



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**

**Yancel Orlando Soto Hernández**

**MANIPULAÇÕES VIRTUALIZADAS NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE  
FUNÇÃO LINEAR: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO  
FUNDAMENTAL**

Juiz de Fora- MG

2024

**Yancel Orlando Soto Hernández**

**MANIPULAÇÕES VIRTUALIZADAS NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE  
FUNÇÃO LINEAR: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO  
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Marco Antônio Escher

Juiz de Fora- MG

2024

**Yancel Orlando Soto Hernández**

**MANIPULAÇÕES VIRTUALIZADAS NA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE  
FUNÇÃO LINEAR: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO  
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 15 de janeiro de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Marco Antônio Escher**

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

**Prof. Dr. John Alexander Pulido Varela**

Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC)

**Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues**

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 16/01/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antônio Escher, Professor(a)**, em 16/01/2024, às 14:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **CHANG KUO RODRIGUES, Usuário Externo**, em 16/01/2024, às 15:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **John Alexander Pulido Varela, Usuário Externo**, em 30/01/2024, às 13:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-U f (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1667031** e o código CRC **6553A1E9**.

---

## AGRADECIMENTOS

Quero expressar minha profunda gratidão à Universidade Federal de Juiz de Fora pelo apoio recebido ao longo de minha trajetória acadêmica e profissional. Abriram suas portas para mim, possibilitando o seguimento do meu processo de formação no Brasil, país que amo com meu coração e com o qual me sinto totalmente identificado por todas as experiências que consegui adquirir ao longo desses anos.

Ao meu orientador, pai e amigo, Prof. Dr. Marco Antônio Escher, pela paciência e ensinamentos durante todo esse processo, seu apoio é inestimável para mim e sua orientação foi fundamental para meu crescimento e desenvolvimento acadêmico e pessoal. Aos professores membros da banca, Prof. Dr. John Alexander Pulido Varela e Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues, pelas suas contribuições feitas nesta pesquisa.

Aos professores do PPGEM, obrigado por compartilharem seus conhecimentos e me motivarem a atingir o melhor potencial. A sua dedicação deixou uma marca na minha formação profissional e pessoal.

Agradeço também aos alunos do oitavo ano dos colégios Chuniza Fámaco e João XXIII, pois mostraram-se dispostos a realizar as atividades de forma animada e ativa. Aos professores das escolas que me ajudaram na adequação dos espaços, Profa. Marcia, Prof. Juan David e Profa. Nancy.

Aos meus colegas e amigos, agradeço a colaboração oferecida neste processo. Cada um de vocês foi muito importante no meu desenvolvimento e adaptação no Brasil como um cidadão, contribuindo significativamente para minha jornada. Estou sinceramente grato por isso! Espero orgulhosamente levar os valores e conhecimentos adquiridos nesta etapa a novos horizontes.



## RESUMO

Destaca-se nesta pesquisa, abrangência de ideias em relação ao estudo e manipulação de instrumentos em espaços digitais por meio da construção de determinadas situações da matemática que levem para uma turma de estudantes de ensino fundamental à provocação, discussão e compreensão do conceito de função linear com interações e entendimentos da tecnologia em diversos ambientes virtualizados. Sendo assim, no decorrer, propõe-se apresentar revisões bibliográficas sobre percepções para o entendimento do conceito de função linear na matemática, manipulações dos recursos digitais, uso da tecnologia com materiais e uso das representações no âmbito da Educação Matemática (EM). O objetivo desta pesquisa propõe analisar o emprego de manipulações virtualizadas, uso da linguagem algébrica e representações simbólicas com aplicativos digitais em uma turma de estudantes de oitavo ano, com vistas à compreensão do conceito de função linear. O Produto Educacional (PE) foi elaborado a propósito de uma possível contribuição final aos professores para seu trabalho em sala de aula, voltado para as noções da função linear com manipulações virtualizadas apoiadas em recursos digitais seguindo uma metodologia qualitativa, organizada dentro da estrutura a seguir: formulações iniciais, aplicação de situações, categorização da informação e conclusão das execuções levantadas. Algumas das principais ideias da pesquisa tem relação com a elaboração de uma testagem inicial com um diagnóstico para a função linear, auxiliado de elementos tecnológicos com um Produto Educacional focado em atividades disponibilizadas e organizadas para serem aproveitadas com diversidade de aplicativos e recursos digitais. As conclusões desta escrita visaram identificar a relevância das concepções elaboradas na revisão bibliográfica com apreciações preliminares que serão fonte para classificação e melhoramento das manipulações e dinâmica com material digital em sala de aula e espaços síncronos ou assíncronos utilizando entornos tecnológicos.

**Palavras-chave:** Laboratório de Educação Matemática. Tecnologias digitais. Função linear. Linguagem e aprendizagem. Manipulação de objetos virtuais.

## ABSTRACT

This ongoing project, covering primary ideas in relation to the study and manipulation of instruments in digital spaces through the construction of certain mathematical situations that lead to a class of elementary school students to provoke, discuss and understand the concept of linear function with interactions and understandings of technology in a virtualized environment. Thus, in the course of this document, it is proposed to present bibliographic reviews on conceptions and perceptions for the understanding of the concept of linear function in mathematics, manipulations of digital resources, use of technology with materials and understanding of representations and learning in the field of Mathematics Education. The objective of this project proposes to analyze the use of virtualized manipulations, use of language and its representations to understand the concept of linear function. The Educational Product (EP) was designed as a possible final contribution to teachers for their work in the classroom, focused on the notions of linear function with virtualized manipulations supported by digital resources following a qualitative methodology, organized within the following structure: formulations, application of situations, categorization of information and completion of the executions raised. Some of the main ideas of the project are related to the elaboration of an initial test with a diagnosis of previous concepts for the linear function aided by technological elements with an educational product that is focused on activities available in space to study the chosen theme with diversity of applications and digital resources. The conclusions of this writing aim to identify the relevance of the conceptions elaborated in the literature review with preliminary assessments that will be a source for classification and improvement of manipulations and dynamics with digital material in the classroom and synchronous or asynchronous spaces using technological surroundings.

