

Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia
Bacharelado em Engenharia Computacional

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Estudo de um modelo numérico para o
problema de autovalor em estruturas reticuladas**

Juiz de Fora

2018

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Estudo de um modelo numérico para o
problema de autovalor em estruturas reticuladas**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Computacional.

Orientador: Carlos Cristiano Hasenclever Borges

Juiz de Fora

2018

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Estudo de um modelo numérico para o
problema de autovalor em estruturas reticuladas**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Computacional.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Cristiano Hasenclever Borges -
Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Leonardo Goliatt da Fonseca
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente à Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Grupo de Educação Tutorial da Engenharia Computacional pelas oportunidades que me possibilitaram o desenvolvimento do presente trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e dos Departamentos de Ciência da Computação e de Mecânica Aplicada e Computacional que me facilitaram todo o conhecimento necessário para o completo entendimento e construção deste trabalho.

À minha família que deste sempre tem me apoiado e acreditado em mim.

À minha namorada que sempre se fez presente e disposta me ajudar nessa minha caminhada.

Enfim, aos meus amigos pelo companheirismo, suporte e confiança nestes anos de universidade.

RESUMO

O problema de autovalor é bastante relevante por modelar diversos fenômenos mecânicos e estruturais em engenharias. No caso de dinâmica estrutural, os autovalores estão diretamente relacionados aos dados vibracionais da estrutura, sendo as frequências naturais da estrutura, assim como os autovetores aos modos de vibração. Técnicas eficientes de discretização numérica como o método dos elementos finitos associadas a métodos eficientes de álgebra linear computacional para o cálculo dos autovalores e autovetores são fundamentais para a qualidade e eficiência do modelo.

Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento de métodos descontínuos para a discretização de peças estruturais reticulares visando sua aplicação ao problema de autovalor associado. Este modelo de elementos finitos não é comum de ser utilizado nesta classe de problema, sendo assim necessário muito critério para seu desenvolvimento e validação.

Dois tipos específicos de elementos reticulares são desenvolvidos, a saber: um modelo para barras com carregamento axial e um modelo de viga modelado com a supressão dos graus de rotação, conhecido como elemento de viga livre de grau de rotação. Para que este último seja viável, características distintas em relação ao elemento de viga padrão de elementos finitos são necessárias, trazendo uma maior dificuldade para um modelo descontínuo. Porém, seu uso em aplicações específicas como a identificação de danos em estruturas apresenta vantagem tratar somente os deslocamentos lineares.

Visando validar os modelos propostos, experimentos usando os métodos aqui apresentados são realizados para avaliar tanto o desempenho destes em relação a eficiência na obtenção da solução, quanto a possíveis restrições em relação ao seu uso combinado com um modelo contínuo de elementos finitos.

Palavras-chave: Dinâmica estrutural. Problema de autovalor. Métodos de elementos finitos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de discretização de um domínio unidimensional $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_{e_i}$, onde u é a solução analítica do problema e u_h é a solução aproximada por um método de elementos finitos.	17
Figura 2 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 1$	18
Figura 3 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 2$	18
Figura 4 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 3$	18
Figura 5 – Elemento de barra com deformação axial \bar{u}	20
Figura 6 – Elemento de barra fixa-livre.	23
Figura 7 – Aproximação dos três primeiros modos de vibração, com $p = 1$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	24
Figura 8 – Aproximação dos três primeiros modos de vibração, com $p = 3$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	24
Figura 9 – Análise de erro da aproximação do primeiro modo de vibração.	25
Figura 10 – Análise de erro da aproximação do segundo modo de vibração.	26
Figura 11 – Análise de erro da aproximação do terceiro modo de vibração.	26
Figura 12 – Elemento de barra fixa-livre com variação abrupta de de área, módulo de elasticidade e massa específica.	26
Figura 13 – Aproximação contínua dos cinco primeiros modos de vibração da barra da figura 12, com $p = 2$ e $n_{el} = 10$	27
Figura 14 – Aproximação descontínua dos três primeiros modos de vibração, com $p = 3$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	29
Figura 15 – Análise de erro da aproximação descontínua do primeiro modo de vibração.	30
Figura 16 – Análise de erro da aproximação descontínua do segundo modo de vibração.	30
Figura 17 – Análise de erro da aproximação descontínua do terceiro modo de vibração.	30
Figura 18 – Aproximação por método descontínuo dos cinco primeiros modos de vibração da barra 12, com $p = 2$ e $n_{el} = 10$	31
Figura 19 – Elemento de viga com deformação transversal \bar{u}	34
Figura 20 – Discretização de uma viga em elementos FRB [12].	36
Figura 21 – Elemento de viga biapoçada.	37
Figura 22 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	38
Figura 23 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 13$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	38
Figura 24 – Análise de erro da aproximação por FRB do primeiro modo de vibração.	39

Figura 25 – Aproximação descontínua dos três primeiros modos de vibração da viga por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 7$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	40
Figura 26 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 9$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Métodos de Elementos Finitos
FRB	<i>Free Rotation Beam</i> – Viga livre de rotação

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Grau dos polinômios interpoladores
p_l	Grau dos polinômios interpoladores para aproximações locais
p_g	Grau dos polinômios interpoladores para aproximações globais
ϕ_i^p	i -ésimo polinômio interpoladores de grau p
ψ_{ij}	Coefficiente do i -ésimo polinômio da interpolação j
ω_j	j -ésima frequência natural de vibração
ω_j^h	Aproximação da j -ésima frequência natural de vibração
\bar{u}	Função de deslocamento da estrutura
u_j	j -ésimo modo natural de vibração
v	Função de ponderação de u_j
u_j^h	Aproximação do j -ésimo modo natural de vibração
K	Matriz de rigidez de uma estrutura
M	Matriz de massa de uma estrutura
A_j, B_j, a	Constantes
E	Módulo de elasticidade do material
A	Área da seção transversal da estrutura
L	Comprimento da geometria da estrutura
I	Momento de inércia da estrutura
ρ	Massa específica do material
Ψ	Matriz de autovetores generalizados
Ψ_j	j -ésimo de autovetor generalizado
Λ	Matriz diagonal dos autovalores generalizados
λ_j	j -ésimo autovalor generalizado
n_{el}	Número de elementos da discretização por MEF
h	Comprimento de um elemento da discretização
\mathcal{O}	Notação de limite de complexidade assintótica superior de algoritmos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	MOTIVAÇÃO	12
1.2	OBJETIVOS	13
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2	VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS	15
3	MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS	17
4	ELEMENTO DE BARRA	20
4.1	FORMULAÇÃO VARIACIONAL	20
4.2	RESOLUÇÃO POR MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	21
4.2.1	Exemplo de barra fixa-livre simples	23
4.2.1.1	<i>Resultados</i>	23
4.2.1.2	<i>Testes de convergência</i>	24
4.2.2	Exemplo de barra fixa-livre com variação abrupta de seção e material	25
4.2.2.1	<i>Resultados</i>	27
4.3	RESOLUÇÃO POR MÉTODO DESCONTÍNUO DE ELEMENTOS FINITOS	28
4.3.1	Exemplo de barra fixa-livre simples	29
4.3.1.1	<i>Resultados</i>	29
4.3.2	Exemplo de barra fixa-livre com variação abrupta de seção e material	31
4.3.2.1	<i>Resultados</i>	31
4.3.3	Análise de complexidade	32
5	ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI	34
5.1	FORMULAÇÃO VARIACIONAL	34
5.2	RESOLUÇÃO VIA MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS	35
5.2.1	Método Livre de Rotação	36
5.2.2	Exemplo de viga biapoçada	37
5.2.2.1	<i>Resultados</i>	37
5.3	RESOLUÇÃO POR MÉTODO DESCONTÍNUO DE ELEMENTOS FINITOS	37
5.3.1	Exemplo de viga biapoçada	39
5.3.1.1	<i>Resultados</i>	39

6	CONCLUSÕES	41
	REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

A análise vibracional de estruturas é de extrema importância para que se tenha garantia que estruturas solicitadas por carregamentos dinâmicos apresentem segurança em seu uso, bem como que estas tenham adequado grau de conforto no que tange ao nível de vibração a que os usuários estarão expostos ao utilizá-las.

Além disto, muitos modelos de detecção de dano, ou seja, variação ou anomalias na capacidade de estruturas, tem sua base construtiva por meio de dados vibracionais da estrutura avaliada [5]. Estes modelos usualmente envolvem dados da estrutura em seus estados sem dano e danificado [2]. Em [9] uma classificação dos níveis de avaliação de dano é definida:

- Nível 1: determina se existe dano na estrutura;
- Nível 2: determina a localização do dano;
- Nível 3: quantifica a intensidade do dano;
- Nível 4: prevê o restante da vida útil da estrutura.

Dado a dificuldade deste complexo problema de análise vibracional, os resultados mais efetivos são os obtidos pela modelagem do nível 1, onde os procedimentos buscam indicar se houve alguma mudança significativa na estrutura indicando mudança na condições de uso da mesma.

Nas tentativas de modelagem do nível 2 e do nível 3, usualmente busca-se um modelo que visa identificar mudanças vibracionais da estrutura em seu estado saudável, ou seja, sem dano e em um possível estado danificado. Geralmente, o dano é caracterizado por uma perda na rigidez de uma parte ou partes da estrutura original. Esta perda reflete diretamente nos dados vibracionais da estrutura danificada, servindo de base para a construção de um possível modelo de detecção de danos [2, 3]. O modelo analítico das estruturas em seus estados é geralmente simulado por meio de estratégias numéricas de discretização como o método dos elementos finitos (MEF) [10]. No caso da estrutura danificada, simula-se o dano em cada elemento por meio da introdução de uma variável por elemento, indicando se este foi danificado e, caso tenha sido, qual o nível de perda em sua rigidez. Manipulações algébricas dos modelos saudável e danificado geram equações que devem ser obedecidas quando são confrontadas com os dados vibracionais, obtidos experimentalmente, de estruturas sãs e danificadas. Estas equações servem de base para procedimentos de otimização que visam obter os parâmetros de perda de rigidez de cada elemento da estrutura [2]. Este complexo problema inverso torna-se mais difícil devido ao dispersão dos parâmetros de danificação na matriz de rigidez decorrente do processo de montagem (*assembly* da matriz de rigidez global).

Deve-se destacar que existem outros modelos de detecção de dano que utilizam dados distintos dos vibracionais como, por exemplo, deslocamento ou aceleração da peça estrutural monitorada. Porém, para a obtenção dos níveis 2 e 3 de detecção, as frequências naturais e/ou os modos de vibração apresentam uma maior efetividade.

Desta forma, este trabalho concentra-se na etapa de obtenção numérica dos dados vibracionais em estruturas reticuladas, usualmente consideradas na modelagem de estruturas monitoradas, visando avaliação de processos de danificação. Deve-se destacar que esta é uma parte essencial para que se tenha sucesso na construção de um modelo de detecção de dano.

1.1 MOTIVAÇÃO

Em problemas inversos de detecção e quantificação de dano, a dispersão dos parâmetros de danificação dos elementos na montagem da matriz de rigidez traz um alto nível de complexidade no processo de otimização do problema inverso gerado. Esta complexidade soma-se às dificuldades relativas ao ruído inerente dos dados aquisitados para inserção no modelo. Assim, geralmente só se consegue resultados efetivos em estruturas de dimensões moderadas, ou seja, discretizadas numericamente por poucos elementos.

Aumentar o nível de desacoplamento entre os elementos pode permitir que a otimização do problema inverso seja mais simples na busca dos parâmetros de danificação, visto que cada elemento terá maior representatividade e aderência em relação ao seu parâmetro específico. Desta forma, métodos numéricos que resolvam o problema de autovalor associado por processos desacoplados ou com maior grau de descontinuidade podem apresentar grande potencial para desenvolvimento de modelos de detecção de dano [6].

