Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Daniel Rotmeister Teixeira de Barros

Sistemas Hamiltonianos Integráveis em Órbitas Coadjuntas de Grupos de Lie Clássicos

Juiz de Fora

2023

Daniel Rotmeister Teixeira de Barros

Sistemas Hamiltonianos Integráveis em Órbitas Coadjuntas de Grupos de Lie Clássicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria/Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rotmeister Teixeira de Barros, Daniel.
Sistemas Hamiltonianos Integráveis em Órbitas Coadjuntas de Grupos de Lie Clássicos / Daniel Rotmeister Teixeira de Barros. – 2023.
185 f.

Orientador: Laércio José dos Santos
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2023.

1. Sistemas Hamiltonianos Integráveis. 2. Formalismo de Lax. 3. Órbitas Coadjuntas. I. dos Santos, Laércio José, orient. II. Título.

Daniel Rotmeister Teixeira de Barros

Sistemas Hamiltonianos Integráveis em Órbitas Coadjuntas de Grupos de Lie Clássicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria e Topologia.

Aprovada em 18 de julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Catarina Mendes de Jesus Sánchez

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eder de Moraes Correa

Universidade Estadual de Campinas

Juiz de Fora, 18/07/2023.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Jackson Barros e Kátia Rotmeister. O incentivo no estudo desde pequeno, o amor e o exemplo de vida foram fundamentais para a concretização dessa etapa. Muito importantes também são meus avós, Edmundo Rotmeister e Ligia de Almeida (*in memoriam*), cujo carinho lembrarei por toda vida. Aos meus tios, Sandra e Eduardo, e ao meu primo Gabriel pela grande amizade desde pequeno.

À Tatiane Ladeira, expresso minha gratidão por ter aparecido na minha vida e sempre acreditar que eu poderia alcançar meus objetivos. Uma namorada amorosa que também se mostrou uma companheira inseparável, desde o início da minha jornada acadêmica através do vestibular. Com a sua presença afetuosa, aprendi diversas lições sobre a vida e os estudos. Desejo que nosso amor e união se fortaleçam a cada dia!

Ao meu orientador, Laércio dos Santos, pela paciência, generosidade e disposição em esclarecer minhas dúvidas. Sua dedicação e entusiasmo com a Matemática, sempre caprichoso nos cursos que ministrava, foram fundamentais para a minha formação. Seu exemplo de humildade e respeito pelos seus alunos me mostraram a importância de nunca esquecermos que a Matemática não se resume apenas a demonstrar teoremas, há ainda seu aspecto humano.

À banca examinadora, professores Catarina Sanches e Eder Correa por terem aceitado participar da avaliação desse trabalho e contribuírem para um melhor entendimento e direcionamento dos assuntos estudados.

Ao professor Willian França, expresso minha gratidão pelos cursos lecionados, pelas indicações de referências e sua boa vontade em sempre querer ajudar.

À secretária Paula pela competência no exercício da sua atividade e por ser sempre solícita com relação as demandas apresentadas e, em particular, pela boa vontade em nos ajudar com a divulgação das referatas.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFJF e os demais professores do programa que contribuíram para a minha formação.

Aos meus colegas do mestrado por tornarem essa etapa menos árdua. Nossas conversas descontraídas foram importantes nos momentos de dificuldades. Em especial, agradeço ao Luca Gaio, Giulia Fritis, Gustavo Roque e Fernando Kneipp pelo grupo de estudos que contribuiu muito para a minha formação. Deixo registrado meu agradecimento ao Victor Rocha, colega dos tempos de Física, por todas as discussões e amizade ao longo desses anos.

Às agências de fomento CAPES e FAPEMIG pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, serão estudados sistemas Hamiltonianos em órbitas (co)adjuntas de grupos de Lie. Em particular, estaremos interessados em analisar questões envolvendo integrabilidade, uma vez que, nesse caso, é possível encontrar soluções analíticas exatas para as equações de movimento. Consideraremos apenas funções Hamiltonianas de um tipo específico, a saber, definidas através de uma aplicação momento. Um dos objetivos consiste em investigar uma construção concreta de sistemas Hamiltonianos integráveis em órbitas (co)adjuntas por meio do formalismo de Lax. A metodologia utilizada é baseada numa aplicação do truque de Thimm. Para isso, deveremos enxergar as órbitas (co)adjuntas de grupos de Lie compactos como variedades simpléticas e determinar uma aplicação momento associada à restrição da ação (co)adjunta a essas órbitas. A condição de equivariância da aplicação momento será essencial para a construção de funções em involução para o sistema.

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos Integráveis. Órbitas Coadjuntas. Formalismo de Lax.

ABSTRACT

In this work, we will study Hamiltonian systems on (co)adjoint orbits of Lie groups. In particular, our focus lies in examining issues concerning integrability, as it allows for exact analytical solutions to the equations of motion. We will only consider Hamiltonian functions of a specific type, namely, defined through a momentum map. One of the objectives is to investigate a concrete construction of integrable Hamiltonian systems on (co)adjoint orbits using Lax formalism. The methodology employed is based on the application of the Thimm trick. To this end, we should see (co)adjoint orbits of compact Lie groups as symplectic manifolds and determine a momentum map associated with the restriction of the (co)adjoint action to these orbits. The equivariance condition of the momentum map will be essential for constructing involutive functions for the system.

Key-words: Integrable Hamiltonian Systems. Coadjoint Orbits. Lax Formalism.

SUMÁRIO

1 Introdução

O estudo dos sistemas Hamiltonianos vem sendo feito, nos últimos anos, tanto por matemáticos quanto por físicos. Há um particular interesse em tais sistemas quando se impõem condições de integrabilidade, uma vez que os problemas oriundos da Mecânica Clássica descritos por sistemas Hamiltonianos integráveis foram tratados de maneira profícua. Com efeito, Liouville mostrou que as equações de Hamilton podem ser resolvidas de forma explícita, por um método chamado de quadratura, se for conhecida uma quantidade máxima de integrais primeiras algebricamente independentes em involução para o sistema. Um sistema Hamiltoniano é dito (completamente) integrável quando admite uma quantidade máxima de integrais primeiras algebricamente independentes em involução. Pode-se, ainda, fornecer uma motivação geométrica para essa definição através do Teorema de Arnold-Jost, que afirma, resumidamente, que as curvas integrais de um sistema Hamiltoniano, sob algumas hipóteses, são órbitas de um campo vetorial constante em um toro.

Um problema que surge no contexto de sistemas Hamiltonianos é obter um método de se construir um sistema completamente integrável. Alguns matemáticos ocuparam-se dessa tarefa como, por exemplo, Anton Thimm [1] e Victor Guillemin & Shlomo Sternberg [2–4]. Nesses trabalhos, foi considerado um tipo especial de Hamiltoniano denominado Hamiltoniano coletivo[1] que é definido por meio de um pullback por uma aplicação momento, podendo essa última ser vista como uma generalização dos conceitos de momento linear e angular da Física.

O objetivo principal do presente trabalho reside em estudarmos construções de sistemas Hamiltonianos integráveis em órbitas coadjuntas dos grupos de Lie compactos $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$. Para esse fim, lançaremos mão do formalismo de Lax. No caso de sistemas do tipo Gelfand-Tsetlin, é possível recuperar as quantidades conservadas do sistema como invariantes espectrais de uma certa matriz de Lax. Iremos nos basear principalmente nas referências [5, 6] bem como [1–4].

A seguir descreveremos como esta dissertação está estruturada. De modo geral, independente do capítulo, tentou-se sempre fornecer mais de uma referência para cada assunto tratado de forma superficial.

No Capítulo 2, será introduzida algumas noções da Geometria Simplética que desempenham um papel importante neste trabalho. Para esse fim, começaremos com os conceitos de variedades simpléticas, simpletomorfismos e subvariedades de variedades

---

1 Tradução livre de *Collective Hamiltonian* feita pelo autor.

simpléticas. No restante do capítulo, abordaremos os campos Hamiltonianos e simpléticos, algumas propriedades dos campos Hamiltonianos, ações simpléticas e Hamiltonianas, parênteses de Poisson e noções de integrabilidade de sistemas Hamiltonianos.

No Capítulo 3, apresentaremos, no Teorema 3.1.1, como é feita a construção da forma simplética KKS em órbitas coadjuntas de grupos de Lie. Teremos interesse em grupos de Lie compactos e, nesse caso, poderemos identificar difeomorficamente órbitas adjuntas e coadjuntas bem como transportar, através da Proposição 3.1.4, a estrutura simplética para as órbitas adjuntas. Exibiremos algumas órbitas para elementos de $\mathfrak{u}(n)$ e $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$. Ainda, veremos como definir um parênteses de Poisson no dual da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e que as funções de Casimir de $\mathfrak{g}^*$ são exatamente as funções Ad^*-invariantes quando o grupo de Lie é compacto e conexo (Proposição 3.2.3). Encerraremos o capítulo discutindo sobre a aplicação momento. Veremos que sempre existem aplicações momento para ações Hamiltonianas e que no caso de órbitas coadjuntas uma aplicação momento é dada pela inclusão. Discutiremos algumas condições topológicas para que a aplicação momento seja equivariante, condição essa essencial para construirmos sistemas Hamiltonianos integráveis. Por fim, desenvolveremos alguns resultados sobre os Hamiltonianos coletivos.

No Capítulo 4, discutiremos como os pares de Lax podem ser usados para construir sistemas Hamiltonianos integráveis. Na Proposição 4.1.6, descreveremos a dinâmica associada a um Hamiltoniano coletivo através da equação de Lax. Em seguida, explicaremos, na Proposição 4.3.2, um método eficaz de se obter quantidades em involução, conhecido na literatura por *truque de Thimm*, para sistemas definidos por Hamiltonianos coletivos. Depois, no Teorema 4.4.4, veremos que se considerarmos a restrição da ação a um subgrupo fechado e conexo, a dinâmica do novo sistema Hamiltoniano também é descrita pela equação de Lax. Com isso, aplicaremos, no Teorema 4.4.7, os resultados anteriores para se construir sistemas Hamiltonianos integráveis do tipo Gelfand-Tsetlin nas órbitas (co)adjuntas de ações de $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$.

No Apêndice A é feita uma discussão da álgebra linear simplética, ou seja, a versão linear dos conceitos do Capítulo 2. É abordado os seguintes tópicos: bases simpléticas, subespaços de um espaço simplético, simpletomorfismos e decomposição em subespaços Lagrangianos.

No Apêndice B, apresentaremos os conceitos relacionados às variedades diferenciáveis, uma vez que estas desempenham um papel importante ao longo do trabalho. Um aspecto desse capítulo consiste em ter um caráter expositivo e foi pensado para servir como consulta para as convenções que foram adotadas bem como para fixar a notação.

No Apêndice C, faremos um breve apanhado de definições e resultados relacionados às álgebras e os grupos de Lie. Abordaremos as propriedades gerais da aplicação exponencial, representações de grupos de Lie, discutiremos as ações diferenciáveis e a construção de campos induzidos.

No Apêndice D, iniciaremos expondo algumas noções de tensores e álgebra exterior com o objetivo de se introduzir as formas diferenciais em variedades. Em seguida, recordaremos alguns fatos básicos relacionados à cohomologia de De Rham e derivada de Lie. Tais instrumentos serão utilizados ao longo da dissertação.

2 Geometria Simplética

O presente capítulo é destinado a expor os conceitos da Geometria Simplética que serão utilizados no decorrer do trabalho como, por exemplo, variedades simpléticas, campos Hamiltonianos e parênteses de Poisson. Algumas referências que tratam de tais assuntos com mais profundidade são [7–13]. Destacamos que [14] se distingue por apresentar diversos exemplos na Física. No Apêndice A é feita uma discussão mais detalhada sobre os espaços vetoriais simpléticos.

2.1 Variedades Simpléticas

Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais. Uma ***forma simplética*** em M consiste num elemento $\omega \in \Omega^2(M)$ que é

- uma forma fechada, isto é, $d\omega = 0$.
- não degenerado: se $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $X = 0$.

As condições acima são equivalentes a $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ser uma forma simplética no espaço vetorial T_pM e variar de forma diferenciável em p. Dizemos que um par (M, ω) é uma ***variedade simplética*** quando M for uma variedade diferenciável e ω for uma forma simplética em M.

Toda variedade simplética tem dimensão par, já que seu espaço tangente é um espaço vetorial simplético (vide Proposição A.1.4). Entretanto, nem toda variedade de dimensão par admite uma estrutura simplética, veja o Exemplo 2.1.5 mais adiante.

Uma outra consequência da definição anterior é que toda variedade simplética é orientada, já que a $2n$-forma $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ não se anula (vide Teorema A.2.9). A hipótese de ω ser não degenerada nos permite identificar, de maneira canônica, os fibrados tangente e cotangente. Com efeito, a aplicação $\omega^\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definida por

$$\omega^\flat(X)(Y) := \omega(X, Y) \qquad \text{para quaisquer} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.1}$$

é um isomorfismo, sobre $C^\infty(M)$, que induz um isomorfismo linear de fibrados vetoriais $TM \to T^*M$, também denotado por $\omega^\flat$ e com inversa $\omega^\sharp$ (para mais detalhes consulte [7, p.166] e o Apêndice A para o contexto de espaços vetoriais simpléticos).

Exemplo 2.1.1. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ e denote por $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ o sistema de coordenadas canônico. A forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$$

é uma forma simplética. ◇

Exemplo 2.1.2. Se $M \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície orientada, então existe uma forma volume $\omega \in \Omega^2(M)$ que não se anula. Logo, ω é não degenerada e fechada pois $d\omega \in \Omega^3(M) = \{0\}$. O par (M, ω) é uma variedade simplética. ◇

Exemplo 2.1.3. O espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ não é uma variedade simplética para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se n é ímpar, então $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ não pode admitir estrutura simplética. Se n é par, então $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ é não orientável (vide [9, p.393]), o que nos garante a não existência de estrutura simplética. ◇

Proposição 2.1.4. *Seja M uma variedade sem bordo. Se existe $\omega \in \Omega^2(M)$ não degenerada e exata, então M não é compacta. Além disso, se M é uma variedade simplética e compacta, então $H^2_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que M é compacta. Por hipótese, M tem dimensão par, digamos $\dim M = 2n$, e é orientada. Como ω é exata, existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $\omega = d\alpha$. Pelo Teorema de Stokes temos

$$0 \neq \int_M \omega^n = \int_M d\alpha \wedge \omega^{n-1} = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

onde na segunda igualdade usamos o item 3 do Teorema D.3.5 e que $d\omega^{n-1} \in \Omega^{2n}(M) = 0$.
□

Exemplo 2.1.5. A esfera $\mathbb{S}^2$ é a única esfera que admite uma estrutura simplética. Noutras palavras, $\mathbb{S}^n$ admite uma estrutura simplética se, e somente se, $n = 2$. Com efeito, pelo Exemplo D.3.11 temos que $H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^n)$ é não trivial quando $n = 2$. Logo, $\mathbb{S}^n$, com $n \neq 2$, não admite uma estrutura simplética pois se esse fosse o caso, toda forma de grau 2 fechada seria exata, implicando, pela Proposição 2.1.4, que $\mathbb{S}^n$ não seria compacta, o que é uma contradição. Assim, a única esfera capaz de acomodar uma estrutura simplética é a $\mathbb{S}^2$. De fato, como $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície orientada segue, do Exemplo 2.1.2, que $\mathbb{S}^2$ é uma variedade simplética. ◇

Forma de Liouville

Seja M uma variedade de dimensão n. O fibrado cotangente[1] T^*M admite uma estrutura de variedade simplética. A fim de exibi-la, introduziremos — de maneira livre

[1] Na linguagem da Mecânica Clássica M é chamado de espaço de configuração e T^*M espaço de fase (vide [14, p.355]).

de coordenadas — uma forma diferencial auxiliar cuja derivada exterior nos fornecerá a forma simplética. Assim, construiremos em T^*M uma forma simplética exata.

Sejam $p = (x, \xi)$, com $x \in M$ e $\xi \in T_x^*M$, e $\pi : T^*M \to M$ a projeção (submersão de classe C^∞) associada ao fibrado cotangente. A derivada

$$d\pi_p : T_p(T^*M) \to T_xM$$

nos permite definir a aplicação $\alpha : T^*M \to T^*(T^*M)$, $p \mapsto (p, \alpha_p)$ onde

$$\alpha_p \doteq (d\pi_p)^*\xi$$

e $(d\pi_p)^* : T_x^*M \to T_p^*(T^*M)$ é a transposta de $d\pi_p$. Isso significa que $\alpha_p : T_p(T^*M) \to \mathbb{R}$ é o funcional linear que age em vetores $v \in T_p(T^*M)$ da seguinte maneira

$$\alpha_p(v) = \xi(d\pi_p(v)). \tag{2.2}$$

A forma $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$ é conhecida como 1-***forma tautológica*** ou ***forma de Liouville***. A partir de agora argumentaremos que α é diferenciável e que $\omega \in \Omega^2(T^*M)$ definida por

$$\omega_{\text{can}} \doteq -d\alpha \tag{2.3}$$

é uma forma simplética em T^*M. Para isso, veremos como a forma de Liouville pode ser expressa localmente. Seja $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ um sistema de coordenadas em M. O conjuntos

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{dx^1, \ldots, dx^n\right\}$$

são referenciais locais coordenados em TM e T^*M, respectivamente, duais entre si definidos em U. Se $\xi \in \Omega^1(U)$, então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i \quad \text{onde} \quad \xi_i = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{2.4}$$

Pode-se verificar $(T^*U, (x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n))$ é um sistema de coordenadas em T^*M e o referencial coordenado associado é dado por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right\} \subseteq \mathfrak{X}(T^*U). \tag{2.5}$$

A representação local de π pode ser vista como uma projeção de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^n$ e sua derivada, em cada ponto, corresponde a uma projeção num espaço de dimensão n. Mais especificamente, $d\pi_p$ leva $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ em $\frac{\partial}{\partial x^i}(x)$ e cada $\frac{\partial}{\partial \xi_i}(p)$ no vetor nulo de T_xM. Como o conjunto (2.4) é um referencial local de T^*M temos

$$\alpha|_U = \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{i=1}^n b^i d\xi_i.$$

Vamos determinar as componentes a_i e b^i. Pela construção acima temos

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b^i d\xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_j^i = a_j,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, onde na segunda igualdade usamos que o conjunto $\{dx^i, d\xi_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ é um referencial local dual a (2.5). Assim,

$$\alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi\left(d\pi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi_j.$$

Por outro lado, um raciocínio similar ao acima nos permite concluir que $\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = b^j$ e

$$\alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = \xi\left(d\pi_p\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\right) = 0.$$

Assim, a forma de Liouville em coordenadas é expressa da seguinte maneira

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i. \tag{2.6}$$

Usando que o produto exterior é antissimétrico concluímos que[2]

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha = -\sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx^i = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\xi_i. \tag{2.7}$$

Dessa forma, ω_{can} é uma forma antissimétrica e fechada no fibrado cotangente T^*M. Além disso, a representação local (2.7) nos permite concluir que o referencial coordenado (2.5) de T^*M é simplético, num sentido análogo de base simplética para espaços vetoriais (vide Teorema A.2.6).

Proposição 2.1.6. *$\omega_{\text{can}} \in \Omega^2(T^*M)$, como definida em (2.3), é não degenerada. Em particular, ω_{can} é uma forma simplética.*

Demonstração: Vamos mostrar que ω_{can} é não degenerada para todo ponto $p = (x, \xi) \in T^*M$. Seja $u \in T_p(T^*M)$ tal que $\omega_{\text{can}}(p)(u, v) = 0$ para todo $v \in T_p(T^*M)$. Em coordenadas locais em torno do ponto p, tem-se $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) + \sum_{i=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial \xi_j}(p)$. Tomando $v = \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$0 = \omega_{\text{can}}(p)(u, v) = \sum_{i=1}^{n} dx^i(u) d\xi_j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) - dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) d\xi_j(u) = -\sum_{i=1}^{n} \delta_j^i b^j = -b^i.$$

[2] Alguns autores denotam a expressão local de ω como $\omega = dx^i \wedge d\xi_i$, sem o símbolo de somatório. Nesse caso, fica subentendido a convenção de Einstein.

Analogamente, tomando $v = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(p)$ obtemos que $a_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Daí, $u = 0$ e, portanto, ω_{can} é não degenerada. $\square$

Observação 2.1.7. Considerando um espaço vetorial simplético (V, ω) como variedade a construção acima generaliza a estrutura simplética canônica em $T^*V \simeq V \oplus V^*$ do Exemplo A.1.6. Além disso, por argumento de dimensão, o fibrado tangente TM também admite uma estrutura simplética. A forma simplética é construída da seguinte maneira: utilizando o isomorfismo $\omega^\flat$, como definido em (2.1), induza por meio de pullback uma forma simplética em TM. $\diamond$

Corolário 2.1.8. *Os fibrados tangente e cotangente de toda variedade é uma variedade orientável.*

Demonstração: Consequência do fibrado cotangente ser uma variedade simplética. $\square$

O próximo resultado nos fornece uma caracterização da forma de Liouville.

Proposição 2.1.9. *A forma de Liouville α é o único elemento de $\Omega^1(T^*M)$ tal que $\beta = \beta^*\alpha$ para todo $\beta \in \Omega^1(M)$ (na igualdade anterior β está sendo vista como uma aplicação de M em T^*M com $\beta(x) = (x, \beta_x)$).*

Demonstração: Mostremos que o pullback de α por meio de β é igual β. Dados $x \in M$ e $v \in T_xM$, tem-se

$$(\beta^*\alpha)_x(v) = \alpha_{\beta(x)}(d\beta_x(v)) = \beta_x(d\pi_{\beta(x)} \circ d\beta_x(v)) = \beta_x(v),$$

onde na segunda igualdade usamos (2.2) e na última igualdade que $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_M$. Seja $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ tal que $\beta^*\theta = \beta$ para todo $\beta \in \Omega^1(M)$. Então, $\beta^*(\alpha - \theta) = 0$. Seja $p = (x, \xi) \in T^*M$. Para cada $v \in T_xM$ temos

$$0 = d\beta_x^*(\alpha - \theta)_p(v) = (\alpha - \theta)_p(d\beta_x(v)).$$

O conjunto de vetores

$$\{(d\beta)_x(v) : \beta \in \Omega^1(M) \ \text{ e } \ v \in T_xM\}$$

gera o espaço $T_p(T^*M)$. Daí, $\theta = \alpha$. $\square$

Exemplo 2.1.10. Seja $M = \mathbb{R}$. O fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}$ é identificado com o espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Seja $\pi : T^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ a projeção. A forma de Liouville, em $T^*\mathbb{R}$, é dada por $\alpha_{(x,y)} = ydx$. Dado $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\alpha_{(x,y)}(u, v) = yu$. Mais ainda, a forma simplética canônica de $T^*\mathbb{R}$ é dada por

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha = -d(ydx) = dx \wedge dy.$$

$\diamond$

Exemplo 2.1.11. Já sabemos que o fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^n$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$. Visto que $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ segue que $T^*\mathbb{R}^n$ é identificado com o espaço $\mathbb{R}^{2n}$. Daí, a forma de Liouville $\alpha \in \Omega^1(T^*\mathbb{R}^n)$ é dada, em coordenadas, por

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} y_i dx^i$$

em que $p = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Aplicando a derivada exterior em ambos os lados dessa igualdade obtemos

$$\omega_{\text{can}} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

que é exatamente a forma simplética canônica introduzida no Exemplo A.1.5. $\diamond$

Exemplo 2.1.12. Seja $\mathbb{S}^1$ o círculo em $\mathbb{R}^2$. O fibrado cotangente $T^*\mathbb{S}^1$ é dado pelo cilindro infinito $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Podemos parametrizar $T^*\mathbb{S}^1$ através das coordenadas θ e y. Logo, as formas de Liouville e simplética são dadas, respectivamente, por $\alpha = yd\theta$ e $\omega_{\text{can}} = d\theta \wedge dy$. $\diamond$

Comportamento Local

Um dos resultados fundamentais sobre variedades simpléticas garante que localmente ω pode ser vista como sendo a forma simplética canônica do espaço $\mathbb{R}^{2n}$, definida no Exemplo A.1.5. Assim, todas as variedades simpléticas são localmente iguais.

Teorema 2.1.13 (Darboux). *Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$. Para cada $p \in M$, existe um sistema de coordenadas $(U, (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n))$ centrado em p tal que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i. \tag{2.8}$$

A prova do resultado acima pode ser encontrada em [7, 9, 14, 15]. As coordenadas em M que satisfazem (2.8) são chamadas ***coordenadas de Darboux***, ***coordenadas simpléticas*** ou ***coordenadas canônicas***.

Simpletomorfismos

Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M_1 \to M_2$ é uma ***aplicação simplética*** quando $f^*\omega_2 = \omega_1$, onde $f^*\omega_2$ é o pullback de ω_2 por meio de f. Em particular, se f é um difeomorfismo, então diremos que f é um ***simpletomorfismo***.

Observação 2.1.14. Poderíamos ter definido o conceito de variedade simplética diferente do que foi feito no começo da seção. Na definição alternativa, dizemos que uma variedade simplética consiste numa variedade, de dimensão par, que admite um atlas cujas mudanças de coordenadas são simpletomorfismo de $\mathbb{R}^{2n}$. Para mostrarmos que a definição alternativa implica na definição original podemos construir explicitamente uma forma simplética utilizando o pullback da forma canônica do $\mathbb{R}^{2n}$ pelas cartas desse atlas especial. Agora, a definição original implicar na definição alternativa é uma consequência do Teorema de Darboux. $\diamond$

Seja $f : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo entre variedades. A aplicação tangente $df : TM_1 \to TM_2$ entre os respectivos fibrados tangentes também é um difeomorfismo. Dualizando temos que a transposta $d(f^{-1})^* : T^*M_1 \to T^*M_2$ também é um difeomorfismo que tem a seguinte propriedade: para cada $\beta \in \Omega^1(M_1)$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*M_1 \arrow[r, "F"] & T^*M_2 \\ M_1 \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[u, "(f^{-1})^*\beta"'] \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

é comutativo, onde $F = d(f^{-1})^*$. Nas setas verticais estamos identificando um covetor com um elemento do fibrado cotangente e $(f^{-1})^*\beta$ denota o pullback de β por meio de f^{-1}. Com efeito, para qualquer $x_1 \in M_1$ temos

$$\begin{aligned} F \circ \beta(x_1) &= F(x_1, \beta_{x_1}) \\ &= (f(x_1), d(f^{-1})^*_{f(x_1)}(\beta_{x_1})) \\ &= (f(x_1), \beta_{x_1} \circ d(f^{-1})_{f(x_1)}) \\ &= (f(x_1), (f^{-1})^*\beta_{x_1}) \\ &= (f^{-1})^*\beta \circ f(x_1). \end{aligned}$$

No que segue, denotaremos por α_1 e α_2 as formas de Liouville em T^*M_1 e T^*M_2, respectivamente. O próximo resultado afirma que todo difeomorfismo entre variedades induz, de maneira canônica, um simpletomorfismo nos fibrados cotangentes.

Proposição 2.1.15 (Naturalidade da forma de Liouville). *A aplicação $F : T^*M_1 \to T^*M_2$, definida por $F = d(f^{-1})^*$, preserva a forma de Liouville, isto é, $F^*\alpha_2 = \alpha_1$. Em particular, F é um simpleomorfismo.*

Demonstração: Pela Proposição 2.1.9 temos que $\beta^*\alpha_1 = \beta$ para todo $\beta \in \Omega^1(M_1)$. Usando as propriedades de pullback (Proposição D.3.2)

$$\begin{aligned} \beta^*(F^*\alpha_2) &= (F \circ \beta)^*\alpha_2 \\ &= ((f^{-1})^*\beta \circ f)^*\alpha_2 \\ &= f^*((f^{-1})^*\beta)^*\alpha_2 \\ &= f^*(f^{-1})^*\beta \\ &= \beta \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a comutatividade do diagrama (2.9). Pela unicidade da propriedade da forma de Liouville devemos ter que $F^*\alpha_2 = \alpha_1$. Além disso, como a derivada exterior comuta com o pullback segue que $F^*\omega_2 = \omega_1$. Portanto, F é um simpletomorfismo. $\square$

Exemplo 2.1.16. Sejam $M_1 = M_2 = \mathbb{S}^1$. O fibrado cotangente $T^*\mathbb{S}^1$ é o cilindro infinito $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. A forma simplética canônica é dada pela forma área $\omega = d\theta \wedge dy$. Se $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é um difeomorfismo, então a aplicação $df^* : T^*\mathbb{S}^1 \to T^*\mathbb{S}^1$ é, pela Proposição 2.1.15, um simpletomorfismo (em particular, preserva área). $\diamond$

2.2 Subvariedades de Variedades Simpléticas

Seja (M, ω) uma variedade simplética. Uma subvariedade N é chamada

- ***isotrópica*** quando T_pN é um subespaço isotrópico de T_pM para todo $p \in N$.
- ***coisotrópica*** quando T_pN é um subespaço coisotrópico de T_qN para todo $p \in M$.
- ***Lagrangiana*** quando T_pN é um subespaço Lagrangiano de T_pM para todo $p \in N$.

Notemos que N é uma subvariedade isotrópica se, e somente se, o pullback $\iota^*\omega$ é identicamente nulo com $\iota : N \hookrightarrow M$ sendo a inclusão. Se ainda ocorrer $\dim N = (\dim M)/2$, então T_pN será isotrópico maximal, ou seja, N será uma subvariedade Lagrangiana.

Exemplo 2.2.1. Toda curva numa variedade simplética bidimensional é uma subvariedade isotrópica. $\diamond$

Exemplo 2.2.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $L \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ é o subconjunto definido por

$$L = \{(x, \nabla f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\},$$

então L é uma subvariedade Lagrangiana de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Em particular, podemos identificar $\mathbb{R}^n$ e L quando vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}^{2n}$, isto é, o espaço $\mathbb{R}^n$ é difeomorfo ao gráfico da derivada de uma aplicação f. $\diamond$

Proposição 2.2.3. *Sejam (M, ω) e (N, η) variedades simpléticas. Se uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é uma aplicação simplética, então a imagem $\phi(M)$ é uma subvariedade simplética imersa*[3] *de N.*

Demonstração: A aplicação ϕ é uma imersão (sua derivada em cada ponto é uma aplicação injetora), uma vez que sua derivada preserva as formas simpléticas (vide Proposição A.3.1). Assim, tem-se

$$T_{\phi(p)}\phi(M) = d\phi_p(T_pM)$$

para todo $p \in M$. De fato, se $\gamma \in \mathfrak{C}_p(M)$, então $\phi \circ \gamma$ é uma curva em $\phi(M)$ que no instante inicial passa por $\phi(p)$ e $d\phi_p([\gamma]) = [\phi \circ \gamma] \in T_{\phi(p)}\phi(M)$. Logo, $d\phi_p(T_pM) \subseteq T_{\phi(p)}\phi(M)$. Como a derivada de ϕ é injetora e $\phi(M)$ tem a mesma dimensão de M segue que $\dim d\phi_p(T_pM) = n = \dim T_{\phi(p)}\phi(M)$.

Devemos mostrar que a restrição de η a imagem $\phi(M)$ é não degenerada. Sejam $q = \phi(p) \in N$ e $u \in T_q\phi(M)$ tal que $\eta_q(u, v) = 0$ para todo $v \in T_q\phi(M)$. Existe um único $u_0 \in T_pM$ tal que $u = d\phi_p(u_0)$. Cada $v \in T_qN$ é da forma $v = d\phi_p(v_0)$ com $v_0 \in T_pM$. Como $\omega = \phi^*\eta$ segue que

$$\omega_p(u_0, v_0) = \eta_q(d\phi_p(u_0), d\phi_p(v_0)) = \eta_q(u, v) = 0$$

para todo $v_0 \in T_pM$. A hipótese de ω ser uma forma simplética implica que $u_0 = 0$. Daí, $u = 0$. Isso mostra que a restrição $\eta|_{\phi(M)}$ é uma forma simplética e, portanto, $\phi(M)$ é uma subvariedade simplética imersa de N. $\square$

2.3 Fibrados Lagrangianos

Uma ***fibrado Lagrangiano*** consiste numa terna (E, π, B) onde E é uma variedade simplética e as fibras são subvariedades Lagrangianas de E (vide [16, p.267]). Dizemos que dois fibrados Lagrangianos (E_1, π_1, B_1) e (E_2, π_2, B_2) são ***Lagrangianos equivalentes***

[3] Subvariedades imersas são exatamente as imagens de imersões injetivas.

quando existe um simpletomorfismo $f : E_1 \to E_2$ que leva fibra em fibra. Pelo Teorema B.4.8, existe um único difeomorfismo $g : B_1 \to B_2$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

comutar.

Exemplo 2.3.1. Seja $\pi_1 : \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ a projeção na primeira coordenada. A aplicação $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ dada por $\phi(x, y) = (x, y^\flat)$ é um simpletomorfismo (pelo Teorema A.4.2). Pelo Teorema B.4.8 tal aplicação preserva fibra, uma vez que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \arrow[d, "\pi_1"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

comuta de forma única. Portanto, ϕ é uma equivalência Lagrangiana. $\diamond$

Exemplo 2.3.2. Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ um isomorfismo linear e $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ munido da forma simplética do Exemplo A.1.6. A aplicação $A^* : \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ dada por

$$A^*(x, \eta) = (A(x), (A^t)^{-1}(\eta)),$$

onde $A^t : (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ denota a transposta de A, é uma equivalência Lagrangiana do fibrado $\pi_1 : \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ em si mesmo. Notemos que A é o único difeomorfismo que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \arrow[r, "A^*"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^* \arrow[d, "\pi_1"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

comutar. De fato, para qualquer $(x, \eta) \in \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ temos

$$\pi_1 \circ A^*(x, \eta) = A(x) = A \circ \pi_1(x, \eta)$$

Agora, mostremos que A^* preserva a forma simplética. Usando a expressão (A.2) e a definição acima temos

$$\begin{aligned}(A^*)^*\omega((x,\eta),(y,\xi)) &= \omega(A^*(x,\eta),A^*(y,\xi))\\ &= \omega((A(x),(A^{-1})^t(\eta)),(A(y),(A^{-1})^t(\xi)))\\ &= (A^{-1})^t(\xi)(A(x)) - (A^{-1})^t(\eta)(A(y))\\ &= \xi\circ A^{-1}(A(x)) - \eta\circ A^{-1}(A(y))\\ &= \xi(x)-\eta(y)\\ &= \omega((x,\eta),(y,\xi)),\end{aligned}$$

ou seja, A^* preserva forma. Portanto, A^* é um simpletomorfismo que leva fibra em fibra. $\diamond$

Exemplo 2.3.3. Sejam $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ o fibrado canônico e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ um isomorfismo. A aplicação $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$f(x,y) = (A(x), \sharp\circ(A^t)^{-1}\circ\flat(y))$$

estabelece uma equivalência Lagrangiana do fibrado π em si mesmo, onde $\flat$ e $\sharp$ são os isomorfismos musicais. Com efeito, a hipótese de A ser um isomorfismo nos assegura que f é um difeomorfismo. Além disso, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\oplus(\mathbb{R}^n)^* \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A^*} \\ \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\oplus(\mathbb{R}^n)^*\end{array}$$

é comutativo, onde $A^*(x,\eta) := (A(x),(A^t)^{-1}(\eta))$ e o isomorfismo horizontal é dado pela aplicação $\phi(x,y) = (x,y^\flat)$. Com base no Teorema A.4.2 podemos concluir que ϕ é, na verdade, um simpletomorfismo. Para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$ temos

$$A^*\circ\phi(x,y) = A^*(x,y^\flat) = (A(x),(A^t)^{-1}(y^\flat))$$

e

$$\phi\circ f(x,y) = \phi(A(x),\sharp\circ(A^t)^{-1}(y^\flat)) = (A(x),(A^t)^{-1}(y^\flat))$$

pois $\flat\circ\sharp = \mathrm{id}$. Logo, o diagrama acima é realmente comutativo e isso nos permite escrevermos $f = \phi^{-1}\circ A^*\circ\phi$. Sabemos, também, do Exemplo 2.3.2, que A^* é uma equivalência Lagrangiana do fibrado $\mathbb{R}^n\oplus(\mathbb{R}^n)^*$ em si mesmo. Daí, f é um simpletomorfismo e, portanto, uma equivalência Lagrangiana. $\diamond$

Exemplo 2.3.4. Podemos generalizar o Exemplo 2.3.3 no seguinte sentido: dados M uma variedade diferenciável e $f : M \to M$ um difeomorfismo, a aplicação $d(f^{-1})^* : T^*M \to T^*M$ estabelece uma equivalência Lagrangiana do fibrado cotangente em si mesmo. Já sabemos que as fibras são subvariedades Lagrangianas. Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "d(f^{-1})^*"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo. Pela Proposição 2.1.15 concluímos que $d(f^{-1})^*$ é um simpletomorfismo. $\diamond$

2.4 Campos Hamiltonianos e Simpléticos

Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$. O ***campo Hamiltoniano de*** H é o único elemento $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$dH = i_{X_H}\omega \equiv X_H \lrcorner\, \omega, \tag{2.10}$$

onde i_{X_H} denota o produto interior. Explicitamente, tem-se $X_H = \omega^\sharp(dH)$. A função H, neste caso, é chamada ***função Hamiltoniana*** ou ***função energia*** do campo X_H. A igualdade acima pode ser reescrita na seguinte forma:

$$dH(Y) = \omega(X_H, Y) \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Por causa disto, X_H é denominado ***gradiente simplético*** de f. A terna (M, ω, H) é chamada de ***sistema Hamiltoniano***. Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dito

- ***Hamiltoniano*** quando existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$.
- ***simplético*** quando $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}_{\text{Simp}}(M)$ e $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M)$ os subespaços de $\mathfrak{X}(M)$ formado pelos campos simpléticos e Hamiltonianos, respectivamente. Assim, vale a inclusão $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M) \subseteq \mathfrak{X}_{\text{Simp}}(M)$. Lembrando que $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ concluímos também que $\mathfrak{X}_{\text{Simp}}(M)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

Exemplo 2.4.1. Seja $M = \mathbb{T}^2$ o 2-toro dado por $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Considerando coordenadas polares (ϕ, θ), seja $\omega = d\phi \wedge d\theta$. Os campos vetoriais $X = \frac{\partial}{\partial\phi}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial\theta}$ são simpléticos, mas não são Hamiltonianos. $\diamond$

Exemplo 2.4.2 (Oscilador Harmônico). Seja $M = \mathbb{R}^2$ munido da forma simplética canônica $\omega = dq \wedge dp$. Consideremos $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$H(q,p) := \frac{1}{2}(\kappa^2 q^2 + p^2),$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$ é uma constante[4] não nula. Em coordenadas polares (r, θ) temos $\omega = rdr \wedge d\theta$. Se $\kappa = 1$, então $H = \frac{1}{2}r^2$ é a função Hamiltoniana associada ao campo vetorial $X = \frac{\partial}{\partial\theta}$. De fato,

$$i_X\omega = r \cdot i_X(dr \wedge d\theta) = r \cdot (i_X(dr) \cdot d\theta - i_X(d\theta) \cdot dr) = -dH$$

pois $i_X(dr) = 0$ e $dH = rdr$. ◇

Exemplo 2.4.3. Sejam $\mathbb{S}^2$ munida da forma simplética escrita em coordenadas cilíndricas $\omega = d\theta \wedge dz$ e a função (altura) $H \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ dada por $H(\theta, z) = z$. Vamos encontrar um campo Hamiltoniano para H. Para isso, deve valer

$$dz = dH = i_{X_H}(d\theta \wedge dz) = i_{X_H}(d\theta) \cdot dz - i_{X_H}(dz) \cdot d\theta.$$

Assim, $X_H = \frac{\partial}{\partial\theta}$ é o campo Hamiltoniano associado a H. ◇

Exemplo 2.4.4. O conjunto $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é um cilindro em $\mathbb{R}^3$. A forma simplética, em M, é dada pela expressão $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$. O campo vetorial $X = \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(M)$ é simplético. Notemos que

$$i_X\omega = ydx - xdy.$$

Como $\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega)$ obtemos

$$\mathcal{L}_X\omega = d(ydx) - d(xdy) = dy \wedge dx - dx \wedge dy = -2dx \wedge dy.$$

Notemos que em $\mathbb{S}^1$ o produto exterior $dx \wedge dy$ é nulo pois $\Omega^2(\mathbb{S}^1) = \{0\}$. Logo, $\mathcal{L}_X\omega = 0$, mostrando que X é simplético. Mostremos que X não é Hamiltoniano. Para isso, parametrizamos $\mathbb{S}^1$ por

$$x(t) = \cos t \quad \text{e} \quad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

Assim, $dx = -\operatorname{sen} t dt$, $dy = \cos t dt$ e

$$\int_{\mathbb{S}^1} i_X\omega = \int_0^{2\pi} ((\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t dt) - (\cos t)(\cos t dt)) = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

Por outro lado, se $i_X\omega$ é exata, então existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $i_X\omega = df$. Pelo Teorema de Stokes deveríamos ter que $\int_{\mathbb{S}^1} i_X\omega = 0$, contradizendo o cálculo acima. Assim, X não é Hamiltoniano. ◇

[4] Fisicamente podemos associar o Hamiltoniano em questão a um sistema massa-mola. Nesse caso, a constante κ é positiva e dependerá da *constante elástica* da mola.

Exemplo 2.4.5. Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e $N : M \to \mathbb{S}^2$ um campo de vetores normal e unitário. Consideremos a forma área $\omega \in \Omega^2(M)$ induzida pelo vetor N. Restringindo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ a superfície M obtemos uma métrica Riemanniana. Dado $H : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $\nabla H \in \mathfrak{X}(M)$ é o único campo tal que

$$\langle \nabla H(p), v \rangle = dH_p(v)$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM = N(p)^\perp$. Por outro lado, tem-se

$$dH_p(v) = \omega_p(X_H(p), v) = \langle N(p), X_H(p) \times v \rangle = \langle v, N(p) \times X_H(p) \rangle,$$

implicando que $\nabla H(p) = N(p) \times X_H(p)$. Pela identidade de Grassmann[5] segue que

$$N \times \nabla H = N \times (N \times X_H) = \langle N, X_H \rangle N - \langle N, N \rangle X_H = -X_H,$$

uma vez que $N(x) \perp X_H(x)$ para todo $x \in M$. Logo, $X_H = \nabla H \times N$. $\diamond$

Exemplo 2.4.6. Sejam M uma variedade e (T^*M, ω) seu fibrado cotangente. Vimos na seção 2.1 que se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas local em M, então

$$(x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

é um sistema de coordenadas local em T^*M. Verifica-se que

$$X_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad \text{e} \quad X_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

De fato,

$$\omega_{\text{can}}\left(X_{x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 1$$

e, assim, devemos ter que $X_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ pois (2.5) é um referencial local simplético de T^*M. Seja $H \in C^\infty(T^*M)$ uma função Hamiltoniana. O campo Hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}(T^*M)$ pode ser escrito localmente como

$$X_H = \sum_{i=1} a_i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

onde a_i e b_i são funções diferenciáveis. Assim,

$$a^i = dx^i(X_H) = \omega_{\text{can}}(X_{x^i}, X_H) = -dH(X_{x^i}) = dH\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}$$

5 Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, tem-se $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$. Para verificarmos tal igualdade é suficiente analisarmos na base canônica do $\mathbb{R}^3$ (ou numa base ortonormal) e estendermos por bilinearidade.

Analogamente, pode-se constatar que $b_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$. Assim,

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

que é a expressão encontrada nos livros de Mecânica Clássica (vide [17]). $\diamond$

O Exemplo 2.4.6 pode ser generalizado no seguinte sentido:

Proposição 2.4.7. *Se (M, ω) é uma variedade simplética, então existe um sistema de coordenadas local $(U, (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n))$ tal que*

1. *os campos Hamiltonianos, em $\mathfrak{X}(U)$, induzidos, pelo sistema de coordenadas, têm a propriedade:*
$$X_{q^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \quad e \quad X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{2.11}$$
2. *o referencial coordenado associado é simplético e formado por campos Hamiltonianos.*
3. *o campo Hamiltoniano induzido por uma função $H \in C^\infty(M)$ é expresso localmente como*
$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \tag{2.12}$$

Demonstração: Pelo Teorema de Darboux, todo ponto de M admite um sistema de coordenadas que induz um referencial coordenado simplético em $\mathfrak{X}(U)$. Usando a expressão (2.10) e a definição de base simplética obtemos as igualdades em (2.11). Já (2.12) segue de maneira similar ao que foi feito no Exemplo 2.4.6. $\square$

Exemplo 2.4.8. Seja $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ o Hamiltoniano do Exemplo 2.4.2. O conjunto $\{\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\}$ é um referencial coordenado de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Pela expressão (2.12) temos

$$X_H = p\frac{\partial}{\partial q} - \kappa^2 q \frac{\partial}{\partial p}.$$

$\diamond$

Proposição 2.4.9. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se M é compacta e X é um campo Hamiltoniano, então seu fluxo é um simpletomorfismo. Em particular, o fluxo de X preserva a forma volume Ω_ω de M.*

Demonstração: Lembremos que $\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)|_{t=0}$ (vide página 185), com ϕ_t sendo o fluxo de X, e que a fórmula de Cartan para a derivada de Lie é dada por (Proposição D.3.12)

$$\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_X d\omega.$$

Temos $d\omega = 0$ pois ω é uma forma simplética (em particular, fechada). Por outro lado, se X é Hamiltoniano, então existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$. Da igualdade (2.10) temos $d(i_X\omega) = d(df) = 0$. Logo, $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Como M é compacta temos que o campo X é completo (vide [9, p.216]). Sejam $p \in M$ e $u, v \in T_pM$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)_p(u,v) = \frac{d}{ds}(\phi_{t+s}^*\omega)_p(u,v)|_{s=0}.$$

Como o fluxo é um homomorfismo de grupos segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\phi_{t+s}^*\omega)_p(u,v)|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\omega_{\phi_{s+t}(p)}(d(\phi_{s+t})_p(u), d(\phi_{s+t})_p(v))|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\omega_{\phi_s(\phi_t(p))}(d(\phi_s)_{\phi_t(p)}(d(\phi_t)_p(u)), d(\phi_s)_{\phi_t(p)}(d(\phi_t)_p(v)))|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}d(\phi_s)^*_{\phi_t(p)}\omega_{\phi_t(p)}(d(\phi_t)_p(u), d(\phi_t)_p(v))|_{s=0} \\
&= d(\phi_t)^*_p\frac{d}{ds}d(\phi_s)^*_{\phi_t(p)}\omega_p(u,v)|_{s=0} \\
&= d(\phi_t)^*_p(\mathcal{L}_X\omega)_{\phi_t(p)}(u,v) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\phi_t^*\omega = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, o fluxo de X preserva a forma simplética ω. □

Cohomologia dos Campos Simpléticos e Hamiltonianos

Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado ***localmente Hamiltoniano*** quando para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que a restrição $X|_U$ é Hamiltoniano.

Proposição 2.4.10. *Todo campo simplético é localmente Hamiltoniano.*

Demonstração: Suponhamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo simplético, ou seja, $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Seja (U, ϕ) um sistema de coordenadas local de maneira que U é difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$, o que implica $H^1_{\mathrm{dR}}(U) = \{0\}$. Assim, a restrição $i_X\omega|_U$ é exata, ou seja, existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $i_X\omega|_U = df$. Daí, a restrição $X|_U$ é um campo Hamiltoniano. □

Exemplo 2.4.11. Já sabemos, do Exemplo 2.4.4, que $\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ é um campo simplético que não é Hamiltoniano. Pela Proposição 2.4.10 concluímos que $\frac{\partial}{\partial z}$ é localmente Hamiltoniano, mas não é globalmente Hamiltoniano. ◇

Lema 2.4.12. *Dadas $a \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^{\infty}(M)$, então valem as seguintes propriedades:*

1. $X_{f+ag} = X_f + aX_g$.
2. $X_{fg} = fX_g + gX_f$.

Demonstração: Por definição de campo Hamiltoniano, X_h, com $h = f + ag$, é o único elemento de $\mathfrak{X}(M)$ tal que $dh = i_{X_h}\omega$. Pela linearidade da derivada temos $dh = df + adg$. Para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$\begin{aligned} dh(Y) &= df(Y) + adg(Y) \\ &= \omega(X_f, Y) + a\omega(X_g, Y) \\ &= \omega(X_f + aX_g, Y) \\ &= i_{X_f + aX_g}\omega(Y) \end{aligned}$$

donde concluímos que $X_f + aX_g = X_{f+ag}$. Logo, vale o item 1. Pela regra da Leibniz e um argumento análogo ao feito anteriormente obtemos a afirmação 2. □

Proposição 2.4.13. *Se $Z^1(M)$ e $B^1(M)$ denotam os espaços das 1-formas diferenciais que são fechadas e exatas, respectivamente, então $\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M) \simeq Z^1(M)$ e $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M) \simeq B^1(M)$. Além disso, existe um isomorfismo linear entre $\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)/\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ e o primeiro grupo de cohomologia de De Rham $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$.*

Demonstração: A aplicação

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M) \ni X \longmapsto i_X\omega \in Z^1(M) \tag{2.13}$$

está bem definida. De fato, pelo item 7 da Proposição D.3.12 (fórmula mágica de Cartan) temos

$$d(i_X\omega) = \mathcal{L}_X\omega + i_X(d\omega) = 0 + 0 = 0.$$

Notemos que, por construção, a aplicação definida em (2.13) é uma transformação linear. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)$ tais que $i_X\omega = i_Y\omega$. Tomemos $p \in M$. Para todo $v \in T_pM$, tem-se

$$\omega_p(X(p), v) = (i_X\omega)_p(v) = (i_Y\omega)_p(v) = \omega_p(Y(p), v).$$

Como ω_p é não degenerada segue que $X(p) = Y(p)$. Logo, $X = Y$, mostrando que a aplicação definida em (2.13) é injetora. Seja $\alpha \in Z^1(M)$. Defina $X = \omega^\sharp(\alpha) \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\omega^\sharp$ é o isomorfismo da página 14. Assim, X é o único campo em M tal que $\alpha = i_X\omega$. Pelo item 7 da Proposição D.3.12 concluímos que X é um campo simplético pois

$$\mathcal{L}_X\omega = i_Xd\omega + di_X\omega = 0 + d\alpha = 0 + 0 = 0.$$

Isso mostra que a aplicação (2.13) é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo.

Agora, vamos construir um isomorfismo linear entre os espaços $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ e $B^1(M)$. Para esse fim, considere a aplicação

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M) \ni X_f \longmapsto df \in B^1(M). \tag{2.14}$$

Por construção, tal aplicação está bem definida e é, pelo Lema 2.4.12, uma transformação linear. Sejam $X_f, X_g \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ tais que $df = dg$. Seja $p \in M$. Para todo $v \in T_pM$ temos

$$\omega_p(X_f(p), v) = df_p(v) = dg_p(v) = \omega_p(X_g(p), v).$$

Logo, $X_f(p) = X_g(p)$, já que ω_p é não degenerada. A arbitrariedade de $p \in M$ implica que $X_f = X_g$, ou seja, a aplicação definida em (2.14) é injetora. Dado $\alpha \in B^1(M)$, existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $\alpha = df$. Assim, a aplicação (2.14) leva o campo $X_f \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ em α, mostrando a sobrejetividade. Dessa forma, obtemos o isomorfismo desejado. $\square$

O isomorfismo da Proposição 2.4.13 nos permite concluir que procurar campos simpléticos que não são Hamiltonianos é equivalente a procurar formas fechadas que não são exatas. Assim, conhecer o primeiro grupo de cohomologia de De Rham é essencial.

