UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Débora Lucena de Carvalho Righi Moura

O corpo dos números racionais e o uso do círculo de frações no processo de ensino e aprendizagem

Juiz de Fora

2024

Débora Lucena de Carvalho Righi Moura

O corpo dos números racionais e o uso do círculo de frações no processo de ensino e aprendizagem

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moura, Débora Lucena de Carvalho Righi.

O corpo dos números racionais e o uso do círculo de frações no processo de ensino e aprendizagem / Débora Lucena de Carvalho Righi Moura. – 2024.

64 f. : il.

Orientadora: Ana Tércia Monteiro Oliveira

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2024.

1. Números racionais. 2. Corpo. 3. Círculo de frações. I. Oliveira, Ana Tércia Monteiro, orient. II. Título.

Débora Lucena de Carvalho Righi Moura

O corpo dos números racionais e o uso do círculo de frações no processo de ensino e aprendizagem

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de fevereiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Fábio Luiz Borges Simas

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Sofia Carolina da Costa Melo

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 15/01/2024.

Dedico este trabalho a Deus. Sem ele nada seria possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades e não desistir.

A minha família, por toda rede de apoio e compreensão. Sem o incentivo de vocês faltaria o essencial para que eu pudesse superar os desafios e chegar até aqui.

À minha orientadora Ana Tércia Monteiro Oliveira, pois sua dedicação e paciência durante o projeto me mostraram que mesmo diante das dificuldades seria possível terminar. Seus conhecimentos fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho traz uma exposição da construção do corpo, totalmente ordenado, dos números racionais. No que segue, trazemos um relato de experiência, sobre o uso de um material concreto conhecido como Círculo de Frações, que se dá numa turma do sexto ano composta por alunos em condições neurodiversas, isto é, um aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA), alunos com Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) e alunos típicos. Ademais, trazemos uma proposta de uso desse recurso pedagógico com o objetivo de fixar os conceitos relacionados aos números fracionários.

Palavras-chave: números racionais; corpo; círculo de frações.

ABSTRACT

This work presents an exposition of the construction of the field, totally ordered, of rational numbers. In what follows, we bring an experience report on the use of a concrete material known as a Circle of Fractions, which takes place in a class of the sixth year composed of students with neurodiverse conditions, that is, a student with Autism Spectrum Disorder (ASD), students with Attention Deficit Disorder and Hyperactivity (ADHD) and typical students. Furthermore, we bring a proposal for use of this pedagogical resource with the aim of establishing concepts related to numbers fractional.

Keywords: rational numbers; field; circle of fractions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho inicia com um breve histórico sobre a origem dos números nas civilizações antigas. Algumas civilizações perceberam através das necessidades que surgiam que os números naturais não eram suficientes para representar certas medidas. Assim, começaram a elaborar um modo para representar medidas que não formavam uma parte inteira, daí surgindo, as medidas fracionárias.

Após esse breve apanhado histórico, fazemos a construção do conjunto dos números racionais, partindo do conjunto dos números naturais, extendendo ao conjunto dos números inteiros, no Capítulo 3, e finalmente chegando no corpo totalmente ordenado $\mathbb{Q}$, através de uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{*}$, no Capítulo 4.

No Capítulo 5, abordamos sobre o método educativo Montessori, criado pela italiana Maria Tecla Artemisia Montessori, que traz como proposta a formação do conhecimento através da experimentação, na qual a criança é protagonista no processo de aprendizado. Diante dos benefícios apresentados pelo método de Montessori, trazemos o Círculo de Frações, um recurso montessoriano, para a nossa prática escolar numa turma do sexto ano composta por 1 estudante diagnosticado com TEA, outros dois estudantes diagnosticados com TDAH e 17 estudantes típicos. Além do Círculo de Frações usamos o que chamamos de Retângulo de Frações, recurso similar ao círculo que adaptamos à formas retangulares. Com estes recursos foi possível trabalhar conceitos diretamente relacionados a estrutura do corpo totalmente ordenado $\mathbb{Q}$: equivalência de frações, comparação de frações e operações básicas de frações.

Ainda no Capítulo 5, trazemos um relato de experiência sobre o uso do Círculo/Retângulo de Frações, na turma supracitada, com os resultados positivos que o recurso proporcionou. Finalmente, encerramos o nosso trabalho abordando a importância dos jogos no ensino de Matemática e deixamos no Apêndice o Jogo Trunfo das Frações, elaborado no âmbito desta dissertação, um recurso adicional, que pode ser usado com o suporte do Círculo de Frações e jogado em 3 níveis de dificuldade.

2 FRAÇÕES NAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS

A seguir faremos um breve apanhado sobre a história dos números e em particular das frações nas civilizações antigas. Para um estudo mais detalhado sugerimos as referências (Silva, 2006) e (Silva, 2021).

A descoberta dos números não aconteceu de repente, nem foi uma única pessoa responsável por essa façanha. É uma história de necessidades e preocupações de povos que precisavam recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, datar a fundação de sua cidade e suas vitórias utilizando os meios disponíveis.

Assim, os números começaram a ser criados conforme a necessidade do homem. Por conta disso, cada povo desenvolveu seu próprio método de contagem e mais tarde os métodos foram sistematizados e deram origem aos primeiros sistemas de numeração.

Inicialmente, estes sistemas de numeração representavam apenas os números naturais, já que foram elaborados para representar contagens de objetos. No que segue surgiu também a necessidade de medir as coisas, e então algumas civilizações antigas perceberam que, na maioria das vezes, não é possível representar medidas apenas com os números naturais. Para solucionar o problema era preciso elaborar uma maneira de representar as partes que não formavam uma unidade de medida inteira. E foi assim que alguns povos inseriram os números fracionários em seus sistemas de numeração.

Assim, podemos dizer que os números naturais foram criados para contar e que os números fracionários foram criados para medir.

Há relatos de vários sistemas de numeração elaborados pelas grandes civilizações no decorrer da história, entre eles, vamos começar falando sobre o sistema babilônico. Nesse sistema se empregava apenas dois símbolos para representar todos os números: o cravo e a asna. A composição dos seus números considerava que cada símbolo estava associado a uma potência de 60. Enquanto o cravo se referia à unidade, a asna representava 10 unidades. Registros históricos estimam que o sistema de numeração babilônico foi criado por volta de 2000 a.C. e era utilizado por uma pequena parcela de estudiosos, como matemáticos e astrônomos.

Atribui-se aos babilônios a criação do primeiro sistema de numeração posicional, ou seja, os algarismos têm um valor dependendo de qual posição ocupam no número, e também serem os primeiros a criarem um símbolo para representar o zero.

Outro sistema de numeração mais antigo quanto o babilônico é o sistema egípcio que começou a ser desenvolvido por volta de 3000 a.C. O sistema de numeração egípcio baseava-se em sete números chave: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000. Os egípcios não se preocupavam com a ordem dos símbolos, ou seja, seu sistema numérico não era posicional. Sua técnica se preocupava em efetuar cálculos que envolviam números inteiros.

Há indícios de que os egípcios foram os primeiros a inserir a idéia de fração em seu sistema de numeração e que foi sob o reinado do faraó Sesóstris que o sistema fracionário surgiu no Antigo Egito. A economia egípcia estava assentada principalmente no cultivo de terras e para que a produção ocorresse de uma forma eficaz, terras cultiváveis eram divididas entre os habitantes. Anualmente, entre os meses de junho e setembro, as águas do rio Nilo subiam por muitos metros além de seu leito normal, inundando uma vasta região circundante e trazendo a necessidade de remarcação do terreno não atingido pela enchente.

Outro sistema de numeração que vamos citar é o sistema de numeração romano, o qual se desenvolveu na Roma Antiga, e foi utilizado em todo o Império Romano e muito usado ainda nos dias de hoje. Composto por sete letras maiúsculas do alfabeto latino: I, V, X, L, C, D e M, é interessante notar a ausência de uma letra que represente o zero.

Alguns relatos nos mostram que os romanos não estavam interessados na realização de cálculos, eles simplesmente queriam números representativos para a determinação de quantidades, por conta disso a ausência do zero.

A representação numérica adotada pelos romanos foi durante muitos séculos a mais utilizada por toda a Europa. Também utilizaram as frações e elaboraram um sistema fracionário sem relação com o seu sistema de números inteiros. Embora os romanos usassem um sistema decimal para números inteiros, refletindo como contavam em latim, usavam um sistema duodecimal para frações.

O sistema de numeração duodecimal, foi desenvolvido pelos mesopotâmicos, por volta do ano 3.100 a.C.. É um sistema de numeração que usa o número 12 como sua base. Esse por sua vez possui quatro fatores distintos de 1 e 12, que são 2, 3, 4, 6. Assim, ao dividí-lo por qualquer um desses quatro fatores, obteremos um número inteiro. Visto isso, muitos matemáticos acreditam que as representações duodecimais se encaixam mais facilmente nas contas do dia-a-dia do que as decimais, as quais possuem apenas dois fatores o 2 e o 5, o que torna o sistema duodecimal um sistema numérico mais conveniente para calcular frações do que a maioria dos outros sistemas numéricos de uso comum.

Com a expansão do Império Romano e o desenvolvimento da matemática foi necessária a criação de um sistema de numeração mais prático, um sistema que não apenas era usado para determinar quantidades e sim um sistema completo para a realização de cálculos. Diante dessa necessidade os hindus criaram no século V o sistema de numeração que usamos até hoje. Inventado pelos antigos hindus e divulgado pelos árabes esse sistema passou a ser conhecido como sistema de numeração indo-arábico.

Usando grupos de dez, os hindus desenvolveram um sistema de numeração decimal e posicional. Os símbolos utilizados são chamados de algarismos e são representados por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. O símbolo para o zero foi criado apenas no século VI e, inicialmente, era representado por um ponto ou por um pequeno círculo.

Em manuscritos hindus, datados do século VII aproximadamente, foram encontradas representações de frações, nas quais se escreviam os dois números, numerador e denominador, um sobre o outro. Não havia o traço, atualmente utilizado na representação de frações.

Assim, pudemos observar que diante da necessidade dos povos antigos em fazer medições e cálculos algumas civilizações inseriram novas formas em seus sistemas de numeração para representar as partes de um objeto, originando o que chamamos de fração.

3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS: UM CORPO TOTALMENTE ORDENADO

Os números fracionários assim chamados no capítulo anterior, mais precisamente, são formas de representações dos números racionais assim como as representações decimais. Portanto, o conjunto dos números racionais é um conjunto que contém o conjunto dos números inteiros no qual cada elemento tem uma representação fracionária e uma representação decimal.

Neste capítulo faremos uma breve exposição dos elementos necessários para a construção axiomática do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

3.1 RELAÇÃO

Definição 3.1.1 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Definimos o produto cartesiano de A por B como o seguinte conjunto:*

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Definição 3.1.2 *Seja A um conjunto não vazio. Qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times A$ é chamado de relação binária no conjunto A.*

Dada uma relação binária R em A, adotaremos a notação "aRb"para representar que $(a, b) \in R$. Neste caso, lê-se que a está relacionado com b.

Definição 3.1.3 *Seja R uma relação no conjunto não vazio A e $x, y, z \in A$.*
i) Dizemos que R é reflexiva se, e somente se, xRx.
ii) Dizemos que R é simétrica se, e somente se, xRy implica em yRx.
iii) Dizemos que R é antissimétrica se, e somente se, xRy e yRx implica em $x = y$.
iv) Dizemos que R é transitiva se, e somente se, xRy e yRz implica em xRz.

Definição 3.1.4 *Uma relação R sobre um conjunto não vazio A é chamada de relação de equivalência sobre A se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva.*

No que segue, o conjunto dos números naturais é dado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Exemplo 3.1.1 *Considere a relação S em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

$$(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

S é uma relação de equivalência.
Prova.