Na literatura não é comum métodos descontínuos para o problema de autovalor. Assim, modelos que consigam efetividade no desacoplamento dos elementos na resolução do problema de autovalor, podem abrir uma nova direção na construção de procedimentos para detecção de dano estrutural, viabilizando, também, um desacoplamento na busca do parâmetro de danificação do problema inverso do modelo.

Além disto, modelos de elementos finitos descontínuos para o problema de autovalor, carecem de esforços em seu desenvolvimento teórico e computacional para que seu entendimento e desempenho possam ser verificados, indicando qual o nível potencial para seu uso prático.

Outra motivação para o uso de elementos finitos descontínuos no cálculo de autovalores está diretamente associada ao custo computacional. O uso de um modelo padrão de elementos finitos, construído com polinômios de interpolação de grau elevado apenas para a construção de matrizes de dimensões menores, pode ser um significativo ganho

econômico no processo de resolução, em termos computacionais. Porém, a utilização de polinômios de baixo grau nos maiores sistemas podem não apresentar precisão suficiente para o problema em questão. A combinação deste modelo de baixa ordem com um modelo descontínuo construído com polinômios de alta ordem apresentam potencial para obtenção de soluções de bom nível de precisão com um melhor custo computacional.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e validação de modelos descontínuos baseados em elementos finitos visando a resolução do problema de autovalor em estruturas de barras.

Para que o objetivo seja alcançado, etapas são necessárias, a saber:

- Desenvolvimento de um modelo descontínuo para estrutura com carregamento axial. Este problema é importante por ser de alta simplicidade servindo, assim, como referência para o ajuste e teste do modelo, principalmente em relação à sua variável global, representada pelo autovalor;
- Desenvolvimento de um modelo descontínuo para estruturas de vigas. Neste caso, tem-se um desafio mais complexo pois tem-se dois graus de liberdade a serem considerados por cada nó dos elementos.

No caso do elemento de viga, será adotado um caminho que vem de encontro a um processo de simplificação do modelo descontínuo e, ao mesmo tempo, apresenta um maior potencial para um futuro desenvolvimento de modelo de detecção de dano estrutural. Trata-se do modelo de viga livre de rotação (FRB) [11] (do inglês, *Free Rotation Beam*). Esta viga é modelada somente com os graus de translação da peça estrutural, sendo os graus de rotação suprimidos.

Este modelo é interessante para o método descontínuo por apresentar somente uma variável por nó nos elementos da malha, facilitando, assim, o desacoplamento dos elementos. Em relação a sua possível aplicação em um modelo de detecção de dano, seu uso é interessante porque, na prática, os sensores de monitoramento da estrutura só capturam os graus de deslocamento linear, não sendo possível a aquisição de graus de rotação. Desta forma, a FRB se ajusta melhor na modelagem do problema de autovalor em relação aos dados obtidos experimentalmente. Porém, desafios adicionais se apresentam, principalmente devido a este modelo de elemento necessitar de pontos de interpolação externos ao elemento, visando promover uma sobreposição necessária para o funcionamento dos mesmos [12].

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O restante do trabalho é desenvolvido de acordo com a sequência aqui esclarecida. No capítulo 2 apresenta-se o desenvolvimento e o equacionamento básico dos problemas de vibração e autovalores generalizados aplicados a estruturas. A seguir, no capítulo 4, o modelo de barra com carregamento axial é descrito assim como sua formulação fraca e discretização via elementos finitos, que geram o sistema de autovalor associado. Neste mesmo capítulo, um modelo de elementos finitos descontínuos para este modelo de estrutura é desenvolvido, testado e avaliado. No capítulo 5, é apresentado o desenvolvimento e equacionamento da FRB, assim como sua formulação fraca e discretização via elementos finitos. Da mesma forma, neste mesmo capítulo, um modelo descontínuo para este elemento é desenvolvido e avaliado em relação ao seu potencial. Finalizando, o capítulo 6 apresenta algumas considerações e conclusões a respeito dos desenvolvimentos bem como possíveis continuações e aprimoramentos do trabalho.

2 VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS

O problema de vibração livre consiste em um ponto ou um sistema de pontos que oscilam de forma periódica em torno de uma posição de equilíbrio [8]. Para um sistema com um único ponto que pode deslocar-se em apenas uma direção, ou seja, com apenas um grau de liberdade, a equação que rege o seu movimento é dada por (2.1), onde m é a massa do sistema, c é o coeficiente de amortecimento do sistema, k é a constante de elasticidade associada ao movimento e $f(t)$ é a força de excitação atuante no corpo ao longo do tempo.

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} + kx = f(t) \quad (2.1)$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0 \quad (2.2)$$

O movimento de vibração livre caracteriza-se pela ausência de amortecimento ou força de excitação ou atuantes em um corpo durante seu movimento oscilatório. Ou seja, quando $f(t) = 0$ e $c = 0$, o sistema acima descrito está em vibração livre (2.2). Uma solução particular da equação diferencial (2.2), formulada a partir das condições de equilíbrio dinâmico, descreve o deslocamento $x(t)$ deste ponto em relação ao seu equilíbrio, ao decorrer do tempo t , onde ω é a sua frequência da oscilação e X a amplitude máxima do movimento [1, 8].

$$x(t) = X \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

Ao analisar uma estrutura de forma realista, como um componente material contínuo, tornam-se inviáveis os procedimentos analíticos para o estudo do comportamento dinâmico de estruturas mais complexas. Os métodos mais usuais de estudo destes comportamentos são baseados na discretização das formas contínuas em finitos pontos que podem ser analisados com as equações de movimento oscilatório anteriormente descritas. Esse conjunto de pontos constituem um sistema com múltiplos graus de liberdade.

Posteriormente serão descritos os procedimentos para a discretização do problema com Métodos de Elementos Finitos de forma que o conjunto de pontos cujo comportamento unitário é descrito por (2.2) componha o sistema de equações (2.4), em função das matrizes de rigidez e massa [8, 1].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} é aquela que descreve as forças atuantes entre os pontos da discretização devido aos seus deslocamentos relativos, relação proporcional à rigidez do material. Enquanto que a de massa \mathbf{M} descreve as forças atuantes entre esses pontos devido às suas acelerações, relação proporcional à massa do material.

O sistema (2.4) de n equações diferenciais, construído a partir do uso de n graus de liberdade para a discretização, é capaz de descrever a mesma quantidade de modos de vibração, ou seja, n formas diferentes de vibrar. Este sistema possui como solução geral para o modo de vibração \mathbf{u}_j associado a uma frequência ω_j , dado por (2.5), em função de constantes de integração \mathbf{A}_j e \mathbf{B}_j do processo diferencial, onde $1 \leq j \leq n$. O modo naturais de vibração j , ou seja, a forma como os pontos da estrutura se deslocam durante o comportamento de vibração livre, é descrito por Ψ_j .

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbf{A}_j \cos(\omega_j t) + \mathbf{B}_j i \sin(\omega_j t)) \Psi_j \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(t) = -\omega_j^2 (\mathbf{A}_j \cos(\omega_j t) + \mathbf{B}_j i \sin(\omega_j t)) \Psi_j = -\omega_j^2 \mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

A segunda derivada temporal de $\mathbf{u}(t)$, (2.6), substituída em (2.4) resulta em (2.7).

$$-\omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \Psi_j = \mathbf{0}$$

O sistema obtido em (2.7) constitui um problema de autovalores generalizados o qual consiste em, tomando-se $\lambda_j = \omega_j^2$, encontrar um par (λ_j, Ψ_j) de forma que se satisfaça a equação (2.8).

$$\mathbf{K} \Psi_j = \lambda_j \mathbf{M} \Psi_j \quad (2.8)$$

3 MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

Métodos de elementos finitos são técnicas numéricas para a resolução de equações diferenciais estacionárias. Estas consistem principalmente na discretização do domínio físico do problema em diversos subdomínios (elementos) sobre os quais são obtidas aproximações para a solução do problema [10].

Na Figura 1 é mostrado o exemplo de uma discretização de um domínio unidimensional Ω em quatro subdomínios Ω_{e_1} a Ω_{e_4} . Nesta Figura, é representada a solução u do problema em questão.

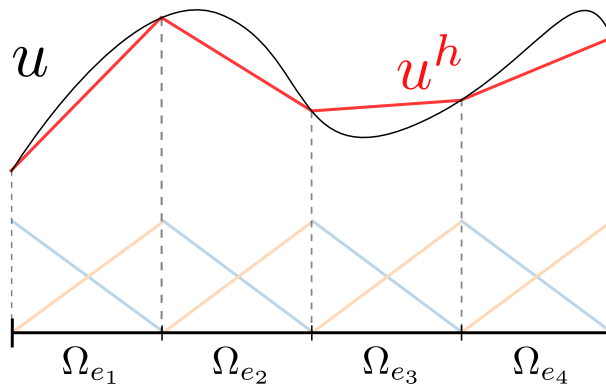


Figura 1 – Exemplo de discretização de um domínio unidimensional $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_{e_i}$, onde u é a solução analítica do problema e u_h é a solução aproximada por um método de elementos finitos.

A aproximação de u , denotada por u_h , é obtida a partir da combinação linear de funções de uma base definida em cada subdomínio Ω_{e_i} . Frequentemente são adotadas funções polinomiais, mais especificamente, bases de Lagrange. No exemplo da Figura 1 são mostradas, em azul e laranja, bases do espaço de polinômios lineares.

Os polinômios de uma base de Lagrange de ordem p são obtidos a partir de $p + 1$ pontos de referência do domínio ($x_i, i \in [1, p + 1]$). A base é constituída por $p + 1$ polinômios $\phi_i^p(x)$ definidos por (3.1).

$$\phi_i^p(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \begin{array}{l} x_a \neq x_b \Leftrightarrow a \neq b \\ 1 \leq i, j \leq p + 1 \end{array} \quad (3.1)$$

As Figuras 2 a 4 ilustram as funções de Lagrange para algumas ordens de polinômios. Cabe observar que $\phi_i^p(x_j)$ é unitário se $i = j$ e nulo se $i \neq j$. Bases de ordens mais altas apresentam maior capacidade de aproximar a solução, possibilitando a melhoria das aproximações pelo que se denomina refinamento p .

A partir destas discretizações é possível aproximar a solução u por uma combinação

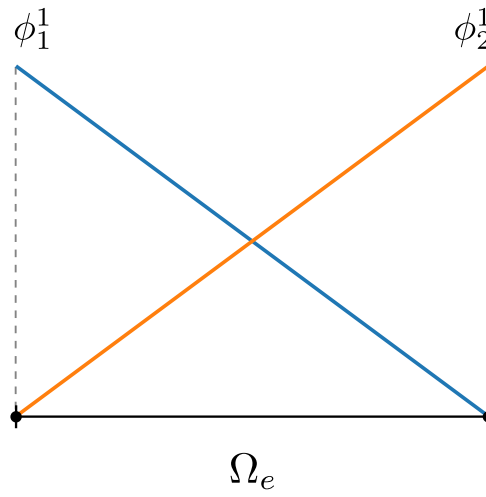


Figura 2 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 1$.

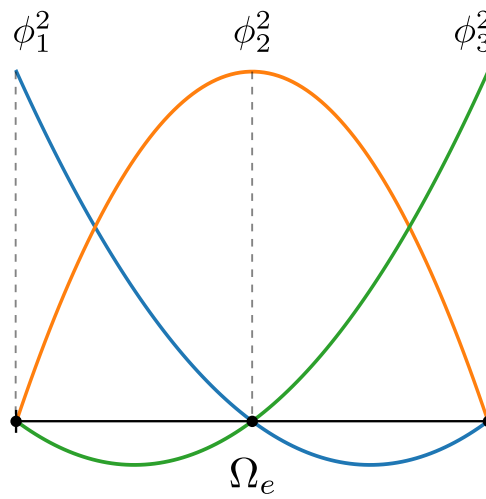


Figura 3 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 2$.