Corolário 2.4.14. *Se $H^1_{\mathrm{dR}}(M) \neq \{0\}$, então existe pelo menos um campo simplético que não é Hamiltoniano.*

Corolário 2.4.15. *Se X é um campo simplético e $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ é trivial, então X é campo Hamiltoniano.*

Demonstração: Se $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ é trivial, então, pela Proposição 2.4.13, o quociente

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)/\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$$

também é trivial. Logo, todo campo simplético é Hamiltoniano. $\square$

Corolário 2.4.16. *Se todo campo localmente Hamiltoniano é globalmente Hamiltoniano, então $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.4.15 todo campo simplético é localmente Hamiltoniano. Assim, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)/\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M) = \{0\}$. Pela Proposição 2.4.13 segue que $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$. $\square$

Propriedades Iniciais dos Campos Hamiltonianos

Uma consequência do Teorema de Darboux (vide página 19) é que o espaço tangente a uma variedade simplética pode ser descrito por campos Hamiltonianos. Antes de mostrarmos tal fato, vejamos o seguinte:

Lema 2.4.17. *Se $f, g \in C^\infty(M)$ são tais que $f = g$ em um aberto $U \subseteq M$, então os campos Hamiltonianos $X_f, X_g \in \mathfrak{X}(M)$ coincidem em U.*

Demonstração: Seja $p \in U$. Por definição de campo Hamiltoniano, tem-se

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \omega_p(X_f(p), v) \\ dg_p(v) &= \omega_p(X_g(p), v) \end{aligned}$$

para todo $v \in T_pU \simeq T_pM$. Como a forma ω_p é não degenerada segue que $X_f(p) = X_g(p)$. Portanto, vale a igualdade $X_f = X_g$ em U. □

Proposição 2.4.18. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Para cada $p \in M$, tem-se*

$$T_pM = \{X_f(p) : f \in C^\infty(M)\}.$$

Demonstração: Seja $(U, (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ uma carta de Darboux numa vizinhança de p. Tomemos $v \in T_pM$. Pela Proposição 2.4.7 temos

$$v = a_1 X_{q^1} + \cdots + a_n X_{q^n} + b_1 X_{p_1} + \cdots + b_n X_{p_n}.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.4.12 temos $v = X_f(p)$ com $f = \sum_{i=1}^n a_i q^i + b_i p_i \in C^\infty(U)$. Defina $\overline{f} := f|_{\overline{V}}$. Pelo Lema B.1.3, existe $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f}|_{\overline{V}} = \overline{f}$. Como $\widetilde{f}$ e f coincidem no aberto V temos, pelo Lema 2.4.17, que

$$v = X_f(p) = X_{\widetilde{f}}(p),$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 2.4.19. *Sejam (M, ω) e (N, η) variedades simpléticas. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é uma aplicação simplética se, e somente se, é uma imersão e para todo $f \in C^\infty(N)$ os campos Hamiltonianos $X_{\phi^* f} \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_f \in \mathfrak{X}(N)$ são ϕ-relacionados.*

Demonstração: Suponhamos que ϕ seja uma aplicação simplética. Isso significa que sua derivada preserva as formas simpléticas e, pela Proposição A.3.1, a derivada é injetora.

Sejam $p \in M$ e $f \in C^\infty(N)$. Para todo $v \in T_pM$, tem-se

$$\begin{aligned}
\eta_{\phi(p)}(X_f(\phi(p)), d\phi_p(v)) &= df_{\phi(p)}(d\phi_p(v)) \\
&= d(f \circ \phi)_p(v) \\
&= d(\phi^* f)_p(v) \\
&= \omega_p(X_{\phi^* f}(p), v) \\
&= \eta_{\phi(p)}(d\phi_p(X_{\phi^* f}(p)), d\phi_p(v))
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.3, $\eta|_{\phi(M)}$ é não degenerada, logo

$$d\phi \circ X_{\phi^* f} = X_f \circ \phi.$$

Reciprocamente, afirmamos que todo $v \in T_pM$ é da forma $v = X_{\phi^* f}(p)$ para algum $f \in C^\infty(N)$. Com efeito, pela Proposição 2.4.18 e a hipótese dos campos $X_{\phi^* f}$ e X_f serem ϕ-relacionados temos

$$T_{\phi(p)}N = \{X_f(\phi(p)) : f \in C^\infty(N)\} = \{d\phi_p(X_{\phi^* f}(p)) : f \in C^\infty(N)\}.$$

Notemos que $d\phi_p(T_pM)$ é um subespaço de $T_{\phi(p)}N$. Dado $v \in T_pM$, tem-se $d\phi_p(v) \in T_{\phi(p)}N$. Assim, existe $f \in C^\infty(N)$ tal que $d\phi_p(v) = d\phi_p(X_{\phi^* f}(p))$. Daí, $v = X_{\phi^* f}(p)$, já que a derivada é injetora. Agora, verificaremos que ϕ preserva as formas simpléticas. Tomemos $u, v \in T_pM$. Escrevendo $u = X_{\phi^* f}$ e $v = X_{\phi^* g}$ temos

$$\begin{aligned}
(\phi^*\eta)_p(u, v) &= \eta_{\phi(p)}(d\phi_p(X_{\phi^* f}(p)), d\phi_p(X_{\phi^* g}(p))) \\
&= \eta_{\phi(p)}(X_f(\phi(p)), d\phi_p(X_{\phi^* g}(p))) \\
&= df_{\phi(p)}(d\phi_p(X_{\phi^* g}(p))) \\
&= d(\phi^* f)_p(X_{\phi^* g}(p)) \\
&= \omega_p(X_{\phi^* f}(p), X_{\phi^* g}(p)) \\
&= \omega_p(u, v).
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é uma aplicação simplética. □

Corolário 2.4.20. *Sejam (M, ω) e (N, η) variedades simpléticas e $\phi : M \to N$ um difeomorfismo. A aplicação ϕ é um simpletomorfismo se, e somente se,*

$$\phi_* X_h = X_{h \circ \phi^{-1}}$$

para todo $h \in C^\infty(M)$.

Demonstração: Suponhamos que ϕ é um simpletomorfismo. Tomemos $h \in C^\infty(M)$ e defina $f = h \circ \phi^{-1}$. Dado $p = \phi^{-1}(q) \in M$, tem-se

$$\phi_* X_h(q) = d\phi_{\phi^{-1}(q)}(X_h(\phi^{-1}(q))) = d\phi_p(X_h(p)) = X_{h\circ\phi^{-1}}(q)$$

onde na última igualdade usamos que $h = f \circ \phi = \phi^* f$ e a Proposição 2.4.19. A recíproca segue de maneira análoga. □

Veremos que toda função diferenciável H, em M, é constante ao longo das curvas integrais do seu campo Hamiltoniano. Fisicamente, podemos pensar que H é uma *grandeza conservada* ou uma *constante de movimento*. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é chamada de ***integral primeira*** de $X \in \mathfrak{X}(M)$ quando f for constante ao longo das curvas integrais de X.

Proposição 2.4.21 (Conservação de Energia). *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$. Se $\alpha : I \to M$ é uma curva integral de $X_H \in \mathfrak{X}(M)$, então H é constante ao longo de α.*

Demonstração: Por hipótese, $\alpha'(t) = X_H(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. Pela regra da cadeia e a expressão (2.10) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\alpha(t)) &= dH_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \\ &= \omega_{\alpha(t)}(X_H(\alpha(t)), \alpha'(t)) \\ &= \omega_{\alpha(t)}(X_H(\alpha(t)), X_H(\alpha(t))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o resultado segue. □

Proposição 2.4.22. *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas, $\phi : M_1 \to M_2$ um simpletomorfismo e $f : M_1 \to \mathbb{R}$ uma função. Denotaremos por $X_f^{\omega_1}$ e $X_{f\circ\phi^{-1}}^{\omega_2}$ os campos Hamiltonianos associados a f e $f \circ \phi^{-1}$, respectivamente.*

1. *$d\phi_p(X_f^{\omega_1}(p)) = X_{f\circ\phi^{-1}}^{\omega_2}(\phi(p))$ para todo $p \in M_1$.*
2. *Se $f \in C^\infty(M_1)$ e $\alpha : I \to M_1$ é uma curva integral de $X_f^{\omega_1}$, então $\phi \circ \alpha$ é uma curva integral de $X_{f\circ\phi^{-1}}^{\omega_2}$.*

Demonstração: Seja $p \in M_1$. Por definição de campo Hamiltoniano temos

$$d(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(v) = \omega_2(X_{f\circ\phi^{-1}}^{\omega_2}(\phi(p)), v)$$

para todo $v \in T_{\phi(p)}M_2$. Aplicando a regra da cadeia no lado esquerdo da igualdade acima temos

$$\begin{aligned} d(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(v) &= df_p(d\phi^{-1}_{\phi(p)}(v)) \\ &= \omega_1(X_f^{\omega_1}(p), d\phi^{-1}_{\phi(p)}(v)) \\ &= \omega_2(d\phi_p(X_f^{\omega_1}(p)), v), \end{aligned}$$

para todo $v \in T_{\phi(p)}M_2$, onde na última igualdade usamos a hipótese de ϕ preservar a forma simplética. Como ω_2 é não degenerada devemos ter que $d\phi_p(X_f^{\omega_1}(p)) = X^{\omega_2}_{f\circ\phi^{-1}}(\phi(p))$. Tomemos $\alpha : I \to M_1$ uma curva integral de $X_f^{\omega_1}$. Aplicando a regra da cadeia temos

$$(\phi \circ \alpha)'(t) = d\phi_p(\alpha'(t)) = d\phi_p(X_f^{\omega_1}(\alpha(t))) = X^{\omega_2}_{f\circ\phi^{-1}}(\phi(\alpha(t))).$$

Assim, ϕ leva curva integral em curva integral. □

Hipersuperfícies de Energia

Seja (M, ω, H) um sistema Hamiltoniano. Denotaremos por Ω_ω a forma volume em M. Diremos que $\alpha \in \Omega^k(M)$ é ***invariante*** por um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ quando $\mathcal{L}_X\alpha = 0$.

Considere $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de H, isto é, a aplicação $dH_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é não nula para todo $p \in H^{-1}(c)$. A restrição $H|_{H^{-1}(c)} : H^{-1}(c) \to \mathbb{R}$ tem posto constante e igual a 1. Logo, a pré-imagem $H^{-1}(c)$ é uma subvariedade mergulhada e de codimensão 1 em M.

Denotaremos por Σ_c uma componente conexa de $H^{-1}(c)$. Assim, Σ_c é uma subvariedade de codimensão 1 em M, denominada ***hipersuperfície de energia***.

Proposição 2.4.23. *Sejam (M, ω, H) um sistema Hamiltoniano e Ω_ω a forma volume de M. Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de H, então o conjunto Σ_c, como definido acima, é uma subvariedade de codimensão 1 em M. Além disso, existe uma forma volume μ_c em Σ_c invariante por $X_H|_{\Sigma_c}$.*

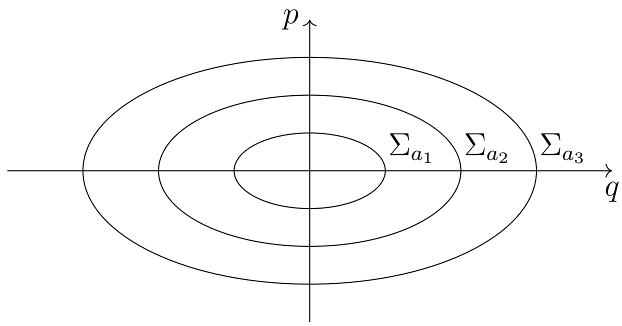
Demonstração: Vide [7, 14]. □

Veremos, na Seção 2.5, que a Proposição 2.4.23 pode ser generalizada quando substituímos Σ_c por uma superfície de nível de uma família de constantes de movimento.

Exemplo 2.4.24. Considere o sistema Hamiltoniano $(\mathbb{R}^2, \omega, H)$ do Exemplo 2.4.2. Para cada $a \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\Sigma_a := H^{-1}(a^2) = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : \kappa^2q^2 + p^2 = a^2\},$$

ou seja, a hipersuperfície de energia Σ_a corresponde a uma elipse no espaço de fase. A medida que aumentamos, por valores positivos, a constante $a > 0$ obtemos elipses concêntricas. Abaixo ilustramos esse fato:



Vamos determinar a forma volume μ_a usando os mesmos passos da construção descrita na Proposição 2.4.23. Comecemos buscando $\sigma_a \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $dq \wedge dp = dH \wedge \sigma_a$. Escreva $\sigma_a = b_1 dq + b_2 dp$. Pela bilinearidade do produto exterior temos

$$dq \wedge dp = (\kappa^2 q dq + p dp) \wedge (b_1 dq + b_2 dp) = (\kappa q b_2 - p b_1) dq \wedge dp,$$

ou seja,

$$\kappa^2 q b_2 - p b_1 = 1.$$

Logo, $b_1 = -\frac{1}{a^2} p$ e $b_2 = \frac{1}{a^2} q$, uma vez que $\frac{\kappa^2}{a^2} q^2 + \frac{1}{a^2} p^2 = 1$. Daí, a forma volume, em Σ_a, invariante pelo campo X_H é dada por

$$\mu_a = \iota^* \sigma_a = -\frac{p}{a^2} dq + \frac{q}{a^2} dp.$$

$\diamond$

Ações Simplética e Hamiltoniana

Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Uma ação à esquerda diferenciável $\tau : G \times M \to M$ é chamada de

- ***ação simplética*** quando os elementos de G preservam ω, ou seja, $\tau_g^* \omega = \omega$ para todo $g \in G$.
- ***ação Hamiltoniana*** quando é uma ação simplética em que os campos de vetores $\delta\tau(X)$, com $X \in \mathfrak{g}$, são globalmente Hamiltonianos.

Exemplo 2.4.25. Considere $\mathbb{C}$, por vezes o identificaremos com $\mathbb{R}^2$, e o círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. A aplicação $\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\tau(g, z) := gz$ é uma ação diferenciável. O campo induzido na identidade é

$$\delta\tau(1)(z) = \frac{d}{dt} \tau(\exp(2\pi i t), z)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\exp(2\pi i t) z)|_{t=0} = 2\pi i z.$$

Como a álgebra de Lie é unidimensional segue que os campos gerados pela ação infinitesimal $\delta\tau$ são múltiplos escalares de $\delta\tau(1)$. Vamos encontrar uma função Hamiltoniana $H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ para o campo $\delta\tau(1)$. Escreva $v = (\Re(v), \Im(v))$ e $2\pi i z = 2\pi(-\Im(z), \Re(z))$. Assim,

$$\begin{aligned} dH_z(v) &= \omega(\delta\tau(1)(z), v) \\ &= dx \wedge dy(\delta\tau(1)(z), v) \\ &= dx \wedge dy(2\pi i z, v) \\ &= -2\pi\Im(z)\Im(v) - 2\pi\Re(z)\Re(v) \\ &= -2\pi(\Re(z)\Re(v) + \Im(z)\Im(v)), \end{aligned}$$

ou seja, a matriz Jacobiana de H é dada por $(-2\pi\Re(z), -2\pi\Im(z))^\top$. Daí, concluímos que

$$H(z) = -\pi \cdot |z|^2 + \kappa$$

com $\kappa \in \mathbb{R}$ uma constante. Dessa forma, a ação τ é Hamiltoniana. $\diamond$

2.5 Parênteses de Poisson

Seja M uma variedade diferenciável. Um ***parênteses de Poisson***, em M, é uma aplicação $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que goza das seguintes propriedades:

1. $\mathbb{R}$-bilinearidade.
2. antissimétrica.
3. identidade de Jacobi:
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$
4. regra de Leibniz:
$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(M)$. O par $(M, \{\cdot,\cdot\})$ é chamado de ***variedade de Poisson***. Notemos que as condições de 1 a 3 acima implicam que $\{\cdot,\cdot\}$ é um colchete de Lie, ou seja, $C^\infty(M)$ tem estrutura de álgebra de Lie (de dimensão infinita). Além disso, a condição 4 significa que a aplicação $\{f,\cdot\}$ é uma derivação da álgebra de Poisson $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$.

O conceito de parênteses de Poisson não precisa ser definido apenas em $C^\infty(M)$. Toda aplicação que goza das propriedades listadas acima é chamada de parênteses de Poisson. Encontramos em [2, p.222] uma definição no contexto de anéis comutativos, embora os casos de interesse, neste trabalho, sejam os anéis de funções definidas em variedades.

Um dos interesses da Mecânica Clássica consiste em determinar quantidades conservadas de um sistema Hamiltoniano. Dadas $f, H \in C^\infty(M)$, dizemos que a função f é uma integral primeira de X_H se, e somente se, $X_H(f) = df(X_H) = 0$. Pela definição de campo Hamiltoniano, tal condição é equivalente a $\omega(X_f, X_H) = 0$. Assim, a forma simplética calculada nos campos Hamiltonianos induzidos pelas funções f e H parece ser um bom objeto para encontrarmos quantidades conservadas, motivando a definição que será dada a seguir.

Estamos inseridos no contexto de variedades simpléticas e, nesse caso, podemos definir de maneira natural, sem lançar mão de coordenadas, um parênteses de Poisson. Suponhamos, até o final da seção, que (M, ω) é uma variedade simplética. Considere

$$\{\cdot,\cdot\}_\omega : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

definida por

$$\{f, g\}_\omega \doteq \omega(X_f, X_g). \tag{2.15}$$

Quando não houver perigo de ambiguidade escreveremos simplesmente $\{f, g\}$. A unicidade de X_f e X_g nos garantem a boa definição da aplicação acima. Alternativamente, tem-se

$$\{f, g\} = -i_{X_f} \circ i_{X_g}\omega = -i_{X_f} \circ dg = -dg(X_f) = -X_f(g) = -\mathcal{L}_{X_f} g \tag{2.16}$$

onde na segunda igualdade usamos (2.10) e na quarta igualdade estamos considerando X_f como uma derivação em $C^\infty(M)$.

Lema 2.5.1. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$ *para quaisquer* $f, g \in C^\infty(M)$.

Demonstração: Pela Proposição D.3.12 temos que

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_X \circ \mathcal{L}_Y.$$

Como a derivada de Lie comuta com a derivada exterior segue, da igualdade (2.16), que

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= -d(\mathcal{L}_{X_f} g) \\ &= -\mathcal{L}_{X_f}(dg) \\ &= -\mathcal{L}_{X_f}(i_{X_g}\omega) \\ &= -(i_{[X_f,X_g]}\omega + i_{X_g}\mathcal{L}_{X_f}\omega) \\ &= i_{-[X_f,X_g]}\omega, \end{aligned}$$

na penúltima igualdade usamos que $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$ pois X_f é um campo Hamiltoniano (em particular, simplético). Pela unicidade devemos ter que $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$. □

Proposição 2.5.2. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética, $f, g, h \in C^\infty(M)$. A aplicação $\{\cdot,\cdot\}_\omega$, como definida em (2.15), é um parênteses de Poisson em M.*

Demonstração: A $\mathbb{R}$-bilinearidade e a antissimetria de $\{\cdot,\cdot\}$ são propriedades herdadas da forma simplética ω. Pelo item 2 do Lema 2.4.12 temos

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= \omega(X_f, X_{gh})\\ &= \omega(X_f, gX_h + hX_g)\\ &= g\omega(X_f, X_h) + h\omega(X_f, X_g)\\ &= g\{f,h\} + h\{f,g\}.\end{aligned}$$

Resta mostrarmos a identidade de Jacobi. Sejam X_f, X_g e X_h campos Hamiltonianos. Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned}X_f\omega(X_g, X_h) &= X_f(\{g,h\})\\ &= d(\{g,h\})(X_f)\\ &= i_{X_{\{g,h\}}}\omega(X_f)\\ &= -\omega(X_f, X_{\{g,h\}})\\ &= -\{f,\{g,h\}\}.\end{aligned}$$

A Proposição D.3.7, o Lema 2.5.1 e a antissimetria de $\{\cdot,\cdot\}$ implicam que

$$\begin{aligned}d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g)\\ &\quad -\omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f)\\ &= -\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} - \{h,\{f,g\}\}\\ &\quad -\{h,\{f,g\}\} + \{g,\{f,h\}\} + \{\{g,h\},f\}\\ &= -2(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,,\{f,g\}\}).\end{aligned}$$

Portanto, vale a identidade de Jacobi do parênteses de Poisson, já que a forma simplética ω é fechada. □

Corolário 2.5.3. *A aplicação*

$$(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}_\omega) \ni f \longmapsto X_f \in (\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$$

é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração: Consequência dos Lemas 2.4.12 e 2.5.1. □

O par $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ tem uma estrutura de álgebra de Lie de dimensão infinita. Às vezes $C^\infty(M)$ também é chamado de *álgebra de observáveis clássicos*.

Os resultados anteriores nos permitem concluir que a sequência de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} C^\infty(M) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M) \longrightarrow 0$$

é exata, onde ι é a inclusão e $\nu(f) = X_f$.

Exemplo 2.5.4. Seja (M,ω) como no Exemplo 2.4.5. Vamos determinar o parênteses de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\omega$. Para isso, utilizaremos que o produto misto se comporta bem com permutações cíclicas. Dados $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= \omega(X_f, X_g)\\
&= \langle N, X_f \times X_g\rangle\\
&= \langle N, (\nabla f \times N) \times (\nabla g \times N)\rangle\\
&= \langle \nabla g \times N, N \times (\nabla f \times N)\rangle\\
&= \langle N \times (\nabla f \times N), \nabla g \times N\rangle\\
&= \langle \langle N, N\rangle \nabla f - \langle N, \nabla f\rangle N, \nabla g \times N\rangle\\
&= \langle \nabla f, \nabla g \times N\rangle\\
&= \langle N, \nabla f \times \nabla g\rangle,
\end{aligned}$$

onde na sexta igualdade usamos a identidade de Grassmann. ◇

Exemplo 2.5.5. Calcularemos a expressão local do parênteses de Poisson com respeito a forma simplética do fibrado cotangente. Pelo Exemplo 2.4.6 temos localmente

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \quad \text{e} \quad X_g = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= \omega_{\mathrm{can}}(X_f, X_g)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\omega_{\mathrm{can}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\omega_{\mathrm{can}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x^j}\delta_i^j - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(-\delta_j^i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

que é a expressão encontrada, por exemplo, em [17, p.135] e [18, p.388]. $\diamond$

Um difeomorfismo de M em si mesmo induz, por meio do pullback, um isomorfismo no espaço vetorial $C^\infty(M)$. É interessante analisar sob quais condições o difeomorfismo induz um isomorfismo que preserva a estrutura de álgebra de Lie de $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}_\omega)$.

Dado $\phi : M \to M$ de classe C^∞, podemos considerar a aplicação $\phi^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dada por

$$\phi^*(f) = f \circ \phi.$$

Notemos que ϕ^* está bem definida e é uma transformação linear. Se ϕ for um difeomorfismo, então ϕ^* será um isomorfismo cuja inversa é dada por $(\phi^{-1})^*$.

Lema 2.5.6. *ϕ^* é um homomorfismo de álgebras de Lie se, e somente se, $(\phi^{-1})^*$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração: Suponha que ϕ^* é um homomorfismo de álgebras de Lie. Dados $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\{f, g\} = \{(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi, (g \circ \phi^{-1}) \circ \phi\} = \phi^*\{f \circ \phi^{-1}, g \circ \phi^{-1}\}.$$

Aplicando $(\phi^{-1})^*$ em ambos os lados dessa igualdade temos

$$(\phi^{-1})^*\{f, g\} = \{f \circ \phi^{-1}, g \circ \phi^{-1}\} = \{(\phi^{-1})^* f, (\phi^{-1})^* g\},$$

ou seja, $(\phi^{-1})^*$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. De maneira análoga mostra-se a recíproca. $\square$

Proposição 2.5.7. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão par. Se $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^2(M)$ são formas simpléticas em M tais que $\{\cdot,\cdot\}_{\omega_1} = \{\cdot,\cdot\}_{\omega_2}$, então $\omega_1 = \omega_2$.*

Demonstração: Suponhamos que $\{\cdot,\cdot\}_{\omega_1} = \{\cdot,\cdot\}_{\omega_2}$. Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Pela expressão (2.16) temos

$$\{f, g\}_{\omega_1} = -X_f^{\omega_1}(g) \;\text{ e }\; \{f, g\}_{\omega_2} = -X_f^{\omega_2}(g).$$

Daí, $X_f^{\omega_1}(g) = X_f^{\omega_2}(g)$ para todo $g \in C^\infty(M)$, implicando que $X_f^{\omega_1} = X_f^{\omega_2}$. Agora, tomemos $(U, (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n))$ uma carta local de Darboux em (M, ω_1). Notemos que $x^i, y^i \in C^\infty(M)$. O conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$$

é um referencial coordenado simplético de $\mathfrak{X}(M, \omega_1)$. Pela Proposição 2.4.7 temos que $X_{x^i}^{\omega_1} = -\frac{\partial}{\partial y^i}$ e $X_{y^i}^{\omega_1} = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Logo, vale $X_{y^i}^{\omega_1} = X_{y^i}^{\omega_2}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Usando a definição (2.15) obtemos

$$\begin{aligned} \omega_1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \omega_1(X_{y^i}^{\omega_1}, X_{y^j}^{\omega_1}) \\ &= \{y^i, y^j\}_{\omega_1} \\ &= \{y^i, y^j\}_{\omega_2} \\ &= \omega_2(X_{y^i}^{\omega_2}, X_{y^j}^{\omega_2}) \\ &= \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Raciocínio análogo nos permite concluir que

$$\omega_1\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \{x^i, x^j\}_{\omega_1} = \{x^i, x^j\}_{\omega_2} = \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

e

$$\omega_1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \{x^j, y^i\}_{\omega_1} = \{x^j, y^i\}_{\omega_2} = \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, o conjunto $\mathcal{B}$ também é um referencial local simplético para (M, ω_2) e, além disso, $\omega_1 = \omega_2$.

$\square$

Corolário 2.5.8. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 2.5.7 vale que* $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M, \omega_1) = \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M, \omega_2)$.

Proposição 2.5.9. *Sejam (M, ω) um variedade simplética e $\phi : M \to M$ um difeomorfismo. A aplicação ϕ é um simpletomorfismo se, e somente se, $\{\phi^* f, \phi^* g\} = \phi^*\{f, g\}$ para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$.*

Demonstração: Suponhamos que $\phi : M \to M$ é um simpletomorfismo. Pelo Lema 2.5.6 é suficiente mostrarmos a propriedade desejada para ϕ^{-1}. Dados $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\omega(\phi^{-1}(p)) &= \omega_{\phi^{-1}(p)}(X_f(\phi^{-1}(p)), X_g(\phi^{-1}(p))) \\ &= \omega_p(d\phi_p(X_f(\phi^{-1}(p))), d\phi_p(X_g(\phi^{-1}(p)))) \\ &= \omega_p(X_{f\circ\phi^{-1}}(p), X_{g\circ\phi^{-1}}(p)) \\ &= \{f \circ \phi^{-1}, g \circ \phi^{-1}\}_\omega(p), \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos ϕ preserva forma e na terceira igualdade usamos a Proposição 2.4.22. Reciprocamente, pela Proposição 2.5.7 é suficiente mostrarmos que

$\{\cdot,\cdot\}_{\phi^*\omega} = \{\cdot,\cdot\}_\omega$ pois o pullback $\phi^*\omega$ é uma forma simplética em M. Para quaisquer $p \in M$ e $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_{\phi^*\omega}(p) &= (\phi^*\omega)_p(X_f^{\phi^*\omega}(p), X_g^{\phi^*\omega}(p)) \\
&= \omega_{\phi(p)}(d\phi_p(X_f^{\phi^*\omega}(p)), d\phi_p(X_g^{\phi^*\omega}(p))) \\
&= \omega_{\phi(p)}(X^\omega_{f\circ\phi^{-1}}(\phi(p)), X^\omega_{g\circ\phi^{-1}}(\phi(p))) \\
&= \{f\circ\phi^{-1}, g\circ\phi^{-1}\}_\omega(\phi(p)) \\
&= \{f,g\}_\omega(p),
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a Proposição 2.4.22. □

Uma aplicação $\phi : (M_1,\omega_1) \to (M_2,\omega_2)$, entre variedades simpléticas, é uma ***aplicação de Poisson*** quando preserva o parênteses de Poisson, isto é,

$$\{f,g\}_{\omega_2} \circ \phi = \{f\circ\phi, g\circ\phi\}_{\omega_1}$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M_2)$. A Proposição 2.5.9 nos garante que todo simpletomorfismo de uma variedade em si mesma é uma aplicação de Poisson. Uma maneira alternativa, usando pullback, de escrevermos a igualdade acima é $\phi^*\{f,g\}_{\omega_2} = \{\phi^*f, \phi^*g\}_{\omega_1}$.

Dinâmica

Proposição 2.5.10. *Seja (M,ω,H) um sistema Hamiltoniano. Se $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ é um sistema de coordenadas local de Darboux, então*

$$\{q^i,H\}_\omega = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad e \quad \{p_i,H\}_\omega = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.4.7 o campo X_H é localmente dado por $X_H = \sum_i(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i})$. Usando a definição (2.15) do parênteses de Poisson e que o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\}$ é um referencial coordenado simplético temos que

$$\begin{aligned}
\{q^i,H\}_\omega &= \omega(X_{q^i}, X_H) \\
&= -\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q^j}\right) + \sum_j \frac{\partial H}{\partial q^j}\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \\
&= \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \\
&= \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta_{ji} \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_j}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga concluímos a outra igualdade. □

A ***equação do movimento*** para um sistema Hamiltoniano (M, ω, H) é a equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = X_H(x),$$

onde $x \in M$ e X_H é o campo Hamiltoniano associado a função H. Abaixo veremos como esse conceito pode ser descrito em termos de um sistema de coordenadas de Darboux e do parênteses de Poisson.

Proposição 2.5.11. *Sejam (M, ω, H) um sistema Hamiltoniano e $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ o campo vetorial associado a função H. São equivalentes:*

1. $\frac{d\gamma}{dt} = X_H(\gamma(t))$ *onde γ é a curva integral do campo Hamiltoniano X_H.*
2. *num sistema de coordenada de Darboux valem*
$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad e \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{2.17}$$
3. *num sistema de coordenada de Darboux valem*
$$\frac{dq^i}{dt} = \{q^i, H\}_\omega \quad e \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}_\omega.$$

Demonstração: Seja γ a curva integral do campo X_H. Considere (U, ϕ) uma carta de Darboux com funções coordenadas (q^i, p_i). Escreva $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$. Então, em $\gamma^{-1}(U)$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = X_H(\gamma(t)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_i \frac{dq^i}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ \text{ e } \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Mostremos que 2 é equivalente a 3. De fato, pela Proposição 2.5.10 concluímos que

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ \text{ e } \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \Longleftrightarrow \{q^i, H\}_\omega = \frac{dq^i}{dt} \ \text{ e } \ \{p_i, H\}_\omega = \frac{dp_i}{dt}.$$

□

Observação 2.5.12. Em livros de Física (vide [17, p.132]) as equações (2.17) são chamadas ***equações de Hamilton***. ◇

Integrabilidade

A linguagem estabelecida nessa seção nos permite afirmar que uma função é constante ao longo das curvas integrais do campo Hamiltoniano da outra se, e somente se, o parênteses de Poisson delas comutam. Em outras palavras, uma função $f \in C^\infty(M)$ é uma integral primeira do campo Hamiltoniano X_H se, e somente se, $\{f, H\}_\omega = 0$.

Dizemos que $f_1, \ldots, f_s \in C^\infty(M)$ estão em ***involução*** quando $\{f_i, f_j\}_\omega = 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Nesse caso, o subespaço

$$\mathrm{ger}\{X_{f_1}(p), \ldots, X_{f_s}(p)\},$$

de T_pM, é isotrópico, para todo $p \in M$.

Proposição 2.5.13. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $f_1, \ldots, f_s \in C^\infty(M)$ funções em involução. Se a aplicação $F : M \to \mathbb{R}^s$, com $F = (f_1, \ldots, f_s)$, é uma submersão, então as fibras de F são subvariedades coisotrópicas de M.*

Demonstração: A hipótese de F ser submersão nos garante que as fibras de F são subvariedades mergulhadas de codimensão s. Tomemos N uma fibra de F e $p \in N$. As funções coordenadas de F são constantes numa vizinhança de p. Assim, para todo $v \in T_pN$ temos

$$0 = d(f_i)_p(v) = \omega_p(X_{f_i}(p), v)$$

para $i \in \{1, \ldots, s\}$. Logo, $\mathcal{B} = \{X_{f_1}(p), \ldots, X_{f_s}(p)\}$ é um subconjunto de $(T_pN)^\perp$, onde o ortogonal diz respeito a forma simplética ω_p. Mostraremos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Com efeito, sejam $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 X_{f_1}(p) + \cdots + a_s X_{f_s}(p) = 0.$$

Para todo $v \in T_xM$, tem-se

$$a_1 \omega_p(X_{f_1}(p), v) + \cdots + a_s \omega_p(X_{f_s}(p), v) = \omega_p(0, v) = 0.$$

Daí,

$$a_1 d(f_1)_p + \cdots + a_s d(f_s)_p = 0,$$

implicando que $a_1 = \cdots = a_s = 0$ pois F tem posto máximo, já que é uma submersão. Isso prova que $\mathcal{B}$ é linearmente independente e, consequentemente, é uma base de $(T_pN)^\perp$. Como as funções f_i estão em involução segue que todos $X_{f_i}(p)$ são ortogonais entre si. Daí, $\mathcal{B}$ é um conjunto ortogonal e, pela Proposição A.2.3, $X_{f_i}(p) \in ((T_pN)^\perp)^\perp = T_pN$. Portanto, N é uma subvariedade coisotrópica de M. $\square$

A recíproca da Proposição 2.5.13 também é válida, isto é, se (M,ω) é uma variedade simplética e $N \subseteq M$ é uma subvariedade coisotrópica, então todo ponto de N tem uma vizinhança U, em M, e uma submersão $F : U \to \mathbb{R}^s$ cujas funções coordenadas estão em involução (vide Proposition 3.24 de [19, p.41]).

Apresentaremos uma generalização da Proposição 2.4.23. Faremos, antes, uma definição.

Definição 2.5.14. Uma subvariedade $N \subseteq M$ é dita ***invariante*** pelo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se para todo $p \in M$ temos $X(p) \in T_pN \subseteq T_pM$.

Teorema 2.5.15. *Sejam (M,ω,H) um sistema Hamiltoniano e $f_1,\dots,f_k \in C^\infty(M)$ integrais primeiras de X_H. Considere $F = (f_1,\dots,f_k) : M \to \mathbb{R}^k$ e $c \in \mathbb{R}^k$ um valor regular de F. A pré-imagem*

$$\Sigma_c := F^{-1}(c)$$

é uma subvariedade mergulhada, de M, de codimensão k que é invariante pelo campo X_H. Além disso, existe uma forma volume μ_c em Σ_c invariante.

Demonstração: Vide [7]. □

Definição 2.5.16. Dizemos que um sistema Hamiltoniano (M,ω,H) é ***Liouville integrável*** quando existem funções $H_1,\dots,H_n \in C^\infty(M)$, com $n = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M$, que têm as seguintes propriedades:

1. $H = H_1$.
2. $\{H_i, H_j\} = 0$ para quaisquer $i,j \in \{1,\dots,n\}$.
3. a n-forma diferencial $dH_1 \wedge \cdots \wedge dH_n$ não se anula em um subconjunto aberto denso em M.

Às vezes considera-se $\mathcal{H} : (M,\omega) \to \mathbb{R}^n$ e escreve-se $\mathcal{H} = (H_1,\dots,H_n)$. A tripla $(M,\omega,\mathcal{H})$ denotará um sistema integrável. Na literatura a definição acima pode encontrada com a nomenclatura ***completamente integrável*** (vide [1, 20]). Aqui, estamos adotando a convenção de [5, 14].

Observação 2.5.17. 1. Denotaremos por $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$ o subconjunto de M da condição 3 acima. Para cada $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{H}}$, as colunas da matriz

$$\begin{pmatrix} d(H_1)_x & \cdots & d(H_n)_x \end{pmatrix},$$

que é o Jacobiano de $\mathcal{H}$, são linearmente independentes. Isso implica que a aplicação $d\mathcal{H}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora. Assim, a restrição $\mathcal{H} : \mathcal{U}_{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão com domínio num conjunto aberto e denso de M.

2. Pela Proposição 2.5.13, as fibras de $\mathcal{H}$ são subvariedades coisotrópicas de M.

$\diamond$

Teorema 2.5.18 (Liouville). *Seja $(M, \omega, \mathcal{H})$ um sistema integrável com $\mathcal{H} = (H_1, \ldots, H_n)$. Se $p \in M$ um ponto regular de $\mathcal{H}$, então existem um aberto U de p e funções $G^1, \ldots, G^n \in C^\infty(U)$ que completam $H_1, \ldots, H_n$ a um sistema de coordenada de Darboux. Nessas coordenadas, o fluxo ϕ_t^i do campo Hamiltoniano X_{H_i} é dado por*

$$\phi_t^i(G, H) = (G^1, \ldots, G^i + t, \ldots, G^n, H_1, \ldots, H_n).$$

Demonstração: Vide [14, 585] ou [6, p.135]. $\square$

Teorema 2.5.19 (Arnold-Jost). *Sejam $(M, \omega, \mathcal{H})$ um sistema integrável e Σ um conjunto de nível de $\mathcal{H}_r$. Se Σ é compacto, então Σ é difeomorfo a $\mathbb{T}^n$. Se Σ não é compacto e as restrições dos campos Hamiltonianos X_{H_i} a Σ são completos, então Σ é difeomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $0 \leq k < n$.*

Demonstração: Vide [14, p.586]. $\square$

3 Simetrias

Neste capítulo, serão estudados alguns conceitos essenciais para trabalharmos com sistemas Hamiltonianos definidos em órbitas (co)adjuntas de grupos de Lie clássicos. Veremos que quando o grupo é compacto ou semissimples as órbitas (co)adjuntas admitem naturalmente uma estrutura de variedade simplética e o dual da sua álgebra de Lie torna-se uma variedade de Poisson. Em seguida, discutiremos um instrumento que nos permite comparar a ação de um grupo de Lie numa variedade simplética com a representação co-adjunta, conhecido como aplicação momento (vide [7]). Por fim, discutiremos algumas propriedades importantes dos chamados Hamiltonianos coletivos, sendo esses definidos através da transposta de uma aplicação momento (vide [2,3] para uma exposição sistemática).

3.1 Órbitas Coadjuntas e a Forma KKS

Uma maneira de construirmos variedades simpléticas e ações Hamiltonianas é através das representações coadjuntas de um grupo de Lie (vide [21, p.331], [8, p.212] e [14, p.377]). Em cada órbita coadjunta, pode-se construir, de forma totalmente intrínseca, uma forma simplética tal que a ação coadjunta é Hamiltoniana. Ao longo dessa seção denotaremos por τ tanto a ação coadjunta quanto a ação adjunta nas respectivas órbitas, o contexto deixará explícito qual caso estamos considerando. No Apêndice C é feita uma exposição de alguns conceitos e resultados que serão utilizados a partir de agora.

Teorema 3.1.1. *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e $\mathcal{O}(\lambda)$ uma órbita coadjunta de um elemento $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. A forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O}(\lambda))$ dada por*

$$\omega_\alpha(\mathrm{ad}^*(X)\alpha, \mathrm{ad}^*(Y)\alpha) = \alpha[X, Y],$$

para cada $\alpha \in \mathcal{O}(\lambda)$, é uma forma simplética. Em particular, as órbitas das ações coadjuntas são variedades simpléticas.

Demonstração: Denotaremos por $\tau : G \times \mathcal{O}(\lambda) \to \mathcal{O}(\lambda)$ a ação coadjunta. Os elementos de $T_\alpha\mathcal{O}(\lambda)$ são da forma $\delta\tau(X)\alpha = \mathrm{ad}^*(X)\alpha$ com $X \in \mathfrak{g}$, veja a Proposição C.2.9. Vamos argumentar que ω_α é uma forma simplética em $T_\alpha\mathcal{O}(\lambda)$.

- ω_α está bem definida. Sejam $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ tais que $\mathrm{ad}^*(X_1)\alpha = \mathrm{ad}^*(X_2)\alpha$ e

$\mathrm{ad}^*(Y_1)\alpha = \mathrm{ad}^*(Y_2)\alpha$. Daí,

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(\mathrm{ad}^*(X_1)\alpha, \mathrm{ad}^*(Y_1)\alpha) &= \alpha[X_1, Y_1] \\
&= \alpha \circ \mathrm{ad}(X_1)(Y_1) \\
&= \alpha \circ \mathrm{ad}(X_2)(Y_1) \\
&= -\alpha \circ \mathrm{ad}(Y_1)(X_2) \\
&= -\alpha \circ \mathrm{ad}(Y_2)(X_2) \\
&= \alpha \circ \mathrm{ad}(X_2)(Y_2) \\
&= \alpha[X_2, Y_2] \\
&= \omega_\alpha(\mathrm{ad}^*(X_2)\alpha, \mathrm{ad}^*(Y_2)\alpha)
\end{aligned}$$

como afirmado.

- ω_α é antissimétrica, uma vez que o colchete é antissimétrico e α é um funcional linear.
- ω_α é não degenerada. Seja $v \in T_\alpha\mathcal{O}(\lambda)$ não nulo. Existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $v = \mathrm{ad}^*(X)\alpha$ é um funcional linear não nulo. Logo, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que

  $$\mathrm{ad}^*(X)\alpha(Y) = \alpha \circ \mathrm{ad}(X)(Y) = \alpha[X, Y] \neq 0.$$

  Daí, $\omega_\alpha(v, \mathrm{ad}^*(Y)\alpha) \neq 0$.

Resta mostrarmos que a forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O}(\lambda))$ é fechada. A ideia consiste em garantirmos que o pullback de ω por uma submersão de G em $\mathcal{O}(\lambda)$ nos fornece uma forma diferencial de grau 2 que é exata. Para isso, sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Definindo

$$X^e(g) = d(E_g)_1(X) \quad \text{e} \quad Y^e(g) = d(E_g)_1(Y)$$

para todo $g \in G$ obtemos elementos de $\mathfrak{X}(G)$, invariantes à esquerda, que na identidade coincidem com X e Y, respectivamente. Consideremos também

$$\alpha^e(g) = d(E_{g^{-1}})_g^*\alpha$$

que nos fornece um elemento de $\Omega^1(G)$. As aplicações $\alpha^e \cdot X^e, \alpha^e \cdot Y^e : G \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\alpha^e \cdot X^e(g) := \alpha^e(g)(X^e(g)) \qquad \text{e} \qquad \alpha^e \cdot Y^e(g) := \alpha^e(g)(Y^e(g))$$

são constantes. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha^e \circ X^e(g) &= \alpha^e(g)(X^e(g)) \\
&= d(E_{g^{-1}})_g^*\alpha(d(E_g)_1(X)) \\
&= \alpha(d(E_{g^{-1}})_g \circ d(E_g)_1(X)) \\
&= \alpha(X)
\end{aligned}$$

e de maneira análoga a afirmação segue para $\alpha^e \cdot Y^e$. Pela Proposição D.3.7 temos

$$\begin{aligned} d\alpha^e(X^e, Y^e) &= X^e\alpha^e(Y^e) - Y^e\alpha^e(X^e) - \alpha^e([X^e, Y^e]) \\ &= -\alpha^e([X^e, Y^e]). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Seja $\tau^\alpha : G \to \mathcal{O}(\lambda)$ a aplicação definida por $\tau^\alpha(g) = \mathrm{Ad}^*(g)\alpha$. Afirmamos que τ^α é uma submersão e que o pullback de ω por τ^α coincide com $-d\alpha^e$. Por simplicidade, escreva $\beta = \mathrm{Ad}^*(g)\alpha = \tau^\alpha(g)$. Notemos, inicialmente, que

$$\begin{aligned} d(\tau^\alpha)_g(X^e(g)) &= d(\tau^\alpha)_g \circ d(E_g)_1(X) \\ &= d(\tau^\alpha \circ E_g)_1(X) \\ &= \frac{d}{dt}\tau^\alpha \circ E_g(\exp(tX))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*(g\exp(tX))\alpha|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*(g) \circ \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\alpha|_{t=0} \\ &= d(\tau_g)_\alpha \circ \frac{d}{dt}\tau(\exp(tX), \alpha)|_{t=0} \\ &= d(\tau_g)_\alpha(\mathrm{ad}^*(X)\alpha) \\ &= \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)X)\,\mathrm{Ad}^*(g)\alpha \\ &= \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)X)\beta, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a Proposição C.2.8 (aqui estamos fazendo $p = \beta$ e $\tau_{g^{-1}}(p) = \alpha$). Tomemos um elemento arbitrário de $T_\beta\mathcal{O}(\lambda)$, digamos $\mathrm{ad}^*(Z)\beta$ onde $Z \in \mathfrak{g}$. Aplicando a igualdade anterior para $Z_0 = \mathrm{Ad}(g^{-1})Z \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned} d(\tau^\alpha)_g(Z_0^e(g)) &= \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)Z_0)\beta \\ &= \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(g^{-1})Z)\beta \\ &= \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(gg^{-1})Z)\beta \\ &= \mathrm{ad}^*(Z)\beta, \end{aligned}$$

ou seja, a derivada $d(\tau^\alpha)_g : T_gG \to T_\beta\mathcal{O}(\lambda)$ é sobrejetora. Logo, a aplicação parcial τ^α é realmente uma submersão. Assim,

$$\begin{aligned} ((\tau^\alpha)\omega)^*_g(X^e(g), Y^e(g)) &= \omega_{\tau^\alpha(g)}(d(\tau^\alpha)_g(X^e(g)), d(\tau^\alpha)_g(Y^e(g))) \\ &= \omega_\beta(\mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)X)\beta, \mathrm{ad}^*(\mathrm{Ad}(g)X)\beta) \\ &= \beta([\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y]) \\ &= \alpha(\mathrm{Ad}(g^{-1})[\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y]) \\ &= \alpha([X,Y]) \\ &= \alpha \circ d(E_{g^{-1}})_g \circ d(E_g)_1([X,Y]) \\ &= \alpha^e(g)([X^e(g), Y^e(g)] \\ &= -d\alpha^e_g(X^e(g), Y^e(g)) \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (3.1). Pelo Corolário D.3.6 temos

$$(\tau^\alpha)^* d\omega = d((\tau^\alpha)^*\omega) = -d(d\alpha^e) = 0.$$

Como τ^α é uma submersão segue que $d\omega$ é fechado. Portanto, a forma ω é simplética. $\square$

A forma simplética do Teorema 3.1.1 é denominada ***forma de Kirillov-Kostant-Souriau (KKS)***. Advertimos que algumas referências costumam defini-la com um sinal contrário ao que fizemos. Para mais detalhes consulte [14, p.377]. Se houver necessidade de destacá-la usaremos a notação $\omega_{\mathcal{O}(\lambda)}$.

Proposição 3.1.2. *Seja $\mathcal{O}(\lambda) \subseteq \mathfrak{g}^*$ uma órbita coadjunta. Se $X \in \mathfrak{g}$, então o campo induzido $\delta\tau(X)$ é Hamiltoniano com função hamiltoniana $f_X : \mathcal{O}(\lambda) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_X(\alpha) = \alpha(X)$$

para todo $\alpha \in \mathcal{O}(\lambda)$.

Demonstração: A aplicação f_X, como definida no enunciado, é a restrição de uma transformação linear. Seja $d(f_X)_\alpha : T_\alpha\mathcal{O}(\lambda) \to \mathbb{R}$ a derivada de f_X no ponto $\alpha \in \mathcal{O}(\lambda)$. O espaço tangente $T_\alpha\mathcal{O}(\lambda)$ é dado como na Proposição C.2.7. Assim,

$$\begin{aligned} d(f_X)_\alpha(\mathrm{ad}^*(Y)\alpha) &= f_X(\mathrm{ad}^*(Y)\alpha) \\ &= \mathrm{ad}^*(Y)\alpha(X) \\ &= -\alpha(\mathrm{ad}(Y)X) \\ &= \alpha[X,Y] \\ &= \omega_\alpha(\mathrm{ad}^*(X)\alpha, \mathrm{ad}^*(Y)\alpha) \end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Observação 3.1.3. A construção da forma KKS pode ser feita de maneira diferente de como foi argumentado no Teorema 3.1.1 através do conceito de espaço homogêneo. Nesse caso, é suficiente definirmos a forma simplética em $T_\lambda\mathcal{O}(\lambda)$ e depois transladarmos para os outros pontos da órbita. Para mais detalhes consulte, por exemplo, [21]. $\diamond$

No que segue veremos que a forma KKS induz uma estrutura simplética nas órbitas adjuntas quando o grupo tem algumas propriedades adicionais. Se G é compacto, então existe, pela Proposição 4.1 de [21, p.78], um produto interno Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Por outro lado, se G é semissimples, então a forma de Cartan-Killing é uma forma não degenerada Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Em ambos os casos, conseguimos identificar $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ de maneira canônica. De maneira mais geral, vale o resultado abaixo.

Proposição 3.1.4. *Seja G um grupo de Lie tal que sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem uma forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle$ não degenerada que é Ad-invariante.*

1. *Existe uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}^*$ que a torna canonicamente isomorfa a $\mathfrak{g}$. Em particular, para cada $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, existe um único $\Lambda \in \mathfrak{g}$ tal que $\lambda = \langle\Lambda, -\rangle$.*

2. *As órbitas coadjuntas são difeomorficamente levadas em órbitas adjuntas.*

3. *A órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda) \subseteq \mathfrak{g}$ tem estrutura de variedade simplética e a forma simplética $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O}(\Lambda))$ num ponto $\Xi \in \mathcal{O}(\Lambda)$ é dada por*

$$\omega_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi, \mathrm{ad}(Y)\Xi) = \langle\Xi, [X,Y]\rangle$$

   para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Denotaremos por $\flat : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ a aplicação dada por

$$X^\flat \equiv \flat(X) := \langle X, -\rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. A bilinearidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ implica que $\flat$ é uma transformação linear. Pelo Teorema da Representação de Riesz, dado $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, existe um único $\Lambda \in \mathfrak{g}$ tal que $\lambda = \flat(\Lambda) = \langle\Lambda, -\rangle$. A aplicação $\sharp : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ dada por $\sharp(\lambda) = \Lambda$ é a inversa de $\flat$ e com ela podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}^*$ da seguinte forma

$$[\alpha, \beta] := \flat[\sharp(\alpha), \sharp(\beta)] = \flat[A, B]$$

onde $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$ e $A = \sharp(\alpha), B = \sharp(\beta) \in \mathfrak{g}$. Tal aplicação é, por construção, bilinear e antissimétrica. Para concluirmos que trata-se de um colchete de Lie precisamos argumentar a validade da identidade de Jacobi. De fato, se $\alpha = \flat(A), \beta = \flat(B), \gamma = \flat(C) \in \mathfrak{g}^*$, então

$$[\alpha, [\beta, \gamma]] = \flat[A, \sharp[\beta, \gamma]] = \flat[A, \sharp \circ \flat[B, C]] = \flat[A, [B, C]].$$

Logo, a linearidade de $\flat$ e a identidade de Jacobi do colchete em $\mathfrak{g}$ nos permitem concluir que $\mathfrak{g}^*$ é uma álgebra de Lie. Além disso, com essa estrutura, $\flat$ é um homomorfismo de álgebras de Lie pois

$$\flat[A,B] = \flat[\sharp \circ \flat(A), \sharp \circ \flat(B)] = \flat[\sharp(\alpha), \sharp(\beta)] = [\alpha, \beta] = [\flat(A), \flat(B)]$$

Isso mostra o item 2.

Afirmamos que

$$\flat(\mathcal{O}(\Lambda)) = \mathcal{O}(\lambda).$$

De fato, para quaisquer $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$ temos

$$\flat(\mathrm{Ad}(g)\Lambda)X = \langle \mathrm{Ad}(g)\Lambda, X\rangle = \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle = \lambda \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(X) = \mathrm{Ad}^*(g)\lambda(X),$$

onde na segunda igualdade usamos que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é Ad-invariante. Logo,

$$\flat(\mathrm{Ad}(g)\Lambda) = \mathrm{Ad}^*(g)\lambda. \tag{3.2}$$

Visto que $\flat$ é um isomorfismo linear segue que as órbitas adjuntas são levadas difeomorficamente nas órbitas coadjuntas.

Para mostrar o item 3 defina $\psi := \flat|_{\mathcal{O}(\Lambda)} : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathcal{O}(\lambda)$. Pela Proposição C.2.7 o espaço tangente $T_\Xi\mathcal{O}(\Lambda)$, com $\xi = \flat(\Xi) \in \mathfrak{g}^*$, é da forma $\mathrm{ad}(X)\Xi$ com $X \in \mathfrak{g}$. Afirmamos que a derivada $d\psi_\Xi : T_\Xi\mathcal{O}(\Lambda) \to T_\xi\mathcal{O}(\lambda)$, sendo $\xi = \flat(\Xi) \in \mathfrak{g}^*$, é tal que

$$d\psi_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi) = \mathrm{ad}^*(X)\xi \tag{3.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. De fato,

$$\begin{aligned} d\psi_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi) &= \frac{d}{dt}\psi \circ \mathrm{Ad}(\exp(tX))\Xi|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\xi|_{t=0} \\ &= \mathrm{ad}^*(X)\xi, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos (3.2). Na órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$, com $\Lambda \in \mathfrak{g}$, definimos a forma $\omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}$ através do pullback $\psi^*\omega_{\mathcal{O}(\lambda)}$, onde $\lambda = \flat(\Lambda)$. Assim, $\omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}$ é uma forma simplética. Pela igualdade (3.3) temos

$$\begin{aligned} \omega_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi, \mathrm{ad}(Y)\Xi) &= \omega_\xi(d\psi_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi), d\psi_\Xi(\mathrm{ad}(Y)\Xi)) \\ &= \omega_\xi(\mathrm{ad}^*(X)\xi, \mathrm{ad}^*(Y)\xi) \\ &= \xi[X,Y] \\ &= \langle \Xi, [X,Y]\rangle, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

Corolário 3.1.5. *Se G é compacto ou semissimples, então as órbitas adjuntas são variedades simpléticas.*

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de órbitas adjuntas que admitem estrutura simplética. Indicamos a referência [22, p.20] para outros exemplos interessantes de órbitas.