1. *Para todo* $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*,*

$$(a,b)S(a,b) \Leftrightarrow a+b=b+a.$$

Portanto, como a adição em $\mathbb{N}$ *é comutativa então,* S *é reflexiva.*

2. *Se* (a,b)*,* $(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *e* $(a,b)\ S\ (c,d)$*, então* $a+d=b+c$*, e portanto* $c+b=d+a$*. Logo,* $(c,d)\ S\ (a,b)$*. Assim,* S *é simétrica.*

3. *Sejam* (a,b)*,* (c,d)*,* $(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tais que* $(a,b)\ S\ (c,d)$ *e* $(c,d)\ S\ (e,f)$*. Então,*

$$a+d=b+c, c+f=d+e \Rightarrow (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e) \Rightarrow a+f=b+e.$$

Logo, $(a,b)\ S\ (e,f)$*, o que prova a transitividade.*

Portanto, S *é uma Relação de Equivalência.*

Definição 3.1.5 *Seja* R *uma relação de equivalência em* A *e* $a \in A$*. Chamamos de classe de equivalência de* a *pela relação* R *o conjunto* $\overline{a} = \{x \in A/xRa\}$*, isto é, conjunto dos elementos de* A *que se relacionam com* a*.*

Exemplo 3.1.2 *Considere a relação* S *do Exemplo 3.1.1. As classes de equivalência dos elementos* $(1,2), (1,1)$ *e* $(2,1)$ *são*

$$\begin{aligned}
\overline{(1,2)} &= \{(x,y)/x+2=y+1\} = \{(x,y)/y=x+1\};\\
\overline{(1,1)} &= \{(x,y)/x+1=y+1\} = \{(x,y)/y=x\};\\
\overline{(2,1)} &= \{(x,y)/x+1=y+2\} = \{(x,y)/y=x-1\}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1 *Sejam* A *um conjunto não vazio e* $a,b \in A$*. Se* R *é uma relação de equivalência em* A*, então:*

1. $a \in \overline{a}$*;*

2. $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow aRb$*;*

3. $\overline{a} \neq \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$*.*

Prova.

1. Como R é uma relação reflexiva então aRa. Assim, $a \in \overline{a}$.

2. (⇒) Suponhamos que $\overline{a} = \overline{b}$. Pelo item anterior, $a \in \overline{a} = \overline{b}$, e portanto, $a \in \overline{b}$. Logo, aRb.

   (⇐) Suponhamos que aRb. Mostraremos que $\overline{a} = \overline{b}$, ou seja, $\overline{a} \subset \overline{b}$ e $\overline{b} \subset \overline{a}$.

   Seja $x \in \overline{a}$. Então, xRa. Como aRb, pela propriedade transitiva, xRb. Logo, $x \in \overline{b}$, e portanto, $\overline{a} \subset \overline{b}$.

   Seja $x \in \overline{b}$. Então, xRb, e pela propriedade simétrica bRx. Como aRb, pela transitividade, aRx. Assim, xRa, e portanto, $x \in \overline{a}$. Logo, $\overline{b} \subset \overline{a}$.

3. (⇒) Suponhamos que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Então, existe $z \in \overline{a} \cap \overline{b}$. Daí, zRa e zRb. Pelo item anterior, $\overline{z} = \overline{a}$ e $\overline{z} = \overline{b}$, donde $\overline{a} = \overline{b}$. Contradição.

   (⇐) Suponhamos que $\overline{a} = \overline{b}$. Então, $a \in \overline{a} = \overline{b}$. Logo, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Contradição.

Definição 3.1.6 *Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A. Chamamos de conjunto quociente de A pela relação R o conjunto*

$$A/R = \{\overline{a}; a \in A\}.$$

Exemplo 3.1.3 *O conjunto quociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/S$ onde S é a relação dada no Exemplo 3.1.1 é denotado por $\mathbb{Z}$ e chamado de conjunto dos números inteiros.*

O seguinte resultado nos direciona a entender a atual representação dos elementos de $\mathbb{Z}$ como pontos isolados da reta real.

Proposição 3.1.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então, existe um único natural n tal que $\overline{(a,b)} = \overline{(1, n+1)}$ ou $\overline{(a,b)} = \overline{(n+1, 1)}$.*

Prova. De fato, temos dois casos para analisar: $b \geq a$ e $b \leq a$.

1. $b \geq a$

   Neste caso, tome $n = b - a$. Note que $n + 1 \geq 1$. Além disso,

   $$a + (n+1) = a + ((b-a)+1) = b + 1, \text{ isto é, } (a,b)S(1, n+1).$$

   Logo, pelo Teorema 3.1.1, $\overline{(a,b)} = \overline{(1, n+1)}$.

2. $b \leq a$

   Neste caso, tome $n = a - b$. Note que $n + 1 \geq 1$. Além disso,

   $$b + (n+1) = b + ((a-b)+1) = a + 1, \text{ isto é, } (a,b)S(n+1, 1).$$

Logo, pelo Teorema 3.1.1, $\overline{(a,b)} = \overline{(n+1,1)}$.

Por outro lado, se $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 1$, então

$$(n+1,1)S(m+1,1) \Rightarrow (n+1)+1 = 1+(m+1) \Rightarrow n = m;$$

$$(1,n+1)S(1,m+1) \Rightarrow 1+(m+1) = (n+1)+1 \Rightarrow n = m \text{ e}$$

$$(n+1,1)S(1,m+1) \Rightarrow (n+1)+(m+1) = 2 \Rightarrow n+m = 0. \text{ Não se aplica.}$$

Portanto, n existe e é único.

3.2 OPERAÇÕES EM $\mathbb{Z}$

Consideremos as seguintes operações em $\mathbb{Z}$.

1. Adição
   $+ : \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $+ : (\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \to \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$
2. Multiplicação
   $\cdot : \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $\cdot : (\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \to \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$

Proposição 3.2.1 *As operações em $\mathbb{Z}$ acima estão bem definidas.*

Prova.
Assuma $\overline{(a,b)} = \overline{(a_1,b_1)}, \overline{(c,d)} = \overline{(c_1,d_1)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$(a,b) \text{ S } (a_1,b_1) \text{ e } (c,d) \text{ S } (c_1,d_1) \Rightarrow a+b_1 = b+a_1 \text{ e } c+d_1 = d+c_1.$$

Efetuando a adição temos

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)} \text{ e } \overline{(a_1,b_1)} + \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_1+c_1, b_1+d_1)}.$$

Além disso,
$(a+c)+(b_1+d_1) = (a+b_1)+(c+d_1) = (b+a_1)+(d+c_1) = (b+d)+(a_1+c_1)$.
Portanto,

$$(a+c, b+d) \text{ S } (a_1+c_1, b_1+d_1), \text{ isto é, } \overline{(a+c,b+d)} = \overline{(a_1+c_1, b_1+d_1)}.$$

Logo, $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a_1,b_1)} + \overline{(c_1,d_1)}$.

Efetuando a multiplicação temos

$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$ e $\overline{(a_1,b_1)} \cdot \overline{(c_1,d_1)} = \overline{(a_1c_1+b_1d_1, a_1d_1+b_1c_1)}$.

Além disso,

$(ac+bd)+(a_1d_1+b_1c_1) = (ac+a_1d_1)+(bd+b_1c_1)+b_1c-b_1c =$

$(a+b_1)c+a_1d_1+(bd+b_1c_1)-b_1c = (b+a_1)c+a_1d_1+(bd+b_1c_1)-b_1c =$

$bc+a_1c+a_1d_1+bd+b_1c_1-b_1c = (c+d_1)a_1+bc+bd+b_1c_1-b_1c =$

$(d+c_1)a_1+bc+bd+b_1c_1-b_1c = a_1d+a_1c_1+bc+bd+b_1c_1-b_1c =$

$(a_1+b)d+a_1c_1+bc+b_1c_1-b_1c = a_1c_1+(a+b_1)d+bc+b_1c_1-b_1c =$

$a_1c_1+ad+b_1d+bc+b_1c_1-b_1c = a_1c_1+ad+(d+c_1)b_1+bc-b_1c =$

$a_1c_1+ad+(d_1+c)b_1+bc-b_1c = a_1c_1+ad+b_1d_1+b_1c+bc-b_1c =$

$(a_1c_1+b_1d_1)+(ad+bc)+b_1c-b_1c = (a_1c_1+b_1d_1)+(ad+bc)$.

Portanto,

$(ac+bd, ad+bc)\ \mathrm{S}\ (a_1c_1+b_1d_1, a_1d_1+b_1c_1) \Rightarrow \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a_1c_1+b_1d_1, a_1d_1+b_1c_1)}$.

Logo, $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a_1,b_1)} \cdot \overline{(c_1,d_1)}$.

De posse do conjunto dos números inteiros munido das operações acima, o nosso próximo passo é mostrar que $\mathbb{Z}$ é um anel comutativo unitário.

Definição 3.2.1 *Seja A um conjunto não vazio no qual estão definidas as operações adição, $+$, e multiplicação, $\cdot$. Dizemos que A é um anel se suas operações satisfazem as seguintes propriedades:*

I. *Associativa da adição: $(a+b)+c = a+(b+c)$, para quaisquer $a,b,c \in A$;*

II. *Comutativa da adição: $a+b = b+a$, para quaisquer $a,b \in A$;*

III. *Existência do elemento neutro da adição: Existe $0 \in A$ tal que $a+0 = a$, para qualquer $a \in A$;*

IV. *Existência do elemento simétrico da adição: Dado $a \in A$, existe $b \in A$, tal que $a+b = 0$;*

V. *Associativa da multiplicação: $(a.b).c = a.(b.c)$, para quaisquer $a,b,c \in A$;*

VI. *Distributiva: $a.(b+c) = a.b+a.c$ e $(a+b).c = a.c+b.c$, para quaisquer $a,b,c \in A$.*

Além disso, um anel A é dito comutativo se vale a seguinte propriedade:

VII. Comutativa da multiplicação: $a.b = b.a$, para quaisquer $a, b \in A$.

Proposição 3.2.2 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então,*

1. *O elemento neutro da adição é único.*

2. *O simétrico de cada $a \in A$ é único.*

Prova.

1. Sejam 0 e $0'$ elementos neutros da adição do anel A. Então, $0 = 0' + 0 = 0'$, logo $0 = 0'$.

2. Sejam a' e $a'' \in A$, simétricos de $a \in A$. Então,

$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$.

Definição 3.2.2 *Um anel comutativo A é dito unitário se existe $1 \in A$, $1 \neq 0$, tal que $a.1 = a$, para todo $a \in A$.*

Proposição 3.2.3 *$\mathbb{Z}$ munido das operações acima é um anel comutativo unitário.*

Prova.

1. Associatividade da adição

   Sejam $\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)}$ e $\overline{(e, f)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$[\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)}] + \overline{(e, f)} = \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e, f)} =$$
$$\overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} = \overline{(a + (c + e), b + (d + f))} =$$
$$\overline{(a, b)} + \overline{(c + e, d + f)} = \overline{(a, b)} + [\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)}].$$

2. Comutatividade da adição

   Sejam $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} =$$
$$\overline{(c + a, d + b)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}.$$

3. Existência do elemento neutro da adição

   Sejam $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(1, 1)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a, b)} + \overline{(1, 1)} = \overline{(a + 1, b + 1)}.$$

Como $(a+1)+b = a+(1+b) = (1+b)+a = (b+1)+a$ então $(a,b)\ S\ (a+1,b+1)$. Portanto, $\overline{(a+1,b+1)} = \overline{(a,b)}$. Logo, o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$ é $\overline{(1,1)}$.

4. Existência do simétrico aditivo

   Seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b,b+a)}.$$

   Além disso,

$$(a+b)+1 = (b+a)+1 \Rightarrow \overline{(a+b,b+a)} = \overline{(1,1)}.$$

   Logo, $\overline{(b,a)} \in \mathbb{Z}$ é o simétrico aditivo de $\overline{(a,b)}$.

