UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luca Mauad Gaio

Um estudo sobre estruturas Kähler e aproximadamente Kähler em variedades flag: respondendo à conjectura de Wolf e Gray

Juiz de Fora

2023

Luca Mauad Gaio

Um estudo sobre estruturas Kähler e aproximadamente Kähler em variedades flag: respondendo à conjectura de Wolf e Gray

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Teoria de Lie e Aplicações

Orientador: Prof. Dr. Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mauad Gaio, Luca.
Um estudo sobre estruturas Kähler e aproximadamente Kähler em variedades flag : respondendo à conjectura de Wolf e Gray / Luca Mauad Gaio. – 2023.
128 f.

Orientador: Laércio José dos Santos
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Matemática, 2023.

1. Variedade flag. 2. Estrutura de Kähler. 3. Estrutura aproximadamente Kähler. Grupo de Lie complexo. I. dos Santos, Laércio José, orient. II. Prof. Dr..

Luca Mauad Gaio

Um estudo sobre estruturas Kähler e aproximadamente Kähler em variedades flag: respondendo à conjectura de Wolf e Gray

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia.

Aprovada em 18 de julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Esther Sanabria Codesal

Universitat Politècnica de València

Juiz de Fora, 19/07/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Laercio Jose dos Santos**, **Professor(a)**, em 19/07/2023, às 19:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Esther Sanabria Codesal**, **Usuário Externo**, em 20/07/2023, às 10:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Lonardo Rabelo**, **Professor(a)**, em 20/07/2023, às 10:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1372130** e o código CRC **E54D4EBF**.

Dedico este trabalho à minha avó, Terezinha de Jesus

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha família, Mário Gaio, Tânia Mauad e Laura Mauad Gaio, pelo suporte durante o desenvolvimento desta dissertação e durante toda a minha vida.

Agradeço ao meu amigo e colega Daniel Rotmeister com quem discuti muito sobre o desenvolvimento da dissertação além de ter me acompanhado por todo o processo do mestrado.

Agradeço aos meus amigos, Luiz Scheffer, PM, Fernando Furtado, Paulo Amorim, Guima e Ruan que estavam presentes nos momentos de descanso.

Agradeço ao meu orientador Laércio José dos Santos por ter me aceitado como orientando e por ter apresentado as melhores aulas que tive durante meu aprendizado. Além disso, seu suporte foi essencial por todo o processo do mestrado, seja durante as disciplinas ministradas, seja durante a escrita da dissertação.

Agradeço aos meus colegas do mestrado, que assistiram partes desta dissertação como referatas.

Agradeço à minha namorada, Ana Carolina, pelo breve, porém importante apoio durante as fases finais do mestrado.

Agradeço à UFJF, ao ICE e ao Departamento de Matemática pela estrutura fornecida durante a graduação e o mestrado.

Agradeço à CAPES pela bolsa que recebi durante o mestrado.

Huge paws hoist the Einsteins to their feet and, in a close-up, seize their wrists. Ape-guided, those fingers, which have written equations and played the music of Johann Sebastian Bach, close on the master switches and, with a horrified reluctance, slowly press them down. - Aldous Huxley

RESUMO

Neste trabalho, estudamos condições para que uma variedade flag, possuindo estruturas invariantes, admita uma estrutura aproximadamente Kähler que não seja Kähler. Esta é uma resposta parcial à uma conjectura feita por Wolf e Gray, que foi estudada em um artigo de Luiz A. B. San Martin e Rita de Cássia de J. Silva. Além disso, criamos uma sequência de resultados que possam servir de guia de estudo para aqueles interessados em estudar a geometria de variedades flag, uma vez que a literatura é escarça em um material introdutório neste tópico.

Palavras-chave: Variedade flag. Estrutura de Kähler. Estrutura aproximadamente Kähler. Grupo de Lie complexo

ABSTRACT

In this work, we study conditions for which a flag manifold having invariant structures, admits a nearly-Kähler structure that is not Kähler. This is a partial answer to a conjecture by Wolf and Gray, that was studied in an article by Luiz A. B. San Martin and Rita de Cássia de J. Silva. Moreover, we create a sequence of results that can be utilized as a study guide to those interested in studying the geometry of flag manifolds, as the literature is scarce in introductory resources to this topic.

Keywords: Flag manifold. Kähler structure. Nearly-Kähler structure. Complex Lie group

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estaremos interessados em estudar a geometria de variedades flag, ou mais especificamente, estruturas chamadas de Kähler nessa variedade. O estudo de variedades flag é de grande interesse para a matemática. Como veremos durante o trabalho, alguns exemplos desse tipo de variedade são os espaços projetivos e as grassmannianas, que possuem uma grande variedade de aplicações, não apenas na matemática e na física, mas também em áreas como computação. Além disso, as variedades flag são um tipo de espaço homogêneo, que pode ser visto como um quociente de um grupo de Lie. Ainda veremos que, no caso em que esse grupo de Lie é complexo e semissimples, ele pode ser tomado, sem perda de generalidade, de forma a ser compacto, o que facilita sua manipulação, tendo em vista os diversos resultados já obtidos para grupos compactos. Por outro lado, o estudo de estruturas Kähler, apesar de ser interessante pelo lado matemático, possui sobretudo importância na física. Variedades como as variedades de Kähler-Einstein, Calabi-Yau e de Fano surgem no estudo da Relatividade Geral. Uma outra aplicação para uma métrica de Kähler é conhecida como a *métrica de Fubini-Study*. Ela é uma métrica introduzida no espaço projetivo que é de interesse particular para a Mecânica Quântica. Uma introdução mais matemática para essa métrica pode ser encontrada em [1] enquanto as aplicações desta métrica na física podem ser encontradas em [2]. Esta segunda referência, em particular, motiva a introdução desta métrica de forma geométrica.

Para tentar explorar este tópico mais afundo, nos basearemos no artigo intitulado "*Invariant nearly-Kähler structures*" dos autores Luiz A. B. San Martin e Rita de Cássia de J. Silva [3]. Nele, os autores buscam responder à uma conjectura feita por Wolf e Gray em [4] formulada como:

> "Seja U/H um espaço homogêneo, que não é um espaço simétrico hermitiano de um grupo de Lie compacto e conexo U atuando efetivamente tal que H tem posto máximo em U. Então, existe em U/H uma estrutura quase Hermitiana invariante aproximadamente Kähler que não é Kähler se, e somente se, a subálgebra de isotropia é o conjunto de pontos fixos de um automorfismo ϕ de ordem três."

O artigo responde a essa conjectura de forma parcial, uma vez que ela é respondida apenas no caso particular dos espaços homogêneos formados por variedades flag. Porém, esse caso cobre a maior parte dos espaços homogêneos, de forma que esta resposta é quase completa.

Apesar da grande importância no estudo desse tipo de variedade, é difícil encontrar na literatura um material introdutório neste tópico. Encontramos menções tanto em livros sobre Teoria de Lie que abordam o tema a partir as álgebra de Lie, ou em livros sobre topologia diferencial, onde o tema é abordado em termos de espaços quocientes. Portanto, não é fácil encontrar um material unificado que permita um leitor a se introduzir neste tópico. Assim, tentamos fornecer aqui uma sequência de resultados que possa auxiliar aos interessados neste assunto a se adentrar no estudo de variedades flag.

O trabalho está particionado da seguinte maneira: no Capítulo 2, introduziremos os conceitos básicos necessários para estudarmos as variedades flag. Alguns dos temas abordados serão as subálgebras e os subgrupos parabólicos, a geometria de variedades quocientes e uma caracterização de espaços homogêneos em termos de quocientes de grupos de Lie. Finalizaremos o capítulo mostrando como as variedades flag a conexão entre flags em espaços vetoriais e variedades flag. A saber, o conjunto de flags de um espaço vetorial de dimensão finita formam uma variedade flag, isso é, é um quociente de um grupo de Lie por um subgrupo parabólico. Como corolário deste exemplo, concluímos que os espaços projetivos e as grassmannianas são de fato variedades flag.

No Capítulo 3, entramos no artigo propriamente dito, apresentando os conceitos de métricas e estruturas quase complexas invariantes - fundamentais para responder à conjectura de Wolf e Gray - seguindo com a definição de estrutura quase Hermitiana. A partir dela, definimos a *forma fundamental*, ou *forma de Kähler* e terminamos distinguindo estruturas Kähler, quase-Kähler e aproximadamente Kähler.

No Capítulo 4, utilizamos os resultados obtidos no Capítulo 3 para mostrar que a estrutura quase complexa na variedade é completamente determinada por seus autovalores. Um resultado similar é encontrado para a métrica. Durante o capítulo veremos que as propriedades mais importantes da estrutura quase Hermitiana podem ser encontradas a partir de trincas de raízes. Dependendo de como estas raízes estão relacionadas entre si, os números que definem a métrica e a estrutura quase complexa mudam seu comportamento, permitindo conectar as raízes e a própria estrutura no espaço.

Finalmente, no capítulo 5, pretendemos responder à conjectura de Wolf e Gray. Para isso, introduzimos o conceito de altura de raízes com respeito a um certo conjunto de raízes simples pré-determinado. Isso nos permite encontrar uma equivalência para quando uma variedade flag admite uma estrutura aproximadamente Kähler que não é Kähler em termos destes automorfismos de ordem 3.

Finalizamos o trabalho com dois apêndices. O primeiro deles fornece uma introdução aos básicos da Teoria de Lie e o segundo descreve alguns resultados sobre a complexificação de espaços vetoriais, que são utilizados durante o trabalho.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste trabalho, estaremos interessados sobretudo no estudo de grupos e álgebras de Lie complexos. Assim, denotaremos por G um grupo de Lie complexo e por $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie correspondente, a não ser que seja explicitado antes.

2.1 Variedades quocientes

Nesta seção seguiremos sobretudo a referência [5].

2.1.1 Ações de grupos

Primeiramente, devemos nos relembrar de alguns conceitos de Teoria de Grupos.

Dado um grupo G e um conjunto X, uma **ação (à esquerda)**[1] de G em X é uma aplicação $\alpha : G \times X \to X$, denotada usualmente por $\alpha(g, x) \coloneqq g \cdot x$ ou $\alpha(g, x) \coloneqq gx$, tal que

(a) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$; e

(b) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para todos $g, h \in G$ e $x \in X$,

onde e denota o elemento neutro de G.

Ainda, considerando a notação acima, tomando $x \in X$, definimos a **órbita** de x como o conjunto

$$G \cdot x \coloneqq \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

O **grupo de isotropia** de $x \in X$, por sua vez, é definido como o conjunto

$$G_x \coloneqq \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Se para cada $x \in X$, $G_x = \{e\}$, dizemos que a ação é fiel.

Quando, para todo $x \in X$, $G \cdot x = \{e\}$, dizemos que a ação α é **livre**.

Quando a ação α possui apenas uma órbita, isso é, $X = G \cdot x$ para algum $x \in X$ (nesse caso a órbita de todos os elementos de X é a mesma) dizemos que α é **transitiva**. Equivalentemente, a ação é transitiva quando, para todos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.

Proposição 2.1. *Seja $\alpha : G \times X \to X$ uma ação de G sobre X. Nesse caso, a relação em X*

$$x \sim_\alpha y \Leftrightarrow \exists g \in G \ \text{ tal que } \ y = g \cdot x$$

[1] Neste trabalho, trataremos apenas de ações à esquerda. Portanto, para evitar sobrecarregar a nomenclatura, nos referiremos a ações à esquerda simplesmente pelo termo ação.

é de equivalência.

Demonstração: Pela definição de ação, $e \cdot x = x$ mostrando que $\sim_\alpha$ é reflexiva. Tomemos agora $x, y \in X$ tal que $x \sim_\alpha y$. Assim, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot y$. Portanto,

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x,$$

isso é, $\sim_\alpha$ é simétrica. Finalmente, dados $x, y, z \in X$ tais que $x \sim_\alpha y$ e $y \sim_\alpha z$, então, existem $g, h \in G$ tais que $y = g \cdot x$ e $z = h \cdot y$. Assim,

$$z = h \cdot y = h \cdot (g \cdot x) = (gh) \cdot x,$$

mostrando que $\sim_\alpha$ é transitiva. Logo, $\sim_\alpha$ é relação de equivalência. □

Corolário 2.2. *As classes de equivalência de $\sim_\alpha$ são as órbitas da ação α.*

Pela Proposição 2.1 temos o direito de pensar no espaço quociente $X/\sim_\alpha$ que nada mais é do que o conjunto das órbitas de α e é normalmente denotado por X/G.

Consideremos agora X um espaço topológico. Podemos definir uma ação em X como uma aplicação de um grupo G sobre o conjunto subjacente de X. Todas as definições acima ainda são válidas nesse caso. Notamos, no entanto, que nesse caso a projeção canônica $\pi : X \to X/G$ pode ser utilizada para definir uma topologia quociente em X/G. Assim, podemos considerar X/G como um espaço topológico (com a topologia quociente) que é denominado de **espaço das órbitas de** α.

Definição 2.3. *Seja G um grupo dotado de uma topologia. Quando as aplicações*

$$\begin{aligned} p : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

*são contínuas (no caso de p, consideramos a topologia produto em $G \times G$), dizemos que G é um **grupo topológico**.*

Definição 2.4. *Sejam X um espaço topológico e G um grupo topológico. Se G age sobre X por uma ação*

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

*tal que α é uma aplicação contínua (considerando-se a topologia produto em $G \times X$), então dizemos que α é uma **ação contínua** e dizemos que G age continuamente sobre X. No caso em que G é um grupo de Lie e X é uma variedade diferenciável, dizemos que a ação é **diferenciável** quando α for diferenciável. Ainda, quando X é uma variedade suave, e α é uma aplicação suave, então dizemos que a ação é suave.*

Consideremos, agora, uma variedade topológica M e um grupo topológico G. Quando G age transitivamente e continuamente sobre M, dizemos que M é um $G-$espaço.

Lema 2.5. *Seja $U \subseteq M$ e defina o conjunto*

$$g \cdot U \coloneqq \{g \cdot x \mid x \in U\}.$$

Assim, se $\pi : M \to M/G$ é a projeção canônica, então

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Demonstração: Com efeito, se $p \in \pi^{-1}(\pi(U))$, então $\pi(p) = \pi(u) = G \cdot u$, para algum $u \in U$. Assim, $p \in G \cdot u$ e, portanto, $p \in \bigcup_{g \in G} g \cdot U$. Por outro lado, se $y \in \bigcup_{g \in G} g \cdot U$, então existem $g \in G$ e $u \in U$ tais que $y = g \cdot u$. Portanto, $\pi(y) = \pi(u)$, ou, equivalentemente, $y \in \pi^{-1}(\pi(U))$. Logo,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

□

Lema 2.6. *Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Dessa forma, se a ação de G em X é contínua, então a projeção canônica $\pi : X \to X/G$ é aberta.*

Demonstração: Seja $U \subseteq X$ um aberto. Como a topologia em X/G é quociente, queremos mostrar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em X. Porém, note que pelo Lema 2.5,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g} g \cdot U.$$

Como o mapa $p \mapsto g \cdot p$ é um homeomorfismo, temos que $g \cdot U$ é aberto para todo $g \in G$. Logo, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em X e, portanto, $\pi(U)$ é aberto, por definição. □

Necessitaremos da seguinte definição, usual nos textos de topologia.

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é **própria** quando, para todo compacto $K \subseteq Y$, $f^{-1}(K)$ é compacto.*

Definição 2.8. *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade topológica e $\alpha : G \times M \to M$ uma ação contínua. Nesse caso, α é dita **própria** quando a aplicação*

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \times M \\ (g,p) &\mapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

for própria.

Observação 2.9. *Em geral, a Definição 2.8 é mais fraca do que pedir que a ação α seja própria no sentido topológico, como uma aplicação contínua. [5, p.542].*

Antes de seguir para o próximo resultado, devemos chamar atenção para o seguinte resultado de topologia.

Teorema 2.10. *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço de Hausdorff localmente compacto. Dessa forma, toda aplicação própria e contínua $f : X \to Y$ é fechada.*

Demonstração: [5, p. 611]. □

Proposição 2.11. *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade topológica e $\alpha : G \times M \times M$ é uma ação contínua e própria. Dessa forma, o espaço das órbitas M/G é Hausdorff.*

Demonstração: Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : G \times M &\to M \times M \\ (g,p) &\mapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

que é própria, pois a ação é própria por hipótese. Consideremos o conjunto

$$M \times M \supseteq \mathcal{O} := \Phi(G \times M) = \{(g \cdot p, p) \in M \times M \mid p \in M, g \in G\}.$$

Pelo Teorema 2.10, o conjunto $\mathcal{O}$ é fechado em $M \times M$. Assim, como $\pi : M \to M/G$ é aberta pelo Lema 2.6, o exercício $A.36$ em [5, p. 606] mostra que M/G é Hausdorff. □

Definição 2.12. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Dizemos que A é **relativamente compacto** quando o fecho de A é compacto.*

Proposição 2.13 (Caracterização de ações próprias). *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade topológica e α uma ação contínua de G em M. Dessa forma, são equivalentes*

(i) α é própria.

(ii) *Se* (p_i) *e* (g_i) *são sequências em* M *e* G*, respectivamente tais que* (p_i) *e* $(g_i \cdot p_i)$ *convergem, então* (g_i) *possui alguma subsequência convergente.*

(iii) *Para todo subconjunto compacto* $K \subseteq M$*, o conjunto* $G_K = \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ *é compacto.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponhamos que a aplicação $\Theta(g, p) = (g \cdot p, p)$ seja própria e tomemos sequências $(p_i) \subseteq M$ e $(g_i) \subseteq G$ tais que (p_i) e $(g_i \cdot p_i)$ são convergentes. Denotemos os limites por

$$p = \lim_i p_i \quad \text{e} \quad q = \lim_i g_i \cdot p_i$$

e sejam $U, V \subseteq M$ vizinhanças relativamente compactas de p e q, respectivamente. Assim, para i suficientemente grande temos que

$$\Theta(g_i, p_i) = (g_i \cdot p_i, p_i) \in \overline{V} \times \overline{U}.$$

Como $\overline{V} \times \overline{U}$ é compacto e Θ é própria, então $\Theta^{-1}(\overline{V} \times \overline{U})$ é compacto. Além disso, temos $(g_i, p_i) \in \Theta^{-1}(\overline{V} \times \overline{U})$ para todo i. Portanto, existe uma subsequência de (g_i, p_i) que converge em $G \times M$. Em particular, (g_i) possui uma subsequência convergente em G.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Suponhamos que a afirmação (ii) é válida e seja $K \subseteq M$ um compacto. Consideremos o conjunto

$$G_K = \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$$

como no enunciado e tomemos uma sequência $(g_i) \subseteq G_K$. Assim, por definição, para cada i existe $p_i \in (g_i \cdot K) \cap K$, ou seja, $p_i \in K$ e $g_i^{-1} \cdot p_i \in K$. Como K é compacto, temos que (p_i) e $(g_i^{-1} \cdot p_i)$ convergem, passando a subsequências se necessário. Assim, por (ii) existe uma subsequência (g_{i_k}) de (g_i) que converge. Logo, toda sequência de G_K possui uma subsequência convergente, o que mostra que G_K é compacto.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Suponhamos que (iii) é válida. Assim, tomemos um compacto $L \subseteq M \times M$ e seja $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L)$, onde $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ são as projeções na primeira e na segunda coordenadas, respectivamente. Assim, como $L \subseteq K \times K$,

$$\Theta^{-1}(L) \subseteq \Theta^{-1}(K \times K) = \{(g, p) \mid g \cdot p \in K \ \text{ e } \ p \in K\} \subseteq G_K \times K.$$

Como Θ é contínua, $\Theta^{-1}(L)$ é fechado e, como $G_K \times K$ é compacto, temos que $\Theta^{-1}(K)$ é compacto. Logo, Θ é própria. $\square$

Corolário 2.14. *Sejam* G *um grupo de Lie,* M *uma variedade topológica e* $\alpha : G \times M \to M$ *uma ação contínua. Dessa forma, se* G *for compacto, então* α *é própria.*

Demonstração: Sejam (p_i) e (g_i) são sequências satisfazendo as hipótese da afirmação (ii) da Proposição 2.13. Assim, como toda sequência (g_i) de G possui uma subsequência convergente (pois G é compacto), então a tese da afirmação (ii) é satisfeita. Logo, isso equivale a dizer que a ação é própria. □

Proposição 2.15 (Órbitas de ações próprias). *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade suave e $\alpha : G \times M \to M$ uma ação própria e suave. Dessa forma, para cada $p \in M$ o mapa orbital*

$$\begin{aligned} \alpha^{(p)} : G &\to M \\ g &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

é próprio e, consequentemente, a órbita $G \cdot p$ é fechada em M.

Demonstração: Seja $K \subseteq M$ um compacto. Assim, $(\alpha^{(p)})^{-1}(K)$ é fechado em G pela continuidade de $\alpha^{(p)}$. Agora, temos que

$$(\alpha^{(p)})^{-1}(K) \subseteq G_{K \cup \{p\}},$$

o que mostra que $(\alpha^{(p)})^{-1}(K)$ é compacto, pois $G_{K\cup\{p\}}$ é compacto, uma vez que a ação α é própria. Logo, $\alpha^{(p)}$ é uma aplicação própria e, portanto, $G \cdot p = \alpha^{(p)}(G)$ é fechado pelo Teorema 2.10. □

Corolário 2.16. *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade topológica e $\alpha : G \times M \to M$ uma ação contínua. Dessa forma, se α é própria, então cada órbita é um fechado de M e cada grupo de isotropia é fechado.*

Demonstração: As órbitas são fechadas como consequência da Proposição anterior. Agora, note que cada grupo de isotropia G_p é o próprio conjunto $G_{\{p\}} = \{g \in G \mid (g \cdot \{p\}) \cap \{p\} \neq \emptyset\}$. De fato, se $g \in G_p$, então $g \cdot p = p$ e, portanto, $g \cdot p \in g \cdot \{p\} \cap \{p\}$, ou seja, $g \in G_{\{p\}}$. Por outro lado, se $g \in G_{\{p\}}$, então $g \cdot \{p\} \cap \{p\} \neq \emptyset$, isso é, $g \cdot p = p$. Logo, pela Proposição 2.13, os grupos de isotropia são compactos. □

2.1.2 O Teorema da variedade quociente

Teorema 2.17 (Teorema da Variedade Quociente). *Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade suave e $\alpha : G \times M \to M$ uma ação suave, livre e própria. Nessas hipóteses, o espaço orbital M/G é uma variedade topológica de dimensão $\dim M - \dim G$ e possui uma única estrutura suave tal que a aplicação quociente $\pi : M \to M/G$ é uma submersão suave.*

Demonstração: A demonstração deste teorema é extensa e, por brevidade a evitaremos aqui. Porém, para o leitor interessado, sugerimos a referência [5, p. 544] que serviu de base para o que fizemos até aqui e, portanto, utiliza notações e termos similares ao que foi feito até agora. $\square$

2.1.3 Espaços Homogêneos

Sejam M uma variedade suave, G um grupo de Lie e $\alpha : G \times M \to M$ uma ação diferenciável sobre M. Quando α é transitiva, dizemos que M é um **espaço homogêneo** de G ou um $G-$**espaço homogêneo**.

A partir de um grupo de Lie, podemos construir uma grande quantidade de espaços homogêneos. Antes de mostrar como fazer essa construção, porém, relembremos o *Teorema de Cartan*, também conhecido como o *Teorema do Subgrupo Fechado*.

Teorema 2.18 (Teorema de Cartan). *Seja G um grupo de Lie e $H \subseteq G$ um subgrupo de G. Dessa forma, se H é fechado, então H é um subgrupo de Lie mergulhado de G.*

Para o leitor interessado na demonstração deste Teorema, sugerimos [5, p. 523].

Teorema 2.19 (Teorema de Construção de Espaços Homogêneos). *Sejam G um grupo de Lie e $H \subseteq G$ um subgrupo fechado de G. Dessa forma, o quociente G/H é uma variedade topológica com $\dim G/H = \dim G - \dim H$ e possui uma única estrutura suave tal que $\pi : G \to G/H$ é uma submersão. Além disso, a ação*

$$\begin{aligned} G \times G/H &\to G/H \\ (g_1, g_2H) &\mapsto g_1g_2H \end{aligned}$$

transforma G/H em um $G-$espaço homogêneo.

Demonstração: Consideremos a ação à direita induzida por H, isso é,

$$\begin{aligned} \alpha : G \times H &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh. \end{aligned}$$

Agora, dados $g_1, g_2 \in G$, note que $g_2 \in g_1H$ se, e somente se, existe $h \in H$ tal que $g_2 = g_1h$ ou equivalentemente, g_2 está na órbita de g_1. Isso mostra que o espaço das órbitas dado pela ação à direita de H é o conjunto das classes laterais à esquerda de H.

O Teorema de Cartan garante que H é um subgrupo de Lie mergulhado de G. Além disso, a ação à direita de H em G é suave, livre e própria. De fato, ela é suave por ser a restrição do produto em G. Ela é livre, pois

$$gh = g \Leftrightarrow h = e.$$

Finalmente, para ver que é própria, seja $(g_i) \subseteq G$ uma sequência convergente, $(h_i) \subseteq H$ uma sequência tal que $(g_i h_i) \subseteq G$ converge. Por continuidade do produto, temos que

$$h_i = g_i^{-1}(g_i h_i)$$

converge em G. No entanto, como H é fechado e possui a topologia de subespaço, (h_i) converge em H. Portanto, pela Proposição 2.13, temos que a ação é própria.

Com essas propriedades, podemos aplicar o Teorema da Variedade Quociente 2.17, o que mostra que o espaço das órbitas G/H possui uma única estrutura suave onde a projeção canônica é uma submersão suave. Assim, o mapa

$$\mathrm{id}_G \times \pi : G \times G \to G \times G/H$$

é uma submersão suave. Dessa forma, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\alpha"'] & G/H \end{tikzcd}$$

onde $p : G \times G \to G$ é o produto em G e α é a ação enunciada. Afirmamos que $\pi \circ p$ é constante nas fibras de $\mathrm{id}_G \times \pi$. Com efeito, seja $(g_1, g_2H) \in G \times G/H$. Tomemos $(g_1, x), (g_1, y) \in (\mathrm{id}_G \times \pi)^{-1}(\{(g_1, g_2H)\})$. Assim, temos

$$\pi \circ p(g_1, x) = \pi(g_1 x) = \pi(g_1 g_2 h) = \pi(g_1 g_2) = \pi(g_1 g_2 h') = \pi(g_1 y) = \pi \circ p(g_1, y),$$

onde $h, h' \in H$ são tais que $x = g_2 h$ e $y = g_2 h'$, que existem, pois $\pi(x) = g_2 H = \pi(y)$. Assim, pelo Teorema 4.30 de [5, p. 90], temos que α está bem-definida e é suave. Finalmente, dados $g_1 H, g_2 H \in G/H$, temos que

$$(g_2 g_1^{-1}) \cdot g_1 H = g_2 H,$$

ou seja, α é transitiva. □

Definição 2.20. *Sejam M e N variedades suaves e G um grupo de Lie. Se G age suavemente sobre M e N, então uma aplicação $f : M \to N$ é chamada de* ***equivariante*** *com respeito a ação de G quando, para cada $g \in G$,*

$$f(g \cdot p) = g \cdot f(p) \forall p \in M.$$

O Teorema acima é de importância central no estudo de Espaços homogêneos, uma vez que, como veremos no próximo resultado, todo espaço homogêneo pode ser descrito como um quociente de um grupo de Lie por um subgrupo fechado.

Teorema 2.21 (Teorema de Caracterização para Espaços Homogêneos). *Sejam G um grupo de Lie, M um $G-$espaço homogêneo e $p \in M$. Nesse caso, o grupo de isotropia G_p é um subgrupo fechado de G e a aplicação*

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

é um difeomorfismo equivariante.

Demonstração: Denotemos a ação de G em M por α e consideremos o mapa orbital $\alpha^{(p)} : G \to M$. Como $\alpha^{(p)}$ é contínuo, temos que G_p é fechado, pois

$$G_p = (\alpha^{(p)})^{-1}(p).$$

Para mostrar que F é bem-definida, sejam $g_1G_p, g_2G_p \in G/G_p$ tais que $g_1G_p = g_2G_p$. Assim, existe algum $h \in G_p$ tal que $g_2 = g_1h$ e, portanto,

$$F(g_2G_p) = g_2 \cdot p = g_1h \cdot p = g_1 \cdot (h \cdot p) = g_1 \cdot p = F(g_1H),$$

mostrando que F é bem-definida. Agora, F é equivariante, pois

$$F(ghG_p) = (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) = g \cdot F(hG_p).$$

Finalmente, F é suave, pois

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\alpha^{(p)}"] & \\ G/G_p \arrow[r, "F"'] & M \end{tikzcd}$$

comuta e $\alpha^{(p)}$ é suave. Assim, podemos usar o Teorema 4.30 ([5, p. 90]), para mostrar que F é suave.

Finalmente, mostraremos que F é bijetiva. Dado $q \in M$, a transitividade de α garante que existe um $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$ e, portanto, $F(gG_p) = q$, mostrando que F é sobrejetiva. Para mostrar a injetividade, sejam $g_1G_p, g_2G_p \in G/G_p$ tais que $F(g_1G_p) = F(g_2G_p)$. Assim, $g_1 \cdot p = g_2 \cdot p$ o que implica em $g_1^{-1}g_2 \cdot p = p$. Assim, $g_1^{-1}g_2 \in G_p$ ou, equivalentemente, $g_1G_p = g_2G_p$. Logo, F é uma bijeção suave e equivariante o que, pelo Teorema do Posto Equivariante [5, p. 165], mostra que F é um difeomorfismo. $\square$

2.2 Subálgebras de Borel e parabólicas

Nesta seção, apresentaremos uma série de definições e resultados necessários para que compreendamos a definição de uma variedade flag. Estamos assumindo certa familiaridade com Teoria de Lie, porém, para o leitor interessado, apresentamos no Apêndice A a maior parte do que precisaremos usar durante o restante do trabalho.

Por brevidade, evitaremos fazer as demonstrações nesta seção, porém todos os resultados podem ser encontrados em [6].

Tomemos uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ com uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Denotemos por Π um sistema de raízes correspondentes a $\mathfrak{h}$ e Π^+ um conjunto das raízes positivas. A partir desse sistema, definimos a **subálgebra de Borel canônica** correspondente ao sistema Π por

$$\mathfrak{b} \coloneqq \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Observação 2.22. *Em geral as subálgebras de Borel são definidas como subálgebras conjugadas da álgebra acima.*

Denotemos por G um grupo de Lie complexo e conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$. Nesse caso, definimos o **subgrupo de Cartan** de G como o centralizador em G de $\mathfrak{h}$, isso é,

$$H \coloneqq Z_G(\mathfrak{h}) \coloneqq \{g \in G \mid \operatorname{Ad}(g)H = H,\ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Proposição 2.23. *O subgrupo de Cartan tem álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e é conexo.*

De forma similar, definimos um **subgrupo de Borel**, correspondente a uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$, de G como o normalizador no grupo G de $\mathfrak{b}$, isso é,

$$B \coloneqq N_G(\mathfrak{b}) = \{g \in G \mid \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\}.$$

Proposição 2.24. *Seja B um subgrupo de Borel de G. Dessa forma, B possui álgebra de Lie $\mathfrak{b}$, é um subgrupo fechado e conexo de G e $N(B) = B$.*

Proposição 2.25. *Se $B \subseteq G$ é um subgrupo de Borel, então B é solúvel maximal.*

Definição 2.26. *Seja $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Nesse caso, dizemos que $\mathfrak{p}$ é uma **subálgebra parabólica** quando $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ para alguma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$.*

A partir de um sistema de raízes podemos encontrar uma subálgebra parabólica. Com efeito, consideremos Π um sistema de raízes e Σ um sistema simples de raízes de Π. Dado um subconjunto arbitrário $\Theta \subseteq \Sigma$, para cada $\alpha \in \Pi$ existe uma única decomposição da forma

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Sigma} n_\beta(\alpha)\beta,$$

onde $n_\beta(\alpha) \in \mathbb{Z}$ e todos do mesmo sinal que a raiz α. Agora, consideremos os conjuntos

$$\Theta^r := \{\alpha \in \Pi \mid n_\beta(\alpha) = 0 \ \forall \beta \notin \Theta\}$$

e

$$\Theta^n := \{\alpha \in \Pi^+ \mid \alpha \notin \Theta^r\} = \{\alpha \in \Pi \,|\, \exists \beta \in \Theta \ : \ n_\beta(\alpha) > 0\}.$$

Definição 2.27. *Denotaremos por $\langle\Theta\rangle$ o subconjunto de Π formado pelas combinações lineares inteiras de Θ.*

Proposição 2.28. $\Theta^r = \langle\Theta\rangle$ *e* $\Theta^n = \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle$.

Demonstração: Com efeito, se $\alpha \in \langle\Theta\rangle$, temos que sua decomposição em raízes simples possui apenas componentes em Θ, ou seja, $n_\beta(\alpha) = 0$ para todo $\beta \notin \Theta$. Portanto, $\alpha \in \Theta^r$. Por outro lado, se $\alpha \in \Theta^r$, então α é uma combinação linear de elementos de Θ. Com isso, mostramos a primeira igualdade.

Para a segunda, notemos que $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle$ se, e somente se, $\alpha \in \Pi^+$ e $\alpha \notin \Theta^r$ pela primeira igualdade. Com isso, concluímos a proposição. □

A partir desses conjuntos, definimos

$$\mathfrak{p}_\Theta := \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{2.1}$$

Proposição 2.29. *$\mathfrak{p}_\Theta$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{p}_\Theta \supseteq \mathfrak{b}$ a subálgebra canônica de Borel.*

Proposição 2.30. *Seja $\mathfrak{p}$ uma subálgebra que contém a subálgebra de Borel canônica. Nesse caso, existe um conjunto de raízes simples $\Theta \subseteq \Sigma$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Theta$.*

A Proposição 2.30 mostra que qualquer subálgebra parabólica é encontrada a partir de um conjunto de raízes simples.

Consideremos uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$. Definimos o **subgrupo parabólico** correspondente a $\mathfrak{p}$ como o normalizador de $\mathfrak{p}$ em G, isso é,

$$P = N_G(\mathfrak{p}) = \{g \in G \mid \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}.$$

A Proposição a seguir descreve algumas propriedades dos subgrupos parabólicos.

Proposição 2.31 (Propriedades dos subgrupos parabólicos). *Se $P \subseteq G$ é parabólico correspondente à subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$, então P possui álgebra de Lie $\mathfrak{p}$, é um subgrupo fechado e conexo de G e $N(P) = P$.*

Demonstração: A demonstração desses fatos pode ser encontrada em [6]. O fato de que subgrupos parabólicos são conexos, em particular, utiliza de tópicos mais aprofundados de Teoria de Representações que decidimos evitar neste trabalho. No entanto, esta prova será revisitada mais adiante, a saber na Proposição 2.51, em um contexto mais específico da proposta inicial. □

Notemos que, diferentemente da definição de subálgebra parabólica, a definição de subgrupo parabólico não envolve subgrupos de Borel. Assim, surge uma pergunta natural: um subgrupo é parabólico se, e somente se, ele contém algum subgrupo de Borel? Como esta foi a definição para uma subálgebra parabólica, é natural pensarmos que essa relação se reflete no grupo. Com efeito, a resposta para essa pergunta é positiva.

Teorema 2.32. *Seja G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Dessa forma, $P \subseteq G$ é um subgrupo parabólico se, e somente se, existe um subgrupo de Borel B tal que $B \subseteq P$.*

2.3 Decomposições

2.3.1 Decomposições de Cartan

Nesta seção, utilizaremos alguns conceitos de complexificação de espaços vetoriais que podem ser encontrados no apêndice B.