**Keywords:** Mathematical Education Laboratory. Digital Technologies. Linear Function. Language and learning. Virtual Objects Manipulation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Organização dos conceitos importantes da pesquisa em relação com tecnologia e matemática. .....	17
Figura 2- Exemplo do levantamento bibliográfico para coleta de informações.....	18
Figura 3- Processo a seguir para obtenção de informação. ....	25
Figura 4- Estrutura da pesquisa qualitativa na pesquisa.....	27
Figura 5- Relação dos aspectos em destaque do Referencial Teórico.....	30
Figura 6- Elementos importantes da tecnologia inseridos na EM.....	33
Figura 7- Aspectos gerais da Linguagem com a Matemática.....	35
Figura 8- Elementos relacionados no processo de articulação com a Linguagem. ....	36
Figura 9- Estruturação dos manipulativos desde seu tipo e definição.....	47
Figura 10- Sobre o tipo de manipulativo digital e suas propriedades. ....	48
Figura 11- Aspectos principais da manipulação virtual percebidos na teoria e prática com dispositivos eletrônicos.....	50
Figura 12- Concepção do Laboratório Físico e Virtual.....	53
Figura 13- Exemplo de representação de uma função linear com tabela e gráfico seguindo padrão de números. ....	57
Figura 14- Adaptação explicativa que relaciona grandezas seguindo uma proporção.....	58
Figura 15- Aspectos em destaque do fenômeno da variação e relação entre quantidades. ....	64
Figura 16- Organização da estrutura do Produto Educacional.....	65
Figura 17- Exemplo de tela de interação no ambiente virtualizado com visualização de figuras.....	68
Figura 18- Tela de apresentação de algumas atividades exploratórias elaboradas.....	69
Figura 19- Exemplo da aplicação das aulas piloto com estudantes de ensino fundamental na escola de Bogotá de forma síncrona.....	73
Figura 20- Exploração dos aplicativos por parte dos discentes no colégio Chuniza Fámaco com reunião síncrona.....	74
Figura 21- Resolução das questões propostas para os estudantes no Laboratório de Informática do colégio João XXIII. ....	75
Figura 22- Interação e discussão dos discentes no aplicativo das abelhas no Laboratório de Informática do colégio João XXIII. ....	76
Figure 23- Apresentação do cronograma para discentes e professores do colégio Chuniza Fámaco. ...	78
Figura 24- Evidencia do encontro realizado com os discentes do colégio Chuniza Fámaco. ....	79
Figure 25- Exemplificação da aula 2 com os discentes para desenvolver a atividade na plataforma <i>Desmos</i> sobre o movimento e tabulação.....	79

Figura 26- Enquete realizada aos discentes antes da aplicação das atividades sobre uso de materiais tecnológicos.....	80
Figura 27- Interações e comentários no <i>chat</i> do <i>Google Meet</i> sobre a situação da abelha por discentes do colégio Chuniza Fámaco. ....	81
Figura 28- Exemplo de representação utilizada por um discente da situação da abelha com auxílio do aplicativo. ....	82
Figura 29- Exemplo da resolução da situação proposta por parte de um discente depois de fazer manipulação sobre o aplicativo. ....	82
Figura 30- Exemplo de operação e utilização da regra de 3 para achar os quantidade de mel produzido por as abelhas. ....	83
Figura 31- Resposta dada pelos alunos que fizeram a atividade de forma <i>online</i> . ....	85
Figura 32- Questão proposta para determinar aspectos da manipulação desde a variação e associação de quantidades. ....	86
Figura 33- Adaptação do sistema de medição feito por alguns discentes em relação à comparação do ponto vermelho na tela. ....	87
Figura 34- Questão relacionada com a posição do ponto vermelho no aplicativo da abelha. ....	87
Figura 35- Percepção dos alunos da relação de abelhas e potes de mel quando fizeram leitura da pergunta inicial proposta. ....	89
Figura 36- Classificação das respostas dos alunos utilizando o aplicativo das abelhas e potes de mel trazendo elementos da manipulação virtual.....	90
Figura 37- Enquete proposta aos alunos sobre a forma de encontrar valores utilizando o aplicativo que foi mexido na aula <i>online</i> . ....	91
Figura 38- Relação de movimento da tartaruga no aplicativo Desmos. ....	92
Figura 39- Opções de grandezas e sua relação para estabelecer uma função de movimento da tartaruga no aplicativo Desmos. ....	93
Figura 40- Interação dos alunos com os botões do aplicativo <i>PhET</i> para saber a funcionalidade do comando apresentado. ....	93
Figura 41- Identificação de elementos da função linear seguindo um padrão de progressão com um valor estabelecido. ....	96
Figura 42- Interpretação por parte dos alunos sobre a forma $mx + b$ de uma função linear com valores numéricos no código programado. ....	97
Figura 43- Representações numéricas e atribuição do significado das letras com apoio da plataforma Python e DFD. ....	98
Figura 44- Respostas sobre uso dos aplicativos. ....	100
Figura 45- Concepção sobre ter um aparelho tecnológico em sala de aula de matemática.....	101