5. Associatividade da multiplicação

   Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$[\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}].\overline{(e,f)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)}.\overline{(e,f)} =$$
$$\overline{[(ac+bd)e+(ad+bc)f,(ac+bd)f+(ad+bc)e]} =$$
$$\overline{(ace+bde+adf+bcf,acf+bdf+ade+bce)} =$$
$$\overline{[a(ce+df)+b(cf+de),a(cf+de)+b(ce+df)]} = \overline{(a,b)}.\overline{(ce+df,cf+de)} =$$
$$\overline{(a,b)}.[\overline{(c,d)}.\overline{(e,f)}].$$

6. Comutatividade da Multiplicação

   Sejam $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)} = \overline{(ca+db,cb+da)} = \overline{(c,d)}.\overline{(a,b)}.$$

7. Existência do elemento neutro da multiplicação

   Seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a,b)}.\overline{(2,1)} = \overline{(a.2+b.1,a.1+b.2)} = \overline{(2a+b,a+2b)}.$$

   Por outro lado,

$$(2a+b)+b = (2b+a)+a \Rightarrow \overline{(2a+b,a+2b)} = \overline{(a,b)}.$$

   Logo, $\overline{(2,1)}$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

8. Distributividade

   Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\overline{(a,b)}.[\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}] = \overline{(a,b)}.\overline{(c+e,d+f)} = \overline{[a(c+e)+b(d+f),a(d+f)+b(c+e)]} =$$
$$\overline{(ac+ae+bd+bf,ad+af+bc+be)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)} + \overline{(ae+bf,af+be)} =$$
$$[\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}] + [\overline{(a,b)}.\overline{(e,f)}].$$

Portanto, $\mathbb{Z}$ munido das operações acima definidas é um anel comutativo unitário.

Além disso, veremos que $\mathbb{Z}$ contém uma cópia de $\mathbb{N}$, isto é, existe uma função injetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ que preserva as operações, conforme os itens 1 e 2 da seguinte definição.

Definição 3.2.3 *Sejam $(A,+,\cdot)$ e $(B,+',*)$ anéis. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita um homomorfismo de A em B se, e somente se,*

1. $f(x+y) = f(x) +' f(y)$
2. $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$

para quaisquer $x, y \in A$.

Proposição 3.2.4 *Sejam $(\mathbb{N},+,\cdot),(\mathbb{Z},+,\cdot)$ com suas respectivas operações e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \overline{(n+1,1)}$. Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, f satisfaz:*

I - $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

II - $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$;

III - f é injetora.

Prova. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então,

1. $f(a+b) = \overline{(a+b+1,1)}$ e $f(a) + f(b) = \overline{(a+1,1)} + \overline{(b+1,1)} = \overline{(a+b+2,2)}$.

   Por outro lado,

$$(a+b+1)+2 = 1+(a+b+2) \Rightarrow (a+b+1,1) \; \mathrm{S} \; (a+b+2,2).$$

   Logo, $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

2. $f(ab) = \overline{(ab+1,1)}$ e $f(a) \cdot f(b) = \overline{(a+1,1)} \cdot \overline{(b+1,1)} = \overline{(ab+a+b+2,a+b+2)}$.

   Por outro lado,

$$(ab+1)+(a+b+2) = 1+(ab+a+b+2) \Rightarrow (ab+1,1)\,\mathrm{S}\,(ab+a+b+2, a+b+2).$$

Logo, $f(ab) = f(a)\cdot f(b)$.

3. Suponhamos que $f(a) = f(b)$. Então,

$$\overline{(a+1,1)} = \overline{(b+1,1)} \Rightarrow (a+1,1)\,\mathrm{S}\,(b+1,1) \Rightarrow (a+1)+1 = 1+(b+1) \Rightarrow a = b.$$

Portanto, f satisfaz I, II e III.

Daqui em diante, para todo natural $n \geq 1$ passaremos a denotar a classe $\overline{(n+1,1)}$ por n e a classe $\overline{(1,n+1)}$ por $-n$.

3.3 CONJUNTOS ORDENADOS

Nesta seção trabalharemos com conceito de conjunto parcialmente ordenado e mostraremos que existe uma relação em $\mathbb{Z}$ com a qual o conjunto dos números inteiros é totalmente ordenado, isto é, quaisquer dois números inteiros são comparáveis.

Definição 3.3.1 *Uma relação R sobre um conjunto não vazio A é chamada de relação de ordem parcial em A se, e somente se, R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Adotaremos a notação $a \preceq b$, lê-se "a precede b", para representar que aRb. Neste caso, dizemos que $(A, \preceq)$ é parcialmente ordenado.*

Definição 3.3.2 *Dizemos que $(A, \preceq)$ é totalmente ordenado se $a \preceq b$ ou $b \preceq a$ para quaisquer $a, b \in A$.*

Considere $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e a seguinte relação $\leq$ em $\mathbb{Z}$:

$$a \leq b \text{ se, e somente se, existe } n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ tal que } b = a+n.$$

Proposição 3.3.1 *A relação acima definida é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.*

Prova.

1. Para todo $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \leq a, \text{ pois } a = a+0.$$

Portanto, a relação $\leq$ é reflexiva.

2. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, tais que $a \leq b$ e $b \leq a$. Então, existem $m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, tais que

$$b = a+m \text{ e } a = b+n \Rightarrow b = b+m+n \Rightarrow m+n = 0 \Rightarrow m = n = 0, \text{ pois } m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Logo, $a = b$,isto é, a relação $\leq$ é antissimétrica.

3. Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \leq b$ e $b \leq c$. Então, existem $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que

$$b = a + m \text{ e } c = b + n \Rightarrow c = (a + m) + n \Rightarrow c = a + (m + n), \text{ onde } m + n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Logo, $a \leq c$, o que prova a transitividade.

Portanto, $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.

Proposição 3.3.2 *$\mathbb{Z}$ munido da relação acima é um conjunto totalmente ordenado.*

Prova.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. A prova será dividida em três casos.

1. $a, b \in \mathbb{N}$

Nesse caso, pela Tricotomia no conjunto dos números naturais, vale uma, e somente uma, das alternativas: $a = b, a < b$ ou $b < a$. Assim,

$$\text{ou } a = b + 0,$$
$$\text{ou } b = a + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N},$$
$$\text{ou } a = b + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

2. $a \in \mathbb{N}$ e $b \notin \mathbb{N}$

Como $b \notin \mathbb{N}$, então $b = 0$ ou $-b \in \mathbb{N}$. Daí, $n = a + (-b) \in \mathbb{N}$ e $a = b + n$. Logo, $b \leq a$.

3. $a, b \notin \mathbb{N}$

Nesse caso, temos duas possibilidades:

• $a = 0$ ou $b = 0$

Sem perda de generalidade, assuma $a = 0$. Então, $a = b + (-b)$, onde $-b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo, $b \leq a$.

• $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Note que $-a, -b \in \mathbb{N}$. Pela Tricotomia do conjunto dos números naturais, vale uma, e somente uma, das alternativas: $-a = -b, -a < -b, -b < -a$. Daí,

$$\text{ou } -a = -b + 0,$$
$$\text{ou } -b = -a + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N},$$
$$\text{ou } -a = -b + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente

$$\text{ou } a = b + 0,$$
$$\text{ou } a = b + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N},$$
$$\text{ou } b = a + n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $b \leq a$ ou $a \leq b$.

3.4 CORPO

Antes da construção do corpo dos números racionais veremos a definição de corpo e mostraremos que $\mathbb{Z}$ munido de suas operações usuais não é um corpo.

Definição 3.4.1 *Um anel A é dito um anel sem divisores de zero se, e somente se, para $a, b \in A$*

$$a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Definição 3.4.2 *Dizemos que A é um domínio de integridade se, e somente se, A é um anel unitário sem divisores de zero.*

Definição 3.4.3 *Um anel unitário A é dito um corpo se vale a seguinte propriedade:*

$$\text{Para todo } a \in A, a \neq 0, \text{ existe } c \in A \text{ tal que } a.c = 1.$$

Neste caso, dizemos que c é o inverso multiplicativo de a.

Proposição 3.4.1 *Seja $(A, +, \cdot)$ um corpo. Então,*

i. *O elemento neutro da multiplicação é único.*

ii. *O inverso multiplicativo de cada a, elemento de A, $a \neq 0$, é único.*

Prova.

i.

Suponhamos que 1 e 1′ são elementos neutros da multiplicação. Então, como 1 é elemento neutro e 1′ ∈ A, 1.1′ = 1′. Da mesma forma, como 1′ é elemento neutro e 1 ∈ A, 1.1′ = 1. Logo, 1 = 1′.

ii.

Suponhamos que a' e a'' são inversos multiplicativos do elemento a. Então,

$$a' = a'.1 = a'.(a.a'') = (a'.a).a'' = 1.a'' = a''.$$

Portanto, $a' = a''$.

Proposição 3.4.2 *$\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade. Porém, $\mathbb{Z}$ não é um corpo.*

Prova.

Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ tais que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(1,1)}$ e $\overline{(c,d)} \neq \overline{(1,1)}$. Então,

$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}.$$

Afirmação 1. $\overline{(ac+bd, ad+bc)} \neq \overline{(1,1)}$.

Caso contrário, $ac+bd+1 = ad+bc+1$. Por outro lado, como $a \neq b$ e $c \neq d$ temos 4 casos a analisar:

1. $a < b$ e $c < d$

   Neste caso, existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $b = a+m$ e $d = c+n$. Assim,

$$\begin{gathered} ac+bd+1 = ad+bc+1 \\ \Rightarrow ac+(a+m).(c+n) = a.(c+n)+(a+m).c \\ \Rightarrow ac+ac+an+cm+mn = ac+an+ac+cm \\ \Rightarrow mn = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } c = d. \text{ Absurdo.} \end{gathered}$$

2. $a < b$ e $d < c$

   Neste caso, existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $b = a+m$ e $c = d+n$. Daí,

$$\begin{gathered} ac+bd+1 = ad+bc+1 \\ \Rightarrow a.(d+n)+(a+m).d = ad+(a+m).(d+n) \\ \Rightarrow ad+an+ad+md = ad+ad+an+md+mn \\ \Rightarrow mn = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } c = d. \text{ Absurdo.} \end{gathered}$$

3. $b < a$ e $c < d$

   Neste caso, existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $a = b+m$ e $d = c+n$. Assim,

$$\begin{gathered} ac+bd+1 = ad+bc+1 \\ \Rightarrow (b+m).c+b.(c+n) = (b+m).(c+n)+bc \\ \Rightarrow bc+cm+bc+bn = bc+bn+cm+mn+bc \\ \Rightarrow mn = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } c = d. \text{ Absurdo.} \end{gathered}$$

4. $b < a$ e $d < c$

   Neste caso, existem $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $a = b + m$ e $c = d + n$. Daí,

$$
\begin{gathered}
ac + bd + 1 = ad + bc + 1 \\
\Rightarrow (b + m).(d + n) + bd = (b + m).d + b.(d + n) \\
\Rightarrow bd + bn + md + mn + bd = bd + md + bd + bn \\
\Rightarrow mn = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } n = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } c = d. \text{ Absurdo.}
\end{gathered}
$$

Afirmação 2. $\mathbb{Z}$ não é um corpo.

Suponha que $\overline{(3,1)}$ tem inverso multiplicativo. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que

$$\overline{(3,1)}.\overline{(a,b)} = \overline{(2,1)}.$$

Assim,

$$
\begin{gathered}
\overline{(3a + b, 3b + a)} = \overline{(2,1)} \\
\Rightarrow 3a + b + 1 = 3b + a + 2 \\
\Rightarrow 2a = 2b + 1.
\end{gathered}
$$

Absurdo, pois $2a$ é par e $2b + 1$ é ímpar.