Exemplo 3.1.6. Sejam $\mathrm{U}(n)$ o grupo da matrizes unitárias e $\mathfrak{u}(n)$ sua álgebra de Lie. Considere $\Lambda = \mathrm{diag}(i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n) \in \mathfrak{u}(n)$ e a seguinte enumeração

$$\underbrace{\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n_1}}_{k_1} > \underbrace{\lambda_{n_1+1} = \cdots = \lambda_{n_2}}_{k_2} > \cdots > \underbrace{\lambda_{n_{r-1}} = \cdots = \lambda_n}_{k_r}$$

com $k_1 + \cdots + k_r = n$, sendo k_1 a multiplicidade algébrica de λ_1, k_2 a multiplicidade algébrica de λ_{n_1+1} e assim sucessivamente. A órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$ é identificada com o espaço homogêneo

$$\frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(k_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(k_r)}.$$

Com efeito, para mostrarmos isso é necessário determinarmos a isotropia de Λ (vide [23, p.87]). Lembremos que no contexto de grupos matriciais a representação adjunta coincide com a conjugação. Seja $g \in \mathrm{U}(n)$ arbitrário. Para quaisquer $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$(g\Lambda)_{jk} = \sum_{l=1}^{n} g_{jl}\Lambda_{lk} = \sum_{l=1}^{n} g_{jl} i\lambda_l \delta_{lk} = i\lambda_k g_{jk}$$

e

$$(\Lambda g)_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \Lambda_{jl} g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} i\lambda_j \delta_{jl} X_{lk} = i\lambda_j g_{jk}.$$

Assim, tem que valer a seguinte condição $(\lambda_j - \lambda_k)g_{jk} = 0$. Isso significa que a matriz g é da forma

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{}}_{k_1} & & & \\ & \underbrace{\boxed{}}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\boxed{}}_{k_r} \end{pmatrix}$$

com zero fora de cada bloco. Mais ainda, cada bloco da diagonal é uma matriz unitária, ou seja, cada bloco se pertence a um certo $\mathrm{U}(k_j)$. Logo, a isotropia de Λ é dada por $\mathrm{U}(k_1) \times$

$\cdots \times \mathrm{U}(k_r)$. A órbita $\mathcal{O}(\Lambda)$ é, pela Proposição 3.1.4, uma variedade simplética, já que $\mathrm{U}(n)$ é compacto. Vejamos, agora, um caso particular. Se $n = 3$, então

Λ	Órbita Adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$\{\mathrm{I}_3\}$
$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$	$\mathrm{U}(3)/\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$	$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3) \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^2$
$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$	$\mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^3) = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$

Logo, as órbitas não triviais são variedades flags (a identificação das Grassmannianas com os espaços projetivos é feita no Exemplo C.2.10). $\diamond$

.

Proposição 3.1.7. *Sejam G um grupo de Lie compacto e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie munida da topologia induzida por um produto interno Ad-invariante. Então, a órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$ é uma subvariedade mergulhada compacta de $\mathfrak{g}$.*

Proposição 3.1.8. *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno Ad-invariante em $\mathfrak{g}$, então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é antissimétrica com respeito a ad.*

Demonstração: Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\langle \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y, \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z \rangle = \langle Y, Z \rangle.$$

Derivando a igualdade anterior em $t = 0$ obtemos

$$\langle \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0}, Z \rangle + \langle Y, \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tX))Z|_{t=0} \rangle = 0.$$

Daí,

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z \rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}(X)Z \rangle$$

como afirmado. $\square$

Proposição 3.1.9. *Sejam G um grupo de Lie compacto, $\mathcal{O}(\Lambda) \subseteq \mathfrak{g}$ uma órbita adjunta e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Os campos induzidos $\delta\tau(X) = \mathrm{ad}(X)$, com $X \in \mathfrak{g}$, são Hamiltonianos com função Hamiltoniana $f_X : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_X(Y) = \langle X, Y \rangle$$

para todo $Y \in \mathcal{O}(\Lambda)$.

Demonstração: A aplicação f_X, como definida no enunciado, é a restrição de uma transformação linear e, portanto, $d(f_X)_\Xi = f_X$. Logo, pela Proposição 3.1.8 e a expressão da forma simplética dada na Proposição 3.1.4 temos

$$\begin{aligned} d(f_X)_\Xi(\mathrm{ad}(Y)\Xi) &= \langle X, \mathrm{ad}(Y)\Xi\rangle \\ &= -\langle \mathrm{ad}(Y)X, \Xi\rangle \\ &= -\langle [Y,X], \Lambda\rangle \\ &= \langle [X,Y], \Xi\rangle \\ &= \langle \Xi, [X,Y]\rangle \\ &= \omega_\Xi(\mathrm{ad}(X)\Xi, \mathrm{ad}(Y)\Xi) \end{aligned}$$

para quaisquer $Y \in \mathfrak{g}$ e $\Xi \in \mathcal{O}(\Lambda)$. □

3.2 Parênteses de Poisson em $\mathfrak{g}^*$

Suponha que $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto e conexo G. Construiremos em $\mathfrak{g}^*$ uma estrutura de variedade de Poisson de maneira livre de coordenadas.

Sejam $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$. A derivada dF_ξ é uma transformação linear de $T_\xi\mathfrak{g}^*$ em $\mathbb{R}$, ou seja, um elemento do dual $T^*_\xi\mathfrak{g}^*$. Devido a $\mathfrak{g}^*$ admitir uma estrutura de espaço vetorial temos que o espaço cotangente $T^*_\xi\mathfrak{g}^*$ é isomorfo a $\mathfrak{g}^{**}$. Assim, existe um único $\nabla F(\xi) \in \mathfrak{g}$ tal que

$$dF_\xi(\eta) = \eta(\nabla F(\xi)) \tag{3.4}$$

para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Dados $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, define-se

$$\{F_1, F_2\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi) \doteq \xi([\nabla F_1(\xi), \nabla F_2(\xi)]) \tag{3.5}$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Proposição 3.2.1. $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}^*}$ *define um parênteses de Poisson em* $\mathfrak{g}^*$.

Demonstração: Devemos verificar as propriedades da página 37. A bilinearidade sobre $\mathbb{R}$ e a antissimetria são consequências do colchete $[\cdot,\cdot]$. Devemos mostrar a propriedade de derivação e a identidade de Jacobi. Sejam $F_1, F_2, F_3 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Por construção, $\nabla(F_2F_3)(\xi)$ é o único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que

$$d(F_2F_3)_\xi(\eta) = \eta(\nabla(F_2F_3)(\xi))$$

para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Pela regra de Leibniz da derivada, tem-se

$$d(F_2F_3)_\xi = (dF_2)_\xi F_3(\xi) + F_2(\xi)(dF_3)_\xi.$$

Daí,

$$\eta(\nabla F_2(\xi)\cdot F_3(\xi)+F_2(\xi)\cdot\nabla F_3(\xi))=\eta(\nabla(F_2F_3)(\xi))$$

para todo $\eta\in\mathfrak{g}^*$, implicando que

$$\begin{aligned}\{F_1,F_2F_3\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi) &= \xi([\nabla F_1(\xi),\nabla(F_2F_3)(\xi)])\\ &= \xi([\nabla F_1(\xi),\nabla F_2(\xi)\cdot F_3(\xi)])+\xi([\nabla F_1(\xi),\nabla F_3(\xi)\cdot F_2(\xi)])\\ &= F_3(\xi)\{F_1,F_2\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi)+F_2(\xi)\{F_1,F_3\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi).\end{aligned}$$

A identidade de Jacobi pode ser mostrada inserindo coordenadas, consulte [24]. □

Definição 3.2.2. Seja $(M,\{\cdot,\cdot\})$ uma variedade de Poisson. Uma função $C\in C^\infty(M)$ é chamada de ***função de Casimir*** quando $\{C,F\}=0$ para toda $F\in C^\infty(M)$.

Proposição 3.2.3. *Sejam G um grupo de Lie conexo e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Uma função em $\mathfrak{g}^*$ é* Ad^**-invariante se, e somente se, é uma função de Casimir.*

Demonstração: Suponhamos que $C\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ é tal que $C\circ\mathrm{Ad}^*(g)=C$ para todo $g\in G$. Queremos mostrar que C é uma função de Casimir. Sejam $F\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $X\in\mathfrak{g}$. Dados $t\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\mathfrak{g}^*$, tem-se

$$C\circ\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\xi=C(\xi).$$

Derivando a expressão acima em $t=0$ obtemos

$$0=\frac{d}{dt}C\circ\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\xi|_{t=0}=dC_\xi(\mathrm{ad}^*(X)\xi).$$

Em particular, tomando $X=\nabla F(\xi)$ temos

$$\begin{aligned}0 &= dC_\xi(\mathrm{ad}^*(\nabla F(\xi))\xi)\\ &= \mathrm{ad}^*(\nabla F(\xi))\xi(\nabla C(\xi))\\ &= -\xi(\mathrm{ad}(\nabla F(\xi))\nabla C(\xi))\\ &= -\xi([\nabla F(\xi),\nabla C(\xi)])\\ &= \xi([\nabla C(\xi),\nabla F(\xi)])\\ &= \{C,F\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi)\end{aligned}$$

A igualdade acima juntamente com a arbitrariedade de F nos garantem que C é uma função de Casimir.

Reciprocamente, seja $C\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ uma função de Casimir. Fixemos $X\in\mathfrak{g}$. A aplicação $F_X:\mathfrak{g}^*\to\mathbb{R}$ dada por

$$F_X(\xi):=\xi(X)$$

é um funcional linear. Afirmamos que

$$\nabla F_X(\xi) = X$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Com efeito, pela linearidade de F_X e a definição de $\nabla F_X(\xi)$ temos que

$$\eta(X) = F_X(\eta) = d(F_X)_\xi(\eta) = \eta(\nabla F_X(\xi))$$

para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Logo, vale a propriedade afirmada. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \{C, F_X\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi) \\ &= \xi([\nabla C(\xi), \nabla F_X(\xi)]) \\ &= \xi([\nabla C(\xi), X]) \\ &= -\xi(\mathrm{ad}(X)\nabla C(\xi)) \\ &= \mathrm{ad}^*(X)\xi(\nabla C(\xi)) \\ &= dC_\xi(\mathrm{ad}^*(X)\xi). \end{aligned}$$

Como o grupo G é conexo segue que $\mathcal{O}(\xi)$ é conexa. Assim, a função C é constante em cada órbita coadjunta $\mathcal{O}(\xi)$, ou seja, $C(\mathrm{Ad}^*(g)\xi) = C(\xi)$ para quaisquer $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Portanto, a função C é de Casimir. $\square$

3.3 Aplicação Momento

Apresentaremos uma discussão introdutória à aplicação momento, envolvendo algumas propriedades básicas e exemplos. Indicamos as referências [2, 3, 7, 25] para mais detalhes. Em [7] é feita uma exposição mais aprofundada acerca da existência de aplicações momento equivariantes.

Destacamos que Jean-Marie Souriau, em 1970, estabeleceu em [26] a versão moderna de aplicação momento (originalmente *application moment* em francês), analisou as condições de equivariância e percebeu a relação desse conceito com os momentos linear e angular. No ano de 1974, Jerrold Marsden e Alan Weinstein publicaram o famoso artigo [27] sobre redução simplética e traduziram o termo como *moment map*, o que rendeu por Hans Duistermaat o comentário de estar fisicamente incorreto. Apesar disso, tanto *momentum map* quanto *moment map* são encontrados na literatura. Para uma discussão histórica acerca da aplicação momento sugerimos [28].

3.3.1 Definição e Propriedades

Seja (M, ω) uma variedade simplética. Consideraremos $\tau : G \times M \to M$ uma ação diferenciável de um grupo de Lie G em M.

Definição 3.3.1. Uma ***aplicação momento***, associada à ação τ, é uma aplicação $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ que tem a seguinte propriedade: para todo $X \in \mathfrak{g}$ a função $f_X(x) = \Phi(x)(X)$ é uma função Hamiltoniana para $\delta\tau(X)$, isto é,

$$df_X = i_{\delta\tau(X)}\omega.$$

A condição acima significa que o campo Hamiltoniano da função f_X tem que ser igual ao campo induzido $\delta\tau(X)$.

A terminologia empregada é inspirada em conceitos familiares da física, a saber, o momento linear e o momento angular. Nos Exemplos 3.3.8 e 3.3.9 serão discutidos com um pouco mais de detalhe tais casos.

Proposição 3.3.2. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $\tau : G \times M \to M$ uma ação simplética. Todos os campos induzidos são Hamiltonianos se, e somente se, existe uma aplicação momento associada à ação τ.*

Demonstração: Sejam $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sua base dual de $\mathfrak{g}^*$. Por hipótese, os campos induzidos $\delta\tau(X_i)$ são Hamiltonianos e denote por $f_i \in C^\infty(M)$ uma função Hamiltoniana para esse campo. Defina $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ por

$$\Phi(x) := f_1(x)\alpha_1 + \cdots + f_n(x)\alpha_n$$

para todo $x \in M$. Tomemos $X \in \mathfrak{g}$ e escreva $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ onde $a_i = \alpha_i(X)$. Vejamos que o campo Hamiltoniano da função $f_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i(X) f_i$ é exatamente $\delta\tau(X)$. De fato, pelo Lema 2.4.12 e a linearidade da ação infinitesimal (vide página 154) tem-se

$$X_{f_X} = \sum_i \alpha_i(X) X_{f_i} = \sum_i \alpha_i(X)\delta\tau(X_i) = \delta\tau\left(\sum_i \alpha_i(X) X_i\right) = \delta\tau(X).$$

Logo, Φ, como definida acima, é uma aplicação momento. A recíproca é consequência da definição de aplicação momento. $\square$

Corolário 3.3.3. *Sempre existem aplicações momento para ações Hamiltonianas.*

Observação 3.3.4. Seja $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, denotaremos por $X^\sharp : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ o funcional linear de avaliação em X, isto é,

$$X^\sharp(\alpha) = \alpha(X)$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Assim, podemos escrever $f_X(p) = \Phi(p)(X) = X^\sharp \circ \Phi(p)$ para todo $p \in M$. Pela regra da cadeia, a derivada $d(f_X)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é dada por

$$d(f_X)_p = dX^\sharp_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p = X^\sharp \circ d\Phi_p.$$

Logo,

$$d(f_X)_p(v) = d\Phi_p(v)(X)$$

para todo $v \in T_pM$. $\diamond$

Em geral, dada uma ação Hamiltoniana, não existe unicidade para a aplicação momento. Sejam Φ_1 e Φ_2 duas aplicações momento para a ação τ. Para todo $X \in \mathfrak{g}$, as funções $f_X^{\Phi_1}$ e $f_X^{\Phi_2}$ são funções Hamiltonianas para o campo $\delta\tau(X)$ e, assim, $d(f_X^{\Phi_1} - f_X^{\Phi_2}) = 0$. Isso significa que $f_X^{\Phi_1} - f_X^{\Phi_2}$ é constante em cada componente conexa de M. Em particular, se M é conexa, então as aplicações momento são iguais a menos de uma constante.

Exemplo 3.3.5. Considere a variedade simplética $(\mathbb{C}, dx \wedge dy)$ com a ação $\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada como no Exemplo 2.4.25. Tendo em mente a identificação $T_1\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}$ obtemos que a aplicação $\Phi : \mathbb{C} \to (T_1\mathbb{S}^1)^* \simeq \mathbb{R}$ definida por $\Phi(z) := -\pi|z|^2$ é uma aplicação momento. $\diamond$

Exemplo 3.3.6. Sabemos, do Teorema 3.1.1, que o par $(\mathcal{O}(\lambda), \omega_{\mathcal{O}(\lambda)})$ é uma variedade simplética. Mais ainda, $\delta\tau(X) = \mathrm{ad}^*(X)$, onde $X \in \mathfrak{g}$, é Hamiltoniano para a função $f_X(\alpha) = \alpha(X)$ com $\alpha \in \mathcal{O}(\lambda)$. Concluímos que a ação de G na órbita $\mathcal{O}(\lambda)$ é Hamiltoniana e uma aplicação momento $\Phi : \mathcal{O}(\lambda) \to \mathfrak{g}^*$ é dada pela inclusão. $\diamond$

Exemplo 3.3.7. Seja G um grupo de Lie compacto ou semissimples. Pela Proposição 3.1.4 o par $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)})$ é uma variedade simplética. Os campos induzidos $\delta\tau(X) = \mathrm{ad}(X)$, com $X \in \mathfrak{g}$, são Hamiltonianos para as funções da Proposição 3.1.9. Logo, a ação de G na órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$ é Hamiltoniana e uma aplicação momento $\Phi : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{g}^*$ é dada pela composta $\iota \circ \flat$ onde $\iota : \mathcal{O}(\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ é a inclusão e $\flat$ o difeomorfismo da Proposição 3.1.4. $\diamond$

Exemplo 3.3.8 (Momento Linear). Sejam $M = T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$ munido da forma simplética $\omega = \sum_{i=1}^3 dq^i \wedge dp_i$ e o grupo aditivo das translações $G = \mathbb{R}^3$. Consideremos a ação $\tau : G \times M \to M$ dada por

$$\tau(x, (q, p)) = (q + x, p).$$

A álgebra de Lie do grupo G é $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$. Determinaremos uma aplicação momento associada a essa ação. Inicialmente, obteremos a ação infinitesimal. Dados $x \in \mathbb{R}^3$ e $(q, p) \in \mathbb{R}^6$, tem-se

$$\begin{aligned}
\delta\tau(x)_{(q,p)} &= \frac{d}{dt}\tau(\exp(tx), (q, p))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(q + \exp(tx), p)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(q + tx, p)|_{t=0} \\
&= (x, 0),
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos que $\exp(tx) = tx$ pois em $\mathbb{R}^3$ os campos invariantes são constantes. Para cada $x \in \mathbb{R}^3$ queremos encontrar uma função $f_x : T\mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ de maneira que o campo induzido $\delta\tau(x)$ coincida com o campo Hamiltoniano de tal função. Assim, devemos ter que

$$\begin{aligned} d(f_x)_{(q,p)}(u,v) &= \omega(\delta\tau(x)_{(q,p)},(u,v)) \\ &= \omega((x,0),(u,v)) \\ &= \langle x, v\rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^3$ e $(q,p),(u,v) \in \mathbb{R}^6$, onde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Escolhendo (u,v) na base canônica de $\mathbb{R}^6$ obteremos as seguintes condições

$$\frac{\partial f_x}{\partial q^i}(q,p) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f_x}{\partial p^i}(q,p) = x^i$$

para todo $i \in \{1,2,3\}$. Notemos que a função $f_x(q,p) := \langle p, x\rangle$ satisfaz as condições acima. Logo, a aplicação $\Phi : T\mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\Phi(q,p)(\cdot) = \langle p, \cdot\rangle$$

é uma aplicação momento. Podemos enxergar, via Teorema da Representação de Riesz, o funcional linear $\Phi(q,p)$ como sendo o vetor p. Dessa forma, a aplicação Φ associa cada ponto do espaço de fase ao seu momento linear. $\diamond$

Exemplo 3.3.9 (Momento Angular). Sejam $M = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$ munido da forma simplética canônica e o grupo das rotações no espaço tridimensional $G = \mathrm{SO}(3)$ que preservam a orientação. Considere a ação $\tau : G \times M \to M$ dada por

$$\tau(g,(q,p)) := (gq, gp).$$

Nosso objetivo consiste em encontrar uma aplicação momento associada a essa ação. Faremos o uso do isomorfismo $\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$, como álgebras de Lie (veja Exemplo C.1.2). Calcularemos os campos induzidos. Dados $X = \psi(v) \in \mathfrak{so}(3)$ e $(q,p) \in \mathbb{R}^6$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta\tau(X)_{(q,p)} &= \frac{d}{dt}\tau(\exp(tX),(q,p))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX)q, \exp(tX)p)|_{t=0} \\ &= (Xq, Xp) \\ &= (v \times q, v \times p). \end{aligned}$$

Buscaremos um candidato a aplicação momento associada a essa ação. Para cada $X \in \mathfrak{so}(3)$, devemos encontrar uma função $f_X : M \simeq \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ cujo campo Hamiltoniano induzido coincida com $\delta\tau(X)$. Sejam $(q,p), (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned} d(f_X)_{(q,p)}(u_1,u_2) &= \omega(\delta\tau(X)_{(q,p)}, (u_1,u_2)) \\ &= \omega((v \times q, v \times p), (u_1,u_2)) \\ &= \langle v \times q, u_2 \rangle - \langle v \times p, u_1 \rangle, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(f_X)_{(q,p)}(u_1,u_2) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_X}{\partial q^i} dq^i(u_1,u_2) + \frac{\partial f_X}{\partial p^i} dp^i(u_1,u_2) \\ &= \left\langle \frac{\partial f_X}{\partial q}, u_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_X}{\partial p}, u_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Fazendo separadamente $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$ nas expressões acima, encontramos as seguintes condições

$$\frac{\partial f_X}{\partial p} = v \times q \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_X}{\partial q} = -v \times q.$$

Como o produto misto de vetores permanece inalterado quando realizamos permutações cíclicas segue que $f_X(q,p) := \langle q \times p, v \rangle$ tem as propriedades acima. Assim, a aplicação $\Phi : M \simeq \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{so}(3)^*$ dada por

$$\Phi(q,p)X := \langle q \times p, v \rangle$$

é uma aplicação momento. O funcional $\Phi(q,p)$ é canonicamente identificado, via Teorema da Representação de Riesz, com o vetor $q \times p$. Portanto, a aplicação Φ associa cada ponto do espaço de fase ao seu momento angular total. $\diamond$

Se τ for uma ação arbitrária, não há motivos para existir uma aplicação momento, uma vez que os campos induzidos por essa ação não precisam ser Hamiltonianos. Contudo, impondo certas propriedades topológicas a M e G conseguimos assegurar a existência de uma aplicação momento.

Lema 3.3.10. *Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)$ temos que $[X,Y] = -X_{\omega(X,Y)}$. Em particular, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ é um ideal de $(\mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M), \{\cdot,\cdot\}_\omega)$.*

Demonstração: Por hipótese, $\mathcal{L}_X\omega = 0$ e $di_Y\omega = 0$. Pelos itens 9 e 7 da Proposição D.3.12 temos

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X i_Y\omega - i_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= i_X d(i_Y\omega) + d(i_X i_Y\omega) \\ &= d(\omega(Y,X)) \\ &= -d(\omega(X,Y)). \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que $X \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)$. Como $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M) \subseteq \mathfrak{X}_{\mathrm{Simp}}(M)$ segue do que acabamos de mostrar que $[X,Y] = -X_{\omega(X,Y)} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$. □

Proposição 3.3.11. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $\tau : G \times M \to M$ uma ação simplética. Existe uma aplicação momento associada à ação τ se, e somente se, a transformação linear $F : \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ dada por $F(X + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) := i_{\delta\tau(X)}\omega + B^1(M)$ é identicamente nula.*

Demonstração: Vamos inicialmente construir a aplicação F. Para isso, mostremos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ está contido no núcleo da transformação linear $X \mapsto i_{\delta\tau(X)}\omega + B^1(M)$. É suficiente verificarmos tal propriedade num conjunto gerador de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Como ação τ é simplética devemos ter que os campos induzidos $\delta\tau(A)$ e $\delta\tau(B)$, com $A, B \in \mathfrak{g}$, são simpléticos. Pelo Lema 3.3.10 temos $[\delta\tau(A), \delta\tau(B)] = -X_{\omega(\delta\tau(A),\delta\tau(B))}$. Assim,

$$i_{\delta\tau([A,B])}\omega = i_{[\delta\tau(A),\delta\tau(B)]}\omega = i_{-X_{\omega(\delta\tau(A),\delta\tau(B))}}\omega = -d\omega(\delta\tau(A), \delta\tau(B)) \in B^1(M).$$

Logo, a propriedade universal do quociente nos garante a existência da transformação linear F do enunciado. Por fim, existe uma aplicação momento Φ associada a $\tau \iff df_X = i_{\delta\tau(X)}\omega$ para todo $X \in \mathfrak{g} \iff F(X + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = i_{\delta\tau(X)}\omega + B^1(M) = B^1(M)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. □

Corolário 3.3.12. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $\tau : G \times M \to M$ uma ação simplética. Se uma das afirmações abaixo for válida, então existe uma aplicação momento associada à ação τ.*

- $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ *é trivial.*
- $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, *isto é, o primeiro grupo de cohomologia da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é trivial.*

Há um certo interesse físico, sobretudo a física teórica moderna, em compreender a relação entre simetrias[1] de sistemas físicos e grandezas físicas conservadas. Às vezes

[1] Entende-se aqui por *simetria de um sistema físico* uma ação de um grupo (de Lie) no espaço de fase que deixa invariante a forma simplética e a função Hamiltoniana.

a conservação de energia e momento linear são considerados como leis físicas. Na verdade, a conservação de tais grandezas está atrelada às simetrias translacionais do tempo e do espaço, respectivamente. Veja, por exemplo, [17]. De maneira geral, vale o seguinte resultado:

Teorema 3.3.13 (Noether). *Sejam (M, ω, τ) e $H \in C^\infty(M)$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ a função f_X é uma constante de movimento para o sistema Hamiltoniano (M, ω, H), isto é,*

$$\frac{d}{dt} f_X(\alpha(t)) = 0$$

para toda curva integral $\alpha : I \to \mathbb{R}$ do campo Hamiltoniano X_H.

Demonstração: Vide [14]. □

3.3.2 Equivariância e condições topológicas

Definição 3.3.14. Dizemos que a aplicação momento Φ é ***equivariante*** em relação à ação τ e a ação coadjunta se, e somente se, $\Phi \circ \tau_g(x) = \mathrm{Ad}^*(g)\Phi(x)$ para quaisquer $g \in G$ e $x \in M$. Podemos expressar a igualdade anterior no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\tau_g"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "\mathrm{Ad}^*(g)"] \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd}$$

Observação 3.3.15. Alguns autores, como por exemplo [20, p.966], exigem que a aplicação momento seja equivariante. ◇

Exemplo 3.3.16. A aplicação momento associada à ação coadjunta de um grupo de Lie G na órbita coadjunta $\mathcal{O}(\lambda)$ é equivariante. De fato, pelo Exemplo 3.3.6, a aplicação momento Φ é a inclusão e, assim, para quaisquer $g \in G$ e $\xi \in \mathcal{O}(\lambda)$ temos

$$\Phi \circ \mathrm{Ad}^*(g)(\xi) = \mathrm{Ad}^*(g)(\xi) = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(\xi).$$

◇

Exemplo 3.3.17. A aplicação momento associada à ação adjunta de um grupo de Lie compacto G na órbita adjunta $\mathcal{O}(\Lambda)$ é equivariante. Tomemos $g \in G$ e $X \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Argumentaremos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\Lambda) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "\mathrm{Ad}^*(g)"] \\ \mathcal{O}(\Lambda) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd}$$

é comutativo. Pelo Exemplo 3.3.7, a aplicação Φ é dada pela composta $\iota \circ \flat$, onde $\flat$ é o isomorfismo da Proposição 3.1.4. Assim, para todo $Y \in \mathfrak{g}$ temos

$$\Phi \circ \mathrm{Ad}(g)(X)(Y) = \flat(\mathrm{Ad}(g)X)(Y) = \langle \mathrm{Ad}(g)X, Y \rangle$$

e, pela expressão (C.2), tem-se

$$\mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(X)(Y) = \mathrm{Ad}^*(g)(\flat(X))(Y) = \flat(X) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(Y) = \langle X, \mathrm{Ad}(g^{-1})Y \rangle.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno Ad-invariante temos $\Phi \circ \mathrm{Ad}(g)(X) = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(X)$. Portanto, Φ é equivariante. $\diamond$

Exemplo 3.3.18. O momento linear, do Exemplo 3.3.8, é uma aplicação equivariante. De fato, como $(\mathbb{R}^3, +)$ é um grupo abeliano temos $\mathrm{Ad}^*(x) = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^3)^*}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Mostremos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\tau_x"'] & (\mathbb{R}^3)^* \arrow[d, "\mathrm{Ad}^*(x)"] \\ T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6 \arrow[r, "\Phi"'] & (\mathbb{R}^3)^* \end{tikzcd}$$

comuta. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3$ e $(q, p) \in \mathbb{R}^6$, tem-se

$$\begin{aligned} \Phi \circ \tau_x(q,p)(y) &= \Phi(q + x, p)(y) \\ &= \langle p, y \rangle \\ &= \Phi(q,p)(y) \\ &= \mathrm{Ad}^*(x) \circ \Phi(q,p)(y) \end{aligned}$$

como desejado. Embora não seja tão direto, o momento angular do Exemplo 3.3.9 também é uma aplicação equivariante. $\diamond$

Nem toda ação Hamiltoniana admite uma aplicação momento que seja equivariante em relação a τ e Ad^*. Desejamos obter condições topológicas que nos informem quando as aplicações momento são equivariantes. Nesse sentido, uma metodologia usual consiste em introduzirmos um conceito que meça em que grau as aplicações momento deixam de ser equivariantes. Isso é feito através dos *grupos de cohomologia* (vide [29]).

Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $\tau : G \times M \to M$ uma ação Hamiltoniana e $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento. Tomemos $g \in G$ e $A \in \mathfrak{g}$. Pelo Corolário 2.4.20 e a Proposição C.2.8, tem-se

$$X_{f_A \circ \tau_g} = (\tau_{g^{-1}})_*(X_{f_A}) = (\tau_{g^{-1}})_*(\delta\tau(A)) = \delta\tau(\mathrm{Ad}(g^{-1})A) = X_{f_{\mathrm{Ad}(g^{-1})A}}.$$

Assim, a função $\psi_{g,A} : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_{g,A} := f_A \circ \tau_g - f_{\mathrm{Ad}(g^{-1})A}$$

é constante em cada componente conexa de M. Pela definição de aplicação momento temos

$$f_{\mathrm{Ad}(g^{-1})A}(p) = \Phi(p)(\mathrm{Ad}(g^{-1})A) = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(p)(A).$$

Logo,

$$\psi_{g,A}(p) = (\Phi \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(p))(A).$$

Se M for conexa, então o funcional

$$\Phi \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(p) \in \mathfrak{g}^*$$

não depende do ponto $p \in M$.

Por ora, suponhamos que M seja conexa e fixemos um ponto $p \in M$. Diante do exposto acima, a aplicação $\sigma_\Phi : G \to \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\sigma_\Phi(g) \doteq \Phi \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(p) \tag{3.6}$$

está bem definida. Notemos que $\sigma_\Phi(1) = 0$ e que σ_Φ é identicamente nula se, e somente se, a aplicação momento é equivariante.

Proposição 3.3.19 (Identidade do Cociclo). *Seja M conexa. A aplicação σ, como definida em (3.6), satisfaz a seguinte condição*

$$\sigma_\Phi(gh) = \sigma_\Phi(g) + \mathrm{Ad}^*(g)\sigma_\Phi(h) \tag{3.7}$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Demonstração: Seja $A \in \mathfrak{g}$. Lembremos que Ad^* é um homomorfismo entre os grupos G e $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Por (3.6) temos

$$\begin{aligned} \sigma_\Phi(gh) &= (\Phi \circ \tau_g \circ \tau_h(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mathrm{Ad}^*(h) \circ \Phi(p))A \\ &= \Phi(\tau_g(\tau_h(p)))A - \Phi(p) \circ \mathrm{Ad}(h^{-1}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})A. \end{aligned} \tag{3.8}$$

No lado direito da última igualdade somamos e subtraímos o termo $\Phi(\tau_h(p)) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})A$. Assim, (3.8) será igual a soma de duas parcelas. A primeira delas é

$$\Phi(\tau_g(\tau_h(p)))A - \Phi(\tau_h(p)) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})A$$

que coincide com $\sigma_\Phi(g)A$, uma vez que a aplicação σ_Φ não depende do ponto de M. Já a segunda parcela que provém de (3.8) é

$$\mathrm{Ad}^*(g)(\Phi \circ \tau_h(p) - \mathrm{Ad}^*(h) \circ \Phi(p))A$$

que é igual a $\mathrm{Ad}^*(g)\sigma_\Phi(h)A$. Assim, a identidade desejada segue. □

Uma aplicação $\sigma_\Phi : G \to \mathfrak{g}^*$ que tem a propriedade (3.7) é denominada ***cociclo*** em G. Dizemos que um cociclo Δ é uma ***cofronteira*** quando existe $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\Delta(g) = \alpha - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha$. Denotaremos por

- $B(G, \mathfrak{g}^*)$ o conjunto dos cociclos de G em $\mathfrak{g}^*$.
- $Z(G, \mathfrak{g}^*)$ o conjunto das cofronteiras de G em $\mathfrak{g}^*$.

Os conjuntos definidos acima têm estrutura de espaço vetorial. Mais ainda, $Z(G, \mathfrak{g}^*)$ é um subespaço vetorial de $B(G, \mathfrak{g}^*)$. Assim, podemos considerar o espaço quociente

$$H^1(G, \mathfrak{g}^*) \doteq B(G, \mathfrak{g}^*)/Z(G, \mathfrak{g}^*)$$

que é denominado ***primeiro grupo de cohomologia de G com valores em $\mathfrak{g}^*$***. As classes de equivalência serão denotadas por $[\sigma_\Phi]$. Dois cociclos de uma mesma classe são ditos cohomólogos.

Proposição 3.3.20. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética conexa e $\tau : G \times M \to M$ uma ação Hamiltoniana. Se $\Phi_1, \Phi_2 : M \to \mathfrak{g}^*$ são duas aplicações momento associadas aos cociclos σ_1 e σ_2, respectivamente, então as classes de cohomologia $[\sigma_1]$ e $[\sigma_2]$, em $H^1(G, \mathfrak{g}^*)$, são iguais. Além disso,*

1. *se $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ é uma aplicação momento equivariante, então $[\sigma_\Phi] = 0$.*
2. *se $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ é uma aplicação momento tal que $[\sigma_\Phi] = 0$, então existe aplicação momento equivariante.*
3. *se $H^1(G, \mathfrak{g}^*) = \{0\}$, então existe uma aplicação momento equivariante.*

Demonstração: Sejam Φ_1 e Φ_2 aplicações momento associadas à ação τ e σ_1 e σ_2 os recpectivos cociclos. Como M é conexa segue que $\Phi_2 = \Phi_1 + \widetilde{\alpha}$ para algum $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, sendo a aplicação $\widetilde{\alpha} : M \to \mathfrak{g}^*$ dada por $\widetilde{\alpha}(p) = \alpha$ para todo $p \in M$. Assim, σ_1 e σ_2 são cohomólogas. De fato,

$$\begin{aligned}
\sigma_2(g) &= (\Phi_1 + \widetilde{\alpha}) \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ (\Phi_1 + \widetilde{\alpha})(p) \\
&= \Phi_1 \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi_1(p) + \widetilde{\alpha} \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha \\
&= \sigma_1(g) + \alpha - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha \\
&= \sigma_1(g) + \Delta(g)
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

Se existe uma aplicação momento equivariante, então a classe de equivalência do cociclo induzido é nulo. Isso mostra o item 1.

Mostraremos o item 2. Por hipótese, deve existir $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\sigma_\Phi(g) = \alpha - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha$ para todo $g \in G$. Afirmamos que a aplicação $\Phi_0 : M \to \mathfrak{g}^*$ definida por

$$\Phi_0(p) := \Phi(p) - \widetilde{\alpha}$$

para todo $p \in M$ é uma aplicação momento equivariante. Para todo $g \in G$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi_0 \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi_0(p) &= (\Phi - \widetilde{\alpha}) \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ (\Phi - \widetilde{\alpha})(p) \\
&= \Phi \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g) \circ \Phi(p) - \alpha + \mathrm{Ad}^*(g)\alpha \\
&= \sigma_\Phi(g) - \alpha + \mathrm{Ad}^*(g)\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mostraremos o item 3. Por hipótese, a ação de G em M é Hamiltoniana. Pelo Corolário 3.3.3, existe uma aplicação momento $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$. Como $[\sigma_\Phi] \in H^1(G, \mathfrak{g}^*)$ segue, pelo item anterior, que existe aplicação momento equivariante. $\square$

Corolário 3.3.21. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 3.3.20, se σ_1 e σ_2 são cociclos associados às aplicações momentos Φ_1 e Φ_2, respectivamente, então $\sigma_2(g) = \sigma_1(g) + \Delta(g)$ para todo $g \in G$.*

Observação 3.3.22. Cohomologias de ordem 2 podem ser construídas por meio do parênteses de Poisson (vide [7]). Além disso, pode-se enunciar critérios quando uma variedade simplética munida de uma ação diferenciável de um grupo de Lie é uma variedade de Poisson (vide [12, p.89]). $\diamond$

No próximo resultado veremos que podemos alterar a ação coadjunta em $\mathfrak{g}^*$ de maneira a tornar uma aplicação momento equivariante.

Proposição 3.3.23. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética conexa, $\tau : G \times M \to M$ uma ação Hamiltoniana e $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento. Se $[\sigma_\Phi] \neq 0$, então a aplicação $\phi : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ dada por*

$$\phi(g, \alpha) := \mathrm{Ad}^*(g)\alpha + \sigma_\Phi(g)$$

é uma ação à esquerda. Além disso, Φ é equivariante com relação a ϕ e Ad^*.

Demonstração: Por construção,

$$\phi(1, \alpha) = \mathrm{Ad}^*(1)\alpha + \sigma_\Phi(1) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}^*}\,\alpha + 0 = \alpha.$$

Sejam $g, h \in G$. Pela identidade (3.7) temos

$$\begin{aligned}
\phi(gh, \alpha) &= \mathrm{Ad}^*(gh)\alpha + \sigma_\Phi(gh) \\
&= \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mathrm{Ad}^*(h)\alpha + \sigma_\Phi(g) + \mathrm{Ad}^*(g)\sigma_\Phi(h) \\
&= \mathrm{Ad}^*(g) \circ (\mathrm{Ad}^*(h) + \sigma_\Phi(h))\alpha + \sigma_\Phi(g) \\
&= \mathrm{Ad}^*(g)\phi(h, \alpha) + \sigma_\Phi(g) \\
&= \phi(g, \phi(h, \alpha))).
\end{aligned}$$

Logo, ϕ é uma ação. A equivariância de Φ em relação a τ e ϕ também é uma consequência da igualdade (3.7) pois

$$\Phi \circ \tau_g(p) - \phi(g, \Phi(p)) = \Phi \circ \tau_g(p) - \mathrm{Ad}^*(g)\Phi(p) - \sigma_\Phi(g) = 0.$$

Assim, o resultado segue. □

Equivariância e Representações Afins

Apresentaremos uma abordagem alternativa para o estudo da equivariância de aplicações momento que, num certo sentido, está relacionada com a descrição topológica. Veremos que dada uma aplicação momento Φ, sempre existe uma representação afim (vide página 157) de G em $\mathfrak{g}^*$ cuja representação linear é Ad^* e tal que Φ é equivariante para a ação induzida pela representação afim.

Proposição 3.3.24 (Souriau). *Sejam (M, ω) uma variedade simplética conexa, $\tau : G \times M \to M$ uma ação Hamiltoniana e $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento.*

1. *A aplicação $A_\Phi : G \to \mathrm{Af}(\mathfrak{g}^*)$ dada por $A_\Phi := (\mathrm{Ad}^*, \sigma_\Phi)$ é uma representação afim.*

2. *A aplicação momento Φ é equivariante em relação a τ e A_Φ.*

3. *Representações afins associadas a duas aplicações momento distintas são sempre equivalentes.*

4. *Existe uma aplicação momento equivariante se, e somente se, a representação afim A_Φ é equivalente à representação linear* $(\mathrm{Ad}^*, 0)$.

Demonstração: O item 1 segue da propriedade (3.7) de cociclo de σ. Para quaisquer $p \in M$ e $g \in G$ temos

$$\Phi \circ \tau_g(p) = \mathrm{Ad}^*(g)\Phi(p) + \sigma(g) = A_\Phi(g)\Phi(p),$$

mostrando o item 2.

Sejam $A_1 = (\mathrm{Ad}^*, \sigma_1)$ e $A_2 = (\mathrm{Ad}^*, \sigma_2)$ representações afins definidas pelas aplicações momento Φ_1 e Φ_2, respectivamente. Existe $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tal que $\Phi_2 = \Phi_1 + \alpha$, já que M é conexa. Defina $T \in \mathrm{Af}(\mathfrak{g}^*)$ por $T = (\mathrm{id}, \alpha)$. Assim, pelo Corolário 3.3.21 temos

$$\begin{aligned}
TA_1(g)T^{-1} &= (\mathrm{id}, \alpha)(\mathrm{Ad}^*(g), \sigma_1(g))(\mathrm{id}, \alpha)^{-1} \\
&= (\mathrm{id}, \alpha)(\mathrm{Ad}^*(g), -\mathrm{Ad}^*(g)\alpha + \sigma_1(g)) \\
&= (\mathrm{Ad}^*(g), \alpha - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha + \sigma_1(g)) \\
&= (\mathrm{Ad}^*(g), \sigma_1(g) + \Delta(g)) \\
&= (\mathrm{Ad}^*(g), \sigma_2(g)) \\
&= A_2(g)
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Isso mostra o item 3.

Por fim, provemos o item 4. Se Φ_0 é uma aplicação momento equivariante, então basta tomar $T \in \mathrm{Af}(\mathfrak{g}^*)$ como sendo $T = (\mathrm{id}, 0)$ pois para todo $g \in G$ temos

$$A_{\Phi_0}(g) = (\mathrm{Ad}^*(g), 0) = T(\mathrm{Ad}^*(g), 0)T^{-1}$$

Assim, A_{Φ_0} é equivalente a $(\mathrm{Ad}^*, 0)$. Pelo item 3 temos que A_Φ é equivalente a A_{Φ_0}, logo A_Φ é equivalente a $(\mathrm{Ad}^*, 0)$. Reciprocamente, suponhamos que A_Φ é equivalente à representação linear $(\mathrm{Ad}^*, 0)$. Então, existe $(P, \alpha) \in \mathrm{Af}(\mathfrak{g}^*)$ tal que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}^*(g), \sigma_\Phi(g)) &= (P, \alpha)(\mathrm{Ad}^*(g), 0)(P, \alpha)^{-1} \\
&= (P, \alpha)(\mathrm{Ad}^*(g)P^{-1}, -\mathrm{Ad}^*(g)P^{-1}\alpha) \\
&= (P\,\mathrm{Ad}^*(g)P^{-1}, \alpha - P\,\mathrm{Ad}^*(g)P^{-1}\alpha)
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Logo, $\mathrm{Ad}^*(g) = P\,\mathrm{Ad}^*(g)P^{-1}$ e, assim,

$$\sigma_\Phi(g) = \alpha - \mathrm{Ad}^*(g)\alpha = \Delta(g) \in Z(G, \mathfrak{g}^*).$$

Daí, $[\sigma_\Phi] = 0$ e, pela Proposição 3.3.20, existe uma aplicação momento equivariante. $\square$

Os resultados de existência de aplicações momento equivariante expostos anteriormente possuem algumas consequências interessantes quando o grupo de Lie G tem propriedades topológicas adicionais.

Lema 3.3.25. *Sejam G um grupo topológico compacto e Hausdorff e $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ uma representação contínua de dimensão finita. Se $c : G \to V$ é um 1-cociclo contínuo para ρ, então c é uma cofronteira.*

Demonstração: Vide [21]. $\square$

Tendo conhecimento do lema anterior, pode-se mostrar:

Proposição 3.3.26. *Seja G um grupo compacto. Então, uma ação Hamiltoniana de G admite uma aplicação momento equivariante. Se G é semissimples, então essa aplicação momento é única.*

Demonstração: Vide [21]. $\square$

Proposição 3.3.27. *Se G é um grupo conexo e semissimples, então uma ação Hamiltoniana de G admite uma única aplicação momento equivariante.*

Demonstração: Vide [21]. $\square$

Consequências da Equivariância

Definição 3.3.28. Um G-***espaço Hamiltoniano*** (M, ω, G, Φ) é composto por:

- uma variedade simplética (M, ω) e um grupo de Lie conexo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
- uma ação diferenciável $\tau : G \times M \to M$ com ação infinitesimal associada $\delta\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$.
- uma aplicação momento $\Phi : (M, \omega) \to \mathfrak{g}^*$.

Proposição 3.3.29. *Considere o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$. Se G é um grupo de Lie compacto, então a ação adjunta na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma ação própria. Além disso, tem-se*

$$C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda)) = \Phi^*(C^\infty(\mathfrak{g})).$$

Demonstração: Basta usar a Proposição 3.1.7 e a Proposition 12.22 de [30, p.27]. $\square$

Proposição 3.3.30. *Seja (M, ω, τ, Φ) um G-espaço Hamiltoniano. Se a aplicação momento Φ é equivariante, então $\{f_A, f_B\} = f_{[A,B]}$ para quaisquer $A, B \in \mathfrak{g}$. Em particular, o subespaço*

$$\mathrm{ger}\{f_A : A \in \mathfrak{g}\} \subseteq C^\infty(M)$$

é fechado para o parênteses de Poisson, é uma subálgebra e a aplicação $\widehat{\Phi} : X \mapsto f_X$ é um homomorfismo entre as álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ e $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$.

Demonstração: Sejam $p \in M$ e $B \in \mathfrak{g}$. Pela equivariância de Φ temos

$$\Phi \circ \tau_{\exp(tB)}(p) = \mathrm{Ad}^*(\exp(tB)) \circ \Phi(p)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando o lado esquerdo da expressão acima em $t = 0$ e usando a Observação 3.3.4 temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi \circ \tau_{\exp(tB)}(p)|_{t=0}(A) &= d\Phi_p\left(\frac{d}{dt}\tau_{\exp(tB)}(p)|_{t=0}\right)(A) \\
&= d\Phi_p(\delta\tau(B)p)(A) \\
&= A^\sharp \circ d\Phi_p(\delta\tau(B)p) \\
&= d(f_A)_p(\delta\tau(B)p) \\
&= \omega_p(X_{f_A}(p), \delta\tau(B)p) \\
&= \omega_p(X_{f_A}(p), X_{f_B}(p)) \\
&= \{f_A, f_B\}(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, derivando o lado direito em $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*(\exp(tB)) \circ \Phi(p)|_{t=0}(A) &= \frac{d}{dt}\Phi(p) \circ \mathrm{Ad}(\exp(-tB))|_{t=0}(A) \\
&= \Phi(p) \circ \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(-tB))|_{t=0}(A) \\
&= -\Phi(p) \circ \mathrm{ad}(B)(A) \\
&= \Phi(p)[A, B] \\
&= f_{[A,B]}(p).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado desejado segue. $\square$

Proposição 3.3.31. *Sejam (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano, $p \in M$ e $\xi = \Phi(p) \in \mathfrak{g}^*$. Se $\iota : G \cdot p \hookrightarrow M$ é a inclusão e Φ é equivariante, então*

$$\iota^*\omega = (\Phi \circ \iota)^*\omega_{\mathcal{O}(\xi)}$$

em $\Omega^2(G \cdot p)$, onde $(\mathcal{O}(\xi), \omega_{\mathcal{O}(\xi)})$ é a órbita coadjunta de $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Demonstração: O espaço tangente $T_p(G \cdot p)$ coincide com o conjunto $\{\delta\tau(X)(p) : X \in \mathfrak{g}\}$. Pela Proposição 3.3.30 temos

$$\begin{aligned} \iota^*\omega_p(\delta\tau(A)(p), \delta\tau(B)(p)) &= \omega_p(X_{f_A}(p), X_{f_B}(p)) \\ &= \{f_A, f_B\}(p) \\ &= f_{[A,B]}(p) \\ &= \Phi(p)([A,B]) \\ &= \xi([A,B]) \\ &= \omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(\mathrm{ad}^*(A)\xi, \mathrm{ad}^*(B)\xi) \end{aligned}$$

para quaisquer $A, B \in \mathfrak{g}$. Pela definição de pullback $(\Phi \circ \iota)^*\omega_{\mathcal{O}(\xi)} \in \Omega^2(G \cdot p)$. A hipótese de equivariância da aplicação momento implica que

$$\mathrm{ad}^*(A)\xi = \frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}^*(\exp(tA))\Phi(p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(\tau_{\exp(tA)}(p))|_{t=0}.$$

Pela regra da cadeia e a definição de ação infinitesimal temos

$$\mathrm{ad}^*(A)\xi = d\Phi_p\left(\frac{d}{dt}\tau(\exp(tA, p)|_{t=0}\right) = d\Phi_p(\delta\tau(A)(p)).$$

De maneira análoga, tem-se

$$\mathrm{ad}^*(B)\xi = d\Phi_p(\delta\tau(B)(p)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(\mathrm{ad}^*(A)\xi, \mathrm{ad}^*(B)\xi) &= \omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(d\Phi_p(\delta\tau(A)(p)), d\Phi_p(\delta\tau(B)(p))) \\ &= \Phi^*\omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(\delta\tau(A)(p), \delta\tau(B)(p)) \end{aligned}$$

e, portanto, concluímos a igualdade desejada. □

3.3.3 Hamiltoniano Coletivo

Definição 3.3.32. Seja (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano. Um ***Hamiltoniano coletivo*** é uma função $H \in C^\infty(M)$ tal que $H = \Phi^*(F)$ para algum $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Apresentaremos alguns resultados envolvendo tal conceito que serão utilizados mais adiante. Para uma discussão mais aprofundada consulte [2,3].

Proposição 3.3.33. *Seja (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano. Se $H \in C^\infty(M)$ é um Hamiltoniano coletivo da forma $H = \Phi^*(F)$, então o campo vetorial induzido $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ é dado por*

$$X_H = \delta\tau((\nabla F) \circ \Phi). \tag{3.9}$$

Demonstração: Sejam $\{X_i\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e $\{X_i^*\}$ a respectiva base dual de $\mathfrak{g}^*$. Para cada $p \in M$, tem-se $\Phi(p) \in \mathfrak{g}^*$. Logo, podemos escrever

$$\Phi(p) = \sum_i \Phi^i(p) X_i^*,$$

onde $\Phi^i(p) = \Phi(p)(X_i) = f_{X_i}(p) \in \mathbb{R}$. Isto define, para cada $i \in \{1, \ldots, \dim \mathfrak{g}\}$, funções $\Phi^i : M \to \mathbb{R}$ que em cada ponto $p \in M$ nos dão a i-ésima coordenada do funcional linear $\Phi(p)$ na base $\{X_i^*\}$. Mais ainda, para cada $p \in M$ temos que $d\Phi^i_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é tal que

$$d\Phi^i_p(v) = d(f_{X_i})_p(v) = i_{\delta\tau(X_i)p}\omega_p(v) = \omega_p(\delta\tau(X_i)p, v)$$

para todo $v \in T_pM$, já que f_{X_i} é uma função Hamiltoniana para o campo $\delta\tau(X_i)$. Assim,

$$d\Phi_p(v) = \sum_i d\Phi^i_p(v) X_i^*$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$. Como a função $H \in C^\infty(M)$ é um Hamiltoniano coletivo, existe $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ tal que $H = \Phi^*(F)$. Fixemos de agora em diante um ponto $p \in M$. Pela definição dada em (3.4) temos que $dF_{\Phi(p)} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$dF_{\Phi(p)}(X_i^*) = X_i^*(\nabla F(\Phi(p))).$$

Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
dH_p(v) &= dF_{\Phi(p)}(d\Phi_p(v)) \\
&= dF_{\Phi(p)}\left(\sum_i d\Phi^i_p(v) X_i^*\right) \\
&= \sum_i dF_{\Phi(p)}\left(X_i^*\right) d\Phi^i_p(v) \\
&= \sum_i X_i^*(\nabla F(\Phi(p)))\omega_p(\delta\tau(X_i)p, v) \\
&= \omega_p\left(\sum_i X_i^*(\nabla F(\Phi(p)))\delta\tau(X_i)p, v\right) \\
&= \omega_p\left(\delta\tau\left(\sum_i X_i^*(\nabla F(\Phi(p)))X_i\right)p, v\right) \\
&= \omega_p(\delta\tau(\nabla F(\Phi(p)))p, v) \\
&= i_{\delta\tau(\nabla F(\Phi(p)))p}\omega_p(v)
\end{aligned}$$

para todo $v \in T_pM$. A igualdade acima implica que

$$X_H(p) = \delta\tau(\nabla F(\Phi(p)))p$$

para todo $p \in M$. Portanto, o campo X_H é como em (3.3.33). $\square$

Exemplo 3.3.34. Considere o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\lambda), \omega_{\mathcal{O}(\lambda)}, G, \Phi)$. Dado o Hamiltoniano coletivo $H = \Phi^*(F) \in C^\infty(\mathcal{O}(\lambda))$, tem-se $X_H = \mathrm{ad}^*((\nabla F) \circ \Phi)$. $\diamond$

Lema 3.3.35. *Se $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Ad}^*}$, então*

$$\nabla F(\mathrm{Ad}^*(g)\xi) = \mathrm{Ad}(g)\nabla F(\xi)$$

para quaisquer $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Em outras palavras, a aplicação $\nabla F : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ é equivariante com relação as ações adjunta e coadjunta.