Consideremos uma álgebra de Lie semissimples real $\mathfrak{g}$. Nesse caso, segue que sua complexificação $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ também é semissimples. Além disso, denotaremos por $\mathfrak{u}$ a forma real compacta de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, como definida na Seção A.11.

Uma **decomposição de Cartan** de $\mathfrak{g}$ é uma soma direta do tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$. Uma decomposição desse tipo sempre existe, pelo Teorema A.58. De fato se σ é a conjugação[2] relacionada a $\mathfrak{g}$ então, ainda pelo Teorema A.58, existe uma forma real compacta $\mathfrak{u}$ cuja conjugação τ comuta com σ. Essa comutatividade implica que $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ e $\sigma(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. Assim, dado $X \in \mathfrak{g}$ qualquer, podemos escrever

$$X = \frac{X + \tau(X)}{2} + \frac{X - \tau(X)}{2}.$$

Por um lado, como $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, temos que ambos os termos acima pertencem a $\mathfrak{g}$. Por outro lado, podemos escrever $X = A + iB$, onde $A, B \in \mathfrak{u}$. Nesse caso, temos que

$$\frac{X + \tau(X)}{2} = A \quad \text{e} \quad \frac{X - \tau(X)}{2} = iB \in i\mathfrak{u}.$$

[2] Definição B.1

Assim, existe a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$. Essa decomposição não é única, porém, como podemos passar de uma decomposição para outra por um automorfismo interno, de forma que os resultados obtidos para uma ainda são válidos para as outras.

Proposição 2.33. *Valem as seguintes propriedades para as decomposições de Cartan:*

(i) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}$ *e* $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{k}$*;*

(ii) se $\theta = \tau|_{\mathfrak{g}}$*, então* $\theta^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$*. Além disso seu autoespaço associado ao autovalor* 1 *é* $\mathfrak{k}$ *e o autoespaço associado a* -1 *é* $\mathfrak{s}$ *(*θ *é chamada de* ***involução de Cartan****);*

(iii) a forma de Cartan-Killing $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ *é negativa definida em* $\mathfrak{k}$ *e positiva definida em* $\mathfrak{s}$*;*

(iv) se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{s}_2$ *são duas decomposições de Cartan, então existe* ϕ *um automorfismo de* $\mathfrak{g}_0$ *tal que* $\phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$ *e* $\phi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$*;*

(v) se $X \in \mathfrak{k}$ *e* $Y \in \mathfrak{s}$*, então* $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$*;*

(vi) a forma bilinear $B_\theta(X, Y) = -\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X, \theta Y)$ *é um produto interno;*

(vii) se $X \in \mathfrak{k}$ *e* $Z, W \in \mathfrak{g}$*, então*

$$B_\theta([X, Z], W) = -B_\theta(Z, [X, W]);$$

(viii) se $Y \in \mathfrak{s}$ *e* $Z, W \in \mathfrak{g}$*, então*

$$B_\theta([Y, Z], W) = B_\theta(Z, [Y, W]);$$

(ix) $\mathfrak{k}$ *é uma subálgebra compacta maximal;*

(x) se $\mathfrak{g}$ *é o realificado de uma álgebra complexa semissimples, então as decomposições de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *são dadas por* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$*, onde* $\mathfrak{u}$ *é uma forma real compacta de* $\mathfrak{g}$*;*

(xi) o isomorfismo $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ *e a involução de Cartan definem um automorfismo* $\overline{\theta} : \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{ad}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{ad}"] \\ \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\theta}"'] & \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

Exemplo 1. Considerando a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, temos que sua complexificação é $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ e a forma real compacta de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$. Com isso, temos que $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$ é o espaço das matrizes simétricas de traço zero. Além disso, em relação a esta forma real compacta, a conjugação τ é dada por

$$\tau(Z) = -\overline{Z}^t$$

e a involução de Cartan por

$$\theta(X) = -X^t.$$

•

2.3.2 Decomposições globais

Nosso objetivo agora é passar a decomposição de Cartan para os grupos de Lie associados. Começamos mostrando para o grupo $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$, que é um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie real. Fixemos uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ com involução θ que induz o produto interno $B_\theta = -\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X, \theta Y)$.

Definição 2.34. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotaremos o grupo dos automorfismos de G por $\operatorname{Aut} G$ e o grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ por $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$.*

Definição 2.35. *A componente conexa de $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ será denotada por $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$.*

Se $\theta_0 : \operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g} \to \operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ é definido por $\theta_0(g) = \theta g \theta^{-1}$, temos que θ_0 é um automorfismo do próprio grupo adjunto de $\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g}$ ($\theta_0 \in \operatorname{Aut}_0(\operatorname{Aut}_0 \mathfrak{g})$). Além disso, temos que

$$\theta_0(\operatorname{ad}(X)) = \theta \operatorname{ad}(X) \theta^{-1} = \operatorname{ad}(\theta X)$$

isso é, θ_0 é uma extensão de θ em $\operatorname{Der} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$.

Teorema 2.36. *Sejam G um grupo de Lie semissimples conexo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan de sua álgebra de Lie. Escrevendo $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ e $S = \exp \mathfrak{s}$, valem as seguintes afirmações:*

(i) $G = SK = KS$ e todo $g \in G$ se escreve de maneira única como $g = sk$ ou $g = ks$, $k \in K$ e $s \in S$;

(ii) S é uma subvariedade mergulhada de G difeomorfa a $\mathfrak{s}$ pelo mergulho $\exp : \mathfrak{s} \to S$;

(iii) as aplicações $K \times S \to G$ dadas por $(k, s) \mapsto ks$ e $(k, s) \mapsto sk$ são difeomorfismos;

(iv) o centro $Z(G)$ de G está contido em K;

(v) $K = \exp \mathfrak{k}$ e K é compacto se, e somente se, $Z(G)$ é finito.

2.3.3 Decomposição de Iwasawa

As álgebras semissimples reais podem ser decompostas de forma análoga às decomposições em espaços de raízes das álgebras complexas. Ela não é feita, nesse caso, em relação a uma subálgebra de Cartan, uma vez que $\mathrm{ad}(H)$, para $H \in \mathfrak{h}$, não necessariamente possui autovalores reais.

Assim, consideremos uma álgebra semissimples real $\mathfrak{g}$ e uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Tomemos $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal. A existência de $\mathfrak{a}$ é garantida pela dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Nesse caso, para $H \in \mathfrak{a}$, temos que $\mathrm{ad}(H)$ é diagonalizável, pois $\mathrm{ad}(H)$ é simétrica em relação ao produto interno B_θ (Proposição 2.33). Além disso, como $\mathfrak{a}$ é abeliana e $\mathrm{ad}(H)$ é simétrica pelo item (*viii*) da Proposição 2.33, $\mathrm{ad}(H)$ é simultaneamente diagonalizável para $H \in \mathfrak{a}$. Assim, para $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{a},\ \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X\}$$

é um autoespaço comum a $\mathrm{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{a}$, se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Nesse caso, α é chamado de **raiz** de $\mathfrak{a}$ quando $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{g}$ se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_\alpha \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde α percorre todas as raízes $\mathfrak{g}_0$ é uma subálgebra, pois é o centralizador de $\mathfrak{a}$.

Lema 2.37. *Sejam $\mathfrak{g}_0$ como acima e $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$. Dessa forma, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{g}$ se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_\alpha \mathfrak{g}_\alpha.$$

Definição 2.38. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real com uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}$ uma álgebra abeliana maximal e $H \in \mathfrak{a}$ um elemento regular real. Consideremos a decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raízes e denotemos por $\mathfrak{n}$ a subálgebra*

$$\mathfrak{n} \coloneqq \sum_{\alpha(H)>0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dessa forma, a ***decomposição de Iwasawa*** *de $\mathfrak{g}$ é dada por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Com essa definição, podemos definir a decomposição de Iwasawa de um grupo de Lie.

Teorema 2.39. *Sejam G um grupo de Lie semissimples e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, $G = KAN$, onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N = \exp \mathfrak{n}$.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [7, p. 262]. $\square$

2.4 Variedades flag

Seja G um grupo de Lie complexo, com álgebra $\mathfrak{g}$ semissimples. Seja Π um conjunto de raízes de $\mathfrak{g}$ e $\Sigma \subseteq \Pi$ um sistema simples de raízes. Tomando um conjunto $\Theta \subseteq \Sigma$ arbitrário, consideremos a subálgebra parabólica (2.1).

Como já vimos, podemos definir um subgrupo parabólico a partir de uma subálgebra parabólica. Portanto, definiremos o subgrupo parabólico

$$P_\Theta \coloneqq N_G(\mathfrak{p}_\Theta).$$

Definição 2.40. *A **variedade flag** dada por $\Theta \subseteq \Sigma$ é definida como o quociente*

$$\mathbb{F}_\Theta \coloneqq G/P_\Theta.$$

*Quando P_Θ é o subgrupo parabólico minimal, dizemos que a variedade flag é **maximal**. Já para $\Theta \neq \emptyset$, dizemos que a variedade flag é **parcial**.*

O seguinte resultado é muito importante para o estudo de variedades flag, uma vez que ele permite usar uma série de resultados úteis.

Proposição 2.41. *Se $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ é uma variedade flag, então $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço homogêneo.*

Demonstração: Pela Proposição 2.31, temos que P_Θ é um subgrupo fechado de G. Assim, O Teorema de Construção de Espaços Homogêneos garante que que G/P_Θ possui uma única estrutura suave tal que $\pi : G \to G/H$ é uma submersão e a ação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \mathbb{F}_\Theta &\to \mathbb{F}_\Theta \\ (g, hP_\Theta) &\mapsto ghP_\Theta. \end{aligned}$$

transforma G/P_Θ em um espaço homogêneo. $\square$

Estamos interessados agora em ver uma variedade flag $F_\Theta = G/P_\Theta$ em termos do subgrupo $U = \exp \mathfrak{u}$, onde $\mathfrak{u}$ é a forma real compacta de $\mathfrak{g}$, a álgebra de G. A principal vantagem de fazermos isso, é que o subgrupo U é compacto e, assim, podemos fazer uso da grande quantidade de resultados existentes para esse tipo de grupo.

Para começar essa discussão, consideremos uma álgebra de Lie complexa semissimples $\mathfrak{g}$ e seu grupo de Lie G respectivo. Denotemos por $\mathfrak{u}$ sua forma real compacta, encontrada pela base de Weyl como feito na Seção A.11. Denotando os espaços de raízes por $\mathfrak{g}_\alpha$, definimos os subespaços de $\mathfrak{u}$

$$\mathfrak{u}_\alpha \coloneqq \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}).$$

No seguinte lema, utilizaremos resultados da seção A.11.

Lema 2.42. $\mathfrak{u}_\alpha = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$[3].

Demonstração: Temos que $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iH_\alpha, A_\alpha, iS_\alpha \mid \alpha \in \Pi^+\} = \mathfrak{u}$ e $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\} \subseteq \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, pois

$$A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{e} \quad iS_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Assim, $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\} \subseteq \mathfrak{u}_\alpha$. Como ambas são bidimensionais, segue que temos a igualdade. □

Proposição 2.43. *Se $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ denota a subálgebra real $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, então*

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Demonstração: Lembremos que,

$$\mathfrak{u} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iH_\alpha, A_\alpha, iS_\alpha \mid \alpha \in \Pi^+\}.$$

Assim, seja $X \in \mathfrak{u}$. Podemos escrever

$$X = iH + \sum_{\alpha \in \Pi^+} a_\alpha A_\alpha + \sum_{\alpha \in \Pi^+} b_\alpha iS_\alpha,$$

onde $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Note que tanto $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$ estão em $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Por outro lado, $a_\alpha A_\alpha, b_\alpha iS_\alpha \in \mathfrak{u}$. Portanto, $X \in i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$. Assim,

$$\mathfrak{u} \subseteq i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Como temos que ambos $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u}_\alpha \subseteq \mathfrak{u}$, obtemos a outra inclusão, concluindo a demonstração. □

Consideremos a subálgebra parabólica

$$\mathfrak{p}_\Theta := \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

A partir dela, definimos a subálgebra $\mathfrak{k}_\Theta := \mathfrak{p}_\Theta \cap \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{u}$.

Proposição 2.44. $\mathfrak{k}_\Theta = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{u}_\alpha$, *onde* $\langle\Theta\rangle^+ := \langle\Theta\rangle \cap \Pi^+$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{u}$ e $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}_\Theta$ e, portanto, $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{k}_\Theta$. Agora, se $\alpha \in \langle\Theta\rangle^+$, temos que ambos $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{p}_\Theta$. Portanto,

$$\mathfrak{u}_\alpha = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\} \subseteq \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta,$$

[3] Definição A.1

para todo $\alpha \in \langle\Theta\rangle^+$. Logo,

$$\mathfrak{k}_\Theta \supseteq i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Agora, tomemos $X \in \mathfrak{k}_\Theta$. Por um lado, temos que $X \in \mathfrak{u}$ e, portanto, podemos escrever

$$X = iH + \sum_{\alpha\in\Pi^+} a_\alpha A_\alpha + \sum_{\alpha\in\Pi^+} b_\alpha i S_\alpha,$$

onde $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$. Essa expressão para X pode ser reescrita como

$$X = iH + \sum_{\alpha\in\Pi^+} z_\alpha X_\alpha - \sum_{\alpha\in\Pi^+} \overline{z_\alpha} X_{-\alpha},$$

onde $z_\alpha = a_\alpha + ib_\alpha$. Por outro lado, $X \in \mathfrak{p}_\Theta$, ou seja, X não possui uma componente do tipo

$$\sum_{\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle} \overline{z_\alpha} X_{-\alpha},$$

pois os espaços de raízes com raízes negativas fora de $\langle\Theta\rangle$ não fazem parte da decomposição de $\mathfrak{p}_\Theta$. Daí, obtemos

$$0 = \overline{z_\alpha} = a_\alpha - ib_\alpha \Leftrightarrow a_\alpha = b_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} X &= iH + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} a_\alpha A_\alpha + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} b_\alpha i S_\alpha \\ &= iH + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} (a_\alpha A_\alpha + b_\alpha i S_\alpha) \in i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{u}_\alpha, \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Definimos agora o seguinte subespaço de $\mathfrak{u}$:

$$\eta_\Theta := \sum_{\alpha\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\alpha,$$

de forma que temos $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \eta_\Theta$.

Proposição 2.45. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) $\mathfrak{k}_\Theta$ *e* η_Θ *são ortogonais com relação à forma de Cartan-Killing;*

(ii) $[\mathfrak{k}_\Theta, \eta_\Theta] \subseteq \eta_\Theta$.

Demonstração:

(i) Sejam $X \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $Y \in \eta_\Theta$. Assim, temos que

$$X = iH + \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} (a_\alpha A_\alpha + b_\alpha i S_\alpha) \ \text{ e } \ Y = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle} (a_\alpha A_\alpha + b_\alpha i S_\alpha).$$

Reescrevendo essas igualdades obtemos

$$X = iH + \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} (z_\alpha X_\alpha - \overline{z_\alpha} X_{-\alpha}) \ \text{ e } \ Y = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle} (z_\alpha X_\alpha - \overline{z_\alpha} X_{-\alpha}).$$

Como $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ para todo $\beta \neq -\alpha$, concluímos que $\langle X, Y \rangle = 0$.

(ii) Segue das relações entre os colchetes e os espaços de raízes.

□

Agora, definiremos o subespaço de $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ dado por

$$\mathfrak{a}(\Theta) := \text{span}_\mathbb{R}\{iH_\alpha \mid \alpha \in \Theta\}$$

e o seu respectivo complemento ortogonal dentro de $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ com relação à forma de Cartan-Killing, isso é, o subespaço

$$\mathfrak{a}_\Theta := \mathfrak{a}(\Theta)^\perp.$$

Notemos que, nesse caso,

$$i\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta.$$

Além disso, temos que

$$\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \langle H, iH_\alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \Theta\}$$

por definição. Assim, como $\langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$, o espaço $\mathfrak{a}_\Theta$ pode ser reescrito como

$$\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \langle\Theta\rangle\}.$$

Lema 2.46. *Se $\beta \in \Pi$ e $\beta|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0$, então $\beta \in \langle\Theta\rangle$.*

Demonstração: Como $\beta|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0$, temos que

$$0 = \beta(H) = \langle H_\beta, H \rangle$$

para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta$. Assim, $iH_\beta \in \mathfrak{a}(\Theta)$. Logo, $\beta \in \langle\Theta\rangle$. □

Definição 2.47. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ subálgebras. Denotaremos o centralizador de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{h}$ por*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{k}) = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] = 0, \ \forall Y \in \mathfrak{k}\}.$$

Proposição 2.48. $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}_\Theta)$.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{k}_\Theta$. Assim, podemos decompor X como

$$\begin{aligned} X &= iH + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} a_\alpha A_\alpha + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} i b_\alpha S_\alpha \\ &= iH + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} z_\alpha X_\alpha - \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \overline{z_\alpha} X_{-\alpha}, \end{aligned}$$

onde $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e $z_\alpha = a_\alpha + i b_\alpha$. Agora, dado $iH' \in \mathfrak{a}_\Theta$, temos que $\alpha(iH') = 0$ para todo $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Portanto,

$$[X, iH'] = [iH, iH'] + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} z_\alpha [X_\alpha, iH'] - \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \overline{z_\alpha} [X_{-\alpha}, iH'].$$

Lembrando que $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ é abeliana e $[iH', X_\alpha] = \alpha(iH') X_\alpha$ (ou equivalentemente $[X_\alpha, iH'] = -\alpha(iH') X_\alpha$), a expressão acima se torna

$$[X, iH'] = - \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} z_\alpha \alpha(iH') X_\alpha + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \overline{z_\alpha} \alpha(iH') X_{-\alpha} = 0,$$

pois $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Logo, $\mathfrak{k}_\Theta \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}_\Theta)$.

Agora, consideremos $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}_\Theta)$. Nesse caso, em particular $X \in \mathfrak{u}$ e, portanto, possui uma decomposição da forma

$$X = iH + \sum_{\alpha \in \Pi^+} z_\alpha X_\alpha - \sum_{\alpha \in \Pi^+} \overline{z_\alpha} X_{-\alpha},$$

com $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e $z_\alpha = a_\alpha + i b_\alpha$. Assim, como X pertence ao centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$, temos, para todo $iH' \in \mathfrak{a}_\Theta$,

$$\begin{aligned} 0 = [X, iH'] &= [iH, iH'] + \sum_{\alpha \in \Pi^+} z_\alpha [X_\alpha, iH'] - \sum_{\alpha \in \Pi^+} \overline{z_\alpha} [X_{-\alpha}, iH'] \\ &= - \sum_{\alpha \in \Pi^+} z_\alpha \alpha(iH') X_\alpha + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \overline{z_\alpha} \alpha(iH') X_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Note que, como $iH' \in \mathfrak{a}_\Theta$, para $\alpha \in \langle \Theta \rangle$ temos $\alpha(iH') = 0$ ou seja a expressão acima pode ser reescrita como

$$0 = [X, iH'] = - \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} z_\alpha \alpha(iH') X_\alpha + \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \overline{z_\alpha} \alpha(iH') X_{-\alpha}.$$

Como o conjunto $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ é l.i., concluímos que $z_\alpha \alpha(iH') = 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$. Pela contrapositiva do Lema 2.46, $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle$ não pode ser 0 para todo elemento de

$\mathfrak{a}_\Theta$. Portanto, devemos ter $z_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle$ neste caso. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} X &= iH + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} z_\alpha X_\alpha - \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \overline{z_\alpha} X_{-\alpha} \\ &= iH + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} a_\alpha A_\alpha + \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} b_\alpha i S_{-\alpha}, \end{aligned}$$

o que mostra que $X \in \mathfrak{k}_\Theta$. Logo, obtemos que

$$\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{z}_\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_\Theta).$$

□

Consideremos um subgrupo de Lie $L \subseteq G$ e uma subálgebra de Lie $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$. Recordemos que os centralizadores de L em G e de $\mathfrak{l}$ em G são dados por

$$Z_G = \{g \in G \mid C_g|_L = \mathrm{id}\,|_L\} \ \text{ e } \ Z_G(\mathfrak{l}) = \{g \in G \mid \ \mathrm{Ad}(g)|_\mathfrak{l} = \mathrm{id}\,|_\mathfrak{l}\},$$

respectivamente.

Lema 2.49. *Seja $L \subseteq G$ um subgrupo e $\mathfrak{l}$ sua álgebra de Lie. Se L é conexo, então $Z_G(\mathfrak{l}) = Z_G(L) = Z_G(\overline{L})$.*

Demonstração: Temos que $g \in Z_G(\mathfrak{l})$ se, e somente se, $\mathrm{Ad}(g)X = X$ para todo $X \in \mathfrak{l}$. Assim, pela Proposição A.6, temos que essa afirmação equivale a

$$C_g(e^X) = e^X \ \forall X \in \mathfrak{l}.$$

Da conexidade de L, temos que seus elementos são produtos de exponenciais de elementos de $\mathfrak{l}$. Assim, g centraliza X para todo $X \in \mathfrak{l}$ se, e somente se, g centraliza L para todo $l \in L$. Logo $Z_G(\mathfrak{l}) = Z_G(L)$.

Para a outra igualdade, notemos inicialmente que $Z_G(\overline{L}) \subseteq Z_G(L)$, pois $L \subseteq \overline{L}$. Assim, seja $g \in Z_G(L)$ e $l \in \overline{L}$. Tomando uma sequência $(l_n) \subseteq L$ tal que $l_n \to l \in \overline{L}$, temos, pela continuidade de C_g, que

$$C_g(l_n) \to C_g(l).$$

Por outro lado, $l_n \in Z_G(L)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $C_g(l_n) = l_n$ para todo n e, portanto, $l_n \to C_g(l)$. Pela unicidade do limite, concluímos que $C_g(l) = l$ de onde obtemos que $g \in Z_G(\overline{L})$. □

Neste momento, estamos aptos a estudar a estrutura de $\mathfrak{a}_\Theta$ e $\mathfrak{k}_\Theta$ dentro do subgrupo compacto $U := \exp \mathfrak{u}$, que será importante para nos fornecer mais ferramentas para o estudo das variedades flag. Para isso, consideremos os subgrupos

$$A_\Theta := \exp \mathfrak{a}_\Theta \quad \text{e} \quad K_\Theta = Z_U(\mathfrak{a}_\Theta)$$

de U. Sabemos que, por definição, A_Θ é um subgrupo conexo de U. Além disso, como $\mathfrak{a}_\Theta$ é abeliano, temos que A_Θ também o é. Assim, o fecho $\overline{A_\Theta}$ de A_Θ ainda preserva as propriedades de ser abeliano (basta usarmos sequências, a continuidade do produto e a unicidade do limite) e conexo. Agora, como $\overline{A_\Theta} \subseteq U$ é fechado e U é compacto, concluímos que o fecho de A_Θ é compacto. Com essas propriedades, temos que $\overline{A_\Theta}$ é um toro, isso é, um subgrupo abeliano e conexo de U.

Pelo Lema 2.49, temos que

$$K_\Theta = Z_U(\mathfrak{a}_\Theta) = Z_U(\overline{A_\Theta}),$$

isso é, K_Θ é o centralizador do toro $\overline{A_\Theta}$. Consequentemente, pelo Corolário 4.51 de [8, p. 206], K_Θ é conexo. Além disso, definamos a subálgebra

$$\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Agora, pelo Teorema 6.3 de [9, p. 239] temos que $G = UAN$, onde $A = \exp i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e $N = \exp \mathfrak{n}$.

Finalmente, o subgrupo parabólico P_Θ também possui uma decomposição similar a de G, a saber

$$P_\Theta = K_\Theta AN,$$

como vemos no Teorema de Bruhat-Moore [10, p. 75]. Logo, temos que

$$K_\Theta = U \cap P_\Theta.$$

Agora, definimos a ação

$$\begin{aligned} \alpha : U \times G/P_\Theta &\to G/P_\Theta \\ (u, gP_\Theta) &\mapsto ugP_\Theta, \end{aligned}$$

que é transitiva. De fato, dado $gP_\Theta \in G/P_\Theta$, pela decomposição de Iwasawa de G, temos

$$g = uan,$$

onde $u \in U$, $a \in A$ e $n \in N$. Agora, como P_Θ também se decompõe em $P_\Theta = K_\Theta AN$ temos que $AN \subseteq P_\Theta$ e, portanto,

$$gP_\Theta = uanP_\Theta = uP_\Theta,$$

o que mostra que todo $gP_\Theta \in G/P_\Theta$ pertence à órbita de $x_0 \coloneqq P_\Theta$ mostrando que a ação é transitiva. Assim, pelo Teorema da Caracterização dos Espaços Quocientes, temos que

$$G/P_\Theta \cong U/G_{x_0},$$

onde G_{x_0} é o grupo de isotropia de x_0. Afirmamos que $G_{x_0} = K_\Theta$. Com efeito, se $x \in K_\Theta$, então $x \in P_\Theta$ e, portanto, $xP_\Theta = P_\Theta = x_0$. Reciprocamente, se $y \in G_{x_0}$, então $yP_\Theta = P_\Theta$, o que ocorre se, e somente se $y \in P_\Theta$. Como estamos considerando a isotropia da ação de U em G/P_Θ, $y \in U$ mostrando que $y \in K_\Theta$. Logo, concluímos que

Proposição 2.50. $G/P_\Theta \cong U/K_\Theta$.

Das observações acima temos uma demonstração alternativa para a conexidade de P_Θ.

Proposição 2.51. *P_Θ é um subgrupo conexo de G.*

Demonstração: Como foi visto acima, P_Θ possui uma decomposição da forma

$$P_\Theta = K_\Theta AN,$$

onde $A = \exp i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, $N = \exp \mathfrak{n}$ e $K_\Theta = Z_U(A_\Theta)$. Note que K_Θ é conexo por ser o centralizador de um toro e A e N são conexos pela Proposição A.8. Assim, temos que $A \times N$ é conexo em $G \times G$ e da continuidade do produto obtemos que AN também é um conexo. Assim, denotando o produto em G por $p : G \times G \to G$, temos que

$$P_\Theta = K_\Theta AN = p(K_\Theta \times AN).$$

Como $K_\Theta \times AN$ é conexo e p é contínua, concluímos que P_Θ é conexo. $\square$

Exemplo 2.

Consideremos o conjunto de raízes simples de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ como no Exemplo 7. Tomando um conjunto $\Theta = \{\alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}$, isso é, $\Sigma \setminus \{\alpha_{12}\}$. Assim, o conjunto $\langle\Theta\rangle$, é da forma

$$\langle\Theta\rangle = \{\alpha_{23}, \alpha_{32}, \alpha_{24}, \alpha_{42}, \ldots, \alpha_{34}, \alpha_{43}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, \alpha_{n,n-1}\}$$

e

$$\Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}\}.$$

Assim, a álgebra parabólica padrão gerada por Θ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_\Theta &= \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha_{ij} \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} \oplus \sum_{\beta_{ij} \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{\beta_{ij}} \\
&= \mathfrak{h} \oplus \langle E_{23} \rangle \oplus \langle E_{32} \rangle \oplus \langle E_{24} \rangle \oplus \langle E_{42} \rangle \oplus \cdots \\
&\cdots \oplus \langle E_{34} \rangle \oplus \langle E_{43} \rangle \oplus \cdots \\
&\cdots \oplus \langle E_{n-1,n} \rangle \oplus \langle E_{n,n-1} \rangle \oplus \langle E_{12} \rangle \oplus \cdots \\
&\cdots \oplus \langle E_{1n} \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathfrak{p}_\Theta$ é o conjunto formado por matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0$.

Nosso objetivo agora é encontrar o subgrupo parabólico gerado por $\mathfrak{p}_\Theta$, isso é, o normalizador

$$N_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})}(\mathfrak{p}_\Theta) = \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \mid g\mathfrak{p}_\Theta g^{-1} = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

Afirmamos que o subgrupo parabólico é dado pelas matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{C}$, b é um vetor com $(n-1)-$entradas complexas e $C \in \mathrm{Gl}(n-1, \mathbb{C})$ é tal que $\det C = \frac{1}{a}$. Denotaremos esse conjunto de matrizes por G. Essas matrizes são efetivamente os elementos de um subgrupo de isotropia gerado a partir da ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ no projetivo (Teorema da Caracterização de Espaços Homogêneos). Desse fato, sabemos que para um elemento $g \in G$ como acima, sua inversa será dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & b' \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, tomando

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}_\Theta,$$

temos

$$gAg^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & b' \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & a(xb' + yC^{-1}) + bZC^{-1} \\ 0 & CZC^{-1} \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{tr}(gAg^{-1}) = x + \operatorname{tr}(CZC^{-1}) = x + \operatorname{tr}(Z) = 0$, concluímos que $gAg^{-1} \in \mathfrak{p}_\Theta$ pela forma da matriz. Em contrapartida, dado

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \in G$$

qualquer matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}_\Theta$$

pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & \xi \\ 0 & C^{-1}ZC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & b' \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix},$$

onde

$$\xi = \left[\frac{1}{a}(y - bC^{-1}Z) - xb'\right] C.$$

Com isso, concluímos que $G \subseteq N_{\mathrm{Sl}(n)}(\mathfrak{p}_\Theta) = P_\Theta$.

Agora, consideremos $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ da forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $X^t \in \mathfrak{p}_\Theta$, porém temos que

$$[X, X^t] \notin \mathfrak{p}_\Theta.$$

Isso mostra que $X \notin \mathfrak{n}(\mathfrak{p}_\Theta)$. Por um argumento análogo, conseguimos mostrar que caso a primeira coluna possua algum elemento não nulo além do elemento a_{11}, ela não normaliza $\mathfrak{p}_\Theta$. Portanto, concluímos que as matrizes do normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ possuem a mesma forma das matrizes de $\mathfrak{p}_\Theta$ ou, em outras palavras,

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{p}_\Theta) \subseteq \mathfrak{p}_\Theta.$$

Como $\mathfrak{p}_\Theta$ é subálgebra, já temos que $\mathfrak{p}_\Theta \subseteq \mathfrak{n}(\mathfrak{p}_\Theta)$ e, assim, obtemos

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{p}_\Theta) = \mathfrak{p}_\Theta.$$

Note, também, que a álgebra de Lie de G é $\mathfrak{p}_\Theta$. Com efeito, tomando a exponencial de um elemento fora de $\mathfrak{p}_\Theta$ (isso é, com algum elemento não nulo abaixo do elemento a_{11}), obtemos ainda uma matriz com algum elemento não nulo abaixo de a_{11}, que está fora de G. Portanto, a álgebra de G é de fato $\mathfrak{p}_\Theta$.

A partir dessas duas observações, podemos mostrar que $G = N_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})}(\mathfrak{p}_\Theta)$. De fato, temos que G contém o conjunto das matrizes triangulares superiores de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$. Como esse é um subgrupo de Borel de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$ e $G \subseteq N_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})}(\mathfrak{p}_\Theta)$, concluímos que ambos G e $N_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})}(\mathfrak{p}_\Theta)$ são subgrupos parabólicos e, portanto, conexos. Além disso, pela Proposição A.12, temos que a álgebra de Lie de $N_{\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})}(\mathfrak{p}_\Theta)$ é $\mathfrak{p}_\Theta$. Assim, temos que a componente conexa da identidade de G e P_Θ coincidem e, como eles são conexos, mostra que $G = P_\Theta$ como desejávamos. $\bullet$

2.5 O espaço $\mathbb{F}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V})$

Nesta seção introduziremos a ideia do espaço das flags de um espaço vetorial. Como veremos, esse conjunto possui de fato uma estrutura de variedade flag, e justifica em certo sentido o nome dado a esse tipo de variedade.

Trabalharemos inicialmente com espaços vetoriais complexos quaisquer e trataremos de transformações lineares entre eles. Porém, para fazermos certas demonstrações deveremos tratar dessas mesmas transformações como matrizes, o que pode ser feito devido ao isomorfismo existente entre essas transformações e matrizes complexas com dimensão apropriada. Portanto, com o intuito de não alongar demais o texto, trataremos matrizes e transformações como sendo os mesmos objetos, mas mantendo sempre em mente essa correspondência.

Seja V um espaço vetorial com dimensão n. Consideremos o conjunto $K = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, onde $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tais que

$$0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_m < n.$$

Uma **flag de tipo** K em V é uma sequência de subespaços encaixados de V

$$0 \leq V_1 \leq \cdots \leq V_m \leq V,$$

onde $\dim V_i = k_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Note que uma flag é uma cadeia (isso é, um conjunto totalmente ordenado) no conjunto de subespaços de V. Assim, a flag pode ser também denotada como

$$0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to V.$$

O conjunto de flags de tipo K de V será denotado por $\mathbb{F}_K(V)$. Desse ponto em diante, o conjunto K será usado para denotar o conjunto de naturais $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$.

Podemos definir uma ação de $\mathrm{Gl}(V)$ em $\mathbb{F}_K(V)$ por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathrm{Gl}(V) \times \mathbb{F}_K(V) &\to \mathbb{F}_K(V) \\ (g, (V_i)_{i=1}^m) &\mapsto g \cdot (V_i)_{i=1}^m = (gV_i)_{i=1}^m, \end{aligned}$$

onde $(V_i)_{i=1}^m$ denota a flag

$$0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to V$$

e $(gV_i)_{i=1}^m$ a flag

$$0 \to gV_1 \to \cdots \to gV_m \to V.$$

De fato, como g é um isomorfismo, temos que $\dim V_i = \dim gV_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e g preserva inclusões de subespaços, mostrando que $g \cdot (V_i)_{i=1}^m$ é um elemento de $\mathbb{F}_K(V)$. Além disso, temos que $\mathrm{id}_V \cdot (V_i)_{i=1}^m = (V_i)_{i=1}^m$ e, dados $g, h \in \mathrm{Gl}(V)$,

$$h \cdot (g \cdot (V_i)_{i=1}^m) = h \cdot (gV_i)_{i=1}^m = (hgV_i)_{i=1}^m = hg \cdot (V_i)_{i=1}^m,$$

mostrando que é de fato uma ação.

Proposição 2.52. *A ação* $\cdot : \mathrm{Gl}(V) \times \mathbb{F}_K(V) \to \mathbb{F}_K(V)$*, definida por*

$$(g, (V_i))_{i=1}^m \mapsto g \cdot (V_i)_{i=1}^m = (gV_i)_i^m$$

é transitiva.

Demonstração: Sejam $(V_i)_{i=1}^m$ e $(U_i)_{i=1}^m$ elementos de $\mathbb{F}_K(V)$. Assim, temos duas sequências de subespaços encaixados

$$0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to V \quad \text{e} \quad 0 \to U_1 \to \cdots \to U_m \to V,$$

onde $\dim V_i = \dim U_i = k_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Tomemos, para V_1 e U_1, bases

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_{k_1}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_1 = \{u_1, \ldots, u_{k_1}\}$$

de V_1 e U_1, respectivamente. Para V_2 e U_2, completamos as bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{C}_1$ obtendo bases

$$\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \ldots v_{k_2}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = \{u_1, \ldots, u_{k_1}, u_{k_1+1}, \ldots u_{k_2}\}.$$

Completando as bases sucessivamente, obtemos bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

de V. Portanto, podemos definir um isomorfismo $g : V \to V$ tal que $gv_i = u_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ que, por construção, satisfaz $gV_i = U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Assim, vale que

$$g \cdot (V_i)_{i=1}^m = (gV_i)_{i=1}^m = (U_i)_{i=1}^m.$$

□

Estamos interessados em estudar $\mathbb{F}_K(V)$ como um quociente de um grupo semissimples. Para isso, estudaremos a ação de $\mathrm{Sl}(V)$ em $\mathbb{F}_K(V)$ induzida pela ação de $\mathrm{Gl}(V)$ por restrição.