4 A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo apresentaremos a construção do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ através de uma relação de equivalência definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b); a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$. Em seguida, consideraremos duas operações em $\mathbb{Q}$ e mostraremos que o conjunto dos números racionais munido dessas operações é um conjunto totalmente ordenado que contém $\mathbb{Z}$.

4.1 UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

Considere a seguinte relação R em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dada por

$$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a.d = b.c.$$

Proposição 4.1.1 *R é uma relação de equivalência.*

Prova.

Para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$(a, b)\ R\ (a, b) \Leftrightarrow a.b = b.a.$$

Portanto, como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, R é reflexiva.

Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e $(a, b)\ R\ (c, d)$ então $a.d = b.c$, e portanto, $c.b = d.a$. Logo, $(c, d)\ R\ (a, b)$. Assim, R é simétrica.

Finalmente, se $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ com $(a, b)\ R\ (c, d)$ e $(c, d)\ R\ (e, f)$, então $a.d = b.c$ e $c.f = d.e$. Assim, como $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade,

$$(a.d).f = (b.c).f \Rightarrow (a.f).d = b.(c.f) \Rightarrow (a.f).d = b.(d.e) \Rightarrow (a.f).d = (b.e).d \Rightarrow a.f = b.e,$$

ou seja, $(a, b)\ R\ (e, f)$, o que prova a transitividade.

Com a relação de equivalência R, cada elemento (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tem sua classe de equivalência

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y)\ R\ (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; a.y = b.x\}.$$

Proposição 4.1.2 *Sejam a, b, c números inteiros, $b, c \neq 0$. Então:*

1. $\overline{(a, b)} = \overline{(-a, -b)}$;
2. $\overline{(a, -b)} = \overline{(-a, b)}$;
3. $\overline{(a, b)} = \overline{(a.c, b.c)}$;

4. $\overline{(0,b)} = \overline{(0,c)}$.

Prova.

1. Como $a.(-b) = b.(-a)$ então, $\overline{(a,b)} = \overline{(-a,-b)}$.

2. Como $a.b = (-b).(-a)$ então, $\overline{(a,-b)} = \overline{(-a,b)}$.

3. Como $a.b.c = b.a.c$ então, $\overline{(a,b)} = \overline{(a.c,b.c)}$;

4. Como $0.c = b.0$ então, $\overline{(0,b)} = \overline{(0,c)}$.

No que segue, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, passaremos a denotar a classe $\overline{(a,b)}$ por $\frac{a}{b}$. No caso $a = 0$ denotaremos a classe $\overline{(a,b)}$ por 0.

Exemplo 4.1.1 $\frac{1}{2} = \overline{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; y = 2.x\}$

Finalmente, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência R,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R = \{\tfrac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\},$$

isto é, o conjunto das classes de equivalência obtidas pela relação R em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Como consequência da Proposição 4.1.2 e da notação adotada temos o seguinte corolário.

Corolário 4.1.1 *Sejam a, b, c inteiros, $b, c \neq 0$. Então, $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, $\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c}$ e $\frac{0}{b} = 0$.*

Prova. Segue da Proposição 4.1.2.

4.2 OPERAÇÕES EM $\mathbb{Q}$

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Considere as seguintes operações.

1. Adição

   $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) \in \mathbb{Q} \text{ x } \mathbb{Q} \to \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d} \in \mathbb{Q}$

2. Multiplicação

   $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) \in \mathbb{Q} \text{ x } \mathbb{Q} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \in \mathbb{Q}$

Proposição 4.2.1 *A adição e a multiplicação acima estão bem definidas.*

Prova.

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{c}{d}, \frac{c_1}{d_1} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}.$$

Então, pelo Teorema 3.1.1, $(a, b)\ R\ (a_1, b_1)$ e $(c, d)\ R\ (c_1, d_1)$, e portanto, $a.b_1 = a_1.b$ e $c.d_1 = c_1.d$.

Efetuando a adição temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d} \text{ e } \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} = \frac{a_1.d_1+b_1.c_1}{b_1.d_1}.$$

Além disso,

$$b.d.(a_1.d_1 + b_1.c_1) = a_1.b.d.d_1 + c_1.d.b.b_1 = a.b_1.d.d_1 + c.d_1.b.b_1 = b_1.d_1.(a.d + b.c).$$

Logo,

$$(a.d + b.c, b.d)\ R\ (a_1.d_1 + b_1.c_1, b_1.d_1), \text{ e portanto, } \frac{a.d+b.c}{b.d} = \frac{a_1.d_1+b_1.c_1}{b_1.d_1}.$$

Efetuando a multiplicação temos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \text{ e } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1} = \frac{a_1.c_1}{b_1.d_1}.$$

Além disso,

$$(a.c).(b_1.d_1) = (a.b_1).(c.d_1) = (a_1.b).(c.d_1) = (a_1.b).(d.c_1) = (b.d).(a_1.c_1).$$

Logo,

$$(a.c, b.d)\ R\ (a_1.c_1, b_1.d_1), \text{ e portanto, } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1}.$$

Proposição 4.2.2 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ munido das operações adição e multiplicação acima é um corpo.*

Prova. No decorrer da demonstração utilizaremos as propriedades de um domínio de integridade que valem em $\mathbb{Z}$ munido da adição e multiplicação usuais.

1. Associatividade da adição

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{f}{g}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{c.g+d.f}{d.g}\right) = \frac{a.(d.g)+b.(c.g+d.f)}{b.(d.g)} = \frac{a.(d.g)+b.(c.g)+b.(d.f)}{(b.d).g} =$$

$$\frac{((a.d).g+(b.c).g)+(b.d).f}{(b.d).g} = \frac{(a.d+b.c).g+(b.d).f}{(b.d).g} = \left(\frac{a.d+b.c}{b.d}\right) + \frac{f}{g} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{f}{g}.$$

2. Comutatividade da adição

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d} = \frac{c.b+a.d}{d.b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

3. Existência do elemento neutro da adição

   Sejam $\frac{a}{b}$, $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+b.0}{b.1} = \frac{a}{b}.$$

   Logo, 0 é o elemento neutro da adição.

4. Existência do simétrico aditivo

   Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{-a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \frac{a.b+(-a.b)}{b.b} = \frac{0}{b.b} = 0.$$

   Logo, cada elemento de $\mathbb{Q}$ tem um simétrico aditivo. Utilizaremos a notação $-\frac{a}{b}$ para representar o simétrico aditivo de $\frac{a}{b}$.

5. Associatividade da multiplicação

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{f}{g} = (\frac{a.c}{b.d}) \cdot \frac{f}{g} = \frac{(a.c).f}{(b.d).g} = \frac{a.(c.f)}{b.(d.g)} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c.f}{d.g}) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g}).$$

6. Comutatividade da multiplicação

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} = \frac{c.a}{d.b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

7. Existência do elemento neutro da multiplicação

   Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}.$$

   Logo, $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ é o elemento neutro da multiplicação.

8. Existência do inverso multiplicativo

   Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \neq 0$. Então, $a \neq 0$ e $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a.b}{a.b} = \frac{1}{1}.$$

   Portanto, todo elemento de $\mathbb{Q}$ diferente de 0 tem um inverso multiplicativo.

9. Distributividade

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{f}{g}) = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c.g+d.f}{d.g}) = \frac{a.(c.g+d.f)}{b.(d.g)} = \frac{a.(c.g)+a.(d.f)}{b.(d.g)} = \frac{(a.c).g+(a.f).d}{b.(d.g)} = \frac{a.c}{b.d} + \frac{a.f}{b.g} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d}) + \frac{a}{b} \cdot (\frac{f}{g}).$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ munido das operações acima definidas é um corpo.

Definição 4.2.1 *Para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos a subtração $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ como*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d}).$$

Definição 4.2.2 *Para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ como*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d})^{-1}.$$

A proposição a seguir mostra que o conjunto dos números racionais contém uma cópia do conjunto dos números inteiros, e a partir daí, assumiremos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Proposição 4.2.3 *Sejam $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ com suas operações usuais e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1}$. Então, f é um homomorfismo de anéis injetor.*

Prova.

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$. Então,

1. $f(x + y) = \frac{x+y}{1}$ e $f(x) + f(y) = \frac{x}{1} + \frac{y}{1}$.

   Por outro lado,

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{x.1+1.y}{1.1} = \frac{x+y}{1}.$$

   Logo, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2. $f(xy) = \frac{xy}{1}$ e $f(x) \cdot f(y) = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1}$.

   Por outro lado,

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = \frac{x.y}{1.1} = \frac{xy}{1}.$$

   Logo, $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

3. Suponhamos que $f(x) = f(y)$. Então,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} \Rightarrow \overline{(x, 1)} = \overline{(y, 1)} \Rightarrow (x, 1)R(y, 1) \Rightarrow x.1 = 1.y \Rightarrow x = y.$$

   Portanto, f é um homomorfismo de anéis injetor.

4.3 $\mathbb{Q}$, UM CORPO TOTALMENTE ORDENADO

Considere $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

Definição 4.3.1 *Diremos que $\frac{a}{b}$ é não negativo se, e somente se, $0 \leq a \cdot b$, onde $\leq$ é a relação de ordem definida em $\mathbb{Z}$.*

Proposição 4.3.1 *Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ não negativos. Então $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ é não negativo.*

Prova. Por hipótese, $0 \leq a \cdot b$ e $0 \leq c \cdot d$. Daí, $ab, cd \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Por outro lado, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e

$$(ad + bc)(bd) = (ab)d^2 + b^2(cd).$$

Logo, como $d^2, b^2 \in \mathbb{N}$, temos $(ad + bc)(bd) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Assuma a seguinte relação $\leq$ em $\mathbb{Q}$:

$$\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \text{ se, e somente se, } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \text{ é não negativo.}$$

Proposição 4.3.2 *A relação acima definida é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Q}$.*

Prova.

1. Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}, \text{ pois } \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{0}{b} \text{ e } 0 \leq 0 \cdot b.$$

Portanto, a relação $\leq$ é reflexiva.

2. Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tais que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$. Então, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ e $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ são não negativos. Daí,

$$0 \leq (cb - da)(db) \text{ e } 0 \leq (ad - bc)(bd).$$

Assim, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que:

$$(cb - da)(db) = n_1 \text{ e } (ad - bc)(bd) = n_2.$$

Portanto,

$$n_1 = -n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 = 0 \Rightarrow (cb - da) = 0 \Rightarrow cb = da \Rightarrow \frac{cb}{bd} = \frac{da}{bd} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,isto é, a relação $\leq$ é antissimétrica.

3. Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ tais que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$. Então, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ e $\frac{e}{f} - \frac{c}{d}$ são não negativos, e pela Proposição 4.3.1, $\frac{e}{f} - \frac{a}{b}$ é não negativo. Logo, $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$, o que prova a transitividade.

   Portanto, $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.3.1 $\mathbb{Q}$ *é um corpo totalmente ordenado.*

Prova.

Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d \neq 0$. Então, $(ad - bc) \cdot bd \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$(ad - bc) \cdot bd \leq 0 \text{ ou } 0 \leq (ad - bc) \cdot bd.$$

Daí,

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \text{ é não negativo ou } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \text{ é não negativo.}$$

Logo, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ou $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

5 O CÍRCULO DE FRAÇÕES: UM RECURSO CONCRETO

O método educativo Montessori foi criado pela italiana Maria Tecla Artemisia Montessori (1870 - 1952), a primeira mulher a se tornar médica fisioterapeuta pela Universidade de Roma.

Educadora e pedagoga, Maria é conhecida por criar um método inovador de ensino, no qual se faz uso de materiais concretos, para representar conceitos abstratos, os quais favorecem o protagonismo da criança no seu processo de aprendizado.

No final do século XIX, as condições de vida e tratamento de crianças com deficiências internadas em instituições psiquiátricas eram terríveis, e essas crianças, em sua maioria, eram consideradas ineducáveis pela sociedade. Montessori, influenciada por Rousseau, trabalhou para transformar essas condições, e oferecer às crianças chances de um desenvolvimento mais completo e uma vida melhor.