Demonstração: Por hipótese, $F = F \circ \mathrm{Ad}^*(g)$ para todo $g \in G$. Pela regra da cadeia, tem-se

$$dF_\xi = d(F \circ \mathrm{Ad}^*(g))_\xi = dF_{\mathrm{Ad}^*(g)\xi}(d\,\mathrm{Ad}^*(g)_\xi) = dF_{\mathrm{Ad}^*(g)\xi} \circ \mathrm{Ad}^*(g)$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Dados $\eta, \xi \in \mathfrak{g}^*$,

$$\eta(\nabla F(\xi)) = dF_\xi(\eta) = \mathrm{Ad}^*(g)\eta(\nabla F(\mathrm{Ad}^*(g)\xi)).$$

Aplicando $\mathrm{Ad}^*(g^{-1})$ em ambos os lados dessa igualdade obtemos

$$\mathrm{Ad}^*(g^{-1})\eta(\nabla F(\xi)) = \eta(\nabla F(\mathrm{Ad}^*(g)\xi)),$$

ou seja,

$$\eta(\mathrm{Ad}(g)\nabla F(\xi)) = \eta(\nabla F(\mathrm{Ad}^*(g)\xi))$$

para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Portanto, o resultado segue. $\square$

Lema 3.3.36. *Sejam (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano com Φ equivariante, $p \in M$, $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ e $v \in \mathfrak{X}(G)$ o campo vetorial dado por $v_g = d(D_g)_1(\nabla F(\Phi(\tau_g(p))))$. Se F é Ad^*-invariante, então*

$$v_g = d(E_g)_1(\nabla F(\Phi(p))).$$

Demonstração: Lembremos que para todo $g \in G$ temos $\mathrm{Ad}(g) = (dD_{g^{-1}})_g \circ d(E_g)_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
v_g &= d(D_g)_1(\nabla F(\Phi(\tau_g(p)))) \\
&= d(D_g)_1(\nabla F(\mathrm{Ad}^*(g)\Phi(p))) \\
&= d(D_g)_1(\mathrm{Ad}(g)\nabla F(\Phi(p))) \\
&= d(D_g)_1 \circ d(D_{g^{-1}})_g \circ d(E_g)_1(\nabla F(\Phi(p))) \\
&= d(E_g)_1(\nabla F(\Phi(p)))
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a equivariância da aplicação momento e na terceira igualdade o Lema 3.3.35. □

Teorema 3.3.37 (Guillemin-Sternberg [2]). *Sejam (M,ω) uma variedade simplética, G um grupo de Lie compacto conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\tau : G \times M \to M$ uma ação Hamiltoniana e $\Phi : (M,\omega) \to \mathfrak{g}^*$ uma aplicação momento equivariante. Se $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, então a curva integral do campo induzido pelo Hamiltoniano coletivo $\Phi^*(F)$, passando por $p \in M$, é dada por*

$$\phi_t(p) = \tau_{g(t)}(p),$$

onde $g : \mathbb{R} \to G$ é a solução do problema do valor inicial

$$\frac{dg}{dt} = v_{g(t)} \quad e \quad g(0) = 1$$

para o campo vetorial $v \in \mathfrak{X}(G)$ dado por $v_g = d(D_g)_1(\nabla F(\Phi(\tau_g(p))))$. Em particular, se F é Ad^*-invariante, então

$$\phi_t(p) = \tau_{\exp(t\nabla F(\Phi(p)))}(p).$$

Demonstração: Fixemos $p \in M$ e seja $v \in \mathfrak{X}(G)$ o campo vetorial como no Lema 3.3.36. Consideremos a aplicação $\tau^p : G \to M$ definida por

$$\tau^p(g) = \tau(g,p).$$

Afirmamos que

$$\delta\tau(X)_{\tau_g(p)} = (d\tau^p)_g(d(D_g)_1(X))$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\delta\tau(X)_{\tau(g)p} &= \frac{d}{dt}\tau_{\exp(tX))}(\tau_g(p))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\tau_{\exp(tX)g}(p)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\tau_{D_g(\exp(tX))}(p)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\tau^p(D_g(\exp(tX)))|_{t=0} \\
&= d(\tau^p)_g(d(D_g)_1(X)).
\end{aligned}$$

Mostraremos que $\phi_t(p)$, como definida no enunciado, é a curva integral do campo $X_{\Phi^*(F)}$. Se $t = 0$, então

$$\phi_0(p) = \tau(g(0))p = \tau(1)p = \mathrm{id}_M(p) = p.$$

Como $\phi_t(p) = \tau^p(g(t))$ segue que

$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = d(\tau^p)_{g(t)}\left(\frac{dg}{dt}\right) = d(\tau^p)_{g(t)}(v_{g(t)}) = d(\tau^p)_{g(t)}(d(D_g)_1(\nabla F(\Phi(\tau(g(t))p)))).$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t(p) &= \delta\tau(\nabla F(\Phi(\tau_{g(t)}(p))))_{\tau_{g(t)}(p)}\\ &= \delta\tau(\nabla F(\Phi(\phi_t(p))))_{\phi_t(p)}\\ &= X_{\Phi^*(F)}(\phi_t(p)).\end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ é uma função Ad^*-invariante. Mostraremos que a aplicação $g : \mathbb{R} \to G$ dada por $g(t) := \exp(t\nabla F(\Phi(p)))$ é solução para o problema do valor inicial do enunciado. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= \frac{d}{ds}\exp((s+t)\nabla F(\Phi(p)))|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}\exp(t\nabla F(\Phi(p)))\exp(s\nabla F(\Phi(p)))|_{s=0}\\ &= \frac{d}{ds}E_{g(t)}(\exp(s\nabla F(\Phi(p))))|_{s=0}\\ &= d(E_{g(t)})_1(\nabla F(\Phi(p)))\\ &= v_{g(t)},\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o Lema 3.3.36. Portanto, pela primeira afirmação deste teorema, tem-se $\phi_t(p) = \tau_{\exp(t\nabla F(\Phi(p)))}(p)$. □

Proposição 3.3.38. *Seja (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano. Se a aplicação momento é equivariante, então também é uma aplicação de Poisson:*

$$\{\Phi^*(F), \Phi^*(I)\}_\omega(p) = \{F, I\}_{\mathfrak{g}^*}(\Phi(p))$$

para quaisquer $p \in M$ e $F, I \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Demonstração: Sejam $F, I \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Pelas Proposições 3.3.33 e 3.3.31 bem como a expressão da forma KKS (Teorema 3.1.1) e a definição (3.5) temos

$$\begin{aligned}\{\Phi^*(F), \Phi^*(I)\}_\omega(p) &= \omega_p(X_{\Phi^*(F)}(p), X_{\Phi^*(I)}(p))\\ &= \omega_p(\delta\tau(\nabla F(\Phi(p)))p, \delta\tau(\nabla I(\Phi(p)))p)\\ &= \omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(d\Phi_p(\delta\tau(\nabla F(\Phi(p)))p), d\Phi_p(\delta\tau(\nabla I(\Phi(p)))p))\\ &= \omega_{\mathcal{O}(\xi),\xi}(\mathrm{ad}^*(\nabla F(\Phi(p)))\Phi(p), \mathrm{ad}^*(\nabla I(\Phi(p)))\Phi(p))\\ &= \Phi(p)([\nabla F(\Phi(p)), \nabla I(\Phi(p))])\\ &= \{F, I\}_{\mathfrak{g}^*}(\Phi(p))\end{aligned}$$

para todo $p \in M$. $\square$

4 Equação de Lax e Sistemas Hamiltonianos Integráveis

Um dos principais objetivos deste capítulo consiste em explorarmos a relação entre o formalismo de Lax e o estudo de integrabilidade de sistemas Hamiltonianos. Recentemente tal abordagem vem sendo tratada, por exemplo, em [5, 31] e aplicada para órbitas coadjuntas dos grupos de Lie $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$.

Inicialmente, faremos uma exposição acerca dos pares de Lax. Recomendamos as referências [14, p.578], [32, p.11] e [24] para uma discussão mais aprofundada. Em seguida, discutiremos um resultado denominado na literatura por *truque de Thimm* (vide [1, p.503]) e como ele nos permite obtermos um método de construção, sob certas condições, de quantidades conservadas em involução. Nesse momento, torna-se evidente a necessidade da hipótese de equivariância da aplicação momento (em particular, a Proposição 3.3.38). Por fim, encerraremos com o Teorema 4.4.7 que fornece uma maneira concreta de se construir um sistema Hamiltoniano integrável do tipo Gelfand-Tsetlin para órbitas coadjuntas de $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$.

4.1 Pares de Lax e o Hamiltoniano Coletivo

Seja (M, ω) uma variedade simplética com $r = \dim M$. Um ***par de Lax*** para um sistema Hamiltoniano (M, ω, H) consiste em duas aplicações diferenciáveis com valores num espaço de matrizes $L, P : (M, \omega) \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ tal que a equação de movimento associada a $H \in C^\infty(M)$ é equivalente a

$$\frac{d}{dt}L + [L, P] = 0. \tag{4.1}$$

A equação acima é chamada ***equação de Lax***. Se $\phi : \mathrm{dom}(\phi) \subseteq \mathbb{R} \to M$ é a curva integral do campo $X_H \in \mathfrak{X}(M)$, então a igualdade acima é entendida como

$$\frac{d}{dt}L(\phi(t)) + [L(\phi(t)), P(\phi(t))] = 0.$$

Convencionaremos que $L(t) \equiv L(\phi(t))$.

Vamos resolver a equação (4.1). Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{dL}{dt} = [P, L] \quad \text{com} \quad L(0) = L_0. \tag{4.2}$$

Seja $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{Gl}(r, \mathbb{R})$ a aplicação determinada pelo seguinte problema do valor inicial

$$\frac{dg}{dt} = P(t)g(t) \quad \text{com} \quad g(0) = \mathrm{I}\,.$$

A aplicação

$$L(t) = g(t)L_0 g(t)^{-1} \tag{4.3}$$

é uma solução de (4.2). Notemos que pela regra de Leibniz temos

$$0 = \frac{d}{dt}\,\mathrm{I}_r = \frac{d}{dt}(g(t)g(t)^{-1}) = \frac{dg}{dt}(t)g(t)^{-1} + g(t)\frac{d}{dt}g(t)^{-1}$$

implicando que

$$\frac{d}{dt}g(t)^{-1} = -g(t)^{-1}\frac{dg}{dt}(t)g(t)^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{dg}{dt}(t)L_0 g(t)^{-1} + g(t)L_0\frac{d}{dt}g(t)^{-1} \\
&= P(t)g(t)L_0 g(t)^{-1} + g(t)L_0\left(-g(t)^{-1}\frac{dg}{dt}g(t)^{-1}\right) \\
&= P(t)L(t) - g(t)L_0 g(t)^{-1}P(t)g(t)g(t)^{-1} \\
&= P(t)L(t) - L(t)P(t) \\
&= [P(t), L(t)],
\end{aligned}$$

ou seja, a aplicação (4.3) é uma solução do problema de valor inicial (4.2).

Exemplo 4.1.1. Consideremos o sistema Hamiltoniano dado pelo oscilador harmônico, veja Exemplo 2.4.2. Pela Proposição 2.5.11, as equações de movimento desse sistema mecânico são dadas por

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\kappa^2 q.$$

Consideremos as aplicações $L, P : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ definidas por

$$L = \begin{pmatrix} p & \kappa q \\ \kappa q & -p \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{dL}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dp}{dt} & \kappa\dfrac{dq}{dt} \\ \kappa\dfrac{dq}{dt} & -\dfrac{dp}{dt} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [L, P] = \begin{pmatrix} \kappa^2 q & -\kappa p \\ -\kappa p & -\kappa^2 p \end{pmatrix},$$

implicando que

$$\frac{dL}{dt} + [L, P] = 0 \iff \frac{dq}{dt} = p \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = -\kappa^2 q.$$

$\diamond$

Para encontrarmos grandezas conservadas é suficiente procurarmos funções que sejam invariantes pela ação adjunta.

Proposição 4.1.2. *Seja (L, P) um par de Lax para um sistema Hamiltoniano (M, ω, H). Se $F : \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$F(gXg^{-1}) = F(X)$$

para quaisquer $g \in \mathrm{Gl}(r, \mathbb{R})$ e $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$, então a composta $I = F \circ L \in C^\infty(M)$ é constante sobre o fluxo de $X_H \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Seja $\gamma : \mathrm{dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to M$ o fluxo de X_H. Pela expressão (4.3) e a hipótese de F ser invariante pela ação adjunta implicam que

$$I(t) = I(\gamma(t)) = F(L(\gamma(t))) = F(g(t)L_0 g(t)^{-1}) = F(L_0)$$

para todo $t \in \mathrm{dom}(\gamma)$. $\square$

Corolário 4.1.3. *Com a notação da Proposição 4.1.2 temos $\{H, I\}_\omega = 0$.*

Demonstração: Visto que I é constante sobre o fluxo de X_H e que esse campo pode ser enxergado como uma derivação segue que $\{H, I\}_\omega = X_H(I) = 0$. $\square$

Por construção, para cada $p \in M$ temos que $L(p)$ é uma matriz e seu polinômio característico pode ser escrito da seguinte forma

$$f_0(L(p)) + f_1(L(p))w + \cdots + f_{r-1}(L(p))w^{r-1} + w^r.$$

Assim, os coeficientes de tal polinômio são funções de M em $\mathbb{R}$, ou seja, $f_k(L) \in C^\infty(M)$ para todo $k \in \{0, \ldots, r\}$.

Proposição 4.1.4. *Se (L, P) é um par de Lax para um sistema Hamiltoniano (M, ω, H), então os coeficientes do polinômio característico de L constituem um conjunto de quantidades conservadas para o sistema Hamiltoniano.*

Demonstração: Cada f_k, com $k \in \{0, \ldots, r-1\}$, é invariante pela ação adjunta. Com efeito, já sabemos que o polinômio característico é invariante pela ação adjunta, ou seja, para todo $g \in \mathrm{Gl}(r, \mathbb{R})$ temos

$$\det(w\,\mathrm{I}_r - L) = \det(g(w\,\mathrm{I}_r - L)g^{-1}) = \det(w\,\mathrm{I}_r - gLg^{-1}).$$

Daí,

$$\sum_{k=0}^{r} f_k(L)w^k = \sum_{k=0}^{r} f_k(gLg^{-1})w^k.$$

Pela igualdade de polinômios temos que $f_k(L) = f_k(gLg^{-1})$. Pela Proposição 4.1.2 concluímos que $f_k(L)$ é constante ao longo do fluxo de X_H, Logo, $\{H, f_k(L)\}_\omega = 0$, mostrando que os coeficientes do polinômio característico de L são quantidades conservadas para o sistema Hamiltoniano. $\square$

Proposição 4.1.5. *Seja (L, P) um par de Lax para um sistema Hamiltoniano (M, ω, H). Se L é diagonalizável, isto é, existem $U : (M, \omega) \to \mathrm{Gl}(r, \mathbb{R})$ e $\Lambda : M \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ com $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r)$ tais que $L = U\Lambda U^{-1}$, então as funções definidas pelos autovalores de L são quantidades conservadas para o sistema Hamiltoniano (M, ω, H).*

Seja $L : (M, \omega) \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$. A equação

$$\det(w\,\mathrm{I}_r - L) = 0$$

é chamada de ***equação espectral*** associada a L.

Consideremos o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$. O campo vetorial associado ao Hamiltoniano coletivo $\Phi^*(F)$, com $F \in C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda))$, é dado, de acordo com a Proposição 3.3.33, por

$$X_{\Phi^*(F)}(Z) = \mathrm{ad}(\nabla F(\Phi(Z)))Z \tag{4.4}$$

com $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. A equação do movimento para o sistema $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, X_{\Phi^*(F)})$ é dada pela seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt}\phi_t(Z) = X_{\Phi^*(F)}(\phi_t(Z)),$$

onde ϕ_t é a curva integral do campo $X_{\Phi^*(F)}$. Sabemos, do Exemplo 3.3.7, que a aplicação momento $\Phi : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{g}^*$, a menos do difeomorfismo $\flat$, é dada pela inclusão. Assim, as igualdades anteriores nos garante que

$$\frac{d}{dt}\Phi(\phi_t(Z)) = [\nabla F(\Phi(\phi_t(Z))), \Phi(\phi_t(Z))].$$

Proposição 4.1.6. *Considere o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$ e o Hamiltoniano coletivo $\Phi^*(F) \in C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda))$. Se $L, P : (\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}) \to \mathfrak{g}$ são definidos, respectivamente, por $L = \Phi$ e $P = \nabla F \circ \Phi$, então a equação*

$$\frac{dL}{dt} + [L, P] = 0,$$

é equivalente a equação do movimento associada a $\Phi^*(F)$.

Demonstração: Suponhamos que $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, H)$ é um sistema Hamiltoniano tal que $H = \Phi^*(F)$ para algum $F \in C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda))$. Vamos mostrar que a partir de uma solução da equação do movimento de $X_H \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}(\Lambda))$ conseguimos garantir uma solução para a equação de Lax. Se ϕ_t é a curva integral do campo X_H, então

$$\frac{d}{dt}\phi_t(Z) = X_H(\phi_t(Z)) = \mathrm{ad}(\nabla F(\Phi(\phi_t(Z))))\phi_t(Z),$$

para todo $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Considere $L, P : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{g}$ aplicações definidas, respectivamente, por

$$L(Z) := \Phi(Z) \ \text{ e } \ P(Z) := \nabla F(\Phi(Z))$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}L(\phi_t(X)) = \frac{d}{dt}\Phi(\phi_t(Z)) = [\nabla F(\Phi(\phi_t(Z))), \Phi(\phi_t(Z))]$$

ou seja, por construção, vale que $\frac{d}{dt}L + [L, P] = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $\gamma : \mathrm{dom}(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{O}(\Lambda)$ é uma curva tal que

$$\frac{d}{dt}L(\gamma(t)) + [L(\gamma(t)), P(\gamma(t))] = 0.$$

Pela expressão (4.4) temos

$$\begin{aligned} X_{\Phi^*(F)}(\gamma(t)) &= \mathrm{ad}((\nabla F) \circ \Phi(\gamma(t)))(\gamma(t)) \\ &= [(\nabla F) \circ \Phi(\gamma(t)), \gamma(t)] \\ &= [P(\gamma(t)), L(\gamma(t))] \\ &= \frac{d}{dt}L(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\gamma(t), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que Φ é a inclusão. Assim, γ é uma curva que é solução da equação do movimento associada a $\Phi^*(F)$. Pela unicidade da curva integral segue que $\gamma(t) = \phi_t$. Portanto, as equações de Lax e do movimento são equivalentes. $\square$

4.2 Restrição da Ação a um Subgrupo Fechado e Conexo

Seja K um subgrupo de Lie fechado e conexo de G (em particular, K é compacto). Denotaremos sua álgebra de Lie por $\mathfrak{k}$. Desejamos construir uma aplicação $\Phi_K : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{k}^*$ de maneira que a quádrupla $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, K, \Phi_K)$ seja um K-espaço Hamiltoniano. Aqui estamos admitindo que a ação de K em M, em símbolos τ_K, é induzida por restrição pela ação de G em M.

Para esse fim, tomemos $\mathfrak{k}^\perp$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ com respeito a um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Logo, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$. Denotaremos por $\pi_K : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ a projeção ortogonal no subespaço $\mathfrak{k}$.

Lema 4.2.1. *A álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ é identificada, por meio do difeomorfismo $\flat$ da Proposição 3.1.4, com um subespaço de $\mathfrak{g}^*$. Mais especificamente, vale a decomposição $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^0 \oplus (\mathfrak{k}^\perp)^0$ com $\flat(\mathfrak{k}) = (\mathfrak{k}^\perp)^0$ e $\flat(\mathfrak{k}^\perp) = \mathfrak{k}^0$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{B}_\mathfrak{k} = \{X_1,\dots,X_r\}$ e $\mathcal{B}_{\mathfrak{k}^\perp} = \{Y_1,\dots,Y_s\}$ bases ortonormais de $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{k}^\perp$, respectivamente. O conjunto $\{X_1,\dots,X_r,Y_1,\dots,Y_s\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Temos que

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^0 \oplus (\mathfrak{k}^\perp)^0$$

e os conjuntos $\mathcal{B}^*_\mathfrak{k} = \{X_1^*,\dots,X_r^*\}$ e $\mathcal{B}^*_{\mathfrak{k}^\perp} = \{Y_1^*,\dots,Y_s^*\}$ são bases de $(\mathfrak{k}^\perp)^0$ e $\mathfrak{k}^0$, respectivamente. Afirmamos que $\flat(\mathcal{B}_\mathfrak{k}) = \mathcal{B}^*_\mathfrak{k}$ e $\flat(\mathfrak{k}^\perp) = \mathfrak{k}^0$. Para quaisquer $i,j \in \{1,\dots,r\}$ e $k,l \in \{1,\dots,s\}$ temos

$$\begin{aligned}
\flat(X_i)(X_j) &= \langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij} = X_i^*(X_j),\\
\flat(X_i)(Y_k) &= \langle X_i, Y_k\rangle = 0 = X_i^*(Y_k)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\flat(Y_k)(X_i) &= \langle Y_k, X_i\rangle = 0,\\
\flat(Y_k)(Y_l) &= \langle Y_k, Y_l\rangle = \delta_{kl} = Y_k^*(Y_l).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{k}$ é isomorfo a $(\mathfrak{k}^\perp)^0$ e $\mathfrak{k}^\perp$ é isomorfo a $\mathfrak{k}^0$. □

Lema 4.2.2. *Os subespaços $\mathfrak{k}^0$ e $(\mathfrak{k}^\perp)^0$ são ortogonais com respeito ao produto interno de $\mathfrak{g}^*$ induzido por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Demonstração: Recordemos que o produto interno em $\mathfrak{g}^*$, induzido por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, é dado por

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathfrak{g}^*} = \langle \flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)\rangle$$

para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*$. Queremos mostrar que $\mathfrak{k}^0$ e $(\mathfrak{k}^\perp)^0$ são ortognais com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}^*}$. Tomemos $\alpha \in \mathfrak{k}^0$ e $\beta \in (\mathfrak{k}^\perp)^0$. Pelo Lema 4.2.1, existem únicos $Y \in \mathfrak{k}$ e $X \in \mathfrak{k}^\perp$ tais que $\alpha = \flat(X)$ e $\beta = \flat(Y)$. Assim,

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{\mathfrak{g}^*} = \langle \flat^{-1}(\flat(X)), \flat^{-1}(\flat(Y))\rangle = \langle X, Y\rangle = 0$$

como desejávamos. □

Lema 4.2.3. *Existe um isomorfismo canônico entre $\mathfrak{k}^*$ e $(\mathfrak{k}^\perp)^0$.*

Demonstração: A aplicação $\Psi : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\Psi(\alpha)(X) = \begin{cases} \alpha(X), & \text{se} \quad X \in \mathfrak{k}, \\ 0, & \text{se} \quad X \in \mathfrak{k}^\perp \end{cases}$$

está bem definida e é linear. É suficiente mostrarmos que Ψ é injetora, uma vez que $\mathfrak{k}^*$ e $\mathrm{im}(\Psi) = (\mathfrak{k}^\perp)^0$ têm a mesma dimensão. Se $\Psi(\alpha) = 0$, então $\alpha(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{k}$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$ segue que $\alpha = 0$. □

Por causa dos Lemas 4.2.1 e 4.2.3, podemos dizer que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$ se decompõe como soma direta de $\mathfrak{k}^0$ e $\mathfrak{k}^*$, em símbolos, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^0 \oplus \mathfrak{k}^*$. Denotaremos por $\hat{\pi}_K : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ a projeção ortogonal com respeito a decomposição anterior. Assim, vale que

$$\hat{\pi}_K(\xi)^\sharp = \pi(\xi^\sharp)$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Proposição 4.2.4. *Considere o K-espaço $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, K)$. Se $\hat{\pi}_K : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ é a projeção ortogonal com respeito a decomposição anterior, então a aplicação $\Phi_K : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{k}^*$ dada por*

$$\Phi_K = \hat{\pi}_K \circ \Phi$$

é uma aplicação momento.

Demonstração: Para cada $X \in \mathfrak{k}$ queremos mostrar que a função $f_X : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_X(Y) := \Phi_K(Y)(X) \quad \text{para todo} \quad Y \in \mathcal{O}(\Lambda)$$

é uma função Hamiltoniana para o campo induzido $\delta\tau(X) = \mathrm{ad}(X)$. Em outras palavras, isto significa que para cada $Y \in \mathcal{O}(\Lambda)$ devemos ter

$$d(f_X)_Y(\delta\tau_K(Z)) = i_{\delta\tau_K(X)}\omega_{\mathcal{O}(\Lambda),Y}(\delta\tau_K(Z)) = \omega_{\mathcal{O}(\Lambda),Y}(\delta\tau_K(X), \delta\tau_K(Z))$$

para todo $\delta\tau_K(Z)Y = \mathrm{ad}(Z)Y \in T_Y\mathcal{O}(\Lambda)$. Como a projeção $\hat{\pi}_K$ é uma transformação linear segue, da regra da cadeia, que $d(f_X)_Y = \hat{\pi}_K \circ d\Phi_Y$. Esquematicamente, tem-se

$$\begin{tikzcd} T_Y\mathcal{O}(\Lambda) \arrow[r, "d\Phi_Y"] \arrow[rr, bend right, dashed, "d(f_X)_Y"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\hat{\pi}_K"] & \mathfrak{k}^* \end{tikzcd}.$$

Pela Proposição 3.1.4 temos

$$i_{\delta\tau_K(X)}\omega_{\mathcal{O}(\Lambda),Y}(\delta\tau_K(Z)) = \omega_{\mathcal{O}(\Lambda),Y}(\mathrm{ad}(X)Y, \mathrm{ad}(Z)Y) = \langle Y, [X,Z]\rangle.$$

Por outro lado, usando a expressão da aplicação momento na órbita adjunta (veja Exemplo 3.3.7) obtemos

$$\begin{aligned} d(f_X)_Y(\delta\tau_K(Z)Y) &= (\hat{\pi}_K \circ d\Phi_Y)(\delta\tau_K(Z)Y)(X) \\ &= (\hat{\pi}_K \circ \flat)(\delta\tau_K(Z)Y)(X) \\ &= \langle \delta\tau_K(Z)Y, X\rangle \\ &= \langle \mathrm{ad}(Z)Y, X\rangle \\ &= -\langle Y, \mathrm{ad}(Z)X\rangle \\ &= \langle Y, [X,Z]\rangle, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a Proposição 3.1.8. Comparando as igualdades anteriores percebemos que a vale a propriedade desejada. $\square$

Proposição 4.2.5. *A aplicação momento Φ_K, da Proposição 4.2.4, é equivariante com respeito à ação adjunta restrita ao subgrupo K.*

Demonstração: Pelo Exemplo 3.3.17, é suficiente mostrarmos que o quadrado da direita do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\Lambda) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(k)"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\hat{\pi}_K"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}^*(k)"] & \mathfrak{k}^* \arrow[d, "\mathrm{Ad}^*(k)"] \\ \mathcal{O}(\Lambda) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\hat{\pi}_K"'] & \mathfrak{k}^* \end{tikzcd}$$

é comutativo para todo $k \in K$. Sejam $\{X_1, \ldots, X_r\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_s\}$ bases de $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{k}^{\perp}$, respectivamente. Como $\hat{\pi}_K$ é a projeção ortogonal no subespaço $(\mathfrak{k}^{\perp})^0 \simeq \mathfrak{k}^*$ temos que $\hat{\pi}_K(Y_j^*) = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, s\}$. Assim,

$$\hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)Y_j^* = (\hat{\pi}_K \circ Y_j^*) \circ \mathrm{Ad}(k^{-1}) = 0 \tag{4.5}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, s\}$. Notemos, ainda, que $\hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)X_i^* = \mathrm{Ad}^*(k)X_i^*$. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, podemos escrever

$$\xi = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^* + \sum_{j=1}^{s} b_j Y_j^*$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Pela igualdade (4.5) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^*(k)(\hat{\pi}_K(\xi)) &= \sum_{i=1}^{r} a_i \,\mathrm{Ad}^*(k)(X_i^*) \\
&= \hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)\left(\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^*\right) \\
&= \hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)\left(\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^*\right) + \hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)\left(\sum_{j=1}^{s} b_j Y_j^*\right) \\
&= \hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)(\xi).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Ad}^*(k) \circ \hat{\pi}_K = \hat{\pi}_K \circ \mathrm{Ad}^*(k)$. □

Lema 4.2.6. *Todo Hamiltoniano coletivo de $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, K, \Phi_K)$ pode ser considerado como um Hamiltoniano coletivo de $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$.*

Demonstração: De fato, para todo $F \in C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ temos

$$\Phi_K^*(F) = F \circ \Phi_K = F \circ (\hat{\pi}_K \circ \Phi) = (F \circ \hat{\pi}_K) \circ \Phi = \Phi^*(\widetilde{F})$$

onde $\widetilde{F} := F \circ \hat{\pi}_K \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. □

Lema 4.2.7. *Sejam $F \in C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ e $\widetilde{F} = F \circ \hat{\pi}_K \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*$, tem-se*

$$\nabla \widetilde{F}(\xi) = \nabla F(\hat{\pi}_K(\xi)) \in \mathfrak{k}$$

e

$$X_{\Phi^*(\widetilde{F})} = X_{\Phi_K^*(F)}. \tag{4.6}$$

Demonstração: Seja $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Pela regra da cadeia temos $d\widetilde{F}_\xi = dF_{\hat{\pi}(\xi)} \circ d(\hat{\pi}_K)_\xi = dF_{\hat{\pi}(\xi)} \circ \hat{\pi}_K$. Seja $\{X_1, \ldots, X_s\}$ uma base $\mathfrak{k}$. Podemos completar tal conjunto, com elementos de $\mathfrak{k}^\perp$, a uma base de $\mathfrak{g}$, digamos $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla \widetilde{F}(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} d\widetilde{F}_\xi(X_i^\flat) X_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} dF_{\hat{\pi}(\xi)}(\hat{\pi}_K(X_i^\flat)) X_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} dF_{\hat{\pi}_K(\xi)}(X_i^\flat) X_i \\
&= \nabla F(\hat{\pi}_K(\xi)).
\end{aligned}$$

Já a igualdade (4.6) é uma consequência do que acabamos de mostrar e da Proposição 3.3.33 pois

$$\begin{aligned} X_{\Phi^*(\widetilde{F})} &= \mathrm{ad}((\nabla \widetilde{F}) \circ \Phi) \\ &= \mathrm{ad}((\nabla F) \circ \hat{\pi}_K \circ \Phi) \\ &= \mathrm{ad}((\nabla F) \circ \Phi_K) \\ &= X_{\Phi_K^*(F)} \end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 4.2.8. *Se ϕ_t é o fluxo do campo Hamiltoninano $X_{\Phi^*(\hat{F})}$, então*

$$\frac{d}{dt}\Phi_K(\phi_t(Z)) = [\nabla F(\Phi_K(\phi_t(Z))), \Phi_K(\phi_t(Z))]$$

quando Φ_K é vista como aplicação de $\mathcal{O}(\Lambda)$ em $\mathfrak{k}$.

Demonstração: Preliminarmente, obteremos uma igualdade auxiliar. Dados $Y \in \mathcal{O}(\Lambda)$ e $\mathrm{ad}(Z)Y \in T_Y\mathcal{O}(\Lambda)$, vale que

$$d(\Phi_K)_Y(\mathrm{ad}(Z)Y) = \mathrm{ad}^*(Z)\Phi_K(Y).$$

De fato, pela equivariância de Φ_K (Proposição 4.2.5) temos

$$\begin{aligned} d(\Phi_K)_Y(\mathrm{ad}(W)Y) &= \frac{d}{dt}\Phi_K \circ \mathrm{Ad}(\exp(tW))Y|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}^*(\exp(tW))\Phi_K(Y)|_{t=0} \\ &= \mathrm{ad}^*(W)\Phi_K(Y). \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia e a igualdade (4.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_K(\phi_t(Z)) &= d(\Phi_K)_{\phi_t(Z)}\left(\frac{d}{dt}\phi_t(Z)\right) \\ &= d(\Phi_K)_{\phi_t(Z)}(X_{\Phi^*(\widetilde{F})}(\phi_t(Z))) \\ &= d(\Phi_K)_{\phi_t(Z)}(X_{\Phi_K^*(F)}(\phi_t(Z))) \\ &= d(\Phi_K)_{\phi_t(Z)}(\mathrm{ad}(\nabla F(\Phi_K(\phi_t(Z))))\phi_t(Z)) \\ &= \mathrm{ad}^*(\nabla F(\Phi_K(\phi_t(Z))))\Phi_K(\phi_t(Z)) \end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos a expressão (3.9) e na última igualdade aplicamos o resultado auxiliar acima para $Y = \phi_t(Z)$ e $W = \nabla F(\Phi_K(\phi_t(Z)))$. □

4.3 Truque de Thimm e Sistemas Integráveis do tipo Gelfand-Tsetlin

Nosso objetivo consiste em apresentar um método para se construir quantidades conservadas em involução para sistemas Hamiltonianos onde a função Hamiltoniana é dada por um Hamiltoniano coletivo. A ideia é baseada num resultado conhecido na literatura por *Truque de Thimm* (vide [1, p.503] para maiores detalhes). Antes de enunciá-lo, vejamos o seguinte

Lema 4.3.1. *Se $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ é invariante pela ação coadjunta, então*

$$\xi([\nabla F(\xi), X]) = 0$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Demonstração: Dados $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$, tem-se

$$F(\xi) = F(\mathrm{Ad}^*(g)\xi).$$

Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$F(\xi) = F \circ \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\xi.$$

Derivando ambos os lados em $t = 0$ e usando a definição (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F \circ \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\xi|_{t=0} \\ &= dF_\xi \circ \mathrm{ad}^*(X)\xi \\ &= \mathrm{ad}^*(X)\xi(\nabla F(\xi)) \\ &= -\xi \circ \mathrm{ad}(X)(\nabla F(\xi)) \\ &= \xi([\nabla F(\xi), X]) \end{aligned}$$

como queríamos. □

Originalmente o próximo resultado é enunciado de maneira distinta (vide [1]), mais geral do que a versão que apresentaremos aqui. De fato, não é exigido que o grupo G seja compacto e conexo, entretanto, supõe-se que existe uma forma bilinear não degenerada simétrica e Ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Nesse caso, é necessário acrescentar a hipótese das subálgebras $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ serem não degeneradas.

Proposição 4.3.2 (Truque de Thimm [1]). *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo, $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ subálgebras de $\mathfrak{g}$ com projeções duais $\hat{\pi}_i : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}_i^*$, onde $i \in \{1, 2\}$, e $F_1 \in C^\infty(\mathfrak{h}_1^*)$, $F_2 \in C^\infty(\mathfrak{h}_2^*)$. Se F_1 é invariante pela ação coadjunta de $H_1 = \exp(\mathfrak{h}_1)$ e $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] \subseteq \mathfrak{h}_1$, então $\{\hat{\pi}_1^*(F_1), \hat{\pi}_2^*(F_2)\}_{\mathfrak{g}^*} = 0$. Em particular, o resultado é válido quando $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{h}_1$ ou $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = \{0\}$.*

Demonstração: A condição de G ser compacto nos assegura a existência de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{g}$ que é Ad-invariante (vide página 52). Dessa forma, os espaços $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ são, pela Proposição 3.1.4, isomorfos. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, denotaremos por $\xi^\sharp \in \mathfrak{g}$ o vetor correspondente. Consideremos o parênteses de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{g}^*}$ como definido em (3.5). Dados $F_1 \in C^\infty(\mathfrak{h}_1^*)^{H_1}$ e $F_2 \in C^\infty(\mathfrak{h}_2^*)$, tem-se, pelo Lema 4.2.7, que

$$\begin{aligned}
\{F_1 \circ \hat{\pi}_1, F_2 \circ \hat{\pi}_2\}_{\mathfrak{g}^*}(\xi) &= \xi([\nabla(F_1 \circ \hat{\pi}_1)(\xi), \nabla(F_2 \circ \hat{\pi}_2)(\xi)]) \\
&= \langle \xi^\sharp, [\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)), \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))]\rangle \\
&= \langle \xi^\sharp, \mathrm{ad}(\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)))\nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))\rangle \\
&= \langle - \mathrm{ad}(\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)))\xi^\sharp, \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))\rangle \\
&= \langle [\xi^\sharp, \nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi))], \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))\rangle. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Podemos decompor a álgebra $\mathfrak{g}$ na soma direta $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1^\perp$. Assim, escreva

$$\xi^\sharp = \pi_1(\xi^\sharp) + \xi^\sharp_\perp \in \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1^\perp.$$

O produto interno em (4.7) é igual a soma de duas parcelas. A primeira delas é

$$\begin{aligned}
\langle [\pi_1(\xi^\sharp), \nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi))], \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))\rangle &= \langle \pi_1(\xi^\sharp), [\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)), \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))]\rangle \\
&= \hat{\pi}_1(\xi)([\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)), \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o Lema 4.3.1. Já a segunda parcela de (4.7) é

$$\langle \xi^\sharp_\perp, [\nabla F_1(\hat{\pi}_1(\xi)), \nabla F_2(\hat{\pi}_2(\xi))]\rangle = 0$$

quando $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] \subseteq \mathfrak{h}_1$. Dessa forma, as aplicações $F_1 \circ \hat{\pi}_1$ e $F_2 \circ \hat{\pi}_2$ estão em involução. $\square$

Ressaltamos que aqui admitimos apenas que F_1 é invariante enquanto que em [1] é enunciado exigindo que F_1 e F_2 sejam ambas invariantes, embora a invariância de F_2 não tenha sido utilizada. Se, em vez de F_1, tivéssemos requerido que F_2 fosse invariante, então deveríamos supor que $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] \subseteq \mathfrak{h}_2$.

Observação 4.3.3. Guillemin & Sternberg, em [3, p.225], apresentam condições necessárias e suficientes para que o truque de Thimm seja aplicável. $\diamond$

A seguir, veremos como essa ideia pode ser adaptada para o contexto de órbitas coadjutas.

Descrição do Método

Consideremos (M, ω, G, Φ) um G-espaço Hamiltoniano onde $M = \mathcal{O}(\Lambda)$. Daqui em diante, admitiremos que a aplicação momento é equivariante. Pela Proposição 3.3.38, obtemos que $\Phi : (M, \omega) \to (\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\}^*_{\mathfrak{g}})$ é uma aplicação de Poisson, isto é,

$$\{F \circ \Phi, I \circ \Phi\}_\omega(p) = \{F, I\}_{\mathfrak{g}^*}(\Phi(p))$$

para quaisquer $p \in M$ e $F, I, \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Seja $K \subseteq G$ um subgrupo fechado e conexo. A ação de G em (M, ω) induz, por restrição, uma ação Hamiltoniana de K em (M, ω). Pela Proposição 4.2.4 temos que a aplicação $\Phi_K : (M, \omega) \to \mathfrak{k}^*$ dada por

$$\Phi_K = \hat{\pi}_K \circ \Phi,$$

onde $\hat{\pi}_K : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ é a projeção ortogonal induzida pela inclusão $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, é uma aplicação momento. Além disso, o Lema 4.2.5 nos garante que Φ_K é equivariante. Pela Proposição 3.3.38 concluímos que Φ_K também é uma aplicação de Poisson. Em síntese, a quadrupla (M, ω, K, Φ_K) é um K-espaço Hamiltoniano (vide página 71).

Proposição 4.3.4. *Os Hamiltonianos coletivos obtidos pelas funções de Casimir de* $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{g}^*})$ *e* $(\mathfrak{k}^*, \{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{k}^*})$ *são quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano* $(M, \omega, \Phi_K^*(I))$ *onde* $I \in C^\infty(\mathfrak{k}^*)$

Demonstração: Dados $\Phi^*(F), \Phi_K^*(I) \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\{\Phi^*(F), \Phi_K^*(I)\}_\omega(p) = \{F \circ \Phi, I \circ \hat{\pi}_K \circ \Phi\}_\omega(p) = \{F, I \circ \hat{\pi}_K\}_{\mathfrak{g}^*}(\Phi(p))$$

para todo $p \in M$, já que Φ é uma aplicação de Poisson. Se $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ é uma função de Casimir, então $\{F, I \circ \hat{\pi}_K\}_{\mathfrak{g}^*} = 0$. Daí, os Hamiltonianos $\Phi^*(F)$ e $\Phi_K^*(I)$ estão em involução. Agora, tomemos $\Phi_K^*(F), \Phi_K^*(I) \in C^\infty(M)$ com $F \in C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ uma função de Casimir. Usando que Φ_K é uma aplicação de Poisson temos

$$\{F \circ \Phi_K, I \circ \Phi_K\}_\omega(p) = \{F, I\}_{\mathfrak{k}^*}(\Phi_K(p)) = 0$$

e, portanto, o resultado segue. $\square$

Tendo em mente os resultados anteriores, descreveremos como obter as quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$. Inicialmente, tomemos uma cadeia de subgrupos fechados e conexos da seguinte forma

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_s.$$

Para cada $i \in \{1\ldots,s\}$ temos que $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, K_i, \Phi_i)$ com

$$\Phi_i := \hat{\pi}_i^{(l)} \circ \Phi_l,$$

onde $\hat{\pi}_i^{(l)} : \mathfrak{k}_l \to \mathfrak{k}_i$ é a projeção induzida pela inclusão $\mathfrak{k}_i \hookrightarrow \mathfrak{k}_l$ e $l \in \{0,\ldots,i-1\}$, é um K_i-espaço Hamiltoniano. Consideremos o seguinte sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_s^*(I))$ para algum $I \in C^\infty(\mathfrak{k}_s)$. Pelas Proposições 3.2.3 e 4.3.4,

$$\mathfrak{H} = \{H_j^{(i)} := \Phi_i^*(I_j^{(i)}) : I_j^{(i)} \in C^\infty(\mathfrak{k}_i)^{\mathrm{Ad}}, 1 \le j \le r_i = \mathrm{posto}(K_i) \;\; \text{e} \;\; i \in \{1,\ldots,s\}\}$$

constitui um conjunto de quantidades conservadas em involução. Se o conjunto $\mathfrak{H}$ satisfizer a condição de integrabilidade de Liouville (vide página 46), o sistema integrável $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_s^*(I))$ será chamado de ***sistema integrável do tipo Gelfand-Tsetlin***.

Observação 4.3.5. Guillemin & Sternberg introduziram na década de 1980 o conceito de sistema do tipo Gelfand-Tsetlin no artigo [4]. $\diamond$

4.4 Sistemas Integráveis do tipo Gelfand-Tsetlin para Ações dos Grupos Unitário e Especial Ortogonal

O objetivo dessa seção consiste em explicarmos como podemos construir, de maneira concreta, um sistema integrável do tipo Gelfand-Tsetlin para órbitas (co)adjuntas de $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ através do formalismo de pares de Lax. Para esse fim, usaremos os resultados e a estratégia desenvolvidos anteriormente, além de discutir alguns resultados auxiliares que serão necessários.

Historicamente Guillemin & Sternberg mostraram, para as órbitas coadjuntas de $\mathrm{U}(n)$, que as funções obtidas pela aplicação do truque de Thimm definem um sistema completamente integrável. Nesse caso, a condição de integrabilidade do tipo Gelfand-Tsetlin é uma consequência da ação coadjunta de $\mathrm{U}(n-1)$ em órbitas coadjuntas de $\mathrm{U}(n)$ é uma ação coisotrópica[1] (vide [3,33]).

Proposição 4.4.1. *Se $A \in \mathfrak{u}(k)$, então o polinômio característico $p_A(t) = \det(t\,\mathrm{I}_k - A) \in \mathbb{C}[t]$ é escrito como*

$$p_A(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} c_i(A) t^i$$

[1] Algumas referências usam a terminologia *espaço livre de multiplicidade*, tradução livre de *multiplicity-free spaces*.

onde

$$c_{k-l}(A) = \frac{(-1)^l}{l!} \det \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & l-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & l-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(A^k) & \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \mathrm{tr}(A^{k-2}) & \cdots & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$$

para todo $l \in \{0, \ldots, k\}$.

Demonstração: Vide [34]. □

Teorema 4.4.2. *Sejam* $K \subseteq G$ *um subgrupo de Lie fechado conexo,* T *um toro maximal de* K *com álgebra de Lie denotada por* $\mathfrak{t}$ *e* $\Phi_K : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{k}$ *a aplicação momento como na Proposição 4.2.4.*

1. *Se* $\mathfrak{t}_+ \subseteq \mathfrak{t}$ *é uma câmera de Weyl fechada e positiva, então* $\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(G)\mathfrak{t}_+$*. Além disso, se* $X, Y \in \mathfrak{t}_+$ *estão na mesma* $\mathrm{Ad}(G)$*-órbita, então* $X = Y$*. Noutras palavras, esta última afirmação significa que* $(\mathrm{Ad}(K)X) \cap \mathfrak{t}_+$ *é um conjunto unitário para todo* $X \in \mathfrak{k}$*.*

2. *Sob as mesmas hipóteses do item anterior, a aplicação*[2] $s_K : \mathfrak{k} \to \mathfrak{t}_+$ *que associa cada* $X \in \mathfrak{k}$ *ao único elemento do conjunto* $(\mathrm{Ad}(K)X) \cap \mathfrak{t}_+$ *está bem definida, é contínua, para todo* $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$ *vale*

$$s_K(\Phi_K(Z)) = \mathrm{Ad}(k)\Phi_K(Z)$$

   para algum $k \in K$ *e é* Ad*-invariante.*

3. *Existe um único stratum* $\sigma_K \subseteq \mathfrak{t}_+$ *tal que*

$$\Phi_K(\mathcal{O}(\Lambda)) \cap \mathfrak{t}_+ \subseteq \overline{\sigma_K} \quad e \quad \Phi_K(\mathcal{O}(\Lambda)) \cap \sigma_K \neq \emptyset.$$

4. *Se* $\Sigma_{\sigma_K} = \mathrm{Ad}(K)\sigma_K$*, então valem as seguintes propriedades:*

   (a) $\Phi_K^{-1}(\Sigma_{\sigma_K})$ *é um subconjunto* Ad*-invariante, aberto, conexo e denso de* $\mathcal{O}(\Lambda)$*.*

   (b) a restrição $s_K : \Sigma_{\sigma_K} \to \sigma_K$ *é uma aplicação diferenciável.*

Demonstração: O item 1 é encontrado, por exemplo, nas páginas 155 e 156 de [35]. O item 2 pode ser encontrado nessa mesma referência. A prova do item 3 é feita em [36, Theorem 3.1]. Finalmente, o item 4 é demonstrado em [20, Proposition 1]. □

---

[2] Na literatura, por exemplo [5,20], tal aplicação é denominada *sweeping map*.

Lema 4.4.3. *Sejam K um subgrupo de Lie de G fechado e conexo. Se $\rho : K \to \mathrm{Gl}(V)$ é uma representação unitária, com V sendo um espaço vetorial complexo finitamente gerado, então existe um produto hermitiano K-invariante em V tal que $\rho_*(L_K(Z))$ é um operador anti-hermitiano para todo $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Em particular, os autovalores de tal operador são puramente imaginários.*

Teorema 4.4.4 (Correa-Grama [5]). *Considere o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$ e K um subgrupo de Lie fechado e conexo de G. Para cada $F \in C^\infty(\mathfrak{k})$ o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_K^*(F))$ é completamente determinado pela equação de Lax*

$$\frac{d}{dt}L_K + [L_K, P_K] = 0,$$

onde $L_K = \Phi_K$ e $P_K = \nabla F \circ \Phi_K$. Além disso, para toda representação unitária $\rho : K \to \mathrm{Gl}(V)$ valem as seguintes propriedades:

1. *a equação espectral*

$$\det(w\,\mathrm{I} - \rho_*(L_K)) = 0$$

   é preservada pela fluxo Hamiltoniano de $\Phi_K^*(F)$

2. *A parte imaginária dos autovalores de $\rho_*(L_K)$ são quantidades conservadas para o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{(\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_K^*(F))$ em um subconjunto aberto e denso $\mathcal{U}_K \subseteq \mathcal{O}(\Lambda)$.*

Demonstração: A primeira afirmação segue da Proposição 4.2.8.

Argumentaremos o item 1. Suponhamos que G e K não são abelianos. Como K é um subgrupo fechado e G é compacto segue que K é compacto. Assim, K é igual a união de seus toros maximais. Fixemos T um toro maximal de K e denote por $\mathfrak{t}$ sua álgebra de Lie. Considere $\mathfrak{t}_+$ a câmera de Weyl fechada e positiva tal que $\mathfrak{t}_+ \subseteq \mathfrak{t}$. Consideremos $\rho : K \to \mathrm{Gl}(V)$ uma representação unitária num espaço vetorial complexo finitamente gerado e $\rho_* : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(V)$ a representação induzida nas respectivas álgebras de Lie. Notemos que

$$\begin{aligned}
\rho_* \circ \mathrm{Ad}(k) &= d\rho_1(d(C_k)_1) \\
&= d(\rho \circ C_k)_1 \\
&= d(C_{\rho(k)} \circ \rho)_1 \\
&= d(C_{\rho(k)})_1 \circ d\rho_1 \\
&= \mathrm{Ad}(\rho(k)) \circ \rho_*.
\end{aligned}$$

Seja $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$ e $m \in \mathbb{N}$. Então, $L_K(Z) = \mathrm{Ad}(k)s_K(L_K(Z))$ para algum $k \in K$. Como $\rho_* \circ \mathrm{Ad}(k) = \mathrm{Ad}(\rho(k)) \circ \rho_*$ segue que

$$\mathrm{tr}(\rho_* L_K(Z)) = \mathrm{tr}(\rho_* s_K(L_K(Z))).$$

Daí,

$$\mathrm{tr}([\rho_*(s_K(L_K(Z)))]^m) = \mathrm{tr}([\rho_*(L_K(Z))]^m).$$

Seja $\phi_t(Z)$ a curva integral do Hamiltoniano coletivo $\Phi_K^*(F)$, como no Teorema 3.3.37, para algum $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Uma vez que G age na órbita adjunta pela representação adjunta temos, pelo Teorema 3.3.37, que

$$\phi_t(Z) = \mathrm{Ad}(g(t)Z)$$

onde $g : \mathbb{R} \to K$ é a solução do problema do valor inicial

$$\frac{dg}{dt} = v_{g(t)} \;\text{ e }\; g(0) = 1,$$

para $v \in \mathfrak{X}(K)$ dada por $v_g = (D_g)_*(P_K(\mathrm{Ad}(g)Z))$. Como L_K é equivariante (Lema 4.2.5) e s_K é Ad-invariante (Teorema 4.4.2) segue que

$$\mathrm{tr}(\rho_*(L_K(\phi_t(Z)))) = \mathrm{tr}(\rho_*(s_K(L_K(\phi_t(Z))))) = \mathrm{tr}(\rho_* s_K(L_K(Z))).$$

Daí,

$$\mathrm{tr}([\rho_*(L_K(\phi_t(Z)))]^m) = \mathrm{tr}([\rho_*(s_K(L_K(Z)))]^m).$$

O lado direito da última igualdade acima não depende do parâmetro t, logo

$$\frac{d}{dt}\{\mathrm{tr}([\rho_*(L_K(\phi_t(Z)))]^m)\} = 0.$$

Pela Proposição 4.4.1, o polinômio característico $\det(w\,\mathrm{id}_V - \rho_*(L_K(Z)))$ é uma função do traço $\mathrm{tr}([\rho_*(L_K(Z))]^m)$. Assim, a equação espectral é preservada pelo fluxo de $\Phi_K^*(F)$ e isso prova o item 1.