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Critérios selecionados para fazer a busca de informação.....	18
Quadro 2- Organização dos documentos da Revisão da Literatura. ....	19
Quadro 3- Análise das escritas escolhidas baseada nos critérios e relação de palavras.....	23
Quadro 4- Organização dos momentos para projeção da pesquisa. ....	26
Quadro 5- Principais concepções da EM relacionadas com a pesquisa. ....	32
Quadro 6- Descrição dos tipos de experiência identificadas.....	49
Quadro 7- Caracterização das atividades exploratórias adaptadas no campo da Educação Matemática com Tecnologia. ....	54
Quadro 8- Adaptação de modelo de representação para uma Função Linear. ....	60
Quadro 9- Concepções sugeridas para adotar e compreender ideias da Função Linear no plano escolar.....	61
Quadro 10- Descrição dos elementos principais elaborados no aplicativo Genially. ....	67
Quadro 11- Programas utilizados como fonte de apoio para o desenvolvimento de cada plano de aula.....	71
Quadro 12- Sequência das atividades e sua projeção de elaboração com discentes. ....	72
Quadro 13- Organização do curso para ser ministrado com os discentes do Colégio Chuniza Fámaco. ....	77
Quadro 14- Cronograma das aulas a serem ministradas e desenvolvidas no Colégio Chuniza Fámaco. ....	78
Quadro 15- Descrição simples dos processos e respostas elaboradas pelos discentes na atividade da abelha depois de mexer o aplicativo. ....	84
Quadro 16- Exemplo de uma das conversas que foi escutada entre os alunos quando fizeram a interação com o aplicativo.....	88
Quadro 17- Evidência de processos de manipulação dos discentes no aplicativo PhET para estabelecer relações numéricas.....	95
Quadro 18- Respostas que foram bem interessantes na atividade inicial em cada turma de estudantes. ....	99

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>PERCURSO METODOLÓGICO .....</b>	<b>25</b>
3.1	Explicação do método .....	27
3.2	Objetivo geral .....	28
3.3	Objetivos específicos .....	28
<b>4</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>30</b>
4.1	Educação Matemática (EM) .....	31
4.1.1	Concepções da Educação Matemática .....	32
4.1.2	Aprendizagem e Linguagem .....	34
4.2	Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) .....	36
4.2.1	Concepções da tecnologia .....	40
4.2.2	Tecnologia e sociedade .....	41
4.2.3	Tecnologia e técnica .....	42
4.2.4	Educação em tecnologia .....	43
4.2.5	Recursos tecnológicos digitalizados .....	44
4.3	Manipulações virtualizadas .....	46
4.3.1	Manipulação virtual e experiência .....	49
4.3.2	Laboratório em Educação Matemática .....	51
4.3.3	Estruturação de um Laboratório no campo da Educação Matemática .....	52
4.3.4	Tipologia das atividades exploratórias virtuais .....	53
4.4	Funções e pensamento algébrico na escola .....	54
4.4.1	Estudo da função na literatura .....	55
4.4.2	Conceito de função linear pura e afim .....	56
4.4.3	Grandezas discretas e contínuas .....	59
4.4.4	Função linear e representação .....	59
4.4.5	Interpretação da função linear no plano escolar .....	60
<b>5</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DE MATERIAL DAS ATIVIDADES .....</b>	<b>65</b>
5.1	Produto Educacional (PE) .....	65
5.2	Objeto Virtual de Aprendizagem (OA) .....	66
5.3	Atividades exploratórias .....	69
5.4	Aplicativos para laboratório .....	70
<b>6</b>	<b>ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES .....</b>	<b>72</b>
6.1	Planejamento inicial .....	72

6.2	Testagem inicial síncrona e assíncrona .....	73
6.3	Intervenção no Colégio de aplicação João XXIII.....	75
6.4	Módulos e Cronograma .....	77
<b>7</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO.....</b>	<b>80</b>
7.1	Resultados do projeto piloto .....	80
7.2	Análise e discussão módulo 1.....	83
7.2.1	Exemplo de classificação das respostas.....	83
7.2.2	Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma <i>online</i> .....	85
7.2.3	Sobre alguns casos a relatar nas interações físicas e virtuais .....	86
7.2.4	Tabulação de algumas respostas dadas pelos alunos na atividade da abelha .....	89
7.3	Análise e discussão módulo 2.....	91
7.3.1	Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma <i>online</i> .....	91
7.3.2	Discussões e respostas dos alunos dadas de forma <i>online</i> .....	94
7.4	Análise e discussão módulo 3.....	96
7.4.1	Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma <i>online</i> .....	96
7.4.2	Exemplo de abordagem dos alunos utilizando o aplicativo <i>Python</i> .....	98
7.5	Respostas sobre aplicativos e manipulação virtualizada .....	99
7.5.1	Valoração, experiência e opinião da utilização dos aplicativos em sala de aula	100
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>102</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>105</b>
<b>9</b>	<b>ANEXOS .....</b>	<b>110</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O processo acadêmico desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Federal de Juiz de Fora nas disciplinas, seminários e grupos de estudo cursados, com as interações prévias da graduação em Licenciatura em Matemática e Especialização em Educação em Tecnologia cursadas na Colômbia e as experiências em sala de aula levadas com discentes de ensino fundamental em diferentes escolas de Bogotá, seguindo práticas em espaços físicos e remotos durante estes últimos anos, permitiram reconhecer um interesse sobre a utilização, reavaliação e estudo de Tecnologias da Informação e Comunicação em sala de aula, focado no campo da Educação Matemática (EM).

O foco de desenvolvimento referido, vai relacionado com inquietações próximas ao conceito de função linear e utilização de dispositivos virtualizados que já tem sido um objeto de interesse prévio na formação da Especialização em Educação em Tecnologia da Universidade Distrital Francisco José de Caldas, onde discentes precisam o favorecimento da aprendizagem com material concreto em similitude a recursos, sistemas tecnológicos e disponibilidade em espaços interativos.