Estudando sobre crianças com deficiências psíquicas, Montessori percebeu que essas crianças tinham um bom desenvolvimento quando recebiam uma educação que desenvolvesse a coordenação motora e respeitasse a autonomia de cada uma. Maria e seus colegas conseguiram perceber isso após a criação da Escola Ortofrênica, cuja base eram textos de antropologia pedagógica e os métodos didáticos desenvolvidos por Édouard Séguin.

Os resultados do trabalho foram tão surpreendentes, que algumas das crianças conseguiram aprender mais na Escola Ortofrênica do que as crianças sem deficiências aprendiam nas escolas regulares da época. Estimulada por isso, Montessori em 1907 teve a chance de usar os mesmos princípios para montar uma escola em São Lourenço, um bairro da periferia de Roma, e experimentar livremente novos métodos pedagógicos. A Casa das Crianças, como foi chamada essa instituição, deu à Montessori a chance de observar o comportamento de crianças com desenvolvimento típico, em liberdade, num ambiente que era reestruturado a cada nova demonstração das necessidades de desenvolvimento das crianças. Assim, aplicou seu método de estudos para as demais crianças. Sempre dizia que a metodologia que leva seu nome não estava concluída e que sua estrutura sempre permitiria adequações à cultura e à sociedade diversa.

O método é conhecido por ser muito benéfico para as crianças. Ele tem como objetivo o desenvolvimento da independência e a autoconfiança, além de estimular a criatividade, desenvolver a coordenação motora, ajudar na resolução de problemas e desenvolver um bom senso de comunidade.

A pedagogia montessoriana tem como característica principal o foco na observação, e a importância de um ambiente preparado que dê liberdade à criança onde tudo o que é importante seja acessível e assim, dando suporte ao desenvolvimento infantil de forma especialmente eficaz. Com a divulgação de novas pesquisas é perceptível que as descobertas de Maria Montessori e seus colaboradores são excelentes referências para potencializar o desenvolvimento das crianças.

Para o leitor que deseja se aprofundar no método educativo Montessori indicamos as seguintes referências: (Melo; Lima, 2022), (Oliveira, 2012) e (Salomão, 2011).

5.1 MATERIAIS MONTESSORI

Os materiais educacionais que foram criados por Maria Montessori ao longo de sua vida ficaram conhecidos como materiais Montessori. Apesar da grande variedade desses materiais, todos têm características comuns: são atraentes e bonitos; concretos, são feitos para as mãos das crianças, e é através da manipulação e repetição do seu uso que as crianças constroem o conhecimento e desenvolvem habilidades variadas.

Nesse trabalho direcionamos nossa investigação ao material montessoriano conhecido como Círculo de Frações.

5.2 UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Com a diversidade mais presente no ambiente escolar, atualmente, vivemos em uma época onde existe a necessidade de dar novos significados ao sistema educacional. É de vital importância que os profissionais da educação revejam conceitos e renovem suas posturas diante de alguns temas abordados em sala de aula. A Matemática, em particular, exige do professor muito mais do que o giz, a lousa e os livros didáticos. A natureza abstrata dos conceitos matemáticos é um desafio para docentes e discentes. Neste sentido, o uso de materiais concretos, de forma bem conduzida, pode se tornar um recurso facilitador para superar esta abstração.

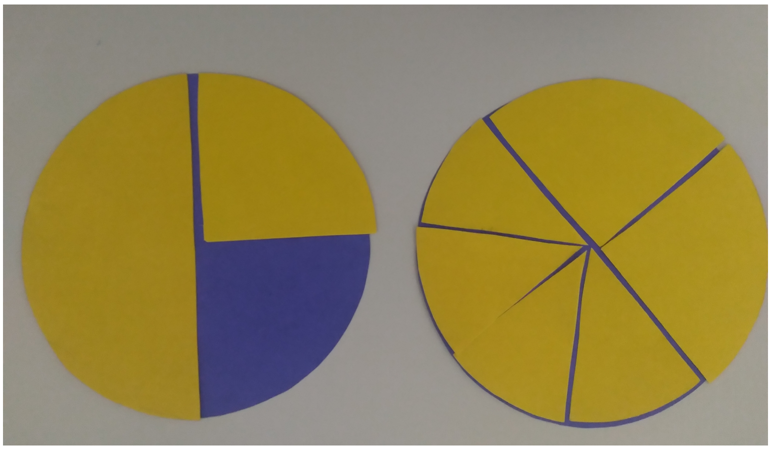
Este trabalho traz um relato de experiência com o uso dos círculos e retângulos de frações no ensino dos números racionais para alunos típicos e alunos com o transtorno do espectro autista (TEA) ou com o transtorno do déficit de atenção com hiperatividade (TDAH). Mais especificamente, abordamos o conceito do número racional, a comparação de números racionais e a adição e subtração destes através dos círculos e retângulos de frações.

5.2.1 O Círculo e o Retângulo de Frações

O círculo de frações é um material composto por 55 setores circulares que juntos formam oito círculos. Suas divisões partem do inteiro até a décima parte. Com este material podem ser abordados o conceito de números racionais, a comparação e operações entre números racionais.

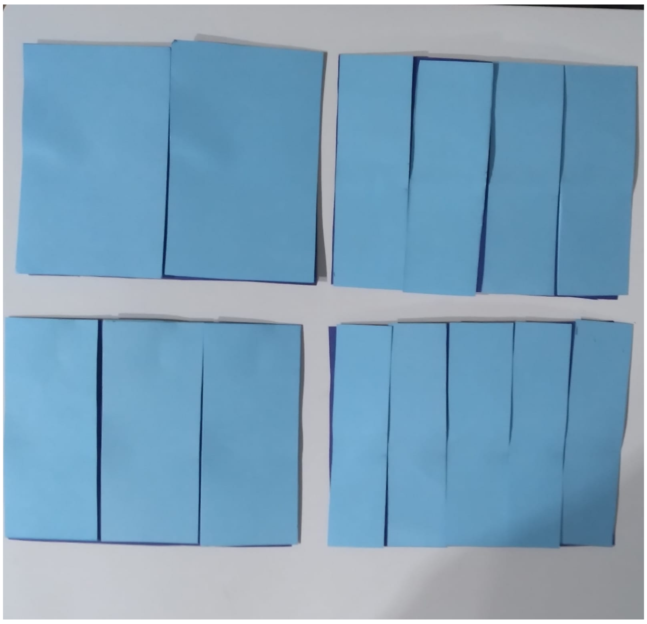
O retângulo de frações é similar ao círculo de frações apenas diferindo no formato retangular.

Figura 1 – Elementos do círculo de frações em papel color set



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

Figura 2 – Elementos do retângulo de frações em papel color set



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

5.2.2 O Ambiente Escolar

As atividades aqui relatadas foram realizadas em agosto de 2022 numa turma do 6º ano de uma escola particular, localizada na cidade de Três Rios/RJ. A turma era composta por 22 alunos, divididos em 13 meninas e 9 meninos, com faixa etária entre 11 e 12 anos. Entre eles, dois alunos com TDAH e um aluno com TEA.

5.2.3 Atividade I

Objetos de Conhecimento:

a) Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento e significados (parte/todo, quociente);

b) Comparação e ordenação de números racionais na representação fracionária, utilizando a noção de equivalência.

Habilidades da BNCC Relacionadas (Brasil, 2018):

a) EF05MA03: Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso;

b) EF05MA04: Identificar frações equivalentes. Lousa, cópias da atividade principal, cópia do Raio X (opcional), cópia das atividades complementares (opcional) lápis, lápis de cor, tesoura, cola;

c) EF05MA05: Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica;

d) EF06MA07: Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmo.

Objetivo:

Desenvolver no aluno a capacidade de:

a) Identificar e representar frações menores que a unidade associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo;

b) Identificar frações equivalentes;

c) Comparar e ordenar números racionais positivos em representações fracionárias.

Materiais Utilizados:

a) Folhas com a atividade;

b) Folha de papel A4;

c) Lápis e borracha;

d) Círculo ou retângulo de frações.

Procedimentos

Antecedendo a distribuição da atividade, foi realizada uma revisão da aula anterior sobre o conceito de frações, comparação de frações e frações equivalentes. A atividade proposta em sala de aula foi composta por cinco questões, que contemplam os conceitos revisados, sendo dividida em dois momentos.

Atividade I - Comparação e equivalência de frações

1) Compare as seguintes frações e marque a alternativa correta:

I - $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$

II - $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{2}{3}$

III- $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$

IV - $\frac{3}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

a) Apenas I e II são verdadeiras.

b) Apenas I, II e III são verdadeiras.

c) Todas as alternativas são verdadeiras.

d) Apenas I, II e IV são verdadeiras.

2) Em uma escola, $\frac{3}{4}$ dos alunos cursam o Ensino Fundamental e $\frac{4}{5}$ o Ensino Médio. Nessa escola, há mais alunos estudando no Ensino Fundamental ou Médio?

Justifique sua resposta.

3) Em uma prova de concurso, Fabrício acertou $\frac{2}{3}$ das questões, Laura acertou $\frac{1}{2}$ e Elias acertou $\frac{3}{4}$ das questões. Escreva o nome dos participantes em ordem crescente de classificação.

4) Em uma partida de basquete, Daniela realizou 3 arremessos na cesta e acertou 2. Nessa mesma partida, Claúdia arremessou 4 vezes na cesta e acertou 2.

a) Escreva uma fração para representar a quantidade de acertos em relação ao total de arremessos realizados por:
I- Daniela.
II- Cláudia.

b) Qual das frações que você escreveu no item a é maior?

c) Qual das jogadoras teve o melhor aproveitamento? Justifique.

5) Em uma ação voluntária, alguns alunos do sexto ano visitaram uma instituição de assistência social a idosos, na qual realizaram leituras de alguns livros e trocaram experiências. Para realizar essa ação, eles foram organizados em grupos de 3 alunos para cada 4 idosos.

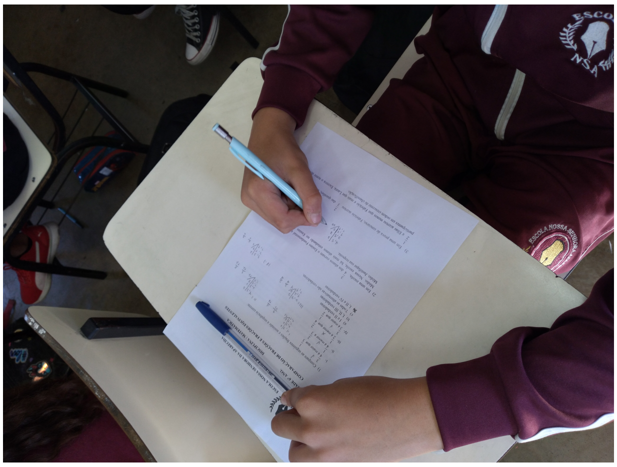
a) Escreva uma fração que represente a razão entre a quantidade de alunos e a de idosos.

b) Calcule quantos idosos há na instituição, sabendo que 30 estudantes realizaram a visita.

Primeiro Dia

Em 15 de agosto de 2022, distribui a Atividade I para os 19 alunos que estavam presentes na sala de aula e estipulei um tempo de 60 minutos para realizarem a tarefa individualmente, apenas com lápis, borracha e papel. Terminado o prazo, recolhi as resoluções.

Figura 3 – Atividade I sem o uso do material concreto



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

Resultado do Primeiro Dia

A dificuldade na compreensão do conceito de fração é comprovada mediante as resoluções da atividade entregues pelos estudantes. O primeiro exercício foi o que teve melhores resultados, 52,6% da turma respondeu a questão adequadamente. Porém, trata-se de um exercício que não exige que o aluno disserte sua resolução. O quinto exercício é uma situação problema, na qual apenas 15,7% da turma resolveu de forma correta. A tabela abaixo retrata a quantidade de alunos que acertaram os exercícios sem o uso do material concreto, lembrando que a turma totaliza 19 estudantes presentes.