Mostraremos, agora, o item 2. Seja $\mathcal{U}_K := \Phi_K^{-1}(\Sigma_{\sigma_K})$, como no Teorema 4.4.2, visto como uma subvariedade de $\mathcal{O}(\Lambda)$. Tomemos $\{\xi_1, \ldots, \xi_{r_K}\}$ uma base de $\mathfrak{t}$ onde $r_K = \mathrm{posto}(K)$ e $\{\phi_1, \ldots, \phi_{r_K}\}$ a base dual induzida. Assim,

$$s_K \circ L_K = (\phi_1 \circ s_K \circ L_K)\xi_1 + \cdots + (\phi_{r_K} \circ s_K \circ L_K)\xi_{r_K}. \tag{4.8}$$

Pelo Teorema 4.4.2, a restrição $s_K : \Sigma_{\sigma_K} \to \sigma_K$ é uma aplicação diferenciável. Como L_K é equivariante (Lema 4.2.5) e s_K é Ad-invariante (Teorema 4.4.2) segue que

$$\phi_i \circ s_K \circ L_K \in C^\infty(\mathcal{U}_K)^{\mathrm{Ad}}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, r_K\}$. Pela Proposição 3.2.3, tais aplicações são de Casimir e, assim, constituem quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano definido por $(\mathcal{U}_K, \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}|_{\mathcal{U}_K}, \Phi^*(F)|_{\mathcal{U}_K})$. Pelo Lema 4.4.3, existe um produto interno K-invariante em V tal que $\rho_*(L_K(Z))$ é um operador anti-hermitiano para todo $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Assim, os autovalores deste operador são puramente imaginários e $\rho_*(\xi_1), \ldots, \rho_*(\xi_{r_K})$ são diagonalizáveis. Visto que vale a igualdade

$$\det(w\,\mathrm{id}_V - \rho_*(L_K)) = \det(w\,\mathrm{id}_V - \rho_*(s_K \circ L_K))$$

em $\mathcal{U}_K$, concluímos que os autovalores de $\rho_*(L_K)$ são quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{U}_K, \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}|_{\mathcal{U}_K}, \Phi_K^*(F)|_{\mathcal{U}_K})$. □

Observação 4.4.5. Destacamos que por causa da expressão (4.8) e do Lema 4.4.3, os autovalores de $\rho_*(L_K)$ podem ser vistos como funções que saem da órbita $\mathcal{O}(\Lambda)$ e que não são diferenciáveis em toda variedade, apenas num conjunto aberto e denso. ⋄

Seja V um espaço vetorial complexo finitamente gerado. Considere a relação no conjunto das representações unitárias irredutíveis de G em V definida da seguinte forma: ρ_1 e ρ_2 são equivalentes se, e somente se, existe $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)$$

para todo $g \in G$. Verifica-se que tal relação é uma relação de equivalência. O conjunto das classes de equivalência será denotado por $\widehat{G}$ e a classe de uma representação unitária irredutível $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ será denotada por $[\rho]$.

Corolário 4.4.6 (Correa-Grama [5]). *Sejam o G-espaço Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$ e uma cadeia de subgrupos de Lie*

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_s$$

fechados e conexos. Considere Φ_i a aplicação momento associada a ação Hamiltoniana de cada subgrupo de Lie K_i em $\mathcal{O}(\Lambda)$. Se $F \in C^\infty(\mathfrak{k}_s)$, então

1. *podemos associar o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_s^*(F))$ ao sistema de equações de Lax*
$$\frac{d}{dt}L_i + [L_i, P_i] = 0$$
tais que $L_i = \Phi_i$ e $P_i = \nabla(F \circ \pi_s^i) \circ \Phi_i$ onde $\pi_s^i : \mathfrak{k}_i \to \mathfrak{k}_s$ é a projeção.

2. *para cada $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_s)$, onde $[\rho_i] \in \widehat{K}_i$, existem $L_\rho, P_\rho : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ satisfazendo*

$$\frac{d}{dt}L_\rho + [L_\rho, P_\rho] = 0.$$

Além disso, o espectro $\sigma(L_\rho)$ de L_ρ constitui um conjunto de quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, \Phi_s^*(F))$ num subconjunto aberto denso $\mathcal{U}_\Lambda \subseteq \mathcal{O}(\Lambda)$.

Demonstração: Notemos que $K_i \subset G$ e $F \circ \pi_s^i \in C^\infty(\mathfrak{k}_i)$ para quaisquer $i \in \{1, \ldots, s\}$ e $F \in C^\infty(\mathfrak{k}_s)$. Pelo Teorema 4.4.4, a equação de Lax

$$\frac{d}{dt}L_i + [L_i, P_i] = 0$$

é satisfeita, onde $L_i = \Phi_i$ e $P_i = \nabla(F \circ \pi_s^i)(\Phi_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Isso conclui a afirmação 1.

Vamos argumentar a afirmação 2. Devemos, primeiramente, construir o par de Lax. Consideremos $\rho_i : K_i \to \mathrm{Gl}(V_i)$ representações unitárias irredutíveis do subgrupo K_i em um espaço vetorial complexo V_i com $n_i = \dim_{\mathbb{C}} V_i$. Sejam

$$L_\rho := \bigoplus_{i=1}^{s} (\rho_i)_*(L_i) \quad \text{e} \quad P_\rho := \bigoplus_{i=1}^{s} (\rho_i)_*(P_i),$$

onde $(\rho_i)_* : \mathfrak{k}_i \to \mathfrak{gl}(V_i)$ denota a representação infinitesimal de ρ_i. Se $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$ e $\phi_t(Z)$ é a curva integral do Hamiltoniano $\Phi_s^*(F)$, então

$$\begin{aligned}
[L_\rho(\phi_t(Z)), P_\rho(\phi_t(Z))] &= \bigoplus_{i=1}^{s} [(\rho_i)_*(L_i(\phi_t(Z))), (\rho_i)_*(P_i(\phi_t(Z)))] \\
&= \bigoplus_{i=1}^{s} (\rho_i)_*[L_i(\phi_t(Z)), P_i(\phi_t(Z))] \\
&\overset{\text{equação de Lax}}{=} \bigoplus_{i=1}^{s} (\rho_i)_* \left(-\frac{d}{dt} L_i(\phi_t(Z)) \right) \\
&= -\frac{d}{dt} L_\rho(\phi_t(Z)).
\end{aligned}$$

Para que as aplicações L_ρ e P_ρ constituam um par de Lax é necessário que o contradomínio seja $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ para algum $r \in \mathbb{N}$ (veja a definição na página 79). Pelo Lema C.1.3, basta tomar $r \geq 2(n_1 + \cdots + n_s)$ pois $\mathfrak{gl}(\bigoplus_{i=1}^s V_i)$ é identificado com uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$. Compondo L_ρ e P_ρ com o homomorfismo injetor que realiza a identificação anterior obtemos o par de Lax desejado.

Por fim, resta mostrarmos a segunda afirmação do item 2. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ existe, pelo item 2 do Teorema 4.4.4, um conjunto aberto e denso $\mathcal{U}_{K_i} \subseteq \mathcal{O}(\Lambda)$ tal que a parte imaginária dos autovalores de $(\rho_i)_*(L_i)$ são quantidades conservadas em involução. Consideremos $\mathcal{U}_\Lambda := \bigcap_{i=1}^s \mathcal{U}_{K_i}$ que é um conjunto aberto e denso em $\mathcal{O}(\Lambda)$. Em particular, enxergaremos como uma subvariedade de $\mathcal{O}(\Lambda)$. Assim, a terna $(\mathcal{U}_\Lambda, \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}|_{\mathcal{U}_\Lambda}, \Phi_s^*(F)|_{\mathcal{U}_\Lambda})$ é um sistema Hamiltoniano. Pelo Lema 4.4.3, podemos considerar que os autovalores de cada $L_\rho(X)$ são imaginários puros. Logo, $\sigma(L_\rho) \subseteq \sqrt{-1}\mathbb{R}$. Pelo item 2 do Teorema 4.4.4 temos que os elementos de $\sigma(L_\rho)$ constituem quantidades conservadas em involução em $\mathcal{U}_\Lambda$. $\square$

Teorema 4.4.7 (Correa-Grama [5]). *Se $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, G, \Phi)$ é um G-espaço Hamiltoniano onde G é um dos grupos de Lie $\mathrm{U}(n)$ ou $\mathrm{SO}(n)$, então existe $H \in C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda))$ e um par de funções $L, P : (\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}) \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ tal que*

$$\frac{d}{dt}L(\phi_t(Z)) + [L(\phi_t(Z)), P(\phi_t(Z))] = 0$$

para todo $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$, onde $\phi_t(Z)$ é a curva integral do campo Hamiltoniano X_H através de $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$. Além disso, as soluções da equação espectral

$$\det(w\,\mathrm{I}_r - L) = 0$$

constituem um conjunto maximal de quantidades conservadas em involução para o sistema Hamiltoniano $(\mathcal{O}(\Lambda), \omega_{\mathcal{O}(\Lambda)}, H)$ que coincide com o sistema integrável do tipo Gelfand-Tsetlin em $\mathcal{O}(\Lambda)$.

Demonstração: Consideremos a seguinte cadeia de subgrupos

$$\mathrm{U}(n) \supset \mathrm{U}(n-1) \supset \cdots \supset \mathrm{U}(1) \quad \text{e} \quad \mathrm{SO}(n) \supset \mathrm{SO}(n-1) \supset \cdots \supset \mathrm{SO}(2),$$

onde cada $\mathrm{U}(k)$ (resp. $\mathrm{SO}(k)$) está sendo enxergado como um subgrupo de $\mathrm{U}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$). Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, onde $s = n-1$ ou $s = n-2$, denotaremos por

$$\rho_i : \mathrm{U}(n-i) \to \mathrm{Gl}(n-i, \mathbb{C}) \quad \text{ou} \quad \rho_i : \mathrm{SO}(n-i) \to \mathrm{Gl}(n-i, \mathbb{C})$$

as representações canônicas, ou seja, as inclusões naturais. Definimos $\rho_0 := (\rho_1, \ldots, \rho_s)$. Pelo Corolário 4.4.6, existem aplicações $L, P : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathfrak{u}(r)$, com $L = L_{\rho_0}$ e $P = P_{\rho_0}$, satisfazendo a equação de Lax

$$\frac{d}{dt}L(\phi_t(Z)) + [L(\phi_t(Z)), P(\phi_t(Z))] = 0$$

para todo $Z \in \mathcal{O}(\Lambda)$, onde $\phi_t(Z)$ é a curva integral do Hamiltoniano $H = \Phi_s^*(F) \in C^\infty(\mathcal{O}(\Lambda))$ para algum $F \in C^\infty(\sqrt{-1}\mathbb{R})$, tendo em mente as seguintes identificações $\mathfrak{u}(1) \simeq \sqrt{-1}\mathbb{R} \simeq \mathfrak{so}(2)$. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] A. Thimm, "Integrable geodesic flows on homogeneous spaces," *Ergodic theory and dynamical systems*, vol. 1, no. 4, pp. 495–517, 1981.

[2] V. Guillemin and S. Sternberg, "The moment map and collective motion," *Annals of Physics*, vol. 127, no. 1, pp. 220–253, 1980.

[3] V. Guillemin and S. Sternberg, "On collective complete integrability according to the method of thimm," *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 219–230, 1983.

[4] V. Guillemin and S. Sternberg, "The gelfand-cetlin system and quantization of the complex flag manifolds," *Journal of Functional Analysis*, vol. 52, no. 1, pp. 106–128, 1983.

[5] E. M. Correa and L. Grama, "Lax formalism for gelfand-tsetlin integrable systems," *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 170, p. 102999, 2021.

[6] E. de Moraes Correa, *Integrable Systems in Coadjoint Orbits and Aplications*. Tese (Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2017.

[7] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, 1978.

[8] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, 2017.

[9] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.

[10] A. C. Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, vol. 2. Springer, 2008.

[11] M. Puta, *Hamiltonian mechanical systems and geometric quantization*, vol. 260. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] J. L. Koszul and Y. M. Zou, *Introduction to symplectic geometry*. Springer, 2019.

[13] M. Audin, *Torus actions on symplectic manifolds*, vol. 93. Springer Science & Business Media, 2004.

[14] G. Rudolph, M. Schmidt, and M. Schmidt, *Differential geometry and mathematical physics*. Springer, 2012.

[15] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.

[16] V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Gusein-Zade, *Singularities of differentiable maps: Volume I The Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts*. Birkhäuser, 1985.

[17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics volume 1*. Butterworth-Heinemann, 1976.

[18] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, "Classical mechanics," 2002.

[19] E. Meinrenken, "Symplectic geometry," `http://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/sympl.pdf`, 2000.

[20] J. Lane, "Convexity and thimm's trick," *Transformation Groups*, vol. 23, no. 4, pp. 963–987, 2018.

[21] L. A. B. San Martin, *Grupos de Lie*. Editora da Unicamp, 2016.

[22] A. M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras: Volume I*. Springer, 1990.

[23] C. Gorodski, "Smooth manifolds," in *Smooth Manifolds*, pp. 1–45, Springer, 2020.

[24] V. Chari and A. N. Pressley, *A guide to quantum groups*. Cambridge university press, 1995.

[25] V. Guillemin and S. Sternberg, "Convexity properties of the moment mapping," *Inventiones mathematicae*, vol. 67, pp. 491–513, 1982.

[26] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques: maîtrises de mathématiques*. Dunod, 1970.

[27] J. Marsden and A. Weinstein, "Reduction of symplectic manifolds with symmetry," *Reports on mathematical physics*, vol. 5, no. 1, pp. 121–130, 1974.

[28] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, vol. 17. Springer Science & Business Media, 2013.

[29] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[30] F. W. Warner, *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.

[31] A. Giacobbe, "Some remarks on the gelfand–cetlin system," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 35, no. 49, p. 10591, 2002.

[32] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press, 2003.

[33] D. I. Panyushev and O. S. Yakimova, "Poisson-commutative subalgebras and complete integrability on non-regular coadjoint orbits and flag varieties," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 295, no. 1-2, pp. 101–127, 2020.

[34] T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and H. Alshal, "A galileon primer," *arXiv preprint arXiv:1212.6972*, 2012.

[35] J. J. Duistermaat and J. A. Kolk, *Lie groups*. Springer Science & Business Media, 2012.

[36] E. Lerman, E. Meinrenken, S. Tolman, and C. Woodward, "Non-abelian convexity by symplectic cuts," *Topology 37*, 1998.

[37] L. Santos, *Notas de aula de Álgebra Linear II e III*. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2021.

[38] H. Weyl, *The classical groups*. Princeton university press, 2016.

[39] A. Weinstein, "Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds," *Advances in Mathematics*, 1971.

[40] S. Willard, *General topology*. Courier Corporation, 2012.

[41] J. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[42] J. Lee, *Introduction to topological manifolds*, vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010.

[43] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, vol. 139. Springer Science & Business Media, 2013.

[44] E. L. Lima, *Curso de análise, vol. 2*. Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[45] L. W. Tu, "Manifolds," in *An Introduction to Manifolds*, pp. 47–83, Springer, 2011.

[46] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, vol. 370. American Mathematical Soc., 2010.

[47] E. L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas, IMPA., 2007.

[48] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1. Wiley and Sons, 1963.

[49] B. O'neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.

[50] D. Husemöller *et al.*, *Fibre bundles*, vol. 5. Springer, 1966.

[51] L. A. San Martin, *Algebras de Lie*. Unicamp, 2010.

[52] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, vol. 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[53] J. Hilgert and K.-H. Neeb, *Structure and geometry of Lie groups*. Springer Science & Business Media, 2011.

[54] F. Kneipp, *Classificação das Álgebras de Lie Semissimples e suas Representações*. Monografia (Bacharelado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023.

[55] W. Greub, "Multilinear algebra, universitext," 1978.

[56] S. Roman, S. Axler, and F. Gehring, *Advanced linear algebra*, vol. 3. Springer, 2005.

[57] P. Suetin, A. I. Kostrikin, and Y. I. Manin, *Linear algebra and geometry*. CRC Press, 1989.

[58] E. L. Lima, *Algebra exterior*. IMPA, 2009.

[59] S. MacLane, "Categories for the working mathematician," *Graduate Texts in Mathematics, Springer*, vol. 5, 1988.

[60] T. Leinster, *Basic Category Theory*, vol. 143. Cambridge University Press, 2014.

[61] E. Riehl, *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.

[62] T. W. Hungerford, *Algebra*. Springer, 1974.

[63] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1. New York, London, 1963.

APÊNDICE A – Álgebra Linear

Neste apêndice, abordaremos algumas definições e resultados básicos acerca dos espaços vetoriais simpléticos. Tal estudo se justifica por se tratar do modelo linear das variedades simpléticas. Na literatura os espaços simpléticos são encontrados, predominantemente, em livros de Geometria Simplética (vide [7, 8, 15]). Para uma revisão dos conceitos de Álgebra Linear que serão utilizados consulte [37].

A.1 Espaços Vetoriais Simpléticos

Seja V um espaço vetorial, finitamente gerado a menos que se diga o contrário, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. Uma aplicação bilinear $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ é chamada de ***forma simplética*** quando é antissimétrica[1] e não degenerada. Essa última hipótese significa que se $\omega(v, w) = 0$ para todo $v \in V$, então $w = 0$. O par (V, ω) é denominado ***espaço simplético***[2].

Exploraremos uma consequência da forma simplética ser não degenerada, a saber, podemos identificar o espaço com o seu dual. Dado $v \in V$, a aplicação $v^\flat : V \to \mathbb{K}$ definida por

$$v^\flat(u) \doteq \omega(u, v).$$

é um funcional linear. Assim, a aplicação $\omega^\flat : V \to V^*$ dada por

$$\omega^\flat(v) \doteq v^\flat \tag{A.1}$$

está bem definida e é uma transformação linear. Pelo Teorema da Representação de Riesz, a aplicação $\omega^\sharp : V^* \to V$ que associa cada funcional $f \in V^*$ ao único elemento $f^\sharp \in V$ tal que $f(u) = \omega(u, f^\sharp)$ para todo $u \in V$ está bem definida e é uma transformação linear.

Teorema A.1.1. *A aplicação $\omega^\flat$, como definida em (A.1), é um isomorfismo canônico com inversa $\omega^\sharp$.*

Demonstração: Dado $v \in V$, tem-se

$$\omega(u, v) = v^\flat(u) = \omega(u, (v^\flat)^\sharp)$$

[1] No caso em que o corpo $\mathbb{K}$ tem característica diferente de 2 temos que $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ é antissimétrica se, e somente se, é alternada.

[2] O termo *simplético* foi introduzido em 1939 por Hermann Weyl em seu trabalho intitulado "The Classical Groups: Their Invariants and Representations" [38, p.165]. A ideia inicial era de usar *grupo complexo*, entretanto, a palavra *complexo* poderia provocar ambiguidades. Assim, Hermann Weyl propôs empregar o adjetivo grego correspondente.

para todo $u \in V$. Toda forma simplética é, por definição, não degenerada. Logo, $v = (v^\flat)^\sharp$, que pode ser relido como $\omega^\sharp \circ \omega^\flat = \mathrm{id}_V$. Por outro lado, para cada $f \in V^*$ temos

$$(f^\sharp)^\flat(u) = \omega(u, f^\sharp) = f(u)$$

para todo $u \in V$. Daí, $(f^\sharp)^\flat = f$ para cada $f \in V^*$, mostrando que $\omega^\flat \circ \omega^\sharp = \mathrm{id}_{V^*}$. Portanto, obtemos o isomorfismo desejado. □

Observação A.1.2. Em geral, a partir de uma forma não degenerada podemos sempre identificar V com o seu dual V^*. A construção do isomorfismo é feita de maneira análoga a do Teorema A.1.1. Quando houver a necessidade de não sobrecarregar a notação escreveremos $v^\flat$ e $f^\sharp$ em vez de $\omega^\flat(v)$ e $\omega^\sharp(f)$, respectivamente. ◇

Lema A.1.3. *Se $\mathcal{B}$ é uma base de um espaço simplético (V, ω), então as matrizes $[\omega^\flat]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$ e $[\omega]_{\mathcal{B}}$ são iguais. Em particular, $[\omega]_{\mathcal{B}}$ é inversível.*

Proposição A.1.4. *Todo espaço simplético tem dimensão par.*

Demonstração: Fixemos uma base $\mathcal{B}$ em V e denotemos $A = [\omega]_{\mathcal{B}}$. Tal matriz é antissimétrica e tem determinante não nulo pois ω é antissimétrica e não degenerada, respectivamente. Assim, tem-se

$$\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Para que a igualdade seja válida n tem que ser um número par. □

Exemplo A.1.5 (Estrutura Simplética Canônica). Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica diferente de 2. Considere a forma bilinear $\omega_0 : \mathbb{K}^{2n} \times \mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\omega_0(x, y) = \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ e $y = (y_1, \ldots, y_{2n})$. Verifica-se que ω_0 é uma forma simplética de $\mathbb{K}^{2n}$. ◇

Exemplo A.1.6. Se V é um espaço vetorial, então $W := V \oplus V^*$ tem dimensão par. A aplicação $\omega : W \times W \to \mathbb{K}$ definida por

$$\omega((u, f), (v, g)) := g(u) - f(v). \tag{A.2}$$

é uma forma simplética em W. ◇

A.2 Subespaços de um Espaço Simplético

Dizemos que W é um ***subespaço simplético*** de (V, ω) quando $W \subseteq V$ tiver estrutura de subespaço vetorial e a restrição $\omega|_{W \times W}$ for não degenerada. O ***ortogonal simplético*** de W, ou ***complemento ortogonal de*** W ***com respeito a*** ω, é definido

$$W^\omega \equiv W^{\perp_\omega} \doteq \{v \in V : \omega(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in W\}.$$

Quando não houver perigo de ambiguidade pode-se escrever $W^\perp$ em vez de $W^{\perp_\omega}$.

Exemplo A.2.1. Seja $(V \oplus V^*, \omega)$ o espaço simplético do Exemplo A.1.6. A restrição de ω ao subespaço $V \oplus \{0\}$ é a aplicação identicamente nula. Logo, a restrição de uma forma simplética a um subespaço não é, em geral, uma forma simplética. $\diamond$

Exemplo A.2.2. Seja (V, ω) um espaço simplético. Se $W \subseteq V$ é um subespaço com $\dim W = 1$, então $\omega|_{W \times W} = 0$. Assim, $(W, \omega|_{W \times W})$ não é um espaço simplético. $\diamond$

Motivados pelos exemplos anteriores, dizemos que um subespaço W é

- ***isotrópico*** quando $W \subseteq W^\perp$.
- ***coisotrópico*** quando $W^\perp \subseteq W$.
- ***simplético*** quando $W \cap W^\perp = \{0\}$.
- ***Lagrangiano*** quando $W = W^\perp$.

Notemos que W é isotrópico se, e somente se, a restrição $\omega|_{W \times W}$ é identicamente nula. Além disso, todo espaço Lagrangiano é isotrópico e coisotrópico simultaneamente.

Abaixo listamos algumas propriedades do ortogonal simplético de um subespaço.

Proposição A.2.3. *Se (V, ω) é um espaço simplético e $W_1, W_2 \subseteq V$ são subespaços, então*

1. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
2. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.
3. *se* $W_1 \subseteq W_2$, *então* $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.
4. $(W_1^\perp)^\perp = W_1$.
5. $\dim V = \dim W_1 + \dim W_1^\perp$.

Demonstração: Argumentaremos apenas o último item sendo que os demais podem ser encontrados em [14]. Mostraremos que $\omega^\flat(W^\perp) = W^0$ onde W^0 denota o anulador de W em V^*. Seja $v \in W^\perp$. Para todo $u \in W$ temos

$$\omega^\flat(v)(u) = v^\flat(u) = \omega(u, v) = 0,$$

ou seja, $\omega^\flat(v) \in W^0$. Logo, vale a inclusão $\omega^\flat(W^\perp) \subseteq W^0$. Agora, seja $f \in W^0$. Já sabemos, do Teorema A.1.1, que a aplicação $\omega^\flat$ é, em particular, sobrejetora. Assim, existe $v \in V$ tal que $f = \omega^\flat(v)$. Dado $u \in W$, tem-se

$$\omega(u, v) = \omega^\flat(v)(u) = f(u) = 0$$

Daí, $v \in W^\perp$, implicando que $f \in \omega^\flat(W^\perp)$. Pelo Teorema A.1.1 temos

$$\dim W^\perp = \dim \omega^\flat(W^\perp) = \dim W^0.$$

Portanto,

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim W + \dim W^0 = \dim V$$

como desejávamos. □

Proposição A.2.4. *Se W é um subespaço de V, então*

1. *W é simplético se, e somente se, $W^\perp$ é simplético.*
2. *W é isotrópico se, e somente se, $W^\perp$ é coisotrópico.*
3. *W é Lagrangiano se, e somente se, W é isotrópico e $\dim W = (\dim V)/2$.*

Demonstração: O item 1 segue da definição de espaço simplético e $(W^\perp)^\perp = W$. Pelos itens 3 e 4 da Proposição A.2.3 temos que W é isotrópico se, e somente se, $(W^\perp)^\perp = W \subseteq W^\perp$. Logo, vale o item 2. Suponhamos que W é Lagrangiano. Em particular, W é isotrópico. Visto que $\dim V = \dim W + W^\perp$ e, por hipótese, $W = W^\perp$ obtemos que $\dim W = (\dim V)/2$. Reciprocamente, pelo item 5 da Proposição A.2.3 temos que $\dim W^\perp = (\dim V)/2 = \dim W$. Como $W \subseteq W^\perp$, pois W é isotrópico, segue que $W = W^\perp$.
□

Proposição A.2.5. *Seja W um subespaço de (V, ω).*

1. *se W é isotrópico, então $\dim W \leq (\dim V)/2$.*

2. *se W é coisotrópico, então* $\dim W \geq (\dim V)/2$*.*

3. *se W é Lagrangiano, então* $\dim W = (\dim V)/2$*.*

4. *W é simplético se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demonstração: Todos os itens são consequências da Proposição A.2.3. Argumentaremos apenas o item 4. Já sabemos que

$$\dim(W + W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} - \dim(W \cap W^{\perp}) = \dim V - \dim(W \cap W^{\perp}).$$

Assim, $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$. □

Teorema A.2.6. *Se (V, ω) é um espaço simplético com $\dim V = 2n$, então existe uma base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ tal que*

$$\omega(e_i, f_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \;\; e \;\; \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \tag{A.3}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Argumentaremos por indução na dimensão de V. Considere $n = 1$. Tomemos $e_1 \in V$ não nulo. Como ω é não degenerada, existe $f_0 \in V$ não nulo tal que $\omega(e_1, f_0) \neq 0$. Defina $f_1 = \omega(e_1, f_0)^{-1} f_0$. O conjunto $\{e_1, f_1\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{K}$ tais que

$$ae_1 + bf_1 = 0.$$

Como ω é antissimétrica segue que

$$a\omega(e_1, f_1) = a\omega(e_1, f_1) + b\omega(f_1, f_1) = \omega(ae_1 + bf_1, f_1) = \omega(0, f_1) = 0$$

e

$$b\omega(e_1, f_1) = a\omega(e_1, e_1) + b\omega(e_1, f_1) = \omega(e_1, ae_1 + bf_1) = \omega(e_1, 0) = 0.$$

Daí, $a = b = 0$, implicando que $\{e_1, f_1\}$ é uma base de V com as propriedades do enunciado. Suponhamos, agora, que o resultado é válido para um certo $n \in \mathbb{N}$. De maneira análoga à construção feita no caso base da indução, existe um subespaço $W = \operatorname{ger}\{e_1, f_1\}$ de V que é simplético. Pela Proposição A.2.3, tem-se a decomposição

$$V = W \oplus W^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} \oplus W^{\perp}.$$

Assim, $W^\perp$ é um subespaço simplético de V com $\dim W^\perp = 2(n-1) < 2n$. A hipótese de indução nos assegura que existe um conjunto

$$\{e_2, \ldots, e_n, f_2, \ldots, f_n\}$$

que é uma base de $W^\perp$ que tem as propriedades do enunciado. Portanto, o conjunto

$$\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$$

é a base procurada. □

Uma base $\mathcal{B}$ de (V, ω) como no Teorema A.2.6 é chamada de ***base simplética***. Dessa forma, todo espaço vetorial simplético admite uma base simplética.

Todo espaço vetorial de dimensão par admite uma forma simplética. Suponhamos que V é um espaço vetorial com $\dim V = 2n$. Tomemos $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ uma base arbitrária de V. Defina $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ na base $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ como em (A.3) e estenda por linearidade. Por construção, ω é antissimétrica e não degenerada e, portanto, é uma forma simplética em V.

Exemplo A.2.7. Seja $(\mathbb{K}^{2n}, \omega_0)$ o espaço simplético do Exemplo A.1.5. A base canônica $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ de $\mathbb{K}^{2n}$ é uma base simplética com relação à forma ω_0. ◇

Exemplo A.2.8. Considere o espaço simplético do Exemplo A.1.6. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ a respectiva base dual. Valem as seguintes igualdades

$$\omega((v_i, 0), (0, v_i^*)) = 1$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e

$$\begin{aligned} \omega((v_i, 0), (0, v_j^*)) &= v_j^*(v_i) = 0 \\ \omega((v_i, 0), (v_j, 0)) &= \omega((0, v_i^*), (0, v_j^*)) = 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Logo, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{(v_1, 0), (0, v_1^*), \ldots, (v_n, 0), (0, v_n^*)\}$$

é uma base simplética de W. ◇

Proposição A.2.9. *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Considere*

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$$

uma base simplética de V e $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*, f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ a base de V^* dual a $\mathcal{B}$. Valem as seguintes afirmações:

1. $\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_n^* \wedge f_n^*$.

2. *para todo* $k \in \{1, \ldots, n\}$*, tem-se*

$$\frac{\omega^k}{k!} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} e_{i_1}^* \wedge f_{i_1}^* \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge f_{i_k}^*$$

onde $\omega^k \doteq \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ *(*k*-vezes). Em particular,* $\frac{\omega^n}{n!}$ *é uma forma volume em* V *que nunca se anula, valendo 1 na base simplética* $\mathcal{B}$*.*

Exemplo A.2.10. Os subespaços $W_1 = V \oplus \{0\}$ e $W_2 = \{0\} \oplus V^*$ de $V \oplus V^*$ são Lagrangianos com respeito à forma simplética definida no Exemplo A.1.6. A partir da expressão (A.2) percebemos que $W_1 \subseteq W_1^{\perp}$. Seja $(u, f) \in W_1^{\perp}$. Para todo $v \in V$ temos que

$$f(v) = -\omega((u, f), (v, 0)) = 0.$$

Daí, f é o funcional identicamente nulo, implicando que $(u, f) \in W_1$. Argumento análogo mostra que W_2 é Lagrangiano. $\diamond$

Pela Proposição A.2.5 o *tamanho* dos subespaços isotrópicos está limitado superiormente pela metade da dimensão do espaço V. Dessa forma, é interessante construirmos a partir de um subespaço isotrópico arbitrário o maior subespaço isotrópico que o contém. A abordagem feita a seguir também é válida para o contexto de dimensão infinita.

Seja W um subespaço isotrópico de (V, ω) e considere a seguinte coleção

$$\mathfrak{I}(W) = \{Z \leq V : Z \text{ é isotrópico e } W \subseteq Z\},$$

Notemos que W é um espaço isotrópico que contém W e, assim, $\mathfrak{I}(W) \neq \emptyset$.

Lema A.2.11. *Seja* $\mathfrak{W} = (W_i)_{i \in I}$ *uma cadeia de subespaços de um espaço simplético* (V, ω)*.*

1. $\bigcup_{i \in I} W_i$ *é um subespaço de* V*.*

2. $\mathfrak{W}^{\perp} = (W_i^{\perp})_{i \in I}$ *é uma cadeia.*

3. *Se* $\mathfrak{W}$ *é uma cadeia de subespaços isotrópicos, então* $\bigcup_{i \in I} W_i$ *é isotrópico.*

Demonstração: A fim de não sobrecarregar a notação denotemos $W = \bigcup_{i \in I} W_i$. Fixe um índice $i_0 \in I$. Como W_{i_0} é um subespaço de V segue que $0 \in W_{i_0} \subseteq W$. Sejam $a \in \mathbb{K}$ e $u, v \in W$. Assim, existem $j, k \in I$ tais que $u \in W_j$ e $v \in W_k$. Por hipótese, $\mathfrak{W}$ é uma cadeia, logo $W_j \subseteq W_k$ ou $W_k \subseteq W_j$. Suponha, sem perda de generalidade, que $W_k \subseteq W_j$. Assim,

$v \in W_j$ e como W_j é um subespaço vetorial segue que $au + v \in W_j \subseteq W$. Isto mostra a afirmação 1.

Usando a Proposição A.2.3 podemos concluir que $\mathfrak{W}^\perp$ é uma cadeia, ou seja, vale a afirmação 2.

Sejam $u, v \in W$. Então, existem índices $j, k \in I$ tais que $u \in W_j$ e $v \in W_k$. Mais ainda, $W_j \subseteq W_j^\perp$ e $W_k \subseteq W_k^\perp$, já que $\mathfrak{W}$ é uma coleção de subespaços isotrópicos. Há dois casos para considerarmos, a saber, $W_j \subseteq W_k$ ou $W_k \subseteq W_j$ pois $\mathfrak{W}$ é uma cadeia. Assim,

- se $W_j \subseteq W_k$, então $\omega(u', v) = 0$ para todo $u' \in W_k$. Como $u \in W_k$ segue que $\omega(u, v) = 0$.

- se $W_k \subseteq W_j$, então $\omega(u, v') = 0$ para todo $v' \in W_j$. Como $v \in W_j$ segue que $\omega(u, v) = 0$.

Portanto, $W \subseteq W^\perp$. □

Teorema A.2.12. *Sejam (V, ω) um espaço simplético. Se $W \subseteq V$ é isotrópico não trivial, então W está contido em algum subespaço Lagrangiano.*

Demonstração: Inicialmente, notemos que $(\mathfrak{I}(W), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, sendo $\subseteq$ a inclusão usual. Seja $(Z_i)_{i \in I}$ uma cadeia em $\mathfrak{I}(W)$. O conjunto $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ é, pelo Lema A.2.11, um subespaço de V, pois $(Z_i)_{i \in I}$ é uma cadeia, e é um elemento de $\mathfrak{I}(W)$. De fato, como para cada $i \in I$ vale que $\{0\} \subsetneq W \subseteq Z_i$ segue que $W \subseteq Z$ e pelo Lema A.2.11 o subespaço Z é isotrópico. Assim, o subespaço Z é uma cota superior do conjunto $\mathfrak{I}(W)$. Pelo Lema de Kuratowski-Zorn, existe um elemento maximal em $\mathfrak{I}(W)$, digamos L. Devemos garantir que tal elemento é um subespaço Lagrangiano. É suficiente mostrarmos que $L^\perp \subseteq L$, já que L é isotrópico. Suponha, por absurdo, que exista $v_0 \in L^\perp$ tal que $v_0 \notin L$. O subespaço

$$\widetilde{L} := L + \mathrm{ger}\{v_0\}$$

é isotrópico e contém L. Com efeito, dado $w_1 = u + \lambda v_0, w_2 = u' + \lambda' v_0 \in \widetilde{L}$, com $u, u' \in L$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} \omega(w_1, w_2) &= \omega(u, w_2) + \lambda \omega(v_0, w_2) \\ &= \omega(u, u') + \lambda' \omega(u, v_0) + \lambda(\omega(v_0, u') + \lambda' \omega(v_0, v_0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pela maximalidade de L devemos ter que $\widetilde{L} = L$ e, assim, $v_0 \in L$ o que é uma contradição. Portanto, L é um subespaço Lagrangiano que contém W como afirmado. $\square$

Corolário A.2.13. *Se (V, ω) é um espaço simplético com $V \neq \{0\}$, então existe um subespaço $L \subseteq V$ que é Lagrangiano.*

Demonstração: Seja $v_0 \in V \setminus \{0\}$. Todo subespaço de dimensão 1 é isotrópico. Em particular, $\operatorname{ger}\{v_0\}$ é isotrópico. Pelo Teorema A.2.12, existe um subespaço Lagrangiano L tal que $\operatorname{ger}\{v_0\} \subseteq L$. $\square$

Observação A.2.14. Em [39] é apresentada uma versão do Teorema A.2.12 para espaços de Hilbert. $\diamond$

A discussão anterior pode ser adaptada para o contexto de espaços coisotrópicos. Já sabemos, pela Proposição A.2.5, que o "tamanho" dos subespaços coisotrópicos está limitado inferiormente pela metade da dimensão de V. Assim, uma pergunta natural aqui é sobre a existência, a partir de um subespaço coisotrópico W fixado *a priori*, de um elemento mínimo no conjunto $\mathfrak{CoI}(W)$ de todos os subespaços coisotrópicos que contém W. Um raciocínio análogo ao que foi feito no Teorema A.2.12 nos permite concluir que todo subespaço coisotrópico contém um espaço Lagrangiano.

A.3 Simpletomorfismos

Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) dois espaços simpléticos. Uma transformação linear $T : V_1 \to V_2$ é dita uma ***aplicação simplética*** quando

$$\omega_2(T(v), T(w)) = \omega_1(v, w). \tag{A.4}$$

Além disso, se T for ainda um isomorfismo diremos que T é um ***simpletomorfismo***.

Proposição A.3.1. *Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) espaços simpléticos. Se $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ é uma aplicação simplética, então T é injetora. Além disso, se V_1 e V_2 são finitamente gerados e têm a mesma dimensão, então T é um simpletomorfismo.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ uma aplicação simplética. Se $T(v) = 0$, então a igualdade (A.4) juntamente com o fato de ω_1 ser não degenerada nos garantem que $v = 0$. Logo, $\operatorname{nuc}(T) = \{0\}$, ou seja, T é injetora. $\square$

Percebemos, no caso que $V_1 = V_2 = V$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, que a composta de isomorfismos simpléticos é ainda um isomorfismo simplético. Assim, o conjunto $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ dos isomorfismos que preservam a forma simplética tem estrutura de grupo. Pode-se mostrar, com o auxílio do Teorema do Valor Regular (vide [8, p.19]), que a álgebra de Lie correspondente é

$$\mathfrak{sp}(V, \omega) = \{T \in \mathcal{L}(V) : \omega(T\cdot, \cdot) + \omega(\cdot, T\cdot) = 0\}.$$

O próximo resultado nos fornece uma maneira de julgarmos se uma transformação linear é um simpletomorfismo através do conceito de base simplética.

Proposição A.3.2. *Sejam (U, ω) e (V, η) espaços vetoriais simpléticos sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere $T \in \mathcal{L}(U, V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é um simpletomorfismo.*
2. *T leva qualquer base simplética numa básica simplética.*
3. *T leva alguma base simplética numa base simplética.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\}$ uma base simplética de U. O conjunto $T(\mathcal{B})$ é uma base de V, uma vez que T é um isomorfismo. Devemos mostrar que os elementos de tal conjunto satisfazem as relações (A.3). Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos

$$\omega_2(T(u_i), T(v_i)) = \omega_1(u_i, v_i) = 1,$$

onde na segunda igualdade usamos a hipótese de $\mathcal{B}$ ser uma base simplética. Agora, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned} \omega_2(T(u_i), T(v_j)) &= \omega_1(u_i, v_j) = 0, \\ \omega_2(T(u_i), T(u_j)) &= \omega_1(u_i, u_j) = 0, \\ \omega_2(T(v_i), T(v_j)) &= \omega_1(v_i, u_j) = 0 \end{aligned}$$

Isto nos mostra que a afirmação 1 implica em 2.

Notemos que a afirmação 2 implica em 3. Resta apenas mostrarmos que a afirmação 3 implica em 1. Por hipótese, existem bases simpléticas

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\} \quad \text{e} \\ \mathcal{C} &= \{e'_1, f'_1, \ldots, e'_n, f'_n\} \end{aligned}$$

de U e V, respectivamente, tais que

$$T(e_i) = e'_i \ \text{ e } \ T(f_i) = f'_i$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, T é um isomorfismo. Vejamos, agora, que vale a igualdade (A.4). Sejam $u_1, u_2 \in U$. Escreva $u_1 = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^n b_i f_i$ e $u_2 = \sum_{i=1}^n c_i e_i + \sum_{i=1}^n d_i f_i$ onde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\omega(u_1, u_2) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\omega(e_i, e_j)}_{0} + \sum_{j=1}^n d_j \underbrace{\omega(e_i, f_j)}_{\delta_{ij}} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\omega(f_i, e_j)}_{0} + \sum_{j=1}^n d_j \underbrace{\omega(f_i, f_j)}_{-\delta_{ij}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta(T(u_1), T(u_2)) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\eta(e'_i, e'_j)}_{0} + \sum_{j=1}^n d_j \underbrace{\eta(e'_i, f'_j)}_{\delta_{ij}} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\eta(f'_i, e'_j)}_{-\delta_{ij}} + \sum_{j=1}^n d_j \underbrace{\eta(f'_i, f'_j)}_{0} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i).
\end{aligned}$$

As igualdades acima nos mostram que $\omega(u_1, u_2) = \eta(T(u_1), T(u_2))$ para quaisquer $u_1, u_2 \in U$, ou seja, T é uma aplicação simplética e, portanto, um simpletomorfismo. $\square$

Proposição A.3.3. *Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) espaços simpléticos. Se $\dim U = \dim V$, então (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) são simpletomorfos.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ e $\mathcal{C} = \{e'_1, \dots, e'_n, f'_1, \dots, f'_n\}$ bases simpléticas de V_1 e V_2, respectivamente. A transformação linear $T : V_1 \to V_2$ dada por $T(e_i) = e'_i$ e $T(f_i) = f'_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ é um isomorfismo, já que leva base em base. Além disso, a Proposição A.3.2 nos garante que T é um simpletomorfismo. $\square$

Proposição A.3.4. *Sejam (V, ω) um espaço simplético e $T \in \mathcal{L}(V)$ um simpletomorfismo.*

1. *Se W é um subespaço de V, então $T(W^\perp) = T(W)^\perp$.*

2. *Se $W \subseteq V$ é isotrópico, coisotrópico ou Lagrangiano, então $T(W)$ também o é.*

3. *Dois autovetores de T associados à autovalores distintos cujo produto não seja igual a 1 são necessariamente ortogonais com relação a ω.*

4. *$W \subseteq V$ é invariante por T se, e somente se, $W^\perp$ também o for.*

Demonstração: Mostraremos apenas o item 3. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ dois autovalores distintos de T, associados aos autovetores v_1 e v_2, cujo produto não seja igual a 1. Como T é um simpletomorfismo temos

$$\omega(v_1, v_2) = \omega(T(v_1), T(v_2)) = \omega(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_1\lambda_2\omega(v_1, v_2).$$

Daí,

$$(1 - \lambda_1\lambda_2)\omega(v_1, v_2) = 0.$$

Visto que $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ devemos ter que $\omega(v_1, v_2) = 0$. □

Exemplo A.3.5. Sejam (V, ω) um espaço simplético, sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão $2n$ e $\mathcal{B} = \{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n\}$ uma base simplética de V. Considere a aplicação $\Phi : \mathbb{K}^{2n} \to V$ dada por

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \sum_{j=1}^{n} x_j u_j + \sum_{j=1}^{n} y_j v_j.$$

Tal aplicação leva base canônica de $\mathbb{K}^{2n}$, que é uma base simplética com relação à forma ω_0, em $\mathcal{B}$. Pela Proposição A.3.2 temos que Φ é um simpletomorfismo. ◇

Proposição A.3.6. *Sejam (V, ω) um espaço simplético e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ uma base simplética. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, então existe um único simpletomorfismo $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que*

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (A^\top)_{ij} e_i \;\; e \;\; T(f_j) = \sum_{i=1}^{n} (A^{-1})_{ij} f_i$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Em particular, os espaços $E = \mathrm{ger}\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $F = \mathrm{ger}\{f_1, \ldots, f_n\}$ são invariantes por T.

Demonstração: Defina a aplicação $T : V \to V$ como acima e estenda por linearidade. Por construção, T é um isomorfismo tal que $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Pela Proposição A.3.2 temos que T é um simpletomorfismo, já que $\mathcal{B}$ é uma base simplética. □

Teorema A.3.7. *A aplicação $\Phi : \mathcal{L}(U, V^*) \to \mathcal{B}(U, V)$ definida por*

$$\Phi(T)(u, v) = \varphi_T(u, v) := T(u)(v) \tag{A.5}$$

para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$ estabelece um isomorfismo canônico.

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(U, V^*)$ tal que $\Phi(T) = 0$. Para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$ teremos que $T(u)(v) = \varphi_T(u)(v) = 0$, mostrando que T é a aplicação nula. Tomemos $\psi \in \mathcal{B}(U, V)$. Considere a aplicação $T \in \mathcal{L}(U, V^*)$ definida por $T(u)(v) = \psi(u, v)$ para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$. Assim,

$$\Phi(T)(u, v) = \varphi_T(u, v) = T(u)(v) = \psi(u, v)$$

para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$. Daí, $\psi = \Phi(T)$, implicando que Φ é sobrejetora. Dessa forma, concluímos que, nesse caso, Φ é um isomorfismo. $\square$

Observação A.3.8. Podemos apresentar um argumento alternativo para a Proposição A.3.7. A aplicação $\Psi : \mathcal{B}(U, V) \to \mathcal{L}(U, V^*)$ dada por

$$\Psi(\psi)(u)(v) = \psi(u, v)$$

está bem definida, é uma transformação linear e é a inversa de Φ. De fato, dados $T \in \mathcal{L}(U, V^*)$, $\psi \in \mathcal{B}(U, V)$, $u \in U$ e $v \in V$, tem-se

$$\Psi \circ \Phi(T)(u)(v) = \Psi(\varphi_T)(u)(v) = \varphi_T(u, v) = T(u)(v)$$

e

$$\Phi \circ \Psi(\psi)(u, v) = \Psi(\psi)(u)(v) = \psi(u, v).$$

De maneira análoga, pode-se mostrar que os espaços $\mathcal{B}(U, V)$ e $\mathcal{L}(V, U^*)$ são canonicamente isomorfos. $\diamond$

Corolário A.3.9. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados. A aplicação $T \in \mathcal{L}(U, V^*)$ é um isomorfismo se, e somente se, a forma bilinear induzida $\varphi_T \in \mathcal{B}(U, V)$, como definida em (A.5), é não degenerada.*

Demonstração: Suponha que φ_T é não degenerada. Seja $u \in U$ tal que $T(u)$ é o funcional nulo. Para todo $v \in V$ temos

$$\varphi_T(u, v) = T(u)(v) = 0.$$

Daí, $u = 0$, mostrando que T é injetora. Seja $f \in V^*$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u_0 \in U$ tal que

$$f(v) = \varphi_T(u_0, v) = T(u_0)(v)$$

para todo $v \in V$. Logo, T é sobrejetora. A outra direção é feita de maneira análoga. $\square$

Às vezes é costume denotar a aplicação φ_T por T já que, pela Proposição A.3.7, existe uma identificação biunívoca entre $\mathcal{L}(U, V^*)$ e $\mathcal{B}(U, V)$. Mais adiante faremos o uso desse abuso de notação.

Proposição A.3.10. *Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) espaços vetoriais simpléticos. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ é simplética se, e somente se,*

$$T^* \circ \omega_2 \circ T = \omega_1$$

onde T^* denota a transposta de T. Noutras palavras, o diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[rrr, bend right, "\omega_1"'] & V_2 \arrow[r, "\omega_2"] & V_2^* \arrow[r, "T^*"] & V_1^* \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração: Suponhamos que T é uma aplicação simplética. Pela Proposição A.3.7 podemos enxergá-lo como um elemento de $\mathcal{B}(V_1, V_2)$. Dado $u_1 \in V_1$, tem-se

$$(T^* \circ \omega_2 \circ T)(u_1) = T^*(\omega_2(T(u_1))) : V_1 \to \mathbb{K}.$$

Para todo $v_1 \in V_1$ obtemos

$$\begin{aligned} T^*(\omega_2(T(u_1)))(v_1) &= \omega_2(T(u_1))(T(v_1)) \\ &= \omega_2(T(u_1), T(v_1)) \\ &= \omega_1(u_1, v_1) \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos a definição da transposta de T, na segunda igualdade usamos a identificação Ψ e na terceira igualdade foi utilizado a hipótese de T ser um simpletomorfismo. Reciprocamente, dados $u_1, v_1 \in V_1$, tem-se

$$\begin{aligned} \omega_2(T(u_1), T(v_1)) &= \omega_2(T(u_1))(T(v_1)) \\ &= T^* \circ \omega_2(T(u_1))(v_1) \\ &= T^* \circ \omega_2 \circ T(u_1)(v_1) \\ &= \omega_1(u_1)(v_1) \\ &= \omega_1(u_1, v_1). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma aplicação simplética. $\square$

Observação A.3.11. Rigorosamente, a igualdade da Proposição A.3.10 significa $T^* \circ \Psi(\omega_2) \circ T = \Psi(\omega_1)$, onde Ψ é a aplicação da Observação A.3.8. Assim, duas formas simpléticas, num espaço vetorial de dimensão par, diferem por um automorfismo. $\diamond$

Apresentaremos agora uma maneira alternativa de expressarmos a igualdade (A.4). O ***pullback*** da forma ω_2 para V_1 por meio da transformação linear $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ é a aplicação

$$(T^*\omega_2) : V_1 \times V_1 \to \mathbb{K} \quad \text{definida por} \quad (T^*\omega_2)(v, w) := \omega_2(T(v), T(w)).$$

Dessa forma, a aplicação T é simplética se, e somente se, $T^*\omega_2 = \omega_1$. Algumas propriedades da aplicação T^* são descritas abaixo.

Proposição A.3.12. *Sejam V_1 e V_2 espaços que possuem uma forma simplética. O pullback goza das seguintes propriedades:*

1. $T^*(\omega_2 + \eta_2) = T^*(\omega_2) + T^*(\eta_2)$.
2. $(c \cdot T)^* = c \cdot T^*$.
2. $(R \circ T)^* = T^* \circ R^*$.
4. *se T é um isomorfismo, então* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Proposição A.3.13. *Seja V um espaço simplético com dimensão $2n$. Se ω_1 e ω_2 são duas formas simpléticas de V, então existe um simpletomorfismo $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^*\omega_2 = \omega_1$.*

Demonstração: Pelo Exemplo A.3.5, existem simpletomorfismos $\Phi_1 : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to (V, \omega_1)$ e $\Phi_2 : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to (V, \omega_2)$ tais que $\Phi_1^*\omega_0 = \omega_1$ e $\Phi_2^*\omega_0 = \omega_2$. Seja $T : (V, \omega_1) \to (V, \omega_2)$ a aplicação dada por $T := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, ou seja, a única aplicação que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}}"] \arrow[d, "\Phi_1"'] & (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \arrow[d, "\Phi_2"] \\
(V, \omega_1) \arrow[r, dashed, "T"'] & (V, \omega_2)
\end{tikzcd}$$

comutar. Pela Proposição A.3.12 temos

$$T^*\omega_2 = \Phi_1^* \circ (\Phi_2^{-1})^*\omega_2 = \Phi_1^* \circ (\Phi_2^*)^{-1}\omega_2 = \Phi_1^*\omega_0 = \omega_1.$$

Portanto, T é um simpletomorfismo que leva forma simplética de V em forma simplética de V. $\square$

Seja V um espaço vetorial de dimensão par. Consideremos o conjunto formado por todas as formas simpléticas de V, isto é,

$$\Omega(V) \doteq \{\omega : V \times V \to \mathbb{K} : \omega \text{ é uma forma simplética}\}.$$

Definimos uma ação à esquerda do grupo $\mathrm{Gl}(V)$ em $\Omega(V)$ através do pullback

$$\Phi \cdot \omega \doteq \Phi^* \omega.$$

O Exemplo A.3.5 e a Proposição A.3.13 nos asseguram que $\Omega(V) \neq \emptyset$ e que a ação é transitiva (existe apenas uma órbita). O subgrupo de isotropia de um elemento $\omega \in \Omega(V)$ é

$$G_\omega = \{T \in \mathrm{Gl}(V) : T^*\omega = \omega\} = \mathrm{Sp}(V, \omega).$$

Assim,

$$\Omega(V) \simeq \mathrm{Gl}(V)/\,\mathrm{Sp}(V, \omega),$$

isto é, podemos enxergar $\Omega(V)$ como um espaço homogêneo.