Este interesse de pesquisa apareceu pela necessidade de alcançar apontamentos relacionados com a função linear na aprendizagem da matemática que podem ser auxiliados por meio de ambientes virtualizados, *softwares*, programas e aplicativos moveis que distinguem aspectos de manipulações de tipo virtual em sala de aula (CUBILLO; CASTILLO; MARTÍNEZ, 2021).

Esta preocupação ressaltada, também tem sido uma peça de abordagem por outros professores e pesquisadores no campo da Educação Matemática, então, foi imprescindível a elaboração de uma Revisão da Literatura (RL) com documentação de artigos, dissertações e livros, que indicarem a importância de pesquisar a propósito de tecnologias em sala de matemática, para o reforço de conceitos, especialmente do pensamento algébrico. A pesquisa está focalizada na tecnologia e compreensão da função linear no plano escolar como um cenário de tendência contemporâneo, apoiado em recursos digitais que podem originar uma condição de sucesso no acréscimo de competências e habilidades para “o desenvolvimento de noções, estratégias e habilidades no campo de pensamento matemático” (FIORENTINI, 1994, p.13).

As estratégias e habilidades desenvolvidas com uso de recursos tecnológicos por experimentação vão auxiliar de fato para não jogar fora conhecimentos do campo da

matemática onde geralmente “existem dificuldades dos discentes em relação à compreensão do conceito de função linear e afim, problema que se faz aberto quando o professor propor atividades com registros que podem encerrar uma modelagem com aquele objeto matemático” (PEÑA, 2016, p.13, tradução própria). A formalização de conteúdos da matemática pode ser explorada com tecnologia como fonte de apoio, mobilização e permeabilidade através de experiências locais baseadas em manipulação de aplicativos educacionais.

Sendo assim, o objetivo da pesquisa está relacionado com analisar o emprego de manipulações virtualizadas, uso da linguagem algébrica e representações simbólicas com aplicativos digitais em uma turma de estudantes do ensino fundamental, com vistas à compreensão do conceito de função linear, reconhecendo algumas **características do contexto digital tecnológico para o auxílio e compreensão do conceito matemático no ensino fundamental**, e seguindo um enfoque de cunho qualitativo participativo que tem intervenções do professor para apoiar os discentes na constituição de percepções sobre o conceito relacionado apoiado na tecnologia e manipulação virtualizada.

Projitou-se do mesmo modo, uma abordagem sobre características do contexto digital e representacional em atividades virtualizadas com um exemplo na plataforma Genially com uma estruturação dos conteúdos a ser estudados (Quadro 10), aproveitando incorporações e elementos do pensamento geométrico e algébrico, baseado principalmente na noção de grandeza e movimento que está acompanhado também pelo plano curricular proposto na Colômbia (MEN, 2006; DBA, 2015).

Observa-se que nas escolas de locais nacionais e internacionais, professores e estudantes, ainda apresentam dificuldades para conseguir sucesso nas atividades associadas ao pensamento algébrico e algumas razões podem se dever principalmente à ausência de manuseio de recursos tecnológicos, informação limitada ou desinformação de material e aplicativos digitais na *internet*, auxílio insuficiente de livros de texto com suas respectivas referências e falta de conhecimento em metodologias alternativas para ser inseridas em sala de aula, cuja execução traz níveis de reprovação em estudantes.

As dificuldades atribuídas por parte dos discentes e sua relação com conhecimentos da matemática sobre função linear, estão ligadas principalmente ao entendimento de conceitos e utilização de modelos algébricos em situações e exemplos que no panorama de estudo e pesquisa, apresentam um grau de interesse por sua projeção no sucesso e compreensão de ações

da matemática no plano do pensamento dinâmico (WROBEL; ZEFERINO; CARNEIRO, 2013).

A pesquisa apresentada também tem a necessidade de propor apontamentos que, ajudem ao acréscimo do fenômeno de sucesso na compreensão de atividades da matemática através da manipulação virtualizada como forma de abordagem em situações relacionadas ao conceito de função linear num ambiente digital, relacionando “os cinco processos gerais das competências que procuram desenvolver a formulação, modelagem, comunicação e resolução de problemas para compreender fenômenos de análise matemática e pensamento algébrico” (MEN, 2006, p. 51, tradução própria).

Espera-se desenvolver pelo meio das manipulações virtuais e uso de tecnologias, competências e habilidades interpretativas do pensamento algébrico, nomeadamente a propósito da função linear e suas características, pensando em atividades exploratórias, e com materiais dinâmicos manipuláveis que ofereçam a verificação de aprendizagens com uso de dispositivos móveis como uma estratégia para apoiá-los em construções individualizadas com interações e saberes prévios utilizando a tecnologia como uma fonte principal de construção e descoberta (PIRES, 2016).

A concretização da discussão inicial está explicada no Capítulo 2 por meio da Revisão da Literatura que apresenta o seguinte conjunto de palavras-chave a seguir: Laboratório de Educação Matemática, Tecnologias digitais, Função linear, Linguagem- aprendizagem e Manipulação com objetos virtuais.

Os termos introduzidos no contexto da pesquisa, vão orientados na necessidade prévia da exploração e estudo de manipulações virtualizadas para a compreensão do conceito de função linear, como interesse central a ser resolvido.

Neste capítulo, também se apresentam esclarecimentos iniciais da temática de estudo e sua importância diante a elaboração de um esquema (veja [Quadro 3](#)) que relaciona tecnologia, manipulação virtual, aprendizagem e função linear, já que é necessária a criação de práticas que precisarem atenção no desenvolvimento de novas experiências e formas de pensamento, aproveitando recursos alternativos que no caso são de tipo digital (VYGOTSKY, 1934).

Assim sendo, propõem-se de forma detalhada, contribuições epistemológicas, didáticas, pedagógicas e tecnológicas relacionadas e classificadas para a posterior busca



referencial teórico, elaboração de atividades e caracterização de perspectivas atuais de tecnologia educacional com manipulações virtualizadas.