Tabela 1 – Rendimento dos alunos sem o uso do material concreto

	Quantidade dos alunos que acertaram sem o uso do material concreto
Exercício 1	10
Exercício 2	8
Exercício 3	7
Exercício 4	6
Exercício 5	3

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Abaixo trazemos os rendimentos dos dois alunos com TDAH e do aluno com TEA na Atividade I sem o uso do material concreto.

Rendimento dos alunos com TDAH sem o uso do material concreto

	Aluno 1	Aluno 2
Exercício 1	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução incorreta
Exercício 2	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução incorreta
Exercício 3	apresentou uma solução incorreta	apresentou uma solução incorreta
Exercício 4	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução incorreta
Exercício 5	deixou a questão em branco	apresentou uma solução adequada

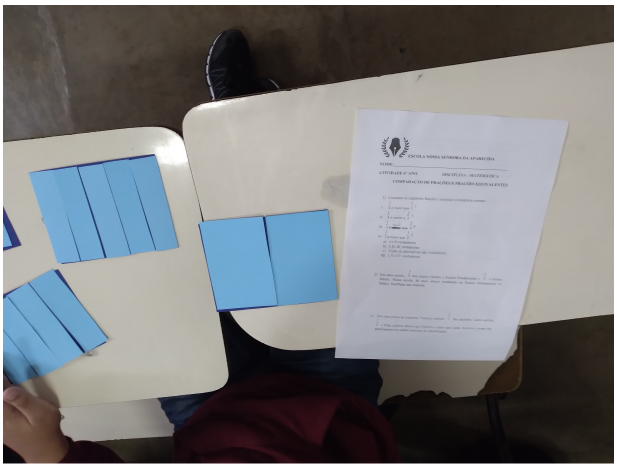
Rendimento do aluno com TEA sem o uso do material concreto

Exercício 1	apresentou uma solução adequada
Exercício 2	apresentou uma solução adequada
Exercício 3	apresentou uma solução incorreta
Exercício 4	apresentou uma solução incorreta
Exercício 5	apresentou uma solução incorreta

Segundo Dia

No dia 17 de agosto de 2022, apresentei à turma o círculo e o retângulo de frações, trazendo possibilidades concretas e estímulos multissensoriais para compreensão do conceito de fração. No seguinte, distribui a mesma Atividade I para os 20 alunos que estavam presentes na sala de aula e disponibilizei o círculo ou retângulo de frações para o auxílio na realização da tarefa. Cabe ressaltar que os estudantes não foram comunicados de que a Atividade I seria refeita neste dia. Não estipulei tempo para a conclusão da atividade, porém pude perceber que todos os alunos entregaram em até 30 minutos suas resoluções.

Figura 4 – Atividade I com o uso do retângulo de frações



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

Resultado do Segundo Dia

É perceptível a contribuição que o material concreto traz para a compreensão do estudante. No exercício 1, sobre comparação de frações, a melhora da turma foi significativa. Sobre o exercício 5, o número de alunos que resolveu a questão adequadamente representa 90% da turma.

Tabela 2 – Rendimento dos alunos com o uso do material concreto

	Quantidade dos alunos que acertaram com o uso do material concreto
Exercício 1	20
Exercício 2	19
Exercício 3	19
Exercício 4	13
Exercício 5	18

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Abaixo trazemos o rendimento dos dois alunos com TDAH e do aluno com TEA na Atividade I com o uso do material concreto.

Rendimento dos alunos com TDAH com o uso do material concreto

	Aluno 1	Aluno 2
Exercício 1	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução adequada
Exercício 2	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução adequada
Exercício 3	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução adequada
Exercício 4	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução adequada
Exercício 5	apresentou uma solução adequada	apresentou uma solução adequada

Rendimento do aluno com TEA com o uso do material concreto

Exercício 1	apresentou uma solução adequada
Exercício 2	apresentou uma solução adequada
Exercício 3	apresentou uma solução adequada
Exercício 4	apresentou uma solução adequada
Exercício 5	apresentou uma solução adequada

5.2.4 Atividade II

Objetos de Conhecimento:

a) Adição e Subtração de frações.

Habilidades da BNCC Relacionadas:

a) EF06MA10: Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Objetivo:

Desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Materiais Utilizados:

a) Folhas com a atividade;

b) Folha de papel A4;

c) Lápis (ou caneta) e borracha;

d) Círculo (ou retângulo) de frações.

Procedimentos

A Atividade II foi dividida em parte I e parte II realizadas respectivamente nos dias 31 de agosto de 2022 e 06 de outubro de 2022.

Atividade II/ parte I - Adição e Subtração de frações com denominadores iguais

1) Resolva:

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{3} =$

b) $\frac{1}{3} + \frac{3}{3} =$

c) $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$

e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$

f) $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} =$

g) $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} =$

h) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$

i) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} =$

j) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$

k) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} =$

l) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$

Atividade II/ parte II - Adição e Subtração de frações com denominadores diferentes

1) Resolva as seguintes operações:

a) $\frac{1}{2} + 1 =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

c) $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} =$

d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} =$

2) Sérgio bebeu $\frac{1}{2}$ litro de leite de manhã e $\frac{1}{4}$ à noite.

a) Que fração do litro de leite ele já bebeu?

b) Que fração representa o leite restante?

3)Pedro comeu $\frac{2}{8}$ de uma pizza, Odair comeu $\frac{1}{4}$ e Valter $\frac{1}{2}$. Responda:

a) Que fração da pizza eles já comeram?

b) Ainda restou pizza?

c) Se restou, que fração representa a parte restante?

4) Que quantidade de refresco Célia vai obter se juntar $\frac{3}{4}$ de litro de suco de laranja a:

a) $\frac{1}{8}$ de suco de maracujá?

b) $\frac{2}{8}$ de suco de tangerina?

Primeiro Dia: Aplicação da Atividade II/parte I

No dia 31 de agosto de 2022, propus à turma, com 21 alunos presentes, a primeira parte da Atividade II, composta de 12 expressões de adição e subtração de frações com denominadores iguais. Para a realização da tarefa os estudantes puderam escolher de imediato entre o círculo e o retângulo de frações.

Resultado do Primeiro Dia

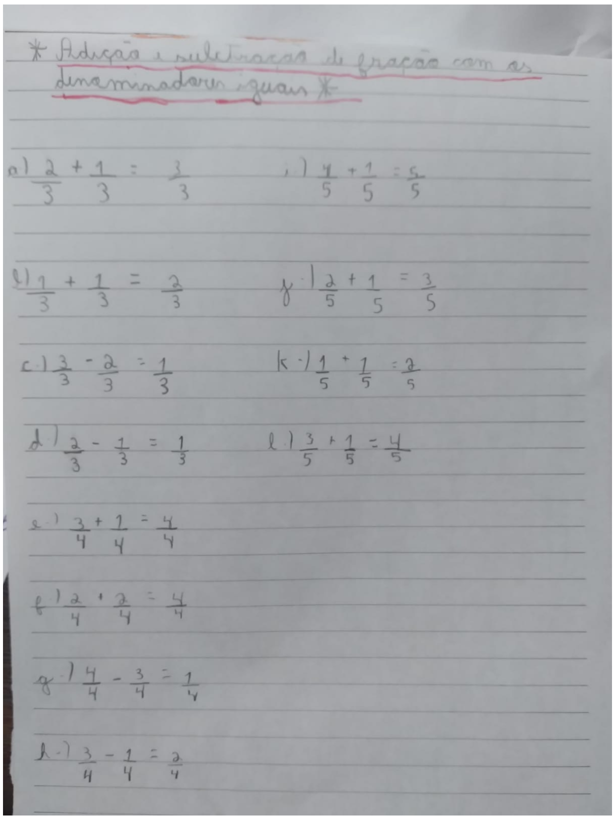
Os alunos utilizaram em média 20 minutos para conclusão da atividade e os 21 alunos presentes obtiveram 100% de acerto em suas resoluções. Os alunos com TDAH e TEA, por já terem utilizado o Círculo (ou retângulo) de frações na atividade anterior, não tiveram dificuldade em manusear o recurso e utilizá-lo na nova atividade. Esses alunos conseguiram acompanhar o restante da turma e tiveram um ótimo rendimento.

Tabela 3 – Rendimento dos alunos na atividade II/parte I com o uso do material concreto, incluindo os alunos com TDAH e TEA.

	Quantidade dos alunos que acertaram com o uso do material concreto
item a	21
item b	21
item c	21
item d	21
item e	21
item f	21
item g	21
item h	21
item i	21
item j	21
item k	21
item l	21

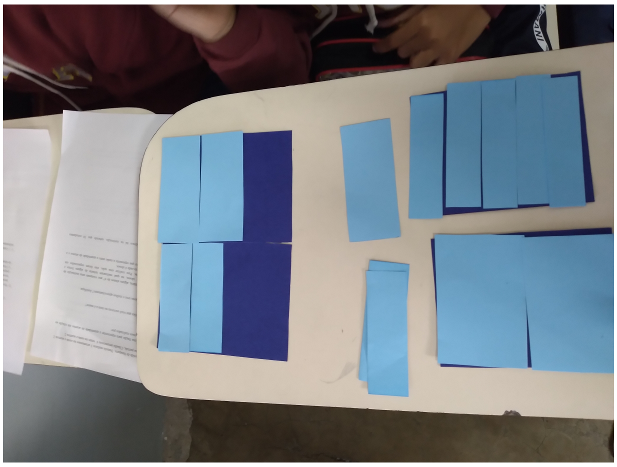
Fonte: Elaborada pela autora. (2023).

Figura 5 – Atividade II/parte I - resolução de um aluno



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

Figura 6 – Uso do retângulo de frações na Atividade II



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

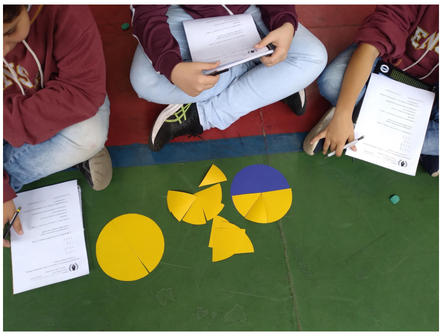
Segundo Dia: Aplicação da Atividade II/parte II

No dia 06 de outubro de 2022, foi proposta à turma, com 18 alunos presentes, a segunda parte da Atividade II, composta por 4 exercícios de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. A tarefa foi realizada individualmente e para sua realização foi disponibilizado de imediato o círculo (ou retângulo) de frações. Evitei longas apresentações e priorizei que os alunos explorassem mais o recurso. Na medida do possível, me posicionei próxima aos alunos com TDAH e TEA, oferecendo assistência individual. Porém não foi necessário, visto que estes alunos mostraram entender as explicações e instruções.

Resultado do Segundo Dia

O tempo médio utilizado para efetuar a tarefa foi de 10 minutos e o rendimento médio da turma foi de 96,3%. Os alunos com TDAH e TEA acertaram todas as questões.

Figura 7 – Atividade II - o uso do círculo de frações pelos alunos



Fonte: Imagem elaborada pela autora. (2023).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente relato mostra os resultados acerca da utilização do material concreto, Círculo de Frações (ou Retângulo de Frações), no ensino das representações fracionárias dos números racionais, como estratégia metodológica nas aulas de Matemática de uma turma do 6º ano de uma escola particular, que incluia 2 alunos com TDAH e 1 aluno com TEA.

Visto que os resultados obtidos foram satisfatórios, sugere-se a utilização desse tipo de recurso, que aborda de forma concreta a abstração proveniente da construção do corpo dos números racionais. Durante a intervenção, percebeu-se o interesse dos alunos pelas atividades propostas, o que trouxe resultados significativos para o entendimento dos conceitos abordados. Portanto, levando-se em consideração o baixo custo para confecção do material supracitado, espera-se que os resultados obtidos possam motivar outros educadores ao uso do Círculo de Frações e outros materiais concretos como facilitadores no processo de ensino e aprendizagem diante da neurodiversidade.