Proposição A.3.14. *Sejam X um conjunto não vazio e (V, ω) um espaço simplético sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $\xi : X \to V$ é uma bijeção, então existe uma única estrutura vetorial em X com as seguintes propriedades:*

1. *existe uma forma simplética σ em X.*

2. *existe uma única forma simplética de maneira que a aplicação ξ é um simpletomorfismo.*

Demonstração: Deve-se, primeiramente, definir operações de soma e multiplicação por escalar real em X que torne tal conjunto um espaço vetorial. Para isso, dados $x, y \in X$ e $a \in \mathbb{K}$ defina

$$x + y := \xi^{-1}(\xi(x) + \xi(y)) \;\; \text{e} \;\; a \cdot x := \xi^{-1}(a\xi(x)).$$

Daí, tem-se

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y) \;\; \text{e} \;\; \xi(a \cdot x) = a\xi(x)$$

para quaisquer $x, y \in X$, ou seja, ξ é um isomorfismo. Sejam $\oplus$ e $\odot$ operações de soma e multiplicação por escalar, respectivamente, em V tais que ξ é um isomorfismo. Se $x, y \in X$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \xi(x + y) &= \xi(x) + \xi(y) = \xi(x \oplus y), \\ \xi(a \cdot x) &= a\xi(x) = \xi(a \odot x). \end{aligned}$$

Aplicando ξ^{-1} em ambos os lados das igualdades acima obtemos que $x + y = x \oplus y$ e $a \cdot x = a \odot y$, ou seja, as operações binárias $+$ e $\oplus$ bem como $\cdot$ e $\odot$ coincidem em $X \times X$. Daí, tais aplicações são iguais, mostrando que existe uma única estrutura de espaço vetorial em X na qual ξ é um isomorfismo. A forma simplética σ é definida como sendo o pullback de ω por meio do isomorfismo ξ. Por construção, ξ é uma aplicação simplética e, portanto, um simpletomorfismo. $\square$

A.4 Decomposições Lagrangianas

O resultado a seguir nos garante que todo simpletomorfismo que deixa invariante as "metades" de uma base simplética é dado como na Proposição A.3.6.

Proposição A.4.1. *Sejam (V, ω) um espaço simplético e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ uma base simplética de V. Considere os subespaços $E = \operatorname{ger}\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $F = \operatorname{ger}\{f_1, \ldots f_n\}$.*

1. *E e F são espaços Lagrangianos.*

2. *Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um simpletomorfismo tal que $T(E) \subseteq E$ e $T(F) \subseteq F$. Se $B = (B_{ij})$ e $C = (C_{ij})$ são elementos de $M(n, \mathbb{K})$ que satisfazem as relações*

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} e_i \ \text{ e } \ T(f_j) = \sum_{i=1}^{n} C_{ij} f_i,$$

   então existe $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = A^\top$ e $C = A^{-1}$.

Demonstração: Argumentaremos o item 1 apenas para o subespaço E, uma vez que para F é análogo. Dado $u \in E$, escreva $u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Pela bilinearidade da forma simplética temos que

$$\omega(e_i, u) = a_1 \omega(e_i, e_1) + \cdots + a_n \omega(e_i, e_n).$$

A hipótese de $\mathcal{B}$ ser uma base simplética nos assegura que $\omega(e_i, e_j) = 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq E^\perp$ o que implica que $E \subseteq E^\perp$. Reciprocamente, seja $v \in E^\perp$. Pela definição de ortogonal simplético temos $\omega(e_i, v) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\mathcal{B}$ é base, existem escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b_1 f_1 + \cdots + b_n f_n.$$

Usando que valem as relações (A.3) obtemos que

$$b_i = \omega(e_i, u) = 0$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, assim, $v \in E$. Isso nos permite concluir que $E = E^{\perp}$, ou seja, E é um subespaço Lagrangiano.

Vejamos, agora, o item 2. As restrições $T|_E$ e $T|_F$ são isomorfismos, já que levam base em base. Logo, as matrizes B e C são não singulares. Afirmamos que a matriz A procurada é dada por C^{-1}. Como $\mathcal{B}$ é uma base simplética e T é um simpletomorfismo segue que

$$\delta_{ij} = \omega(e_i, f_j) = \omega(T(e_i), T(f_j)) = \sum_{k,l} B_{ki} C_{lj} \underbrace{\omega(e_k, f_l)}_{\delta_{kl}} = (B^{\top} C)_{ij}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. A igualdade acima significa que $B^{\top} C = \mathrm{I}$ e, assim, concluímos que $B = (C^{-1})^{\top} = A^{\top}$. □

O resultado a seguir nos diz que os subespaços Lagrangianos possuem uma relevância maior no sentindo de todo espaço simplético poder ser decomposto na soma direta de subespaços Lagrangianos.

Teorema A.4.2. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *V admite uma estrutura de espaço simplético.*

2. *existe um espaço vetorial L tal que $V \simeq L \oplus L^*$ de maneira canônica.*

Além disso, com respeito às estruturas simpléticas acima L e L^* são subespaços Lagrangianos de V e o isomorfismo da afirmação 2 é um simpletomorfismo.

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ uma base simplética de V. Pela Proposição A.4.1 temos que os subespaços $E = \mathrm{ger}\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $F = \mathrm{ger}\{f_1, \ldots, f_n\}$ são Lagrangianos e, além disso, $V = E \oplus F$. Considere a aplicação

$$\Phi : F \to E^* \quad \text{dada por} \quad \Phi(v)(u) = \omega(u, v)$$

para quaisquer $u \in E$ e $v \in F$. Considere $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ a base de E^* dual a base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ vale que

$$\Phi(f_j)(e_i) = \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} = e_j^*(e_i),$$

ou seja, Φ leva base em base. Logo, obtemos que F e E^* são isomorfos. Pelo Exemplo A.1.6 a soma direta $E \oplus E^*$ pode ser vista como um espaço simplético, onde a forma simplética é dada por

$$\omega_E((u, f), (v, g)) = g(u) - f(v).$$

Além disso, pelo Exemplo A.2.10 temos que os espaços $E \oplus \{0\}$ e $\{0\} \oplus E^*$ são subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$. A decomposição de V na soma direta dos subespaços E e F nos garante que a aplicação

$$\Psi : V \to E \oplus E^* \quad \text{dada por} \quad \Psi(u + v) = (u, \Phi(v))$$

está bem definida e é um isomorfismo. Tomemos $u, u' \in E$ e $v, v' \in F$. Visto que E e F são Lagrangianos temos $\omega(u, u') = 0 = \omega(v, v')$. Daí,

$$\begin{aligned}
\omega_E(\Psi(u+v), \Psi(u'+v')) &= \omega_E((u, \Phi(v)), (u', \Phi(v'))) \\
&= \Phi(v')(u) - \Phi(v)(u') \\
&= \omega(u, v') - \omega(u', v) \\
&= \omega(u, v') + \omega(v, u') \\
&= \omega(u, v') + \omega(u, u') + \omega(v, u') + \omega(v, v') \\
&= \omega(u + v, u' + v'),
\end{aligned}$$

ou seja, Ψ trata-se de um simpletomorfismo. Isto mostra que a afirmação 1 implica em 2.

Reciprocamente, suponhamos que vale a afirmação 2. Seja $\Psi : V \to L \oplus L^*$ um isomorfismo. A forma bilinear $\omega = \Psi^*\omega_L$, pullback de ω_L pela aplicação Ψ, é uma forma simplética em V que, por construção, torna Ψ um simpletomorfismo. $\square$

Proposição A.4.3. *Seja (V, ω) um espaço simplético. Se L e L_0 são subespaços isotrópicos tais que $V = L \oplus L_0$, então L e L_0 são subespaços Lagrangianos.*

Demonstração: Seja $L_1 \subseteq V$ um subespaço isotrópico de maneira que contenha o subespaço L. Nesse caso, devemos ter que $L_1 \cap L_0$ é não trivial. Seja $v \in L_1 \cap L_0$. Para todo $u \in L$ temos que $\omega(u, v) = 0$, uma vez que $L \subseteq L_1 \subseteq L_1^{\perp}$. Por outro lado, se $u \in L_0$, então $\omega(u, v) = 0$ pois $v \in L_0 \subseteq L_0^{\perp}$. Assim, como a aplicação $\omega^\sharp$, definida em (A.1), é injetora segue que $v = 0$. Logo, $L = L_1$, mostrando que L é um subespaço isotrópico maximal. Pelo Teorema A.2.12 isto significa que L é Lagrangiano. $\square$

Proposição A.4.4. *Se $V = E \oplus F$, então $V = E^{\perp} \oplus F^{\perp}$. Em particular, se E é Lagrangiano, então $V = E \oplus F^{\perp}$.*

Demonstração: O dual V^* é decomposto na soma direta $E^0 \oplus F^0$. Como $\omega^\flat(E^{\perp}) = E^0$ e $\omega^\flat(F^{\perp}) = F^0$ segue que $V = E^{\perp} \oplus F^{\perp}$. Se $E = E^{\perp}$, então $V = E \oplus F^{\perp}$. $\square$

Veremos que todo subespaço Lagrangiano tem pelo menos um complementar Lagrangiano. Apresentaremos duas provas para este fato, uma delas válida para dimensão infinita e a outra para espaços finitamente gerados.

Teorema A.4.5. *Seja (V,ω) um espaço simplético. Se $L \subseteq V$ é um subespaço Lagrangiano, então existe um subespaço $L_0 \subseteq V$ Lagrangiano tal que $V = L \oplus L_0$. Em outras palavras, todo subespaço Lagrangiano admite um complementar Lagrangiano.*

Demonstração: Seja $F \subseteq V$ tal que $V = L \oplus F$. Se F for Lagrangiano, então considere $L_0 = F$. Suponha que F não é Lagrangiano. Visto que L é Lagrangiano segue, da Proposição A.4.4, que $F^{\perp}$ também é um complementar de L. Considere o seguinte subespaço

$$L_0 := \left\{ \frac{1}{2}(u+v) : u \in F, v \in F^{\perp} \ \text{ e } \ u - v \in L \right\}.$$

Por hipótese, existe $u \in F \setminus F^{\perp}$ com $u \neq 0$. Como $V = L \oplus F^{\perp}$ temos que existem únicos $u_0 \in L$ e $v_0 \in F^{\perp}$, com $u_0, v_0 \neq 0$, tais que $u = u_0 + v_0$. Logo, $v_0 - u = u_0 \in L$, ou seja, $u + v_0 \in L_0$ com $u + v_0 \neq 0$ pois $u, v_0 \neq 0$. Daí, o subespaço L_0 é não trivial. Por causa da Proposição A.4.3 é suficiente mostrarmos que L_0 é um complementar de L que é isotrópico. Para esse fim, suponha que $L \cap L_0$ é não trivial. Neste caso, tem-se

$$u + v \in L \ \text{ e } \ u - v \in L,$$

já que L é um subespaço. Daí, $u, v \in L$. Como F e $F^{\perp}$ são complementares de L segue que $u, v = 0$. Agora, vejamos que $V = L + L_0$. Seja $x \in V$. Por hipótese, existem únicos $y, y' \in L$, $u \in F$ e $v \in F^{\perp}$ tais que $x = y + u$ e $x = y' + v$. Assim, $y - y' = v - u$, implicando que $x_0 := \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in L_0$. Notemos que

$$x = \frac{1}{2}(y+u) + \frac{1}{2}(y'+v) = \frac{1}{2}(y+u) + x_0 \in L + L_0.$$

Logo, concluímos que $V = L \oplus L_0$. Resta mostrarmos que L_0 é isotrópico. Tomemos $x = \frac{1}{2}(u+v)$ e $y = \frac{1}{2}(u'+v')$ elementos genéricos de L_0. Usando que a forma simplética é bilinear e que $v - u, v' - u' \in L$ obtemos

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= \omega\left(u + \frac{1}{2}(v-u), u' + \frac{1}{2}(v'-u')\right) \\
&= \omega(u,u') + \frac{1}{2}\omega(u, v'-u') - \frac{1}{2}\omega(u', v-u) \\
&= \frac{1}{2}\omega(u,v') - \frac{1}{2}\omega(u',v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Demonstração alternativa do Teorema A.4.5: Seja L um subespaço Lagrangiano. Em particular, $L \subsetneq V$ e $L = L^\perp$. Existe um elemento $v_1 \in V$ tal que $v_1 \notin L$. Assim, $L \cap \mathrm{ger}\{v_1\} = \{0\}$ e, pela Proposição A.2.3, vale que $L + \mathrm{ger}\{v_1\}^\perp = (L \cap \mathrm{ger}\{v_1\})^\perp = V$. Seja $v_2 \in \mathrm{ger}\{v_1\}^\perp$ tal que $v_2 \notin L + \mathrm{ger}\{v_1\}$. Neste caso, tem-se $L \cap \mathrm{ger}\{v_1, v_2\} = \{0\}$ e usando novamente a Proposição A.2.3 obtemos que $V = L + \mathrm{ger}\{v_1, v_2\}^\perp$. Notemos ainda que, por construção, o subespaço $\mathrm{ger}\{v_1, v_2\}$ é isotrópico. A hipótese de V ser finitamente gerado nos assegura que após uma quantidade finita de iterações do processo descrito anteriormente encontraremos um subespaço isotrópico $L_0 \subseteq V$ tal que $V = L + L_0^\perp$, $L \cap L_0 = \{0\}$ e não existirá um elemento de $L_0^\perp$ que não pertença a $L + L_0$. Daí, $V = L \oplus L_0$ e pela Proposição A.4.3 concluímos que L_0 é Lagrangiano. $\square$

Uma ***decomposição Lagrangiana*** de V é um par (L_1, L_2) de subespaços Lagrangianos tal que $V = L_1 \oplus L_2$. Considere a aplicação

$$\Lambda_{L_1,L_2} : L_2 \to L_1^* \quad \text{dada por} \quad \Lambda_{L_1,L_2}(v) \doteq -\omega^\flat(v)|_{L_1}.$$

A bilinearidade da forma simplética nos assegura que Λ_{L_1,L_2} é uma transformação linear.

Teorema A.4.6. *A aplicação Λ_{L_1,L_2}, como definida acima, goza das seguintes propriedades:*

1. *é um isomorfismo canônico.*

2. *A transposta da aplicação Λ_{L_1,L_2} é igual a menos Λ_{L_2,L_1} (módulo isomorfismo), isto é, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\Lambda_{L_2,L_1}"] \arrow[d, "\sharp"'] & L_2^* \arrow[d, "-\mathrm{id}_{L_2^*}"] \\ L_1^{**} \arrow[r, "\Lambda_{L_1,L_2}^*"'] & L_2^* \end{tikzcd}$$

Demonstração: Tomemos $v \in \mathrm{nuc}(\Lambda_{L_1,L_2}) \subseteq L_2$. Para todo $u \in L_1$ temos que $\omega(v,u) = 0$. Daí, $v \in L_1^\perp = L_1$. A hipótese de (L_1, L_2) ser uma decomposição Lagrangiana de V implica que $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ e, assim, $v = 0$. Logo, Λ_{L_1,L_2} é injetora. Seja $f \in L_1^*$. Considere $\widetilde{f} \in V^*$ definida por

$$\widetilde{f}(v) = \begin{cases} f(v), & v \in L_1 \\ 0, & v \in L_2 \end{cases}.$$

Pelo Teorema A.1.1 existe $v_0 \in V$ tal que $\widetilde{f} = \omega(v_0, -)$. Assim, $\omega(v_0, v) = \widetilde{f}(v) = 0$ para todo $v \in L_2$, implicando que $v_0 \in L_2^\perp$. Como L_2 é um subespaço Lagrangiano segue que $v_0 \in L_2$. Além disso, por construção $\widetilde{f} = \Lambda_{L_1,L_2}(v_0)$, finalizando a prova da afirmação 1.

Vejamos a afirmação 2. Por definição de transposta temos $\Lambda^*_{L_1,L_2} : L_1^{**} \to L_2^*$. No contexto de espaços vetoriais finitamente gerados vale que $L_1^{**} \simeq L_1$ canonicamente. Assim, todo funcional linear de L_1^* é da forma $u^\sharp$ com $u \in L_1$. Lembremos que $u^\sharp(f) = f(u)$ para todo $f \in L_1^*$. Dados $u^\sharp \in L_1^{**}$ e $v \in L_2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Lambda^*_{L_1,L_2}(u^\sharp)(v) &= u^\sharp(\Lambda_{L_1,L_2}(v)) \\
&= \Lambda_{L_1,L_2}(v)(u) \\
&= \omega(v,u) \\
&= -\omega(u,v) \\
&= -\Lambda_{L_2,L_1}(u)(v)
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Teorema A.4.7. *Seja $L_1 \subseteq V$ um subespaço Lagrangiano. Se $\mathcal{B}_1$ é uma base de L_1, então existe uma base simplética $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$. Em outras palavras, toda base de um subespaço Lagrangiano pode ser completada a uma base simplética.*

Demonstração: Pelo Teorema A.4.5 existe um subespaço Lagrangiano L_2 tal que $V = L_1 \oplus L_2$. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de L_1 e $\mathcal{B}_1^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ a base dual a $\mathcal{B}_1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ defina

$$f_i := -\Lambda^{-1}_{L_1,L_2}(e_i^*).$$

O Teorema A.4.6 nos garante que o conjunto $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de L_2. Afirmamos que a base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é simplética. Notemos que $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j)$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, já que os subespaços L_1 e L_2 são Lagrangianos. Além disso,

$$\begin{aligned}
\omega(e_i, f_j) &= -\omega(e_i, \Lambda^{-1}_{L_1,L_2}(e_j^*)) \\
&= \omega(\Lambda^{-1}_{L_1,L_2}(e_j^*), e_i) \\
&= \Lambda_{L_1,L_2}(\Lambda^{-1}_{L_1,L_2}(e_j^*))(e_i) \\
&= e_j^*(e_i) \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, o conjunto $\mathcal{B}$ é realmente uma base simplética de V. □

Corolário A.4.8. *Toda base de um subespaço isotrópico pode ser estendida a uma base simplética.*

Demonstração: Seja W um subespaço isotrópico de V. Pelo Teorema A.2.12 existe um subespaço Lagrangiano $L \subseteq V$ tal que $W \subseteq L$. Seja $\mathcal{B}_0$ uma base de W. Complete este conjunto a uma base de L, digamos $\mathcal{B}_1$. Pelo Teorema A.4.7 existe uma base simplética $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$. $\square$

Proposição A.4.9. *Sejam (L_1, L_2) e (L'_1, L'_2) decomposições Lagrangianas dos espaços simpléticos (V, ω) e (V', ω'), respectivamente. Valem as seguintes propriedades:*

1. *se $\psi \in \mathcal{L}(L_1, L'_1)$ é uma transformação linear injetora, então existe uma única aplicação simplética $T \in \mathcal{L}(V, V')$ tal que $T|_{L_1} = \psi$ e $T(L_1) \subseteq L'_1$.*
2. *se $\psi \in \mathcal{L}(L_1, L'_1)$ é um isomorfismo, então existe um único simpletomorfismo $T \in \mathcal{L}(V, V')$ tal que $T|_{L_1} = \psi$ e $T(L_1) = L'_1$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_r\}$ uma base de L_1. Pelo Teorema A.4.7 podemos completar esta base a uma base simplética

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r\}$$

de V. Como ψ é injetora temos que $\psi(\mathcal{B}_1) \subseteq V'$ é um conjunto linearmente independente. Mais ainda, se $\dim L'_1 = s$, então $r \leq s$. Complete o conjunto $\psi(\mathcal{B}'_1)$ a uma base de L'_1, digamos

$$\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_s, f'_1, \ldots, f'_s\}$$

onde $e'_i = \psi(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Considere a aplicação $T : V \to V'$ dada por

$$T(e_i) = \psi(e_i) \ \text{ e } \ T(f_i) = f'_i \ \text{ para todo } \ i \in \{1, \ldots, r\}$$

e estendida por linearidade. Por construção, $T|_{L_1} = \psi$, implicando que $T(L_1) \subseteq L'_1$. Além disso, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ vale que

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(e'_i, e'_j) = \omega(T(e_i), T(e_j)) \\ \omega(f_i, f_j) &= 0 = \omega(f'_i, f'_j) = \omega(T(f_i), T(f_j)) \end{aligned}$$

pois os subespaços L_1 e L'_1 são Lagrangianos assim como os subespaços $\mathrm{ger}\{f_1, \ldots, f_r\}$ e $\mathrm{ger}\{f'_1, \ldots, f'_s\}$ (veja Proposição A.4.1). O fato de $\mathcal{B}'$ ser uma base simplética nos garante que

$$\omega(e_i, f_j) = 0 = \omega(e'_i, f'_j) = \omega(T(e_i), T(f_j))$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Portanto, T é uma aplicação simplética. $\square$

APÊNDICE B – Variedades Diferenciáveis

O presente capítulo destina-se a apresentarmos a linguagem básica empregada pela Geometria. Não nos ocuparemos em expor algumas noções topológicas e nem resultados da Análise no $\mathbb{R}^n$. Para isso, sugerimos as referências [40–44]. Cobriremos, brevemente, os conceitos de variedade diferenciável, espaço tangente, campos vetoriais, formas diferenciais de grau 1 e fibrados. Para uma discussão minuciosa de tais temas consulte [9, 30, 43, 45–48].

B.1 Cartas, Atlas e Estruturas Diferenciáveis

Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma ***variedade topológica***, de dimensão n, quando M é localmente Euclidiana, isto é, para todo $p \in M$, existem abertos $U \subseteq M$, com $p \in U$, e $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \to \widetilde{U}$. Nesse contexto, os abertos U são chamados de ***abertos Euclidianos*** e o homeomorfismo ϕ é denominado ***sistema de coordenadas***, ***carta coordenada***, ***carta local*** ou ***carta***.

O sistema de coordenadas (U, ϕ) define n funções $x^j : U \to \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n,$$

que são chamadas ***coordenadas locais*** ou ***funções coordenadas***. Se $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a projeção canônica na j-ésima coordenada, então $x^j = \pi_j \circ \phi$. Daí, podemos concluir que cada função coordenada é uma aplicação contínua e aberta.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, denotaremos por $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as funções que associam cada ponto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ a i-ésima coordenada a_i. Assim, $u^1, \ldots, u^n$ são as ***funções coordenadas naturais*** do espaço $\mathbb{R}^n$. Tendo em mente a notação anterior, notemos que $u^i \circ \phi = x^i$.

Dado um ponto na variedade, pode existir, a princípio, vários sistemas de coordenadas com domínio contendo o ponto. Se (U, ϕ) e (V, ψ) são duas cartas em M tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos não vazios tais que a aplicação

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$ denominado ***mudança de coordenadas de*** ϕ ***para*** ψ.

Um ***atlas*** de M é um conjunto de cartas coordenadas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

tal que $(U_i)_{i\in I}$ é uma cobertura de M. Dizemos que duas cartas são ***compatíveis de classe*** C^r quando seus domínios tem interseção vazia ou quando a mudança de coordenadas é um difeomorfismo de classe C^r. Um ***atlas de classe*** C^r $\mathcal{A}$ é um atlas tal que para todos $(U,\phi),(V,\psi)\in\mathcal{A}$, tem-se (U,ϕ) e (V,ψ) são compatíveis de classe C^r.

Denotaremos por $\mathfrak{A}^r(M)$ o conjunto de todos os atlas de classe C^r em M munido da relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos. Um atlas $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}^r(M)$ é dito ***maximal*** quando para todo atlas $\widetilde{\mathcal{A}}\in\mathfrak{A}^r(M)$ tal que $\mathcal{A}\subseteq\widetilde{\mathcal{A}}$, tem-se $\widetilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$. Pelo Lema de Kuratowski-Zorn pode-se mostrar que se $\mathcal{A}$ é um atlas de classe C^r, então existe um único atlas maximal sobre M que contém $\mathcal{A}$ (veja também [9, p.13]).

Uma ***estrutura diferenciável em*** M ***de classe*** C^r consiste num elemento maximal do conjunto $\mathfrak{A}^r(M)$. Uma ***variedade diferenciável***, ou simplesmente variedade, consiste numa variedade topológica M e uma estrutura diferenciável $\mathcal{D}$. Assim, a terminologia *carta local em* M passa a significar uma carta local que pertence a $\mathcal{D}$.

Chamamos atenção para o fato de que alguns autores (por exemplo, [9,43,47]) costumam definir o conceito de variedade diferenciável exigindo ainda que o espaço topológico subjacente seja Hausdorff (conjuntos finitos são fechados e limite de redes/filtros convergentes são únicos) e tenha base enumerável. Nesse caso, verifica-se (vide Theorem 1.15 [9, p.9]) que M é uma variedade topológica paracompacta[1] e, consequentemente, admite partição da unidade (vide [9, p.43]).

Dada uma família de bijeções entre um conjunto e uma variedade diferenciável, é possível transportarmos a estrutura diferenciável da variedade para o conjunto em questão (vide [47] ou [9, p.21]). Isso nos permite, por exemplo, estudar os fibrados tangente e cotangente, que serão definidos adiante.

Existem alguns exemplos importantes de variedades, a saber, os espaços Euclidianos $\mathbb{R}^n$, os espaços normados de dimensão finita, gráfico de aplicações diferenciáveis, as esferas $\mathbb{S}^n$, Grassmannianas e os espaços projetivos. Pode-se, ainda, construir novas variedades a partir de uma variedade dada utilizando, por exemplo, produto cartesiano, relações de equivalência e ações de grupos. Salientamos que todo aberto U de uma variedade $(M,\mathcal{D})$ tem uma estrutura diferenciável induzida por M. Com efeito, a coleção

$$\mathcal{A}_U=\{(V,\phi)\in\mathcal{D}: V\subseteq U\}$$

é um atlas de classe C^r em U e, assim, existe uma única estrutura diferenciável, de classe

[1] Um espaço topológico X é dito *paracompacto* quando para toda cobertura aberta $\mathfrak{C}$ de X, existe um refinamento $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{D}$ é uma cobertura aberta e localmente finita. Uma discussão aprofundada sobre espaços paracompactos e partições da unidade é feito em [42, p.109]. Já a referência [9] trata de tais conceitos no contexto de variedades diferenciáveis.

C^r, em U, que contém $\mathcal{A}_U$. Com essa estrutura temos $\dim U = \dim M$, uma vez que os domínios das cartas em $\mathcal{A}_U$ são abertos em M.

Consideremos M e N variedades de classe C^r. Uma aplicação $f : M \to N$ é de classe C^k, com $0 \leq k \leq r$, quando para todo $p \in M$ existem cartas $\phi : U \subseteq M \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \subseteq N \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ tais que $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ e a composição

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V),$$

denominada ***representação local de f nas cartas ϕ e ψ***, seja de classe C^k. Verifica-se que tal conceito está bem definido, isto é, independe da escolha de cartas.

No próximo resultado, destacaremos que toda carta é um difeomorfismo.

Proposição B.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^r, $U \subseteq M$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. A fim de que uma aplicação bijetora $\phi : U \to W$ seja uma carta de M é necessário e suficiente que U seja um aberto de M e ϕ um difeomorfismo de classe C^r.*

Demonstração: Suponhamos que (U, ϕ) seja uma carta de M. Consideremos as representações de ϕ e ϕ^{-1} com respeito às cartas ϕ, na variedade U, e id_W, na variedade W,

$$\mathrm{id}_W = \mathrm{id}_W \circ \phi \circ \phi^{-1} : W \to W \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_W = \phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_W : W \to W.$$

Como a identidade é de classe C^r segue que ϕ é um difeomorfismo de classe C^r. Para mostrarmos a recíproca devemos garantir que ϕ é um elemento do atlas maximal $\mathcal{D}$ de M, ou seja, ϕ tem que ser compatível com toda carta de $\mathcal{D}$. Seja $\psi : V \to Z$ uma carta de $\mathcal{D}$. Os conjuntos $\phi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$, uma vez que ϕ e ψ são homeomorfismos. Além disso, a função de transição $\psi \circ \phi^{-1}$ é de classe de C^r pois pode ser enxergada como a representação de ϕ^{-1} nas cartas $\mathrm{id} : \phi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ e $\psi|_{U \cap V} : U \cap V \to \psi(U \cap V)$. Analogamente, vemos que $\phi \circ \psi^{-1}$ é de classe C^r. Dessa forma, $\psi \circ \phi^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^r e, portanto, ϕ e ψ são compatíveis. $\square$

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função. O ***suporte*** de f, em símbolos $\mathrm{supp}(f)$, é definido por

$$\mathrm{supp}(f) \doteq \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Proposição B.1.2. *Seja M uma variedade C^∞, Hausdorff e paracompacta. Se $F \subseteq M$ é fechado e $U \subseteq M$ é aberto tal que $F \subseteq U$, então existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ para todo $x \in F$ e $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.*

Demonstração: Vide [9, p.44]. $\square$

Proposição B.1.3. *Sejam M uma variedade diferenciável, $F \subset M$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^∞. Se $U \subset M$ é um aberto contendo F, então existe uma aplicação $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ de classe C^∞ tal que $\widetilde{f}|_F = f$ e $\operatorname{supp}(\widetilde{f}) \subset U$.*

Demonstração: Vide [9, p.45]. $\square$

B.2 Espaço Tangente

Denotaremos por $\mathfrak{C}_p(M)$ o conjunto de todas as curvas diferenciáveis, em M, com domínio contedo $0 \in \mathbb{R}$ e que passam pelo ponto $p \in M$. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$. Um ***vetor tangente*** a curva γ no ponto p é uma aplicação

$$\dot{\gamma}|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \dot{\gamma}|_p(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Consideremos a relação $\sim$ em $\mathfrak{C}_p(M)$ dada por

$$\gamma \sim \sigma \text{ se, e somente se, } \dot{\gamma}|_p(f) = \dot{\sigma}|_p(f) \text{ para todo } f \in C^\infty(M).$$

Tal relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, trata-se de uma relação de equivalência. O conjunto $\mathfrak{C}_p(M)$ é particionado em classes e o conjunto formado por essas classes, denominado ***espaço tangente a*** M ***em*** p, será denotado por

$$T_pM \doteq \mathfrak{C}_p(M)/\!\sim.$$

A classe de equivalência $[\gamma]$ será chamada de ***vetor tangente***.

Vamos, a partir de agora, associar biunivocamente cada classe de equivalência de curvas com o seu respectivo "vetor velocidade". Denotaremos por $\mathfrak{T}_pM$ o conjunto formado por todas as aplicações $\dot{\gamma}|_p$ com $\gamma \in \mathfrak{C}_p(M)$.

Proposição B.2.1. *Se $\dot{\gamma}|_p, \dot{\sigma}|_p \in \mathfrak{T}_pM$ e $a \in \mathbb{R}$, então existem $\alpha, \beta \in \mathfrak{C}_p(M)$ tais que*

$$\dot{\alpha}|_p = \dot{\gamma}|_p + \dot{\sigma}|_p \quad e \quad \dot{\beta}|_p = a \cdot \dot{\gamma}|_p.$$

Em particular, o conjunto $\mathfrak{T}_pM$ munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.

Demonstração: Seja (U, ϕ) uma carta, com $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, que contém o ponto $p \in M$ de maneira que $\phi(U) = \mathbb{R}^n$. Se $\operatorname{dom}(\gamma) = (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ e $\operatorname{dom}(\sigma) = (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ são tais que

$\gamma(-\varepsilon_1,\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2,\varepsilon_2)\subseteq U$, então tomemos $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Consideremos a curva $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ dada por

$$\alpha(t)=\phi^{-1}(\phi\circ\gamma(t)+\phi\circ\sigma(t)-\phi(p)).$$

Por construção, $\alpha(0)=p$ e $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq U$. Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}|_p(f) &= (f\circ\alpha)'(0)\\
&= (f\circ\phi^{-1}\circ(\phi\circ\gamma+\phi\circ\sigma-\phi(p)))'(0)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))(x^i\circ\gamma+x^i\circ\sigma-\phi(p))'(0)\\
&= (f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\gamma)'(0)+(f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\sigma)'(0)\\
&= \dot{\gamma}|_p(f)+\dot{\sigma}|_p(f)
\end{aligned}$$

para todo $f\in C^\infty(M)$. Vejamos que o produto por escalar é uma operação fechada em $\mathfrak{T}_pM$. Seja $a\in\mathbb{R}$ tal que $a\neq 0$. Defina $\beta : (-\varepsilon/|a|,\varepsilon/|a|)\to M$ por $\beta(t)=\gamma(at)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}|_p(f) &= (f\circ\beta)'(t)\\
&= \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(at)|_{t=0}\\
&= a\cdot\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)|_{t=0}\\
&= a\cdot(f\circ\gamma)'(0)\\
&= a\cdot\dot{\gamma}|_p(f)
\end{aligned}$$

para todo $f\in C^\infty(M)$. □

A aplicação

$$\Phi : T_pM\to\mathfrak{T}_pM \quad \text{dada por} \quad \Phi([\gamma]) := \dot{\gamma}|_p$$

é bijetora. Dessa forma, existe uma única estrutura de espaço vetorial em T_pM tal que Φ é um isomorfismo, a saber, basta definir

$$[\gamma]+[\sigma]\doteq\Phi^{-1}(\dot{\gamma}|_p+\dot{\sigma}|_p) \;\text{ e }\; a\cdot[\gamma]\doteq\Phi^{-1}(a\cdot\dot{\gamma}|_p)$$

onde $a\in\mathbb{R}$.

Proposição B.2.2. *Um vetor tangente $v\in\mathfrak{T}_pM$ goza das seguintes propriedades:*

1. ***$\mathbb{R}$-linearidade**: $v(af+bg)=av(f)+bv(g)$;*

2. ***Regra de Leibniz**: $v(f\cdot g)=f(p)v(g)+g(p)v(f)$*

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Demonstração: Como $v \in \mathfrak{T}_p M$, existe uma curva $\gamma \in \mathfrak{C}_p(M)$ tal que $v = \Phi([\gamma]) = \dot\gamma|_p$. Usando o fato que a derivada direcional é uma transformação linear segue que

$$\frac{d}{dt}((af + bg) \circ \gamma)(t)|_{t=0} = a\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} + b\frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Logo, $\dot\gamma|_p(af + bg) = a\dot\gamma|_p(f) + b\dot\gamma|_p(g)$, mostrando a $\mathbb{R}$-linearidade. Agora, a afirmação 2 é uma consequência da regra de Leibniz para funções definidas em $\mathbb{R}^n$, uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((f \cdot g) \circ \gamma)(t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)) \cdot g(\gamma(t)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \cdot g(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \cdot \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t)|_{t=0}. \end{aligned}$$

Daí, $\dot\gamma|_p(f \cdot g) = \dot\gamma|_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \dot\gamma|_p(g)$. $\square$

Uma ***derivação*** em $p \in M$ é uma aplicação $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que tem as propriedades 1 e 2 da Proposição B.2.2. O conjunto de todas as derivações em p será denotado por $\mathfrak{D}_p M$. Considerando-se as operações de soma e multiplicação por escalar ponto a ponto temos que $\mathfrak{D}_p M$ é um espaço vetorial. Assim, $\mathfrak{T}_p M$ é um subespaço de $\mathfrak{D}_p M$.

Seja (U, ϕ), com $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, um sistema de coordenadas numa vizinhança de $p \in M$. A ***i-ésima derivada parcial de** $f \in C^\infty(M)$ **em** p**, no sistema de coordenadas*** (U, ϕ), é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \doteq \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i}(\phi(p)),$$

onde $(u^1, \ldots, u^n)$ é o sistema de coordenadas canônico em $\mathbb{R}^n$. Assim, fica definida a função

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) \doteq \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Por simplicidade, é usual denotarmos $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ por $\partial_i|_p$.

Veremos na Proposição B.2.3 que as derivadas parciais em variedades são vetores tangentes, ou seja, são classe de equivalência de curvas.

Proposição B.2.3. *Seja* (U, ϕ) *um sistema de coordenadas, com* $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$*, que contém* $p \in M$. *As aplicações* $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, *com* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *formam um conjunto linearmente independente de* $\mathfrak{T}_p M$. *Em particular,* $\dim T_p M = \dim \mathfrak{T}_p M \geq n = \dim M$.

Demonstração: Vamos mostrar, primeiramente, que existe uma curva $\gamma_i \in \mathfrak{C}_p(M)$ tal que $\partial_i|_p = \dot\gamma_i|_p$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos $a = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Como $\phi(U)$ é aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $a + te_i \in \phi(U)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para cada índice i. Consideremos a curva $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ definida por

$$\gamma_i(t) := \phi^{-1}(a + te_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por construção, $\gamma_i(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$. Além disso,

$$\dot{\gamma_i}|_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_i)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1}(a + te_i))|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

para todo $f \in C^\infty(M)$. Assim, tem-se $\partial_i|_p = \dot{\gamma_i}|_p = \Phi([\gamma_i]) \in \mathfrak{T}_p M$. Mostremos que o conjunto $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ é linearmente independente. Para isso, consideremos a seguinte combinação linear $\sum_i c^i \partial_i|_p = 0$ onde $c^i \in \mathbb{R}$. Aplicando ambos os lados dessa igualdade em x^j temos

$$0 = \sum_i c^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \sum_i c^i \delta_{ij} = c^j$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por fim, $n \leq \dim \mathfrak{T}_p M$ pois todo conjunto linearmente independente está contido em alguma base. $\square$

Teorema B.2.4. *Se (U, ϕ), com $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, é um sistema de coordenadas em torno de um ponto $p \in M$, então o conjunto*

$$\mathcal{B}_\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p \right\}$$

é uma base de $\mathfrak{D}_p(M)$. Além disso, para todo $v \in \mathfrak{D}_p(M)$, tem-se

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Demonstração: Vide [49, p.8]. $\square$

Corolário B.2.5. *Os espaços T_pM e $\mathfrak{D}_pM$ são isomorfos. Em particular,* $\dim T_pM = n$.

Dizemos que o conjunto $\mathcal{B}_\phi$ do Teorema B.2.4 é uma ***base coordenada*** de T_pM. Os números reais $v(x^i)$ acima são chamados de ***componentes ou componentes contravariantes*** de v no sistema de coordenadas (U, ϕ).

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. A ***derivada de*** f num ponto $p \in M$, em símbolos df_p, é a aplicação $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ dada por

$$df_p([\gamma]) = [f \circ \gamma],$$

onde $[\gamma] \in T_pM$. Notemos que geometricamente tal aplicação leva vetores tangentes de M em vetores tangentes de N.

Devemos garantir que a derivada está bem definida. Sejam $\gamma, \sigma \in \mathfrak{C}_pM$ tais que $\gamma \sim \sigma$. Para todo $g \in C^\infty(M)$ temos

$$(g \circ \gamma)'(0) = \dot{\gamma}|_p(g) = \dot{\sigma}|_p(g) = (g \circ \sigma)'(0).$$

Para todo $h \in C^\infty(N)$ temos

$$(h \circ (f \circ \gamma))'(0) = ((h \circ f) \circ \gamma)'(0) = ((h \circ f) \circ \sigma)'(0) = (h \circ (f \circ \sigma))'(0)$$

onde na segunda igualdade usamos a hipótese de $\gamma \sim \sigma$ na aplicação diferenciável $h \circ f : M \to \mathbb{R}$. Logo, $[f \circ \gamma] = [f \circ \sigma]$ donde $df_p([\gamma]) = df_p([\sigma])$.

Mostraremos, agora, que a aplicação é linear. A estratégia consiste em definirmos uma transformação linear entre os espaços das derivações de M e N nos pontos p e $f(p)$, respectivamente, de maneira que o diagrama abaixo comute (estamos cometendo um abuso de notação, uma vez que os isomorfismos Φ não são iguais por atuarem em espaços vetoriais distintos).

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[d, "\Phi"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathfrak{D}_pM \arrow[r, "\Gamma"'] & \mathfrak{D}_{f(p)}N \end{tikzcd}$$

Consideremos a aplicação $\Gamma : \mathfrak{D}_pM \to \mathfrak{D}_{f(p)}N$ dada por

$$\Gamma(D)(g) := D(g \circ f)$$

para quaisquer $D \in \mathfrak{D}_pM$ e $g \in C^\infty(N)$. Pela Proposição B.2.2 concluímos que Γ é uma transformação linear. Dado $h \in C^\infty(N)$, tem-se

$$\Gamma \circ \Phi([\gamma]_p)(h) = \Gamma(\dot{\gamma}|_p)(h) = \dot{\gamma}|_p(h \circ f)$$

e

$$\Phi \circ df_p([\gamma])(h) = \Phi([f \circ \gamma]_p)(h) = (h \circ (f \circ \gamma))'(0) = ((h \circ f) \circ \gamma)'(0) = \dot{\gamma}|_p(h \circ f).$$

Isso nos mostra que o diagrama é comutativo. Além disso, como Φ é um isomorfismo e Γ é uma transformação linear segue que df_p também é uma transformação linear.

Proposição B.2.6 (Regra da Cadeia). *Sejam M_1, M_2 e M_3 variedades diferenciáveis. Se $f : M_1 \to M_2$ e $g : M_2 \to M_3$ são aplicações diferenciáveis, então a composta $g \circ f$ também o é. Além disso, tem-se*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

para todo $p \in M_1$.

Demonstração: Se $v \in T_pM$, então existe $\gamma \in \mathfrak{C}_p(M_1)$ tal que $v = [\gamma]$. Assim,

$$d(g \circ f)_p(v) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = dg_{f(p)}([f \circ \gamma]) = dg_{f(p)}(df_p(v))$$

e o resultado segue. □

Corolário B.2.7. *Se $f : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, então $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Por hipótese, existe f^{-1} tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{M_1}$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{M_2}$. Pela Proposição B.2.6, tem-se $df_p \circ d(f^{-1})_{f(p)} = \mathrm{id}_{T_{f(p)}M_2}$ e $d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = \mathrm{id}_{T_pM_1}$. Logo, a transformação linear df_p possui inversa $d(f^{-1})_{f(p)}$ para todo $p \in M$, ou seja, trata-se de um isomorfismo. □

Proposição B.2.8. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma função de classe C^∞. Escolha duas cartas $\phi : U \to \phi(U)$ e $\psi : V \to \psi(V)$ tais que $p \in U$ e $f(U) \subseteq V$. A diferencial de f pode ser calculada através das derivadas das cartas e da representação local como*

$$df_p = (d\psi_{f(p)})^{-1} \circ d\widetilde{f}_{\phi(p)} \circ d\phi_p$$

para todo $p \in M$.

Demonstração: Basta usar a Proposição B.2.6. □

Proposição B.2.9. *Sejam M uma variedade diferenciável e $U \subseteq M$ um aberto. Para cada $p \in U$, a derivada da inclusão $\iota : U \hookrightarrow M$ é um isomorfismo de T_pU sobre T_pM.*

Demonstração: Seja $\phi : V \to \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas de uma vizinhança de um ponto $p \in U$. Por definição, V é um aberto em U. Note que V também é aberto em M, já que U é aberto em M. Denotemos por Φ esse mesmo sistema de coordenadas agora visto em M. Consideremos

$$\widetilde{i} = \Phi \circ i \circ \phi^{-1} : \phi(V) \to \phi(V)$$

a representação local da inclusão com respeito às cartas Φ e ϕ das variedades M e U, respectivamente. A derivada $d\widetilde{i}_{\phi(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a identidade. Pela Proposição B.1.1, ϕ é um difeomorfismo e, assim, as transformações lineares

$$d\Phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad d\phi_p : T_pU \to \mathbb{R}^n$$

são isomorfismos. Embora ϕ seja uma carta tanto para U quanto para M os isomorfismos induzidos não são iguais. Pela Proposição B.2.6, tem-se

$$di_p = (d\Phi_p)^{-1} \circ \widetilde{di}_{\phi(p)} \circ d\phi_p = (d\Phi_p)^{-1} \circ d\phi_p.$$

Como $(d\Phi_p)^{-1}$ e $d\phi_p$ são isomorfismos segue que di_p também o é. Portanto, os espaços T_pU e T_pM são isomorfos. □

B.3 Fibrados Tangente, Cotangente e Campos de Vetores

Seja M uma variedade de classe C^r com $n = \dim M$. O ***fibrado tangente*** de M é o espaço TM definido como a união disjunta dos espaços tangentes a M, isto é,

$$TM \doteq \coprod_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, v) : p \in M \quad \text{e} \quad v \in T_pM\}.$$

Denotamos por $\pi : TM \to M$ a aplicação dada por $\pi(p, v) := p$, denominada ***projeção de*** TM ***sobre*** M. Notemos que cada espaço tangente T_pM é identificado com a pré-imagem $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ via a aplicação $v \mapsto (p, v)$. Por causa disso, é comum encontrarmos as notações v_p ou (p, v) para denotar $v \in T_pM$.

Teorema B.3.1. *Se M é uma variedade diferenciável de classe C^r, então o fibrado tangente TM tem uma estrutura diferenciável, de classe C^{r-1}, de dimensão $2n$. Além disso, com essa estrutura:*

1. *$\pi : TM \to M$ é uma submersão de classe C^{r-1}.*
2. *se M é Hausdorff, então TM é Hausdorff.*
3. *se M tem base enumerável, então TM tem base enumerável.*
4. *se M é paracompacta, então TM é paracompacta.*

Demonstração: Vide [9, p.66]. □

Em geral, o fibrado tangente TM não é difeomorfo ao produto cartesiano $M \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma variedade M é ***paralelizável*** quando TM é trivial. Por exemplo, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ e o toro $\mathbb{T}^n$ são exemplos de variedades paralelizáveis. Já a esfera $\mathbb{S}^2$ não é paralelizável.

Dada uma aplicação $f : M \to N$ diferenciável entre duas variedades, define-se a aplicação $df : TM \to TN$ como

$$df(p, v) \doteq (f(p), df_p(v)).$$

A aplicação df é chamada ***derivada global ou aplicação tangente de*** f. Se f é de classe C^r, então df é de classe C^{r-1}. Além disso, se $g : N \to P$ é uma outra aplicação diferenciável, então

$$d(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM} \quad \text{e} \quad d(g \circ f) = dg \circ df.$$

Em particular, se f é um difeomorfismo tem-se

$$d(f^{-1}) = (df)^{-1}.$$

De agora em diante, suponhamos que M é uma variedade Hausdorff, paracompacta e de classe C^∞. Um ***campo vetorial*** em M é uma seção da projeção $\pi : TM \to M$, isto é, uma aplicação contínua $X : M \to TM$ tal que

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M .$$

O conjunto de todos os campos vetoriais, em M, será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Consideremos em $\mathfrak{X}(M)$ as seguintes operações:

- **Adição:** $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto X + Y$ definida por

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p$$

- **Multiplicação por escalar:** $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(a, X) \mapsto aX$ definida por

$$(aX)(p) := aX_p.$$

- **Multiplicação por função:** $C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(f, X) \mapsto fX$ definida por

$$(fX)(p) := f(p)X_p.$$

Verifica-se que as operações acima estão bem definidas. Além disso, as operações de soma e multiplicação por escalar tornam $\mathfrak{X}(M)$ um espaço vetorial real enquanto as operações de soma e multiplicação por função tornam $\mathfrak{X}(M)$ um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Proposição B.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável. A aplicação $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

está bem definida e goza das seguintes propriedades:

1. *bilinearidade.*

2. *antissimétrica.*

3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$

Demonstração: Vide [9]. $\square$

Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ estão ***f-relacionados*** quando

$$df \circ X = Y \circ f.$$

Suponhamos que f é um difeomorfismo. A composição $df \circ X \circ f^{-1}$ define um campo vetorial em N, denotado por f_*X, que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, dashed, "f_*X"'] \end{tikzcd}$$

Nesse caso, para todo $y \in N$ temos

$$f_*X(y) = df_{f^{-1}(y)}(X(f^{-1}(y))). \tag{B.1}$$

Proposição B.3.3. *Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$. Se $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$ estão f-relacionados com X e X', respectivamente, então os campos $[X, X']$ e $[Y, Y']$ estão f-relacionados.*

Demonstração: Vide [23, p.31]. $\square$

Iremos agora apresentar a versão dual dos conceitos discutidos anteriormente. O ***fibrado cotangente*** de M, em símbolos T^*M, é definido como sendo a união disjunta dos espaços cotangentes a M, isto é,

$$T^*M \doteq \coprod_{p\in M} T_p^*M = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_p^*M = \{(p,\xi) : p \in M \ \text{ e } \ \xi \in T_p^*M\}.$$

A aplicação $\pi^* : T^*M \to M$ dada por $\pi^*(p,\xi) = p$ é chamada de ***projeção de** T^*M **sobre** M*. Pode-se reformular o Teorema B.3.1 para o fibrado cotangente. Assim, T^*M tem estrutura de variedade diferenciável com dimensão $2n$.

Uma seção do fibrado cotangente T^*M é chamada de ***forma diferencial (de grau 1) ou campo de covetores*** em M, isto é, consiste numa aplicação $\alpha : M \to T^*M$ tal que

$$\pi^* \circ \alpha = \mathrm{id}_M .$$

O conjunto de todas as formas diferenciais de grau 1 em M é denotado por $\Omega^1(M)$. Analogamente ao que foi feito para campos vetoriais, o conjunto $\Omega^1(M)$ pode ser visto como um espaço vetorial real e como um módulo sobre $C^\infty(M)$.

B.4 Fibrados

Um ***fibrado***[2] é uma tripla (E, π, B) onde $\pi : E \to B$ é uma aplicação. O conjunto B é chamado ***espaço base***, o conjunto E é chamado ***espaço total*** e a aplicação π é chamada ***projeção*** do fibrado. Para cada $x \in B$, denomina-se a pré-imagem $\pi^{-1}(\{x\})$, às vezes denotada por $\pi^{-1}(x)$, por ***fibra sobre*** x. A família de fibras

$$\{\pi^{-1}(x) : x \in B\} \subseteq E$$

é disjunta, isto é, $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$ sempre que $x \neq y$. Assim, se duas fibras tem interseção não vazia, então elas coincidem. Utilizando que pré-imagem comuta com uniões arbitrárias, percebemos que o espaço total pode ser visto como uma união, parametrizada pelo espaço base, de fibras

$$E = \coprod_{x \in B} \pi^{-1}(x),$$

onde o símbolo $\coprod$ significa união disjunta. Uma ***seção*** de (E, π, B) consiste numa aplicação $\sigma : B \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$. Em outras palavras, $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x)$ para todo $x \in B$. O conjunto de todas as seções de (E, π, B) será denotado por $\Gamma(E)$.

Exemplo B.4.1. Sejam (E, π, B) um fibrado e F um conjunto. O ***fibrado produto com base*** B ***e fibra*** F consiste na terna $(B \times F, \pi', B)$ onde $\pi' : B \times F \to B$ é a aplicação dada por $\pi'(x, v) = x$. Toda seção $\sigma \in \Gamma(B \times F)$ é da forma

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$

com $f : B \to F$ unicamente determinado por σ. De fato, por definição, $\sigma(x) = (\sigma_1(x), f(x))$ onde $\sigma_1 : B \to B$ e $f : B \to F$ são as funções coordenadas de σ. Visto que $\pi \circ \sigma = \sigma_1(x)$ concluímos que $\sigma_1 = \mathrm{id}_B$. Assim, existe uma bijeção entre os conjuntos $\Gamma(B \times F)$ e $\mathcal{F}(B, F)$. $\diamond$

Dizemos que (E', π', B') é um ***subfibrado*** de (E, π, B) quando E' é um subconjunto de E, B' é um subconjunto de B e $\pi' = \pi|_{E'} : E' \to B'$.

Exemplo B.4.2. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere os conjuntos

$$T\mathbb{S}^n = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n : \langle p, v \rangle = 0\}$$

[2] Estamos aqui seguindo a definição de [50].

e

$$N\mathbb{S}^n = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n : p = av \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}.$$

As triplas $(T\mathbb{S}^n, \pi_1, \mathbb{S}^n)$ e $(N\mathbb{S}^n, \pi_2, \mathbb{S}^n)$ são denominadas ***fibrado tangente*** e ***fibrado normal*** de $\mathbb{S}^n$, respectivamente. Notemos que as fibras, em ambos os casos, têm estrutura de espaço vetorial. Além disso, podemos enxergar tais fibrados como subfibrados de $(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n, \pi, \mathbb{S}^n)$. $\diamond$

Frequentemente são consideradas estruturas adicionais a um fibrado, dependendo do contexto que estamos inseridos. Em Geometria é comum exigirmos que tanto E quanto B sejam, pelo menos, espaços topológicos e a aplicação $p : E \to B$ seja contínua e sobrejetora.

Dizemos que um fibrado (E, p, B) é um ***fibrado diferenciável*** quando E e B são variedade diferenciáveis e a projeção é uma submersão.

Exemplo B.4.3. Seja M uma variedade diferenciável. Os fibrados tangente TM e cotangente T^*M são exemplos de fibrados diferenciáveis no sentido que foi definido acima. Por causa do Exemplo B.4.1, percebemos o motivo dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ serem vistos como aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. $\diamond$

Queremos, agora, considerar as aplicações entre fibrados que preservam as estruturas envolvidas. No caso de fibrados sem estruturas adicionais (topológicas, diferenciáveis etc) desejamos que as aplicações levem fibra em fibra.

Sejam (E_1, π_1, B_1) e (E_2, π_2, B_2) fibrados. Um ***morfismo*** entre esses fibrados é um par (f, g) onde $f : E_1 \to E_2$ e $g : B_1 \to B_2$ são aplicações tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

comuta. Em particular, quando os espaços base forem o mesmo $B_1 = B_2$, um morfismo, sobre B_1, $f : (E_1, \pi_1, B_1) \to (E_2, \pi_2, B_1)$ é uma aplicação $f : E_1 \to E_2$ tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ f$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B_1 & \end{tikzcd}$$

Dizemos que dois fibrados (E_1, π_1, B_1) e (E_2, π_2, B_2) são ***isomorfos*** quando existe um morfismo $(u', f') : (E_2, \pi_2, B_2) \to (E_1, \pi_1, B_1)$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_{B_1}$, $f \circ f' = \mathrm{id}_{B'}$, $g' \circ g = \mathrm{id}_{E_1}$ e $g \circ g' = \mathrm{id}_{E'}$.

