variable inspection interval. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 45, n. 11, p. 3283–3301, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03610926.2014.901376>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 38 e 60.

BESSEGATO, L. F. et al. An analysis of online quality control by attributes with an imperfect classification system and inspections with samples of size n. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–26, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03610918.2021.1923743>>. Citado na página 23.

BESSEGATO, L. F.; QUININO, R. da C.; PEREIRA, A. dos R. Planejamento econômico de controle on-line por atributo em presença de erros de classificação. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 6, n. 1, p. 564–574, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.18407/issn.1983-9952.2014.v6.n1.p564-574>>. Citado na página 59.

BLUM, C. et al. Evolutionary optimization. In: CHIONG, R.; WEISE, T.; MICHALEWICZ, Z. (Ed.). *Variants of Evolutionary Algorithms for Real-World Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 1–29. ISBN 978-3-642-23424-8. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-23424-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23424-8_1)>. Citado na página 53.

- BORGES, W.; HO, L. L.; TURNES, O. An analysis of taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 17, n. 3, p. 261–276, 2001. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asmb.442>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- BURKE, E. K.; KENDALL, G. Introduction. In: BURKE, E. K.; KENDALL, G. (Ed.). *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Boston, MA: Springer US, 2014. p. 1–17. ISBN 978-1-4614-6940-7. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6940-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6940-7_1)>. Citado na página 45.
- CASTILLO, E. D.; MACKIN, P.; C.MONTGOMERY, D. Multiple-criteria optimal design of  $\bar{X}$  control charts. *IIE Transactions*, Taylor & Francis, v. 28, n. 6, p. 467–474, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/07408179608966293>>. Citado na página 24.
- CHEN, Y.-K.; LIAO, H.-C. Multi-criteria design of an  $\bar{X}$  control chart. *Computers & Industrial Engineering*, v. 46, n. 4, p. 877–891, 2004. ISSN 0360-8352. Computers and Industrial Engineering Special Issue on Selected papers from the 29th International Conference on Computers and Industrial Engineering. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835204000804>>. Citado na página 24.
- COELLO, C. A. C. et al. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. New York: Springer, 2007. v. 5. Citado na página 46.
- CORTEZ, P. *Modern Optimization with R*. New York: Springer, 2014. (Use R!). ISBN 9783319082639. Citado na página 53.
- DASGUPTA, T. An economic inspection interval for control of defective items in a hot rolling mill. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 30, n. 3, p. 273–282, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/0266476022000030057>>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 60.
- DEB, K. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001. v. 16. Citado na página 45.
- DEB, K. Multi-objective optimization. In: BURKE, E. K.; KENDALL, G. (Ed.). *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Boston, MA: Springer US, 2014. p. 403–449. ISBN 978-1-4614-6940-7. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6940-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6940-7_15)>. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 50.
- DEB, K. et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. In: SCHOENAUER, M. et al. (Ed.). *Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000. p. 849–858. ISBN 978-3-540-45356-7. Citado 4 vezes nas páginas 50, 56, 57 e 58.
- DUNCAN, A. J. The economic design of  $\bar{x}$  charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 51, n. 274, p. 228–242, 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/01621459.1956.10501322>>. Citado na página 23.

DUNCAN, A. J. The economic design of  $\bar{x}$ -charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 66, n. 333, p. 107–121, 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/01621459.1971.10482230>>. Citado na página 23.

ENGELBRECHT, A. P. *Computational intelligence: an introduction*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 45, 46, 53, 54 e 56.

FARAZ, A.; SANIGA, E. Multiobjective genetic algorithm approach to the economic statistical design of control charts with an application to  $\bar{X}$  and  $s^2$  charts. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 29, n. 3, p. 407–415, 2013. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qre.1390>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 63.

FRANCO, B.; COSTA, A.; MACHADO, M. Economic-statistical design of the  $\bar{X}$  chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 39, n. 17, p. 12961–12967, 2012. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417412007403>>. Citado na página 24.

GANGULY, A.; PATEL, S. K. Fuzzy multi-objective economic-statistical design of x-bar control chart. *International Journal of Productivity and Quality Management*, v. 27, n. 4, p. 435–463, 2019. Disponível em: <<https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJPQM.2019.101925>>. Citado na página 24.