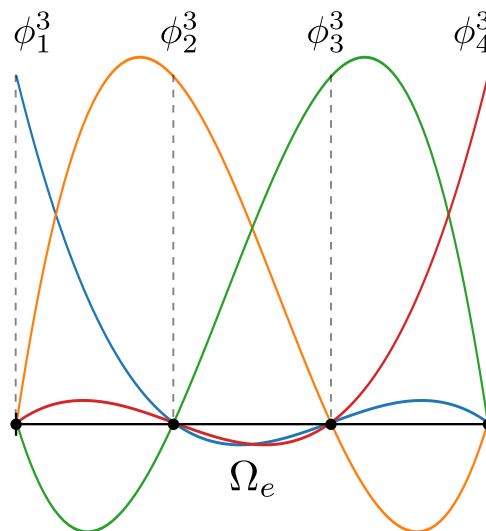


Figura 4 – Polinômios de Lagrange de ordem $p = 3$.

linear de uma base de Lagrange com coeficientes, obtendo-se u_h :

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^{p+1} \psi_i \phi_i^p(x), \quad \psi_i \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Os métodos de elementos finitos são obtidos a partir da adoção de uma formulação fraca para a equação diferencial do problema e da discretização da variável de interesse e sua função de ponderação em cada elemento do domínio. Comumente os modelos recaem em resolução e sistemas de equações. Na formulação apresentada para o problema deste trabalho, obtém-se um equação de autovalores generalizados (Seção 4.2).

4 ELEMENTO DE BARRA

Uma estrutura de barra é aquela em que apenas considera-se esforços e deslocamentos em uma direção, em seu eixo principal. Uma representação de estrutura de barra é dada na figura 5.

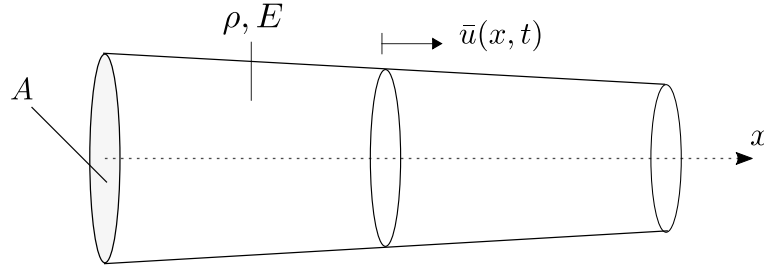


Figura 5 – Elemento de barra com deformação axial \bar{u} .

Para esse modelo estrutural, assumindo-se um material elástico linear, a equação (4.1) descreve o comportamento da deformação axial unidimensional \bar{u} da posição x ao longo do tempo t , onde ρ é a massa específica do material, A é a área da seção transversal da barra e E é o módulo de elasticidade do material [1].

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.1)$$

O problema de vibração livre axial em um elemento de barra consiste em observar as oscilações desta estrutura de barra em apenas uma direção, conforme o modelo representado pela figura 5

4.1 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

O desenvolvimento da formulação variacional desse problema, implica na inserção de uma função de ponderação $v(x)$ que independe do tempo. Em seguida, integra-se a equação sobre um domínio $[0, L]$, onde L é o comprimento da barra, e o segundo termo é desenvolvido com integração por partes.

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) v = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) v \, dx = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx + \int_0^L EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} v \right) \Big|_0^L = 0 \quad (4.4)$$

Sendo $v(x)$ função do espaço das variações de \bar{u} , para o uso de condições de contorno de Dirichlet, $v(0) = v(L) = 0$ e, com isso, o último termo da equação 4.4 anula-se.

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx + \int_0^L EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = 0 \quad (4.5)$$

O problema de vibração livre possui a solução analítica para o deslocamento \bar{u} a equação (4.6) [1], dependendo portanto do tempo t , da frequência natural ω_j e do modo de vibração $u_j(x)$ associado a ω_j . Ao substituir esta solução na equação (4.5) obtém-se a (4.8).

$$\bar{u}(x, t) = e^{i\omega_j t} u_j(x), \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.6)$$

$$\int_0^L \rho A \left(-\omega_j^2 e^{i\omega_j t} u_j \right) v \, dx + \int_0^L EA \left(e^{i\omega_j t} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = 0 \quad (4.7)$$

$$-\omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx + \int_0^L EA \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_0^L EA \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx \quad (4.9)$$

Reescrevendo a formulação (4.9) em função das formas bilineares $B(u_j, v)$ e $C(u_j, v)$. A equação resultante (4.10) constitui um problema de autovalores, onde o autovalor é dado por $\lambda_j = \omega_j^2$.

$$B(u_j, v) = \lambda_j C(u_j, v), \text{ onde } \begin{cases} B(u_j, v) = \int_0^L EA \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ C(u_j, v) = \omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx \\ \lambda_j = \omega_j^2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Assim sendo, o problema fraco pode ser sintetizado em encontrar u_j tal que:

$$B(u_j, v) = \lambda_j C(u_j, v), \quad v \in \mathcal{V} \quad (4.11)$$

4.2 RESOLUÇÃO POR MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A resolução da formulação fraca por método de elementos finitos se dá a partir da discretização do domínio do problema em subdomínios de tamanho h , que conterão soluções locais para o problema [10]. Pelo método implementado neste trabalho, u_j e v serão aproximados em cada um desses elementos pela combinação linear dos polinômios

interpoladores de Lagrange de grau p , ϕ_i^p , de coeficientes ψ_{ij} , em pontos x_k da malha interiores ao elemento. A formação destes polinômios é definida por (3.1) e as aproximações da solução em um elemento serão descritas por (4.12).

$$u_j(x) \approx u_j^h(x) = \sum_{i=1}^{p+1} \phi_i^p(x) \psi_{ij}, \quad \psi_{ij} \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

$$v(x) \approx v^h(x) = \phi_j^p(x)$$

Substituindo as aproximações presentes (4.12) na formulação (4.10), obtém-se um sistema de $n = p + 1$ equações definidas no domínio de cada elemento. A sobreposição destas equações permite a construção de um sistema que envolva os coeficientes das funções de base de todos os elementos em Ψ , como é posto matricialmente em (4.14).

$$\sum_{i=1}^{p+1} \left(\int_0^h EA \frac{\partial \phi_i^p}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^p}{\partial x} dx \right) \psi_{ij} = \lambda_j \sum_{i=1}^{p+1} \left(\int_0^h \rho A \phi_i^p \phi_j^p dx \right) \psi_{ij} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}\Psi = \Lambda\mathbf{M}\Psi \quad (4.14)$$

Acima são obtidas as matrizes de rigidez \mathbf{K} e de massa \mathbf{M} , anteriormente descritas no capítulo 2, equação (2.4), em sua forma de problema de autovalores generalizados obtida, pelo desenvolvimento do presente processo de discretização, em conformidade com a forma geral dos problemas de vibração livre em estruturas obtida em (2.8).

O sistema matricial (4.14) é característico do problema de autovalores generalizados, e alguns algoritmos de resolução são descritos em [7]. Cada coluna j da matriz Ψ é um autovetor generalizado Ψ_j , enquanto que Λ uma matriz é diagonal, preenchida pelos autovalores generalizados $\lambda_j = \omega_j^2$. Uma vez que são utilizados os mesmos polinômios de Lagrange ϕ_i^p para a aproximar u e v , as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} são simétricas e, conseqüentemente, seus autovalores generalizados λ_i são todos positivos, o que concorda como previsto para um problema de vibração em estruturas, visto que $\lambda_j = \omega_j^2 \geq 0$.

Ao aplicar-se o métodos dos elementos finitos para a discretização do domínio do problema, o sistema (4.13) será descrito no espaço de integração de cada elemento, e (4.14) será, portanto, construído pela sobreposição dos sistemas locais de cada elemento. Sendo assim, o número de graus de liberdade n , dependerá da quantidade de elementos n_{el} e do grau da p dos polinômios de Lagrange utilizados na aproximação. Para o caso unidimensional, tem-se que $n = n_{el}p + 1$.

O sistema (4.14) com n graus de liberdade é capaz de fornecer os dados para a aproximação de n modos de vibração e suas frequências. Com isso, haverá solução apenas para os modos $1 \leq j \leq n$. Contudo os primeiros modos são os que primeiro convergem ao

aumentar o número de graus de liberdade do sistema, enquanto que os últimos possuem a pior aproximação.

4.2.1 Exemplo de barra fixa-livre simples

Considerando o exemplo de uma barra fixa-livre, representada pela figura 6, a equação diferencial (4.1) apresenta uma condição de contorno na extremidade esquerda que restringe o deslocamento. Para este caso, em que se considera uma barra de comprimento L , módulo de elasticidade E , área da secção transversal constante A e massa específica ρ , a solução analítica para o modo de vibração $u_j(x)$ e sua respectiva frequência ω_j é dada em (4.15) [1, 8].

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

$$u_j(x) = a \operatorname{sen} \left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L} \right)$$

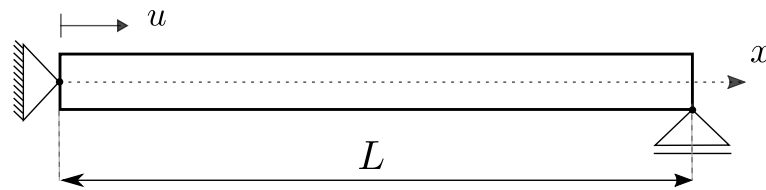


Figura 6 – Elemento de barra fixa-livre.

A definição das condições de contorno da estrutura são fundamentais para a solução da equação diferencial parcial de segunda ordem (4.1) que rege seu movimento. As condições temporais foram naturalmente acopladas ao modelo pela inserção da solução analítica do movimento oscilatório (4.6) na formulação do problema. A primeira condição de contorno espacial é definida pelo engastamento da barra na extremidade esquerda, em $x = 0$, como $u_j(0) = 0$. A segunda deve-se à condição livre da extremidade direita, em $x = L$, portanto, $\frac{\partial u_j}{\partial x}(L) = 0$. Para os testes, considerou-se os valores $L = 1.0$, $E = 1.0$, $A = 1.0$ e $\rho = 1.0$.

4.2.1.1 Resultados

As figuras 7 e 8 mostram as soluções obtidas pelo método dos elementos finitos com uma discretização em n_{el} elementos e aproximação com polinômios de Lagrange de ordem p . Nestas figuras são mostradas em pontilhado as soluções analíticas dos modos $u_j(x)$ em linhas pontilhadas de mesma cor das respectivas aproximações.