Corolário 2.53. *A ação* $\cdot : \mathrm{Sl}(V) \times \mathbb{F}_K(V) \to \mathbb{F}_K(V)$*, definida por*

$$(g, (V_i))_{i=1}^m \mapsto g \cdot (V_i)_{i=1}^m = (gV_i)_i^m$$

é transitiva.

Demonstração: Consideremos o isomorfismo g construído na Proposição 2.52. Como ele é um isomorfismo, temos que $\det g \neq 0$. Assim, denotemos por d o determinante de g. Multiplicando o primeiro vetor da base por $\frac{1}{d}$, o determinante de g se torna 1, ou seja, $g \in \mathrm{Sl}(V)$. Logo, a ação é transitiva. $\square$

O corolário acima mostra que $\mathbb{F}_K(V)$ é um espaço homogêneo do grupo $\mathrm{Sl}(V)$. Portanto, estamos interessados agora em encontrar o grupo de isotropia da ação $\cdot$ para que possamos estudar $\mathbb{F}_K(V)$ como um quociente de grupos.

Como observado no início desta seção, no caso de um espaço vetorial complexo de dimensão finita n, existe um isomorfismo entre $\mathrm{Sl}(V)$ e $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$. Levando este fato em consideração, se $A \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ é uma matriz, podemos definir uma ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ em $\mathbb{F}_K(V)$ definida por,

$$A \cdot (V_i)_{i=1}^m = g_A \cdot (V_i)_{i=1}^m{}^4,$$

onde $g_A \in \mathrm{Sl}(V)$ é o automorfismo de V associado à matriz A pelo isomorfismo $\mathrm{Sl}(V) \cong \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$. A partir deste ponto, consideraremos sobretudo a ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ em $\mathbb{F}_K(V)$, porém é importante manter em mente esta identificação.

Assim, tomemos uma flag de tipo K, $p = (V_i)_{i=1}^m$ e bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}$ obtidas sucessivamente por completamento de $\mathcal{B}_1$. Nessa base, afirmamos que o grupo de isotropia de p é dado por

$$G_p = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & A_m & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \mid A_i \in \mathrm{Gl}(d_i, \mathbb{C}) \ \forall i \in \{1, \ldots, m+1\} \right\},$$

onde $d_i = k_i - k_{i-1}$ convencionando-se que $k_0 = 0$ e $k_{m+1} = n$. Com efeito, tomemos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & A_m & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix} \in G_p$$

[4] A Princípio, o símbolo para a ação de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ em $\mathbb{F}_K(V)$ deveria ser distinto do que foi usado para a ação de $\mathrm{Sl}(V)$ em $\mathbb{F}_K(V)$. No entanto, considerando a similaridade das duas ações, utilizaremos o mesmo símbolo.

Nesse caso,

$$A \cdot (V_i)_{i=1}^m = (AV_i)_{i=1}^m.$$

Agora, note que dado $v \in V_i$, ele pode ser escrito na base $\mathcal{B}$ como $v = \sum_{j=1}^{k_i} a_j v_j$, onde v_j são obtidos por completamento nas flags, de forma que

$$Av = \sum_{j=1}^{k_i} a_j A v_j \in V_i.$$

Portanto, $AV_i \subseteq V_i$. Como $\dim AV_i = \dim V_i$, pois A é injetora, concluímos que $AV_i = V_i$. Assim, temos que $A \cdot (V_i)_{i=1}^m = (V_i)_{i=1}^m$ mostrando que $A \in G_p$. Por outro lado, consideremos $A \in G_p$. Nesse caso, temos que

$$A = [Av_1, Av_2, \ldots, Av_m, \ldots, Av_n].$$

Como $AV_i = V_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$, $Av_i \in V_i$ e, portanto, é da forma

$$Av_i = [v_1, \ldots, v_{k_i}, 0, \ldots, 0].$$

Assim, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & A_m & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix}.$$

Logo, concluímos que

$$G_p = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & A_m & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \; | A_i \in \mathrm{Gl}(d_i, \mathbb{C}) \; \forall i \in \{1, \ldots, m+1 \right\},$$

como desejado.

Agora, note que o conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{C}) \right\}$$

está contido em G_p. Como B é um subgrupo de Borel de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})$ [11, p.4], concluímos que G_p é de fato um subgrupo parabólico de $\mathrm{Sl}(V)$. Isso mostra que $\mathbb{F}_K(V)$ é uma variedade flag pelo Teorema 2.32.

Como discutido na seção anterior, toda variedade flag pode ser vista como o quociente de um subgrupo compacto de G pelo centralizador de um toro. Nosso objetivo agora é calcular esses subgrupos no caso de $\mathbb{F}_K(V)$.

Já vimos no Exemplo 8 que a forma real compacta de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é a álgebra $\mathfrak{su}(n)$. Assim, no caso de $\mathbb{F}_K(V)$, estamos tratando do grupo $\mathrm{Sl}(V)$ com o subgrupo $\mathrm{SU}(V)$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que $\mathbb{F}_K(V)$ também será um espaço $\mathrm{SU}(V)-$homogêneo. Para isso, consideremos a ação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{SU}(V) \times \mathbb{F}_K(V) &\to \mathbb{F}_K(V) \\ (g, (V_i)_i^m) &\mapsto (gV_i)_i^m. \end{aligned}$$

Note que, para uma transformação $T \in \mathrm{SU}(V)$ qualquer, temos $(TV_i)_i^m \in \mathbb{F}_K(V)$ se $(V_i)_{i=1}^m$. Isso ocorre devido a $\mathrm{SU}(V)$ ser um subgrupo de $\mathrm{Sl}(V)$ e, portanto, os mesmos argumentos funcionam para $g \in \mathrm{SU}(V)$.

Proposição 2.54. *α é uma ação transitiva.*

Demonstração: Sejam $(V_i)_{i=1}^m, (U_i)_{i=1}^m \in \mathbb{F}_K(V)$. Tomando bases

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}, \ldots, v_n\} \ \text{ e } \ \mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_{k_1}, \ldots, u_{k_m}, \ldots, u_n\}$$

obtidas por completamento nas flags $(V_i)_{i=1}^m$ e $(U_i)_{i=1}^m \in \mathbb{F}_K(V)$, respectivamente. Além disso, fixando um produto interno em V, sem perda de generalidade, tomemos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ ortonormais. Para concluir o resultado desejado, basta repetir os passos da demonstração da Proposição 2.52 para obtermos uma transformação $g \in \mathrm{U}(V)$. O fato de que g é unitário decorre do fato de que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ foram tomadas de forma a serem ortonormais. Finalmente, para que $g \in \mathrm{SU}(V)$, basta dividir o primeiro vetor da base pelo determinante de g assim como feito no Corolário 2.53. □

Assim como anteriormente, deste ponto em diante consideraremos a ação de $\mathrm{SU}(n)$ em $\mathbb{F}_K(V)$ definida a partir da ação de $\mathrm{SU}(V)$ em $\mathbb{F}_K(V)$.

O resultado acima mostra que $\mathbb{F}_K(V)$ pode também ser visto como um $\mathrm{SU}(n)-$espaço homogêneo. Assim, pelo resultado da seção anterior, ele pode ser visto como o quociente

$$\mathbb{F}_K(V) = \mathrm{SU}(n)/K_\Theta,$$

onde $K_\Theta = \mathrm{SU}(n) \cap P_\Theta$ é o centralizador de um toro em $\mathrm{SU}(n)$.

O toro de $\mathrm{SU}(n)$ dependerá do tipo da flag, isso é, do conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$. Como denotamos anteriormente, $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$, com $0 < k_1 < \cdots < k_m < n = \dim V$. Além disso, vimos que as matrizes em P_Θ também dependem desse conjunto, no sentido de que o primeiro bloco na diagonal tem dimensão k_1, o segundo $k_2 - k_1$, o terceiro $k_3 - k_2$ e assim por diante. Similarmente, o toro dependerá desse conjunto.

Considerando o tipo da flag $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$, consideremos o subconjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{SU}(n)$ formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} I_{d_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\lambda_m} I_{d_m} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m+1} = 0$ e $d_i = k_i - k_{i-1}$ convencionando $k_0 = 0$ e $k_{m+1} = n$ é a dimensão dos blocos formados pelas identidades.

Lema 2.55. *$\mathcal{T}$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: Sejam $A, B \in \mathcal{T}$ matrizes tais que

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} e^{i\mu_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{i\mu_{m+1}} I_{m+1} \end{bmatrix}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, consideremos o caminho $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma_i(0) = \lambda_i$ e $\gamma_i(1) = \mu_i$. Com isso, podemos definir um caminho em $\mathrm{U}(n)$ dado por $\gamma : [0,1] \to \mathcal{T}$ tal que

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{i\gamma_1(t)} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\gamma_{m+1}(t)} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix}.$$

Agora, queremos que este caminho esteja dentro do toro $\mathcal{T}$. Para isso, basta normalizarmos, para cada $t \in [0,1]$, a primeira coluna de $\gamma(t)$ dividindo por $\det \gamma(t)$. Assim, γ é um caminho em $\mathrm{SU}(n)$ e, pela forma de cada $\gamma(t)$, é um caminho em $\mathcal{T}$. Logo, $\mathcal{T}$ é conexo por caminhos. $\square$

Proposição 2.56. *O conjunto $\mathcal{T}$ é um toro em* $\mathrm{SU}(n)$.

Demonstração: Para mostrar que $\mathcal{T}$ é um toro, devemos mostrar que ele é um subgrupo abeliano, compacto e conexo de $\mathrm{SU}(n)$.

Primeiramente, mostraremos que $\mathcal{T}$ é um subgrupo. Assim consideremos matrizes

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} e^{i\mu_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{i\mu_{m+1}} I_{m+1} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} e^{i(\lambda_1+\mu_1)} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{i(\lambda_{m+1}+\mu_{m+1})} I_{m+1} \end{bmatrix}$$

que pertence a $\mathcal{T}$ além disso, a inversa de A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix}$$

que também pertence a $\mathcal{T}$. Assim, $\mathcal{T}$ é um subgrupo de $\mathrm{SU}(n)$. O fato de $\mathcal{T}$ ser abeliano decorre de $\mathcal{T}$ ser composto por matrizes diagonais.

Para mostrar que $\mathcal{T}$ é compacto, consideremos uma sequência $(A_k) \subseteq \mathcal{T}$ convergindo para A, isso é, existem sequências convergentes $(\lambda_{1_k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{m+1_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tais que,

$$A_k = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_{1_k}} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix}.$$

Como a aplicação exponencial é contínua, temos que A é da forma

$$\begin{bmatrix} e^{i \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_{1_k}} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_{m+1_k}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix},$$

o que mostra que $A \in \mathcal{T}$. Assim, como $\mathrm{SU}(n)$ é um espaço métrico, temos que $\mathcal{T}$ é fechado. Com isso, o fato de que $\mathrm{SU}(n)$ é compacto implica que $\mathcal{T}$ é compacto.

Finalmente, o fato de que $\mathcal{T}$ é conexo segue do Lema 2.55. Logo, concluímos que $\mathcal{T}$ é um toro em $\mathrm{SU}(n)$. $\square$

Nosso objetivo agora é calcular o centralizador de $\mathcal{T}$ em $\mathrm{SU}(n)$, isso é, o conjunto

$$C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T}) = \{A \in \mathrm{SU}(n) \mid AMA^{-1} = M \ \forall M \in \mathcal{T}\}$$

Afirmamos que esse conjunto é formado por matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

onde a dimensão do bloco A_i é d_i como definido acima. Para mostrar isso, primeiramente, tomemos uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1} \end{bmatrix}.$$

Para mostrar que ela é um elemento do centralizador, tomemos uma matriz

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} I_{d_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\lambda_m} I_{d_m} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix} \in \mathcal{T}$$

qualquer. Como a matriz A é diagonal em blocos, sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1}^{-1} \end{bmatrix}$$

e, portanto, temos que

$$\begin{aligned} AMA^{-1} &= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} A_1 A_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} A_{m+1} A_{m+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} I_{d_{m+1}} \end{bmatrix} = M, \end{aligned}$$

mostrando que $A \in C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T})$. Reciprocamente, seja $A \in C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T})$. Desejamos mostrar que A é diagonal em blocos como em (2.2). Para isso, tomemos uma matriz qualquer em $\mathrm{SU}(n)$ que escreveremos como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11} & \cdots & A_{1,m+1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1,1} & A_{m+1,2} & \cdots & A_{m+1,m+1} \end{bmatrix},$$

onde o bloco A_{ii} da diagonal possui dimensão d_i e os blocos da diagonal possuem dimensões apropriadas de acordo com a posição. Agora, seja

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} I_{m+1} \end{bmatrix} \in T$$

uma matriz arbitrária de $\mathcal{T}$. Como $A \in C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T})$, temos que $AMA^{-1} = M$ ou, equivalentemente, $AM = MA$ para toda $M \in \mathcal{T}$. Assim, temos que

$$AM = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} A_{11} & e^{i\lambda_2} A_{12} & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} A_{1,m+1} \\ e^{i\lambda_1} A_{21} & e^{i\lambda_2} A_{22} & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} A_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\lambda_1} A_{m+1,1} & e^{i\lambda_2} A_{m+1,2} & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} A_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

e

$$MA = \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1} A_{11} & e^{i\lambda_1} A_{12} & \cdots & e^{i\lambda_1} A_{1,m+1} \\ e^{i\lambda_2} A_{21} & e^{i\lambda_2} A_{22} & \cdots & e^{i\lambda_2} A_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\lambda_{m+1}} A_{m+1,1} & e^{i\lambda_{m+1}} A_{m+1,2} & \cdots & e^{i\lambda_{m+1}} A_{m+1,m+1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, para $i, j \in \{1, \ldots, m+1\}$, temos que

$$e^{i\lambda_j} A_{ij} = e^{i\lambda_i} A_{ij}.$$

Note que, para $i = j$ a igualdade vale trivialmente. Assim, devemos analisar o caso em que $i \neq j$. Nesse caso, temos que

$$e^{i\lambda_i} A_{ij} = e^{i\lambda_j} A_{ij} \Leftrightarrow (e^{i\lambda_i} - e^{i\lambda_j}) A_{ij} = 0.$$

Em particular, podemos tomar λ_i e λ_j de forma que $e^{i\lambda_i} \neq e^{i\lambda_j}$, de onde concluímos que $A_{ij} = 0$.

O próximo passo consiste em verificar que esse conjunto é a interseção $P_\Theta \cap \mathrm{SU}(n)$, isso é, que

$$P_\Theta \cap \mathrm{SU}(n) = C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T}).$$

A inclusão $C_{\mathrm{SU}(n)}(T) \subseteq P_\Theta \cap \mathrm{SU}(n)$ é direta, uma vez que $C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{SU}(n)$ e as matrizes diagonais em bloco estão em P_Θ. Assim, resta mostrar a outra inclusão. Tomemos uma matriz $A \in P_\Theta \cap \mathrm{SU}(n)$. Em particular, $A \in P_\Theta$ de onde concluímos que A possui a forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}.$$

Agora, matrizes unitárias possuem a propriedade de que suas colunas são ortonormais. No caso da matriz acima, essa propriedade se traduz para os blocos da seguinte maneira: considere o bloco A_{11} e uma coluna c_j com $j > d_1$. Nesse caso, a condição de ortogonalidade se torna

$$A_c^t \overline{c_j} = 0,$$

onde

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esse produto é o mesmo do que as primeiras d_1 entradas de c_j multiplicadas pelo bloco A_{11}. Além disso, A_{11} possui determinante diferente de 0, ou seja, $A_c^t c_j = 0$ implica que as d_1 primeiras entradas de c_j são 0. Assim, concluímos que a matriz A é da forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

isso é, as primeiras d_1 linhas são iguais a 0 a partir da coluna $d_1 + 1$. Continuando esse processo indutivamente para os outros blocos, concluímos que A é diagonal em blocos da forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & A_{m+1,m+1} \end{bmatrix},$$

como desejávamos. Assim, a interseção $P_\Theta \cap \mathrm{SU}(n)$ é o centralizador do toro $\mathcal{T}$ em $\mathrm{SU}(n)$, como observado anteriormente. Assim, temos que

$$\mathbb{F}_K(V) \cong \mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})/P_\Theta \cong \mathrm{SU}(n)/C_{\mathrm{SU}(n)}(\mathcal{T}).$$

Temos dois exemplos de variedades flags importantes, a saber os *espaços projetivos complexos* $\mathbb{CP}^n$ e as *Grassmannianas* de dimensão $k \leq n$.

De fato, consideremos um espaço vetorial V de dimensão n. Dado $k \in \mathbb{N}$ com $0 < k < n$, definimos a Grassmanniana de dimensão k em V como o conjunto

$$\mathbb{G}_k(V) = \{W \leq V \mid \dim W = k\}.$$

Naturalmente, podemos ver que $\mathbb{G}_k(V)$ satisfaz a definição de uma variedade flag como aqui. Mais precisamente, se $K = \{k\}$, então temos

$$\mathbb{G}_k(V) = \mathbb{F}_K(V)$$

e, consequentemente, toda construção feita anteriormente é válida. A saber, as Grassmannianas podem ser vistas como o quociente $\mathrm{Sl}(V)/P_\Theta$, onde P_Θ é formada por matrizes de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$ da forma

$$\begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde $A \in \mathrm{Gl}(k,\mathbb{C})$ e $B \in \mathrm{Gl}(n-k,\mathbb{C})$. Já como o quociente $\mathrm{SU}(n)/K_\Theta$, K_Θ é formado por matrizes de $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde $A \in \mathrm{Gl}(k,\mathbb{C})$ e $B \in \mathrm{Gl}(n-k,\mathbb{C})$.

Particularizando ainda mais, definimos o projetivo em V pelo conjunto

$$\mathbb{P}(V) = \{W \leq V \mid \dim W = 1\}.$$

Naturalmente, se $K' = \{1\}$, temos que

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{G}_1(V) = F_{K'}(V).$$

Neste caso, $\mathbb{P}(V)$ pode ser visto como um quociente $\mathrm{Sl}(V)/P_\Theta$, onde P_Θ é formado por matrizes em $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$ da forma

$$\begin{bmatrix} a & * \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{C}$ e $B \in \mathrm{Gl}(n-1,\mathbb{C})$. Já como um quociente $\mathrm{SU}(n)/K_\Theta$, K_Θ é formado por matrizes de $\mathrm{SU}(n)$ da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

O projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente o caso acima tomando $V = \mathbb{C}^n$.

3 ESTRUTURAS QUASE HERMITIANAS INVARIANTES

3.1 Representação isotrópica

Antes de entrarmos em detalhes sobre as estruturas adicionadas a uma variedade flag, devemos entender o conceito de **representação isotrópica**. Para isso, seguiremos majoritariamente [12].

Sejam G um grupo de Lie, $K \subseteq G$ um subgrupo de G. Consideremos o espaço homogêneo G/K. Denotando a origem em G/K por $x_0 \coloneqq K$, notemos que $kx_0 = x_0$ para todo $k \in K$. Dessa observação, para cada $k \in K$, temos que a translação a esquerda E_k vista como uma aplicação de $G/K \to G/K$ (isso é, $E_k(uK) = kuK$) é tal que $E_k(x_0) = x_0$. Portanto, sua derivada em x_0 é uma aplicação $(dE_k)_{x_0} : T_{x_0}G/K \to T_{x_0}G/K \in \mathrm{Gl}(T_{x_0}G/K)$.

Com isso, podemos definir uma representação de K em $T_{x_0}G/K$

$$\begin{aligned} \iota : K &\to \mathrm{Gl}(T_{x_0}G/K) \\ k &\mapsto (dE_k)_{x_0} \end{aligned}$$

que chamamos de **representação isotrópica** de K em G/K.

Como uma simplificação da notação, no que segue evitaremos usar o índice x_0 em $(dE_k)_{x_0}$ para representar a derivada de E_k na origem. A falta desse índice não irá afetar o entendimento das próximas seções.

Voltando no caso de uma variedade flag, como feito na Seção 2.5, podemos escrever $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ com U compacto. Como veremos adiante na Proposição 3.1, o espaço tangente $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfo a

$$\eta_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\alpha,$$

com $\mathfrak{u}_\alpha = \mathrm{span}_\mathbb{R}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$. Além disso, η_Θ é invariante por $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$, isso é,

$$\mathrm{Ad}(k)\eta_\Theta \subseteq \eta_\Theta \ \forall k \in K_\Theta.$$

Assim, $\mathrm{Ad} : K_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$ é uma representação de K_Θ. Com isso, obtemos os seguintes resultados.

Proposição 3.1. *Se $\pi : U \to \mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ a projeção canônica, então $d_e\pi|_{\eta_\Theta} : \eta_\Theta \to T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Pelo Teorema da variedade quociente [5], a diferencial $d_e\pi : \mathfrak{u} \to T_0\mathbb{F}_\Theta$ é sobrejetora, isso é, dado $v \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, existe $x \in \mathfrak{u}$ tal que $d_e\pi(x) = v$. Agora, temos que a forma real compacta pode ser vista como a soma

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \eta_\Theta,$$

uma vez que

$$\mathfrak{k}_\Theta = i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\alpha \quad \text{e} \quad \eta_\Theta = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Assim, podemos escrever $x = k + n$, onde $k \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $n \in \eta_\Theta$. Porém, note que para todo $k \in \mathfrak{k}_\Theta$ podemos definir a curva $\alpha : \mathbb{R} \to K_\Theta$ por $\alpha(t) = e^{tk}$ tal que $\alpha'(0) = k$ e $\alpha(0) = e$. Além disso, como $\pi(k) = x_0$ para todo $k \in K$, a curva $\pi \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{F}_\Theta$ é constante em x_0, de forma que

$$0 = (\pi \circ \alpha)'(0) = d_e\pi \circ \alpha'(0) = d_e\pi(k).$$

Portanto, para todo $k \in \mathfrak{k}_\Theta$, $d_e\pi(k) = 0$. Assim,

$$v = d_e\pi(x) = d_e\pi(k + n) = d_e\pi(n),$$

mostrando que a restrição $d_e\pi|_{\eta_\Theta}$ é sobrejetora. Finalmente, do fato que $\dim(\eta_\Theta) = \dim(\mathfrak{u}) - \dim(\mathfrak{k}_\Theta) = \dim(\mathbb{F}_\Theta)$, onde a segunda igualdade vale novamente pelo Teorema da variedade quociente, concluímos que $d_e\pi|_{\eta_\Theta}$ é um isomorfismo por ser linear, sobrejetora entre espaços de mesma dimensão. □

Proposição 3.2. *As representações, $\iota : K_\Theta \to \mathrm{Gl}(T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta)$ e $\mathrm{Ad} : K_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$ são equivalentes.*

Demonstração: Seja $X \cdot x_0 \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ e $\gamma(t) = e^{tX} \cdot x_0$ a curva em $\mathbb{F}_\Theta$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = X \cdot x_0$. Assim, temos que

$$\iota(k)(X \cdot x_0) = dE_k(X \cdot x_0) = dE_k(\gamma'(0)) = (E_k \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}(ke^{tX} \cdot x_0)|_{t=0}.$$

Como $E_k(x_0) = x_0$, temos que $x_0 = k^{-1}x_0$. Assim, o termo à esquerda na igualdade acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(ke^{tX} \cdot x_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(ke^{tX}k^{-1} \cdot x_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(C_k(e^{tX}) \cdot x_0)|_{t=0}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\iota(k)(X \cdot x_0) = dE_k(X \cdot x_0) &= \frac{d}{dt}(C_k(e^{tX}) \cdot x_0)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(e^{tdC_k(X)} \cdot x_0)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(e^{t\,\mathrm{Ad}(k)X} \cdot x_0)|_{t=0} \\
&= (\mathrm{Ad}(k)X) \cdot x_0.
\end{aligned}$$

Denotando a identificação $X \cdot x_0 \mapsto X$ por $\phi(X)$, temos que $\iota(k) \circ \phi(X) = \phi \circ \mathrm{Ad}(k)X$, isso é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta & \xrightarrow{\iota(k)} & T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta \\ \phi \big\downarrow & & \big\downarrow \phi \\ \eta_\Theta & \xrightarrow[\mathrm{Ad}(k)]{} & \eta_\Theta \end{array}$$

comuta. Logo, ι e Ad são representações equivalentes. □

Observação 3.3. *A identificação ϕ usada acima é análoga ao isomorfismo entre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G, e o espaço tangente T_eG. No caso de uma variedade flag, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \eta_\Theta$ e, pelas propriedades das variedades flag, esse isomorfismo se transforma em um isomorfismo entre $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ e η_Θ. No que segue, não distinguiremos entre os elementos da álgebra e do espaço tangente, tendo em mente esse isomorfismo a não ser que seja necessário.*

3.2 Conceitos principais

Definição 3.4. *[9] Seja M uma variedade suave. Uma* ***estrutura pseudo-Riemanniana*** *em M é um campo tensorial g tal que,*

(a) $g(X,Y) = g(Y,X)$ para cada $X, Y \in \mathcal{X}(M)$; [1]

(b) para cada $p \in M$, g_p é uma forma bilinear não degenerada em $T_pM \times T_pM$.

Quando para cada p a forma bilinear g_p é ainda positiva definida, dizemos que g é uma ***estrutura Riemanniana*** *ou uma* ***métrica Riemanniana****.*

Existem dois conceitos relacionados aqui que devemos separar em dois casos: quando a variedade M é complexa e quando M é real. Primeiramente, assumiremos M complexa. Nesse caso, para cada $p \in M$, T_pM é um espaço vetorial complexo. Portanto, podemos definir uma aplicação linear $J_p : T_pM \to T_pM$ por $v \mapsto iv$. Com isso, temos um campo tensorial em M que associa cada ponto $p \in M$ à respectiva J_p no espaço tangente a p.

Agora, consideremos M como acima e com uma estrutura Riemanniana g. Nesse caso, g será dita uma **estrutura Hermitiana** ou uma **métrica Hermitiana** quando dados $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$, temos $g_p(J_pX, J_pY) = g_p(X,Y)$. Em outras palavras, uma estrutura Hermitiana é uma métrica Riemanniana tal que cada J_p é uma isometria em T_pM. A estrutura Hermitiana é também representada com um par (J, g) com J o campo

[1] Aqui $\mathcal{X}$ representa o conjunto de campos de vetores suaves sobre M.

tensorial definido acima e g a estrutura Riemanniana apropriada. Uma variedade suave complexa dotada de uma estrutura Hermitiana é chamada de **variedade Hermitiana**.

A partir de uma estrutura Hermitiana (J, g) em M, definimos a **forma fundamental** de g, em cada $p \in M$, por

$$\Omega_p(X, Y) := g_p(X, J_p Y), \text{ para todo } X, Y \in T_p M.$$

Definição 3.5. *[13] Seja M uma variedade suave com estrutura Hermitiana (J, g). Nessas condições, dizemos que g é uma **estrutura de Kähler** ou **Kähleriana** quando sua forma fundamental Ω é fechada, isso é, $d\Omega = 0$. Nesse caso, a forma fundamental é chamada de **forma de Kähler**.*

Naturalmente, em analogia ao que ocorre com uma variedade Hermitiana, uma variedade complexa que possui uma estrutura de Kähler é chamada de **variedade de Kähler** ou **Kähleriana**.

Consideraremos agora o segundo caso, em que M é uma variedade suave real. Em analogia ao que foi feito anteriormente, devemos generalizar a aplicação linear J_p dada pela multiplicação por i. Como nesse caso os espaços tangentes são espaços vetoriais reais, não temos o direito de definir essa aplicação dessa forma. Daí, surge o conceito de *estrutura complexa*.

Definição 3.6. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **estrutura complexa** em V é uma aplicação linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\operatorname{Id}_V$.*

No caso de uma variedade suave real M, um campo tensorial J em M tal que, para cada $p \in M$, $J_p : T_p M \to T_p M$ é uma estrutura complexa em $T_p M$, é chamado de uma **estrutura quase complexa** em M.

Consideremos, agora, g uma métrica Riemanniana e J uma estrutura quase complexa em M. Dizemos que g é uma estrutura Hermitiana em M quando, para todo $p \in M$, $g_p(J_p X, J_p Y) = g_p(X, Y)$ para todos $X, Y \in T_p M$. Nesse caso, M é chamada de uma **variedade quase Hermitiana** e a estrutura Hermitiana é também representada pelo par (J, g).

Finalmente, para generalizar o conceito de uma variedade de Kähler, consideremos uma estrutura Hermitiana (J, g) em M. Nesse caso, para cada ponto $p \in M$, definimos a **forma fundamental** de g da mesma maneira anterior, isso é, $\Omega_p(X, Y) := g_p(X, J_p Y)$ para cada $X, Y \in T_p M$. Finalmente, M será dita uma **variedade quase-Kähler** ou **quase-Kähleriana** quando a forma fundamental de sua métrica Hermitiana for fechada.

Observação 3.7. *As definições de variedades Kähler e quase-Kähler devem ser entendidas como uma variedade com uma estrutura Kähler ou quase Kähler fixa. Porém, se tivermos* *uma variedade que admita uma estrutura Kähler ou quase-Kähler sem que ela seja fixada inicialmente, vamos nos referir a elas como variedades de* ***tipo Kähler*** *ou* ***tipo quase-Kähler****, respectivamente [13, p.116].*

Finalmente, estamos aptos a apresentar um dos principais conceitos do trabalho. Seja M com uma estrutura Hermitiana (J, g) e ∇ sua conexão de Levi-Civita respectiva. Dizemos que M é uma variedade **aproximadamente Kähler** quando vale

$$\nabla_X J(X) = 0 \text{ para todo } X \in \mathcal{X}(M).$$

3.3 Métricas invariantes

Consideremos a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta$. Consideremos a ação de G em $\mathbb{F}_\Theta$ dada por $(g, hK_\Theta) \mapsto ghK_\Theta$. Seja $x_0 = K_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ a origem de $\mathbb{F}_\Theta$.

Sejam $x \in \mathbb{F}_\Theta$ e K um subgrupo de Lie de G. Dizemos que uma métrica Riemanniana b em $\mathbb{F}_\Theta$ é $\boldsymbol{K}-$**invariante** quando, para todo $k \in K$,

$$b_{kx}(dE_k X, dE_k Y) = b_x(X, Y), \text{ para todo } X, Y \in T_x M.$$

Proposição 3.8. *Seja $U \subseteq G$ uma forma real compacta. Dessa forma, U age transitivamente em $M = G/K$ e M possui uma métrica de Kähler $U-$invariante.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [6, p.3]. □

O próximo resultado mostra como podemos definir uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ a partir de um produto interno invariante em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. Antes de enunciá-lo porém, precisamos definir a seguinte noção: dado um espaço homogêneo U/K, dizemos que um produto interno $(\cdot, \cdot)$ é $\boldsymbol{K}-$**invariante** ou **invariante por $\boldsymbol{K}$** quando

$$(AX, AY) = (X, Y), \text{ para todo } A \in \iota(K) \text{ e } X, Y \in T_{x_0}U/K,$$

onde $\iota : K \to \mathrm{Aut}(T_{x_0}U/K)$ é a representação isotrópica de K.

Agora, no caso da variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$, podemos decompor a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \eta_\Theta$, onde η_Θ é invariante pela representação adjunta de $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$. Com isso, estamos aptos a enunciar o próximo resultado.

Proposição 3.9. *Existe uma bijeção entre métricas $U-$invariantes em $\mathbb{F} = U/K_\Theta$ e produtos internos invariantes por K_Θ em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$.*

Demonstração: Seja b uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Consideremos o produto interno em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ definido pela métrica b, isso é,

$$(X, Y) = b_{x_0}(X, Y), \text{ para todo } X, Y \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta.$$

Notemos que a invariância de b implica que, dado $u \in U$, $(X,Y) = b_{ux_0}(dE_uX, dE_uY)$. Assim, resta mostrar que com a definição acima, $(\cdot,\cdot)$ é invariante por K_Θ. Dessa forma, sejam $k \in K_\Theta$ e $X, Y \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. Com isso, temos que

$$(\iota(k)X, \iota(k)Y) = b_{kx_0}(\iota(k)X, \iota(k)Y) = b_{kx_0}(dE_kX, dE_kY) \overset{(*)}{=} b_{x_0}(X,Y) = (X,Y),$$

onde usamos em $(*)$ que b é $U-$invariante, uma vez que $k \in K_\Theta \subseteq U$.

Consideremos, agora, um produto interno K_Θ invariante em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. Para cada $x = uK_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$, defina uma métrica por

$$b_x(X,Y) = (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y) \text{ para todo } X, Y \in T_x\mathbb{F}_\Theta.$$

Para mostrar que b está bem definida, consideremos $y \in \mathbb{F}_\Theta$ tal que $y = x$, isso é, se $y = vK_\Theta$, então existe $k \in K$ tal que $v = uk$. Dessa forma, tomando $X, Y \in T_y\mathbb{F}_\Theta$ temos que

$$\begin{aligned} b_y(X,Y) &= (dE_{v^{-1}}X, dE_{v^{-1}}Y) = \\ &= (dE_{(uk)^{-1}}X, dE_{(uk)^{-1}}Y) = \\ &= (dE_{k^{-1}}dE_{u^{-1}}X, dE_{k^{-1}}dE_{u^{-1}}Y) = \\ &= (\iota(k^{-1})dE_{u^{-1}}X, \iota(k^{-1})dE_{u^{-1}}Y) = \\ &= (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y) = b_x(X,Y). \end{aligned}$$

Portanto, a métrica está bem definida em $\mathbb{F}_\Theta$. Resta mostrar que ela é $U-$invariante. Tomando $x = uK_\Theta$ e $v \in U$, temos

$$\begin{aligned} b_ux(dE_vX, dE_vY) &= (dE_{(vu)^{-1}}dE_vX, dE_{(vu)^{-1}}dE_vY) = \\ &= (dE_{u^{-1}}dE_{v^{-1}}dE_vX, dE_{u^{-1}}dE_{v^{-1}}dE_vY) = \\ &= (dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y) \\ &= b_x(X,Y). \end{aligned}$$

□

Observação 3.10. *A Proposição 3.2 garante que as representações* $\iota : K_\Theta \to \mathrm{Aut}(T_{x_0}U/K_\Theta)$ *e* $\mathrm{Ad} : K_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$ *são equivalentes. Isso significa que um produto interno em* $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ *é* $K_\Theta-$*invariante se, e somente se, o produto interno induzido por ele em* η_Θ *é invariante por* $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$. *Mais precisamente, seja* $(\cdot,\cdot)$ *um produto interno invariante por* K_Θ *em* $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. *Dados* $X, Y \in \eta_\Theta$, *definimos um produto interno em* η_Θ *por*

$$(X,Y)_\Theta = (\phi^{-1}(X), \phi^{-1}Y),$$

onde ϕ é o isomorfismo na demonstração da Proposição 3.2. Com isso, dado $k \in K_\Theta$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y)_\Theta &= (\phi^{-1}(\mathrm{Ad}(k)X), \phi^{-1}(\mathrm{Ad}(k)Y))\\ &= (\iota(k)(\phi^{-1}(X)), \iota(k)(\phi^{-1}(Y)))\\ &= (\phi^{-1}(X), \phi^{-1}(Y))\\ &= (X, Y)_\Theta.\end{aligned}$$

Devido a essa identificação, um produto interno invariante por K_Θ pode representar tanto um produto interno em η_Θ invariante pela adjunta ou um produto interno em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ invariante pela representação isotrópica. No texto que segue, confundiremos essas duas noções, uma vez que esse é o comum de ser encontrado na literatura.