5.3 O TRUNFO DE FRAÇÕES

A importância de jogos no ensino de matemática.

A matemática é apresentada muitas vezes como algo difícil e inacessível. Muitos professores levam aos seus alunos a matemática como uma disciplina mecânica, direcionada como aplicação de fórmulas, sem o estímulo aos questionamentos sobre a origem dessas regras.

A quantidade de conteúdos a ser cumprida é outro fator desfavorável, que direciona a preocupação do professor em cumprir o programa e reduz sua possibilidade em efetivar uma ação pedagógica eficaz focada no aprendizado legítimo do aluno.

Por conta dos fatores citados acima e pelo grande desinteresse dos estudantes, não só em relação ao aprendizado da Matemática, mas também nas demais disciplinas, é comum encontrarmos alunos concluindo seus estudos com defasagens de formação.

> A realidade das salas de aula é fator preocupante, pois em nenhum momento são geradas situações para que o aluno seja criativo, crítico, investigativo e desafiador, explorando os seus conhecimentos prévios e descobrindo que a Matemática é um objeto de pesquisa para trabalhar com situações problema. (Melo; Lima, 2022, p.2)

Dentro desse contexto quando se fala no ensino da matemática, vemos a importância de se criar recursos que despertem o interesse do aluno, tornando a aprendizagem mais atraente e significativa.

> Segundo a Base Nacional Comum Curricular (2017), os recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de Geometria Dinâmica têm papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas (Brasil, 2018, p. 278).

Entre as possibilidades existentes, para uma prática de ensino que estimule o interesse e o raciocínio do aluno e concretize seu aprendizado, nos direcionamos ao uso de jogos no ensino da matemática.

A palavra jogo tem várias definições, entre elas: atividade cuja natureza ou finalidade é a diversão, o entreterimento. Na verdade, é extremamente difícil definir a palavra jogo, uma vez que a busca por uma única definição poderia limitar seu próprio conceito.

Os jogos em geral se caracterizam como atividades que estabelecem regras, reais para o jogador no tempo em que joga, promovendo um trabalho em grupo.

Há inúmeros tipos de jogos, entre eles vamos falar sobre os jogos pedagógicos e os de estratégia. Os jogos pedagógicos são brincadeiras que favorecem o desenvolvimento da aprendizagem do indivíduo, podendo ser lúdicos ou não. Eles são os mais diretamente associados ao aprendizado orientado. Por ser um jogo educativo eles funcionam como recursos auxiliares para o desenvolvimento de variados campos cognitivos da criança, proporcionando momentos de aprendizado mais significativos e dinâmicos, e além disso possibilita o desenvolvimento da criatividade e mantém viva a motivação do aluno.

Os jogos de estratégia são jogos focados na administração de recursos e unidades dentro do espaço do jogo para atingir um objetivo específico, valorizando a tomada de decisão e a capacidade de leitura do estado do jogo. Os principais fatores que diferem esse tipo de jogo de outros é o baixo nível de aleatoriedade envolvido e a sorte não interfere nas jogadas.

> A aplicação de jogos de estratégia nas aulas de matemática constitui-se muito mais do que um simples material instrucional e lúdico, ele permite o desenvolvimento da criatividade, da iniciativa e da intuição. Desperta o prazer pela disciplina lecionada, elemento indispensável para que ocorra aprendizagem significativa. Tais jogos possibilitam aos alunos desenvolver habilidades que os auxiliem na coleta de dados, no tratamento, na análise, na interpretação e na busca de estratégias para a resolução de problemas. (Oliveira, 2012, p.22)

Assim, a aprendizagem baseada em jogos sendo eles pedagógicos ou de estratégia, utiliza elementos característicos do jogo para trabalhar uma habilidade específica ou alcançar um resultado de aprendizagem específico de forma mais divertida e dinâmica para os alunos.

Os jogos funcionam como recursos multisensoriais que podem ser elaborados para atender equalitariamente uma turma neurodiversa, atingindo vários níveis de desenvolvimento cognitivo.

Trabalhar com jogos na aula de matemática tende a trazer uma influência significativa na aprendizagem dos alunos. O jogo favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da coordenação motora, a organização e agilidade no pensamento dedutivo, a socialização e a concentração, proporcionando de forma concreta o conhecimento e mudança na concepção de que a matemática é uma matéria difícil.

É importante que o professor planeje qual jogo irá usar de acordo com os conceitos inerentes a aula dada, assim haverá toda uma preparação e sentido para a aplicação desse recurso no contexto da sala de aula.

No entanto é preciso que esse trabalho seja executado de forma dirigida para que os alunos possam realmente alcançar o conhecimento. O professor deve ser o mediador, o incentivador, o organizador do processo de aprendizagem do aluno, não deve caminhar a frente de seus alunos, mostrando resultados prontos, mas sim oferecer atividades interessantes, partindo do real e de preferência do manipulável, facilitando a descoberta e a própria construção do saber.

Mas uma pergunta que o professor sempre acaba se fazendo é como organizar as atividades didáticas propostas que envolvam o jogo e promovam o entendimento dos conteúdos matemáticos propostos.

Pensando assim, é importante associar os jogos como uma técnica de resolução de problemas fazendo com que o aluno possa usar essa técnica tanto para resolver problemas que envolvam matemática como também a matemática para resolver certos problemas.

Assim, com o uso de jogos como auxiliadores no processo de ensino aprendizado teremos, uma aula mais dinâmica e, além disso, conseguiremos conciliar teoria e prática instigando os alunos a participarem da aula, expondo suas opiniões e interagindo em grupos.

Diante de todos os benefícios citados a respeito do uso dos jogos no ensino da matemática criamos um recurso para fixar as ideias de frações. Desenvolvemos um jogo que nomeamos por Trunfo das Frações, que tem como objetivo compreender, comparar e ordenar frações, identificando frações equivalentes.

Trata-se de um jogo composto por 108 cartas, que pode ser jogado em três níveis de dificuldade distintos, inicialmente com o auxílio do círculo de frações e posteriormente apenas com o uso de suas representações fracionárias. Esse jogo pode ser encontrado de forma mais detalhada no anexo dessa dissertação.

6 CONCLUSÃO

Presente no dia a dia, os números fracionários são essenciais para a interpretação e resolução de diversas situações rotineiras. Portanto, diante da complexidade existente na construção do corpo dos números racionais é necessário que o professor de matemática não tenha lacunas na sua formação sobre esta.

Entretanto, apesar da abstração dessa construção, é possível trabalhar na educação básica, de forma concreta, alguns conceitos diretamente relacionados a estrutura do corpo totalmente ordenado $\mathbb{Q}$.

O Círculo/Retângulo de Frações foi o material concreto que escolhemos para trabalhar esse conteúdo. Trata-se de um recurso montessoriano, multisensorial, acessível, que, inclusive, pode ser confeccionado com material de baixo custo.

Conforme consta no relato de experiência apresentado neste trabalho, foi perceptível a evolução e o rendimento dos alunos diante do uso do material concreto escolhido. Ademais, a sua eficácia também esteve presente quando aplicado a alunos com necessidades específicas (TDAH e TEA).

Levando em consideração a importância da motivação para o aprendizado e o papel do jogo no ensino da Matemática, o jogo aqui apresentado nesta dissertação, o Trunfo das Frações, é uma proposta de recurso alternativo para fixação do conteúdo (números fracionários) abordado em sala de aula, que vem para despertar o interesse do estudante, reafirmando um real aprendizado.

Podemos dizer que os nossos objetivos foram alcançados, nos deixando com a certeza de que o uso do material concreto pode contribuir para melhorar o ensino da Matemática e mudar o pensamento de muitos sobre a matemática ser abstrata e difícil de se aprender.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra - Volume 1**. 6. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2002. ISBN 978-85-244-0520-4.

MACHADO, G. M. **A construção dos números**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

MELO, C. H. D. C.; LIMA, C. N. D. A importância dos jogos no ensino de Matemática no Ensino Fundamental II. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro - RJ, v. 22, 2022. Disponível em: `https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii`.

OLIVEIRA, R. R. L. **Jogos de Estratégia: contribuições para a interpretação e resolução de problemas matemáticos**. 2012. Monografia de Mestrado – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

SALOMÃO, G. **Lar Montessori**. [S.l.: s.n.], 2011. Acessado: 2023-11-11. Disponível em: `https://larmontessori.com`.

SANTOS, Y. P. A. **Axioma da Escolha, Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo: Aplicações e Equivalências**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG.

SILVA, A. A. **O número e sua história**. 2006. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP.

SILVA, A. C. G. A. **A origem e a evolução dos números: uma breve história**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira, PE.

APÊNDICE A – Jogo: Trunfo das frações

Trunfo das Frações

OBJETIVO DO JOGO:

Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. Habilidade da BNCC relacionada: EF06MA06.

JOGADORES: de 2 a 4**.**

MATERIAL:

- 36 cartas amarelas

- 36 cartas vermelhas

- 36 cartas verdes.

REGRAS:

Esse jogo pode ser jogado em três níveis.

No nível 1, as cartas são amarelas e usamos a representação gráfica das frações.

No nível 2, as cartas são vermelhas e usamos a representação gráfica e numérica das frações.

No nível 3, as cartas são verdes e usamos a representação numérica das frações.

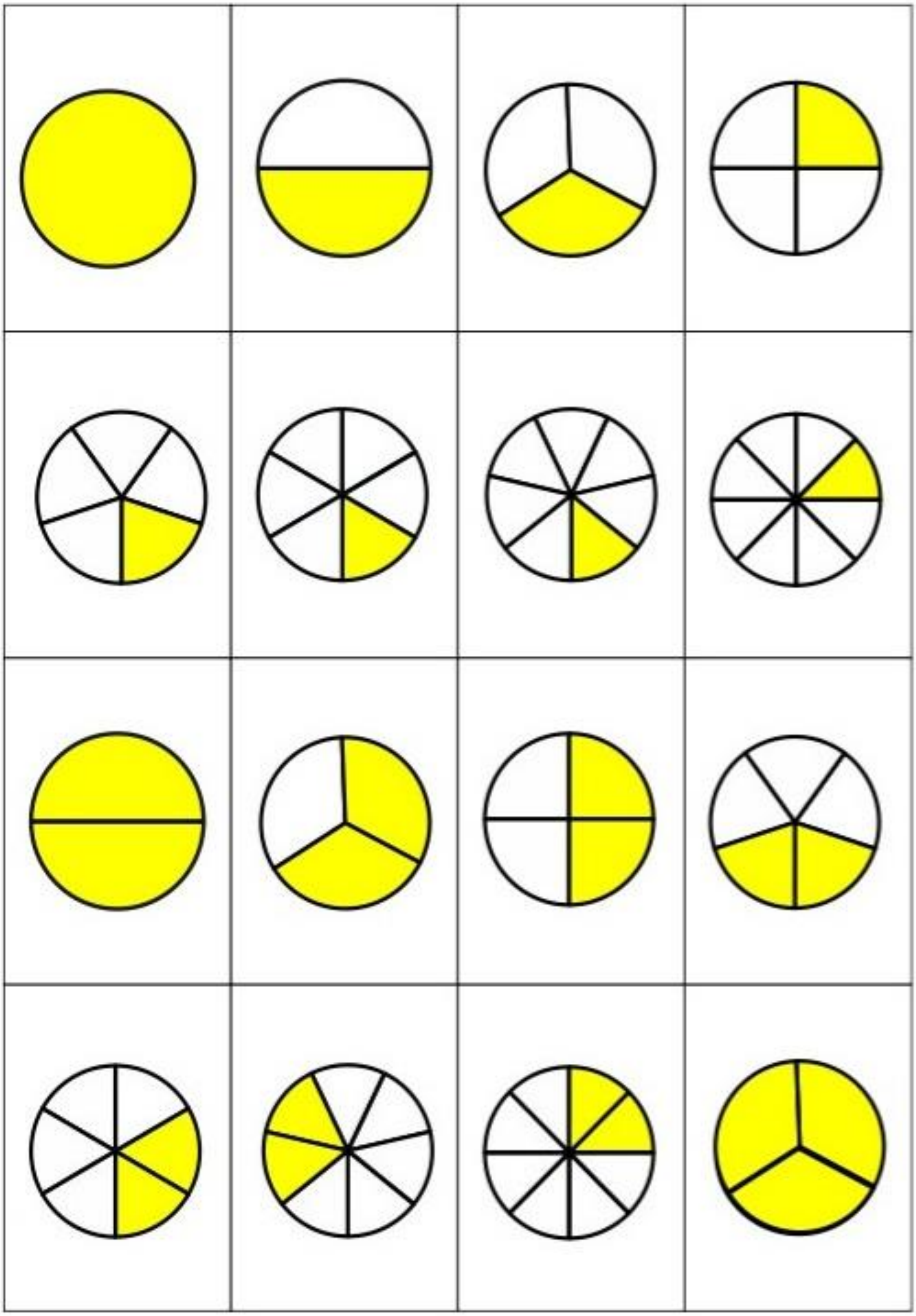
Em todos os níveis o modo de jogar é o mesmo.