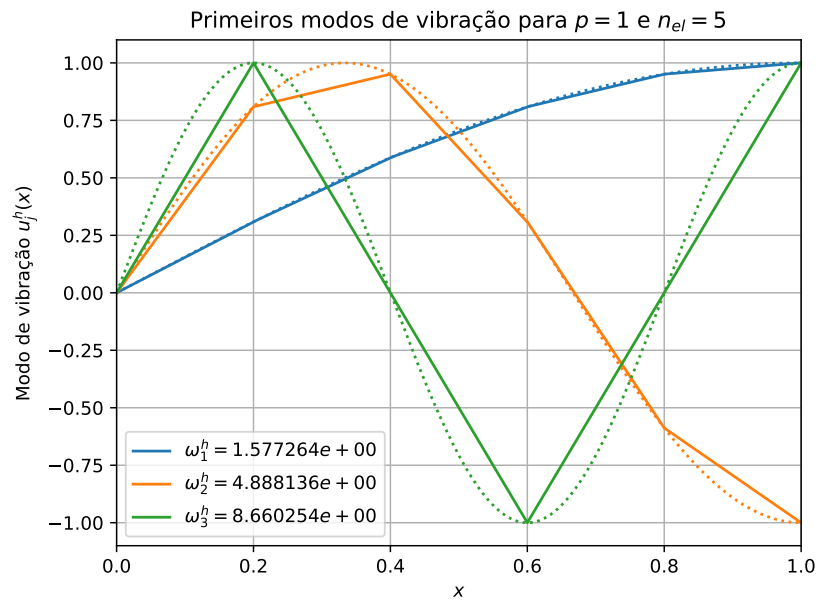


Figura 7 – Aproximação dos três primeiros modos de vibração, com $p = 1$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

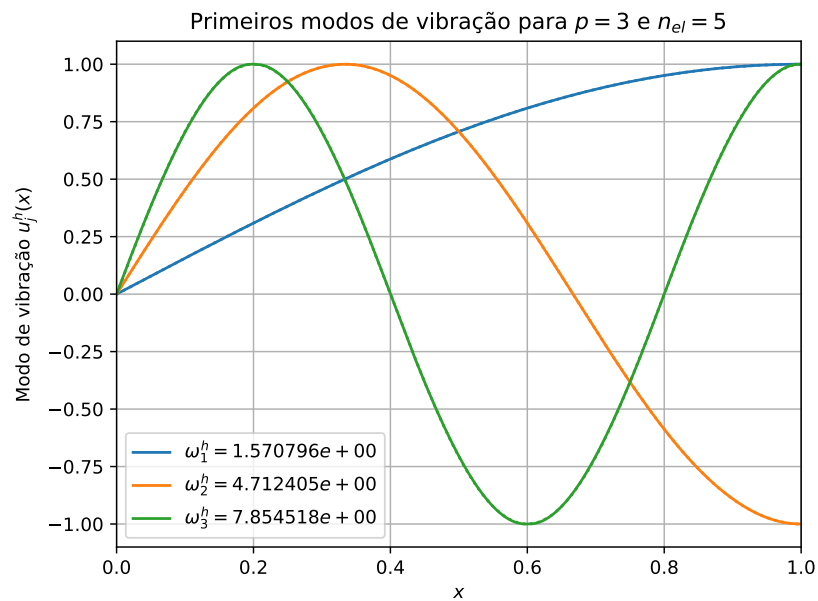


Figura 8 – Aproximação dos três primeiros modos de vibração, com $p = 3$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

4.2.1.2 Testes de convergência

Os erros nas aproximações obtidas para os modos de vibração pelo presente método foram analisados através da quantificação de sua norma \mathcal{L}^2 no domínio $[0, L]$ do problema

(4.16). Já nos erros de aproximação das frequências avaliou-se seus valores absolutos (4.17).

$$\text{erro}(u_j^h) = u_j(x) - u_j^h(x)$$

$$\|\text{erro}(u_j^h)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_0^L (u_j(x) - u_j^h(x))^2 dx \quad (4.16)$$

$$\|\text{erro}(u_j^h)\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\int_0^L (u_j(x) - u_j^h(x))^2 dx}$$

$$|\text{erro}(\omega_j^h)| = |\omega_j(x) - \omega_j^h(x)| \quad (4.17)$$

As figuras 9 a 11 descrevem o comportamento do erro na aproximação dos três primeiros modos de vibração da estrutura para diferentes valores de p e e os seguintes de n_{el} : 2, 3, 4, 6, 8, 11, 16, 22, 32. Cabe notar que na figura 11 não há resultados para um terceiro modo de vibração ($j = 3$) com $n_{el} = 2$ e $p = 1$, pois, neste caso, o sistema (4.14) apresenta apenas $n = n_{el}p = 2$ graus de liberdade. Observou-se que a convergência dos modos foi da ordem de $p + 1$, enquanto a convergência para as frequências foi de $2p$.

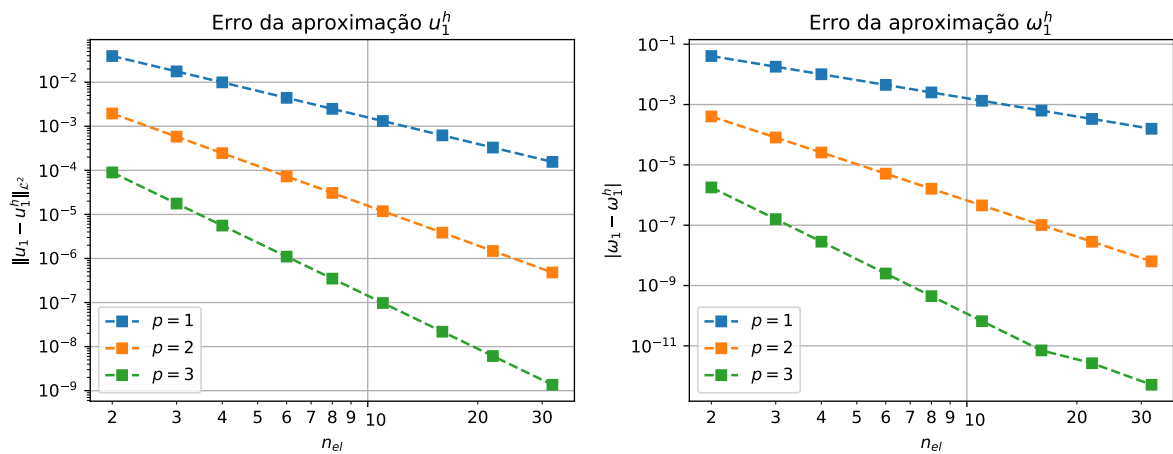


Figura 9 – Análise de erro da aproximação do primeiro modo de vibração.

4.2.2 Exemplo de barra fixa-livre com variação abrupta de seção e material

Considerando o exemplo de uma barra fixa-livre, representada pela figura 12, esta apresenta as mesmas propriedades regidas pela equação diferencial (4.1) e a mesma condição de contorno na extremidade esquerda que o exemplo da seção 4.2.1, restringindo o deslocamento. Para este caso, portanto, é considerada uma variação abrupta nas propriedades do material e da geometria da barra conforme descrito na figura, em que $L_1 = L_2$, $2E_1 = E_2$, $2A_1 = A_2$ e $8\rho_1 = \rho_2$.

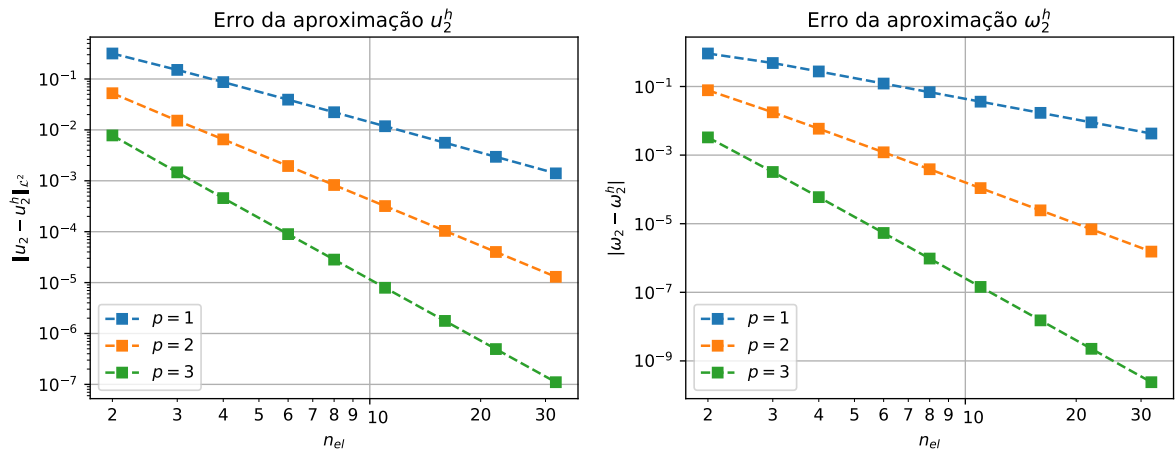


Figura 10 – Análise de erro da aproximação do segundo modo de vibração.

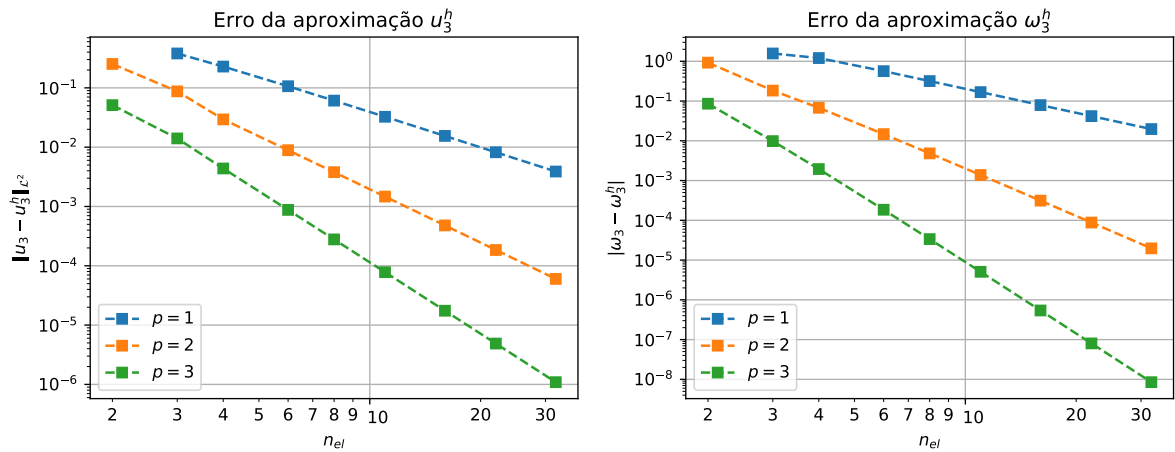


Figura 11 – Análise de erro da aproximação do terceiro modo de vibração.

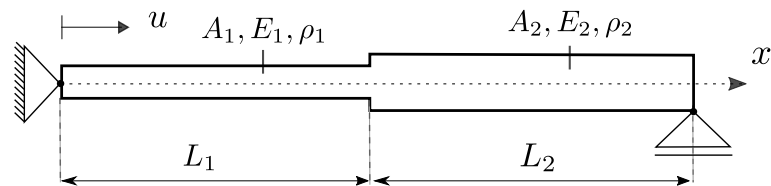


Figura 12 – Elemento de barra fixa-livre com variação abrupta de de área, módulo de elasticidade e massa específica.

A solução analítica para as frequências naturais ω_j para a estrutura da figura 12 é definida pela satisfação da equação (4.18) [1].

$$\frac{E_1 A_1 \kappa_1 \cos(\kappa_1 L_1) \cos(\alpha \kappa_1 L_2) - \alpha E_2 A_2 \kappa_1 \operatorname{sen}(\kappa_1 L_1) \operatorname{sen}(\alpha \kappa_1 L_2)}{\cos(\alpha \kappa_1 L_2)} = 0 \quad (4.18)$$

Onde κ e α são definidos por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_1 E_1}{\rho_2 E_2}} \quad (4.19)$$

$$\kappa_1 = \omega_j \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad j \in \mathbb{N}^*$$

A equação (4.18) foi resolvida por [1] para a obtenção dos 10 primeiros autovalores ω_j para uma forma adimensional do problema. Os testes aqui efetuados levaram em consideração as dimensões $L = E_1 = A_1 = \rho_1 = 1.0$. As soluções das frequências para estas dimensões estão presentes na tabela 1.