Notemos que a forma de Cartan-Killing é não-degenerada em $\eta_\Theta = T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ pois η_Θ está contida na forma real compacta $\mathfrak{u}$[2]. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz, sabemos que existe uma transformação linear Λ tal que

$$(X, Y)_\Theta = -\langle \Lambda X, Y\rangle \text{ para todo } X, Y \in \eta_\Theta,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa a forma de Cartan-Killing. O sinal negativo na expressão acima decorre do fato que $\eta_\Theta \subseteq \mathfrak{u}$, que é a forma real compacta, onde a forma de Cartan-Killing é negativa definida A.11. Além disso, como $(\cdot,\cdot)$ é não-degenerado e positivo definido (por ser um produto interno), temos que a transformação Λ é inversível e positiva definida. Além disso, por ser um operador positivo, temos que Λ é diagonalizável.

A partir de um produto interno $(\cdot,\cdot)$ podemos encontrar uma forma bilinear simétrica para $\mathfrak{q}_\Theta = \eta_\Theta^{\mathbb{C}}$. A complexificação $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ do produto interno de η_Θ é definida por

$$(X_1 + iY_1, X_2 + iY_2)_{\mathbb{C}} := [(X_1, X_2) - (Y_1, Y_2)] + i[(Y_1, X_2) + (X_1, Y_2)].$$

O fato de que $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ é simétrica decorre da própria simetria de $(\cdot,\cdot)$. Além disso, essa forma bilinear continua sendo não degenerada. Com efeito, se $X_0 + iY_0 \in \eta_\Theta^{\mathbb{C}}$ é tal que $(X_0 + iY_0, X + iY)_{\mathbb{C}} = 0$ para todo $X + iY \in \eta_\Theta^{\mathbb{C}}$, então

$$0 = (X_0 + iY_0, X + iY)_{\mathbb{C}} = [(X_0, X) - (Y_0, Y)] + i[(Y_0, X) + (X_0, Y)],$$

isso é, $(X_0, X) = -(Y_0, Y)$ e $(Y_0, X) = (X_0, Y)$. Como X e Y são arbitrários, tomando $Y = 0$ obtemos $(X_0, X) = 0$ e, como $(\cdot,\cdot)$ é não degenerado, $X_0 = 0$. Por um argumento análogo, concluímos que $Y_0 = 0$ e, portanto, $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ também é não degenerado. Assim, a complexificação do produto interno define uma forma bilinear não-degenerada em $\eta_\Theta^{\mathbb{C}}$.

A complexificação dessa forma bilinear simétrica nos permite associar um operador linear com a forma de Cartan-Killing. Como esses operadores agem de forma similar, seja

[2] Para mais detalhes sobre formas reais compactas vide A.11.

complexificado ou não, utilizaremos a mesma letra para representar os dois, de forma a evitar notações exageradamente complicadas.

Proposição 3.11. *O operador* Λ *comuta com* $\mathrm{Ad}(k)$ *para todo* $k \in K_\Theta$*.*

Demonstração: Sejam $k \in K_\Theta$, $X, Y \in \eta_\Theta$. Como $(\cdot,\cdot)$ é invariante por $\mathrm{Ad}(k)$ para todo $k \in K_\Theta$, temos que

$$(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = (X, Y) = -\langle \Lambda(X), Y\rangle.$$

Por outro lado,

$$(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = -\langle \Lambda(\mathrm{Ad}(k)X), \mathrm{Ad}(k)Y\rangle.$$

Assim, temos a igualdade

$$\langle \Lambda(\mathrm{Ad}(k)X), \mathrm{Ad}(k)Y\rangle = \langle \Lambda(X), Y\rangle.$$

Agora, sabemos que a forma de Cartan-Killing é invariante por automorfismos de η_Θ. Assim,

$$\langle \Lambda(\mathrm{Ad}(k)X), \mathrm{Ad}(k)Y\rangle = \langle \Lambda(X), Y\rangle = \langle \mathrm{Ad}(k)\Lambda(X), \mathrm{Ad}(k)Y\rangle,$$

de onde obtemos

$$\langle \Lambda(\mathrm{Ad}(k)X) - \mathrm{Ad}(k)\Lambda(X), \mathrm{Ad}(k)Y\rangle = 0.$$

Como $\mathrm{Ad}(k)$ é um isomorfismo e Y é arbitrário, essa igualdade é válida para todo elemento de η_Θ na segunda entrada. Portanto, do fato de que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não-degenerada em η_Θ, concluímos que

$$\Lambda(\mathrm{Ad}(k)X) = \mathrm{Ad}(k)\Lambda(X),$$

para todo $k \in K_\Theta$ e todo $X \in \eta_\Theta$. □

Corolário 3.12. *O operador* Λ *comuta com* $\mathrm{ad}(L)$ *para todo* $L \in \mathfrak{k}_\Theta$*.*

Demonstração: Sejam $L \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $X \in \eta_\Theta$. Pela Proposição 3.11, temos que

$$\Lambda(\mathrm{Ad}(e^{tL}))(X) = (\mathrm{Ad}(e^{tL}))\Lambda(X), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, derivando em $t = 0$, obtemos

$$\Lambda(\mathrm{ad}(L))(X) = \frac{d}{dt}(\Lambda(\mathrm{Ad}(e^{tL})))|_{t=0}(X) = \frac{d}{dt}((\mathrm{Ad}(e^{tL}))\Lambda|_{t=0})(X) = (\mathrm{ad}(L))\Lambda(X).$$

□

Como observado no parágrafo acima da Proposição 3.2, $\mathrm{Ad} : K_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$ é uma representação de K_Θ em η_Θ. Em consequência, $\mathrm{ad} : \mathfrak{k}_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$ é uma representação de $\mathfrak{k}_\Theta$ em η_Θ. O mesmo vale para o complexificado, isso é, $\mathrm{ad} : \mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}_\Theta)$ é uma representação de $\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{q}_\Theta$, respectivamente. Como ad é uma representação semissimples, $\mathfrak{q}_\Theta$ pode ser decomposto como

$$\mathfrak{q}_\Theta = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

Como a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ está contida em $\mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}}$, segue que cada V_i na decomposição acima é invariante por $\mathrm{ad}(H)$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Além disso, a decomposição

$$\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_\alpha$$

é a decomposição primária dos elementos regulares $H \in \mathfrak{h}$. Agora, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 3.13. *Seja $T : V \to V$ um operador linear e $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ uma decomposição primária de T. Dessa forma, se $W \leq V$ é invariante por T, então*

$$W = (W \cap V_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_s)$$

Demonstração: Exercício 10 da seção 6.8 de [14]. □

A Proposição 3.13 implica que cada V_i na decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{k}_\Theta^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{q}_\Theta)$ pode ser escrito como

$$V_i = \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} (V_i \cap \mathfrak{g}_\alpha).$$

Como cada $\mathfrak{g}_\alpha$ é unidimensional, a interseção ou é trivial, ou contém $\mathfrak{g}_\alpha$. Logo, cada V_i é um somatório de espaços de raízes. Mais precisamente, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, existe um conjunto de raízes $A(i) \subseteq \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$ tal que

Proposição 3.14. $V_i = \sum_{\alpha \in A(i)} \mathfrak{g}_\alpha$.

Antes de demonstrar a próxima proposição, necessitaremos dos seguintes lemas anteriores.

Lema 3.15. *Seja $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ um elemento regular. Dessa forma, a decomposição*

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$$

é a decomposição primária de $\mathrm{ad}(iH)$.

Demonstração: Notemos que $\mathfrak{u}_\alpha = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$ e, para todo $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$

$$\text{ad}(iH)A_\alpha = \alpha(H)iS_\alpha \quad \text{e} \quad \text{ad}(iH)iS_\alpha = -\alpha(H)A_\alpha.$$

Essas duas igualdades podem ser demonstradas como na Proposição A.51. Portanto $\mathfrak{u}_\alpha$ é invariante por $\text{ad}(i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$ e, para todo $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, a matriz de $\text{ad}(iH)$ restrita a $\mathfrak{u}_\alpha$ é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha(H) \\ \alpha(H) & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, se $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é elemento regular, então $\alpha(H) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Pi$ e, portanto,

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$$

é a decomposição primária de $\text{ad}(iH)$. □

Lema 3.16. *Se $W \subseteq \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$ é invariante por $\text{ad}(i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})$, então existe um subconjunto $A \subseteq \Pi$ tal que*

$$W = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Demonstração: De fato, tomemos $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ regular. Como

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$$

é a decomposição primária de $\text{ad}(iH)$ pelo Lema 3.15, temos, pela Proposição 3.13, que

$$W = (W \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\mathfrak{u}_\alpha \cap W).$$

Primeiramente, notemos que como $W \subseteq \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{u}_\alpha$, temos que $W \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$ e, portanto,

$$W = \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\mathfrak{u}_\alpha \cap W).$$

Agora, mostraremos que, para cada $\alpha \in \Pi^+$, $\mathfrak{u}_\alpha \cap W = \{0\}$ ou $\mathfrak{u}_\alpha \cap W = \mathfrak{u}_\alpha$. Para isso, suponhamos que $\mathfrak{u}_\alpha \cap W$ não é trivial e tomemos $X \in \mathfrak{u}_\alpha \cap W$ tal que $X \neq 0$. Assim, podemos escrever

$$X = aA_\alpha + biS_\alpha$$

de forma que

$$\text{ad}(iH)X = a\alpha(H)iS_\alpha - b\alpha(H)A_\alpha.$$

Portanto, $\text{ad}(iH)X \in W \cap \mathfrak{u}_\alpha$, pois W e $\mathfrak{u}_\alpha$ são invariantes por $\text{ad}(iH)$. Como H é regular, $\alpha(H) \neq 0$. Assim, segue que $\{X, \text{ad}(iH)X\} \subseteq W \cap \mathfrak{u}_\alpha$ é linearmente independente. Logo, ou $\mathfrak{u}_\alpha \cap W$ é trivial ou $\mathfrak{u}_\alpha \cap W = \mathfrak{u}_\alpha$ como desejávamos. □

Proposição 3.17. *Sejam $X, Y \in \eta_\Theta$. Se um produto interno em η_Θ da forma*

$$(X,Y) = -\langle \Lambda(X), Y\rangle$$

é invariante por $\mathrm{Ad} : K_\Theta \to \mathfrak{gl}(\eta_\Theta)$*, então A_α e iS_α são autovetores de Λ com o mesmo autovalor.*

Demonstração: Como mencionado anteriormente na definição do operador Λ, ele é um operador diagonalizável. Assim, existe uma decomposição de η_Θ por autoespaços de Λ, isso é,

$$\eta_\Theta = \mathrm{Aut}(\Lambda, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Aut}(\Lambda, \lambda_s).$$

Pelo Corolário 3.12, Λ comuta com $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_\Theta)$, temos que cada autoespaço é invariante por $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_\Theta)$. Em particular, cada autoespaço é invariante por $\mathrm{ad}(i\mathfrak{h}_\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 3.16, existe, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, um conjunto $A(i) \subseteq \Pi$ tal que

$$\mathrm{Aut}(\Lambda, \lambda_i) = \sum_{\alpha \in A(i)} \mathfrak{u}_\alpha.$$

Consequentemente, dado $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, $A_\alpha, iS_\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda, \lambda_{i_0})$, para algum $i_0 \in \{1, \dots, s\}$, ou seja, são autovalores de Λ associados ao mesmo autovalor.

□

Proposição 3.18. *Para cada $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ temos que $\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha$. Além disso, $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$ e $\lambda_\alpha > 0$, para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$.*

Demonstração: Consideremos a igualdade

$$X_\alpha = \frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Lambda(X_\alpha) &= \Lambda\left(\frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}[\Lambda(A_\alpha) - i\Lambda(iS_\alpha)] \\
&= \frac{1}{2}[\lambda_\alpha A_\alpha - i\lambda_\alpha(iS_\alpha)] \\
&= \lambda_\alpha \frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2} \\
&= \lambda_\alpha X_\alpha.
\end{aligned}$$

Para mostrar que $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$, notemos primeiramente que

$$X_\alpha = \frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2} = \frac{-A_{-\alpha} - i(iS_{-\alpha})}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha X_\alpha &= \Lambda(X_\alpha)\\
&= \Lambda\left(\frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2}\right)\\
&= \Lambda\left(\frac{-A_{-\alpha} - i(iS_{-\alpha})}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}(-\lambda_{-\alpha}A_{-\alpha} - i\lambda_{-\alpha}(iS_{-\alpha}))\\
&= \lambda_{-\alpha}X_\alpha,
\end{aligned}$$

mostrando que os autovalores λ_α são simétricos com relação às raízes. Além disso, como Λ é um operador positivo seus autovalores são positivos, concluindo a demonstração. $\square$

Os resultados anteriores nos permitem descrever uma métrica $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta$, a partir apenas da família de autovalores $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$. De fato, pela Proposição 3.9, uma métrica $U-$invariante qualquer em $\mathbb{F}_\Theta$ é determinada por um produto interno $K_\Theta-$invariante em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ que, pela Proposição 3.1 é da forma

$$T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta \cong \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\mathfrak{u}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{u}_\alpha = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$. Portanto, dados $x = uK_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ e $X, Y \in T_x\mathbb{F}_\Theta$, temos que uma métrica invariante b em $\mathbb{F}_\Theta$ é tal que

$$b_x(X,Y) = b_{x_0}(dE_{u^{-1}}X, dE_{u^{-1}}Y) = -\langle\Lambda(dE_{u^{-1}}X), dE_{u^{-1}}Y\rangle,$$

onde Λ decorre do Teorema da Representação de Riesz. Como $X' := dE_{u^{-1}}X, Y' := dE_{u^{-1}}Y \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta \cong \eta_\Theta$, temos que eles podem ser escritos como

$$X' = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(x_{\alpha 1}A_\alpha + x_{\alpha 2}iS_\alpha) \ \text{ e } \ Y' = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha),$$

com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
-\langle X', Y'\rangle &= -\left\langle \Lambda\left(\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} x_{\alpha 1}A_\alpha + x_{\alpha 2}iS_\alpha\right), \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle \\
&= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\left\langle \Lambda(x_{\alpha 1}A_\alpha + x_{\alpha 2}iS_\alpha), \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle \\
&= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\left[\left\langle \Lambda(x_{\alpha 1}A_\alpha), \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle\right. \\
&\left. + \left\langle \Lambda(x_{\alpha 2}iS_\alpha), \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle\right] \\
&= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\left[x_{\alpha 1}\lambda_\alpha\left\langle A_\alpha, \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle\right. \\
&\left. + x_{\alpha 2}\lambda_\alpha\left\langle iS_\alpha, \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(y_{\alpha 1}A_\alpha + y_{\alpha 2}iS_\alpha)\right\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Como os vetores A_α e iS_α, com α percorrendo $\Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle$, são ortogonais com respeito à forma de Cartan-Killing e usando que $A_{-\alpha} = -A_\alpha$ e $iS_{-\alpha} = iS_\alpha$, a expressão acima se torna

$$
\begin{aligned}
-\langle X', Y'\rangle &= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}[x_{\alpha 1}\lambda_\alpha\langle A_\alpha, y_{\alpha 1}A_\alpha\rangle + x_{\alpha 1}\lambda_\alpha\langle A_\alpha, y_{-\alpha 1}A_{-\alpha}\rangle \\
&+ x_{\alpha 2}\lambda_\alpha\langle iS_\alpha, y_{\alpha 2}iS_\alpha\rangle + x_{\alpha 2}\lambda_\alpha\langle iS_\alpha, y_{-\alpha 2}iS_{-\alpha}\rangle] \\
&= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}[x_{\alpha 1}\lambda_\alpha y_{\alpha 1}\langle A_\alpha, A_\alpha\rangle + x_{\alpha 1}\lambda_\alpha y_{-\alpha 1}\langle A_\alpha, A_{-\alpha}\rangle \\
&+ x_{\alpha 2}\lambda_\alpha y_{\alpha 2}\langle iS_\alpha, iS_\alpha\rangle + x_{\alpha 2}\lambda_\alpha y_{-\alpha 2}\langle iS_\alpha, iS_{-\alpha}\rangle].
\end{aligned}
$$

Finalmente, temos que $\langle A_\alpha, A_\alpha\rangle = \langle iS_\alpha, iS_\alpha\rangle = -2$, de forma que

$$
\begin{aligned}
-\langle X', Y'\rangle &= -\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}(-2\lambda_\alpha x_{\alpha 1}y_{\alpha 1} + 2\lambda_\alpha x_{\alpha 1}y_{-\alpha 1} - 2\lambda_\alpha x_{\alpha 2}y_{\alpha 2} - 2\lambda_\alpha x_{\alpha 2}y_{-\alpha 2}) \\
&= 2\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\lambda_\alpha(x_{\alpha 1}y_{\alpha 1} - x_{\alpha 1}y_{-\alpha 1} + x_{\alpha 2}y_{\alpha 2} + x_{\alpha 2}y_{-\alpha 2}),
\end{aligned}
$$

mostrando que a métrica depende somente dos valores $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$. Portanto, a partir desse ponto, nos referiremos apenas ao conjunto $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ quando nos referirmos a uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$.

Lema 3.19. *Seja $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Dessa forma, se $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ são tais que $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ estão na mesma componente irredutível da decomposição de $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$, então $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$.*

Demonstração: Como feito na demonstração da Proposição 3.17, se $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ estão na mesma componente irredutível de $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$, então eles estão no mesmo autoespaço de Λ. Logo, estão associados ao mesmo autovalor de Λ.

□

3.4 Estruturas quase complexas invariantes

Temos uma situação similar para as estruturas quase complexas invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$, no sentido em que elas podem ser determinadas por um conjunto de valores numéricos.

Definição 3.20. *Seja V um espaço vetorial real. Uma* ***estrutura complexa*** *em V é uma aplicação linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\,\mathrm{Id}_V$.*

Considerando agora uma variedade suave M, quando cada espaço tangente de M possui uma estrutura complexa, dizemos que M possui uma **estrutura quase complexa**. Mais precisamente, uma estrutura quase complexa em M é um campo tensorial $J : TM \to TM$ tal que, para cada $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ é uma estrutura complexa.

Como fizemos anteriormente para as métricas, estamos interessados aqui em trabalhar com uma estrutura quase complexa em uma variedade flag, que seja invariante em certo sentido.

Definição 3.21. *Sejam $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ uma variedade flag e J uma estrutura quase complexa em $\mathbb{F}_\Theta$. Dizemos que J é uma* ***estrutura quase complexa $U-$invariante*** *quando, para cada $u \in U$,*

$$J_{ux_0} = dE_u J_{x_0} dE_{u^{-1}}.$$

De forma equivalente, a definição acima significa que para todo $X \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$

$$dE_u J_{x_0} X = J_{ux_0} dE_u X.$$

Assim como no caso das métricas, as estruturas quase complexas invariantes são determinadas unicamente a partir de estruturas complexas no espaço tangente à origem da variedade flag.

Proposição 3.22. *Existe uma bijeção ϕ^* entre as estruturas complexas em η_Θ e as estruturas complexas em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. Além disso, dados $k \in K_\Theta$ e $\widetilde{J}$ estrutura complexa em η_Θ tem-se que $\mathrm{Ad}(k)\widetilde{J} = \widetilde{J}\mathrm{Ad}(k)$ se, e somente se, $\iota(k)\phi^*(\widetilde{J}) = \phi^*(\widetilde{J})\iota(k)$.*

Demonstração: Seja $\phi : \eta_\Theta \to T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ o isomorfismo da Proposição 3.1. A aplicação ϕ^* definida por $\phi^*(\widetilde{J}) = \phi \circ \widetilde{J} \circ \phi^{-1}$ é uma bijeção entre o conjunto das estruturas complexas em η_Θ e o conjunto das estruturas complexas em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, o que demonstra a primeira afirmação.

Para a segunda afirmação sejam $k \in K_\Theta$ e $\widetilde{J}$ estrutura complexa em η_Θ. Dado $X \in \eta_\Theta$ tem-se, por definição de ϕ, que $\phi(X) = X \cdot x_0$ e, pela Proposição 3.2, $\iota(k)(X \cdot x_0) = (\mathrm{Ad}(k)X) \cdot x_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
(\iota(k)\phi^*(\widetilde{J}))(X \cdot x_0) &= \iota(k)(\phi^*(\widetilde{J})(X \cdot x_0)) \\
&= \iota(k)(\phi(\widetilde{J}(X))) \\
&= \iota(k)(\widetilde{J}(X) \cdot x_0) \\
&= (\mathrm{Ad}(k)\widetilde{J}(X)) \cdot x_0 \\
&= \phi(\mathrm{Ad}(k)\widetilde{J}(X))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\phi^*(\widetilde{J})\iota(k))(X \cdot x_0) &= \phi^*(\widetilde{J})(\iota(k)(X \cdot x_0)) \\
&= \phi^*(\widetilde{J})((\mathrm{Ad}(k)X) \cdot x_0) \\
&= \phi^*(\widetilde{J})(\phi(\mathrm{Ad}(k)X)) \\
&= \phi(\widetilde{J}(\mathrm{Ad}(k)X)).
\end{aligned}$$

Portanto, como ϕ é bijetora e X é arbitrário, tem-se que $\mathrm{Ad}(k)\widetilde{J} = \widetilde{J}\mathrm{Ad}(k)$ se, e somente se, $\iota(k)\phi^*(\widetilde{J}) = \phi^*(\widetilde{J})\iota(k)$. □

Proposição 3.23. *Existe uma bijeção entre estruturas quase complexas $U-$invariantes J em $\mathbb{F}_\Theta$ e estruturas complexas J' em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ tais que*

$$\iota(k)J' = J'\iota(k)$$

para todo $k \in K_\Theta$.

Demonstração: Seja J uma estrutura quase complexa $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta$, isso é, para todo $u \in U$ e todo $x \in \mathbb{F}_\theta$ vale que

$$dE_u J_x = J_{ux} dE_u.$$

Dessa forma, como $K_\Theta \subseteq U$, temos em particular

$$dE_k J_x = J_{kx} dE_k$$

para cada $k \in K_\Theta$. Tomando $x = x_0$ na expressão acima e usando que $kx_0 = x_0$ para todo $k \in K_\Theta$, obtemos

$$\iota(k)J_{x_0} = dE_k J_{x_0} = J_{kx_0} dE_k = J_{x_0} dE_k = J_{x_0}\iota(k).$$

Reciprocamente, seja J' uma estrutura complexa em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ satisfazendo a condição enunciada. Para cada $x = ux_0 \in \mathbb{F}_\Theta$, definamos a estrutura complexa em $T_x\mathbb{F}_\Theta$ por

$$J_x = dE_u J' dE_{u^{-1}}.$$

Note que com essa definição

$$\begin{aligned}(J_x)^2 &= (dE_u J' dE_{u^{-1}})^2 \\ &= (dE_u J' dE_{u^{-1}}) \cdot (dE_u J' dE_{u^{-1}}) \\ &= dE_u J' dE_{u^{-1}} = dE_u J'^2 dE_{u^{-1}} \\ &= \mathrm{id}_{T_x\mathbb{F}_\Theta}.\end{aligned}$$

Agora, mostremos que essa expressão está bem definida, no sentido de uma estrutura quase complexa. Para isso, tomemos $x' = u'x_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ tal que $x' = u'x_0 = ux_0 = x$. Assim, temos que existe $k \in K_\Theta$ tal que $u' = uk$. Portanto,

$$J_{x'} = dE'_u J' dE_{u^{-1}} = dE_{uk} J' dE_{(uk)^{-1}} = dE_u dE_k J' dE_{k^{-1}} dE_{u^{-1}}.$$

Usando a condição da hipótese, obtemos

$$J_{x'} = dE_u J' dE_{u^{-1}} = J_x,$$

mostrando a boa definição. Com isso obtemos uma estrutura quase complexa em $\mathbb{F}_\Theta$. Resta mostrar que ela é invariante por U. Com efeito dados $v \in U$ e $x = ux_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ temos que

$$J_{vx} dE_v = dE_{vu} J' dE_{(vu)^{-1}} dE_v = dE_v dE_u J' dE_{u^{-1}} dE_{v^{-1}} dE_v = dE_v J_x,$$

mostrando que J é $U-$invariante. □

O resultado acima mostra que uma estrutura quase complexa em uma variedade flag pode ser identificada como uma estrutura complexa no espaço tangente à origem. Assim, é interessante voltarmos ao resultado da Proposição 3.1 que mostra que o espaço tangente à origem é da forma

$$T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta \cong \eta_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\alpha,$$

onde $\mathfrak{u}_\alpha = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$. Também vimos anteriormente, na Proposição 3.1, que $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \eta_\Theta$ com $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_\Theta) \subseteq \eta_\Theta$. Assim, $\mathfrak{k}_\Theta$ pode ser representado em η_Θ. Com isso, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.24. *Se J é uma estrutura quase complexa quase $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$, então*

$$J_{x_0}\,\mathrm{ad}(L) = \mathrm{ad}(L) J_{x_0},$$

para todo $L \in \mathfrak{k}_\Theta$.

Demonstração: Pelas proposições 3.23 e 3.2, temos que

$$\operatorname{Ad}(k)J_{x_0} = J_{x_0}\operatorname{Ad}(k)$$

para todo $k \in K_\Theta$. Assim, seja $L \in \mathfrak{k}_\Theta$ e $k(t) = e^{tL}$ com $t \in \mathbb{R}$ uma curva em K_Θ. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(L)J_{x_0} &= d\operatorname{Ad}(\frac{d}{dt}k(t)))|_{t=0}J_{x_0} \\
&= \frac{d}{dt}\operatorname{Ad}(k(t))|_{t=0}J_{x_0} \\
&= \frac{d}{dt}J_{x_0}\operatorname{Ad}(k(t)) \\
&= J_{x_0}\frac{d}{dt}\operatorname{Ad}(k(t))|_{t=0} \\
&= J_{x_0}\operatorname{ad}(L).
\end{aligned}$$

□

Agora, trabalharemos com o espaço tangente complexificado $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}$. Como a complexificação de espaços vetorial é um funtor covariante, vale o isomorfismo

$$T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} \cong \eta_\Theta^\mathbb{C} = q_\Theta = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\mathfrak{g}_\alpha.$$

Para cada ponto $x \in \mathbb{F}_\Theta$, a estrutura complexa J_x pode ser complexificada, da forma usual, isso é,

$$\begin{aligned}
J_x^\mathbb{C} : T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} &\to T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} \\
X + iY &\mapsto J_x(X) + iJ_x(Y).
\end{aligned}$$

Note que $J_x^\mathbb{C}$ ainda é um operador idempotente em $T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}$, pois

$$(J_x^\mathbb{C})^2(v+iu) = J_x^2(v) + iJ_x^2(u) = -v - iu = -\operatorname{id}_{T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta}(v+iu).$$

Disso, se $X \in T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}$ é um autovetor de $J_x^\mathbb{C}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}$, então

$$-X = (J_x^\mathbb{C})^2X = \lambda^2X,$$

de onde concluímos que os autovalores λ de $J_x^\mathbb{C}$ são i e $-i$. Para cada espaço tangente $T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}$, os autoespaços associados a cada um desses autovalores será denotado por

$$T_x^{(0,1)}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} := \operatorname{aut}(J_x^\mathbb{C}, i) \;\text{ e }\; T_x^{(1,0)}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} := \operatorname{aut}(J_x^\mathbb{C}, -i),$$

de forma que,

$$T_x\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} = T_x^{(0,1)}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C} \oplus T_x^{(1,0)}\mathbb{F}_\Theta^\mathbb{C}.$$

Para evitar pesar a notação demais nas próximas seções, omitiremos os índices $\mathbb{C}$ quando tratarmos da complexificação dos espaços tangentes. Isso não deve gerar confusão, pois a natureza dos espaços adiante ficará clara a partir do contexto de trabalho.

Proposição 3.25. *Se $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ é invariante por J_{x_0}.*

Demonstração: Sejam $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Assim, temos que $[H, X] = \alpha(H)X$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Em particular, como $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{k}_\Theta$, tomando $H \in \mathfrak{h}$ temos, pelo Lema 3.24,

$$[H, J_{x_0}X] = \operatorname{ad}(H)J_{x_0}X = J_{x_0}\operatorname{ad}(H)X = J_{x_0}[H, X] = J_{x_0}\alpha(H)X = \alpha(H)J_{x_0}X.$$

Logo, pelo Corolário A.30, concluímos que $J_{x_0}X \in \mathfrak{g}_\alpha$. □

Proposição 3.26. *Se $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, então os espaços $\mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$ são invariantes por J_{x_0}.*

Demonstração: Sejam $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ e $X \in \mathfrak{u}_\alpha$. Assim, $X = X_1 + X_2$, com $X_1 \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $X_2 \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Assim, pela Proposição 3.25, temos que

$$J_{x_0}X = J_{x_0}(X_1 + X_2) = J_{x_0}X_1 + J_{x_0}X_2 \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Além disso, temos que $X \in \mathfrak{u}_\alpha \subseteq \eta_\Theta$. Agora, como J_{x_0} é uma aplicação $\eta_\Theta \to \eta_\Theta$, temos que $J_{x_0}X \in \eta_\Theta \subseteq \mathfrak{u}$. Logo, $\mathfrak{u}_\alpha$ é invariante por J_{x_0} para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$. □

Trabalharemos agora com a complexificação dos espaços $\mathfrak{u}_\alpha$. Podemos verificar que

$$\mathfrak{u}_\alpha^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Consideremos a restrição $J_{x_0}|_{\mathfrak{u}_\alpha}$ e sua respectiva complexificação ao espaço $\mathfrak{u}_\alpha^{\mathbb{C}}$ que denotaremos por J_α. Seguindo o que fizemos anteriormente para $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, podemos encontrar subespaços $\mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}$ e $\mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$ associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, tais que

$$\mathfrak{u}_\alpha^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)} \oplus \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}.$$

Notemos que, pela Proposição 3.25, os espaços $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ são invariantes por J_{x_0} e consequentemente J_α. Assim, $J_\alpha\mathfrak{g}_\alpha = i\mathfrak{g}_\alpha$ ou $J_\alpha\mathfrak{g}_\alpha = -i\mathfrak{g}_\alpha$, de forma que

$$\mathfrak{g}_\alpha \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{g}_\alpha \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}.$$

Como $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 = \dim \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)} = \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)}$, temos duas possibilidades

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}_\alpha \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)} \ \text{ e } \ \mathfrak{g}_{-\alpha} \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)} \quad \text{ou} \\ &\mathfrak{g}_\alpha \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(0,1)} \ \text{ e } \ \mathfrak{g}_{-\alpha} \leq \mathfrak{u}_\alpha^{(1,0)}. \end{aligned}$$

Sendo essas as duas únicas possibilidade, concluímos que existem apenas duas estruturas complexas em $\mathfrak{u}_\alpha$ que comutam com $\operatorname{ad}(K)$ para todo $K \in \mathfrak{k}_\Theta$. Mais explicitamente, dado $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ ou $J_{x_0}X = iX$ ou $J_{x_0}X = -iX$. Com isso temos a seguinte proposição.

Proposição 3.27. *Uma estrutura complexa em* $\mathfrak{q}_\Theta = \eta_\Theta^{\mathbb{C}}$ *que comuta com* $\mathrm{Ad}(k)$ *para todo* $k \in K_\Theta$ *é determinada unicamente por um conjunto* $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$*, onde* $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ *e* $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$.

Demonstração: Para cada $X \in \mathfrak{q}_\Theta$, podemos escrever

$$X = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} z_\alpha \mathfrak{g}_\alpha,$$

onde $z_\alpha \in \mathbb{C}$. Assim, aplicando J_{x_0} obtemos

$$J_{x_0}(X) = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\Theta} z_\alpha J_\Theta(X_\alpha).$$

Agora, pela discussão acima, para cada $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$

$$J_{x_0}(X_\alpha) = \pm i X_\alpha,$$

isso é,

$$J_{x_0}(X) = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\Theta} z_\alpha J_\Theta(X_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Pi\setminus\Theta} z_\alpha \varepsilon_\alpha X_\alpha$$

com $\varepsilon_\alpha = \pm 1$.

Para a segunda afirmação, tomemos $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $J_{x_0}(X_\alpha) = iX_\alpha$, isso é, $\varepsilon_\alpha = 1$. Nesse caso, pela discussão anterior, temos que $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{u}^{(0,1)}$, que é o autoespaço associado ao autovalor $-i$, de forma que

$$J_{x_0}(X_{-\alpha}) = -iX_{-\alpha},$$

isso é, $\varepsilon_{-\alpha} = -1 = -\varepsilon_\alpha$. □

Observação 3.28. *Note que a natureza binária dos números* ε_α *implicam que se* $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$*, então* $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$*. Naturalmente, disso segue que*

$$\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta \ \text{ e } \ \varepsilon_\beta \neq \varepsilon_\gamma \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\gamma.$$

No que segue, usaremos essas propriedades sem mencioná-las diretamente, para evitar complicar os argumentos desnecessariamente.

Corolário 3.29. *Uma estrutura quase complexa* $U-$*invariante em* $\mathbb{F}_\Theta$ *é determinada unicamente por um conjunto* $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ *tal que* $\varepsilon = \pm 1$ *para cada* α *e* $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$.

Demonstração: Basta observar que esse conjunto define uma única estrutura complexa no espaço tangente $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, que comuta com $\mathrm{Ad}(K)$ para todo $k \in K_\Theta$. Assim, pela Proposição 3.23, o resultado segue. □

Tendo em mente esse resultado, quando nos referirmos a uma estrutura quase complexa $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta$, estaremos nos referindo apenas ao conjunto $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$.

Lema 3.30. *Seja* $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\in\setminus\langle\Theta\rangle}$ *uma estrutura quase complexa* $U-$*invariante em* $\mathbb{F}_\Theta$*. Dessa forma, se* $\alpha,\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle$ *são tais que* $\mathfrak{g}_\alpha$ *e* $\mathfrak{g}_\beta$ *estão na mesma componente irredutível de* $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$ *em* $\mathfrak{q}_\Theta$*, então* $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta$*.*

Demonstração: A demonstração é análoga à feita no Lema 3.19, usando-se o fato de que $\mathrm{Ad}(k)$ e J comutam para todo $k\in K_\Theta$. □

3.5 Forma de Kähler

Com uma estrutura quase complexa e uma métrica, ambas invariantes por U, podemos pensar em uma *estrutura quase Hermitiana.* A saber, uma métrica g em uma variedade suave M é chamada de **estrutura quase Hermitiana** quando, para todo $p\in M$,

$$g_p(J_pv,J_pu)=g_p(v,u)\text{ para todo }\ v,u\in T_pM,$$

onde J é uma estrutura quase complexa em M.