O Capítulo 3 faz uma explicação sobre características da pesquisa qualitativa de tipo participativa, indispensável para estabelecer padrões na coleta e análise de dados e informação seguindo interpretações, descrições, significações e reflexões na pesquisa que levarão a que “o contexto seja examinado com indícios de que nada é trivial, que tudo tem potencial para estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p.49).

Neste caso, compreender o objeto de estudo vai ligado com a tecnologia para o entendimento da função linear por meio de levantamentos prévios sobre atividades exploratórias. Seguindo esse percurso, o objetivo geral da pesquisa está focado em analisar o emprego de manipulações virtualizadas, uso da linguagem algébrica e representações simbólicas com aplicativos digitais em uma turma de estudantes do ensino fundamental, com vistas à compreensão do conceito de função linear.

A questão norteadora que está relacionada principalmente com as características do contexto digital tecnológico na representação em atividades virtualizadas para auxiliar a compreensão do conceito de função linear, utilizando diferentes aplicativos que são fonte para desenvolver práticas encaminhadas ao uso de tecnologias.

No Capítulo 4, o referencial teórico acrescenta ser um apoio das ideias propostas e achadas na RL com sua inserção, seguindo as orientações sobre tecnologia, funções lineares, manipulações virtualizadas, representações- aprendizagem e percepções desde a Educação Matemática para a organização teórica e prática das atividades exploratórias e Produto Educacional.

Apresenta-se alguns esquemas, quadros e relações conceituais, procurando esboçar as palavras-chave como uma necessidade de existência e condição no esclarecimento de práticas em sala de aula e dificuldades detectadas, relacionadas ao ensino de funções (GONÇALVES, 2015). Pelo meio dessa identificação, se procura fortalecer aqueles conceitos da matemática escolar seguindo um ambiente de formação experimental e interativo tecnológico na aula de matemática (RIBEIRO, 2019).

Nesse referencial teórico, esta abordagem segue um estudo sobre Educação Matemática que vai trazendo outros tópicos em destaque como: Tecnologia da Informação e

Comunicação, Manipulação Virtualizada e Função Linear que são eixos principais nos apontamentos da pesquisa desenvolvida.

É importante esclarecer que no cenário geral estabelecido no Referencial Teórico, a tecnologia pode ser entendida como uma composição- extensão das atividades no cotidiano e que aquela concepção será um foco na declaração de relações manipulativas dos recursos, conduzidas à construção de saberes e abstração de modelos gráficos, numéricos e textuais, abordados e explorados no percorrer com classificações e tipologias para aplicação e validação estrutural de saberes.

O Produto Educacional descrito no Capítulo 5, está sendo pensado para ser desenvolvido com estudantes de ensino fundamental através de provocações iniciais, que permitirão na aplicação, analisar e estruturar atividades seguindo o modelo do Laboratório de Educação Matemática trazendo como referencial LaPEM-v<sup>1</sup>, refletindo sobre questões prévias como a construção de atividades exploratórias para interagir com discentes, aproveitando recursos eletrônicos, *designs* e *layouts* digitais que apoiam processos de aprendizagem.

O Capítulo 6 tem como princípio descrever a organização dos módulos e atividades propostas para ser aplicadas com os discentes que seriam elementos da análise de dados, projeção de interpretações e tendências adotadas aos objetivos e questão de pesquisa proposta, encaminhando-o às experiências, evoluções e contribuições dos materiais disponibilizados descritos no Capítulo 7 como parte do encerramento e reflexão da pesquisa.

As considerações finais estão focadas na importância da utilização de recursos tecnológicos na aprendizagem e compreensão de um conceito da matemática seguindo uma sequência de simulações em aplicativos que induzam transformações de estruturas sobre a função linear e sua utilização em projetos, espaços e temáticas de estudo individuais ou coletivas.

---

<sup>1</sup> LaPEM-v é o Laboratório de Pesquisa e Educação Matemática Virtual, desenvolvido pela professora Beatriz Oliveira Dos Santos, sendo possível explorar materiais virtualmente manipuláveis e jogos que combinam aspectos da tecnologia e ensino de Matemática. Para acessar ao LaPEM-v [clique aqui](#).

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

A Revisão Sistemática da Literatura (RSL) possui elementos para a elaboração de critérios e sistematização, baseados na estrutura proposta por Kitchenham (2004). Nesta estrutura, existe uma etapa de planejamento e realização que tem afinidade com a descrição e diagnóstico de dados ante uma comprovação, estudo e síntese dos documentos.

Sendo assim, há uma classificação adotando um nível de relevância por: idioma, palavras relacionadas, manipulação tecnológica com matemática, percepção da função e uso de *software* já que segundo Ballesteros e outros (2022), é importante o desenvolvimento e integração de dispositivos tecnológicos que estejam associados aos rendimentos dos discentes sobre a temática de estudo na área de matemática escolhida.

Propõe-se fazer uma sistematização inicial, com busca de referenciais elementares focados na pesquisa e norteando-a em relação ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), Manipulações virtualizadas com recursos digitais e estudo da função linear no plano da Educação Matemática.