4.2.2.1 Resultados

Na figura 13 são mostrados os primeiros cinco modos de vibração para a estrutura de barra representada pela figura 12. Observa-se a boa capacidade de adaptação às bruscas variações nas características estruturais do elemento em questão. A qualidade dos resultados é expressa na tabela 1, em que se compara a solução analítica das primeiras frequências naturais às suas respectivas aproximações com $n_{el} = 10$ elementos para as ordens $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$. Observa-se ainda na tabela, a perda da qualidade das maiores frequências, característica em problemas de autovalor.

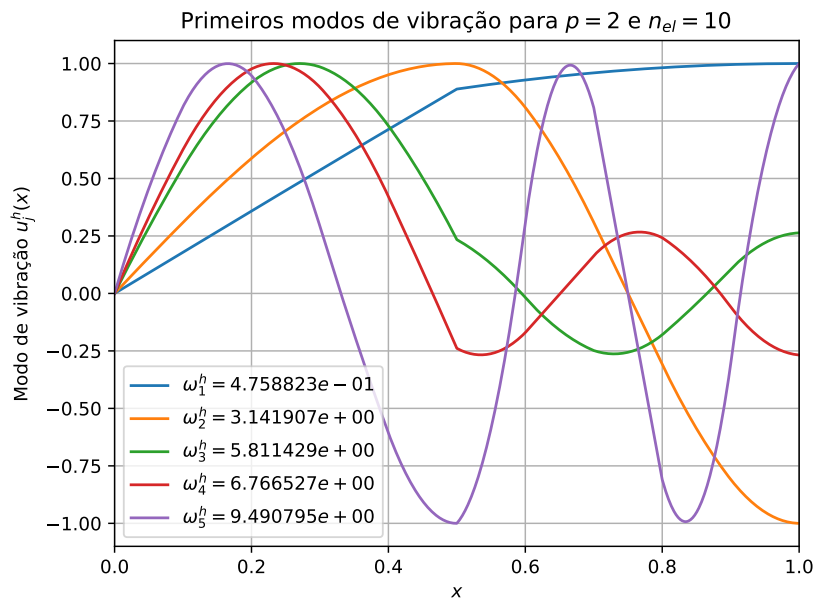


Figura 13 – Aproximação contínua dos cinco primeiros modos de vibração da barra da figura 12, com $p = 2$ e $n_{el} = 10$.

Tabela 1 – Frequência analíticas e aproximadas por MEF contínuo para a barra da figura 12.

j	Solução	Solução aproximada ω_j^h		
	analítica ω_j	$p = 3, n_{el} = 10$	$p = 2, n_{el} = 10$	$p = 1, n_{el} = 10$
1	0.4758822497	0.4758822497	0.4758822533	0.4760596108
2	3.1415926536	3.1415935445	3.1419074637	3.1910914720
3	5.8073030575	5.8073361803	5.8114292221	5.9908779990
4	6.7590675568	6.7591788447	6.7665267706	7.1258164480
5	9.4247779608	9.4265201357	9.4907947634	10.6859456897
6	12.0904883647	12.0950965880	12.2140410530	13.3012188676
7	13.0422528640	13.0521528372	13.2011567819	15.3719715044
8	15.7079632679	15.7121396228	17.1606134190	17.3205080757
9	18.3736736719	18.4558222385	18.9172147208	21.8986210286
10	19.3254381712	19.4241680478	21.0016756499	30.2926827373

4.3 RESOLUÇÃO POR MÉTODO DESCONTÍNUO DE ELEMENTOS FINITOS

Através desta abordagem, propõe-se um nível maior de desacoplamento dos elementos para a resolução dos modos de vibração. Primeiramente, resolve-se um sistema global com aproximações de ordem $p_g = 1$ exatamente como o descrito na seção 4.2. Desta forma, tem-se uma aproximação de todas as frequências naturais ω_j e dos modos de vibração nos contornos de cada elemento, pois as aproximações são lineares.

Feito isso, propõe-se refinar a qualidade da solução local dos modos reconstruindo o mesmo sistema (4.13), porém agora para aproximações de grau $p_l > p_g$. Tem-se agora o mesmo problema de autovalores generalizados (4.14) para cada elemento local. Contudo, conhecendo-se as frequências de vibração ω_j da estrutura, a matriz local $\mathbf{\Lambda}$ torna-se conhecida e o sistema pode ser reescrito como (4.20).

$$(\mathbf{K} - \mathbf{\Lambda M}) \mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Com a equação (4.20) a formulação não constitui mais um problema de autovalores generalizados, mas um simples problema de resolução de sistemas lineares. Considerando que o sistema acima é homogêneo, este precisa ter condições de contorno incorporadas para que seja não trivialmente determinado. Estas condições são os valores dos deslocamentos de cada modo de vibração no contorno de cada elemento, obtidos a partir da solução das aproximações globais de ordem linear. Substitui-se então e isola os valores conhecidos de $\mathbf{\Psi}$ no sistema de forma que este não seja mais homogêneo e portando indeterminado.

4.3.1 Exemplo de barra fixa-livre simples

Nesta seção é trabalhado o mesmo exemplo da barra fixa-livre simples tratado na seção 4.2.1, representado pela figura 6. Em seguida, descrevem-se os resultados obtidos com a aproximação descontínua, testes de convergência.

4.3.1.1 Resultados

Devido à abordagem descontínua, os resultado para os modos de vibração gera aproximações de ordem $p \geq 1$ altamente dependentes da qualidade da solução das frequências. E, como as primeiras frequências são as que mais rápido convergem para a solução, os primeiros modos são os que terão melhor aproximação também. Isto é observado na figura 14, na qual torna-se visível a perda na qualidade da aproximação $u_j^h(x)$ em relação à solução do método contínuo mostrado na figura 8. Contudo, em compensação, o sistema de maior dimensão resolvido é o global para a solução das frequências. Na seção 4.3.3 são demonstradas as questões relacionadas ao desempenho computacional dos métodos contínuo e descontínuo.

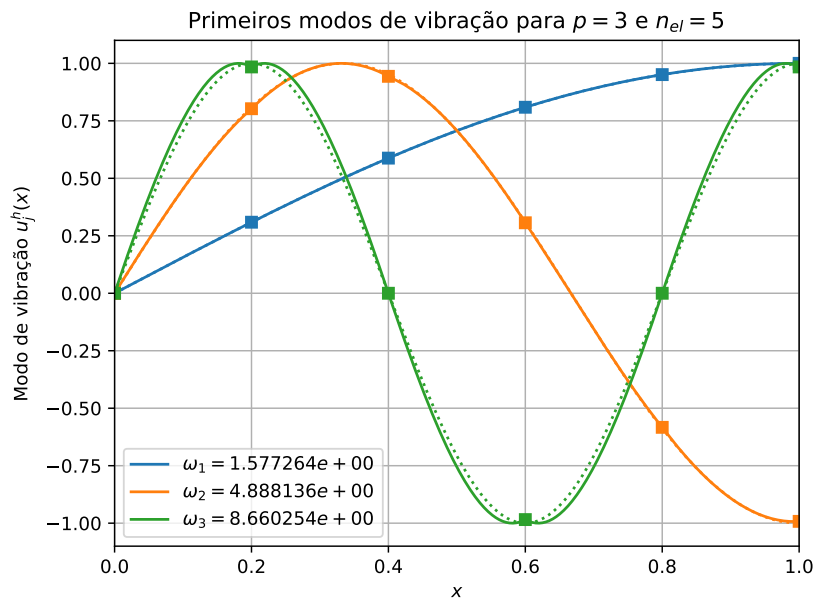


Figura 14 – Aproximação descontínua dos três primeiros modos de vibração, com $p = 3$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

As figuras 15 a 17 mostram os erros obtidos com as aproximações de ordem p para diferentes valores de n_{el} . Os erros nas aproximações foram analisados conforme descrito anteriormente em (4.16) e (4.17) para os seguintes valores de n_{el} : 2, 3, 4, 6, 8, 11, 16, 22, 32. Observa-se que para este método as taxas de convergência conservam-se como de ordem $p + 1$ para os modos. Como as frequências ω_j^h são avaliadas apenas na resolução do sistema global com aproximações lineares, estas sempre apresentam convergência de ordem $2p = 2$.

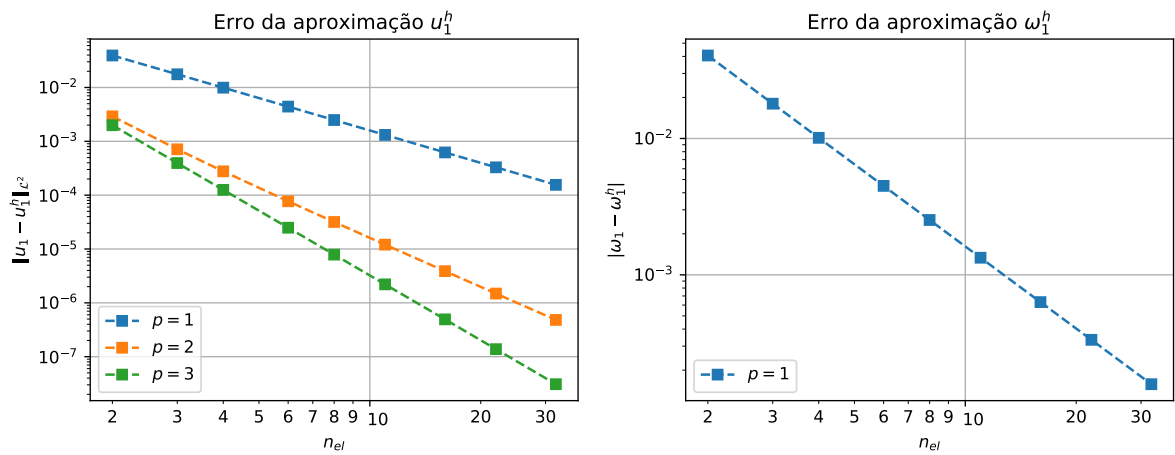


Figura 15 – Análise de erro da aproximação descontínua do primeiro modo de vibração.

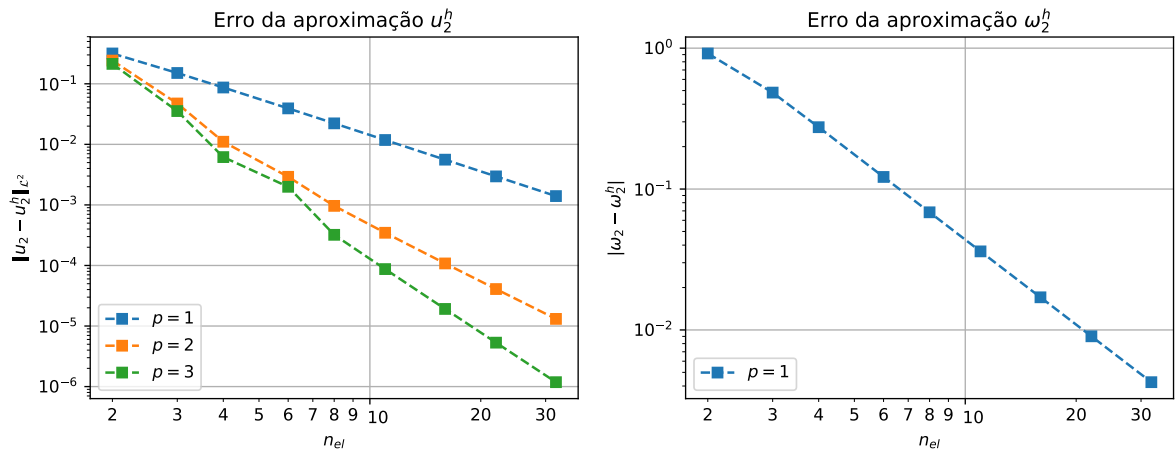


Figura 16 – Análise de erro da aproximação descontínua do segundo modo de vibração.