Voltando ao nosso contexto anterior, dadas uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$, uma estrutura quase complexa invariante e uma métrica $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta$, notemos que, para todo $x=ux_0\in\mathbb{F}_\Theta$ e todos $X,Y\in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$, temos

$$\begin{aligned}
b_x(J_xdE_uX,J_xdE_uY)&=b_x(dE_uJ_{x_0}X,dE_uJ_{x_0}Y)\\
&=b_{x_0}(J_{x_0}X,J_{x_0}Y)\\
&=b_{x_0}\left(J_{x_0}\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha X_\alpha,J_{x_0}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}w_\beta X_\beta\right)\\
&=\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha w_\beta b_{x_0}(J_{x_0}X_\alpha,J_{x_0}X_\beta)\\
&=\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha w_\beta b_{x_0}(i\varepsilon_\alpha X_\alpha,i\varepsilon_\beta X_\beta)\\
&=-\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha w_\beta\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta b_{x_0}(X_\alpha,X_\beta)\\
&=\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha w_\beta\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\Lambda(X_\alpha),X_\beta\rangle\\
&=\sum_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}z_\alpha w_\beta\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\lambda_\alpha\langle X_\alpha,X_\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle \neq 0$ somente quando $\beta = -\alpha$, a expressão acima se torna

$$\begin{aligned} b_x(J_x dE_u X, J_x dE_u Y) &= \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} z_\alpha w_{-\alpha} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{-\alpha} \lambda_\alpha \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} z_\alpha w_{-\alpha} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{-\alpha} \langle \Lambda(X_\alpha), X_{-\alpha} \rangle \\ &= -\sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} z_\alpha w_{-\alpha} \langle i\varepsilon_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_{-\alpha} X_{-\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} z_\alpha w_{-\alpha} \langle J_{x_0} X_\alpha, J_{x_0} X_{-\alpha} \rangle \\ &= b_{x_0}(X, Y) \\ &= b_x(dE_u X, dE_u Y). \end{aligned}$$

Logo, uma estrutura quase complexa e uma métrica, ambas invariantes, sempre definem uma estrutura quase Hermitiana sobre uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$. Além disso, essa estrutura é determinada pelos conjuntos $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$ e $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle}$ com $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$ e $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$.

A **forma de Kähler** associada é definida em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ como a forma bilinear

$$\Omega_{x_0}(X, Y) \coloneqq b_{x_0}(X, J_{x_0} Y) = -\langle \Lambda X, J_{x_0} Y \rangle \text{ para todo } X, Y \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta.$$

Como a métrica b é invariante, ela pode ser estendida a variedade toda. Da mesma forma, Ω_{x_0} pode ser estendida a toda $\mathbb{F}_\Theta$. Para ver isso, sejam $x = ux_0 \in \mathbb{F}_\Theta$ e $X, Y \in T_x\mathbb{F}_\Theta$. Assim, definimos

$$\begin{aligned} \Omega_x(X, Y) &\coloneqq b_x(X, J_x Y) \\ &= b_{x_0}(dE_{u^{-1}} X, J_x dE_{u^{-1}} Y) \\ &= b_{x_0}(dE_{u^{-1}} X, dE_{u^{-1}} J_{x_0} Y) \\ &= \Omega_{x_0}(dE_{u^{-1}} X, dE_{u^{-1}} Y). \end{aligned}$$

Com essa definição, vemos que Ω também mantém a propriedade de ser $U-$invariante como esperado.

Assim como anteriormente, podemos complexificar $\Omega_{x_0} : \eta_\Theta \to \mathbb{C}$ para uma forma bilinear $\Omega_{x_0}^{\mathbb{C}} : \mathfrak{q}_\Theta \to \mathbb{C}$, que mantém as propriedades de Ω_{x_0}. Portanto, manteremos a mesma notação para a forma real e a complexificada.

Como mencionamos, a forma de Kähler Ω_{x_0} é determinada pelos valores ε_α e λ_α, uma vez que, nos elementos básicos de η_Θ, temos que

$$\Omega_{x_0}(X_\alpha, X_\beta) = -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle.$$

Como $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ para $\beta \neq -\alpha$, temos que $\Omega_{x_0}(X_\alpha, X_\beta) \neq 0$ se, e somente se $\beta = -\alpha$. Agora, como sabemos que $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$ [15, p. 332],

$$\Omega_{x_0}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = -i\lambda_\alpha \varepsilon_{-\alpha} \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha.$$

Será de nosso interesse aqui estudar a diferencial exterior de Ω, pois ela desempenha um papel fundamental na classificação das variedades quase Hermitianas invariantes. Assim, consideremos uma $r-$forma diferencial

$$\omega(p) = \sum_I a_I(p) dx_I,$$

onde $I = (i_1, \dots, i_r)$ são $r-$listas de $\{1, \dots, n\}$, $a_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$. A sua diferencial exterior no ponto p é dada por

$$d\omega(p) = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

que é uma $(r+1)-$forma diferencial.

A partir dessa definição, é possível encontrar uma nova expressão para a diferencial exterior que será mais interessante para o nosso contexto. A saber, essa expressão é dada por

$$d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) = \frac{1}{r+1} \left[\sum_{1 \le i \le r+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{r+1}) \right. \tag{3.1}$$

$$\left. + \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{r+1}) \right]. \tag{3.2}$$

Aqui, o símbolo $\hat{}$ representa índices omitidos. A prova para essa expressão pode ser encontrada em [5], Proposição 14.32 ou em [16] Proposição 3.11.

Agora, consideremos ω sendo uma $r-$forma diferenciável $U-$invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_r)(ux_0) &= \omega_{ux_0}(X_1(ux_0), \dots, X_r(ux_0)) \\ &= \omega_{ux_0}(dE_u X_1(x_0), \dots, dE_u X_r(x_0)) \\ &= \omega_{x_0}(X_1(x_0), \dots, X_r(x_0)), \end{aligned}$$

isso é, a aplicação $\omega(X_1, \dots, X_r) : \mathbb{F}_\Theta \to \mathbb{R}$ é constante ao longo de $\mathbb{F}_\Theta$. Portanto, considerando a derivação induzida por X_i, temos

$$(-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{r+1}) = 0$$

para cada $i = 1, \dots, r$. Com isso, concluímos que quando ω é $U-$invariante, sua diferencial exterior é dada por

$$d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) = \frac{1}{r+1} \sum_{1 \le i < j \le r+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{r+1}).$$

A partir desta expressão, podemos calcular a diferencial da forma de Kähler em $\mathbb{F}_\Theta$,

$$d\Omega(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{3}(-\Omega([X_1, X_2], X_3) + \Omega([X_1, X_3], X_2) - \Omega([X_2, X_3], X_1). \tag{3.3}$$

Naturalmente nos é interessante analisar como a diferencial atua nos vetores da base X_α com $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ uma vez que $\Omega(X_\alpha, X_\beta) \neq 0$ se, e somente se, $\beta = -\alpha$. Assim, pela Expressão (3.3)

$$3\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -\Omega([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) + \Omega([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) - \Omega([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha).$$

Pela construção da base de Weyl, como pode ser visto em [15], para cada par $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ existem $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ com $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$ tais que

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta},$$

se $\alpha + \beta$ seja raiz e $m_{\alpha,\beta} = 0$ caso contrário. Assim, a expressão para $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ se torna

$$\begin{aligned}
&3\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = \\
&= -m_{\alpha,\beta}\Omega(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) + m_{\alpha,\gamma}\Omega(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) - m_{\beta,\gamma}\Omega(X_{\beta+\gamma}, X_\alpha) \\
&= i(m_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha+\beta}\varepsilon_\gamma\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma\rangle - m_{\alpha,\gamma}\lambda_{\alpha+\gamma}\varepsilon_\beta\langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta\rangle + m_{\beta,\gamma}\lambda_{\beta+\gamma}\varepsilon_\alpha\langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha\rangle).
\end{aligned}$$

Note que cada termo é não nulo se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ pelas propriedades da forma de Cartan-Killing. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
3\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= i(m_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}\varepsilon_\gamma\langle X_{-\gamma}, X_\gamma\rangle - m_{\alpha,\gamma}\lambda_{-\beta}\varepsilon_\beta\langle X_{-\beta}, X_\beta\rangle + m_{\beta,\gamma}\lambda_{-\alpha}\varepsilon_\alpha\langle X_{-\alpha}, X_\alpha\rangle) \\
&\overset{(*)}{=} i(m_{\alpha,\beta}\lambda_\gamma\varepsilon_\gamma - m_{\alpha,\gamma}\lambda_\beta\varepsilon_\beta + m_{\beta,\gamma}\lambda_\alpha\varepsilon_\alpha),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 1$ e $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$ em $(*)$. Finalmente, do Lema 8.6 de [15], temos que

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$$

quando $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Além disso,

$$m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} = [X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha] = -m_{\beta,\alpha}X_{\beta+\alpha},$$

ou seja, $m_{\gamma,\alpha} = -m_{\alpha,\gamma}$. Com isso, concluímos que

$$3\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = im_{\alpha,\beta}(\lambda_\alpha\varepsilon_\alpha + \lambda_\beta\varepsilon_\beta + \lambda_\gamma\varepsilon_\gamma).$$

Para terminar esta seção, daremos uma última definição que será necessária mais à frente.

Definição 3.31. *Uma variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ com uma estrutura quase Hermitiana (J, Λ) é dita de **Kähler** quando J é integrável.*

3.6 Estruturas aproximadamente Kähler

Na seção anterior discutimos como uma métrica e uma estrutura quase-complexa invariantes em uma variedade flag dão origem a uma estrutura Kähler. Nessa seção, faremos uma breve introdução à estruturas quase-Kähler, já que nosso objetivo adiante será obter condições para as quais uma variedade flag admite uma estrutura Kähler que não é propriamente Kähler. Antes disso, precisamos de uma definição que diz respeito à estrutura quase complexa.

Definição 3.32. *Seja J_{x_0} uma estrutura complexa em $T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$. Um vetor $v \in T_{x_0}\mathbb{F}_\Theta$ é chamado de um $(1,0)-$vetor se $Jv = iv$. Analogamente, u é dito um $(0,1)-$vetor quando $Ju = -iu$.*

Definição 3.33. *Uma estrutura quase Hermitiana é chamada de **quase-Kähler** (ou $\boldsymbol{(1,2)-}$**simplética**) quando sua forma de Kähler Ω é tal que*

$$d\Omega(u, v, w) = 0,$$

quando um dos vetores é um $(1,0)-$vetor e os outros dois são $(0,1)-$vetores.

Definição 3.34. *Uma estrutura quase-Kähler é dita **aproximadamente Kähler** quando*

$$\nabla_X(J)(X) = 0,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita associada à métrica.

Definição 3.35. *Seja J uma estrutura quase-complexa. Definimos o **tensor de Nijenhuis** de J por*

$$N(X, Y) = J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY] - J[JX, JY].$$

Quando estamos trabalhando com estruturas invariantes em uma variedade flag, existe uma segunda caracterização de uma estrutura aproximadamente Kähler.

Proposição 3.36. *Sejam $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag, $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma estrutura quase complexa invariante em $\mathbb{F}_\Theta$ e $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$ uma métrica invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Dessa forma, o par (J, Λ) é aproximadamente Kähler se, e somente se, é $(1,2)-$simplético e*

$$(N(X, Y), X) = 0, \text{ para todo } X, Y \in \eta_\Theta,$$

onde N é o tensor de Nijenhuis de J.

Demonstração: Esse resultado é uma consequência da classificação feita em [17] e [18]. □

Como mostramos, quando tratamos de estruturas invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$, a forma de Kähler e sua diferencial exterior podem ser determinadas em termos das raízes e os conjuntos $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ e $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ que, por sua vez, possuem propriedades algébricas interessantes.

Definição 3.37. *Sejam $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ uma estrutura quase complexa invariante em $\mathbb{F}_\Theta$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Dizemos que a trinca de raízes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é de **$J-$tipo $\{0, 3\}$** (ou uma **$\{0, 3\}-$tripla**) quando $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ e de **$J-$tipo $\{1, 2\}$** (ou uma **$\{1, 2\}-$tripla**) caso contrário.*

Uma consequência imediata dessa definição é que uma trinca (α, β, γ) é do mesmo tipo que $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ já que

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma \Leftrightarrow \varepsilon_{-\alpha} = \varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{-\gamma}.$$

Proposição 3.38. *Sejam $(J = \{\varepsilon_\alpha\})$ $(\Lambda = \{\lambda_\alpha\})$ uma estrutura quase complexa e uma métrica invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$. Dessa forma, (J, Λ) é aproximadamente Kähler se, e somente se, valem as condições*

(i) se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{0, 3\}-$tripla, então $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$;

(ii) se se $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ é uma $\{1, 2\}-$tripla com $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, então $\lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_\gamma$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [18], seção 7. □

A Proposição 3.38 está relacionada com a Proposição 3.36 em que a condição (i) da primeira é equivalente a $(N(X, Y), X) = 0$ enquanto a condição (ii) é equivalente ao par (J, Λ) ser $(1, 2)-$simplético. Dessa observação, vale também o seguinte resultado.

Lema 3.39. *Se (J, Λ) é aproximadamente Kähler e J admite apenas $\{1, 2\}-$triplas, então (J, Λ) é Kähler*

Demonstração: Com efeito, notemos que como (J, Λ) é um par invariante, vale que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) &= [JX_\alpha, JX_\beta] - [X_\alpha, X_\beta] - J[X_\alpha, JX_\beta] - J[JX_\alpha, X_\beta]\\ &= \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta[iX_\alpha, iX_\beta] - [X_\alpha, X_\beta] - \varepsilon_\beta J[X_\alpha, iX_\beta] - \varepsilon_\alpha J[iX_\alpha, X_\beta]\\ &= -m_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + 1 - \varepsilon_\beta\varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha\varepsilon_{\alpha+\beta})X_{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Assim, consideremos a tripla $\{\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)\}$. Por hipótese, essa tripla deve ser do tipo $(1, 2)$, ou seja, temos dois casos possíveis:

1. $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta \neq \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}$

   Nesse caso, como $\varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = -\varepsilon_{(\alpha+\beta)}$, temos que

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)},$$

   ou seja,

$$\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) = -m_{\alpha,\beta}(1+1-1-1)X_{\alpha+\beta} = 0.$$

2. $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}$

   Nesse caso, temos que $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$, de forma que

$$\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\beta) = -m_{\alpha,\beta}(-1+1+1-1)X_{\alpha+\beta} = 0.$$

Finalmente, do fato que

$$\frac{1}{2}N(X_\alpha, X_\alpha) = 0,$$

concluímos que J é integrável e, portanto, (J, Λ) é de Kähler. □

4 TRINCAS PARA ESTRUTURAS QUASE KÄHLER

Nessa seção, estaremos interessados em mostrar que todas as triplas de raízes em uma variedade flag com uma estrutura quase Hermitiana invariante são do mesmo tipo. Assim, para organizar melhor os passos dessa demonstração, faremos uma série de lemas que nos levarão a esse resultado. Começaremos com um resultado geral que será útil durante as próximas seções.

Lema 4.1. *Sejam α e β raízes positivas tais que $\alpha+\beta$ é raiz. Dessa forma,*

(i) se $\beta = \beta_1 + \beta_2$ com β_1 e β_2 raízes, então $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é raiz;

(ii) existem raízes simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tais que $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ e todas as somas intermediárias $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, com $k = 1, \ldots, s$, são raízes.

Demonstração: Ver Lema 4.11 de [18]. □

Denotaremos as componentes irredutíveis em relação à representação adjunta de η_Θ de uma raiz α por V_α.

Primeiramente, dado um subconjunto $\Theta \subseteq \Sigma$ de raízes simples, definiremos aqui os conjuntos

$$T^{\Theta}_{\{1,2\}} \coloneqq \{\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle \mid \exists \beta, \gamma \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle \,; \{\alpha,\beta,\gamma\} \text{ é uma } \{1,2\} - \text{tripla}\}$$

e, analogamente,

$$T^{\Theta}_{\{0,3\}} \coloneqq \{\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle \mid \exists \beta, \gamma \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle \,; \{\alpha,\beta,\gamma\} \text{ é uma } \{0,3\} - \text{tripla}\}.$$

Como frequentemente o conjunto Θ já está subentendido no contexto de trabalho, nos referiremos a esses dois conjuntos por $T_{\{1,2\}}$ e $T_{\{0,3\}}$.

Lema 4.2. *Se $T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}} = \emptyset$, então $T_{\{0,3\}} \cap (\Sigma \setminus \Theta) = \emptyset$ ou $T_{\{1,2\}} \cap (\Sigma \setminus \Theta) = \emptyset$.*

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in \Sigma \setminus \Theta$. Agora, podemos encontrar uma sequência de raízes $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ que ligam α e β, isso é, no diagrama de Dynkin

$$\cdots \text{———} \alpha \text{———} \gamma_1 \text{———} \cdots \text{———} \gamma_j \text{———} \beta \text{———} \cdots$$

essa sequência forma um subdiagrama. Agora, como a soma de raízes no diagrama de Dynkin ainda são raízes, podemos tomar as triplas

$$\{\alpha, (\gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta), -(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)\}$$

e

$$\{\beta, (\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j), -(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)\}.$$

Note que, ambas $(\gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)$ e $-(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)$ estão fora de $\langle\Theta\rangle$. Com efeito, caso ambas estivessem em $\langle\Theta\rangle$ teríamos

$$\alpha = -[(\gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta) - (\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)] \in \langle\Theta\rangle,$$

contradizendo que $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. Analogamente, supor que uma delas está em Θ também gera absurdos similares. Como o mesmo argumento é válido para a tripla

$$\{\beta, (\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j), -(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)\}$$

temos que ambas triplas estão em $\Pi \setminus \langle\Theta\rangle$. Agora, suponhamos que

$$\{\alpha, (\gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta), -(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta)\}$$

seja de tipo $\{a, b\}$ com $\{a, b\} = \{1, 2\}, \{0, 3\}$. Assim, temos que

$$-(\alpha + \gamma_1 + \cdots + \gamma_j + \beta) \in T_{a,b}.$$

Agora, como $T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}} = \emptyset$, temos que ambas as trincas acima possuem mesmo tipo. Consequentemente, α e β são de mesmo tipo. Daí, segue o resultado. $\square$

Lema 4.3. *Sejam $u, v \in \Pi^+$ tais que $u+v$ é uma raiz. Se γ é a menor raiz na componente irredutível de $u + v$, então existem raízes α e β nas componentes irredutíveis de u e v, respectivamente, tais que $\alpha + \beta = \gamma$.*

Demonstração: Sejam $u, v \in \Pi^+$ tais que $u + v$ é uma raiz. Se $u + v$ não é a menor raiz na sua componente, existe uma raiz $\gamma' \in \Theta$ menor que $u + v$. Além disso, existe uma raiz $w \in \Theta$ tal que $\gamma' = u + v - w$. Com efeito, dizer que $\gamma' = u + v - w$ é equivalente a

$$[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_{u+v}] = \mathfrak{g}_{\gamma'}. \tag{4.1}$$

Se a componente irredutível de $u + v$, digamos V_i, é dada por

$$V_i = \sum_{\alpha \in A(i)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

então dizer que não existe w satisfazendo (4.1) equivale a dizer que não existe $K \in \mathfrak{q}_\Theta$ tal que $\mathrm{ad}(K)\mathfrak{g}_{u+v} \subseteq \mathfrak{g}_{\gamma'}$ de onde obteríamos que

$$V_i \setminus \mathfrak{g}_{\gamma'}$$

é invariante por $\mathrm{ad}(\mathfrak{q}_\Theta)$, contradizendo a irredutibilidade de V_i. Com isso, temos que $[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_{u+v}] \neq 0$. Por outro lado, vale que

$$[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_{u+v}] = [[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_u], \mathfrak{g}_v] + [\mathfrak{g}_u, [\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_v]],$$

ou seja, ou $[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_u] \neq 0$, ou $[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_v] \neq 0$. Daí ou $u - w$ é uma raiz ou $v - w$ é uma raiz. Assim, temos que

$$\gamma' = (u - w) + v \quad \text{ou} \quad \gamma' = (v - w) + u.$$

Como subtrair uma raiz por w é análogo a $[\mathfrak{g}_{-w}, \mathfrak{g}_u]$ e $\mathfrak{g}_{-w} \subseteq \mathfrak{q}_\Theta$, então pela irredutibilidade da componente irredutível de u temos que $\mathfrak{g}_{u-w}$ está na mesma componente. Análogo para $\mathfrak{g}_{v-w}$. Logo, por indução, o resultado segue.

□

Corolário 4.4. *Sejam $u, v \in \Pi^+$ tais que $u + v$ é uma raiz. Se γ é a maior raiz na componente irredutível de $u + v$, então existem raízes α e β nas componentes irredutíveis de u e v, respectivamente, tais que $\alpha + \beta = \gamma$.*

Demonstração: Basta repetir o argumento anterior para a maior raiz nas componentes. □

Corolário 4.5. *Se $\{u, v, -(u + v)\}$ é uma $\{a, b\}-$tripla ($\{0, 3\}$ ou $\{1, 2\}$), então existe uma tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, com $\alpha \in V_u$, $\beta \in V_v$ e $\gamma \in V_{-(u+v)}$ de tipo $\{a, b\}$ tal que γ é a menor (ou a maior) raiz de V_{u+v}.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3, existe uma tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ com as condições necessárias. Agora, pelo Lema 3.30, os autovalores ε são constantes em cada componente irredutível. Assim, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_u$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon_v$ e $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_{-(u+v)}$, ou seja, as triplas

$$\{u, v, -(u + v)\} \;\text{ e }\; \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

são do mesmo tipo. □

Proposição 4.6. *Se $T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}} = \emptyset$, então $T_{\{0,3\}} = \emptyset$ ou $T_{\{1,2\}} = \emptyset$, isso é, todas as raízes são do mesmo tipo.*

Demonstração: Como $T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}} = \emptyset$, pelo Lema 4.2, todas as triplas de raízes simples são do mesmo tipo digamos, $\{a, b\}$. Suponhamos que exista uma tripla de tipo diferente de $\{a, b\}$. Nesse caso, pelo Corolário 4.5, existe uma tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, com $\gamma > 0$ minimal em sua componente irredutível, de tipo diferente de $\{a, b\}$. Note que γ não pode ser simples, uma vez que estamos partindo do fato de que todas as raízes simples são de tipo $\{a,b\}$ pelo Lema 4.2. Assim, existe uma raiz simples $u \in \Sigma \setminus \Theta$ tal que $\gamma - u$ é raiz. Isso se deve ao fato de que a decomposição de γ não pode conter apenas raízes em Θ, pois isso implicaria que $\gamma \in \langle\Theta\rangle$, contradizendo que γ está em uma tripla de raízes (por definição elas devem estar fora de $\langle\Theta\rangle$). Assim, $\gamma - u \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ e, portanto, temos uma tripla $\{u, \gamma - u, -\gamma\}$ que contém a raiz simples u. Portanto, essa tripla é do tipo $\{a,b\}$ e, consequentemente, $-\gamma \in T_{\{a,b\}}$. Porém, γ e $-\gamma$ são de mesmo tipo, ou seja, temos que $\gamma \in T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}}$, contradizendo a hipótese. Logo, todas as raízes são de mesmo tipo. $\square$

A contrapositiva da Proposição 4.6 implica que se existem raízes de ambos os tipos em uma variedade flag, então existe uma raiz que é de ambos os tipos. Esse fato será utilizado para demonstrar o Teorema principal dessa seção.

A seguir, partimos para uma série de resultados que dizem respeito às estruturas invariantes em $\mathbb{F}_\Theta$.

Lema 4.7. *Se $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$ é uma estrutura aproximadamente Kähler, então J não admite uma $\{0,3\}-$tripla $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ juntamente com uma $\{1,2\}-$tripla $\{-\beta, \beta_1, \beta_2\}$ tal que $\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\beta_2}$.*

Demonstração: Suponhamos que existam triplas com as propriedades acima. Como $\{-\beta, \beta_1, \beta_2\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\beta_2}$, temos

$$\varepsilon_{-\beta} \neq \varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\beta_2}.$$

Além disso, pela Proposição 3.38, vale que

$$\lambda_{-\beta} = \lambda_{\beta_1} + \lambda_{\beta_2},$$

de onde concluímos que $\lambda_\beta = \lambda_{-\beta} > \lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_2}$ (lembre que $\lambda_\alpha > 0$ para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$). Novamente pela Proposição 3.38 e do fato que $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla, temos que

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{-(\alpha+\beta)}. \tag{4.2}$$

Como $\alpha+\beta$ é uma raiz e $\beta = \beta_1 + \beta_2$, pelo Lema 4.1, $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é raiz. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha + \beta_1$ é raiz. Afirmamos que $\{-(\alpha+\beta_1), \alpha, \beta_1\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\beta_1}$. Com efeito, a segunda parte da afirmação é verdadeira, uma vez que

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{\beta_1},$$

pois $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla. Agora, suponhamos, por absurdo, que $\{-(\alpha+\beta_1), \alpha, \beta_1\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla. Nesse caso teríamos, pela Proposição 3.38,

$$\lambda_\alpha = \lambda_{\beta_1} = \lambda_{-(\alpha+\beta_1)}.$$

Porém, de (4.2), $\lambda_\alpha = \lambda_\beta > \lambda_{\beta_1}$, contradizendo a condição necessária para ser uma $\{0,3\}-$tripla. Logo, $\{-(\alpha+\beta_1), \alpha, \beta_1\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla. Com isso, a Proposição 3.38 garante que

$$\lambda_{-(\alpha+\beta_1)} = \lambda_\alpha + \lambda_{\beta_1}. \tag{4.3}$$

Afirmamos ainda que $\{\alpha+\beta_1, \beta_2, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla. De fato, temos que

$$\varepsilon_{(\alpha+\beta_1)} = -\varepsilon_{-(\alpha+\beta_1)} = \varepsilon_\alpha$$

e

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{\beta_2},$$

ou seja,

$$\varepsilon_{(\alpha+\beta_1)} = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = \varepsilon_{\beta_2}.$$

Assim, pela Proposição 3.38,

$$\lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\beta_2} = \lambda_{-(\alpha+\beta)}. \tag{4.4}$$

Finalmente, notemos que por (4.2), $\lambda_\alpha = \lambda_\beta > \lambda_{\beta_2}$. Agora, por (4.4), temos que $\lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\beta_2}$. Portanto,

$$\lambda_\alpha > \lambda_{\beta_2} = \lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\alpha+\beta_1},$$

o que contradiz (4.3). Logo, o lema segue. □

Lema 4.8. *Se (J,Λ) é aproximadamente Kähler, então J não admite uma $\{0,3\}-$tripla $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ juntamente com uma $\{1,2\}-$tripla $\{-\beta, \beta_1, \beta_2\}$ tal que $\varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{\beta_1} \neq \varepsilon_{\beta_2}$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.38 temos que

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{-(\alpha+\beta)}$$

e

$$\lambda_{\beta_2} = \lambda_{\beta_1} + \lambda_{-\beta}.$$

Em consequência da segunda expressão, concluímos ainda que

$$\lambda_{\beta_2} > \lambda_{\beta_1}, \lambda_{-\beta}. \tag{4.5}$$

O fato de $\{-\beta, \beta_1, \beta_2\}$ ser uma $\{1,2\}-$tripla significa que $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Assim, como $\alpha+\beta$ é uma raiz por hipótese, pelo Lema 4.1 temos que $\alpha+\beta_1$ é uma raiz ou $\alpha+\beta_2$ é uma raiz.

Note que esse esse argumento é similar ao que aparece na demonstração do Lema 4.7. Porém, diferentemente do que acontece lá, nesse caso temos que $\varepsilon_{\beta_1} \neq \varepsilon_{\beta_2}$ e $\lambda_{\beta_2} > \lambda_{\beta_1}$, isso é, esses casos devem ser tratados separadamente.

Comecemos pelo caso em que $\alpha + \beta_2$ é uma raiz. Nesse caso, afirmamos que $\{-(\alpha+\beta_2), \alpha, \beta_2\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\beta_2}$. Com efeito, como $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla, temos que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$. Agora, de $\varepsilon_{-\beta} \neq \varepsilon_{\beta_2}$ obtemos

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{\beta_2}.$$

Para mostrar que $\{-(\alpha+\beta_2), \alpha, \beta_2\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla, suponhamos, por absurdo que ela é uma $\{0,3\}-$tripla. Nesse caso, $\lambda_{-(\alpha+\beta_2)} = \lambda_\alpha = \lambda_{\beta_2}$ pela Proposição 3.38 mas $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, pois $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla, ou seja,

$$\lambda_\beta = \lambda_\alpha = \lambda_{\beta_2}.$$

No entanto, já vimos que $\lambda_{\beta_2} > \lambda_\beta$. Com isso, obtemos uma contradição e concluímos que $\{-(\alpha+\beta_2), \alpha, \beta_2\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla. Portanto,

$$\lambda_{\alpha+\beta_2} = \lambda_{-(\alpha+\beta_2)} = \lambda_\alpha + \lambda_{\beta_2}$$

pela Proposição 3.38. Daí, $\lambda_{\alpha+\beta_2} > \lambda_\alpha, \lambda_{\beta_2}$. Por outro lado,

$$\varepsilon_{\alpha+\beta_2} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}, \tag{4.6}$$

pois $\{-(\alpha+\beta_2), \alpha, \beta_2\}$ e $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ são $\{0,3\}-$triplas. Além disso, $\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{-\beta} \neq \varepsilon_\beta = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}$. Dessas observações, obtemos que $\{\alpha+\beta_2, \beta_1, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_{\beta_1} \neq \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}$. Portanto, a Proposição 3.38 implica que

$$\lambda_{\beta_1} > \lambda_{\alpha+\beta_2}, \lambda_{-(\alpha+\beta)} \tag{4.7}$$

pelo mesmo argumento anterior. Daí,

$$\lambda_{\beta_2} > \lambda_{\beta_1} > \lambda_{\alpha+\beta_2},$$

entretanto, (4.6) implica que $\lambda_{\alpha+\beta_2} > \lambda_{\beta_2}$ o que é um absurdo. Logo, $\{-(\alpha+\beta_2), \alpha, \beta_2\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla.

No segundo caso, em que $\alpha + \beta_1$ é uma raiz, afirmamos que $\{-(\alpha+\beta_1), \beta_1, \alpha\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_{-(\alpha+\beta_1)} = \varepsilon_{\beta_1}$. Primeiramente, temos que

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta \ \text{ e } \ \varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_{\beta_1},$$

ou seja, $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_{\beta_1}$. Suponhamos que tivéssemos $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-(\alpha+\beta_1)}$. Nesse caso, teríamos

$$\varepsilon_{\alpha+\beta_1} \neq \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta_2}$$

e

$$\varepsilon_{\alpha+\beta_1} \neq \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}.$$

Daí, $\{\alpha+\beta_1, \beta_2, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_{\beta_2} = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)}$. Aplicando a Proposição 3.38 nas $\{1,2\}-$triplas $\{-(\alpha+\beta_1), \beta_1, \alpha\}$ e $\{\alpha+\beta_1, \beta_2, -(\alpha+\beta)\}$ obtemos

$$\lambda_{\beta_1} = \lambda_\alpha + \lambda_{-(\alpha+\beta_1)} \ \text{ e } \ \lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\beta_2} + \lambda_{-(\alpha+\beta)}.$$

Consequentemente, $\lambda_{\beta_1} > \lambda_{\alpha+\beta_1}$ (lembre-se que $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$) e $\lambda_{\alpha+\beta_1} > \lambda_{\beta_2}$, isso é, $\lambda_{\beta_1} > \lambda_{\beta_2}$, contradizendo (4.5). Assim, $\{-(\alpha+\beta_1), \beta_1, \alpha\}$ é uma $\{1,2\}-$tripla com $\varepsilon_{-(\alpha+\beta_1)} = \varepsilon_{\beta_1}$.

Com isso, temos que

$$\varepsilon_{\alpha+\beta_1} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = \varepsilon_{\beta_2}$$

de forma que $\{\alpha+\beta_1, \beta_2, -(\alpha+\beta)\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla e, portanto

$$\lambda_{\alpha+\beta_1} = \lambda_{\beta_2} = \lambda_{-(\alpha+\beta)}. \tag{4.8}$$

Finalmente, temos que $\lambda_{\beta_2} > \lambda_\beta$ e $\lambda_\beta = \lambda_{-(\alpha+\beta)}$, contradizendo a equação (4.8). Logo, não existem triplas como enunciadas. □

Depois desses resultados, podemos enunciar o resultado principal dessa seção

Teorema 4.9. *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag e (J, Λ) uma estrutura invariante aproximadamente Kähler em $\mathbb{F}_\Theta$. Nesse caso, todas as triplas de raízes são do mesmo tipo.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existam triplas de ambos os tipos sob essas hipóteses. Pela Proposição 4.6 existe uma raiz $\beta \in T_{\{0,3\}} \cap T_{\{1,2\}}$, isso é, existem uma $\{0,3\}-$tripla $\{\alpha, \beta, -(\alpha+\beta)\}$ e uma $\{1,2\}-$tripla $\{\beta, \gamma_1, \gamma_2\}$. Assim, existem duas possibilidades

(i) $\varepsilon_{\gamma_1} = \varepsilon_{\gamma_2} \neq \varepsilon_\beta$, ou

(ii) $\varepsilon_{\gamma_1} \neq \varepsilon_{\gamma_2}$.

A primeira possibilidade não ocorre devido ao Lema 4.7. Já a segunda, não ocorre pelo Lema 4.8. Logo, obtemos uma contradição em cada caso, concluindo que todas as raízes em uma variedade flag com uma estrutura aproximadamente Kähler invariante são do mesmo tipo. □

5 AUTOMORFISMOS DE ORDEM TRÊS

O objetivo dessa seção é utilizar o Teorema 4.9 para caracterizar uma estrutura aproximadamente Kähler em termos de um par invariante (J, Λ) e automorfismos de ordem 3. Para isso, começamos com a seguinte definição.

Definição 5.1. *Seja $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tal que $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_t a_t$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ são raízes simples. Dessa forma, definimos a **altura** de α **com relação a Θ** como a soma*

$$h_\Theta(\alpha) \coloneqq \sum_{i \in I_\alpha} |a_i|,$$

onde

$$I_\alpha \coloneqq \{i \in \{1, \ldots, t\} \mid \alpha_i \in \Sigma \setminus \Theta\},$$

*isso é, I é o conjunto de índices que na decomposição de α não estão em Θ. Além disso, definimos a **altura** de $\Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ por*

$$h_0 \coloneqq \max\{h_\Theta(\alpha) \mid \alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle\}.$$

O conceito de altura de uma raiz normalmente é usado para se referir a soma de todos os coeficientes na decomposição de uma raiz em raízes simples. Aqui, em vez de nos referirmos à altura de uma raiz em relação ao conjunto Θ, diremos simplesmente altura da raiz, uma vez que o conceito mais geral não será abordado aqui.