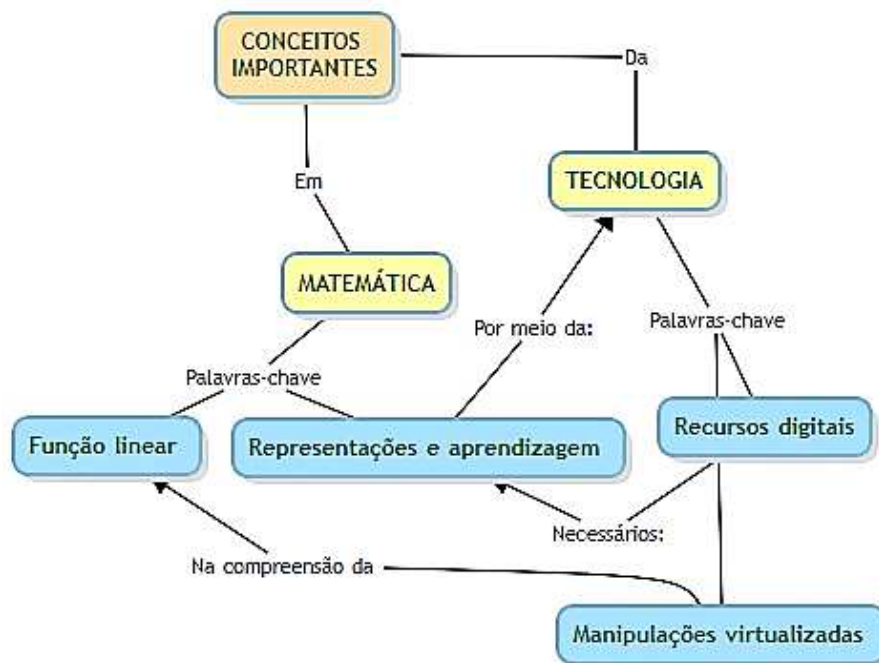
Por meio da procura de dissertações, teses e artigos, esperam-se construir argumentos teóricos para a compreensão de fenômenos com maior profundidade em acedência de conceitos que serão importantes para produzir material educacional e referencial teórico, que garantam obtenções desde os objetivos de estudos. Neste processo, é importante uma análise de informações e documentos seguindo métodos de procedência e comparações (veja Quadro 2) que vão dar suporte e comunicarão significados e relações.

A RL é percebida como uma análise em relação à “categorização e integração de decorrências de pesquisas sobre a temática de estudo da área possibilitando a organização de elementos” (CUBILLO; CASTILLO; MARTÍNEZ, 2021, p.21). A organização se relaciona com tecnologia e sua influência no ensino e aprendizagem de conceitos associados à função linear, diante a utilização de manipulações virtualizadas como fonte de suporte nos processos de aprendizado.

Na Figura 1, os conceitos estão organizados e relacionados com as palavras-chave, projetando a RL na incorporação e busca em bases de dados reconhecidas destes termos onde surgem interações necessárias para associação e diferenciação com conexões de generalização à função linear com tecnologia, definição e classificação que segundo Castro e Rodrigues

(2022) podem ser de vários tipos seguindo uma linha de evolução, apontamento histórico e percepção da generalização de padrões.

Figura 1- Organização dos conceitos importantes da pesquisa em relação com tecnologia e matemática.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O percurso da RSL tem intencionalidade de identificar critérios para a construção de registros e contribuições anteriormente elaboradas, que possam levar a possíveis levantamentos sobre o que fazer e como aperfeiçoar algumas práticas com estudantes de ensino fundamental (BALDINO, 1991).

As práticas devem estar relacionadas diretamente com situações e incorporação de aplicativos em espaços digitais, que permitam compreensão de ideias da matemática desde estudos, manipulações e produtos elaborados com auxílio da tecnologia.

No contexto da Educação Matemática (EM), existe uma percepção por inserir saberes em ambientes educacionais, avaliados em uma realidade com conteúdo que não sejam inúteis e possuam aplicações práticas (BICUDO; PAULO, 2011). Sendo assim, aquele contexto deveria levar “acompanhamento e a avaliação de atividades de produção de conhecimento matemático com pesquisas que indaguem sobre as interações discursivas e a aprendizagem matemática, modo pelo qual a avaliação em matemática defende a formação do estudante” (BICUDO; PAULO, 2011, p.281).

A formação deverá oferecer, por exemplo, indicativos de pertinência, representatividade e exaustividade, adotando ações específicas em concordância com a documentação e seleção da bibliografia. Porém, tais indicativos precisam ser esquematizados com critérios dispostos em categorização inicial para a classificação de documentos (veja Quadro 1).

Quadro 1- Critérios selecionados para fazer a busca de informação.

Número	Descrição do critério
C1	Documentos com data de publicação dos últimos 12 anos em diferentes bases de dados procuradas.
C2	Integração de duas palavras-chave das inseridas no processo de estudo levadas ao plano de aprendizagem.
C3	As variáveis principais têm que estar encaminhadas ao sucesso de atividades matemáticas utilizando recursos digitais ou manipulação virtualizada em ensino fundamental ou médio.
C4	Trabalhos que estejam relacionados com as palavras manipulação virtualizada e matemática em seu título e desenvolvimento.
C5	É descartado o estudo de artigos, dissertações, livros eletrônicos e documentos que estejam orientados à formação de professores.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta revisão bibliográfica contém como ponto de partida, uma exploração e estudo primário em plataformas reconhecidas pela comunidade acadêmica como Google Acadêmico, *Semantic Scholar*, *Scopus* e *Redalyc*. As plataformas referidas foram selecionadas por sua relevância na pesquisa e aproximação teórica sobre as manipulações virtualizadas em sala de aula, apontando à compreensão do conceito de função linear com documentos datados desde 2012 até 2020 com uma coleta baseada seguindo o modelo de Melo (2019) sobre levantamento bibliográfico (Figura 2).

Figura 2- Exemplo do levantamento bibliográfico para coleta de informações.

*“Appareils Mobiles” OR “Tablet” OR “Tablette” OR “Smartphone” OR “Celular” OR “Cell phone” OR “Téléphone portable” OR “Téléphone” OR “Phone” OR “Telefone”) AND (“Matemática” OR “Mathematics” OR “Mathématiques”) AND (“Classificação” OR “Ratings” OR “Classification” OR “apps” OR “aplicativos”).*

Fonte: Melo (2019, p.3).