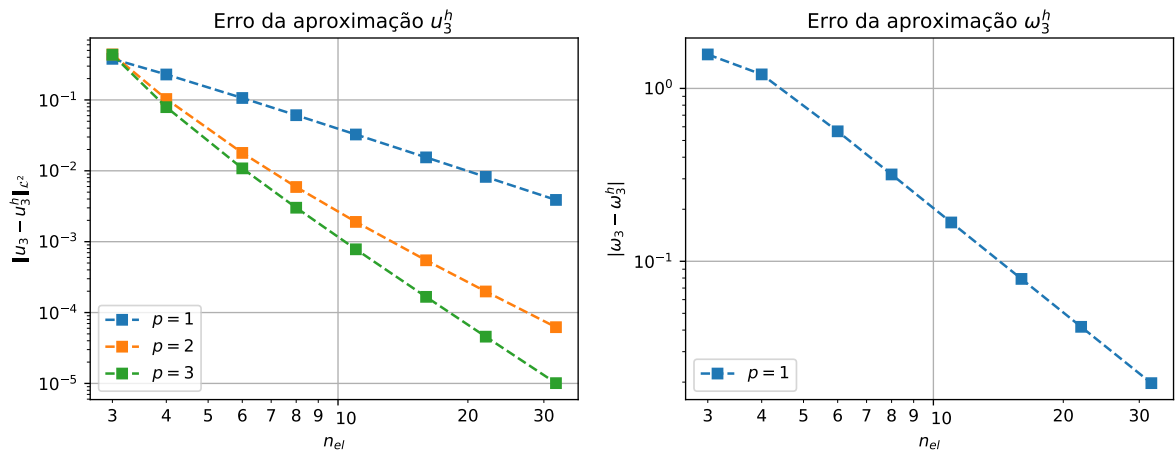


Figura 17 – Análise de erro da aproximação descontínua do terceiro modo de vibração.

4.3.2 Exemplo de barra fixa-livre com variação abrupta de seção e material

Nesta seção é trabalhado o mesmo exemplo da barra fixa-livre com mudança abrupta das propriedades E , A e ρ , tratado na seção 4.2.2, representado pela figura 12. Em seguida, descrevem-se os resultados obtidos com a aproximação descontínua.

4.3.2.1 Resultados

Na figura 18 são mostrados os primeiros cinco modos de vibração para a estrutura de barra representada pela figura 12. Observa-se também um boa capacidade, por parte do método descontínuo, de adaptação às bruscas variações nas características estruturais do elemento em questão, quando comparado à qualidade de sua solução para o exemplo mais simples de barra. A qualidade dos resultados é expressa na tabela 2, em que se compara a solução analítica das primeiras frequências naturais às suas respectivas aproximações com $n_{el} = 10$ elementos ordem $p = 1$. Ressaltando que o método descontínuo aqui proposto encontra sempre as frequências através das aproximações globais de ordem linear.

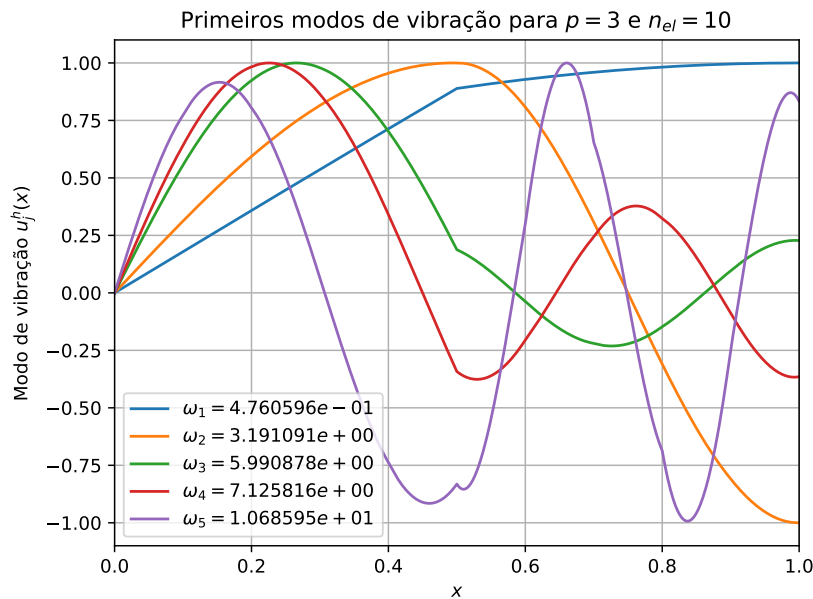


Figura 18 – Aproximação por método descontínuo dos cinco primeiros modos de vibração da barra 12, com $p = 2$ e $n_{el} = 10$.

A tabela 2 mostra a qualidade das dez primeiras frequências obtidas pelo pela presente abordagem. Nota-se que é exatamente o valor obtido na tabela 1 quando $p = 1$, devido ao fato de as frequências serem apenas calculadas globalmente com $p = 1$ no primeiro do método. Contudo, com as mesmas qualidades de frequência de aproximações lineares, a representatividade da solução dos modos foi de ordem superior.

Tabela 2 – Frequência analíticas e aproximadas por MEF descontínuo para a barra da figura 12.

j	Solução analítica ω_j	Solução aproximada ω_j^h para $n_{el} = 10$
1	0.4758822497	0.4760596108
2	3.1415926536	3.1910914720
3	5.8073030575	5.9908779990
4	6.7590675568	7.1258164480
5	9.4247779608	10.6859456897
6	12.0904883647	13.3012188676
7	13.0422528640	15.3719715044
8	15.7079632679	17.3205080757
9	18.3736736719	21.8986210286
10	19.3254381712	30.2926827373

4.3.3 Análise de complexidade

Nesta seção será avaliada a viabilidade do uso da aproximação pelo método descontínuo de elementos finitos descrito anteriormente, em termos de análise de complexidade dos algoritmos envolvidos nos métodos. As apresentações e análises dos algoritmos utilizados foram feitas por [7].

Define-se aqui as variáveis: número de elementos da discretização n_{el} , ordem dos polinômios da base para uma aproximação a nível global p_g e ordem dos polinômios da base para uma aproximação a nível local p_l . De forma auxiliar, a tabela 3 mostra o custo de cada uma das operações principais.

Operação	Complexidade
Construir sistema local $m \times m$	$\mathcal{O}(m^2)$
Sobrepor n sistemas locais $m \times m$	$\mathcal{O}(nm^2)$
Resolver sistema linear $m \times m$	$\mathcal{O}(m^3)$
Resolver o problema de autovalores generalizados para matrizes simétricas $m \times m$	$\mathcal{O}(m^3)$

Tabela 3 – Complexidade das operações [7].

O método contínuo de elementos finitos utilizado constrói localmente o sistema (4.13) de dimensão $p_g + 1$ para cada um dos n_{el} elementos, com custo $\mathcal{O}(n_{el}p_g^2)$. Em seguida, sobrepõe as matrizes de todos estes elementos em um sistema global de dimensão $n_{el}p_g + 1$, executando $\mathcal{O}(n_{el}p_g^2)$ operações. Por fim, o sistema global de dimensão $n_{el}p_g + 1$ é resolvido pelo algoritmo de autovalores generalizados para sistemas simétricos em $\mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3)$ operações.

Para o método descontínuo, também há os mesmos procedimentos descritos para o contínuo de custo $\mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3)$. Adicionalmente a isto, há ainda o refinamento das soluções locais dos modos de vibração. Para isso são construídos os mesmos sistemas (4.13) para

cada um dos n_{el} elementos, porém com de ordem $p_l > p_g$, a um custo $\mathcal{O}(n_{el}p_l^2)$. Por fim, resolvem-se n_{el} sistemas de dimensão $p_l + 1$, ao curso de $\mathcal{O}(n_{el}p_l^3)$.

Por fim, concluímos que a abordagem contínua pode ser executada com $\mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3)$ operações, enquanto que a descontínua tem custo $\mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3 + n_{el}p_l^3)$.

$$\mathcal{O}(\text{MEF Contínuo}) = \mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3) \tag{4.21}$$

$$\mathcal{O}(\text{MEF Descontínuo}) = \mathcal{O}(n_{el}^3p_g^3 + n_{el}p_l^3)$$

Observando o obtido em (4.21), pode-se notar que obter um melhor refinamento para as aproximações locais relativamente menos custoso quando há uma aproximação local. Desta forma, como foi feito na seção 4.3, pode-se considerar $p_g = 1$, de maneira a minimizar a ordem das operações realizadas a nível global, reduzindo o termo $n_{el}^3p_g^3$ a n_{el}^3 , e aumentar a quantidade de operações realizadas a nível local com $p_l > p_g$, aumentando apenas o termo $n_{el}p_l^3$ de menor complexidade.

Para obter-se uma noção quantitativa através de um exemplo, pode-se desconsiderar as constantes associadas às complexidades em (4.21). Sendo assim, ao considerar $n_{el} = 10$ e $p_{gc} = 3$, para o método contínuo, seria executado algo da ordem de $n_{el}^3p_{gc}^3 = 10^3 \cdot 3^3 = 27000$ operações. Ao considerar $n_{el} = 10$, $p_{gd} = 1$ e $p_l = 3$, para o modelo descontínuo, seria executado algo da ordem de $n_{el}^3p_{gd}^3 + n_{el}p_l^3 = 10^3 \cdot 3^1 + 10 \cdot 3^3 = 3090$ operações. Para ambos os casos exemplificados, as aproximações são de ordem $p = 3$.

Contudo, cabe observar que, em consequência da redução do número de graus do sistema de autovalores generalizados resolvido na primeira parte, a qualidade da solução das frequências ω_j^h é diretamente afetada negativamente, prejudicando a solução local refinada dos modos de vibração u_j^h . Portanto, a relação custo-benefício entre complexidade e precisão dos métodos deve ser estudada para o ideal uso de p_g e p_l .

5 ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

O modelo de viga unidimensional de Euler-Bernoulli consiste em um elemento estrutural no qual apenas há deslocamentos transversais em uma direção perpendicular a seu eixo principal, conforme indicado na figura 19.

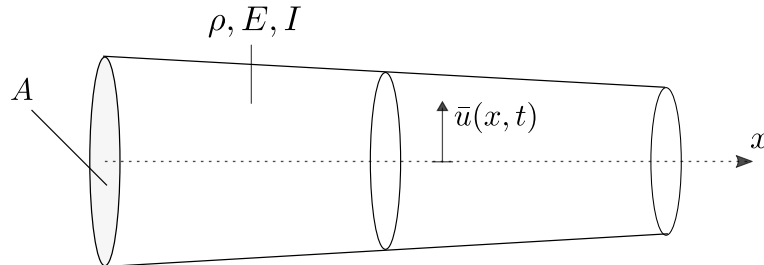


Figura 19 – Elemento de viga com deformação transversal \bar{u} .

Assumem-se aqui que a viga possui uma linha neutra, a seção transversal é plana e perpendicular ao eixo antes e depois da deformação, são desconsideradas as tensões normais à seção transversal e a inércia torcional da viga e o material é linear, elástico e homogêneo. Dadas estas hipóteses, a equação diferencial (5.1) é capaz de descrever o comportamento do deslocamento transversal \bar{u} de um ponto em x ao longo do tempo t , onde ρ é a massa específica do material, A é a área da seção transversal da barra e E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da estrutura [1, 8].