Um conjunto F é uma ***fibra típica*** do fibrado (E, π, B) quando existe uma bijeção entre F e $\pi^{-1}(x)$ para cada $x \in B$. O fibrado (E, π, B) é dito ***trivial*** com fibra F quando (E, π, B) é isomorfo ao fibrado $(B \times F, \pi, B)$.

Proposição B.4.4. *Sejam $\pi_i : E_i \to B_i$, $i \in \{1, 2\}$, fibrados e $f : E_1 \to E_2$ uma aplicação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para todo $x \in B_1$, existe $y \in B_2$ tal que $f(\pi_1^{-1}(x)) \subset \pi_2^{-1}(y)$.*

2. *Existe uma aplicação $g : B_1 \to B_2$ tal que $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, isto é, que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

   comutar.

Nesse caso,

1. *$f(\pi_1^{-1}(x)) \subset \pi_2^{-1}(g(x))$, para todo $x \in B_1$.*

2. *A aplicação g é única.*

3. *Se $\pi_i : E_i \to B_i$, $i \in \{1, 2\}$, e f são diferenciáveis, então g é diferenciável.*

Demonstração: Suponhamos que vale 1. Sejam $\sigma_1 : B_1 \to E_1$ uma seção de π_1 e $g = \pi_2 \circ f \circ \sigma_1$. Dado $\xi \in E_1$, sejam $x = \pi_1(\xi) \in B_1$ e $\tilde{\xi} = \sigma_1(x) \in E_1$. Daí,

$$g \circ \pi_1(\xi) = \pi_2 \circ f \circ \sigma_1(x) = \pi_2 \circ f(\tilde{\xi}) = \pi_2 \circ f(\xi),$$

sendo que na última igualdade foi usado que $f(\tilde{\xi})$ e $f(\xi)$ estão na mesma fibra de E_2. Logo, $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$.

Reciprocamente, se $g : B_1 \to B_2$ é uma aplicação tal que $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, então dados $x \in B_1$ e $\xi \in \pi_1^{-1}(x)$, temos

$$\pi_2(f(\xi)) = \pi_2 \circ f(\xi) = g \circ \pi_1(\xi) = g(\pi_1(\xi)) = g(x).$$

Logo, $f(\xi) \in \pi_2^{-1}(g(x))$, mostrando que $f(\pi_1^{-1}(x)) \subset \pi_2^{-1}(g(x))$, para todo $x \in B_1$.

Seja $\tilde{g} : B_1 \to B_2$ uma aplicação tal que $\tilde{g} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$. Assim, $\tilde{g} \circ \pi_1 = g \circ \pi_1$. Como π_1 é sobrejetora segue que $\tilde{g} = g$, mostrando a unicidade de g.

Se os espaços são variedades diferenciáveis e as aplicações que definem g são diferenciáveis, então g é diferenciável, por ser composta de aplicações diferenciáveis. $\square$

Exemplo B.4.5. Consideremos o fibrado $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x,y) = x$, e as aplicações $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por

$$f(x,y) = (x,0) \ \text{ e } \ g(x) = x.$$

Notemos que $g \circ \pi = \pi \circ f$, g é difeomorfismo, f é injetora, mas não é sobrejetora. $\diamond$

Exemplo B.4.6. Consideremos os fibrados $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definidos por

$$\pi_1(x,y,z) = (x,y) \ \text{ e } \ \pi_2(x,y,z) = x$$

e as aplicações $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x$. Notemos que $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, f é difeomorfismo, g é sobrejetora, mas não é injetora. Além disso, dados $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos que

$$\pi_1^{-1}(x_0,y_0) = \{(x_0,y_0)\} \times \mathbb{R} \ \text{ e } \ \pi_2^{-1}(x_0) = \{x_0\} \times \mathbb{R}^2,$$

isto é, as fibras de π_1 são subvariedades de dimensão 1 e as fibras de π_2 são subvariedades de dimensão 2. Em particular, $f(\pi_1^{-1}(x,y)) \subset \pi_2^{-1}(g(x,y))$, mas $f(\pi_1^{-1}(x,y)) \neq \pi_2^{-1}(g(x,y))$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\diamond$

Proposição B.4.7. *Sejam $\pi : E \to B$ um fibrado e $f : E \to E$ uma aplicação bijetora. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f leva fibra em fibra, isto é, $f(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(g(x))$, para todo $x \in B$.*
2. *Existe uma única aplicação bijetora $g : B \to B$ tal que $g \circ \pi = \pi \circ f$, isto é, que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   comutar.

Demonstração: Suponhamos que f leva fibra em fibra. Pela Proposição B.4.4, existe uma única aplicação $g : B \to B$ tal que $g \circ \pi = \pi \circ f$.

Sejam $y \in B$ e $\xi \in \pi^{-1}(y)$. Como f é sobrejetora, existe $\eta \in E$ tal que $\xi = f(\eta)$. Daí,

$$\begin{aligned} y &= \pi(\xi) \\ &= \pi(f(\eta)) \\ &= \pi \circ f(\eta) \\ &= g \circ \pi(\eta) \\ &= g(\pi(\eta)), \end{aligned}$$

mostrando que g é sobrejetora. Sejam, agora, $x, y \in B$ tais que $g(x) = g(y)$. Por hipótese,

$$f(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(g(x)) = \pi^{-1}(g(y)) = f(\pi^{-1}(y)).$$

Como f é injetora temos que $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(y)$ e, assim, $x = y$, mostrando que g é injetora. Logo, g é bijetora.

Reciprocamente, suponhamos que existe $g : B \to B$ bijetora tal que $g \circ \pi = \pi \circ f$. Dado $x \in B$ temos, da Proposição B.4.4, que $f(\pi^{-1}(x)) \subset \pi^{-1}(g(x))$. Seja $\xi \in \pi^{-1}(g(x))$. Como f é sobrejetora, existe $\eta \in E$ tal que $f(\eta) = \xi$. Seja $y = \pi(\eta)$. Pela Proposição B.4.4,

$$\xi = f(\eta) \in \pi^{-1}(g(y))$$

e, assim, $\pi^{-1}(g(y)) = \pi^{-1}(g(x))$, isto é, $g(y) = g(x)$ e como g é injetora segue que $y = x$. Logo, $\eta \in \pi^{-1}(x)$ e, portanto, $\pi^{-1}(g(x)) \subset f(\pi^{-1}(x))$, concluindo a demonstração. $\square$

Teorema B.4.8. *Sejam $\pi : E \to B$ um fibrado diferenciável e $f : E \to E$ um difeomorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f leva fibra em fibra, isto é, $f(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(g(x))$, para todo $x \in B$.*

2. *Existe um único difeomorfismo $g : B \to B$ tal que $g \circ \pi = \pi \circ f$, isto é, que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   comutar.

Demonstração: Pela Proposição B.4.7, a afirmação 2. implica 1.

Reciprocamente, suponhamos que f leva fibra em fibra. Pela Proposição B.4.7, existe uma única aplicação bijetora $g : B \to B$ tal que $g \circ \pi = \pi \circ f$. Assim, para concluir, basta mostrar que g é difeomorfismo local. Pela Proposição B.4.4, g é diferenciável. Sejam $x \in B$ e $p, q \in E$ tais que $\pi(p) = x$ e $q = f(p)$. Dado $v \in T_{g(x)}B$, existem $\xi \in T_qE$ e $\eta \in T_pE$ tais que $d\pi_q(\xi) = v$ e $df_p(\eta) = \xi$, já que π é submersão e f é difeomorfismo. Assim,

$$\begin{aligned} v &= d\pi_q(\xi) \\ &= d\pi_q(df_p(\eta)) \\ &= d(\pi \circ f)_p(\eta) \\ &= d(g \circ \pi)_p(\eta) \\ &= dg_x(d\pi_p(\eta)). \end{aligned}$$

Logo, dg_x é sobrejetora e por argumento de dimensão segue que dg_x é isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa existem abertos U e V em B tais que $x \in U$, $g(x) \in V$ e $g|_U : U \to V$ é difeomorfismo. Como $x \in B$ é arbitrário segue que g é um difeomorfismo local. $\square$

APÊNDICE C – Teoria de Lie

Neste capítulo, intende-se fazer um apanhado dos conceitos e resultados relacionados à teoria de Lie. Não há a pretensão de uma exposição detalhada. Para isso, sugerimos as referências [51, 52] e [7, 9, 14, 21, 30, 53] para as álgebras e os grupos de Lie, respectivamente. No Capítulo 4 as câmeras de Weyl aparacerão de maneira breve. Indicamos [54] para um tratamento mais explicativo.

C.1 Álgebras de Lie

Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0 munido de uma aplicação $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é chamado de ***álgebra de Lie*** sobre $\mathbb{K}$ quando $[\cdot,\cdot]$ tiver as seguintes propriedades:

1. bilinearidade.

2. antissimetria, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. Identidade de Jacobi: para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Nesse caso, a aplicação $[\cdot,\cdot]$ é denominada ***colchete (de Lie).*** A dimensão de $\mathfrak{g}$ é definida como sendo a dimensão do espaço vetorial subjacente. Por causa da identidade de Jacobi temos que, em geral, as álgebras de Lie não são associativas. Observe que $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $[X, Y] = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Dizemos que um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é uma ***subálgebra de Lie*** quando $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todos $X, Y \in \mathfrak{h}$. Isto significa que $\mathfrak{h}$ é fechado para o colchete.

Exemplo C.1.1. Apresentaremos alguns exemplos de álgebras de Lie que aparecerão no decorrer do texto.

1. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra associativa, então existe uma estrutura de álgebra de Lie proveniente do colchete $[x, y] = xy - yx$ para $x, y \in \mathcal{A}$. Nesse contexto, é usual denominar $[\cdot,\cdot]$ de comutador.

2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. O conjunto $\mathfrak{gl}(V)$ dos operadores lineares em V com o produto dado pela composição de aplicações é uma álgebra associativa e, portanto, tem uma estrutura de álgebra de Lie.

3. O conjunto $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$ com entradas num corpo $\mathbb{K}$ munido do produto usual é uma álgebra associativa. Logo, tal conjunto admite uma estrutura de álgebra de Lie.

4. Os espaços listados abaixo constituem subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

   - $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^\top = 0\}$
   - $\mathfrak{u}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + \overline{X}^\top = 0\}$
   - $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{g}(2n, \mathbb{K}) : XJ + JX^\top = 0\}$ onde $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$

5. Dada uma variedade diferenciável M, o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ dos campos vetoriais (aqui enxergados como derivações) munido do colchete

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

   com $f \in C^\infty(M)$, é uma álgebra de Lie que, em geral, tem dimensão infinita.

$\diamond$

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é chamada de ***homomorfismo*** quando for uma transformação linear entre os espaços vetoriais subjacentes e preservar o colchete, isto é,

$$\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)].$$

Se, além disso, tal aplicação for inversível, dizemos que ψ é um ***isomorfismo*** de álgebras de Lie. Reservaremos o termo ***isomorfismo linear*** para um isomorfismo entre as estruturas de espaços vetoriais subjacentes às álgebras de Lie em questão.

Exemplo C.1.2. O espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto vetorial $\times$ é uma álgebra de Lie. Com efeito, devemos mostrar que $\times$ satisfaz a identidade de Jacobi, uma vez que a bilinearidade e a antissimetria são bem conhecidos. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Pela identidade de Grassmann[1] temos

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w \\ w \times (u \times v) &= \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v \\ v \times (w \times u) &= \langle v, u \rangle w - \langle v, w \rangle u, \end{aligned}$$

[1] Para prová-la é suficiente analisarmos na base canônica do $\mathbb{R}^3$ e estendermos por linearidade.

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Daí,

$$u \times (v \times w) + w \times (u \times v) + v \times (w \times u) = 0$$

como desejado. Consideremos $\mathfrak{so}(3)$ munido do colchete dado pelo comutador. A aplicação $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ dada por

$$\psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Utilizando as definições acima, pode-se verificar que valem as seguintes propriedades:

$$\psi(u)v = u \times v \quad \text{e} \quad \psi((Au) \times (Av)) = \mathrm{Ad}(A)\psi(u \times v)$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $A \in M(3, \mathbb{R})$ tal que $AA^\top = \mathrm{I}_3 = A^\top A$ e $\det A = 1$. $\diamond$

O colchete de quaisquer dois elementos de uma álgebra de Lie pode ser determinado, por bilinearidade, através do colchete dos elementos de uma base. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base. Para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k. \tag{C.1}$$

Os escalares c_{ij}^k são denominados ***constantes de estrutura*** de $\mathfrak{g}$. Notemos que outras bases podem estar associadas a constantes de estrutura diferentes, entretanto, existem algumas igualdades que são válidas para qualquer conjunto de constantes de estrutura, a saber,

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^{n} (c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m) = 0.$$

De fato, a segunda condição, por exemplo, é obtida através da identidade de Jacobi para elementos da base.

Por outro lado, é possível munirmos um espaço vetorial com estrutura de álgebra de Lie se existe um conjunto de escalares $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ que satisfazem as igualdades acima. Suponhamos, agora, que $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial. Tomamos $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e definimos $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como em (C.1) e estendemos por bilinearidade. Verifica-se que tal aplicação é antissimétrica e satisfaz a identidade de Jacobi.

Um fato importante é que as constantes de estrutura determinam de maneira única as álgebras de Lie a menos de isomorfismo. Com efeito, seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie com uma base $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ e que tem as mesmas constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$. Considere a aplicação

$$\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \quad \text{dada por} \quad \psi(X_i) = Y_i$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e estendida por linearidade. Por construção, ψ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais subjacentes a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Além disso, vale que

$$\psi([X,Y]) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_{ij}^k \psi(X_k) = \sum_{i,j} a_i b_j [Y_i, Y_j] = [\psi(X), \psi(Y)],$$

onde os escalares a_i e b_i são as coordenadas de X e Y com respeito à base de $\mathfrak{g}$. Dessa forma, ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

A seguir, apresentaremos um resultado que justificará um certo abuso de notação que será utilizado adiante.

Lema C.1.3. *Seja V um espaço vetorial complexo com $n = \dim V$. Considere $\mathfrak{gl}(V)$ e $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ munidos dos comutadores. Então, existe uma aplicação $\Upsilon : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ que é um homomorfismo injetor de álgebras de Lie.*

Demonstração: Considere a aplicação $\Psi : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ dada por

$$\Psi(X + iY) := \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

Por construção, a aplicação Ψ é uma transformação linear e possui núcleo trivial. Resta mostrarmos que Ψ preserva o colchete de Lie. Com efeito, pelas propriedades do colchete (vide página 144) temos que

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2])$$

e, assim,

$$\Psi([X_1 + iY_1, X_2 + iY_2]) = \begin{pmatrix} [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] & [Y_2, X_1] + [X_2, Y_1] \\ [X_1, Y_2] + [Y_1, X_2] & [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, tem-se

$$\Psi(X_1 + iY_1)\Psi(X_2 + iY_2) = \begin{pmatrix} X_1X_2 - Y_1Y_2 & -X_1Y_2 - Y_1X_2 \\ Y_1X_2 + X_1Y_2 & -Y_1Y_2 + X_1X_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\Psi(X_2 + iY_2)\Psi(X_1 + iY_1) = \begin{pmatrix} X_2X_1 - Y_2Y_1 & -X_2Y_1 - Y_2X_1 \\ Y_2X_1 + X_2Y_1 & -Y_2Y_1 + X_2X_1 \end{pmatrix}.$$

Com as expressões acima obtemos que

$$\Psi([X_1 + iY_1, X_2 + iY_2]) = [\Psi(X_1 + iY_1), \Psi(X_2 + iY_2)],$$

ou seja, trata-se de um homomorfismo de álgebras de Lie. O homomorfismo Υ do enunciado é dado pela composição do isomorfismo entre $\mathfrak{gl}(V)$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, que depende da escolha de uma base de V, com o homomorfismo Ψ. $\square$

Pelo Lema C.1.3, $\mathfrak{gl}(V)$ é identificado com uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$. Por causa disso, é usual cometer o abuso de notação $\mathfrak{gl}(V) \subseteq \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$. De maneira análoga, tem-se $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$.

Sejam V um espaço vetorial e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, ambos sobre um mesmo corpo. Uma ***representação*** de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Exemplo C.1.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A aplicação $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, denominada ***representação adjunta***. De fato, a linearidade de tal aplicação segue da bilinearidade de $[\cdot, \cdot]$ e a propriedade de preservar o colchete vem da identidade de Jacobi. A aplicação $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ definida por $\mathrm{ad}^*(\alpha)(X) = -\alpha \circ \mathrm{ad}(X)$ é denominada ***representação coadjunta***. $\diamond$

C.2 Grupos de Lie

Um grupo de Lie consiste de um grupo cujo conjunto subjacente tem estrutura de variedade diferenciável compatível com a operação de produto, isto é, a aplicação produto $p : G \times G \to G$ é diferenciável.

Em contraste com os grupos topológicos, não é exigida a diferenciabilidade da aplicação inversa. A diferenciabilidade do produto juntamente com o Teorema da Função Implícita nos assegura a diferenciabilidade da inversa (vide [21] para mais detalhes).

Dado $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $E_g, D_g : G \to G$ são definidas, respectivamente, por

$$E_g(h) = gh \quad \text{e} \quad D_g(h) = hg.$$

Como $(E_g)^{-1} = E_{g^{-1}}$ e $(D_g)^{-1} = D_{g^{-1}}$ tais aplicações são difeomorfismos. Assim, podemos concluir que todo grupo de Lie é paralelizável, isto é, os fibrados tangente e cotangente são triviais. De fato, a aplicação

$$G \times T_1G \ni (g, v) \longmapsto d(E_g)_1(v) \in TG$$

é um difeomorfismo. De maneira análoga, podemos identificar $T_1G \times G$ com TG usando a translação à direita.

Todo grupo de Lie está associado a uma álgebra de Lie. Discutiremos brevemente como construir uma álgebra de Lie a partir do grupo.

Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ é

- ***invariante à esquerda*** quando para quaisquer $g, h \in G$ valer

$$X(gh) = d(E_g)_h(X(h)).$$

- ***invariante à direita*** quando para quaisquer $g, h \in G$ valer

$$X(gh) = d(D_g)_h(X(h)).$$

O conjunto de todos os campos invariantes à esquerda e à direita serão denotados, respectivamente, por $\mathfrak{X}^e(G)$ e $\mathfrak{X}^d(G)$. Tais conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathfrak{X}(G)$ e fechados para o colchete de Lie. Assim, são subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

Os campos invariantes à esquerda e à direita são determinados pelos seus valores na identidade de G. Por exemplo, se $X \in \mathfrak{X}^d(G)$, então a condição de invariância descrita acima implica que $X(g) = d(D_g)_1(X(1))$ para todo $g \in G$.

Proposição C.2.1. *Seja G um grupo de Lie. A aplicação $\Phi : T_1G \to \mathfrak{X}^d(G)$ que associa cada $X \in T_1G$ ao único campo vetorial $X^d \in \mathfrak{X}(G)$ tal que $X^d(1) = X$ é um isomorfismo linear canônico. Em particular, $\mathfrak{X}^d(G)$ é um espaço vetorial finitamente gerado cuja dimensão é igual a $\dim G$.*

Demonstração: Inicialmente, notemos que para cada $X \in T_1G$ podemos escrever $X^d(g) = d(D_g)_1(X)$, já que $d(D_g) : T_1G \to T_gG$ é uma transformação linear (isomorfismo) e $X^d(1) = d(D_1)_1(X) = d(\mathrm{id}_G)_1(X) = X$. Dados $g, h \in G$, tem-se

$$\begin{aligned} X^d(hg) &= d(D_{hg})_1(X) \\ &= d(D_g \circ D_h)_1(X) \\ &= d(D_g)_h \circ d(D_h)_1(X) \\ &= d(D_g)_h(X^d(h)), \end{aligned}$$

ou seja, X^d é um campo invariante à direita garantindo, assim, que a aplicação Φ está bem definida.

Se $X, Y \in T_1G$ e $s \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \Phi(X + sY)(g) &= d(D_g)_1(X + sY) \\ &= d(D_g)_1(X) + s \cdot d(D_g)_1(Y) \\ &= \Phi(X)(g) + s \cdot \Phi(Y)(g) \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Logo, Φ é uma transformação linear.

Vamos construir a inversa da aplicação definida no enunciado. Seja $\Psi : \mathfrak{X}^d(G) \to T_1G$ a aplicação que associa cada $X \in \mathfrak{X}^d(G)$ ao vetor tangente $X(1) \in T_1G$. Dado $X \in T_1G$, tem-se

$$\Psi \circ \Phi(X) = \Psi(X^d) = X^d(1) = X.$$

Logo, Ψ é uma inversa à esquerda de Φ. Por outro lado, para qualquer $X \in \mathfrak{X}^d(G)$ temos $X(1)^d(g) = d(D_g)_1(X(1)) = X(g)$ para todo $g \in G$. Daí, $X(1)^d = X$ e

$$\Phi \circ \Psi(X) = \Phi(X(1)) = X(1)^d = X.$$

Portanto, Φ é um isomorfismo. □

O resultado anterior possui uma versão análoga para os campos invariantes à esquerda, ou seja, podemos construir um isomorfismo canônico entre T_1G e $\mathfrak{X}^e(G)$. Sabemos que tanto E_g quanto D_g são difeomorfismos, logo a Proposição B.3.3 nos permite concluir que os espaços $\mathfrak{X}^e(G)$ e $\mathfrak{X}^d(G)$ são subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

Os isomorfismos de $\mathfrak{X}^e(G)$ e $\mathfrak{X}^d(G)$ no espaço tangente a identidade (um deles foi construído na Proposição C.2.1) induzem colchetes $[\cdot,\cdot]_e$ e $[\cdot,\cdot]_d$ em T_1G, a saber, dados $A, B \in T_1G$ tem-se

$$[A, B]_e := [A^e, B^e](1) \quad \text{e} \quad [A, B]_d := [A^d, B^d](1).$$

Pode-se verificar (vide [21]) que tais colchetes estão relacionados pela seguinte expressão

$$[A, B]_d = -[A, B]_e.$$

Dessa forma, as estruturas de álgebra de Lie de $(T_1G, [\cdot,\cdot]_e)$ e $(T_1G, [\cdot,\cdot]_d)$ são isomorfas no sentido de existir um isomorfismo $T : T_1G \to T_1G$ tal que $T[A, B]_d = [T(A), T(B)]_e$. De fato, basta tomar $T = -\operatorname{id}_{T_1G}$.

A ***álgebra de Lie*** de G, em símbolos $\mathfrak{g}$ ou $\operatorname{Lie}(G)$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas $\mathfrak{X}^e(G), \mathfrak{X}^d(G), (T_1G, [\cdot,\cdot]_e)$ ou $(T_1G, [\cdot,\cdot]_d)$.

Exemplo C.2.2. Seja V um espaço vetorial. A álgebra de Lie de $\mathrm{Gl}(V)$ é dada por $\mathfrak{gl}(V)$ do Exemplo C.1.1. $\diamond$

Exemplo C.2.3 (Grupo Unitário). Dado $A \in M(n, \mathbb{C})$, denotaremos por A^* a transposta conjugada de A. O conjunto

$$\mathrm{U}(n) \doteq \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) : A^* A = \mathrm{I}_n\}$$

é um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie dada por $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$, visto como um espaço vetorial real (veja Exemplo C.1.1). $\diamond$

Exemplo C.2.4 (Grupo Especial Ortogonal). O conjunto

$$\mathrm{SO}(n) \doteq \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$$

é um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ (veja Exemplo C.1.1). Notemos que $\mathrm{SO}(n)$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{O}(n)$ e, portanto, é compacto. $\diamond$

Sejam G e H grupos de Lie. Uma aplicação $\rho : G \to H$ é um ***homomorfismo*** de grupos de Lie quando for um homomorfismo de grupos que também é diferenciável. Se $H = \mathrm{Gl}(V)$, para algum espaço vetorial V, um homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ é chamado de ***representação*** de G no espaço vetorial V.

Para cada $g \in G$, considere a aplicação $C_g : G \to G$ dada por

$$C_g(x) := gxg^{-1} \text{ para todo } x \in G.$$

Visto que $T_1 G = \mathfrak{g}$ e $C_g(1) = 1$, a derivada $d(C_g)_1$ é uma transformação linear da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em si mesma. Constata-se que a aplicação $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ definida por

$$\mathrm{Ad}(g) \doteq d(C_g)_1$$

é uma representação de G em $\mathfrak{g}$, isto é, um homomorfismo de G em $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Além disso, Ad é chamada ***representação adjunta*** de G em $\mathfrak{g}$. Em termos das translações à esquerda e à direita, tem-se

$$\mathrm{Ad}(g) = (dD_{g^{-1}})_g \circ (dE_g)_1.$$

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um ***subgrupo uniparamétrico*** de G é um homomorfismo $\gamma : \mathbb{R} \to G$, onde $\mathbb{R}$ é visto como um grupo de Lie aditivo.

Uma caracterização útil é que os subgrupos uniparamétricos de um grupo de Lie são exatamente as curvas integrais maximais de campos invariantes à esquerda que no instante inicial passam pela identidade. Em [21, p.115] é mostrado que os campos invariantes à esquerda e à direita são completos.

A aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$ dada por

$$\exp X \doteq \gamma(1),$$

onde γ é a curva integral de $X \in \mathfrak{g}$ que passa pela identidade, é chamada de ***aplicação exponencial***. É comum, em alguns casos, denotar $\exp X$ por e^X. Além disso, considerando G com o conjunto dos campos invariantes à esquerda ou à direita a aplicação exponencial é a mesma (vide [21, p.115]).

Listaremos abaixo algumas propriedades que são bastante utilizadas.

Proposição C.2.5. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

1. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma(t) = \exp(tX)$ é o subgrupo uniparamétrico de G gerado por X.*
2. *A aplicação exponencial é diferenciável.*
3. *Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $t, s \in \mathbb{R}$, tem-se*
   - $\exp(t+s)X = \exp(tX)\exp(sX)$.
   - $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.
4. *A derivada $(d\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} \to T_1G$ é a aplicação identidade, usando as identificações de $T_0\mathfrak{g}$ e T_1G com $\mathfrak{g}$.*
5. *Se ϕ_t é o fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}^e(G)$, então $\phi_t = D_{\exp(tX)}$.*
6. *Se ϕ_t é o fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}^d(G)$, então $\phi_t = E_{\exp(tX)}$.*

Demonstração: Vide [9,21]. $\square$

Apresentaremos algumas construções com representações que serão utilizadas no decorrer do texto. Fixemos G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Soma direta de representações

Sejam $\rho_1, \dots, \rho_n$ representações de G em $V_1, \dots, V_n$, respectivamente, e $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. A aplicação $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ definida por

$$\rho(g)(v_1, \dots, v_n) \doteq (\rho_1(g)v_1, \dots, \rho_n(g)v_n)$$

é uma representação de G em V chamada ***soma direta*** de $\rho_1, \ldots, \rho_n$ e é denotada por $\bigoplus_{i=1}^n \rho_i$. Matricialmente, ρ é escrita em blocos na diagonal principal, isto é,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}.$$

Representação dual

Seja $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ uma representação. A aplicação $\rho^* : G \to \mathrm{Gl}(V^*)$ dada por

$$\rho^*(g)(\alpha) \doteq \alpha \circ \rho(g)^{-1}$$

é uma representação de G em V^*.

Pode-se definir a representação de G no dual da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$ através da seguinte aplicação $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}^*)$ dada por

$$\mathrm{Ad}^*(g)\alpha \doteq \alpha \circ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \tag{C.2}$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Tal aplicação é chamada ***representação coadjunta*** de G em $\mathfrak{g}^*$.

Ações Diferenciáveis

Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Consideremos $\tau : G \times M \to M$ uma ação à esquerda. Fixado $p \in M$ e $g \in G$, definimos as seguintes aplicações parciais

- $\tau_g : M \to M$ dada por $\tau_g(p) := \tau(g, p)$ para todo $p \in M$.
- $\tau^p : G \to M$ dada por $\tau^p(h) := \tau(h, x)$ para todo $h \in G$.

Se τ é uma ação diferenciável, então τ_g é um difeomorfismo para todo $g \in G$. Neste caso, escrevemos $\tau : G \to \mathrm{Dif}(M)$.

Dizemos que uma função $f \in C^\infty(M)$ é ***τ-invariante*** quando as aplicações $f \circ \tau_g$ e f forem iguais para todo $g \in G$. O conjunto formado por tais funções será denotado por $C^\infty(M)^\tau$ ou $C^\infty(M)^G$ quando a ação estiver subentendida.

Ações diferenciáveis de grupos de Lie podem ser usadas para construir variedades diferenciáveis, denominadas de *espaços homogêneos*. Toda ação transitiva induz uma estrutura diferenciável em G/G_{p_0}, com G_{p_0} sendo a isotropia de $p_0 \in M$, que o torna difeomorfo a M (vide Teorema 6.22 e Proposição 13.9 de [21] bem como [23, p.87], [9, p.552], [53, p.368] ou [7, p.266]).

Uma ***ação infinitesimal*** de $\mathfrak{g}$ em M consiste num elemento de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{X}(M))$. Se o grupo G age, por meio de τ, de forma diferenciável em M podemos construir uma ação infinitesimal. Com efeito, seja $\delta\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\delta\tau(X)p \doteq \frac{d}{dt}\tau(\exp(tX), p)|_{t=0}$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $p \in M$. Notemos que

$$\frac{d}{dt}\tau(\exp(tX), p)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\tau^p(\exp(tX))|_{=0} = d(\tau^p)_1(X)$$

é um elemento de T_pM. Logo, a correspondência $p \mapsto \delta\tau(X)p$ define um campo de vetores em M. Além disso, como $\delta\tau(X)p$ é igual à derivada da aplicação parcial τ^p na identidade para todo $p \in M$, segue que $\delta\tau$ é uma transformação linear entre os espaços vetores subjacentes a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{X}(M)$. Se $\mathfrak{g}$ é visto como a álgebra dos campos invariantes à direita, então $\delta\tau$ preserva os colchetes de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{X}(M)$ (vide [21, p.282] ou [14, p.276]).

Observação C.2.6. É comum denotar o campo induzido $\delta\tau(X)$ por $\widetilde{X}$. A vantagem disso é que a notação fica menos carregada, porém, deixa de evidenciar a dependência da ação τ. $\diamond$

Proposição C.2.7. *Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie.*

1. *A representação adjunta induz uma ação de G em $\mathfrak{g}$, a saber,*

$$\tau : \ G \times \mathfrak{g} \ni (g, \Lambda) \longmapsto \mathrm{Ad}(g)\Lambda \in \mathfrak{g}.$$

   A órbita de um elemento $\Lambda \in \mathfrak{g}$ é dada por $\mathcal{O}(\Lambda) = \mathrm{Ad}(G)\Lambda$ e é identificada com o espaço homogêneo G/Z_Λ onde Z_Λ é o subgrupo fechado dado por $Z_\Lambda = \{g \in G : \mathrm{Ad}^*(g)\Lambda = \Lambda\}$.

2. *a derivada do homomorfismo Ad, na identidade, é dada por ad e*

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}(X))$$

   para todo $X \in \mathfrak{g}$.

3. $T_\Xi(\mathcal{O}(\Lambda)) = \{\mathrm{ad}(X)\Xi : X \in \mathfrak{g}\}$ *para todo* $\Xi \in \mathcal{O}(\Lambda)$.

Demonstração: Para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ temos

$$\tau(g_2, \tau(g_1, \Lambda)) = \tau(g_2, \mathrm{Ad}(g_1)\Lambda) = \mathrm{Ad}(g_2)(\mathrm{Ad}(g_1)\Lambda) = \mathrm{Ad}(g_2 g_1)\Lambda = \tau(g_2 g_1, \Lambda),$$

onde na terceira igualdade usamos que Ad é uma representação, e

$$\tau(1, \Lambda) = \mathrm{Ad}(1)\Lambda = \Lambda.$$

Por definição de órbita,

$$\mathcal{O}(\Lambda) = \{X \in \mathfrak{g} : X = \mathrm{Ad}(g)\Lambda \text{ para algum } g \in G\} = \mathrm{Ad}(G)\Lambda.$$

O cálculo da derivada de Ad pode ser encontrado, por exemplo, na Proposição 5.19 de [21, p.123].

O item 3 do enunciado é uma consequência do Teorema 13.8 da referência[2] [21, p.286] ou do Teorema 6.2.8 de [14, p.279]. $\square$

Proposição C.2.8. *Sejam M uma variedade e $\tau : G \times M \to M$ uma ação diferenciável de um grupo de Lie. Para quaisquer $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$ o diagrama*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "d\tau_g"] & TM \\ M \arrow[u, "\delta\tau(X)"] \arrow[r, "\tau_g"'] & M \arrow[u, "(\tau_g)_*"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo. Em particular, com a notação da página 137, tem-se

$$(\tau_g)_* \delta\tau(X) = \delta\tau(\mathrm{Ad}(g)X).$$

Demonstração: Dados $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, tem-se

$$\tau_g \circ \tau_{\exp(tX)} \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{\exp(t\,\mathrm{Ad}(g)X)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $p \in M$. Derivando o lado esquerdo em $t = 0$ temos

$$\frac{d}{dt}\tau_g \circ \tau_{\exp(tX)}(\tau_{g^{-1}}(p))|_{t=0} = d(\tau_g)_{\tau_{g^{-1}}(p)}(\delta\tau(X)\tau_{g^{-1}}(p)).$$

Por outro lado, a derivada do lado direito em $t = 0$ é

$$\frac{d}{dt}\tau_{\exp(t\,\mathrm{Ad}(g)X)}(p)|_{t=0} = \delta\tau(\mathrm{Ad}(g)X)p,$$

mostrando a propriedade desejada. $\square$

Enunciaremos a versão dual da Proposição C.2.7.

[2] É necessário o conceito de distribuição (vide [9, 14, 21, 23]).

Proposição C.2.9. *Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie.*

1. *A representação coadjunta induz uma ação de G em $\mathfrak{g}^*$, a saber,*

$$\tau: \ G \times \mathfrak{g}^* \ni (g, \lambda) \longmapsto \mathrm{Ad}^*(g)\lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

   A órbita de um elemento $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ é dada por $\mathcal{O}(\lambda) = \mathrm{Ad}^*(G)\lambda$ e é identificada com o espaço homogêneo G/Z_λ onde Z_λ é o subgrupo fechado dado por $Z_\lambda = \{g \in G : \mathrm{Ad}^*(g)\lambda = \lambda\}$.

2. *a derivada do homomorfismo Ad^*, na identidade, é dada por $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.*

3. *$T_\alpha(\mathcal{O}(\lambda)) = \{\mathrm{ad}^*(X)\alpha : X \in \mathfrak{g}\}$ para todo $\alpha \in \mathcal{O}(\lambda)$.*

Exemplo C.2.10. Seja V um espaço vetorial complexo. O conjunto

$$\mathrm{Gr}_k(V) \doteq \{U \subseteq V : U \text{ é subespaço de } V \quad \text{e} \quad \dim U = k\}$$

tem estrutura de variedade diferenciável e é denominado de ***Grassmanniana***. Se $k = 1$ e $V = \mathbb{C}^n$ munido do produto interno canônico temos que $\mathrm{Gr}_k(V)$ é chamado de ***espaço projetivo complexo*** e denotado por $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Afirmamos que

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \simeq \frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)}, \tag{C.3}$$

ou seja, a Grassmanniana é um espaço homogêneo. A aplicação

$$\mathrm{U}(n) \times \mathrm{Gr}_k(V) \ni (g, U) \longmapsto gU \in \mathrm{Gr}_k(V)$$

é uma ação transitiva. Com efeito, sejam U e W subespaços de V que têm dimensão k. Tomemos $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ e $\mathcal{C}_0 = \{w_1, \ldots, w_k\}$ bases ortogonais de U e W, respectivamente. Podemos completar $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{C}_0$ a bases ortonormais de V:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \{u_{k+1}, \ldots, u_n\} \ \text{ e } \ \mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \{w_{k+1}, \ldots, w_n\}.$$

A aplicação $u_i \mapsto w_i$, definida na base $\mathcal{B}$ e estendida por linearidade, leva base ortonormal em base ortonormal, logo é unitária. Isso garante que a ação é transitiva. Para mostrarmos o difeomorfismo (C.3) temos que verificar que a isotropia de um elemento $U \in \mathrm{Gr}_k(V)$ é igual a $\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)$. Seja $g \in \mathrm{U}(n)$ tal que $gU = U$. Existe uma base de V tal que

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz $k \times k$, B é uma matriz $n-k \times k$ e C é uma matriz $n-k \times n-k$. Como $gg^* = \mathrm{I}_n$ segue que $BB^* = \mathrm{I}_{n-k}$, $CB^* = 0$ e $AA^* + CC^* = \mathrm{I}_k$. Logo, $C = 0$ e $AA^* = \mathrm{I}_k$. Daí, a matriz de g tem a forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

com A e B matrizes unitárias. Portanto, concluímos o difeomorfismo desejado (vide [23, p.87]). $\diamond$

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Consideremos o conjunto $\mathrm{Af}(V) \doteq \mathrm{Gl}(V) \times V$ munido da operação

$$(T, u) \cdot (S, v) = (TS, u + T(v)).$$

Tal conjunto tem estrutura de grupo, denominado ***grupo afim*** de V, com identidade e elemento inverso dados, respectivamente, por

$$(\mathrm{id}_V, 0) \ \text{ e } \ (T, v)^{-1} = (T^{-1}, -T^{-1}(v)).$$

Uma ***representação afim*** de um grupo G no espaço vetorial V é um homomorfismo de G a valores no grupo afim de V, isto é, um homomorfismo $A : G \to \mathrm{Af}(V)$ tal que

$$A(g) = (\rho(g), v(g))$$

para todo $g \in G$, onde $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ é uma representação e $v : G \to V$ tem a seguinte propriedade

$$v(gh) = \rho(g)v(h) + v(g).$$

APÊNDICE D – Tensores e Formas Diferenciais

O objetivo deste capítulo consiste em apresentarmos os aspectos introdutórios das formas diferenciais e da cohomologia de De Rham (vide [9,43,45,48]) que serão utilizados no decorrer do texto. Para esse fim, começaremos expondo a linguagem necessária da álgebra tensorial bem como da álgebra exterior no contexto de espaços vetoriais (vide [55–58]).

D.1 Álgebra Tensorial

Iniciaremos estabelecendo a notação e relembrando alguns resultados básicos da álgebra multilinear. Para esse fim, consideremos $V_1, \ldots, V_s$ e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $\psi : V_1 \times \cdots \times V_s \to W$ é ***multilinear*** (ou s-***linear***) quando é linear em cada um dos seus argumentos desde que os demais estejam fixados. Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v_i, v_i' \in V_i$, com $i \in \{1, \ldots, s\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \psi(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_s) &= \psi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s) + \psi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_s) \\ \psi(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_s) &= \lambda \cdot \psi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_s). \end{aligned}$$

No caso particular em que $s = 2$ dizemos que ψ é uma aplicação bilinear. O conjunto das aplicações s-lineares possui estrutura de espaço vetorial quando definimos as operações de soma e multiplicação por escalar ponto a ponto. Utilizaremos a notação $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_s; W)$ para representar tal espaço vetorial, onde o que vem antes do ponto e vírgula é o domínio da aplicação e o que vem após denota o contra-domínio. Em particular, se $V_1 = \cdots = V_s$, então $\mathcal{L}_s(V, W) := \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_s; W)$. Para aplicações lineares entre os espaços U e V usaremos simplesmente $\mathcal{L}(U, V)$ sem ponto e vírgula.

Espaço Vetorial Livre

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e X um conjunto não vazio. O conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$ tem estrutura de espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação ponto a ponto. O ***suporte, ou suporte algébrico,*** de $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é definido

$$\mathrm{supp}(f) \doteq \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Dizemos que f tem ***suporte finito*** quando $\mathrm{supp}(f)$ é um conjunto finito. Consideraremos o subconjunto $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ formado por todas as funções que possuem suporte finito, isto é, que não se anulam apenas numa quantidade finita de elementos. Dado

$A \subseteq X$, define-se a seguinte função

$$\chi_A(x) \doteq \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

chamada ***função característica*** do conjunto A. Em particular, quando $A = \{x\}$ usaremos a notação χ_x.

Proposição D.1.1. *O conjunto $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ tem estrutura de espaço vetorial. Além disso, o conjunto $\mathcal{B}_X = \{\chi_x : x \in X\}$ é uma base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$.*

Demonstração: Vide [37]. □

A aplicação $\imath_X : X \hookrightarrow \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ que associa cada $x \in X$ a sua respectiva função característica χ_x estabelece uma bijeção de X com a base $\mathcal{B}_X$. Por conta disso, é comum dizermos que X é uma base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$. Podemos pensar em $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ como o conjunto de todas as *combinações lineares formais* de elementos de X, isto é, em vez de escrevermos um elemento do espaço livre como

$$a_1\chi_{x_1} + \cdots + a_n\chi_{x_n}$$

o representaremos por

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

Um importante resultado da Álgebra Linear e que é importante no contexto da Álgebra Tensorial, conforme veremos mais adiante, consiste na propriedade universal do espaço livre.

Teorema D.1.2. *Se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e X é um conjunto não vazio, então toda aplicação $f : X \to V$ se estende de maneira única a uma transformação linear $T : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \to V$ tal que $T \circ \imath_X = f$. Isso significa que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & V \\ \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \arrow[ur, dashed, "T"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Ademais, os espaços vetoriais $\mathcal{L}(\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}), V)$ e $\mathcal{F}(X, V)$ são canonicamente[1] isomorfos.

[1] Terminologia utilizada para enfatizar que o isomorfismo não depende da base.

Demonstração: Seja $f : X \to V$ uma aplicação. Já sabemos, pela Proposição D.1.1, que o conjunto $\{\chi_x : x \in X\}$ é uma base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$. Defina $T : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \to V$ por $T(\chi_x) = f(x)$ e estenda por linearidade. Assim, vale que $T \circ \imath_X = f$, ou seja, T restrita a cópia de X no espaço livre coincide com f. Se $R : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \to V$ é uma transformação linear tal que $R \circ \imath_X = f$, então

$$R(\chi_x) = R \circ \imath_X(x) = f(x) = T \circ \imath_X(x) = T(\chi_x)$$

para todo $x \in X$. O fato de $\{\chi_x : x \in X\}$ ser uma base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ nos assegura que $R = T$, mostrando a unicidade da extensão de f.

Mostraremos a segunda afirmação do enunciado. Seja $\varphi \in \mathcal{F}(X, V)$ arbitrário. Pelo o que acabamos de provar, existe uma única transformação linear $\Phi : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \to V$ tal que $\Phi \circ \imath_X = \varphi$. Considere a aplicação $\sharp : \mathcal{F}(X, V) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}), V)$ definida por $\sharp(\varphi) = \varphi^\sharp := \Phi$. Pode-se verificar que tal aplicação é linear. Se $\varphi \in \operatorname{nuc}(\sharp)$, então

$$0 = \sharp(\varphi)(\chi_x) = \Phi \circ \imath_X(x) = \varphi(x)$$

para todo $x \in X$. Isso implica que $\varphi = 0$, ou seja, $\sharp$ é injetora. Tomemos $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}), V)$. Seja $\varphi : X \to V$ definida por $\varphi(x) := \Phi \circ \imath_X(x)$ para todo $x \in X$. Logo, $\sharp(\varphi) = \Phi$, implicando que $\sharp$ é sobrejetora. Dessa forma, concluímos que $\sharp$ é um isomorfismo.

$\square$

Corolário D.1.3. *Na notação do Teorema D.1.2 valem as seguintes propriedades:*

1. *T é sobrejetora se, e somente se,* $\operatorname{ger}(T(\mathcal{B}_X)) = V$.
2. *T é injetora se, e somente se, $T(\mathcal{B}_X)$ é um conjunto linearmente independente.*
3. *T é um isomorfismo se, e somente se, $T(\mathcal{B}_X)$ é uma base de V.*

Na linguagem da Teoria de Categorias (vide [59–61]), para que o isomorfismo canônico do Teorema D.1.2 faça sentido é necessário que as classes de morfismos em questão pertençam a uma mesma categoria. Assim, uma maneira de reescrevermos tal isomorfismo seria

$$\mathcal{F}(X, \mathfrak{U}(V)) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}), V),$$

onde $\mathfrak{U}$ denota o funtor que *esquece*[2] a estrutura vetorial e retorna apenas o conjunto subjacente. O Teorema D.1.2 nos fornece, ainda, um exemplo clássico de adjunção de funtores (vide [60, p.41]).

Exemplo D.1.4. Seja X um conjunto finito não vazio, digamos $\{1, \ldots, n\}$. Aplicação que associa cada $f \in \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$ a n-upla $(f(1), \ldots, f(n))$ estabelece um isomorfismo

$$\mathbb{K}^n \simeq \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}).$$

Já sabemos, pela Proposição D.1.1, que o conjunto $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ é uma base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$. Dessa forma, podemos enxergar cada elemento de $\mathbb{K}^n$ como uma função de suporte finito definida em X, a saber, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é identificada com $f_x = x_1\chi_1 + \cdots + x_n\chi_n$. $\diamond$

Exemplo D.1.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário. O espaço $\mathcal{F}_0(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$ consiste em todas as funções de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{K}$ que não se anulam numa quantidade finita de valores. A aplicação $\Phi : \mathcal{F}_0(\mathbb{N}_0, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}[x]$ definida por

$$\Phi(\chi_n) = x^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e estendida por linearidade é um isomorfismo. Repare que tal fato já era de ser esperado, uma vez que polinômios são construídos a partir de sequências que não se anulam apenas numa quantidade finita de termos (vide [62, p.149]). $\diamond$

Exemplo D.1.6. Há um particular interesse na Álgebra Tensorial no espaço livre com base num produto cartesiano $U \times V$, onde U e V são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Devido a identificação de X com $\mathcal{B}_X$ discutida anteriormente (usada com frequência na literatura, por exemplo [63]), deve-se não confundir as operações da estrutura do produto cartesiano com as do espaço vetorial livre. Por exemplo, os elementos $(u, 0) + (0, v)$ e (u, v) não são iguais vistos no ambiente $\mathcal{F}_0(U \times V, \mathbb{K})$, entretanto, em $U \times V$ tais elementos são iguais. $\diamond$

Produto Tensorial

Há várias maneiras de se definir o produto tensorial de espaços vetoriais, todavia, faremos o uso de uma propriedade universal. A vantagem de considerarmos tal abordagem (mais algébrica) consiste no fato de darmos uma descrição livre de coordenadas, evidenciando com isso o caráter intrínseco desse objeto.

[2] O formalismo categórico nos permite definir conceitos como estrutura e propriedade de um conjunto. Geralmente, denomina-se *estrutura* alguma operação definida em um conjunto (por exemplo, o produto em um grupo). Já *propriedade* é entendido como uma característica intrínseca do objeto (por exemplo, completude é uma propriedade dos espaços de Hilbert). Em geral, funtores esquecimento não precisam esquecer toda a estrutura de um objeto.

Sejam U e V espaços vetoriais, de dimensão arbitrária, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere, ainda, $\mathcal{T}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\tau : U \times V \to \mathcal{T}$ uma aplicação bilinear. Dizemos que o par $(\mathcal{T}, \tau)$ é um ***produto tensorial entre*** U ***e*** V quando possui a seguinte ***propriedade universal***: para quaisquer W espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : U \times V \to W$ aplicação bilinear, existe uma única transformação linear $\xi : \mathcal{T} \to W$ tal que $\varphi = \xi \circ \tau$. Pictoricamente, tem-se que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & W \\ \mathcal{T} \arrow[ur, dashed, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Por causa do diagrama anterior, pode-se pensar que um produto tensorial lineariza todas as aplicações bilineares utilizando uma única aplicação linear. Assim, o estudo das aplicações bilineares em $U \times V$ em W se reduz a um caso conhecido, a saber, ao estudo das transformações lineares de $\mathcal{T}$ em W.

O próximo resultado nos diz que se o produto tensorial existir ele será único a menos de isomorfismo.

Teorema D.1.7 (Unicidade do Produto Tensorial). *Se $(\mathcal{T}_1, \tau_1)$ e $(\mathcal{T}_2, \tau_2)$ são dois produtos tensoriais entre U e V, então existe um único isomorfismo canônico $\Phi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ tal que $\Phi \circ \tau_1 = \tau_2$.*

$$\begin{tikzcd} & U \times V \arrow[dl, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\tau_2"] & \\ \mathcal{T}_1 \arrow[rr, "\Phi"'] & & \mathcal{T}_2 \end{tikzcd}$$

Demonstração: A aplicação τ_2 é bilinear, logo a propriedade universal de $(\mathcal{T}, \tau_1)$ assegura a existência de uma única transformação linear $\Phi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ tal que $\tau_2 = \Phi \circ \tau_1$. Analogamente, a aplicação τ_1 é bilinear donde, pela propriedade universal de $(\mathcal{T}_2, \tau_2)$, implica que existe uma única transformação linear $\Psi : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_1$ tal que $\tau_1 = \Psi \circ \tau_2$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}_1 \arrow[dl, dashed, "\Phi"'] & \\ \mathcal{T}_2 & U \times V \arrow[l, "\tau_2"] \arrow[u, "\tau_1"'] \arrow[r, "\tau_2"'] & \mathcal{T}_2 \arrow[ul, dashed, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Para concluirmos que Φ trata-se de um isomorfismo resta apenas mostrarmos que Ψ é a inversa de Φ. Com efeito, notemos que as aplicações $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_1}$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_2}$ satisfazem as propriedades $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_1} \circ \tau_1 = \tau_1$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_2} \circ \tau_2 = \tau_2$ e, por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi) \circ \tau_1 &= \Psi \circ (\Phi \circ \tau_1) = \Psi \circ \tau_2 = \tau_1, \\ (\Phi \circ \Psi) \circ \tau_2 &= \Phi \circ (\Psi \circ \tau_2) = \Phi \circ \tau_1 = \tau_2. \end{aligned}$$

Pela unicidade das transformações lineares induzidas concluímos que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_1}$ e $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2}$. Portanto, o resultado segue. $\square$

Vamos agora garantir a existência do produto tensorial. Para esse fim, seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(U \times V, \mathbb{K})$ o espaço vetorial que possui $U \times V$ como base, isto é, o espaço vetorial livre sobre $U \times V$. Pela Proposição D.1.1 o conjunto

$$\{\chi_{(u,v)} : u \in U \quad \text{e} \quad v \in V\}$$

é uma base de $\mathcal{F}$. Consideremos $\mathcal{N}$ o subespaço de $\mathcal{F}$ gerado pelos elementos

$$\begin{array}{cc} \chi_{(u+u',v)} - \chi_{(u,v)} - \chi_{(u',v)}, & \chi_{(u,v+v')} - \chi_{(u,v)} - \chi_{(u,v')} \\ \chi_{(au,v)} - \chi_{a(u,v)}, & \chi_{(u,av)} - a\chi_{(u,v)}, \end{array}$$

onde $a \in \mathbb{K}$. O espaço quociente será denotado por $U \otimes V \doteq \mathcal{F}/\mathcal{N}$ e $\pi : \mathcal{F} \to U \otimes V$ representará a projeção canônica. A aplicação $\otimes : U \times V \to U \otimes V$ que associa cada par ordenado $(u, v) \in U \times V$ a sua classe de equivalência

$$u \otimes v \doteq \chi_{(u,v)} + \mathcal{N},$$

que pode ser escrita como a composição $\pi \circ \imath$ onde $\imath$ é a inclusão de $U \times V$ no espaço vetorial livre $\mathcal{F}$, goza, por construção, das seguintes propriedades

$$\begin{array}{rcll} (u + u') \otimes v &=& u \otimes v + u' \otimes v, & u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v' \\ (au) \otimes v &=& a(u \otimes v), & u \otimes (av) = a(u \otimes v). \end{array}$$

Isto significa que a aplicação $\otimes$ é bilinear.