Do levantamento bibliográfico seguindo a *string* de busca com as palavras (**“Virtual Manipulation” “Linear Funtions” “Representations and Learning” “Digital Technologies”**), foram identificados vinte (20) projetos ligados aos cinco critérios determinados em relação a: data de publicação, palavras-chave, variáveis, manipulação virtualizada com matemática e ensino fundamental (veja Quadro 2).

Os documentos estão organizados no Quadro 2 por número, autor (es), ano de publicação, título e tipo de trabalho apresentado. A análise referencial contém artigos de pesquisa, dissertações de pós-graduação, artigos científicos e comunicações de anais de eventos.

Quadro 2- Organização dos documentos da Revisão da Literatura.

ID	Autor(es)	Título	Tipo de trabalho
1	García (2012)	Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal	<u>Dissertação</u>
2	Petit (2013)	Comparing Concrete to Virtual Manipulatives in Mathematics Education	<u>Artigo</u>
3	Ciriquián (2014)	Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de funciones gráficas	<u>Dissertação</u>
4	Bondurant (2015)	Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible	<u>Artigo</u>
5	Sánchez (2015)	Estrategia para el aprendizaje de las funciones reales con la plataforma Moodle	<u>Artigo</u>
6	Peña (2016)	Conceptualización de la función lineal y afín, una experiencia de aula	<u>Dissertação</u>
7	Pires (2016)	As influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas estratégias de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral	<u>Dissertação</u>
8	Romanello e Maltempi (2016)	A utilização do Smartphone no ensino de função: A visão dos alunos	<u>Comunicação científica</u>
9	Sátiro (2016)	Mapeamento do uso de tecnologias digitais no ensino de matemática nas escolas municipais de Juiz de Fora- MG e Três Rios- RJ	<u>Dissertação</u>
10	Becerra, Bermúdez e Ochoa (2018)	Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones	<u>Artigo</u>
11	Contreras (2018)	La construcción del concepto de función lineal, utilizando herramientas tecnológicas, en la escuela secundaria	<u>Dissertação</u>
12	Duarte (2018)	Resolución de problemas con la función lineal a través de una secuencia didáctica utilizando el programa GeoGebra	<u>Dissertação</u>
13	Gutiérrez e Llinares (2018)	Metodologías didácticas para la enseñanza de funciones en educación secundaria	<u>Artigo</u>
14	Lucero e Naranjo (2018)	El <i>software</i> GeoGebra como recurso para la enseñanza de la función lineal: una propuesta didáctica	<u>Artigo</u>
15	Ordóñez (2018)	Uso del programa GeoGebra para interpretar algunos modelos matemáticos para facilitar la apropiación del concepto de función lineal	<u>Dissertação</u>
16	Silva (2018)	Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem: O uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração	<u>Dissertação</u>
17	Amorim, Souza, Lourenço e Medeiros (2019)	Ensino de funções definidas por mais de uma sentença: uma experiência com o <i>software</i> GeoGebra	<u>Comunicação científica</u>
18	Basniak (2020)	A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções	<u>Artigo</u>
19	Campos (2020)	Salas ambiente: Os laboratórios de ensino da matemática	<u>Artigo</u>
20	Hernández (2020)	Elaboración de un AVA para la enseñanza del concepto de función a partir de situaciones problema	<u>Dissertação</u>

Fonte– Elaborado pelo autor

Desta classificação, *a priori*, pode se dizer que os vinte (20) documentos organizados, possuem uma relação com o termo tecnologia de forma geral sendo abordada e relevante já que:

[...] sabe-se que as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) são grandes aliadas nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente, por permitir abordagens que extrapolam os limites alcançados pelas tecnologias tradicionais (lousa, giz, canetões, lápis e papel). Ou seja, a inserção das TDIC no ensino da Matemática propicia novas formas de percepção a determinados conteúdos que não poderiam ser desenvolvidos apenas com as tradicionais tecnologias (CASTRO, 2016, p.2).

Os documentos conceituados em sua abordagem possuem processos com tecnologias que tentam inserir relações com aprendizagem da matemática, diante cenários de variação, percepção e conceituação que são levados ao plano de sala de aula como uma fonte de aliança e mediação nos procedimentos e atuações dos discentes.

Identificou-se na utilização de tecnologia como necessidade que o GeoGebra<sup>2</sup> é uma tendência de apoio no ensino de conceitos da matemática apontados para álgebra e cálculo, ocupando uma parte importante dos artigos e dissertações selecionadas pela integração, interface do usuário amigável e facilidade no seu emprego com sucesso nas experiências prévias sobre abstração de saberes (BALLESTEROS, et al., 2022).

O Quadro 2, com os documentos selecionados, foi analisado seguindo os critérios organizados do Quadro 1 através de um *design de análise* baseado na estruturação de Leonardini e Tovar (2020), este *design* permitiu ressaltar cada uma das informações obtidas em relação a aspectos positivos para conceber uma abordagem de um conceito da matemática (função linear) com auxílio da tecnologia em suas formas de utilização, apresentação e mediação.

Primeiramente, se assinou um ID ou número de identificação para cada documento estudado, depois foram organizadas as colunas por: idioma, manipulação- função linear,

---

<sup>2</sup>GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter que é de uso livre com um processador geométrico e algébrico que auxilia o traçado de diversas construções e representações gráficas. Para acessar ao aplicativo [clique aqui](#).

palavras, função linear- tecnologia, definição de função e finalmente utilização do programa GeoGebra.

Esta estrutura foi selecionada já que permite analisar elementos dos documentos através de uma composição simples e fácil captação para sua compreensão. Além disso, foram organizados sobre cinco colunas que discorrem relações a serem consideradas na pesquisa.