Lema 5.2. *Se $\Theta \subseteq \Sigma$ é tal que $h_0 \geq 3$, então existem raízes positivas $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \beta_2 \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tais que*

$$\gamma = \alpha + \beta \quad e \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Demonstração: Pela hipótese, existe uma raiz β de altura 2. Agora, consideremos a componente irredutível de β. Assim, existe alguma raiz $\vartheta \in \langle\Theta\rangle$ tal que $\beta + \vartheta$ é a raiz mais alta na componente de β e, além disso, pela definição de h_Θ,

$$h_\Theta(\beta + \vartheta) = h_\Theta(\beta) = 2.$$

Portanto, podemos considerar β a raiz mais alta em sua componente e de altura 2, sem perda de generalidade. Porém, pela hipótese, β não é a raiz mais alta de Π, ou seja, existe algum $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tal que $\gamma = \alpha + \beta$. O fato de que $\alpha \notin \langle\Theta\rangle$ vem novamente pela definição da altura com relação a Θ. Resta mostrar que β é decomposta em raízes fora de $\langle\Theta\rangle$. Para isso, seja β_l a raiz mais baixa na componente de β. Pela observação anterior, temos que

$$h_\Theta(\beta_l) = h_\Theta(\beta) = 2.$$

Assim, existe uma raiz $u \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tal que $\beta - u$ é raiz, ou seja,

$$\beta_l = (\beta_l - u) + u.$$

Logo, a decomposição de β decorre do Corolário 4.4. □

Lema 5.3. *Sejam $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag e J uma estrutura quase complexa em $\mathbb{F}_\Theta$. Se $h_0 \geq 3$, então J possui $\{1,2\}-$triplas.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que J possua apenas $\{0,3\}-$triplas. Como $h_0 \geq 3$, o Lema 5.2 implica que existem raízes $\gamma, \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2 \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tais que

$$\gamma = \alpha + \beta \text{ e } \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Assim, pela suposição inicial $\{-\gamma, \alpha, \beta\}$ e $\{-\beta, \beta_1, \beta_2\}$ são $\{0,3\}-$triplas, de forma que

$$\varepsilon_{\beta_1} = \varepsilon_{\beta_2} = \varepsilon_\beta \neq \varepsilon_{-\beta} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-\gamma}. \tag{5.1}$$

Por outro lado, pela Lema 4.1, podemos assumir sem perda de generalidade que $\alpha + \beta_1$ é uma raiz. Assim, $\{\alpha + \beta_1, \beta_2, -\gamma\}$ é uma $\{0,3\}-$tripla e, portanto, $\varepsilon_{\beta_2} = \varepsilon_{-\gamma}$ contradizendo (5.1). Logo, J admite $\{1,2\}-$triplas. □

Proposição 5.4. *Sejam $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag e (J, Λ) um par invariante aproximadamente Kähler. Dessa forma, se $h_0 \geq 3$, então J admite apenas $\{1,2\}-$triplas.*

Demonstração: Segue diretamente do Lema 5.3 e do Teorema 4.9. □

Teorema 5.5. *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag. Dessa forma, $\mathbb{F}_\Theta$ admite uma estrutura propriamente*[1] *aproximadamente Kähler invariante (J, Λ) em $\mathbb{F}_\Theta$ se, e somente se, $h_0 = 2$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathbb{F}_\Theta$ possua uma estrutura invariante aproximadamente Kähler. Suponhamos que $h_0 \neq 0$. Primeiramente, notemos que se $h_0 = 1$, então não existem triplas de raízes e, consequentemente, qualquer estrutura invariante é Kähler. Por outro lado, se $h_0 \geq 3$ a Proposição 5.4 implica que J admite apenas $\{1,2\}-$triplas o que, pelo Lema 3.39 significa que (J, Λ) é Kähler. Logo, $h_0 = 2$ implica em (J, Λ) não Kähler.

Reciprocamente, se $h_0 = 2$, então podemos definir $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ por

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = 1, \text{ se } h_\Theta(\alpha) = 1, \text{ e} \\ \varepsilon_\alpha = -1, \text{ se } h_\Theta(\alpha) = 2. \end{cases}$$

[1] Estamos usando propriamente aqui para denominar uma estrutura aproximadamente Kähler que não é Kähler.

Com isso, J admite apenas $\{0,3\}-$triplas. De fato, se $\gamma \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tal que $h_\Theta(\gamma) = 2$, então existem raízes $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ com $h_\Theta(\alpha) = h_\Theta(\beta) = 1$ tais que $\gamma = \alpha + \beta$. Isso é, $\varepsilon_\gamma = -1$ e $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1$. Assim, $\{-\gamma, \alpha, \beta\}$ é uma tripla com

$$\varepsilon_{-\gamma} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta.$$

Portanto, J admite apenas $\{0,3\}-$triplas. Agora, definamos $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$ por $\lambda_\alpha = \lambda > 0$ para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, isso é, Λ é constante para todas as raízes. Daí, para toda tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, segue que

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma.$$

Como toda tripla é $\{0,3\}$, da Proposição 3.38 concluímos que (J, Λ) assim definida é aproximadamente Kähler. Além disso, do fato de que J admite $\{0,3\}-$triplas, o Lema 3.39 implica que (J, Λ) não é Kähler. $\square$

Exemplo 3. Como um exemplo, consideremos $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/P_\Theta$, onde $\Theta \subseteq \Sigma$ é um subconjunto qualquer do sistema simples de raízes como no Exemplo 2. Nesse caso, temos que

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}.$$

Tomando $\Theta \subseteq \Sigma$ de forma que $\Sigma \setminus \Theta$ possua k raízes, temos que $h_0 = k$. De fato, as raízes simples em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ são somas de raízes positivas sem repetição, com coeficiente 1. Assim, a raiz de altura máxima é

$$\alpha_{1n} = \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{n-1,n}.$$

Como $\Sigma \setminus \Theta$ possui cardinalidade k, temos que $h_\Theta(\alpha_{1n}) = k$ e, portanto, $h_0 \geq k$. Por outro lado, como todas as raízes em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ possuem decomposição em raízes simples com coeficientes iguais a 1, não existe raiz com altura maior do que k. Logo, $h_0 = k$.

Consideremos o caso particular em que $k = 2$. Pelo Teorema 5.5, $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/P_\Theta$ admite uma estrutura aproximadamente Kähler que não é Kähler somente quando Θ é formado por $n - 3$ raízes.

Para ilustrar essa situação melhor, consideremos $\mathrm{Sl}(6, \mathbb{C})$. O sistema simples de raízes será o conjunto

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{56}\}.$$

Tomemos $\Theta = \{\alpha_{12}, \alpha_{45}, \alpha_{56}\}$ de forma que $\Sigma \setminus \Theta = \{\alpha_{23}, \alpha_{34}\}$. Nesse caso, podemos calcular a subálgebra parabólica seguindo os mesmos passos feitos no Exemplo 2. Com isso, concluímos que $\mathfrak{p}_\Theta$ é composto por matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix},$$

isso é, uma matriz com três blocos de tamanhos distintos. Sabemos também que esta é a forma das matrizes do subgrupo parabólico P_Θ que define $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{C})/P_\Theta$. Ainda mais, qualquer variedade flag em $\mathrm{Sl}(6, \mathbb{C})$ que admite uma estrutura aproximadamente Kähler que não é Kähler é desta forma, isso é, possui um subgrupo parabólico cujas matrizes possuem três blocos. Em termos de flags, isso significa que estamos tomando flags de tipo $K = \{2, 3\}$.

Como consequência deste exemplo, podemos ver que o espaço projetivo e as Grassmannianas em um espaço vetorial V não admitem uma estrutura propriamente aproximadamente Kähler. •

A resposta da conjectura feita por Wolf e Gray ao final de [4], que é o objetivo final do artigo [3] está localizada, essencialmente, no Teorema 5.5. Como recordação,

> "Let $M = G/K$, where G is a compact connected Lie group acting effectively, K is a subgroup of maximal rank, and M carries a $G-$invariant almost complex structure. Suppose that $M = G/K$ is not a hermitian symmetric coset space. Then there is an invariant almost hermitian metric ds^2 such that $(M, ds^2) \in \mathcal{NK}$ and $(M, ds^2) \notin \mathcal{K}$ if and only if $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^8$ for some automorphism θ of order 3 on $\mathfrak{G}$."

Traduzindo nos termos que estamos usando nesse trabalho:

> "Seja U/H um espaço homogêneo, que não é um espaço simétrico hermitiano de um grupo de Lie compacto e conexo U atuando efetivamente tal que H tem posto máximo em U. Então, existe em U/H uma estrutura quase Hermitiana invariante aproximadamente Kähler que não é Kähler se, e somente se, a subálgebra de isotropia é o conjunto de pontos fixos de um automorfismo ϕ de ordem três." [12]

Assim, em termos gerais, para encontrar nossa resposta final devemos reescrevê-lo em termos de automorfismos de ordem 3 de $\mathfrak{g}$.

Lema 5.6. *Seja $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag. Dessa forma, se a subálgebra de isotropia $\mathfrak{k}_\Theta$ é o conjunto de pontos fixos de um automorfismo de ordem três, então $h_0 < 3$.*

Demonstração: Seja ϕ um automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que

$$\mathfrak{g}^{\phi} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \phi(X) = X\} = \mathfrak{k}_{\Theta}.$$

Como ϕ possui ordem 3, os autovalores de ϕ são ζ^i, com $i \in \{0, 1, 2\}$, raízes da unidade. Agora, como ϕ é diagonalizável, podemos decompor $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g} = \mathrm{aut}(\phi, \zeta^0) \oplus \mathrm{aut}(\phi, \zeta^1) \oplus \mathrm{aut}(\phi, \zeta^2).$$

Note que $\mathrm{aut}(\phi, \zeta^0) = \mathfrak{g}^{\phi} = \mathfrak{k}_{\Theta}$. Assim, a decomposição se torna

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi_1} \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \sum_{\gamma \in \Pi_2} \mathfrak{g}_{\gamma},$$

onde $\Pi_i = \{\alpha \in \Pi \mid \phi(X_\alpha) = \zeta^i X_\alpha\}$. É importante observar que a hipótese de que $\mathfrak{k}_{\Theta}$ é o conjunto de pontos fixos de ϕ implica que $\langle\Theta\rangle = \Pi_0 = \{\alpha \in \Pi \mid \phi(X_\alpha) = X_\alpha\}$. Agora, se $\alpha \in \Pi_i$ e $\beta \in \Pi_j$ tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz, então

$$\phi[X_\alpha, X_\beta] = [\phi(X_\alpha), \phi(X_\beta)] = [\zeta^i X_\alpha, \zeta^j X_\beta] = m_{\alpha,\beta}\zeta^{i+j} X_{\alpha+\beta}.$$

Por outro lado,

$$\phi[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}\phi(X_{\alpha+\beta}).$$

Consequentemente, nessas condições $\alpha+\beta \in \Pi_{i+j(\mod 3)}$. Além disso, se $h_\Theta(\alpha), h_\Theta(\beta) > 0$, então $\alpha, \beta \notin \langle\Theta\rangle$. Portanto, $i, j \in \{1, 2\}$. Afirmamos que nesse caso $i = j$. Com efeito, caso tivéssemos $i+j = 3$, teríamos que $\alpha+\beta \in \Pi_{3(\mod 3)} = \Pi_0 = \langle\Theta\rangle$. Consequentemente, $h_\Theta(\alpha + \beta) = 0$. Porém, isso é um absurdo, uma vez que $\alpha + \beta$ possui termos em $\Pi \setminus \langle\Theta\rangle$.

Agora, suponhamos por absurdo que $h_0 \geq 3$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \beta_2 \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ tais que $\gamma = \alpha + \beta$ e $\beta = \beta_1 + \beta_2$, como garantido pelo Lema 5.2. Pela observação anterior, β_1 e β_2 pertencem ao mesmo Π_i já que β é uma raiz. Assim, $\beta \in \Pi_j$, onde $j = 2i(\mod 3)$. Portanto, $j \neq i$. Agora, como $\alpha + \beta$ também é uma raiz, devemos ter $\alpha \in \Pi_j$. Porém, pelo Lema 4.1, ou $\alpha + \beta_1$ ou $\alpha + \beta_2$ é raiz. Porém, como observado, a soma de raízes em autoespaços distintos não pode ser uma raiz. Com isso obtemos uma contradição, de onde segue o resultado. □

Teorema 5.7. *Sejam $\mathbb{F}_\Theta$ uma variedade flag e (J, Λ) uma estrutura invariante em $\mathbb{F}_\Theta$. Dessa forma, (J, Λ) é propriamente aproximadamente Kähler se, e somente se,*

(i) $\mathfrak{k}_\Theta$ é o conjunto dos pontos fixos de algum automorfismo ϕ de ordem três; e

(ii) $\mathbb{F}_\Theta$ não é hermitiano simétrico.

Demonstração: Primeiramente, mostremos que as duas afirmações implicam que (J, Λ) é propriamente aproximadamente Kähler. Note que a primeira afirmação, juntamente com o Lema 5.6 implicam que $h_0 < 3$, isso é, $h_0 = 1$ ou $h_0 = 2$. Se supusermos que $h_0 = 1$, nesse caso, definamos o automorfismo ψ por $\psi(H) = H$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ e $\psi(X_\alpha) = i^{h_\Theta(\alpha)} X_\alpha$. Note que $\psi^2 = \mathrm{id}_\mathfrak{g}$, pois $h_\Theta = 0, 1$. Além disso, como $h_\Theta(\alpha) = 1$ se, e somente se, $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$, temos que

$$\psi(X) = X \text{ para todo } X \in \mathfrak{k}_\Theta.$$

Portanto $\mathfrak{k}_\Theta$ é o conjunto dos pontos fixos de um automorfismo de ordem 2. Consequentemente, nesse caso $\mathbb{F}_\Theta$ é um espaço hermitiano simétrico. Assim, a segunda afirmação garante que o único caso possível é $h_0 = 2$. Logo, pelo Teorema 5.5 temos que (J, Λ) é propriamente Kähler.

Reciprocamente, o Teorema 5.5 implica que devemos ter $h_0 = 2$. Assim, se ζ é uma raiz da unidade com $\zeta^3 = 1$, então podemos definir o automorfismo $\eta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por $\eta(H) = H$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ e $\eta(X_\alpha) = \zeta^{h_\Theta(\alpha)} X_\alpha$. Assim, temos que

$$\eta(X) = X \text{ para todo } X \in \mathfrak{k}_\Theta,$$

mostrando a primeira afirmação. A segunda afirmação segue da contra-positiva da Proposição 4.1 de [9] e [4]. $\square$

REFERÊNCIAS

1 I. Terek, "Projective spaces, the fubini-study metric and a little bit more."

2 I. Bengtsson and K. Zyczkowski, Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. Cambridge University Press, 2006.

3 L. A. B. San Martin and R. C. J. Silva, "Invariant nearly-kähler structures," Geometriae Dedicata, vol. 121, pp. 143–154, 2006.

4 J. A. Wolf and A. Gray, "Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. II," Journal of Differential Geometry, vol. 2, no. 2, pp. 115 – 159, 1968.

5 J. Lee, Introduction to Smooth Manifolds. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

6 J. A. Wolf, Flag Manifolds and Representation Theory, pp. 273–323. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1998.

7 L. A. B. San Martin, Grupos De Lie. UNICAMP, 2016.

8 A. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2002.

9 S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press New York, 1962.

10 G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

11 M. Brion, "Lectures on the geometry of flag varieties."

12 R. C. J. Silva, "Estrutura quase hermitianas invariantes em espaços homogêneos de grupos semi-simples."

13 D. Huybrechts, Complex Geometry: An Introduction. Universitext (Berlin. Print), Springer, 2005.

14 K. Hoffman and R. A. Kunze, Linear Algebra. PHI Learning, second ed., 2004.

15 L. A. B. San Martin, Algebras de Lie. Coleção Livro-Texto, Unicamp, 1999.

16 S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry. No. Bd. 1 in Foundations of Differential Geometry [by] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu, Interscience Publishers, 1963.

17 A. Gray and L. M. Hervella, "The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants," Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 123, pp. 35–58, 1980.

18 L. A. B. San Martin and C. J. Negreiros, "Invariant almost hermitian structures on flag manifolds," Advances in Mathematics, vol. 178, no. 2, pp. 277–310, 2003.

A Teoria de Lie

Nesta seção introduziremos alguns conceitos básicos de Teoria de Lie que serão usados no objetivo principal do trabalho: estudar o artigo [3], que está interessado em analisar estruturas invariantes em variedades Kähler.

Devemos notar que uma das primeiras definições do artigo, aquela de uma variedade flag, necessita de uma grande quantidade de conceitos teóricos provenientes da Teoria de Lie, em si um assunto extenso. Assim, para evitar uma discussão longa de assuntos básicos de Teoria de Lie, assumiremos certo conhecimento desse tópico, assim como algum conhecimento de Álgebra e Geometria Diferencial.

A.1 Álgebras de Lie e grupos de Lie

No que segue, sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua respectiva álgebra de Lie.

Ao estudarmos grupos e álgebras de Lie, existe uma classe de homomorfismos de grande importância: as *representações*.

Sejam V um espaço vetorial e $\mathrm{Gl}(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ é linear e invertível}\}$ o conjunto dos automorfismos de V. Assim, um homomorfismo (de grupos) $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ é chamado de **representação (do grupo)** em V. Nesse caso, V é chamado de **espaço da representação** e $\dim V$ é a **dimensão da representação**.

O grupo $\mathrm{Gl}(V)$ é um grupo de Lie e sua álgebra, denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, é o conjunto de todas as transformações lineares de V em V com colchete de Lie dado pelo comutador $[T, S] = TS - ST$. Assim, em analogia ao que ocorre no caso de um grupo de Lie, um homomorfismo (de álgebras) $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é chamada **representação (da álgebra)** em V. Nesse caso, V continua sendo chamado de espaço da representação e a dimensão da representação é a dimensão de V.

O estudo das representações, sejam de grupos ou álgebras de Lie, é em si uma grande área de estudo na matemática que possui ainda diversas aplicações em física. Naturalmente não temos como entrar em grandes detalhes aqui. Porém, existe um tipo de representação que será de grande importância para o nosso trabalho. Elas são conhecidas como *representações adjuntas*.

Dado $g \in G$, consideremos o automorfismo $C_g : G \to G$ definido por $C_g(h) = ghg^{-1}$. Como $C_g(e) = e$, temos que $d(C_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Além disso, dados $g, h \in G$, vale que

$$C_g \circ C_h = C_{gh},$$

ou seja, $d(C_g)_e \circ d(C_h)_e = d(C_{gh})_e$. Assim, existe uma representação $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$, definida por $g \mapsto (C_g)_e$, chamada de **representação adjunta** de G em $\mathfrak{g}$.

Uma propriedade importante de Ad é o fato de que $\mathrm{Ad}(g^{-1}) = d(C_{g^{-1}}) = d(C_g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g)^{-1}$, isso é, para todo $g \in G$, $\mathrm{Ad}(g)$ é um automorfismo da álgebra $\mathfrak{g}$.

No caso da álgebra $\mathfrak{g}$, definimos a **representação adjunta**, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, como a aplicação $X \mapsto [X, -]$, isso é, $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. Pela identidade de Jacobi, essa aplicação é de fato um homomorfismo, garantindo que ad é uma representação.

O fato de que as duas representações acima são chamadas de adjunta não é uma coincidência. De fato, a representação adjunta Ad é diferenciável e, portanto, é uma aplicação $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Na verdade, vale que $d(\mathrm{Ad})_e = \mathrm{ad}$.

A.2 Subálegbras solúveis e nilpotentes

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dados dois subconjuntos $A, B \subseteq \mathfrak{g}$, definimos o subespaço

$$[A, B] \coloneqq \langle [X, Y] \mid X \in A \ \text{ e } \ Y \in B \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i [X_i, Y_i] \mid n \in \mathbb{N},\ c_i \in \mathbb{C},\ X_i \in A \text{ e } Y_i \in B \right\}.$$

Com isso, podemos definir os subespaços

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &\coloneqq \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &\coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \mathfrak{g}'' &= [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &\coloneqq [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que cada $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Com efeito, tomando $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^{(0)}$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)}$. Agora, supondo que $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ é um ideal, tomamos $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Assim, temos que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} [Z_i, W_i],$$

onde $Z_i, W_i \in \mathfrak{g}^{k-1}$. Portanto, usando a identidade de Jacobi,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} [X, [Z_i, W_i]] = \sum_{i=1}^{n} [[X, Z_i], W_i] + [Z_i, [X, W_i]].$$

Como $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ é um ideal, por hipótese de indução, $[X, Z_i], [X, W_i] \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, ou seja,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} [[X, Z_i], W_i] + [Z_i, [X, W_i]] \in \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Disso, podemos ainda concluir que cada $\mathfrak{g}^{(k)}$ é uma subálgebra e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, chamamos a série de ideais encaixados

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}'' \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)} \supseteq \cdots$$

de **série derivada** de $\mathfrak{g}$. Além disso, os elementos dessa série são chamados de **álgebras derivadas** de $\mathfrak{g}$.

De maneira similar, consideremos os subespaços

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &:= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &:= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \\ \mathfrak{g}^3 &:= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &:= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$. De fato, se $j = 1$, então

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^1] = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{i+1},$$

pela definição de $\mathfrak{g}^{i+1}$. Assim, suponhamos que o resultado vale para $j - 1$. Nesse caso,

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] = [\mathfrak{g}^i, [\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}]] \subseteq [[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j-1}], \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^{j-1}, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]] \subseteq [\mathfrak{g}^{i+j-1}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^{j-1}, \mathfrak{g}^{i+1}] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}.$$

Proposição A.1. *$\mathfrak{g}^k$ é o subespaço gerado por todos os colchetes envolvendo k elementos de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Para $k = 1$ o resultado é válido por definição. Suponhamos que vale para $k - 1$. Nesse caso, dado $X \in \mathfrak{g}^{k-1}$, temos que

$$X = \sum_i Z_i,$$

onde Z_i é o produto de $k - 1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Assim, por definição, $\mathfrak{g}^k$ é a subálgebra gerada por elementos do tipo

$$\sum_i [X_i, Z_i],$$

que envolvem k elementos de $\mathfrak{g}$, como queríamos. □

Dessa proposição, concluímos que $\mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{g}^k$, pois um produto que envolve $k + 1$ elementos necessariamente envolve k elementos. Assim, temos a sequência de subespaços

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \cdots .$$

Daí, damos o nome a esta sequência de **série centra descendente** de $\mathfrak{g}$.

Como uma observação final, note que cada $\mathfrak{g}^k$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Com efeito, temos que

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1} \subseteq \mathfrak{g}^k.$$

Com isso, podemos entrar no tópico principal desta seção. Dizemos que uma álgebra $\mathfrak{g}$ é **solúvel** quando existe existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$, isso é, quando sua série derivada se anula a partir de algum índice.

De forma análoga, dizemos que uma álgebra $\mathfrak{g}$ é **nilpotente**, quando existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{g}^{k_0} = 0,$$

isso é, quando sua série central descendente se anula em algum índice.

O estudo de álgebras nilpotentes e solúveis é muito importante na teoria geral. Entretanto, trabalhar com a definição é em geral difícil. Assim, encontrar alguma outra caracterização para esse tipo de álgebras é de grande interesse. É aí que entram os *Critérios de Cartan*, que veremos mais adiante.

A motivação principal para o estudo de álgebras nilpotentes é que suas representações induzem decomposições no espaço da representação que não dependem do elemento da álgebra. Mais precisamente,

Teorema A.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente. Dessa forma, se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Gl}(V)$ é uma representação, então existem funcionais lineares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ tais que*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s},$$

onde, para cada $i = 1, \ldots, s$,

$$V_{\lambda_i} := \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{g},\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\}.$$

Além disso, cada V_{λ_i} é $\mathfrak{g}-$invariante.

Demonstração: A prova desse resultado envolve uma sequência de propriedades que são exploradas mais a fundo em [15, Cap.2]. A demonstração em si está na página 65 do mesmo livro. □

No caso de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ não necessariamente nilpotente e uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Gl}(V)$, se existe um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ tal que

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{g},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\} \neq 0,$$

dizemos que λ é um **peso** de ρ.

A.3 Aplicação exponencial

Introduziremos agora o conceito da *aplicação exponencial* de uma álgebra de Lie. Ela será amplamente utilizada no trabalho, uma vez que ela é a principal forma de passarmos as propriedades de uma álgebra para seu respectivo grupo. Faremos uma explicação breve aqui, porém mais detalhes podem ser encontrados em [7, p. 104] e [8, p. 49].

Primeiramente, relembremos que a álgebra de Lie é definida como o conjunto dos campos invariantes (à esquerda ou à direita). Assim, seja X um campo invariante à esquerda[1] e seja X_t seu fluxo.

Agora, sejam $g \in G$ e $h \in \operatorname{dom} X_t$ e definamos a curva

$$\alpha(t) = X_t(h)g.$$

Como $X_0(h) = h$, temos que $\alpha(0) = hg$. Além disso,

$$\alpha'(t) = d(D_g)_{X_t(h)}(X(X_t(h))) = X(X_t(h)g) = X(\alpha(t)).$$

Com isso, temos que α é a solução de $dg/dt = X(g)$ com condição inicial $\alpha(0) = hg$. Portanto, $\alpha(t) = X_t(hg)$. Logo, $X_t(hg) = X_t(h)g$ e, em particular, tomando $h = e$ temos

$$X_t(g) = X_t(e)g.$$

Como consequência da construção acima, obtemos os seguintes resultados.

Proposição A.3. *Se X é um campo invariante à esquerda ou à direita, então X é completo.*

Proposição A.4. *Sejam X, Y campos invariantes à esquerda ou à direita. Dessa forma, se $X(e) = Y(e)$, então $X_t(e) = Y_t(e)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Ambos os resultados podem ser encontrados em [7].

Finalmente, estamos aptos à definir a *aplicação exponencial*.

Definição A.5. *A **aplicação exponencial**,* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é definida por*

$$X \mapsto \exp X := (X^d)_{t=1}(e) = (X^e)_{t=1}(e),$$

onde X^d e X^e denotam os campos invariantes à direita e à esquerda associados a X, respectivamente. Além disso, podemos também denotar $\exp(X)$ *por e^X.*

Uma propriedade importante da aplicação exponencial relaciona a representação adjunta com a conjugação no grupo.

[1] O mesmo pode ser feito com um campo invariante à direita.

Proposição A.6. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Dessa forma, se $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, então*

$$C_g(e^X) = e^{\mathrm{Ad}(g)X}.$$

Demonstração: [7, p. 112]. □

Algumas outras propriedades importantes para a aplicação exponencial são enunciadas a seguir.

Teorema A.7. *Seja G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Se G é conexo, então para todo $g \in G$ existem $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ tais que*

$$g = e^{X_1} \cdots e^{X_m}.$$

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [7, p. 108]. □

A partir da proposição anterior, encontramos uma forma de encontrarmos subgrupos conexos de G. Isso pode ser feito tomando uma subálgebra $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ e definindo o subgrupo

$$\exp \mathfrak{s} := \langle e^X \mid X \in \mathfrak{s} \rangle = \{e^{X_1} \cdots e^{X_m} \mid m \in \mathbb{N}\},$$

gerado por produtos finitos de exponenciais de elementos de $\mathfrak{s}$. Pelo Teorema acima esse subgrupo é conexo em G.

Além disso, podemos também encontrar subgrupos abelianos de G.

Proposição A.8. *Seja $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Dessa forma, se $\mathfrak{s}$ é uma álgebra de Lie abeliana, então $\exp \mathfrak{s}$ é um subgrupo abeliano e conexo de G.*

Demonstração: O farto de que esse subgrupo é abeliano segue da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff que afirma que, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$e^X e^Y = e^{c(X,Y)},$$

onde

$$c(X,Y) = X + Y + \sum_{k \geq 2} c_k(X,Y)$$

e os termos $c_k(X,Y)$ são termos envolvendo colchetes de Lie de $\mathfrak{g}$. Daí, se $\mathfrak{s}$ é abeliana os termos $c_k(X,Y) = 0$ para todo $k \geq 2$ e, portanto,

$$e^X e^Y = e^{X+Y} = e^{Y+X} = e^Y e^X.$$

Como os elementos de $\exp \mathfrak{s}$ são gerados por exponenciais como acima, concluímos que $\exp \mathfrak{s}$ é um subgrupo abeliano. A conexidade segue do Teorema anterior. $\square$

Para mais detalhes sobre a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, sugerimos [7, p. 171].

A.4 Normalizadores e centralizadores

Seja $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$ um subespaço. Definimos o **normalizador** de $\mathfrak{v}$ em $\mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{v}) \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}(X)\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{v}\}.$$

Usando a identidade de Jacobi, podemos mostrar que $\mathfrak{n}(\mathfrak{v})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Além disso, quando vale a igualdade $\mathfrak{n}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{g}$, dizemos que $\mathfrak{v}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

Em analogia à definição anterior, o **normalizador** de $\mathfrak{v}$ em relação ao grupo G é dado por

$$N_G(\mathfrak{v}) \coloneqq \{g \in G \mid \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\}.$$

Como Ad é um homomorfismo, podemos mostrar que $N(\mathfrak{v})$ é um subgrupo de G.

Proposição A.9. *Sejam $H \subseteq G$ um subgrupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Se $g \in G$ normaliza H (i.e. $gHg^{-1} \subseteq H$), então g normaliza $\mathfrak{h}$ (i.e., $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$).*

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{h}$ e $g \in G$ que normaliza H. Consideremos a curva

$$\gamma(t) = e^{t \operatorname{Ad}(g)X}.$$

Como sabemos, vale a igualdade

$$C_g(e^{tX}) = e^{t \operatorname{Ad}(g)X}$$

e do fato que g normaliza H, podemos concluir que a curva γ é uma curva em H. Sua derivada em $t = 0$ é $\operatorname{Ad}(g)X$ o que implica que $\operatorname{Ad}(g)X \in \mathfrak{h}$. Portanto, $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$. Como $\operatorname{Ad}(g)$ é um isomorfismo, temos que $\dim \operatorname{Ad}(g)\mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}$. Logo, $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. $\square$

Corolário A.10. *Nas hipóteses da proposição acima, se H é subgrupo de Lie normal de G, então $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como todo $g \in G$ normaliza H, tomando algum $X \in \mathfrak{g}$, temos que e^{tX} normaliza H. Portanto, pela Proposição anterior vale que

$$\operatorname{Ad}(e^{tX})\mathfrak{h} = \mathfrak{h}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daí, tomando $Y \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{Ad}(e^{tX})Y \subseteq \mathfrak{h}$. Assim,

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(e^{tX})Y|_{t=0} \in \mathfrak{h}.$$

Isso mostra que $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ para $Y \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{g}$ qualquer, concluindo que $\mathfrak{h}$ é ideal de $\mathfrak{g}$. □

Proposição A.11. *Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ é um subgrupo normal de G.*

Demonstração: Primeiramente, tomemos $Y \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é um ideal, temos que $\mathrm{ad}(Y)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$. Assim, a exponencial ainda deixa $\mathfrak{h}$ invariante (pois é um somatório composto por $\mathrm{ad}(Y)$), isso é,

$$\mathrm{Ad}(e^Y)\mathfrak{h} = e^{\mathrm{ad}(Y)}\mathfrak{h} = \mathfrak{h},\ \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Agora, como G é conexo, temos que todo $g \in G$ é um produto da forma

$$g = e^{X_1} e^{X_n},\ \text{com } X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g},$$

ou seja,

$$\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}(e^{X_1} e^{X_n})\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}(e^{X_1})\,\mathrm{Ad}(e^{X_n})\mathfrak{h} = \mathfrak{h}.$$

Assim, para todo $X \in \mathfrak{h}$ e $g \in G$,

$$C_g(e^X) = e^{\mathrm{Ad}(g)X} \in H.$$

Finalmente, como H é produto de exponenciais de elementos de $\mathfrak{h}$, isso conclui a demonstração. □

Proposição A.12. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Nesse caso, a álgebra de Lie de $N_G(\mathfrak{s})$ é $\mathfrak{n}(\mathfrak{s})$.*

Demonstração: Denotemos a álgebra de Lie de $N_G(\mathfrak{s})$ por $\mathfrak{e}$ e tomemos $X_0 \in \mathfrak{e}$. Como $N_G(\mathfrak{s})$ é um subgrupo fechado de G, pelo Teorema 6.15 de [7, p. 136], temos que

$$\mathfrak{e} = \{X \in \mathfrak{g} \mid e^{tX} \in N_G(\mathfrak{s})\ \forall t \in \mathbb{R}\},$$

ou seja,

$$e^{tX_0} \in N_G(\mathfrak{s})\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomando agora $Y_0 \in \mathfrak{s}$ arbitrário, temos

$$Ad(e^{tX_0})Y_0 \in N_G(\mathfrak{s})\ \forall t \in \mathbb{R},$$

pois e^{tX} normaliza $\mathfrak{s}$. Assim,

$$\mathfrak{s} \ni \frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}(e^{tX_0}))|_{t=0} Y_0 = \mathrm{ad}(X_0)(Y_0) = [X_0, Y_0]$$

e, portanto, $X_0 \in \mathfrak{n}(\mathfrak{s})$ pois Y_0 foi tomado de forma arbitrária.

Reciprocamente, consideremos $X_0 \in \mathfrak{n}(\mathfrak{s})$ e $Y_0 \in \mathfrak{s}$ arbitrário. Nesse caso, temos por definição que $[X_0, Y_0] \in \mathfrak{s}$. Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X_0)(Y_0) &= [X_0, Y_0] \in \mathfrak{s} \\
\mathrm{ad}(X_0)^2(Y_0) &= [X_0, [X_0, Y_0]] \in \mathfrak{s} \\
\mathrm{ad}(X_0)^3(Y_0) &= [X_0, [X_0, [X_0, Y_0]]] \in \mathfrak{s} \\
&\vdots \\
\mathrm{ad}(X_0)^k(Y_0) &= [X_0, [\cdots, [X_0, Y_0]]] \in \mathfrak{s} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

isso é, $\mathrm{ad}(X_0)^k(Y_0) \in \mathfrak{s}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $t\,\mathrm{ad}(X_0)^k(Y_0) = \mathrm{ad}(tX_0)^k(Y_0) \in \mathfrak{s}$. Portanto,

$$\mathrm{Ad}(e^{tX_0})Y_0 = e^{\mathrm{ad}(tX_0)}(Y) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathrm{ad}(tX_0)^k}{k!}\right)(Y_0) \in \mathfrak{s}.$$

Logo, $e^{tX_0} \in N_G(\mathfrak{s})$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o que implica, pelo Teorema 6.15 de [7, p. 136], que $X_0 \in \mathfrak{e}$, concluindo a demonstração. □

Tomando novamente um subespaço $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$, definimos o **centralizador** de $\mathfrak{v}$ em $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{v}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{v}] = 0\}.$$

Além disso, podemos definir o centralizador se $\mathfrak{v}$ no grupo G por

$$Z_G(\mathfrak{v}) = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{v}} = \mathrm{id}\,|_{\mathfrak{v}}\}.$$

A.5 Álgebras semissimples

Nesta seção introduziremos um tópico fundamental do trabalho: as álgebras semissimples. Como esse tipo de álgebra já foi muito estudada, existe uma grande quantidade de resultados próprios para elas, o que nos fornece diversas ferramentas nesse trabalho.

Primeiramente, consideremos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Ela será dita **simples** quando

(a) $\dim \mathfrak{g} \neq 1$; e

(b) seus únicos ideais são triviais, isso é, 0 e $\mathfrak{g}$.

Por outro lado, $\mathfrak{g}$ é chamada de semissimples quando seu único ideal solúvel for 0.

Proposição A.13. *Toda álgebra simples é semissimples.*

Demonstração: Consideremos o radical solúvel de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Como sabemos, ele é o único ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ [15, p.48]. Como $\mathfrak{g}$ é simples por hipótese, temos que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é $\mathfrak{g}$ ou 0. No segundo caso, concluímos que $\mathfrak{g}$ é semissimples. Assim, suponhamos que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Nesse caso, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra solúvel e, portanto, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, pois, caso contrário, a série derivada não se anularia. Agora, $\mathfrak{g}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ e, por hipótese, devemos ter $\mathfrak{g}' = 0$. Logo, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra abeliana. Agora, se $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, isso não pode ocorrer, pois todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal. Isso contradiz o fato que $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ por ela ser simples. Logo, $\mathfrak{g}$ é semissimples. □

Apesar de existirem uma série de resultados gerais para esses dois tipos de álgebras de Lie, os evitaremos aqui por brevidade. Porém, existe uma caracterização das álgebras semissimples que é de grande importância (inclusive ela é usada como a definição em certos livros). Para demonstrá-la, devemos introduzir primeiramente, os *Critérios de Cartan.*

A.6 Critérios de Cartan

Introduziremos agora os Critérios de Cartan que são utilizados para classificar as álgebras semissimples. Apesar de não entrarmos dentro desse assunto especificamente, alguns dos critérios serão usados mais à frente. Além disso, aqui surge a *forma de Cartan-Killing* que é de grande importância no trabalho e no estudo geral de álgebras semissimples.