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (5.1)$$

O problema de vibração livre unidimensional em um elemento de viga consiste em observar as oscilações de deslocamento seu eixo transversal em apenas uma direção, em conformidade com o modelo representado pela figura 19.

5.1 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

O desenvolvimento da formulação variacional para este modelo de viga de extremidades livres se dá de forma muito semelhante ao descrito na seção 4.1 para o modelo de barra. Primeiramente, insere-se de uma função de ponderação $v(x)$ que independente tempo, integra-se a equação sobre o domínio $[0, L]$, onde L é o comprimento da barra, e o segundo termo é desenvolvido com integração por partes.

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) v = 0 \quad (5.2)$$

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx - \int_0^L EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) v \right) \Big|_0^L = 0 \quad (5.3)$$

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) v \right) \Big|_0^L - \left(EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (5.4)$$

Sendo $v(x)$ função do espaço das variações de \bar{u} , para o uso de condições de contorno de Dirichlet, $v(0) = v(L) = 0$, anulando o terceiro termo da equação (5.4). Uma vez que, por propriedades mecânicas, o momento fletor em extremidades livres de viga é nulo, a derivada segunda do deslocamento transversal também será, implicando na eliminação do quarto termo de (5.4).

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} v \, dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = 0 \quad (5.5)$$

Como visto em (4.6), o problema de vibração livre possui a seguinte solução analítica para o deslocamento \bar{u} ao longo do tempo t para a frequência natural ω_j associada ao modo $u_j(x)$ [1]:

$$\bar{u}(x, t) = e^{i\omega_j t} u_j(x), \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.6)$$

Substituindo esta solução na equação (4.5) obtém-se a (4.8).

$$\int_0^L \rho A \left(-\omega_j^2 e^{i\omega_j t} u_j \right) v \, dx + \int_0^L EI \left(e^{i\omega_j t} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = 0 \quad (5.7)$$

$$-\omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = 0 \quad (5.8)$$

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx \quad (5.9)$$

Escrevendo a formulação (5.9) em função das formas bilineares $B(u_j, v)$ e $C(u_j, v)$, a equação resultante (5.10) constitui um problema de autovalores, onde o autovalor é dado por $\lambda_j = \omega_j^2$.

$$B(u_j, v) = \lambda_j C(u_j, v), \text{ onde } \begin{cases} B(u_j, v) = \int_0^L EI \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx \\ C(u_j, v) = \omega_j^2 \int_0^L \rho A u_j v \, dx \\ \lambda_j = \omega_j^2 \end{cases} \quad (5.10)$$

5.2 RESOLUÇÃO VIA MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

O problema estrutural de viga, seja ele tratando questões de vibração ou deslocamento, apresenta uma formulação bastante semelhante à do problema de barra. Contudo,

a equação diferencial que rege o deslocamento transversal da viga apresenta mais complicações em relação às condições de contorno a serem tratadas a fim de assegurar a unicidade de soluções.

Em métodos de elementos finitos, uma forma tradicional de garantir o correto comportamento da solução é considerar o deslocamento angular ao longo da viga. Isso implica em resolver a viga numericamente acoplando-se as variáveis dos deslocamentos transversal e angular, com utilização de funções de base, diferentes das de Lagrange, cujo espaço por elas definido aproxime de forma mecanicamente coerente ambas as variáveis.

Contudo, propõe-se aqui a utilização de um método que resolva a equação da viga livre apenas para o deslocamento transversal u .

5.2.1 Método Livre de Rotação

Diferentemente do desenvolvido para o modelo discreto da barra na seção 4.2, no qual utilizou-se apenas a aproximação convencional por método dos elementos finitos, apresenta-se aqui um método adicional para o tratamento do modelo discreto da viga livre.

O Método de elementos livre de rotação (do inglês *Free Rotation Beam* - FRB), propõe uma simplificação da descrição cinética sobre os elementos [11, 12]. A ideia consiste em definir aos elementos as funções de base interpolarão a solução, de forma que estas extrapolem o domínio de seus elementos. A figura 20 esquematiza a relação entre o elemento FRB e os pontos de interpolação das funções de base.

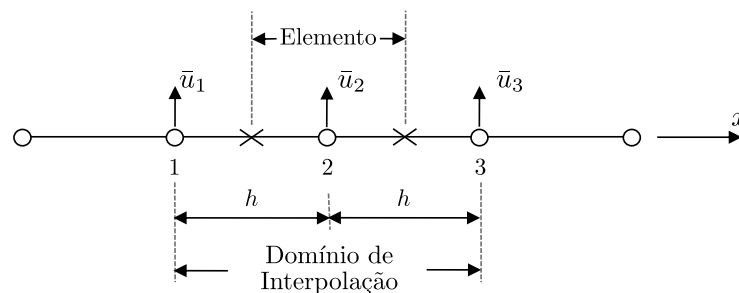


Figura 20 – Discretização de uma viga em elementos FRB [12].

Seguindo o esquema de interpolação representado na figura 20, os elementos apresentarão maior nível de acoplamento e as interpolações passarão a ter dois nós de sobre posição umas com as outras, ao contrário de apenas um nos métodos tradicionais. Para este modelo, as funções ainda podem ser aproximadas como combinação linear da base de Lagrange.

O uso de elementos FRB garante a natural imposição das condições de contorno necessárias à resolução dos elementos [12]. Contudo, uma grande limitação é que este esquema foi desenvolvido apenas para aproximações de ordem $p = 2$, ainda não havendo variações de maiores ordem para vigas.

5.2.2 Exemplo de viga biapoiada

Considerando aqui um exemplo de uma viga biapoiada, representada pela figura 21, a equação (5.1) apresenta condições de contorno em ambas as extremidades que restringem o deslocamento vertical. Para este caso, em que considerou-se uma viga de comprimento L , e as propriedades constantes de módulo de elasticidade E , área da seção transversal A e massa específica ρ , a solução analítica para o modo de vibração u_j e sua respectiva frequência ω_j é dada por (5.11) [1].

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad a \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$

$$u_j(x) = a \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$$

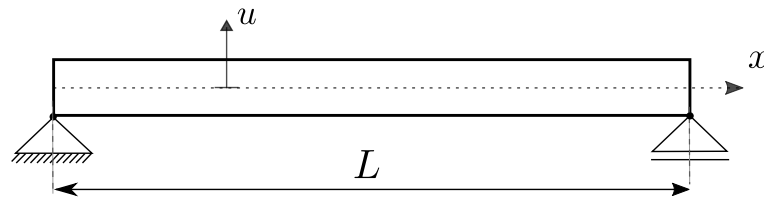


Figura 21 – Elemento de viga biapoiada.

5.2.2.1 Resultados

As figuras 22 e 23 soluções obtidas pelo método FRB com uma discretização em n_{el} elementos e aproximação com polinômios de Lagrange de ordem p . Para os testes, considerou-se os valores $L = 1.0$, $E = 1.0$, $A = 1.0$ e $\rho = 1.0$. Nestas figuras são mostradas em pontilhado as soluções analíticas dos modos $u_j(x)$ em linhas pontilhadas de mesma cor das respectivas aproximações.

A figura 24 a variação do erro na aproximação dos modos de vibração u_j^h e de suas respectivas frequências naturais, analisados de mesma forma como descrito em 4.16 e 4.17. Como descrito na seção anterior, o método FRB garante aproximações apenas para grau $p = 2$, portando estes são os erros mostrados nas figuras. Observou-se uma taxa de convergência do erro para a solução em função do refinamento da de h da ordem de $p + 1$ para u_j^h e ω_j .

5.3 RESOLUÇÃO POR MÉTODO DESCONTÍNUO DE ELEMENTOS FINITOS

Como foi citado na seção 5.2.1, o método FRB foi construído de forma a aproximar somente soluções para elementos de base quadrática. Sendo assim, o desenvolvimento de um método descontínuo para esse caso fica extremamente limitado. Para esta abordagem, não há como utilizar soluções de nível global de uma determinada ordem para construir

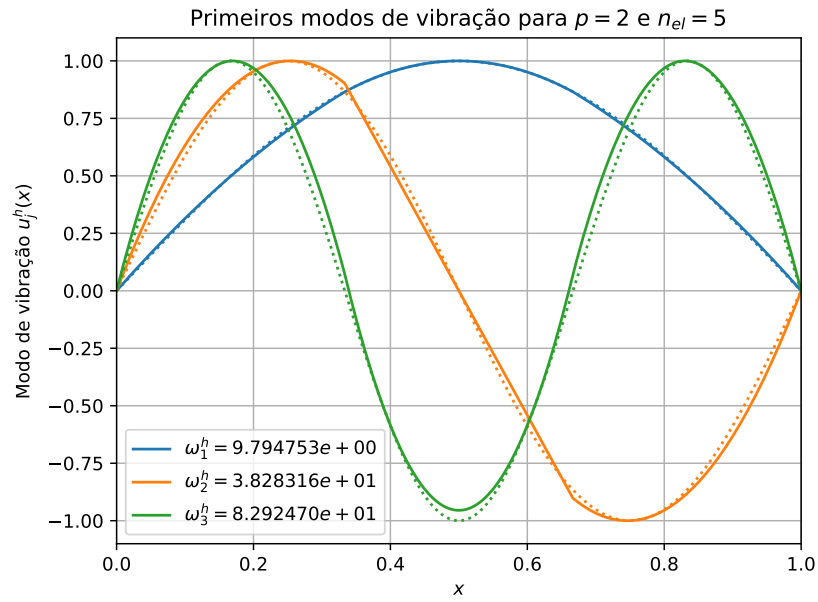


Figura 22 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 5$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

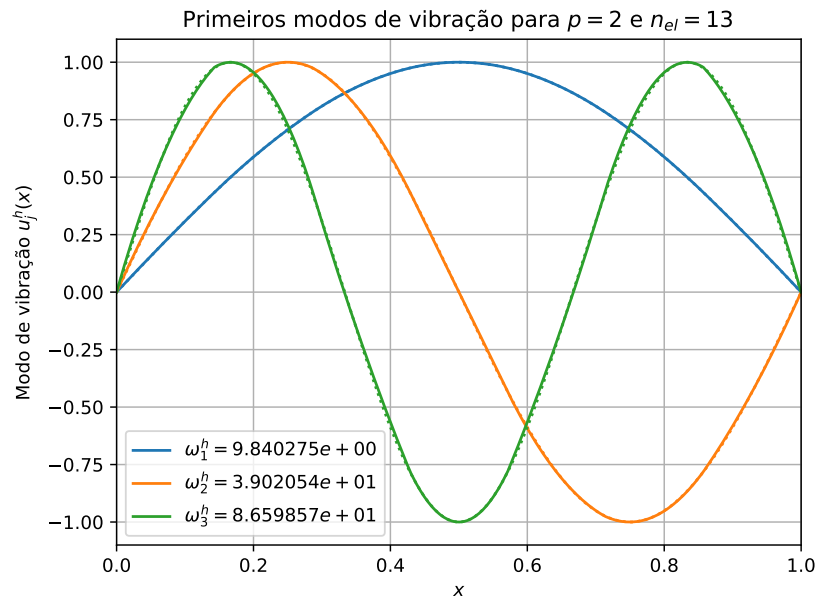


Figura 23 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 13$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

aproximações locais mais fiéis aos modos de vibração, uma vez que a aproximação mínima para viga é a limitação máxima do método.

Contudo propôs-se verificar ainda a aderência da abordagem descontínua apresentada anteriormente na seção 4.3. Dessa forma, a elaboração de uma extensão desta técnica de aproximação de viga desconsiderando os deslocamentos angulares para ordens $p \geq 2$ estaria provavelmente amparada pelo método descontínuo apresentado neste trabalho.