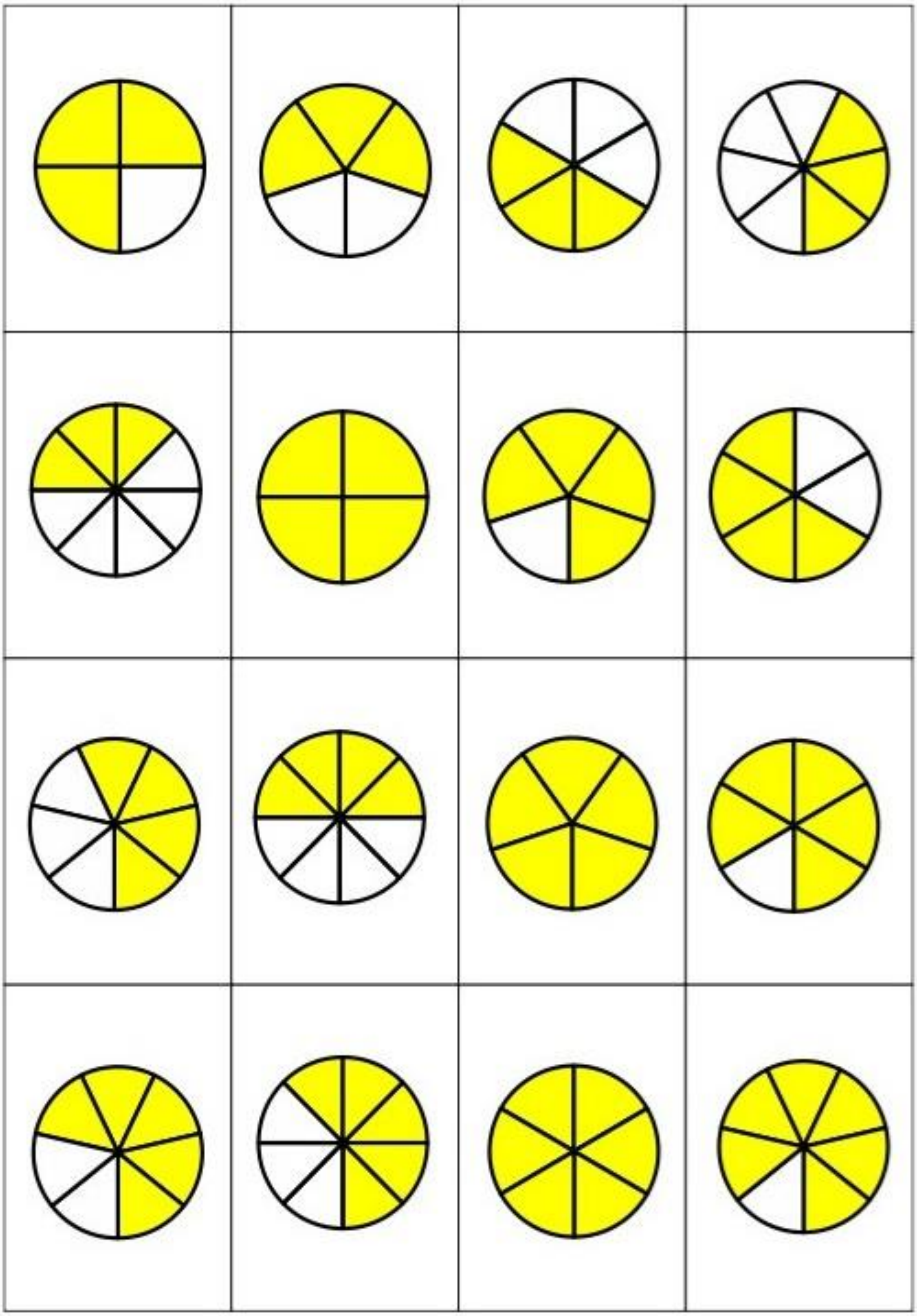
As cartas são embaralhadas e igualmente distribuídas. Cada jogador forma um monte em suas mãos de tal modo que possa ver apenas a carta de cima. Começa o jogo quem estiver à esquerda do jogador que distribuiu as cartas. O jogador que começa mostra sua carta de cima. Em seguida, os demais jogadores fazem o mesmo, cada um na sua vez.

Ganha a rodada aquele jogador que mostrou a carta com maior valor. Para se certificarem sobre o maior valor, os jogadores poderão usar o círculo de frações. O vencedor da rodada recebe as cartas dos outros jogadores, coloca atrás do seu monte de cartas e inicia a próxima rodada.

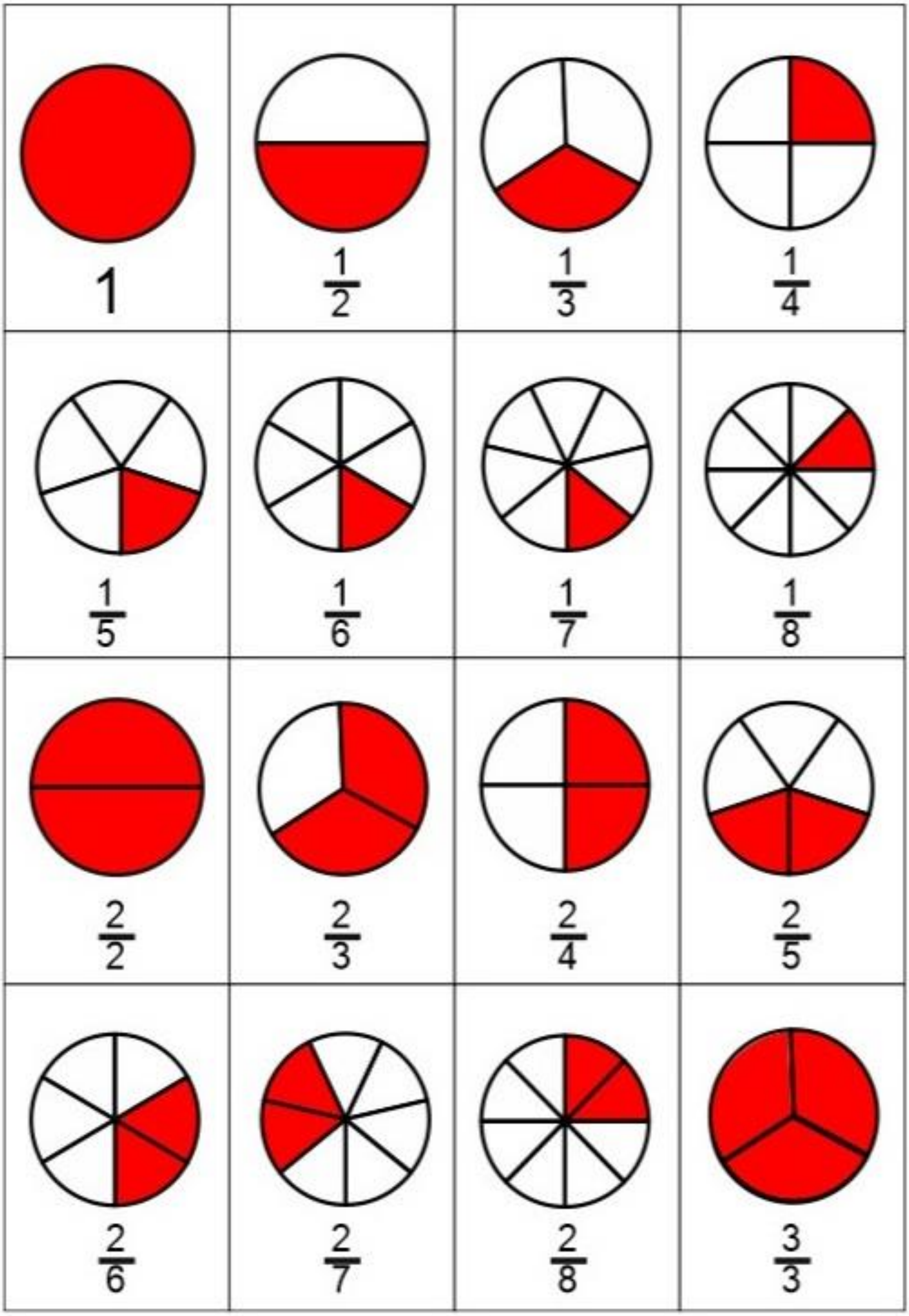
Em caso de empate, se dois ou mais jogadores mostraram a carta com maior valor, os demais deixam suas cartas na mesa, e a vitória é decidida com uma nova rodada entre os que empataram. Ganha todas as cartas da rodada quem tiver a carta com valor mais alto.

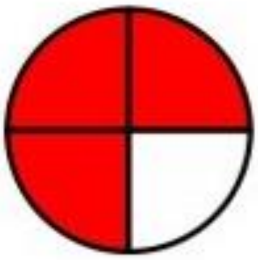
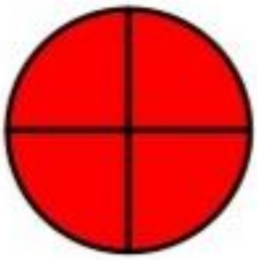
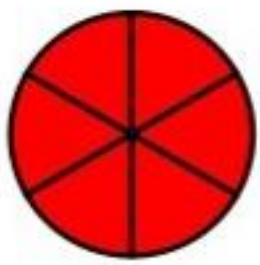
Vence o jogador que ficar com todas as cartas do baralho.

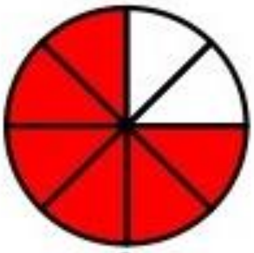
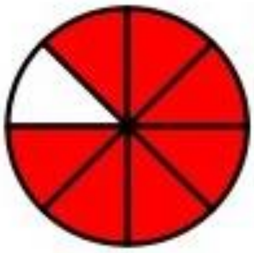
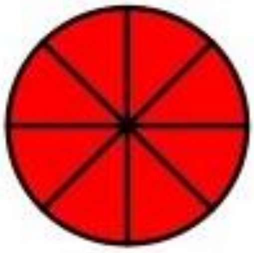





1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{2}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{4}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{6}$
$\frac{2}{7}$
$\frac{2}{8}$
$\frac{3}{3}$

			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$
			
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
			
$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$
			
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$

 $\frac{6}{8}$	 $\frac{7}{7}$	 $\frac{7}{8}$	 $\frac{8}{8}$

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$

$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$

$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$