A.6.1 Derivações

Consideremos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é chamada de **derivação** quando, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

Note a semelhança dessa condição com a Regra de Leibniz para a derivada de funções, o que justifica o uso da palavra derivação aqui.

Exemplo 4. Um exemplo fundamental de uma derivação surge da representação adjunta na álgebra. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e consideremos a aplicação linear $\mathrm{ad}(X) = [X, -]$. Note que, dados $Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos

$$\mathrm{ad}(X)[Y,Z] = [X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] = [\mathrm{ad}(X)Y,Z] + [Y,\mathrm{ad}(X)Z].$$

Assim, as adjuntas de elementos de $\mathfrak{g}$ são de fato derivações, que recebem o nome de **derivações internas**. •

Uma das principais motivações em estudar derivações em uma álgebra de Lie é que a decomposição de Jordan delas possui boas propriedades em relação ao produto na álgebra.

Proposição A.14. *Seja $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma derivação da álgebra de Lie de dimensão finita. Se*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

é a decomposição primária de $\mathfrak{g}$, com

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (D-\lambda_i)^n X = 0\},$$

então

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j},$$

onde convencionamos que $\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não for autovalor de D.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [15, p. 77 - 78]. □

Exemplo 5. Consideremos a álgebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ e tomemos

$$H = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

uma matriz diagonal em $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ onde suas entradas sejam distintas. Nesse caso, $\mathrm{ad}(H)$ é diagonalizável e seus autovalores são

$$\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, \quad \text{com } \ i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Assim, existe uma decomposição de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ da forma

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H),0) \oplus \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H),\alpha_{12}) \oplus \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H),\alpha_{21}) \oplus \cdots$$
$$\cdots \oplus \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H),\alpha_{n,n-1}) \oplus \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H),\alpha_{n-1,n}).$$

Note que, se $\mathfrak{h}$ denota o subespaço das matrizes diagonais em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, então para $K \in \mathfrak{h}$ temos

$$\mathrm{ad}(H)K = [H, K] = HK - KH = 0,$$

ou seja, $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H), 0)$. Por outro lado, Se $K \in \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H), 0)$, então $HK = KH$. Como H possui entradas distintas, K também é uma matriz diagonal, ou seja, $\mathfrak{h} = \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H), 0)$. Além disso, dadas matrizes $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, temos que $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$, mostrando que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Esse fato será usado no futuro.

Agora, consideremos a matriz E_{ij} onde $i \neq j$, com todas as entradas nulas exceto pela $ij-$ésima entrada que é 1. O subespaço gerado por E_{ij} é o autoespaço associado ao autovalor α_{ij}. Com efeito, note que

$$\mathrm{ad}(H)E_{ij} = \lambda_i E_{ij} - \lambda_j E_{ij} = \alpha_{ij} E_{ij},$$

isso é, $\langle E_{ij} \rangle \subseteq \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H), \alpha_{ij})$. Como $\dim\langle E_{ij} \rangle = 1 = \dim \mathrm{aut}(\mathrm{ad}(H), \alpha_{ij})$ (pois existem $n \cdot (n-1) = n^2 - n$ autoespaços e $\dim \mathfrak{h} = n$), então $\langle E_{ij} \rangle$ é o subespaço associado ao autovalor α_{ij}, de forma que

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \langle E_{12} \rangle \oplus \langle E_{21} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle E_{n,n-1} \rangle \oplus \langle E_{n-1,n} \rangle.$$

Para ilustrar a proposição acima, devemos mostrar que o colchete de elementos em diferentes autoespaços está no autoespaço da soma dos autovalores. De fato, temos que

$$[E_{ij}, E_{rs}] = \delta_{jr} E_{is} - \delta_{si} E_{rj},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Note que não podemos ter $\delta_{jr} = \delta_{si} = 1$ simultaneamente, pois $i \neq j$ e $r \neq s$ na definição das matrizes E_{ij} e E_{rs}. Assim, temos dois casos

1. $j = r$ e $i \neq s$ (ou vice-versa): nesse caso, $[E_{ij}, E_{js}] = E_{is}$ que pertence ao subespaço associado a α_{is}. Porém,

$$\alpha_{is} = \lambda_i - \lambda_s = (\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_s) = \alpha_{ij} + \alpha_{js},$$

   como esperado.

2. $j \neq r$ e $i \neq s$: nesse caso, $[E_{ij}, E_{rs}] = 0$, pois

$$\alpha_{ij} + \alpha_{rs} = (\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_r - \lambda_s),$$

   que não é um autovalor de $\mathrm{ad}(H)$. Portanto, caímos na convenção de que esse colchete deve se anular, como na proposição.

•

A.6.2 Forma de Cartan-Killing

Consideremos uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. A partir dela, definimos a **forma traço** de ρ como a aplicação

$$\begin{aligned} \beta_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{C} \\ (X, Y) &\mapsto \operatorname{tr}(\rho(X)\rho(Y)). \end{aligned}$$

Quando $\rho = \operatorname{ad}$, a forma traço recebe o nome de **forma de Cartan-Killing** e é usualmente denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição A.15. *Sejam ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Dessa forma,*

(i) $\beta_\rho([X, Y], Z) + \beta_\rho(Y, [X, Z]) = 0$*;*

(ii) se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um automorfismo, então $\langle \phi(X), \phi(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$

(iii) se $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma derivação de $\mathfrak{g}$, então $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$.

Demonstração:

(i) Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta_\rho([X, Y], Z) + \beta_\rho([X, Y], Z) &= \operatorname{tr}(\rho[X, Y]\rho(Z)) + \operatorname{tr}(\rho(Y)\rho[X, Z]) \\ &= \operatorname{tr}([\rho(X), \rho(Y)]\rho(Z)) + \operatorname{tr}(\rho(Y)[\rho(X), \rho(Z)]) \\ &= \operatorname{tr}([\rho(X), \rho(Y)\rho(Z)]) = 0. \end{aligned}$$

(ii) Sejam $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um automorfismo e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Note que,

$$\operatorname{ad}(\phi(X))(Y) = [\phi(X), Y] = \phi[X, \phi^{-1}(Y)] = \phi \operatorname{ad}(X)\phi^{-1}(Y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \phi(X), \phi(Y) \rangle &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\phi(X)) \operatorname{ad}(\phi(Y))) \\ &= \operatorname{tr}\Big(\phi \operatorname{ad}(X)\phi^{-1}\phi \operatorname{ad}(Y)\phi^{-1}\Big) \\ &= \operatorname{tr}\Big(\phi \operatorname{ad}(X) \operatorname{ad}(Y)\phi^{-1}\Big) \\ &= \operatorname{tr}\Big(\operatorname{ad}(X)\phi\phi^{-1} \operatorname{ad}(Y)\Big) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \operatorname{ad}(Y)) = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

(iii) Sejam D uma derivação em $\mathfrak{g}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Note que,

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(DX)(Y) &= [DX, Y] \\ &= D[X, Y] - [X, DY] \\ &= D \operatorname{ad}(X)(Y) - \operatorname{ad}(X)(DY) \\ &= [D, \operatorname{ad}(X)](Y). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle DX, Y\rangle + \langle X, DY\rangle &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(DX)\operatorname{ad}(Y)) + \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(DY))\\ &= \operatorname{tr}([D, \operatorname{ad}(X)]\operatorname{ad}(Y) + \operatorname{ad}(X)[D, \operatorname{ad}(Y)])\\ &= \operatorname{tr}(D\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y) - \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)D)\\ &= \operatorname{tr}([D, \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)]) = 0.\end{aligned}$$

□

A.6.3 Critérios de Cartan

Lema A.16. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se $\langle X, Y\rangle = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração: A demonstração deste lema pode ser encontrada em [15, p.85]. A estratégia de demonstração envolve mostrar que a representação adjunta de $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente, o que pelo Teorema de Engel implica em $\mathfrak{g}'$ nilpotente, de onde concluímos que $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

Teorema A.17 (Primeiro Critério de Cartan). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Dessa forma, $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $Y \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: A demonstração de que $\mathfrak{g}$ solúvel implica em $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e $Y \in \mathfrak{g}$ pode ser vista em [15, p.85]. Ela envolve usar o Teorema de Lie, que garante que existe uma base de $\mathfrak{g}$ na qual a representação adjunta é triangular. Para mostra a recíproca, observe que a condição implica que a forma de Cartan-Killing é nula em $\mathfrak{g}'$. Agora, como $\mathfrak{g}'$ é um ideal, isso implica que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ é identicamente nula. Logo, pelo Lema anterior, $\mathfrak{g}'$ é solúvel e, portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

Teorema A.18 (Segundo Critério de Cartan). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Dessa forma, $\mathfrak{g}$ é semissimples se, e somente se, a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é não-degenerada.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que se $\mathfrak{g}$ não é semissimples, então sua forma de Cartan-Killing é degenerada. Com efeito, se $\mathfrak{g}$ não é semissimples, então $\mathfrak{g}$ possui um ideal abeliano não-trivial, uma vez que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq 0$ e, portanto, existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^{(k)}$ é abeliano e não-nulo. Denotando esse, ideal por $\mathfrak{i}$, tomemos $X \in \mathfrak{i}$. Nesse caso, dado $Y \in \mathfrak{g}$ qualquer, a imagem de $\operatorname{ad}(Y)\operatorname{ad}(X)$ está contida em $\mathfrak{i}$. Assim,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(Y)\operatorname{ad}(X)) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(Y)\operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{i}}).$$

Mas como $\mathfrak{i}$ é abeliano, $\operatorname{ad}(Y)\operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{i}} = 0$, o que mostra que

$$\langle Y, X\rangle = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{i}$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{i}$ é não-nulo, existe $X \neq 0$ que satisfaz a igualdade acima, mostrando que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é degenerada. Logo, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada, então $\mathfrak{g}$ é semissimples.

Suponhamos, agora, que $\mathfrak{g}$ é semissimples. Nesse caso, definimos

$$\mathfrak{g}^{\perp} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle X, Y\rangle = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Note que, se $X \in \mathfrak{g}^{\perp}$ e $Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\langle [Z, X], Y\rangle = -\langle X, [Z, Y]\rangle = 0$$

devido à Proposição A.15. Assim, $\mathfrak{g}^{\perp}$ é um ideal. Portanto, a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathfrak{g}^{\perp}$ coincide com a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ e, por definição, ela é nula em $\mathfrak{g}^{\perp}$. Em particular,

$$\langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle|_{\mathfrak{i}} = 0 \ \forall X \in (\mathfrak{g}^{\perp})' \ \text{ e } \ Y \in \mathfrak{g}^{\perp}.$$

Portanto, pelo Primeiro Critério de Cartan, temos que $\mathfrak{g}^{\perp}$ é solúvel. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, concluímos que $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$, o que equivale a dizer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada. □

O teorema a seguir fornece uma nova definição para álgebras semissimples, que é útil em diversas ocasiões.

Teorema A.19 (Caracterização de álgebras semissimples). *$\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples se, e somente se, $\mathfrak{g}$ possui uma decomposição do tipo*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m,$$

onde $\mathfrak{g}_i$, com $i = 1, \ldots, m$ são ideais simples. Nesse caso, a decomposição é única (a menos da ordem dos índices) e os ideais de $\mathfrak{g}$ são somas dos $\mathfrak{g}_i$.

Demonstração: [8, p.29] Suponhamos que $\mathfrak{g}$ seja uma álgebra de Lie com uma decomposição como no enunciado. Consideremos as projeções $\Pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ e, dado um ideal qualquer $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, definamos $\mathfrak{a}_i := \Pi_i(\mathfrak{a})$. Afirmamos que $\mathfrak{a}_i$ é um ideal de $\mathfrak{g}_i$. De fato, dados $X_i \in \mathfrak{g}_i$ e $A \in \mathfrak{a}$ quaisquer, temos que

$$[\Pi_i A, X_i] = [\Pi_i A, \Pi_i X_i] = \Pi_i [A, X_i].$$

Como $\mathfrak{a}$ é um ideal e $A \in \mathfrak{a}$, vale que $[A, X_i] \in \mathfrak{a}$. Assim, $\Pi_i[A, X_i] \in \mathfrak{a}_i$ como desejávamos. Agora, por hipótese cada $\mathfrak{g}_i$ é uma álgebra simples, ou seja, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{g}_i$ ou $\mathfrak{a}_i = 0$. No primeiro caso, temos que

$$\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}_i] = [\mathfrak{g}_i, \Pi_i \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a},$$

ou seja,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i) = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{g}_i,$$

mostrando que os ideais possuem a estrutura enunciada. Além disso,

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \left[\bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{g}_i, \bigoplus_{\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{g}_j \right] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{a}.$$

Portanto, $\mathfrak{a}$ não é solúvel se $\mathfrak{a} \neq 0$. Logo, $\mathfrak{g}$ é semissimples.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{g}$ seja semissimples. Dado $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal minimal não nulo, consideremos o subespaço $\mathfrak{a}^\perp$ em relação à forma de Cartan-Killing. Note que, $\mathfrak{a}^\perp$ é um ideal, pois, dados $H \in \mathfrak{a}^\perp$, $A \in \mathfrak{a}$ e $X \in \mathfrak{g}$,

$$\langle [X, H], A \rangle = \langle H, -[X, A] \rangle = 0,$$

pois $A \in \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}$ é um ideal. Assim, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$. No primeiro caso, $\langle A, B \rangle = 0$ para todo $A, B \in \mathfrak{a}$. Assim, pelo Primeiro Critério de Cartan, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ é solúvel e, portanto, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$, uma vez que $\mathfrak{g}$ é semissimples. Daí, concluímos que a forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{a}$ é não-degenerada e, portanto, $\mathfrak{a}$ é semissimples. Agora, consideremos um ideal $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ e $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^\perp] = 0$, então $\mathfrak{b}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, já que dado $X = A + A' \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ temos que

$$[B, X] = [B, A] + [B, A'] = [B, A] \in \mathfrak{b}.$$

Assim, pela minimalidade de $\mathfrak{a}$ temos que $\mathfrak{b} = 0$ ou $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Portanto, $\mathfrak{a}$ é simples. Analogamente, todo ideal de $\mathfrak{a}^\perp$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Assim, $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = 0$ mostrando que $\mathfrak{a}^\perp$ é semissimples. Assim, podemos repetir o processo para $\mathfrak{a}^\perp$ e, como a dimensão de $\mathfrak{g}$ é finita, podemos encontrar por indução uma decomposição de $\mathfrak{g}$ em ideais simples. □

Proposição A.20. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semissimples com decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$. Dessa forma, o subespaço ortogonal $\mathfrak{g}_i^\perp$ de alguma componente simples é a soma das outras componentes.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathfrak{g}$ se decomponha como soma de dois ideais $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$. Assim, como $\mathfrak{h}_1^\perp$ tem a mesma dimensão que $\mathfrak{h}_2$, pois $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_1^\perp$ são complementares. Agora, se $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$ e $Z \in \mathfrak{g}$, então,

$$\operatorname{ad}(X) \operatorname{ad}(Y)(Z) = [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2,$$

já que $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são ideais. Portanto, $\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y) = 0$ isso é, $\langle X, Y\rangle = 0$. Logo, $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{h}_1^\perp$ e, como eles possuem a mesma dimensão, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1^\perp$. O caso geral segue desse observando que a soma das demais componentes da decomposição forma um ideal de $\mathfrak{g}$, como visto no Teorema anterior. □

Corolário A.21. *Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como $\mathfrak{g}'$ é um ideal, pela Proposição anterior, $(\mathfrak{g}')^\perp$ é um ideal que complementa $\mathfrak{g}'$. Agora, tomando $X, Y \in (\mathfrak{g}')^\perp$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap (\mathfrak{g}')^\perp = 0$, ou seja, $(\mathfrak{g}')^\perp$ é abeliano. Como ideias abelianos são solúveis, temos que $(\mathfrak{g}')^\perp = 0$. Logo, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. □

Proposição A.22. *Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então toda derivação de $\mathfrak{g}$ é interna.*

Demonstração: Seja D uma derivação de $\mathfrak{g}$. Definimos o funcional linear

$$\begin{aligned} \eta : \mathfrak{g} &\to \mathbb{C} \\ X &\mapsto \operatorname{tr}(D\operatorname{ad}(X)). \end{aligned}$$

Como $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ é não-degenerada, então pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um elemento $Y_D \in \mathfrak{g}$ tal que

$$\operatorname{tr}(D\operatorname{ad}(X)) = \langle Y_D, X\rangle, \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Defina a derivação $E \coloneqq D - \operatorname{ad}(Y_D)$ e note que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E\operatorname{ad}(X)) &= \operatorname{tr}((D - \operatorname{ad}(Y_D))\operatorname{ad}(X)) \\ &= \operatorname{tr}(D\operatorname{ad}(X)) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(Y_D)\operatorname{ad}(X)) \\ &= \langle Y_D, X\rangle - \langle Y_D, X\rangle = 0, \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Agora, tomando $X, Y \in \mathfrak{g}$ arbitrários, temos

$$\langle EX, Y\rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(EX)\operatorname{ad}(Y)) = \operatorname{tr}([E, \operatorname{ad}(X)]\operatorname{ad}(Y)),$$

onde $\operatorname{ad}(EX) = [E, \operatorname{ad}(X)]$, pois E é uma derivação. Assim,

$$\begin{aligned} \langle EX, Y\rangle &= \operatorname{tr}([E, \operatorname{ad}(X)], \operatorname{ad}(Y)) \\ &= \operatorname{tr}(E\operatorname{ad} X\operatorname{ad} Y - \operatorname{ad}(X)E\operatorname{ad}(Y)) \\ &= \operatorname{tr}(E\operatorname{ad}[X, Y]) = 0. \end{aligned}$$

Como Y é arbitrário e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não-degenerada, concluímos que $EX = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo, $E = 0$ e, portanto, $D = \operatorname{ad}(Y_D)$. □

A.7 Subálgebras de Cartan I

Consideremos $\mathfrak{g}$ uma álgebra e $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma derivação. Como já vimos, se a decomposição primária de $\mathfrak{g}$ com relação a D é dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m,$$

então vale que $[\mathfrak{g}_{\lambda_1}, \mathfrak{g}_{\lambda_2}] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda_1+\lambda_2}$, se $\lambda_1 + \lambda_2$ for autovalor de D. Agora, se D é uma derivação interna de $\mathfrak{g}$, digamos $D = \mathrm{ad}(X)$, então 0 é um autovalor de $\mathrm{ad}(X)$, pois $\mathrm{ad}(X)(X) = 0$. É nesse contexto que surgem as *subálgebras de Cartan*, que são justamente a componente associada ao autovalor nulo na decomposição primária de uma álgebra por uma derivação interna, a saber uma derivação do tipo $\mathrm{ad}(X)$ onde X é chamado de *elemento regular* da álgebra. Note que como toda derivação de uma álgebra semissimples é interna, as subálgebras de Cartan aparecem frequentemente no estudo delas, e são fundamentais para classificá-las.

Definição A.23. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que uma subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é* ***de Cartan*** *quando*

(i) $\mathfrak{h}$ *é nilpotente;*

(ii) $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Observação A.24. *Note que a segunda condição acima é equivalente a dizer que $[X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} \Rightarrow X \in \mathfrak{h}$. De fato, como $\mathfrak{h}$ é subálgebra, sempre vale que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. Assim, (ii) equivale a $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$, isso é, se $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \Rightarrow X \in \mathfrak{h}$ ou equivalentemente, $X \in \mathfrak{g}$ é tal que $[X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, então $X \in \mathfrak{h}$.*

Exemplo 6. No caso da álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, uma subálgebra de Cartan é dada por

$$\mathfrak{h} = \{H \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid H \text{ é diagonal}\}.$$

De fato, essa álgebra é abeliana e, portanto, nilpotente. Para mostrar a segunda condição, seja $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$[A, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Note que, dado $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n) \in \mathfrak{h}$ temos que

$$([A, H])_{ij} = a_{ij}h_j - h_i a_{ij} = a_{ij}(h_j - h_i).$$

Como $[A, H] \in \mathfrak{h}$ por hipótese, temos que $([A, H])_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, $a_{ij} = 0$ ou $h_i = h_j$. Mas isso deve valer para toda matriz $H \in \mathfrak{h}$. Assim, podemos escolher H de forma $h_i \neq h_j$ para cada par (i, j) com $i \neq j$, de onde concluímos que $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$. Logo, $A \in \mathfrak{h}$, mostrando que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. •

Antes de apresentar o próximo teorema, precismos de mais uma definição. Consideremos $X \in \mathfrak{g}$ e sua respectiva aplicação adjunta $\mathrm{ad}(X)$. O polinômio característico de $\mathrm{ad}(X)$ é da forma

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_1(X)\lambda + p_0(X),$$

onde $n = \dim \mathfrak{g}$ e cada $p_i(X)$ é um polinômio de grau $n - i$ em X que são, em geral, dados pelo traço de algum produto exterior da transformação linear. Com isso, definimos o **posto** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como o menor índice i para o qual existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $p_i(X) \neq 0$. Além disso, os elementos para os quais $p_i(X) \neq 0$, onde i é o posto de $\mathfrak{g}$ são chamados de **elementos regulares** de $\mathfrak{g}$.

Apresentamos agora o Teorema que motiva a definição de uma subálgebra de Cartan. Antes de enunciá-lo, lembremos que em toda derivação interna, 0 é um autovalor, pois $\mathrm{ad}(X)(X) = [X, X] = 0$.

Teorema A.25. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $X \in \mathfrak{g}$. Consideremos a derivação $\mathrm{ad}(X)$ e a sua respectiva decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são autovalores não nulos e $\mathfrak{g}_0(X)$ é o autoespaço associado a 0. Se X é elemento regular, então $\mathfrak{g}_0(X)$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [15, p.103]. □

Como dito anteriormente, esse Teorema justifica a definição de uma subálgebra de Cartan. Porém, uma pergunta natural surge aqui: toda subálgebra de Cartan é da forma $\mathfrak{g}_0(X)$ para $X \in \mathfrak{g}$ regular? A resposta é positiva, como podemos ver no seguinte teorema.

Teorema A.26. *Seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Dessa forma, existe um elemento regular $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [15, p.104-106]. □

A.8 Subálgebras de Cartan II

Nosso objetivo aqui é estudar as subálgebra de Cartan de álgebras semissimples, o que é importante já que esse tipo de álgebra será central mais adiante.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra semissimples. Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, consideremos a representação adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{h}$ é nilpotente, pelo Teorema A.2 temos que existe uma decomposição de $\mathfrak{g}$ da forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_s},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ são funcionais não-nulos. Nesse contexto, os funcionais não-nulos dessa decomposição são chamados de **raízes** de $\mathfrak{h}$ em relação a $\mathfrak{g}$. Nesse caso, os subespaços $\mathfrak{g}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{g}_{\lambda_s}$ são chamados de **espaços de raízes**. O conjunto das raízes será denotado por Π.

Proposição A.27. *Sejam α e β dois pesos de $\mathfrak{h}$. Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, então*

$$\langle X, Y \rangle = 0,$$

a menos que $\beta = -\alpha$.

Demonstração: Note que, para algum peso γ e $Z \in \mathfrak{g}_\gamma$, temos que

$$\mathrm{ad}(Y)Z = [Y, Z] \in \mathfrak{g}_{\beta+\gamma} \quad \text{e} \quad \mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)Z = [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Portanto, $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$ mapeia o espaço de raiz $\mathfrak{g}_\gamma$ em $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$. Assim, para cada peso γ, consideremos uma base

$$\mathcal{B}_\gamma = \{W_1, \ldots, W_{m_\gamma}\},$$

onde $m_\gamma = \dim \mathfrak{g}_\gamma$. Temos que

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{\gamma \in \Pi} \mathcal{B}_\gamma$$

é uma base adaptada a decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ e a união é disjunta, pois $\mathfrak{g}_{\gamma_1} \cap \mathfrak{g}_{\gamma_2} = \{0\}$ para $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Agora, seja $W_i \in \mathcal{B}_\gamma$. Como observado anteriormente,

$$\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)W_i \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Se $\alpha + \beta + \gamma = \gamma$ (ou, equivalentemente, $\beta = -\alpha$), então existe algum termo não-nulo na diagonal da matriz de representação de $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$. Portanto, nesse caso $\langle X, Y \rangle \neq 0$. Agora, se $\beta \neq -\alpha$, o espaço de raiz $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma} \neq \mathfrak{g}_\gamma$. Assim, todos os elementos na diagonal da matriz de $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$ são 0. Logo,

$$\langle X, Y \rangle = 0,$$

nesse caso. □

Desta proposição, seguem algumas outras propriedades com relação às raízes e a forma de Cartan-Killing.

Corolário A.28. *Pela Proposição A.27, temos*

(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{h}}$ *é não-degenerada.*

(ii) Se $\alpha \in \Pi$*, então* $-\alpha \in \Pi$.

(iii) para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$*, existe* $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *tal que* $\langle X, Y\rangle \neq 0$.

Demonstração:

(i) Seja $H \in \mathfrak{h}$ tal que $\langle H, K\rangle = 0$ para todo $K \in \mathfrak{h}$. Nesse caso, para todo $X \in \mathfrak{g}$ temos $X = H_1 + X_1 + \cdots + X_k$, com $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Assim,

$$\langle H, X\rangle = \langle H, H_1\rangle + \langle H, X_1\rangle + \cdots + \langle H, X_k\rangle.$$

Pela proposição anterior, $\langle H, X_i\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Porém, por hipótese, $\langle H, H_1\rangle = 0$, ou seja, $\langle H, X\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo, $H = 0$, pois $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ é não-degenerada.

(ii) Seja $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não-degenerada, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$. Pela proposição, isso implica que existe alguma componente $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, mostrando que $-\alpha$ é uma raiz da decomposição.

(iii) Suponhamos $X \neq 0$. Se $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, temos que $\langle X, Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$, pela proposição, o que contradiz que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não-degenerada. Logo, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y\rangle \neq 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.

□

Proposição A.29. *Para todo* $H \in \mathfrak{h}$ *e todo peso* α, $\mathrm{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_\alpha}$. *Além disso, as transformações lineares* $\mathrm{ad}(H)$*, para todo* $H \in \mathfrak{h}$*, são simultaneamente diagonalizáveis.*

Demonstração: A matriz de representação de $\mathrm{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha}$ é da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha(H) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(H) \end{bmatrix}.$$

Decompondo $\mathrm{ad}(H) = \mathrm{ad}(H_S) + \mathrm{ad}(H_N)$ ([15, Corolário 3.15]), com $\mathrm{ad}(H_S)$ semissimples, $\mathrm{ad}(H_N)$ nilpotente e H, H_S e H_N comutando dois a dois. Assim, $\mathrm{ad}(H_S)$ é a parte diagonal da matriz de $\mathrm{ad}(H)$, de forma que,

$$[\mathrm{ad}(H_N)] = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Em particular, podemos tomar $\alpha = 0$. Nesse caso,

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \ni \operatorname{ad}(H)\mathfrak{h} = (\operatorname{ad}(H_S) + \operatorname{ad}(H_N))\mathfrak{h} = \operatorname{ad}(H_N)\mathfrak{h}.$$

Como $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Cartan, concluímos que $H_N \in \mathfrak{h}$. Por outro lado, para todo $H' \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad}(H_N)\operatorname{ad}(H')$ é triangular superior com zeros na diagonal. Assim, $\langle H_N, H' \rangle = 0$. Como a forma de Cartan-Killing é não-degenerada em $\mathfrak{h}$, então H_N. Logo, $\operatorname{ad}(H)$ é diagonal. □

Corolário A.30. *$X \in \mathfrak{g}_\alpha$ se, e somente se, $[H, X] = \alpha(H)X$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração: A Proposição anterior garante que se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, então $\operatorname{ad}(H)X = \alpha(H)X$. Reciprocamente, seja $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\operatorname{ad}(H)X = \alpha(H)X$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Nesse caso, escrevendo

$$X = H' + X_1 + \cdots + X_\alpha + \cdots + X_k,$$

onde $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, temos que

$$\alpha(H)X = \operatorname{ad}(H)X = \alpha_1(H)X_1 + \cdots + \alpha(H)X_\alpha + \cdots + \alpha_k(H)X_k.$$

Como $\operatorname{ad}(H)X \in \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$\alpha(H)X = \alpha(H)X_\alpha,$$

isso é, $\alpha(H)(X - X_\alpha) = 0$. Como isso vale para todo $H \in \mathfrak{h}$, no caso em que α é uma raiz, podemos tomar $H \notin \ker\alpha$, de onde concluímos que $X = X_\alpha$. Agora, caso $\alpha = 0$, temos que $[\mathfrak{h}, X] = 0 \in \mathfrak{h}$ e, como $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Cartan, concluímos que $X \in \mathfrak{h}$. □

Corolário A.31. *$\mathfrak{h}$ é abeliana.*

Demonstração: Sejam $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Assim,

$$\operatorname{ad}[H_1, H_2] = [\operatorname{ad} H_1, \operatorname{ad} H_2].$$

Como $\operatorname{ad} H_1$ e $\operatorname{ad} H_2$ são diagonais, temos que $\operatorname{ad}[H_1, H_2] = 0$. Como a representação adjunta é fiel, concluímos que $[H_1, H_2] = 0$. □

Corolário A.32. *O conjunto Π gera $\mathfrak{h}^*$. Em outras palavras, se $\beta(H) = 0$ para todo $\beta \in \Pi$, então $H = 0$.*

Demonstração: Pela Proposição, temos que se $\beta(H) = 0$ para todo $\beta \in \Pi$, então $\mathrm{ad}(H) = 0$. Como a representação adjunta é fiel, então $H = 0$. □

Como a forma de Cartan-Killing é bilinear e não-degenerada, existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &\to \mathfrak{h}^* \\ H &\mapsto \langle H, \cdot \rangle. \end{aligned}$$

Para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, denotaremos por H_α o seu elemento inverso por esse isomorfismo, isso é, $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ é tal que

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H), \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

Com isso, podemos também definir uma aplicação bilinear em $\mathfrak{h}^*$ por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha),$$

para $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$. Ela será também chamada de Cartan-Killing, e ainda é não-degenerada e simétrica.

Ainda, notemos que o conjunto $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ gera $\mathfrak{h}$, pois Π gera $\mathfrak{h}^*$.

Proposição A.33. *Para toda raiz $\alpha \in \Pi$, temos $H_\alpha = -H_{-\alpha}$.*

Demonstração: Por definição, temos que

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H) \text{ e } \langle H_{-\alpha}, H \rangle = -\alpha(H)\ \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Portanto,

$$0 = \alpha(H) - \alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle + \langle H_{-\alpha}, H \rangle = \langle H_\alpha - H_{-\alpha}, H \rangle\ \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Como a forma de Cartan-Killing é não-degenerada, concluímos que $H_\alpha = -H_{-\alpha}$ para todo $\alpha \in \Pi$. □

O lema a seguir fornce algumas propriedades importantes para trabalharmos com raízes.

Lema A.34. *Valem as seguintes afirmações*

(i) Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$.

(ii) Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.

(iii) Se $\alpha, \beta \in \Pi$, então $\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle$, onde $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$.

(iv) *Para todo* $\alpha \in \Pi$, $\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}^+$. *Assim, pelo item anterior* $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$ *para todo* $\alpha, \beta \in \Pi$.

(v) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *para todo* $\alpha \in \Pi$.

(vi) *Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz* α *que são raízes, são* α *e* $-\alpha$.

Demonstração:

(i) Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Assim, dado $H \in \mathfrak{h}$ qualquer

$$\begin{aligned}\langle H, [X, Y]\rangle &= \langle [H, X], Y\rangle \\ &= \alpha(H)\langle X, Y\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle\langle H, H_\alpha\rangle \\ &= \langle H, \langle X, Y\rangle H_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

Assim, $\langle H, [X, Y] - \langle X, Y\rangle H_\alpha\rangle = 0$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada em $\mathfrak{h}$ e H é arbitrário, temos que

$$[X, Y] = \langle X, Y\rangle H_\alpha.$$

(ii) Sabemos que existe $Y' \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y'\rangle \neq 0$. Assim, tomamos

$$Y := \frac{1}{\langle X, Y'\rangle} Y',$$

de forma que $\langle X, Y\rangle = 1$. A conclusão segue do item (i).

(iii) Defina o subespaço

$$V := \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+2\alpha} \oplus \cdots$$

de $\mathfrak{g}$, onde convencionamos que $\mathfrak{g}_{\alpha+k\alpha} = 0$ se $\beta + k\alpha$ não for raiz. Note que, como o conjunto de raízes é finito, essa soma também o é. Assim, tome $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ tais que $[X, Y] = H_\alpha$, como no item anterior. Pela definição de V, V é invariante por $\mathrm{ad}(X)$ e $\mathrm{ad}(Y)$. Além disso,

$$\mathrm{ad}(H_\alpha)|_V = \mathrm{ad}[X, Y]|_V = [\mathrm{ad}\, X|_V, \mathrm{ad}\, Y|_V].$$

Assim, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, H_\alpha|_V) = 0$. Agora, se $d_k = \dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$, então

$$\begin{aligned}0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, H_\alpha|_V) &= \sum_k d_k(\beta + k\alpha)(H_\alpha) \\ &= \sum_k d_k(\langle \beta, \alpha\rangle + k\langle \alpha, \alpha\rangle) \\ &= \langle \beta, \alpha\rangle \sum_k d_k + \langle \alpha, \alpha\rangle \sum_k k d_k.\end{aligned}$$

Como $\sum_k d_k > 0$,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = -\frac{\sum k d_k}{\sum d_k} \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Logo,

$$q_{\beta\alpha} = -\frac{\sum k d_k}{\sum d_k} \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}.$$

(iv) pelo item anterior, se $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, então $\langle \beta, \alpha \rangle = 0 \ \forall \beta \in \Pi$. Portanto, $\beta(H_\alpha) = 0$ para todo $\beta \in \Pi$. Mas isso é um absurdo, pois Π gera $\mathfrak{h}*$. Assim, $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ para todo $\alpha \in \Pi$. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle \\ &= \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad} H_\alpha^2\right) = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta \beta(H_\alpha)^2, \end{aligned}$$

onde $d_\beta = \dim \mathfrak{g}_\beta$. Assim,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle^2 = \sum_{\beta \in \Pi} d_\beta q_{\beta\alpha}^2.$$

Logo, como $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{\sum d_\beta q_{\beta\alpha}^2} \in \mathbb{Q}^+.$$

(v) Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que $[X, Y] = H_\alpha$. Consideremos o subespaço V gerado por Y, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \cdots$. Temos que V é invariante por $\operatorname{ad}(X)$, pois $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ e $\operatorname{ad}(X)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{(k+1)\alpha}$. Além disso, V também é invariante por $\operatorname{ad}(Y)$, pois $\operatorname{ad}(Y)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{(k-1)\alpha}$ para $k \geq 1$ e $[H, Y] = -\alpha(H)Y$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Como $H_\alpha = [X, Y]$,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(H_\alpha)|_V) = 0,$$

no entanto,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(H_\alpha)|_V) = -\alpha(H_\alpha) + \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k k \alpha(H_\alpha) = -\langle \alpha, \alpha \rangle + \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k k \langle \alpha, \alpha \rangle,$$

onde $d_k = \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$. Assim, obtemos

$$1 = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots,$$

o que ocorre se, e somente se, $d_1 = 1$ e $d_i = 0$ para $i \geq 2$.

(vi) Pela demonstração anterior, $\dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$ para $k \geq 2$. Assim, o único múltiplo inteiro de α que também é raiz é α. Como $-\alpha$ é uma raiz, o mesmo vale para ela.

$\square$

A.9 A fórmula de Killing

Nesta seção, estamos interessados em estudar as propriedades dos espaços de raízes em uma decomposição de uma álgebra semissimples. Um dos principais resultados relaciona um certo subespaço dessa álgebra com a álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Assumiremos aqui certa familiaridade com essa álgebra, mas para o leitor interessado em se aprofundar mais nas características específicas de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, recomendamos a seção 6.1 de [15].