Teorema D.1.8. *O par $(U \otimes V, \otimes)$ é um produto tensorial de U e V.*

Demonstração: Sejam W um espaço vetorial e $\varphi : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Pelo Teorema D.1.2 existe uma única transformação linear $T : \mathcal{F} \to W$ tal que $T \circ \imath = \varphi$. Notemos que tal aplicação anula-se no conjunto $\mathcal{N}$. De fato, usando a linearidade de T e a bilinearidade de φ temos

$$\begin{array}{rcl} T(\chi_{(u+u',v)} - \chi_{(u,v)} - \chi_{(u',v)}) &=& T(\chi_{(u+u',v)}) - T(\chi_{(u,v)}) - T(\chi_{(u',v)}) \\ &=& T \circ \imath(u + u', v) - T \circ \imath(u, v) - T \circ \imath(u', v) \\ &=& \varphi(u + u', v) - \varphi(u, v) - \varphi(u', v) \\ &=& 0 \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} T(\chi_{(au,v)} - a\chi_{(u,v)}) &= T(\chi_{(au,v)}) - aT(\chi_{(u,v)}) \\ &= T \circ \imath(au, v) - aT \circ \imath(u, v) \\ &= \varphi(au, v) - a\varphi(u, v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, pode-se verificar que T se anula nos outros dois elementos de definem $\mathcal{N}$. Como esses elementos formam um conjunto gerador de $\mathcal{N}$ concluímos que $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{nuc}(T)$. Pela propriedade universal do espaço quociente (vide [37]), existe uma única $\xi \in \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ tal que $\xi \circ \pi = T$, isto é, para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$ temos $\xi(u \otimes v) = T(\chi_{(u,v)})$. As aplicações envolvidas podem ser esquematizadas no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\imath"'] & W \\ \mathcal{F} \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[d, "\pi"'] & \\ U \otimes V \arrow[uur, dashed, bend right, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, tem-se

$$\xi \circ \otimes = \xi \circ (\pi \circ \imath) = (\xi \circ \pi) \circ \imath = T \circ \imath = \varphi.$$

Resta mostrarmos que ξ é única com tal propriedade. Suponha que exista $\eta \in \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ tal que $\eta \circ \otimes = \varphi$. Para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$ temos

$$\xi(u \otimes v) = \xi(\otimes(u, v)) = \varphi(u, v) = \eta(\otimes(u, v)) = \eta(u \otimes v).$$

O conjunto $\{u \otimes v : u \in U \text{ e } v \in V\}$ gera $U \otimes V$, já que transformação linear leva base em conjunto gerador da imagem. Logo, a igualdade anterior nos diz que $\xi = \eta$. Portanto, $(U \otimes V, \otimes)$ é um produto tensorial de U e V. $\square$

Um elemento de $U \otimes V$ é chamado de ***tensor*** e os tensores do tipo $u \otimes v$ são chamados ***decomponíveis***. Em geral, nem todo tensor é decomponível pois a aplicação $\otimes$ não é sobrejetora. Pode-se afirmar apenas que todo tensor é escrito como combinação linear finita de elementos decomponíveis.

Denota-se por $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ quando temos interesse de enfatizar sobre qual corpo está sendo realizado o produto tensorial; não obstante, em alguns momentos durante o texto (mais especificamente, quando formos tratar da complexificação) omitiremos tal representação e $U \otimes V$ denotará o produto tensorial sobre o corpo que define as estruturas em questão.

A partir da da propriedade universal do produto tensorial pode-se mostrar que o produto tensorial de espaços vetoriais possui as propriedades comutativa, associativa e distributiva em relação à soma direita.

Proposição D.1.9 (Isomorfismos Básicos). *Valem os seguintes isomorfismos canônicos:*

1. ***Elemento Neutro***

$$\mathbb{K} \otimes V \simeq V, \quad a \otimes v \mapsto av.$$

2. ***Comutatividade***

$$U \otimes V \simeq V \otimes U, \quad u \otimes v \mapsto v \otimes u.$$

3. ***Associatividade***

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W), \quad (u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w).$$

4. ***Distributividade em relação à soma direta***

$$U \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \simeq \bigoplus_{i \in I} U \otimes V_i, \quad u \otimes (v_i)_{i \in I} \mapsto (u \otimes v_i)_{i \in I}.$$

Demonstração: A fim de ilustrar mais uma aplicação da propriedade universal do produto tensorial, argumentaremos apenas as duas primeiras propriedades.

Mostremos o item 1. Considere a aplicação bilinear $\varphi : \mathbb{K} \times V \to V$ definida por $\varphi(a, v) = av$. Pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única transformação linear

$$\xi : \mathbb{K} \otimes V \to V \text{ tal que } \xi(a \otimes v) = av.$$

Defina $\eta : V \to \mathbb{K} \otimes V$ por $\eta(v) = 1 \otimes v$. Assim, as aplicações $\eta \circ \xi$ e $\xi \circ \eta$ coincidem, respectivamente, com $\mathrm{id}_{\mathbb{K} \otimes V}$ e id_V em um conjunto gerador. Logo, ξ é um isomorfismo canônico.

Por fim, mostremos o item 2. Seja $\varphi : U \times V \to U \otimes V$ definida por $\varphi(u, v) = v \otimes u$. Tal aplicação é bilinear, logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única transformação linear

$$\xi : U \otimes V \to V \otimes U \text{ tal que } \xi(u \otimes v) = v \otimes u.$$

De maneira análoga podemos construir o candidato a inversa. A aplicação $\psi : V \times U \to U \otimes V$ dada por $\psi(v, u) = u \otimes v$ é bilinear e induz uma única transformação linear

$$\eta : V \otimes U \to U \otimes V \text{ tal que } \eta(v \otimes u) = u \otimes v.$$

Verifica-se que as aplicações $\eta \circ \xi$ e $\xi \circ \eta$ coincidem, respectivamente, com $\mathrm{id}_{U\otimes V}$ e $\mathrm{id}_{V\otimes U}$ em elementos decomponíveis, que constituem um conjunto gerador. Portanto, ξ é um isomorfismo com inversa η. □

Proposição D.1.10. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão arbitrária. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de U e V, respectivamente, então*

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \{u \otimes v : u \in \mathcal{B} \quad e \quad v \in \mathcal{C}\}$$

é uma base de $U \otimes V$.

Demonstração: Para cada $i \in I$ e $j \in J$, considere as aplicações $\chi_i : U \to \mathbb{K}$ e $\mu_j : V \to \mathbb{K}$ definidas, respectivamente, por

$$\chi_i(u_k) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = k \\ 0, & \text{se} \quad i \neq k \end{cases} \quad \text{e} \quad \mu_j(v_l) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = l \\ 0, & \text{se} \quad j \neq l \end{cases}.$$

Como a aplicação $\varphi_{ij} : U \times V \to \mathbb{K}$ dada por $\varphi_{ij}(u, v) := \chi_i(u)\mu_j(v)$ é bilinear segue, da propriedade universal do produto tensorial, que existe uma única transformação linear $\xi_{ij} : U \otimes V \to \mathbb{K}$ tal que $\xi_{ij}(u \otimes v) = \chi_i(u)\mu_k(v)$. Assim, percebemos que o conjunto $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ é linearmente independente. De fato, considere a combinação linear

$$\sum_{(i,j)\in I' \times J'} c_{kl} u_k \otimes v_l = 0,$$

em que $I' \subseteq I$ e $J' \subseteq J$ são conjuntos finitos. Atuando ξ_{ij} em ambos os lados da igualdade acima temos que $c_{ij} = 0$ para todo par de índices $(i, j) \in I' \times J'$. Falta provarmos que $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ é um conjunto gerador. Para isso, tomemos $u \in U$ e $v \in V$. Escreva $u = \sum_i a_i u_i$ e $v = \sum_j b_j v_j$. Pela bilinearidade do produto tensorial segue que

$$u \otimes v = \left(\sum_i a_i u_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j v_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j u_i \otimes v_j.$$

Como todo tensor de escreve como combinação linear de elementos decomponíveis o resultado segue. □

Proposição D.1.11. *Sejam U e V espaços vetoriais. A igualdade $u \otimes v = 0$ é válida se, e somente se, $u = 0$ ou $v = 0$.*

Demonstração: Se $u = 0$ ou $v = 0$, então a bilinearidade do produto tensorial nos garante que $u \otimes v = 0$. Reciprocamente, suponha que $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Os espaços $U' = \mathrm{ger}\{u\}$ e $V' = \mathrm{ger}\{v\}$ possuem dimensão 1 e, assim, pela Proposição D.1.10 teríamos que $\{u \otimes v\}$ é uma base de $U' \otimes V'$. Em particular, $u \otimes v \neq 0$. $\square$

Teorema D.1.12. *Se U, V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, então*

$$\mathcal{L}(U, V; W) \quad e \quad \mathcal{L}(U \otimes V, W)$$

são canonicamente isomorfos.

Demonstração: Seja $\Psi : \mathcal{L}(U, V; W) \to \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ a aplicação definida da seguinte maneira: para cada $\varphi \in \mathcal{L}(U, V; W)$ associamos, pela propriedade universal do produto tensorial, a única transformação linear $\xi_\varphi \in \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ tal que $\xi_\varphi \circ \otimes = \varphi$. Percebemos que Ψ é uma transformação linear e

$$\varphi \in \mathrm{nuc}(\Psi) \Longleftrightarrow \xi_\varphi = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0.$$

Resta garantirmos que Ψ é sobrejetora. Dado $T \in \mathcal{L}(U \otimes V, W)$, considere a aplicação $\varphi : U \times V \to W$ dada por $\varphi(u, v) = T(u \otimes v)$. Tal aplicação é bilinear, logo pela propriedade universal do produto tensorial existe uma única transformação linear $\xi_\varphi \in \mathcal{L}(U \otimes V, W)$ tal que $\xi_\varphi(u \otimes v) = \varphi(u, v)$. Logo, $\xi_\varphi(u \otimes v) = T(u \otimes v)$ donde $T = \Psi(\varphi)$, uma vez que coincidem num conjunto gerador. $\square$

Observação D.1.13. O resultado anterior nos fornece um outro exemplo importante de adjunção[3] no contexto da Álgebra Linear. Mais especificamente, numa linguagem categórica, os funtores $- \otimes V$ e $\mathcal{L}(-, V)$ são adjuntos. $\diamond$

Modelo do Produto Tensorial: Construção abstrata vs. concreta

As considerações feitas até o momento nos dão uma construção rigorosa e abstrata do produto tensorial entre dois espaços vetoriais U e V de dimensão arbitrária. No entanto, do ponto de vista prático tal abordagem não se revela simples. Os próximos resultados nos mostrarão — quando as dimensões de U e V forem finitas — um modelo mais concreto para enxergarmos o produto tensorial dos espaços U e V e, além disso, como descrever um tensor em termos de uma base desses espaços.

[3] A rigor, resta mostrarmos a condição de naturalidade (vide [60]).

Teorema D.1.14. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados com $n = \dim U$ e $m = \dim V$. O par $(\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K}), \Psi)$, com*

$$\Psi : U \times V \to \mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K}) \quad \textit{definida por} \quad \Psi(u, v)(f, g) = f(u)g(v)$$

com $f \in U^*$ e $g \in V^*$, é um produto tensorial de U e V.

Demonstração: Sejam W um espaço vetorial e $\varphi : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Considere $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base V e suas respectivas bases duais $\mathcal{B}^* = \{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ e $\mathcal{C}^* = \{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$. Dessa forma, o conjunto

$$\mathcal{D} = \{\Psi(u_i, v_j) : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

é uma base de $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K})$. Mostremos que $\mathcal{D}$ é linearmente independente. Para esse fim, considere $c_{ij} \in \mathbb{K}$, em que $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, escalares tais que

$$\sum_{i,j} c_{ij} \Psi(u_i, v_j) = 0.$$

Aplicando ambos os lados da expressão acima nos covetores (u_k^*, v_l^*) segue que

$$0 = \sum_{i,j} c_{ij} \Psi(u_i, v_j)(u_k^*, v_l^*) = \sum_{i,j} c_{ij} u_k^*(u_i) v_l^*(v_j) = \sum_{i,j} c_{ij} \delta_{ki} \delta_{lj} = c_{kl}$$

em que $k \in \{1, \ldots, n\}$ e $l \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\mathcal{D}$ é um subespaço de $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K})$ que tem dimensão nm segue que $\mathcal{D}$ é uma base de $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K})$. Definimos agora a aplicação linear $\xi : \mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K}) \to W$ por $\xi(\Psi(u_i, v_j)) := \varphi(u_i, v_j)$ — tacitamente na base $\mathcal{D}$ e estendendo por linearidade. Note que tal aplicação goza da propriedade $\varphi = \xi \circ \Psi$, isto é, por construção o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Psi"'] & W . \\
\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K}) \arrow[ur, dashed, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Resta mostrarmos que a aplicação ξ é única. Suponhamos então que exista uma outra aplicação $\tilde{\xi} : \mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K}) \to W$ tal que $\varphi = \tilde{\xi} \circ \Psi$. Assim, $\tilde{\xi}(\Psi(u_i, v_j)) = \varphi(u_i, v_j) = \xi(\Psi(u_i, v_j))$ para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. $\square$

Corolário D.1.15. *Os espaços $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K})$ e $U \otimes V$ são canonicamente isomorfos.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema D.1.14 juntamente com o Teorema D.1.7. $\square$

O Teorema D.1.14 pode ser generalizado para o produto tensorial de s espaços vetoriais. Dessa forma, quando a dimensão é finita, podemos interpretar os tensores como aplicações multilineares.

Doravante abandonaremos de vez a notação $\Psi(u,v)(f,g)$ em prol de $(u \otimes v)(f,g)$, uma vez que $\Psi(u,v)$ está sendo identificado com $u \otimes v$ pelo isomorfismo dado no Corolário D.1.15. O Teorema D.1.7 nos assegura a existência de um único isomorfismo $\Phi : U \otimes V \to \mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{K})$ tal que $\otimes = \Phi \circ \Psi$. O argumento utilizado para demonstrar o Teorema D.1.14 implica no seguinte resultado.

Corolário D.1.16. *Se $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ são bases de U e V, respectivamente, então cada elemento $T \in U \otimes V$ possui a seguinte decomposição*

$$T = \sum_{i,j} T^{ij} u_i \otimes v_j,$$

onde $T^{ij} := T(u^i, v^j)$ são as ***componentes contravariantes*** *do tensor T com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.*

Corolário D.1.17. *Se U e V são espaços vetoriais finitamente gerados, então*

$$U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*. \tag{D.1}$$

Demonstração: Consequência do Teorema D.1.12 (tomando $W = \mathbb{K}$) e do Corolário D.1.15. $\square$

Exemplo D.1.18. O item 2 da Proposição D.1.9 não garante que o produto tensorial de vetores é comutativo. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Dada uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V e considerando $\{v^1, \ldots, v^n\}$ sua respectiva base dual de V^*, tem-se

$$\begin{aligned} (v_1 \otimes v_2)(v^1, v^2) &= v^1(v_1)v^2(v_2) = 1, \\ (v_2 \otimes v_1)(v^1, v^2) &= v^1(v_2)v^2(v_1) = 0. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que devemos entender a comutatividade no sentido de espaços vetoriais e não de vetores. $\diamond$

Exemplo D.1.19. Sejam $\mathbb{K}[x]$ e $\mathbb{K}[y]$ os espaços dos polinômios nas variáveis x e y, respectivamente. A aplicação bilinear $\varphi : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[y] \to \mathbb{K}[x,y]$, $(f(x), g(y)) \mapsto f(x)g(y)$ define um produto tensorial e vale ainda

$$\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y] \simeq \mathbb{K}[x,y].$$

Já sabemos que os conjuntos $\{1, x, x^2, \dots\}$ e $\{1, y, y^2, \dots\}$ são bases algébricas de $\mathbb{K}[x]$ e $\mathbb{K}[y]$, respectivamente. Logo, $\{x^i \otimes y^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ é uma base algébrica de $\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y]$. Notemos que nessa situação o produto tensorial não é comutativo, uma vez que em geral temos que $f(x)g(y) \neq g(y)f(x)$. ◇

Álgebra Tensorial

Sejam V um espaço vetorial de dimensão arbitrária e $r, s \in \mathbb{N}_0$. O ***espaço dos tensores do tipo*** (r, s) ***sobre*** V é definido como sendo o produto tensorial abaixo

$$\mathcal{T}_s^r(V) \doteq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r-\text{vezes}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s-\text{vezes}}. \tag{D.2}$$

Em particular, se V for finitamente gerado, então o espaço $\mathcal{T}_s^r(V)$ pode ser identificado com o conjunto das aplicações $(r+s)$-lineares da forma

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ vezes}} \to \mathbb{K}.$$

Se $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V e $\mathcal{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ é a base de V^* dual a $\mathcal{B}$, então um tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ é escrito como

$$T = \sum_{i_1 \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s},$$

em que $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} := T(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$ são as ***componentes do tensor*** do tensor T com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$.

Observação D.1.20. Convencionaremos que $\mathcal{T}^r(V) = \mathcal{T}_0^r(V)$ e $\mathcal{T}_s(V) = \mathcal{T}_s^0(V)$. ◇

Seja V um espaço vetorial de dimensão arbitrária. Consideremos a seguinte soma direta

$$\mathcal{T}(V) \doteq \bigoplus_{r,s \geq 0} \mathcal{T}_s^r(V).$$

Definimos a operação $\otimes : \mathcal{T}(V) \times \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)$ da seguinte maneira: dados os elementos decomponíveis $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_s \in \mathcal{T}_s^r(V)$ e $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q \in \mathcal{T}_q^p(V)$ definimos

$$\begin{aligned}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_s) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q) :=& \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_s \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q &\in \mathcal{T}_{s+q}^{r+p}(V)\end{aligned}$$

e estendemos por linearidade. Dessa forma, o espaço $\mathcal{T}(V)$ torna-se uma álgebra (graduada) associativa.

Exemplo D.1.21. A aplicação $\hat{\delta} : V^* \times V \to \mathbb{R}$, $(\eta, v) \mapsto \eta(v)$ é bilinear e com isso define um tensor do tipo $(1,1)$ denominado ***tensor de Kronecker***. Suas componentes com respeito a uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ são dadas por $\hat{\delta}^i_j \equiv \hat{\delta}(e^i, e_j) = e^i(e_j) = \delta^i_j$. Dessa forma, suas componentes, com respeito a qualquer base, são exatamente o símbolo de Kronecker. $\diamond$

Exemplo D.1.22. Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial munido de um produto interno e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. O ***tensor métrico*** é o tensor $g \in T^0_2(V)$ dada por $g(u,v) = \langle u, v \rangle$. Assim, tem-se $g(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$ onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. A base $\mathcal{B}$ é ortonormal se, e somente se, $g_{ij} = \delta_{ij}$. $\diamond$

D.2 Álgebra Exterior

Seja V um espaço vetorial, sobre um corpo $\mathbb{K}$, de dimensão n. Por ora denotaremos $V \times \cdots \times V$ o produto cartesiano de V por si mesmo k-vezes. Uma aplicação multilinear $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ é chamada de alternada quando $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ para $v_i = v_j$ para algum par (i,j) com $i \neq j$. Se $\mathbb{K}$ tem característica diferente de dois, então toda aplicação antissimétrica é alternada.

Uma k-***ésima potência exterior de*** V é um par $(\bigwedge^k V, \Psi)$ em que $\bigwedge^k V$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\Psi : V \times \cdots \times V \to \bigwedge^k V$ é uma aplicação k-linear alternada que goza da seguinte propriedade universal: para cada espaço vetorial W e $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ aplicação k-linear alternada existe uma única transformação linear $\xi : \bigwedge^k V \to W$ tal que $\varphi = \xi \circ \Psi$, isto é, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Psi"'] & W \\
\bigwedge^k V \arrow[ur, dashed, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, é comum dizermos que o espaço $\bigwedge^k V$ lineariza universalmente todas as aplicações multilineares alternadas definidas em $V \times \cdots \times V$. Note que φ ser alternada é equivalente com $\operatorname{nuc}(\Psi) \subseteq \operatorname{nuc}(\varphi)$.

Analogamente ao produto tensorial de espaços vetoriais, a definição de k-ésima potência exterior é vaga no sentido de não nos informarmos que a mesma sempre existe e se é única. Para essa finalidade, consideremos $\mathfrak{I}_k(V)$ o espaço vetorial gerado[4] por todos os tensores da forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ em que $v_i = v_j$ para alguns índices $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tais

[4] Algebricamente $\mathfrak{I}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{I}_k(V)$ pode ser enxergado como um ideal da álgebra $\mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^0_k(V)$.

que $i \neq j$. *A priori* denotaremos por conveniência o espaço quociente de $\mathcal{T}^k(V)$ por $\mathfrak{I}_k(V)$ como

$$\bigwedge^k V \doteq \mathcal{T}^k(V)/\mathfrak{I}_k(V). \tag{D.3}$$

Definimos

- $\pi : V^{\otimes k} \to \bigwedge^k V$ a projeção canônica;
- $\Phi : V \times \cdots \times V \to \mathcal{T}^k(V)$ o produto tensorial;
- $\Psi : V \times \cdots \times V \to \bigwedge^k V$ a aplicação dada por $\Psi := \pi \circ \Phi$.

Observação D.2.1. É comum denotarmos as aplicações Ψ e Φ definidas acima por $\wedge$ e $\otimes$, respectivamente. Nesse caso, $\wedge = \pi \circ \otimes$. Evitaremos no momento tal notação. $\diamond$

Lema D.2.2. *Ψ, como definida acima, é alternada.*

Demonstração: Se $v_i = v_j$ para alguns índices $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$, então

$$\Psi(v_1, \ldots, v_k) = (\pi \circ \Phi)(v_1, \ldots, v_k) = \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = 0$$

pois nesse caso $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in \mathfrak{I}_k(V)$. $\square$

No caso geral, denotaremos a classe de um tensor decomponível $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Por construção, se $\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\}$ for um conjunto gerador de $\mathcal{T}^k(V)$, então

$$\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\}$$

é um conjunto gerador de $\bigwedge^k V$. Os elementos de $\bigwedge^k V$ são usualmente chamados de ***k-formas ou formas de grau** k*. No contexto de potências exteriores, diremos que um elemento η de $\bigwedge^k V$ é ***decomponível*** quando $\eta = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

Teorema D.2.3. *O par $(\bigwedge^k V, \Psi)$, onde $\bigwedge^k V$ é dado pela expressão (D.3) , é uma k-ésima potência exterior de V.*

Demonstração: Sejam W um espaço vetorial e $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ uma aplicação k-linear alternada. Pela propriedade universal do produto tensorial (vide página 162), existe uma única transformação linear $T : \mathcal{T}^k(V) \to W$ tal que $\varphi = T \circ \Phi$. Além disso, $T(\mathfrak{I}_k(V)) = 0$ pois dado $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in \mathfrak{I}_k(V)$, tem-se

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = T(\Phi(v_1, \ldots, v_k)) = \varphi(v_1, \ldots, v_k) = 0,$$

isto é, $\mathfrak{I}_k(V) \subseteq \mathrm{nuc}(T)$. Pela propriedade universal do espaço quociente, a aplicação T induz uma única transformação linear $\xi : \bigwedge^k V \to W$ tal que $T = \xi \circ \pi$. Devemos mostrar que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & W \\
\mathcal{T}^k(V) \arrow[ur, "T"'] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\bigwedge^k V \arrow[uur, dashed, "\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

Com efeito,

$$\xi \circ \Psi = \xi \circ (\pi \circ \Phi) = (\xi \circ \pi) \circ \Phi = T \circ \Phi = \varphi.$$

Resta mostrarmos que ξ é única com a propriedade de fazer o diagrama acima comutar. Seja $\eta : \bigwedge^k V \to W$ uma transformação linear tal que $\eta \circ \Psi = \varphi$. Assim,

$$\begin{aligned}
\eta(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) &= \eta(\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) \\
&= \eta(\pi(\Phi(v_1, \ldots, v_k))) \\
&= \eta \circ \Psi(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \varphi(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \xi \circ \Psi(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \xi(\pi(\Phi(v_1, \ldots, v_k))) \\
&= \xi(\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) \\
&= \xi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)
\end{aligned}$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_k \in V$. Isso mostra que as transformações lineares η e ξ coincidem no conjunto gerador

$$\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k : v_1, \ldots, v_k \in V\}$$

e, portanto, $\eta = \xi$. □

Teorema D.2.4. *Sejam $(\bigwedge_1^k V, \Psi)$ e $(\bigwedge_2^k V, \Phi)$ duas k-ésimas potências exteriores de V. Então, existe um único isomorfismo $\eta : \bigwedge_1^k V \to \bigwedge_2^k V$ tal que $\Phi = \eta \circ \Psi$.*

Demonstração: Análogo a do Teorema D.1.7. □

Apresentaremos agora uma outra construção da k-ésima potência exterior, dessa vez utilizando o espaço dual V^*. Dada uma permutação $\sigma \in S_k$, consideramos $P_k(\sigma)$:

$\mathcal{T}^k(V) \to \mathcal{T}^k(V)$ como sendo a transformação linear que leva $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ em $v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$, no sentido de estar definida numa base e estendida por linearidade. A aplicação

$$S_k \ni \sigma \longmapsto P_k(\sigma) \in \mathcal{L}(V^{\otimes k})$$

define uma representação do grupo de permutações no produto tensorial de V. O ***operador de antissimetrização*** $\mathcal{A}_k : \mathcal{T}^k(V) \to \mathcal{T}^k(V)$ é definido por

$$\mathcal{A}_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sinal}(\sigma) P_k(\sigma).$$

Denotemos por $\mathfrak{A}_k(V; \mathbb{K})$ o espaço das aplicações antissimétricas de $V \times \cdots \times V$ em $\mathbb{K}$. Tal espaço pode ser visto como o subespaço de $\mathcal{T}^k(V)$ formado pelos tensores k-covariantes antissimétricos.

Lema D.2.5. *Valem as seguintes propriedades:*

1. $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ *é alternada se, e somente se,* $P_k(\pi)\omega = \operatorname{sinal}(\pi)\omega$ *para toda permutação* $\pi \in S_k$.
2. $\mathcal{A}_k \circ P_k(\sigma) = P_k(\sigma) \circ \mathcal{A}_k = \operatorname{sinal}(\sigma)\mathcal{A}_k$.
3. $\mathcal{A}_k \circ \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k$.
4. $\operatorname{im}(\mathcal{A}_k) = \mathfrak{A}_k(V; \mathbb{K})$.

Demonstração: Seja $\pi' \in S_k$. Usando o fato que a função sinal é um homomorfismo entre grupos e que a aplicação $\sigma \mapsto P_n(\sigma)$ é uma representação temos

$$\mathcal{A}_k P_k(\pi') = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sinal}(\pi) P_k(\pi) P_k(\pi') = \frac{\operatorname{sinal}(\pi')}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sinal}(\pi\pi') P_k(\pi\pi').$$

Defina $\sigma := \pi\pi'$. Como cada $\pi' \in S_k$ é fixo a aplicação $\pi \mapsto \pi\pi' = \sigma$ é bijetora em S_k. Logo, somar sobre todos os $\pi \in S_k$ é equivalente a somar sobre todos os $\sigma \in S_k$. Daí,

$$\mathcal{A}_k P_k(\pi') = \frac{\operatorname{sinal}(\pi')}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sinal}(\sigma) P_k(\sigma) = \operatorname{sinal}(\pi')\mathcal{A}_k.$$

Vejamos que $\mathcal{A}_k$ é um projetor. Pelo item anterior e como $(\operatorname{sinal}(\pi))^2 = +1$ para todo $\pi \in S_k$ tem-se

$$\mathcal{A}_k \circ \mathcal{A}_k = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sinal}(\pi) \mathcal{A}_k P_k(\pi) = \left(\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} 1 \right) \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k,$$

já que $|S_k| = k!$. $\square$

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com característica zero ou maior do que $k!$. Definimos a aplicação $\Gamma : V \times \cdots \times V \to \mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K})$ por

$$\Gamma_{v_1,\ldots,v_k}(\eta_1,\ldots,\eta_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sinal}(\sigma)\, \eta_{\sigma(1)}(v_1)\cdots\eta_{\sigma(k)}(v_k)$$

para todo $(v_1,\ldots,v_k) \in V\times\cdots\times V$. Notemos, ainda, que $\Gamma_{v_1,\ldots,v_k} = \mathcal{A}_k \circ \Psi(v_1,\ldots,v_k)$ onde a aplicação Ψ é a generalização da aplicação definida no Teorema D.1.14 para o espaço $V\times\cdots\times V$. Por conseguinte, a aplicação Γ é antissimétrica (alternada). Como o operador $\mathcal{A}_k$ é uma projeção, em particular sobrejetora, segue que $\mathcal{A}_k$ leva conjunto gerador em conjunto gerador da imagem. Dessa forma, tem-se $\operatorname{ger}(\mathcal{C}) = \mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K})$ onde

$$\mathcal{C} = \{\Gamma_{v_1,\ldots,v_k} : (v_1,\ldots,v_k) \in V\times\cdots\times V\}.$$

Já sabemos que podemos extrair uma base do conjunto $\mathcal{C}$, digamos $\mathcal{B}$. Dessa forma, existe uma base de $\mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K})$ cujos elementos são da forma $\Gamma_{v_1,\ldots,v_k}$. Usaremos esse fato para mostrar o próximo resultado.

Teorema D.2.6. *O par $(\mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K}),\Gamma)$ é uma k-ésima potência exterior de V. Ademais, existe um único isomorfismo $\tau : \bigwedge^k V \to \mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K})$ tal que $\tau\circ\wedge = \Gamma$.*

Demonstração: Sejam W um espaço vetorial e $\varphi : V\times\cdots\times V \to W$ aplicação k-linear alternada. Considere a aplicação

$$\xi :\ \mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K}) \to W \quad \text{dada por} \quad \xi(\Gamma_{v_1,\ldots,v_k}) = \varphi(v_1,\ldots,v_k)$$

e estendemos por linearidade. Logo, segue o resultado desejado, uma vez que ξ foi construída de maneira que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} V\times\cdots\times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Gamma"'] & W \\ \mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K}) \arrow[ur, dashed, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

de forma única. Já sabemos, pelo Teorema D.2.4, que $\mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K}) \simeq \bigwedge^k V$. Vamos agora exibir um isomorfismo. Seja $\psi : V\times\cdots\times V \to \bigwedge^k V$ a aplicação alternada dada por $\psi(v_1,\ldots,v_k) = v_1\wedge\cdots\wedge v_k$. Pela propriedade universal da potência exterior de $\mathfrak{A}_k(V^*;\mathbb{K})$, existe uma única transformação linear $\vartheta : \mathfrak{A}_k(V^*,\mathbb{K}) \to \bigwedge^k V$ tal que

$$\vartheta(\Gamma_{v_1,\ldots,v_k}) = \psi(v_1,\ldots,v_k) = v_1\wedge\cdots\wedge v_k$$

para todo $(v_1,\ldots,v_k)\in V\times\cdots\times V$. Usando a propriedade universal de $\bigwedge^k V$, do Teorema D.2.3, existe uma única transformação linear $\tau : \bigwedge^k V \to \mathfrak{A}_k(V^*,\mathbb{K})$ tal que

$$\tau(v_1\wedge\cdots\wedge v_k) = \tau(\psi(v_1,\ldots,v_k)) = \Gamma_{v_1,\ldots,v_k}$$

para todo $(v_1, \ldots, v_k) \in V \times \cdots \times V$.

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^k V \arrow[dr, "\tau"'] & V \times \cdots \times V \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Gamma"] & \bigwedge^k V \\
& \mathfrak{A}_k(V^*; \mathbb{K}) \arrow[ur, "\vartheta"'] &
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, percebemos que $\tau \circ \vartheta = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}_k(V^*, \mathbb{K})}$ e $\vartheta \circ \tau = \mathrm{id}_{\Lambda^k(V)}$, ou seja, a aplicação ϑ é um isomorfismo e isso nos mostra a validade da correspondência desejada. $\square$

Graças à identificação dada pelo Teorema D.2.6 todas as propriedades que serão provadas para o espaço $\bigwedge^k V$ também serão válidas pra $\mathfrak{A}_k(V^*; \mathbb{K})$. É usual abandonar a notação $\Gamma_{v_1,\ldots,v_k}(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ para $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k(\eta_1, \ldots, \eta_k)$.

Corolário D.2.7. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Os espaços $\bigwedge^k V^*$ e $\mathfrak{A}_k(V; \mathbb{K})$ são canonicamente isomorfos.*

Observação D.2.8. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$, então

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_k \in V$. Alguns autores costumam definir o produto exterior sem o fator de normalização $k!$ (vide [45, p.205]). Nesse caso, o operador de antissimetrização deixa de ser uma projeção. $\diamond$

Teorema D.2.9. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ for uma base de V, então para $1 \leq k \leq n$ o conjunto $\widehat{\mathcal{B}} = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$ com $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ é uma base para $\bigwedge^k(V)$. Ademais,*

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^k V = \binom{n}{k}, \quad \dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^k V = \dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^{n-k} V.$$

Em particular, $\bigwedge^k V \simeq \bigwedge^{n-k} V$. Cada k-forma ω pode ser decomposta em termos da base $\widehat{\mathcal{B}}$ de acordo com a seguinte expressão

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \widetilde{\omega}_{i_1 \cdots i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$$

Demonstração: O fato de $\mathcal{B}$ ser um conjunto gerador de V nos assegura que $\widehat{\mathcal{B}}$ é um conjunto gerador de $\bigwedge^k V$. Precisamos apenas mostrar que $\widehat{\mathcal{B}}$ é um conjunto linearmente independente. Para esse fim, considere a aplicação $\varphi : V \times \cdots \times V \to \mathcal{T}^k(V)$ dada por

$$\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sinal} \sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Tal aplicação, por definição, é k-linear e alternada. Logo, pela propriedade universal da k-ésima potência exterior existe uma única aplicação linear $\xi : \bigwedge^k V \to \mathcal{T}^k(V)$ tal que

$$\xi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sinal} \sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Seja $\omega \in \bigwedge^k V$ tal que

$$\sum_{1 < i_1 < \cdots < i_k < n} c^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = 0.$$

Aplicando ξ em ambos os lados dessa igualdade segue que

$$\sum_{1 < i_1 < \cdots < i_k < n} \sum_{\sigma \in S_k} c^{i_1 \cdots i_k} (\operatorname{sinal} \sigma)\, e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} = 0.$$

Como $\{e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}\}_{\sigma \in S_k}$, para todo $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, é linearmente independente segue que todos os coeficientes $c^{i_1 \cdots i_k}$ são nulos. Portanto, o conjunto $\widehat{\mathcal{B}}$ é linearmente independente. $\square$

Observação D.2.10. Note que podemos concluir a partir do final da demonstração anterior que a aplicação ξ é injetora. $\diamond$

D.3 Formas Diferenciais

Seja M uma variedade[5] Hausdorff paracompacta de dimensão n. Iniciaremos apresentando uma generalização dos fibrados tangentes e cotangentes através da álgebra tensorial e exterior, desenvolvidas nas subseções D.1 e D.2. Dados $r, s \in \mathbb{N}_0$, com $r + s \neq 0$, definimos o ***fibrado tensorial do tipo*** (r, s) como sendo

$$\mathcal{T}^r_s(M) \doteq \coprod_{p \in M} \mathcal{T}^r_s(T_pM),$$

onde o espaço $\mathcal{T}^r_s(T_pM)$ é aquele como definido na página 170. Verifica-se que $\mathcal{T}^r_s(M)$ tem estrutura de fibrado vetorial. Um ***campo tensorial do tipo*** (r, s), sobre $C^\infty(M)$, é uma seção de $\mathcal{T}^r_s(M)$. De maneira análoga ao caso de campos vetoriais e formas de grau 1,

[5] Nesta seção a maioria dos resultados não precisam exigir que M, como espaço topológico, tenha base enumerável.

mostra-se que um campo tensorial é diferenciável se, e somente se, suas funções coordenadas o forem.

O ***fibrado*** r***-exterior*** é definido como

$$\bigwedge^r T^*M \doteq \coprod_{p\in M} \bigwedge^r T_p^*M$$

Uma seção do fibrado $\bigwedge^r T^*M$ é chamada de ***forma de grau*** r ou r***-forma***, isto é, um campo de vetores $\alpha : M \to \bigwedge^r TM$ tal que para cada $p \in M$, $\alpha(p)$ é um elemento de $\bigwedge^r T_pM$. Às vezes escreveremos α_p em vez de $\alpha(p)$.

Observação D.3.1. Para cada $p \in M$ podemos, por causa do Teorema D.2.6, identificar o espaço $\bigwedge^r(T_p^*M)$ com o espaço $\mathfrak{A}_r(T_pM;\mathbb{R})$. Dada $\alpha \in \Omega^r(M)$, pode-se enxergar[6] $\alpha(p)$ como sendo uma aplicação r-linear antissimétrica definida em T_pM. $\diamond$

Temos as seguintes identificações:

- $\bigwedge^0(TM) = M \times \mathbb{R}$.
- $\bigwedge^1(TM) = T^*M$.

Pode-se mostrar que $\bigwedge^r TM$ é um subfibrado do fibrado tensorial $(\mathcal{T}^r(TM), \pi, M)$ com fibra típica $\mathbb{R}^d$, onde $d = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Seja $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ uma carta de M. Dada uma seção α de $\bigwedge^r TM$, tem-se

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} \alpha_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \tag{D.4}$$

As funções $\alpha_{i_1\ldots i_r} : U \to \mathbb{R}$ são chamadas de ***componentes*** de α. A igualdade (D.4) pode ser reescrita com uma notação menos carregada. Dado $I = (i_1, \ldots, i_r)$ uma lista ordenada de r elementos de $I_n = \{1, \ldots, n\}$, convenciona-se que $dx^I \doteq dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Assim,

- $dx^I = 0$ quando há alguma repetição na lista de índices.
- $dx^J = \pm dx^I$ quando J e I são listas de r elementos que diferem somente na ordem dos índices.

[6] Aqui estamos cometendo um abuso de notação. Tecnicamente $\alpha(p)$ é um par (p, α_p) que pertence a fibra $\{p\} \times \bigwedge^r(T_pM)$. Identificamos $\alpha(p)$ com a r-forma α_p.

Estabelecendo que $\alpha_I \doteq \alpha_{i_1\cdots i_r}$ teremos que $\alpha|_U = \sum_I \alpha_I dx^I$ de modo que a soma é feita sobre todas as r-listas I de elementos de $\{1,\ldots,n\}$.

Uma forma de grau r é diferenciável se, e somente se, suas funções coordenadas o forem ([45, p.204]). Nesse caso, tal forma será chamada de ***forma diferencial de grau*** r ou r***-forma diferencial***. O conjunto de todas as r-formas diferenciáveis de classe C^∞, em M, será denotado por $\Omega^r(M)$. Simbolicamente,

$$\Omega^r(M) \doteq \Gamma\left(\bigwedge^r TM\right).$$

É usual convencionar $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Percebemos que $\Omega^r(M)$ tem uma estrutura tanto de espaço vetorial real quanto de módulo sobre o anel $C^\infty(M)$ quando consideramos as operações definidas de maneira usual, ou seja, ponto a ponto.

Dados $\alpha \in \Omega^r(M)$ e $\beta \in \Omega^s(M)$, definimos $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{r+s}(M)$ por

$$(\alpha \wedge \beta)(p) \doteq \alpha(p) \wedge \beta(p).$$

Isso define uma aplicação

$$\wedge : \Omega^r(M) \times \Omega^s(M) \to \Omega^{r+s}(M), \qquad (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

que tem as seguintes propriedades:

- Bilinearidade sobre $\mathbb{R}$:
  - $\alpha^1 \wedge (a\alpha^2 + b\alpha^3) = a(\alpha^1 \wedge \alpha^2) + b(\alpha^1 \wedge \alpha^3)$;
  - $(a\alpha^2 + b\beta^3) \wedge \alpha^1 = a(\alpha^2 \wedge \alpha^1) + b(\alpha^3 \wedge \alpha^1)$

  para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha^1 \in \Omega^r(M)$ e $\alpha^2, \alpha^3 \in \Omega^s(M)$.
- Associatividade: $(\alpha^1 \wedge \alpha^2) \wedge \alpha^3 = \alpha^1 \wedge (\alpha^2 \wedge \alpha^3)$ para quaisquer $\alpha^1 \in \Omega^r(M), \alpha^2 \in \Omega^s(M)$ e $\alpha^3 \in \Omega^k(M)$.
- Anticomutatividade graduada: $\alpha^1 \wedge \alpha^2 = (-1)^{rs}\alpha^2 \wedge \alpha^1$ para quaisquer $\alpha^1 \in \Omega^r(M)$ e $\alpha^2 \in \Omega^s(M)$.

Produto Interior

Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma forma diferencial $\alpha \in \Omega^r(M)$, definimos $X \lrcorner \alpha \in \Omega^{r-1}(M)$ por

$$(X \lrcorner \alpha)(p)(v_2,\ldots,v_r) \doteq \alpha_p(X(p), v_2, \ldots v_r).$$

A forma $X \lrcorner \alpha$ é chamada ***produto interior de*** X ***por*** α e induz a aplicação

$$\mathfrak{X}(M) \times \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M), \qquad (X, \alpha) \mapsto X \lrcorner \alpha.$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a transformação linear

$$i_X : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M), \qquad i_X \alpha \doteq X \lrcorner \alpha$$

é chamada ***derivada interior***. Para mais detalhes consulte [45, p.227].

Pullback

Seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^∞. Dado $\omega \in \Omega^r(N)$, com $r \geq 1$, podemos induzir uma forma diferencial de grau r em M, em símbolos $f^*\omega$, como

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \ldots, v_r) \doteq \omega(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_r)).$$

Se $h : M \to \mathbb{R}$ é uma função, definimos

$$h^* f \doteq f \circ h.$$

A forma $f^*\omega$ é chamada ***pullback*** de ω para M por meio de f.

Proposição D.3.2. *Se $f : M \to N$ é de classe C^∞, então*

1. $f^* : \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$ *é linear sobre* $\mathbb{R}$.

2. $f^*(h\omega) = f^*(h) f^*(\omega)$ *se* $h \in C^\infty(N)$ *e* $\omega \in \Omega^r(N)$.

3. $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$ *se* $\omega \in \Omega^r(M)$ *e* $\eta \in \Omega^s(N)$.

4. $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$ *se* $h : N \to P$ *é de classe* C^∞.

5. $(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_\Omega$, *onde* id_M *e* id_Ω *denotam as aplicações identidade de* M *e de* $\Omega^r(M)$, *respectivamente.*

Corolário D.3.3. *Se $f : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, então $f^* : \Omega^r(M_2) \to \Omega^r(M_1)$ é um isomorfismo linear.*

Diferencial Exterior

É possível generalizar a noção de diferencial de funções de maneira a englobar as formas diferenciais em variedades. Para esse fim, iniciamos definindo tal conceito em espaços Euclidianos e depois transportaremos, por meio do pullback de cartas, para a variedade. Consideraremos, por simplicidade, o caso de variedades sem bordo.

Seja U um aberto em $\mathbb{R}^n$. Vamos definir uma aplicação $d : \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$. Se $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, definimos a diferencial exterior de f como sendo sua diferencial usual. Dado $\alpha \in \Omega^1(U)$, existem funções $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : U \to \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(p) dx^j$$

para todo $p \in U$. A ***diferencial exterior*** de α é definida por

$$d\alpha(p) = \sum_{i=1}^{n} d\alpha_j \wedge dx^j$$

Assim,

$$d\alpha(p) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(p) dx^i \right) \wedge dx^j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(p) \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Suponhamos que $\alpha \in \Omega^r(U)$. A diferencial exterior de α é definida por

$$d\alpha(p) = \sum_{J} d\alpha_J \wedge dx^J,$$

onde J percorre as r-listas de elementos de $\{1, \ldots, n\}$.

Proposição D.3.4. *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^n$. A diferencial exterior tem as seguintes propriedades:*

1. *Para cada $r \in \mathbb{Z}$ a aplicação $d_r : \Omega^r(U) \to \Omega^{r+1}(U)$ é linear sobre $\mathbb{R}$.*
2. *$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge (d\eta)$ se $\omega \in \Omega^r(U)$ e $\eta \in \Omega^s(V)$.*
3. *$d^2 = d \circ d = 0$.*
4. *Se $f : U \to V$ é de classe C^∞ e $\omega \in \Omega^r(V)$, então*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Demonstração: Vide [9,44]. □

Sejam $\omega \in \Omega^r(M)$ e (U, ϕ) um sistema de coordenadas em M. A ***representação local*** de ω na carta (U, ϕ) é o elemento $\omega_\phi \in \Omega^r(\phi(U))$ dado por $(\phi^{-1})^*\omega$. Pelo Corolário D.3.3, existe uma bijeção entre $\Omega^r(U)$ e $\Omega^r(\phi(U))$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$. Assim, existe uma única $(r+1)$-forma em U, denotada por $d_\phi \omega$, tal que

$$d_\phi \omega = \phi^*(d\omega_\phi) = \phi^*(d((\phi^{-1})^*\omega)).$$

A princípio, essa definição poderia depender da escolha do sistema de coordenadas. Vejamos que isso não acontece. Seja (V, ψ) um outro sistema de coordenadas em M tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Se $h = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é a mudança de coordenadas, então

$$h^*\omega_\psi = (\psi \circ \phi^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega = (\psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})^*\omega = (\phi^{-1})^*\omega = \omega_\phi.$$

Dessa forma, h^* leva a representação local de ω na carta (V, ψ) na representação local de ω na carta (U, ϕ). Pelo item 4 da Proposição D.3.4, tem-se

$$d\omega_\phi = d(h^*\omega_\psi) = h^*(d\omega_\psi).$$

Em $U \cap V$:

$$d_\phi\omega = \phi^*(d\omega_\phi) = \phi^*(h^*(d\omega_\psi)) = \phi^* \circ (\psi \circ \phi^{-1})^*(d\omega_\psi) = \psi^*(d\omega_\psi) = d_\psi\omega.$$

A ***diferencial exterior*** de $\omega \in \Omega^r(M)$, em símbolos $d\omega$, é a $(r+1)$-forma definida em cada ponto $p \in M$ por $d\omega(p) \doteq d_\phi\omega(p)$ sendo (U, ϕ) um sistema de coordenadas de M tal que $p \in U$.

Teorema D.3.5. *Para cada $r \in \mathbb{N}_0$, existe uma única aplicação $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ com as seguintes propriedades:*

1. *d é linear sobre $\mathbb{R}$.*

2. *Se $f \in C^\infty(M)$, então df é a diferencial usual.*

3. *Se $\omega \in \Omega^r(M)$ e $\eta \in \Omega^s(M)$, então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r\omega \wedge d\eta$.*

4. *$d^2 = d \circ d = 0$.*

Demonstração: Vide [9,23,43,45]. □

Corolário D.3.6. *Se $f : M \to N$ é de classe C^∞ e $\omega \in \Omega^r(M)$, então*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Proposição D.3.7. *Sejam M uma variedade e $\alpha \in \Omega^r(M)$. Se $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{1 \leq i \leq r+1} &(-1)^{i-1} X_i(\alpha(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1}), \end{aligned}$$

onde $\widehat{\cdot}$ significa a entrada que estamos omitindo.

Demonstração: Vide [9, p.370] e [45, p.233]. □

Campos Tensoriais

Seja $\mathfrak{A}_r(M)$ o conjunto das aplicações r-lineares alternadas, sobre o anel $C^\infty(M)$, da forma

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{vezes}} \to C^\infty(M).$$

Pode-se verificar que $\mathfrak{A}_r(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$.

Proposição D.3.8. *Seja M uma variedade, de classe C^∞, Hausdorff e paracompacta. Considere $\omega \in \mathfrak{A}_r(M)$. Nessas condições, valem as seguintes afirmações:*

1. *o número real $\omega(X_1, \ldots, X_r)$, num ponto $p \in M$, depende apenas dos valores dos campos $X_1, \ldots, X_r$ no ponto p.*

2. *$\Omega^r(M)$ é canonicamente isomorfo $\mathfrak{A}_r(M)$, visto como módulos sobre $C^\infty(M)$.*

Demonstração: Vide [23]. □

O módulo dos campos tensoriais do tipo (r, s) sobre $C^\infty(M)$, em símbolos $\mathcal{T}_s^r(M)$, é canonicamente isomorfo ao módulo das aplicações C^∞-multilineares do tipo

$$\underbrace{\Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M)}_{r-\text{vezes}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s-\text{vezes}} \to C^\infty(M).$$

Dessa forma, se $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ é uma carta local de M, então $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$ pode ser expresso

$$T|_U = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}|_p.$$

Isso nos fornece uma versão em variedades dos resultados da página 170.

Cohomologia de De Rham

Já sabemos que a derivada exterior é uma transformação linear que leva formas de grau r em formas de grau $r+1$. O encadeamento das aplicações $d_r : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ pode ser representado pela seguinte sequência de espaços vetoriais

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{r-1}(M) \xrightarrow{d_{r-1}} \Omega^r(M) \xrightarrow{d_r} \Omega^{r+1}(M) \xrightarrow{d_{r+1}} \cdots.$$

Lembremos que $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ e $\Omega^r(M) = \{0\}$ para todo $r > n$. Convencionando que $\Omega^r(M) = \{0\}$ quando $r < 0$ a sequência anterior se torna

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M).$$

A propriedade $d_{r+1} \circ d_r = 0$ é equivalente a inclusão $\mathrm{im}(d_r) \subseteq \mathrm{nuc}(d_{r+1})$ para todo $r \in \mathbb{Z}$. Por causa disso, a sequência anterior é chamada de ***complexo de cocadeias*** de M e neste contexto específico, de formas diferenciais em variedades, é usualmente denominado ***complexo de De Rham***. Dado $r \in \mathbb{Z}$, consideremos os seguintes espaços

$$Z^r(M) \doteq \mathrm{nuc}(d_r) \;\; \text{e} \;\; B^r(M) \doteq \mathrm{im}(d_{r-1}).$$

Dizemos que $Z^r(M)$ é o espaço das r-formas fechadas e $B^r(M)$ é o espaço das r-formas exatas. Além disso, vale ainda a inclusão $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$. O espaço vetorial real quociente

$$H^r_{\mathrm{dR}}(M) \doteq \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}$$

é chamado de ***grupo de cohomologia de De Rham de grau*** r da variedade M. Um elemento $[\omega] \in H^r_{\mathrm{dR}}(M)$ é chamado de ***classe de cohomologia*** de ω e é da forma

$$[\omega] = \{\omega + d_{r-1}\eta : \eta \in \Omega^{r-1}(M)\}.$$

Isso significa que duas formas pertencem a mesma classe de equivalência se, e somente se, diferem por um termo de derivada exterior. Observe que se toda r-forma fechada for exata, então $H^r_{\mathrm{dR}}(M) = \{0\}$. A grosso modo, o grupo de cohomologia de De Rham mede em que grau as formas fechadas deixam de ser exatas.

Proposição D.3.9 (Funtorização). *Seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^∞. Se $f^* : \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$ é a aplicação induzida, então os espaços $Z^r(N)$ e $B^r(N)$ são invariantes por f^*. Em particular, existe uma única aplicação linear $f^\sharp : H^r_{\mathrm{dR}}(N) \to H^r_{\mathrm{dR}}(M)$ tal que*

$$f^\sharp([\omega]) = f^*(\omega).$$

Além disso, valem as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{id}_M^\sharp = \mathrm{id}_{H^r_{\mathrm{dR}}(M)}$.

2. *Se $h : N \to P$ é uma outra aplicação de classe C^∞, então $(h \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ h^\sharp$.*

Demonstração: Vide [9]. □

Corolário D.3.10. *Variedades difeomorfas têm grupos de cohomologia de De Rham isomorfos.*

Exemplo D.3.11. Abaixo são apresentados alguns grupos de cohomologia conhecidos (vide [9, p.450]).

- $H^r_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ se $n \in \mathbb{N}$ e $r \geq 1$.
- $H^r_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = n \\ \{0\}, & \text{se} \quad r \neq 0 \quad \text{e} \quad r \neq n \end{cases}.$

$\diamond$

Derivada de Lie

Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$. A ***derivada de Lie*** de T com respeito a X, em símbolos $\mathcal{L}_X T$, é definida como sendo o campo tensorial do tipo (r, s) dado por

$$(\mathcal{L}_X T)(p) \doteq \frac{d}{dt}(\phi_t^* T)(p)|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{d((\phi_t)^*_p)(T_{\phi_t(p)}) - T_p}{t},$$

para todo $p \in M$ onde ϕ é o fluxo local de X em p. Pode-se mostrar que a definição acima independe da escolha do fluxo local.

Abaixo listamos algumas propriedades que a derivada de Lie tem e que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Para a demonstração de cada uma delas sugerimos as referências [9, 45], [30, p.69] e [63, p.29].

Proposição D.3.12. *Sejam M uma variedade diferenciável, $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $T, S \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Valem as seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{L}_X f = X(f)$.
2. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.
3. $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$.
4. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$.
5. $\mathcal{L}_X(f \cdot Y) = (\mathcal{L}_X f)Y + f \cdot \mathcal{L}_X Y$.
6. $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$.
7. $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ *em* $\Omega(M)$.
8. $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ *em* $\Omega(M)$.
9. $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ *em* $\Omega(M)$.
10. $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \eta)$ *onde* $\omega, \eta \in \Omega(M)$.

A propriedade 7 acima é conhecida na literatura como ***fórmula mágina de Cartan***. Notemos que o item 8 afirma que a derivada de Lie comuta com a derivada exterior no contexto de formas diferenciais.