GIAKATIS, G.; ENKAWA, T.; WASHITANI, K. Hidden quality costs and the distinction between quality cost and quality loss. *Total Quality Management*, Routledge, v. 12, n. 2, p. 179–190, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/09544120120011406>>. Citado na página 31.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. London: Addison-Wesley Professional, 1989. Citado na página 54.

LORENZEN, T. J.; VANCE, L. C. The economic design of control charts: A unified approach. *Technometrics*, [Taylor & Francis, Ltd., American Statistical Association, American Society for Quality], v. 28, n. 1, p. 3–10, 1986. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1269598>>. Citado na página 23.

MAGALHÃES, M. S. d.; COSTA, A. F. Economic-statistical control chart design: A sensitivity study. *Brazilian Journal of Operations & Production Management*, v. 2, n. 1, p. 25–38, Feb. 2010. Disponível em: <[https://www.bjopm.org.br/bjopm/article/view/BJV2N1\\_2005\\_P2](https://www.bjopm.org.br/bjopm/article/view/BJV2N1_2005_P2)>. Citado na página 24.

MITCHELL, M. *An introduction to genetic algorithms*. Massachusetts: MIT press, 1998. ISBN 9780262631853. Citado na página 54.

MONTGOMERY, D. C. The economic design of control charts: A review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, Taylor & Francis, v. 12, n. 2, p. 75–87, 1980. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980940>>. Citado na página 23.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 7ª. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2016. ISBN 8521630247. Citado na página 23.

MUNOZ, J. J.; CAMPUZANO, M. J.; MOSQUERA, J. Optimized np attribute control chart using triple sampling. *Mathematics*, v. 10, n. 20, 2022. ISSN 2227-7390. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2227-7390/10/20/3791>>. Citado na página 24.

NANDI, S.; SREEHARI, M. Some improvements in Taguchi's economic method allowing continued quality deterioration in production process. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 28, n. 5, p. 1169–1181, 1999. Citado na página 60.

NAYEBPOUR, M. R.; WOODALL, W. H. An analysis of taguchi's on-line quality-monitoring procedures for attributes. *Technometrics*, [Taylor & Francis, Ltd., American Statistical Association, American Society for Quality], v. 35, n. 1, p. 53–60, 1993. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1269289>>. Citado na página 23.

PASHA, M. A. et al. Effects of quality characteristic distributions on the integrated model of Taguchi's loss function and economic statistical design of control charts by modifying the Banerjee and Rahim economic model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 47, n. 8, p. 1842–1855, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1328512>>. Citado na página 31.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado na página 59.

ROSS, S. M. *Stochastic processes*. London: John Wiley & Sons, 1995. Citado na página 31.

SANIGA, E. M. Economic statistical control-chart designs with an application to  $\bar{X}$  and R charts. *Technometrics*, Taylor & Francis, Ltd., American Statistical Association, American Society for Quality, v. 31, n. 3, p. 313–320, 1989. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3556141>>. Citado na página 23.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. *Evolutionary Computation*, v. 2, n. 3, p. 221–248, 09 1994. ISSN 1063-6560. Disponível em: <<https://doi.org/10.1162/evco.1994.2.3.221>>. Citado na página 56.

TAGUCHI, G.; ELSAYED, E. A.; HSIANG, T. C. *Quality engineering in production systems*. New York: McGraw-Hill College, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 23, 31 e 60.

TAVANA, M. et al. Multi-objective control chart design optimization using nsga-iii and mopso enhanced with dea and topsis. *Expert Systems with Applications*, v. 50, p. 17–39, 2016. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417415007678>>. Citado na página 24.

TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. da C. Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Wiley Online Library, v. 23, n. 4, p. 339–358, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/asmb.675>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 38 e 59.

WICKHAM, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. New York: Springer, 2016. ISBN 978-3-319-24277-4. Disponível em: <<https://ggplot2.tidyverse.org>>. Citado na página 59.



WOODALL, W. H.; LORENZEN, T. J.; VANCE, L. C. Weaknesses of the economic design of control charts. *Technometrics*, [Taylor & Francis, Ltd., American Statistical Association, American Society for Quality], v. 28, n. 4, p. 408–410, 1986. ISSN 00401706. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1269000>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/4235.797969>>. Citado na página 50.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Códigos

Todos os códigos utilizados nesse trabalho tal qual a maneira que foram utilizados, estão no repositório <[https://github.com/limaJoao/TCC\\_codigo](https://github.com/limaJoao/TCC_codigo)>