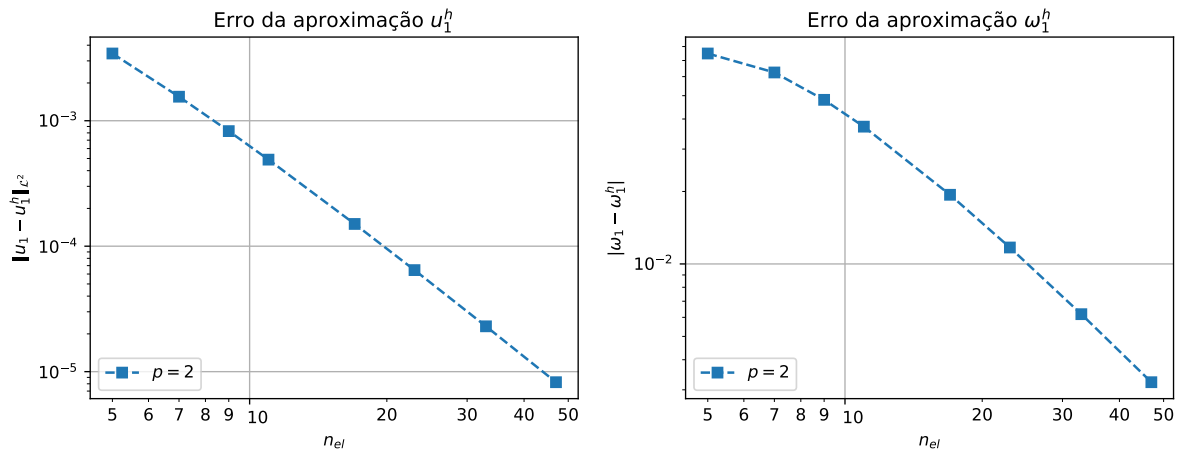


Figura 24 – Análise de erro da aproximação por FRB do primeiro modo de vibração.

Para isso, executou-se a abordagem descontínua com aproximações locais iguais de ordem p igual às globais. Desta maneira as aproximações locais não devem apresentar ganho na representação dos modos em relação às globais.

5.3.1 Exemplo de viga biapojada

Nesta seção é trabalhado o mesmo exemplo da viga biapojada simples tratado na seção 5.2.2, representado pela figura 21. Em seguida, descrevem-se os resultados obtidos com a aproximação descontínua.

5.3.1.1 Resultados

Nas figuras 25 e 26 são mostrados os resultados obtidos das para a abordagem descontínua com aproximações locais de mesma ordem que as globais. Nestas nota-se uma perda significativa na capacidade representativa das soluções de ordem $p = 2$, assemelhando-se muito ao comportamento de polinômios lineares.

A própria utilização do método descontínuo gera perdas na qualidade da solução, uma vez que acumula os erros de resolução do problema de autovalores generalizados, contudo a abordagem em questão aparenta ser bem mais sensível à qualidade da solução dos autovalores para o caso da viga. Isso pode se dar devido à características da resolução pelo método FRB ou da própria formulação da equação diferencial de maior ordem que a viga possui. Esta questão poderia ser verificado observando-se a aderência da abordagem descontínua descrita neste trabalho a um método de elementos finitos para viga que considere os deslocamentos angulares.

Observando-se que as soluções para a abordagem descontínua do método FRB apresentaram perdas em relação ao método FRB contínuo, não julgou-se necessário a execução de testes de convergência.

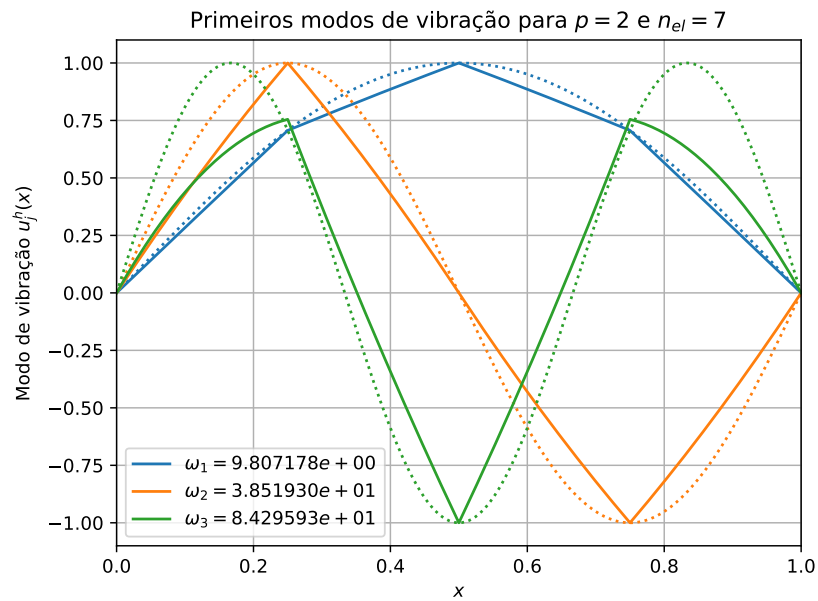


Figura 25 – Aproximação descontínua dos três primeiros modos de vibração da viga por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 7$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

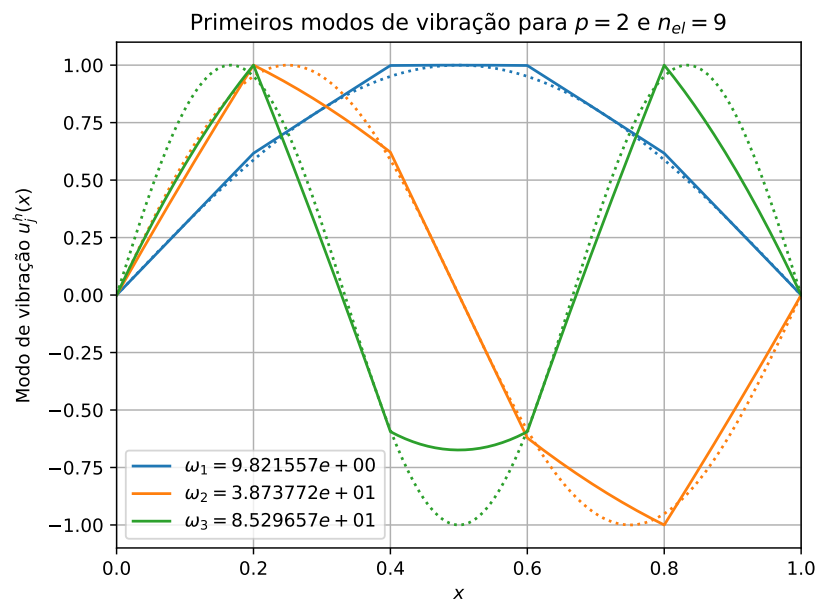


Figura 26 – Aproximação contínua dos três primeiros modos de vibração por FRB, com $p = 2$ e $n_{el} = 9$. Em pontilhado, a solução analítica em respectivas cores.

6 CONCLUSÕES

O problema de autovalor em dinâmica estrutural é de grande relevância visto que os dados vibracionais, a saber, frequências naturais e modos de vibração estão diretamente associados aos autovalores e autovetores, respectivamente. Porém, métodos de discretização de elementos finitos descontínuos não são comumente usados na resolução de problemas de autovalor.

Neste trabalho, desenvolveu-se para dois modelos de elementos reticulares específicos a construção de um modelo de discretização descontínuo. No caso do modelo de barra com carregamento axial, o método descontínuo apresentou um bom resultado, principalmente com relação ao uso de dados do problema de autovalor contínuo construídos com polinômios de baixa ordem como entrada para o modelo descontínuo. Mostrou-se potencial para refinar a solução do método contínuo de baixa ordem a um custo computacional menor. Além disto, os experimentos indicaram que o uso do autovalor obtido pelo modelo contínuo, em todos os elementos do modelo descontínuo, não gerou significativas distorções ou baixas na qualidade nos resultados.

Em se tratando do elemento de viga, optou-se por utilizar o elemento de viga livre de rotação, que considera somente o grau de translação na modelagem. Este elemento apresenta grande potencial para o uso em métodos de detecção de dano, por se ajustar adequadamente ao padrão de dados obtidos experimentalmente, necessários na construção de modelos de identificação de danos estruturais. Porém, este elemento necessita de procedimentos específicos de interpolação para que tenha funcionalidade, o que traz limitações tanto ao uso de aproximações não quadráticas de interpolação, quanto a uma adaptação ao modelo descontínuo. Experimentos mostraram que o modelo descontínuo baseado no elemento livre de rotação encontrou severas limitações. Mesmo sem a possibilidade de refinamento local, o modelo demonstrou uma dependência maior da qualidade dos autovalores e uma perda significativa na ordem da aproximação, assemelhando a aproximações quadráticas a lineares.

Desta forma, uma das questões a serem tratadas em trabalhos futuros é contornar as restrições relativas ao elemento livre de rotação. Uma forma de se conseguir êxito em tal tarefa é por meio do uso da discretização via análise estrutural isogeométrica [4]. Os modelos isogeométricos apresentam, naturalmente, sobreposição entre os elementos, condição necessária ao elemento livre de rotação, porém, sem restrições em relação ao grau do polinômio de interpolação utilizado.

Como ressaltado na introdução do trabalho, entende-se que o problema de autovalor é uma das etapas de um método de detecção de dano baseado em dados vibracionais, objetivo final a ser alcançado. Os modelos descontínuos apresentados são bastante ajustados para a construção de uma equação entre a estrutura saudável e danificada para localização

e quantificação de dano estrutural. O desacoplamento proporcionado pelo método de discretização descontínuo visa a trazer uma maior efetividade e precisão no problema de otimização inverso na busca dos parâmetros de perda de rigidez da estrutura, indicativos direto do dano elementar. Logicamente, desafios adicionais podem trazer complicações ao seu uso, como a presença de ruídos e a possível adoção dos dados vibracionais da estrutura sem dano como referência para a estrutura danificada modelada via método descontínuo. Desta forma, é importante que um modelo de detecção de dano, usando o método descontínuo proposto, seja construído e avaliado visando identificar seu real potencial.

REFERÊNCIAS

- [1] ARNDT, Marcos. O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas. 2009.
- [2] BORGES, Carlos CH; BARBOSA, Helio JC; LEMONGE, Afonso CC. A structural damage identification method based on genetic algorithm and vibrational data. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 69, n. 13, p. 2663-2686, 2007.
- [3] CURY, Alexandre A.; BORGES, Carlos CH; BARBOSA, Flávio S. A two-step technique for damage assessment using numerical and experimental vibration data. **Structural Health Monitoring**, v. 10, n. 4, p. 417-428, 2011.
- [4] COTTRELL, J. Austin; HUGHES, Thomas JR; BAZILEVS, Yuri. **Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA**. John Wiley & Sons, 2009.
- [5] DOEBLING, Scott W. et al. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review. 1996.
- [6] FORTI, Tiago Luis Duarte et al. O método de Galerkin descontínuo aplicado a problemas de convecção-difusão. 2005.
- [7] GOLUB, Gene H.; VAN LOAN, Charles F. **Matrix computations**. JHU Press, p.497-512, 2012.
- [8] RAUEN, Mateus. Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas. 2014.
- [9] RYTTER, Anders. **Vibrational based inspection of civil engineering structures**. 1993. Tese de Doutorado. Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University.
- [10] ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil et al. **The finite element method**. London: McGraw-hill, 1977.
- [11] ZHOU, Y. X.; SZE, K. Y. A geometric nonlinear rotation-free triangle and its application to drape simulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 89, n. 4, p. 509-536, 2012.
- [12] ZHOU, Y. X.; SZE, K. Y. A rotation-free beam element for beam and cable analyses. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 64, p. 79-89, 2013.