Tomemos uma raiz $\alpha \in \Pi$. Podemos definir o subespaço $\langle H_\alpha \rangle \leq \mathfrak{h}$. Com isso, definimos o subespaço

$$\mathfrak{g}(\alpha) \coloneqq \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Notemos que o Lema A.34 implica que $\mathfrak{g}(\alpha)$ é uma subálgebra de dimensão três, pois $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}(\alpha)]$ e cada uma das componentes possui dimensão um.

Proposição A.35. *$\mathfrak{g}(\alpha)$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$.*

Demonstração: Definamos $H'_\alpha \in \mathfrak{h}(\alpha)$ por

$$H'_\alpha \coloneqq \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha.$$

Agora, tomemos $X' \in \mathfrak{g}_\alpha$. Pelo Lema A.34, existe $Z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Z \rangle = H_\alpha$. Dessa forma, tomando $Y' \coloneqq \frac{2}{\langle \alpha,\alpha \rangle} Z$, temos que

$$\langle X', Y' \rangle = H'_\alpha.$$

Agora, como $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ e $\mathfrak{h}(\alpha)$ são unidimensionais, temos que $\{X', Y', H'_\alpha\}$ forma uma base de $\mathfrak{g}(\alpha)$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
[H'_\alpha, X'] &= \mathrm{ad}(H'_\alpha)(X') = \alpha(H'_\alpha)X' = \frac{2\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} X' = 2X' \\
[H'_\alpha, Y'] &= \mathrm{ad}(H'_\alpha)(Y') = -\alpha(H'_\alpha)Y' = -\frac{2\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} Y' = -2Y' \\
[X', Y'] &= \langle X', Y' \rangle H_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha = H'_\alpha
\end{aligned}$$

que são justamente as relações de comutação da base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. Assim, a aplicação linear definida por

$$X' \mapsto X, \; H'_\alpha \mapsto H \;\text{ e }\; Y' \mapsto Y$$

define um isomorfismo entre $\mathfrak{g}(\alpha)$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. □

Consideremos $\alpha, \beta \in \Pi$. Definimos a $\alpha-$**sequência iniciada em** β como a sequência dos elementos

$$\ldots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \ldots.$$

Teorema A.36 (Fórmula de Killing). *Os elementos da $\alpha-$sequência iniciada em β que são pesos formam um intervalo. Isso é, existem $p, q \in \mathbb{N}_0$ tais que*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

são os únicos pesos da forma $\beta + k\alpha$, com $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, vale a fórmula

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em $[15, p.156 - 157]$. □

Pela Fórmula de Killing temos que

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, esse número será chamado de **número de Killing** associado às raízes α e β.

A partir daqui, o termo $\alpha-$sequência iniciada em β será usado para os pesos da forma $\beta + k\alpha$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Proposição A.37. *Os únicos múltiplos de uma raiz α que são raízes são α e $-\alpha$.*

Demonstração: Tomemos uma raiz α e Seja $\beta = c\alpha$ uma raiz com $c \in \mathbb{K}$. Note que como β é raiz, devemos ter $c \neq 0$. Assim,

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2c =: n \quad \text{e} \quad \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{2}{c} =: m.$$

Note que $n, m \in \mathbb{Z}$ e $nm = 4$, o que significa que $n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Assim,

$$c \in \{\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}.$$

Agora, $c \neq \pm 2$, pois $c\alpha$ é raiz e os únicos múltiplos inteiros de uma raiz são ela mesmo e sua oposta. Analogamente, se $c = \pm \frac{1}{2}$, temos que $\alpha = 2\beta$ é raiz e, pela mesma razão, isso não pode ocorrer. Logo, temos que $c = \pm 1$. □

Proposição A.38. *Sejam $\alpha, \beta \in \Pi$. Se $\alpha + \beta \in \Pi$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

Demonstração: Se $\alpha + \beta$ é raiz, temos que a $\alpha-$sequência iniciada em β

$$\cdots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

possui $q \geq 1$. Assim, considerando o elemento X da base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, temos que sua imagem pelo isomorfismo descrito na Proposição A.35 X' é tal que

$$\text{ad}(X')\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Isso vale devido a expressão de X nas representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Como $\mathfrak{g}_\alpha = \langle X_\alpha \rangle$, pois $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, concluímos a demonstração. □

A.10 Sistemas simples de raízes

Consideremos uma subálgebra de Cartan da álgebra semissimples $\mathfrak{g}$. Como foi visto no Corolário A.32, o conjunto das raízes gera o espaço dual de $\mathfrak{h}$ e o conjunto de elementos $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ gera $\mathfrak{h}$.

Proposição A.39. $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \dim \mathfrak{h}$.

Demonstração: Como o conjunto $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ gera $\mathfrak{h}$, então existe um conjunto finito de raízes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \Pi$ tal que

$$\mathcal{B} = \{H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_l}\}$$

é uma base de $\mathfrak{h}$. Além disso, como $\mathcal{B}$ é l.i. sobre $\mathbb{C}$, temos que $\mathcal{B}$ também é l.i. sobre $\mathbb{R}$. Assim, $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \geq \dim \mathfrak{h}$. Por outro lado, seja $\alpha \in \Pi$ uma raiz. Assim, existem $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{C}$ tais que

$$H_\alpha = a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_l H_{\alpha_l}.$$

Agora, note que os coeficientes dessa combinação linear podem ser encontradas resolvendo-se o sistema linear

$$\sum_{i=1}^{l} \langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle a_i = \langle H_\alpha, H_{\alpha_j} \rangle.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerada, esse sistema possui uma única solução e, como cada coeficiente $\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle$ é racional (pelo Lema A.34), então cada a_i é racional. Portanto, $\mathcal{B}$ gera o conjunto $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ e, consequentemente, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. $\square$

Como a forma de Cartan-Killing assume valores racionais em Π, a sua restrição a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é uma forma bilinear simétrica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ainda, como as dimensões coincidem pela proposição acima, ela é não-degenerada.

Proposição A.40. *A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ é um produto interno.*

Demonstração: Devemos mostrar que ela é positiva definida. Assim, sejam $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Temos que

$$\langle H, H \rangle = \operatorname{tr}\Big(\operatorname{ad}(H)^2\Big) \overset{(*)}{=} \sum_{\alpha \in \Pi} \alpha(H)^2 = \sum_{\alpha \in \Pi} \langle H_\alpha, H \rangle^2,$$

onde usamos em $(*)$ a Proposição A.29 e o fato que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Pi$. Assim, como consequência da expressão anterior, $\langle H, H \rangle \geq 0$ com a igualdade valendo se, e somente se, $\langle H_\alpha, H \rangle = 0$ para todo $\alpha \in \Pi$. Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada e $\{H_\alpha\}$ gera $\mathfrak{h}$, esse último caso ocorre apenas quando $H = 0$. Logo, ela define um produto interno em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. $\square$

O próximo passo consiste em definir uma ordem em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Para isso, utilizaremos a ordem lexicográfica. Considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{v_1, \ldots, v_l\}$ uma base ordenada[2] de V. Dados $v, w \in V$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l \ \text{ e } \ w = b_1 v_1 + \cdots + b_l v_l.$$

Dizemos que $v \leq w$ na ordem lexicográfica quando $v = w$ ou quando $a_i < b_i$, onde i é o primeiro índice no qual as coordenadas diferem.

Enunciaremos agora algumas propriedades da ordem lexicográfica em um espaço vetorial munido de um produto interno. A demonstração delas pode ser encontrada em [15, p.161].

Lema A.41. *Sejam V um espaço vetorial e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_l\}$ uma base ordenada de V. Considerando a ordem lexicográfica induzida por $\mathcal{B}$, se $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq V$ é um conjunto tal que*

(i) $w_i > 0$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$;

(ii) $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ *quando* $i \neq j$,

então $\{w_1, \ldots, w_m\}$ *é l.i..*

Com as observações anteriores, definamos uma ordem lexicográfica em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Isso define uma ordenação no conjunto de raízes Π. Assim, definimos os conjuntos

$$\Pi^+ \coloneqq \{\alpha \in \Pi \mid \alpha > 0\} \ \text{ e } \ \Pi^- \coloneqq \{\alpha \in \Pi \mid \alpha < 0\}$$

das raízes positivas e negativas de Π, respectivamente.

Definição A.42. *Uma raiz α será dita **simples**, em relação à ordem fixada, quando*

1. $\alpha > 0$;
2. *Não existem* $\beta, \gamma \in \Pi$ *tais que* $\beta, \gamma > 0$ *e* $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado por Σ.

Primeiramente, uma observação sobre o conjunto de raízes. Dado uma raiz $\alpha \in \Pi$, diremos que α é positiva minimal quando $\alpha > 0$ e não existir $\beta \in \Pi$, com $\beta > 0$ tal que $\beta < \alpha$.

[2] A ordenação aqui se refere ao conjunto dos índices, que é ordenado nesse caso.

Lema A.43. *Existem raízes positivas minimais em* Π.

Demonstração: Primeiramente, notemos que se $\alpha \in \Pi$ é uma raiz, então $-\alpha$ também é raiz. Portanto, existem raízes positivas. Como Π é um cojunto finito, o conjunto de raízes positivas também o é. Portanto, pelo Teorema da Boa-Ordenação existe um menor elemento nesse conjunto. □

Lema A.44. *O conjunto das raízes simples é não-vazio.*

Demonstração: Se $\alpha \in \Pi$ é positiva minimal, então α é simples. De fato, $\alpha > 0$ e caso existam raízes $\beta, \gamma \in \Pi$, com $\beta, \gamma > 0$, tais que $\alpha = \beta + \gamma$, então

$$\alpha > \alpha - \gamma = \beta > 0,$$

contradizendo que α é minimal. Logo, α é simples. □

Lema A.45. *Se* $\alpha, \beta \in \Sigma$ *com* $\alpha \neq \beta$*, então* $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que se α e β são raízes simples, então $\beta - \alpha \notin \Pi$. Com efeito, se $\beta - \alpha$ fosse uma raiz, teríamos ou $\beta - \alpha \geq 0$ ou $\beta - \alpha \leq 0$. No primeiro caso, temos

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha),$$

o que contradiz que β é simples. No segundo caso, temos $\alpha - \beta \geq 0$ de onde obtemos

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta),$$

contradizendo que α é simples. Portanto, $\beta - \alpha \notin \Pi$. Assim, na $\alpha-$sequência iniciada em β temos $p = 0$. Assim, pela Fórmula de Killing

$$0 \geq -q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Logo, como $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, concluímos que $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$ para $\alpha, \beta \in \Sigma$. □

Lema A.46. Σ *é l.i..*

Demonstração: Pelo Lema A.45, temos que o conjunto $\Sigma \subseteq \Pi$ satisfaz as condições do Lema A.41. Logo, Σ é l.i.. □

Lema A.47. *Se $\beta \in \Pi$ com $\beta > 0$, então βse escreve unicamente como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l,$$

com $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}_0$. Em particular, Σ gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

Demonstração: Se $\beta \in \Sigma$ o resultado já vale. Assim, suponhamos que β não é simples. Nesse caso, existem raízes positivas β_1 e β_2 tais que

$$\beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Se β_1 e β_2 são simples, obtemos a decomposição desejada. Caso contrário, podemos decompor mais uma vez β_1 ou β_2. Nesse processo, as raízes que surgem da decomposição são positivas e estritamente menores do que as anteriores, de forma que eventualmente obtemos uma decomposição em raízes positivas minimais que, como mostrado no Lema A.44, são simples. Como neste processo de decomposição pode-se ter repetições de raízes, obtemos os números inteiros como no enunciado. $\square$

Corolário A.48. *Valem as seguintes propriedades:*

(i) *se $\gamma \in \Pi \setminus \Sigma$, então existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ e $\gamma - \alpha$ é raiz positiva;*

(ii) *toda raiz positiva γ pode ser escrita como*

$$\gamma = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$$

com $\alpha_{i_j} \in \Sigma$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. De forma que as somas parciais

$$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s},$$

com $s \in \{1, \ldots, k\}$ são raízes.

Demonstração:

(i) Suponhamos, por absurdo, que $\langle \gamma, \alpha \rangle \leq 0$ para todo $\alpha \in \Sigma$. Nesse caso, temos que $\Sigma \cup \{\gamma\}$ é *l.i.* pelo Lema A.41, contradizendo o Lema anterior. O fato de que $\gamma - \alpha$ vem da Fórmula de Killing, uma vez que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ implica em

$$p - q = \frac{\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} > 0,$$

ou seja, $p > q \geq 0$.

(ii) Se $\gamma \in \Sigma$ já obtemos o resultado. Assim, consideremos γ não simples. Nesse caso, pelo item anterior, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $\gamma - \alpha$ é uma raiz positiva. Portanto, como temos $\gamma = (\gamma - \alpha) + \alpha$, podemos usar o mesmo argumento para a raiz $\gamma - \alpha$ de forma que podemos encontrar o resultado por indução.

$\square$

Disso concluímos que se

$$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$$

é o conjunto das raízes simples em relação a uma ordem lexicográfica, então

(a) Σ é uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$; e

(b) toda raiz β pode ser escrita como

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$$

com $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}$ e todas com mesmo sinal.

Definição A.49. *Um subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ satisfazendo as condições acima é denominado **sistema simples de raízes**.*

O conjunto de raízes simples não é único. Por exemplo, se Σ é um sistema simples de raízes, então $-\Sigma$ também o é. O número de sistemas simples de raízes está relacionado com a ordem do grupo de Weyl que é o grupo gerado pelas reflexões r_α, com $\alpha \in \Pi$, onde r_α são as reflexões

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Com a ordem lexicográfica fixada, definimos os conjuntos

$$\Pi^+ := \{\alpha \in \Pi \mid \alpha > 0\} \text{ e } \Pi^- := \{\alpha \in \Pi \mid \alpha < 0\}.$$

Agora, definindo também

$$\mathfrak{n}^+ := \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- := \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-,$$

onde $\mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{n}^-$ são duais pela forma de Cartan-Killing.

Exemplo 7. Mostraremos que o espaço projetivo é uma variedade Flag. Para isso, consideremos a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Dada uma base de $\mathbb{C}^n$, uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é dada por

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ é diagonal}\}.$$

Tomando a base $\{E_{ij}, E_{ii} - E_{jj} \mid i \neq j\}$[3] de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Tomando alguma $H \in \mathfrak{h}$, vale que

$$\mathrm{ad}(H)(E_{ij}) = (a_i - a_j)E_{ij},$$

ou seja, as raízes da representação adjunta de $\mathfrak{h}$ são dadas por $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, onde

$$\begin{aligned} \lambda_i : \mathfrak{h} &\to \mathbb{C} \\ \mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_n\} &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

Além disso, os espaços de raízes são dados por

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \langle E_{ij} \rangle.$$

Um sistema simples de raízes é dado por $\Sigma = \{\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}$ e o conjunto de raízes positivas associado é $\Pi^+ = \{\alpha_{ij} \mid i < j\}$. •

A.11 Formas reais compactas

Uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ é dita **compacta** quando sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.

Existe uma bijeção entre álgebras semissimples reais compactas e álgebras semissimples complexas. Além disso, todas as formas reais (inclusive as não compactas), podem ser descritas a partir da interseções delas com formas compactas, justificando nosso interesse em estudar esse assunto.

Como a forma de Cartan-Killing de uma álgebra compacta deve ser não-degenerada, obtemos disso que toda álgebra compacta é semissimples. Além disso, o nome compacto está relacionado com o fato de que esse tipo de álgebra é justamente a álgebra de Lie de grupos de Lie compactos.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semissimples, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan, Π o conjunto de raízes associado a $\mathfrak{h}$ e Σ um sistema simples. Com isso, definimos uma **base de Weyl** como uma base

$$\{H_\alpha \in \mathfrak{h} \mid \alpha \in \Sigma\} \cup \{X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$$

de $\mathfrak{g}$, tal que

(i) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$;

(ii) $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, onde $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$ e $m_{\alpha,\beta} = 0$, se $\alpha + \beta$ não é raiz.

[3] E_{ij} aqui é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na posição ij.

Tomando uma base de Weyl de uma álgebra $\mathfrak{g}$, consideremos o subespaço real $\mathfrak{u}$ dado por

$$\mathfrak{u} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{iH_\alpha, X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \mid \alpha \in \Pi^+\}.$$

Normalmente, para simplificar a escrita, utilizamos a notação

$$A_\alpha := X_\alpha - X_{-\alpha} \quad \text{e} \quad S_\alpha := X_\alpha + X_{-\alpha}. \tag{A.1}$$

Observação A.50. *Note que $\mathfrak{u}$ poderia ser também definida por*

$$\mathfrak{u} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{iH_\alpha, A_\alpha, iS_\alpha \mid \alpha \in \Pi\},$$

isso é, podemos percorrer o conjunto das raízes completamente. Isso se deve ao fato de que

$$H_\alpha = -H_{-\alpha},\ A_\alpha = -A_{-\alpha} \quad e \quad iS_\alpha = iS_{-\alpha},$$

para todo $\alpha \in \Pi$.

Proposição A.51. *$\mathfrak{u}$ como definida acima é uma forma real compacta.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que cada H_α e X_α pode ser escrito como

$$H_\alpha = -i(iH_\alpha) \quad \text{e} \quad X_\alpha = \frac{1}{2}[(X_\alpha - X_{-\alpha}) - i(iX_\alpha + X_{-\alpha})],$$

ou seja, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$.

Agora, devemos mostrar que $\mathfrak{u}$ é uma subálgebra real. Vamos calcular o colchete nos elementos geradores. Assim, para $\alpha, \beta \in \Pi$ quaisquer, obtemos

$$\begin{aligned}
[iH_\alpha, A_\beta] &= [iH_\alpha, X_\beta - X_{-\beta}] \\
&= i\,\mathrm{ad}(H_\alpha)X_\beta - i\,\mathrm{ad}(H_\alpha)X_{-\beta} \\
&= i\beta(H_\alpha)X_\beta + i\beta(H_\alpha)X_{-\beta} \\
&= \beta(H_\alpha)i(X_\beta + X_{-\beta}) \\
&= \beta(H_\alpha)iS_\beta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[iH_\alpha, iS_\beta] &= [iH_\alpha, i(X_\beta + X_{-\beta})] \\
&= -\,\mathrm{ad}(H_\alpha)(X_\beta) - \mathrm{ad}(H_\alpha)(X_{-\beta}) \\
&= -\beta(H_\alpha)X_\beta + \beta(H_\alpha)X_{-\beta} \\
&= -\beta(\alpha)(X_\beta - X_{-\beta}) \\
&= -\beta(\alpha)A_\beta
\end{aligned}$$

Para o colchete entre os outros elementos geradores, consideremos inicialmente $\alpha \neq \beta$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
[A_\alpha, A_\beta] &= [X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\beta - X_{-\beta}] \\
&= [X_\alpha, X_\beta] - [X_\alpha, X_{-\beta}] - [X_{-\alpha}, X_\beta] + [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \\
&= m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta} X_{\alpha-\beta} - m_{-\alpha,\beta} X_{-\alpha+\beta} + m_{-\alpha,-\beta} X_{-\alpha-\beta} \\
&= m_{\alpha,\beta}(X_{\alpha+\beta} - X_{-(\alpha+\beta)}) + m_{-\alpha,\beta}(X_{\alpha-\beta} - X_{-(\alpha-\beta)}) \\
&= m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta} A_{\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

Por um cálculo similar, obtemos que

$$[S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta} A_{\alpha-\beta} \quad \text{e} \quad [A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta} S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta} S_{\alpha-\beta}.$$

Se $\beta = \alpha$ ou $\beta = -\alpha$,

$$\begin{aligned}
[A_\alpha, A_{-\alpha}] = [A_\alpha, A_\alpha] &= [X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}] \\
&= [X_\alpha, X_\alpha] - [X_\alpha, X_{-\alpha}] - [X_{-\alpha}, X_\alpha] + [X_{-\alpha}, X_{-\alpha}] = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
[iS_\alpha, iS_{-\alpha}] = [iS_\alpha, iS_\alpha] &= -[X_\alpha + X_{-\alpha}, X_\alpha + X_{-\alpha}] \\
&= -[X_\alpha, X_\alpha] - [X_\alpha, X_{-\alpha}] - [X_{-\alpha}, X_\alpha] - [X_{-\alpha}, X_{-\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$[A_\alpha, S_\alpha] = [A_\alpha, S_{-\alpha}] = 2iH_\alpha.$$

Como $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ e $\beta(H_\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}$, os colchetes acima mostram que $\mathfrak{u}$ é uma subálgebra real.

Resta mostrar que $\mathfrak{u}$ é compacta no sentido definido acima, isso é, sua forma de Cartan-Killing é negativa definida. Além disso, a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{u}$ é a restrição da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$, como comentado em [15, p. 87]. Agora, se $\alpha \neq -\beta$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle iH_\alpha, A_\beta \rangle = i\langle H_\alpha, X_\beta - X_{-\beta} \rangle = i\langle H_\alpha, X_\beta \rangle - i\langle H_\alpha, X_{-\beta} \rangle = 0, \\
\langle iH_\alpha, iS_\beta \rangle = -\langle H_\alpha, X_\beta + X_{-\beta} \rangle = -\langle H_\alpha, X_\beta \rangle - \langle H_\alpha, X_{-\beta} \rangle = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle A_\alpha, iS_\beta \rangle &= i\langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\beta + X_{-\beta} \rangle \\
&= i\langle X_\alpha, X_\beta \rangle + i\langle X_\alpha, X_{-\beta} \rangle - i\langle X_{-\alpha}, X_\beta \rangle - i\langle X_{-\alpha}, X_{-\beta} \rangle = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\langle X_\alpha, X_\beta\rangle = 0$ a não ser que $\beta = -\alpha$. Agora, consideremos o subespaço real de $\mathfrak{h}$ gerado pelo conjunto $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, que denotaremos por $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Consideremos uma base ortogonal $\{H_1, \ldots, H_l\}$ de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ e consideremos o conjunto

$$\mathcal{H} := \{iH_1, \ldots, iH_l\}.$$

Como $\mathcal{G} := \{A_\alpha, S_\alpha \mid \alpha \in \Pi^+\}$ é um conjunto ortogonal, temos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ forma uma base ortogonal de $\mathfrak{u}$. Finalmente, para concluir a demonstração, notemos que

$$\langle iH_j, iH_j\rangle = -\langle H_j, H_j\rangle < 0, \text{ para todo } j = 1, \ldots, l,$$

pois, como $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ é gerado pelo conjunto $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, pelo Lema A.34 a forma ade Cartan-Killing é positiva definida em $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle A_\alpha, A_\alpha\rangle &= \langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}\rangle \\
&= \langle X_\alpha, X_\alpha\rangle - \langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle - \langle X_{-\alpha}, X_\alpha\rangle + \langle X_{-\alpha}, X_{-\alpha}\rangle \\
&= -2\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle.
\end{aligned}$$

Como $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}] = \langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle H_\alpha$, temos que $\langle A_\alpha, A_\alpha\rangle = -2$. Por um cálculo análogo, temos que $\langle S_\alpha, S_{-\alpha}\rangle = -2$, mostrando que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é negativa definida em $\mathfrak{u}$. Logo, $\mathfrak{u}$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$. □

Exemplo 8. Na álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, o conjunto $\{E_{jk} \mid j \neq k\} \cup \{E_{jj} - E_{kk} \mid j < k\}$, onde E_{jk} é a matriz com todas as entradas nulas exceto pela $jk-$ésima entrada que é igual a 1, forma uma base de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Essa base é associada à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ das matrizes diagonais de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Na notação anterior, temos

$$H_{jk} = E_{jj} - E_{kk} \text{ e } X_{\alpha_{jk}} = E_{jk}.$$

Assim, notando que $-\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$, temos que a base de Weyl associada à subálgebra $\mathfrak{h}$ é dada pelos elementos

$$\begin{aligned}
iH_{jk} &= i(E_{jj} - E_{kk}), \\
A_{\alpha_{jk}} &= X_{\alpha_{jk}} - X_{\alpha_{kj}} = E_{jk} - E_{kj} \text{ e} \\
iS_{\alpha_{jk}} &= i(X_{\alpha_{jk}} - X_{\alpha_{kj}}) = i(E_{jk} - E_{kj}).
\end{aligned}$$

Como o conjunto gerado por essas matrizes é o conjunto das matrizes com parte real anti-simétricas e parte imaginárias simétricas, temos que a forma real compacta de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ é a subálgebra

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A\},$$

onde $\overline{A}$ é a matriz formada pela conjugação complexa das entradas de A. •

Lema A.52. *Existem* $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$ *com* $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = 1$ *e tal que, se* $m_{\alpha,\beta}$ *é definido por*

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta},$$

então $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$.

Demonstração: Pode ser vista em [15, p. 333]. □

O lema acima garante que existem elementos com as propriedades necessárias na definição da base de Weyl. Isso mostra a existência de formas reais compactas para álgebras semissimples complexas.

Lema A.53. *Sejam* $\mathfrak{g}_0$ *e* $\mathfrak{g}_1$ *formas reais de* $\mathfrak{g}$ *com conjugações* σ_0 *e* σ_1*, respectivamente. Dessa forma,* $\mathfrak{g}_0$ *é invariante por* σ_1 *se, e somente se,* σ_0 *e* σ_1 *comutam. Além disso, nesse caso* $\mathfrak{g}_1$ *é invariante por* σ_0

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que σ_0 e σ_1 comutem. Nesse caso, dado $X \in \mathfrak{g}_0$

$$\sigma_0(\sigma_1(X)) = \sigma_1(\sigma_0(X)) = \sigma_1(X),$$

ou seja, $\sigma_1(X) \in \mathfrak{g}_0$. Reciprocamente, se $\mathfrak{g}_0$ é invariante por σ_1, dado $Z = X + iY \in \mathfrak{g}$ com $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, temos

$$\sigma_1\sigma_0(Z) = \sigma_1(X - iY) = \sigma_1(X) + i\sigma_1(Y),$$

pela anti-linearidade de σ_1. Por outro lado,

$$\sigma_0\sigma_1(Z) = \sigma_0(\sigma_1(X) - i\sigma_1(Y)) = \sigma_1(X) + i\sigma_1(Y),$$

pois, por hipótese, $\mathfrak{g}_0$ é invariante por σ_1. Logo, σ_0 e σ_1 comutam. Finalmente, para a ultima observação, basta notar que o argumento na primeira implicação ainda é válido trocando-se os papéis de $\mathfrak{g}_0$ e σ_1 por $\mathfrak{g}_1$ e σ_0, respectivamente. □

Proposição A.54. *Sejam* $\mathfrak{g}_0$ *e* $\mathfrak{g}_1$ *formas reais de* $\mathfrak{g}$ *com conjugações* σ_0 *e* σ_1*, respectivamente. Se* $\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0$*, então*

$$\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{g}_0).$$

Demonstração: Seja $Z \in \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}$. Assim, existem únicos $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ tais que

$$Z = X + iY,$$

pois $\mathfrak{g}_0$ é forma real de $\mathfrak{g}$. Aplicando a conjugação σ_1 obtemos

$$Z = \sigma_1(Z) = \sigma_1(X + iY) = \sigma_1(X) - i\sigma_1(Y).$$

Como as conjugações comutam, o Lema A.53 garante que $\mathfrak{g}_0$ é invariante por σ_1 e, portanto, $\sigma_1(X)$ e $\sigma_1(Y)$ estão em $\mathfrak{g}_0$. Assim, pela unicidade da decomposição de Z, concluímos que $X = \sigma_1(X)$ e $Y = -\sigma_1(Y)$. Logo, $X \in \mathfrak{g}_1$ e $Y \in i\mathfrak{g}_1$, concluindo a demonstração. □

Observação A.55. *Naturalmente, os papéis de $\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{g}_1$ na proposição acima podem ser trocados, isso é, nas hipóteses da Proposição vale também que $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{g}_1)$.*

Lema A.56. *Sejam $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ formas reais compactas. Dessa forma, $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$ se, e somente se, suas conjugações comutam.*

Demonstração: Como as conjugações comutam, temos que

$$\mathfrak{u}_2 = (\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{u}_1) \oplus (\mathfrak{u}_2 \oplus i\mathfrak{u}_1)$$

pela Proposição A.54. Agora, tomando $X \in \mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1$, podemos escrever $X = iY$, com $Y \in \mathfrak{u}_1$. Assim, por um lado temos que

$$\langle X, X\rangle \leq 0,$$

pois $X \in \mathfrak{u}_2$ e $\mathfrak{u}_2$ é compacta. Por outro lado,

$$\langle X, X\rangle = \langle iY, iY\rangle = -\langle Y, Y\rangle \geq 0,$$

pois $Y \in \mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_1$ também é compacta. Portanto, $X = 0$, mostrando que $\mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1 = 0$. Assim, $\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{u}_1$, ou seja, $\mathfrak{u}_2 \subseteq \mathfrak{u}_1$. Como também temos que $\mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2) \oplus (\mathfrak{u}_1 \cap i\mathfrak{u}_2)$, podemos fazer um argumento análogo para concluir que $\mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{u}_2$, mostrando que $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ coincidem. □

Lema A.57. *Seja $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta da álgebra complexa $\mathfrak{g}$. Se σ é a conjugação em relação a $\mathfrak{u}$, então a expressão*

$$\mathcal{H}_\sigma(X, Y) = -\langle X, \sigma Y\rangle$$

define uma forma Hermitiana em $\mathfrak{g}$.

Demonstração: Pela definição, $\mathcal{H}_\sigma$ é linear e distributiva, devido às propriedades de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Agora, tomando $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\mathcal{H}_\sigma(X, zY) = -\langle X, \sigma(zY)\rangle = \overline{z}\langle X, \sigma Y\rangle = \overline{z}\mathcal{H}_\sigma(X, Y).$$

Finalmente, dado $Z = X + iY \in \mathfrak{g}$ com $X, Y \in \mathfrak{u}$ temos

$$\mathcal{H}_\sigma(Z,Z) = -\langle X+iY, X-iY\rangle = -\langle X,X\rangle + \langle X,iY\rangle - \langle iY,X\rangle + \langle iY,iY\rangle = \langle X,X\rangle - \langle Y,Y\rangle.$$

Como $\mathfrak{u}$ é compacta, temos que $\langle X,X\rangle$ e $\langle Y,Y\rangle$ são negativos, se $X, Y \neq 0$, ou seja, $\mathcal{H}_\sigma$ é positiva definida. □

Teorema A.58. *Seja $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta da álgebra semissimples complexa $\mathfrak{g}$. Se σ é a conjugação associada a uma forma real qualquer de $\mathfrak{g}$, então existe um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que σ comuta com a conjugação em relação à forma real compacta $\phi(\mathfrak{u})$.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [15, p. 335-337]. □

Uma consequência importante do Teorema acima é o seguinte corolário, que mostra, em certo sentido, a unicidade das formas reais compactas de uma álgebra semissimples.

Corolário A.59. *Se $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ são formas reais compactas de $\mathfrak{g}$, então existe um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$.*

Demonstração: Basta combinar o Teorema A.58 com o Lema A.56. □

Proposição A.60. *Uma álgebra complexa $\mathfrak{g}$ é simples se, e somente se, sua forma real compacta é simples. Além disso, se $\mathfrak{g}$ é semissimples e se decompõe e, ideais simples por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s,$$

então $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_s$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$, onde cada $\mathfrak{u}_j$ é forma real compacta de $\mathfrak{g}_j$.

Demonstração: [15, p. 337-338]. □

Para terminar esta seção, consideremos um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada é semissimples. Nesse caso, se $U \subseteq G$ é um subgrupo de Lie de G tal que sua álgebra $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$, então dizemos que U é uma **forma real compacta de** G.

B Complexificação

Nesse apêndice, introduziremos alguns resultados que usamos sobre a complexificação de espaços vetoriais, como feito em [15].

Dado um espaço vetorial real W, uma **estrutura complexa** em W é uma transformação linear $J : W \to W$ tal que $J^2 = -id_W$. O **complexificado** de W, denotado por $W_{\mathbb{C}}$, é definido a partir do produto por números reais como em

$$(a+ib)v = av + bJv.$$

Em contrapartida, dado um espaço vetorial complexo U, sua **realificação** é definida pela restrição de sua estrutura linear complexa para o subcorpo dos reais. Nesse caso, obtemos um espaço vetorial real, normalmente denotado por $U^{\mathbb{R}}$.

Definição B.1. *Seja U um espaço vetorial complexo. Uma **conjugação** em U é uma transformação antilinear $\sigma : U \to U$ tal que $\sigma^2 = \mathrm{id}_U$.*

No caso de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$, dizemos que uma estrutura complexa J é **adaptada** quando quando, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[JX, Y] = [X, JY] = J[X, Y].$$

Essa condição implica na condição mais fraca

$$[JX, JY] = -[X, Y].$$

Um **antiautomorfismo** de $\mathfrak{g}$ é uma transformação antilinear inversível que, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, satisfaz

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y].$$

A partir de um antiautomorfismo em $\mathfrak{g}$, podemos definir a álgebra real

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$$

cujo complexificado é $\mathfrak{g}$.

Definição B.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra complexa. Uma **forma real** de $\mathfrak{g}$ é a subálgebra $\mathfrak{g}_0$ definida como os pontos fixos de uma conjugação em $\mathfrak{g}$. Quando isso ocorre, vale que $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$.*

Lema B.3. *Sejam V um espaço vetorial complexo e $T : V \to V$ uma transformação linear. Se $T^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a mesma transformação vista em $V^{\mathbb{R}}$, então*

$$trT^{\mathbb{R}} = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,T).$$

Proposição B.4. *Seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra complexa e sejam $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ as formas de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}$ e $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$, respectivamente. Dessa forma, para $X, Y \in \mathfrak{h}$,*

$$\langle X, Y\rangle' = 2\,\mathrm{Re}\langle X, Y\rangle.$$

Dos resultados anteriores, podemos mostrar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é não-degenerada se, e somente se, $\langle\rangle'$ é não-degenerada. Portanto, uma álgebra complexa é semissimples se, e somente se, sua realificada também o for. Note que o mesmo não vale para álgebras simples. Em geral, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ simples implica em $\mathfrak{g}$ simples, porém a complexificação de uma álgebra simples não necessariamente fornece uma álgebra complexa simples. Assim, podemos classificar álgebras reais como

tipo I se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é simples

tipo I se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ não é simples

Proposição B.5. *Seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra complexa. Dessa forma, $\mathfrak{h}$ é simples se, e somente se, $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ é simples.*

Proposição B.6. *Se $\mathfrak{h}$ é uma álgebra complexa simples, então $(\mathfrak{h}^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ se decompõe como uma soma de dois ideais simples*

$$(\mathfrak{h}^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$$

que são isomorfos a $\mathfrak{h}$.

Proposição B.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra real simples. Se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ se decompõe como*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$$

com $\mathfrak{i}_1 \cong \mathfrak{i}_2$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ para alguma álgebra complexa simples $\mathfrak{h}$, de forma que

$$\mathfrak{i}_1 \cong \mathfrak{h} \cong \mathfrak{i}_2.$$

Proposição B.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra real. Se $\mathfrak{g}$ é simples, então $\mathfrak{g}$ é do tipo II se, e somente se, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ para alguma álgebra simples $\mathfrak{h}$.*

Teorema B.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra real. Se $\mathfrak{g}$ é simples, então $\mathfrak{g}$ é*

(i) uma forma real de uma álgebra complexa simples, ou

(ii) $\mathfrak{g}$ é o realificado de uma álgebra complexa simples.