Sendo assim, a coluna do idioma foi proposta porque alguns documentos encontrados estão no idioma espanhol e inglês. Existe uma diferenciação do idioma nomeada em sua respectiva com a letra inicial do idioma para saber a língua na qual foi escrito, a razão principal desta coluna, está na facilidade para documentar no idioma espanhol e ampliação da perspectiva atual sobre a consideração da temática de estudo.

A coluna de manipulação- função linear faz referência às relações que cada documento estabelece sobre estes termos, já que são importantes na percepção de princípios e aproximações para manipulação virtualizada com o conceito de estudo em sala de aula, porém sem afastar a tecnologia com recursos digitalizados para a aprendizagem do conceito matemático de interesse.

Fala-se em alguns documentos que a relação entre função linear e manipulação virtualizada é parcial, isso quer dizer que existem elementos comuns, sem serem diretamente da função linear ou que quando se fala da função linear, essa abordagem tecnológica se faz com recursos digitalizados como fonte de apoio para essas atividades sem pensar no papel de movimentar, clicar ou explorar os aplicativos selecionados.

O termo “palavras” que aparece na quarta coluna faz referência a cada conceito estudando em cada documento. Para estabelecer a inclusão dessa palavra como destaque, optou-se por sinalizar com um X a utilização e relação desse conceito em questão para o documento estudado. As palavras foram abreviadas para facilitar sua leitura em TD (Tecnologia), FL (Função linear), MV (Manipulação virtual) e RA (Representações e aprendizagem).

A coluna que faz referência a função linear e tecnologia apresenta articulação destes termos em cada documento revisado. Ao estabelecer uma relação que diz parcialmente, existe uma utilização de recursos tecnológicos focados em qualquer tipo de funções sem fazer uma ênfase no processo da linearidade.

Em relação à coluna de definição, a referência vai ser o tipo de concepção de função linear e sua abordagem. N/R significa que não existe alguma aplicação da função nesse



trabalho; estrutural faz referência a uma definição formal sobre uma função, sem estabelecer condições da realidade ou afinidade entre representações, operacional quando a função linear está focada em uma equação e resolução de uma incógnita em grau 1 e, finalmente, histórica quando a abordagem da função se constitui desde sua organização e transformações através do tempo.

Para encerrar, a coluna GeoGebra tem duas partes que identificam ou não a sua utilização em cada documento analisado, quando o programa é utilizado como fonte de apoio vai se concordar com um OK, quando o programa não é utilizado ou se emprega outro tipo de aplicativo, simplesmente se põe a palavra “não se faz” como correspondência a sua não utilização no desenvolvimento do documento em questão.

A revisão e organização adotando o modelo de quadro comparativo, permitiu elucidar descrições em relação à utilização de funções lineares que nem sempre estiveram como um saber individual porquanto tinham abordagem com funções de vários tipos. Alguns exemplos são apresentados nas escritas de Sánchez (2015) e Basniak (2020), obtendo uma abordagem com utilização de tecnologias digitais.

Igualmente, a síntese sobre o conceito de função está focada principalmente na sua estruturação como conceito, sem exploração de aplicativos e discussões (principalmente com discentes) sobre sua constituição no campo do conhecimento da matemática, importante para o convênio de processos ligados ao pensamento algébrico e sua constituição em outros saberes posteriores no desenvolvimento de relações da matemática escolar.

Na organização do Quadro 2 existe também diferentes ligações que são imprescindíveis na estruturação e diferenciação sobre termos, como manipulação virtualizada e tecnologia ao momento de serem abordadas com um conceito da matemática escolar e aprendizagem, que vão permitir discernir ao momento de serem utilizadas nas diversas atividades e construção do Referencial Teórico.

Dos documentos explorados e selecionados seguindo os critérios propostos, abrangem-se elementos tecnológicos como apoio diante utilização de sequências didáticas, ambientes virtuais de aprendizagem, atividades em sala de aula e experiência com os aplicativos sem chegarem a serem estudados fenômenos de proveito, vantagem e manipulação por parte dos discentes e suas sensações com cutucar com o computador para desenvolver um conceito da matemática (veja coluna 3 do Quadro 3).

Na imagem do Quadro 3, deixa-se tipo uma comparação com elementos importantes dos documentos estudados do Quadro 2, seguindo uma série de descritores, organização e estruturação que foi explicitada em parágrafos anteriores.

Quadro 3- Análise das escritas escolhidas baseada nos critérios e relação de palavras.

ID	Idioma	Manipulação e função linear	Palavras				Função linear e Tecnologia	Definição	Software GeoGebra
			TD	FL	MV	RA			
1	P	Parcial	X	X	X		Parcialmente	Estrutural	Não se faz
2	E	Não		X		X	Não	Estrutural	Não se faz
3	I	Não	X		X		Não	N/R	Não se faz
4	E	Não		X		X	Sim	Operacional	OK
5	E	Não	X	X		X	Parcialmente	Semiestrutural	Não se faz
6	E	Não		X		X	Não	Histórica	Não se faz
7	P	Não	X			X	Não	N/R	Não se faz
8	P	Não	X		X		Não	N/R	Não se faz
9	P	Parcial	X	X	X		Parcialmente	Operacional	Não se faz
10	E	Não		X		X	Não	Operacional	Não se faz
11	E	Não	X	X			Sim	Estrutural	Não se faz
12	E	Não	X	X		X	Sim	Estrutural	OK
13	E	Não	X	X		X	Parcialmente	Estrutural	Não se faz
14	E	Não	X	X			Sim	Operacional	OK
15	E	Não	X	X		X	Parcialmente	Operacional	OK
16	P	Não	X		X	X	Não	N/R	OK
17	P	Não	X	X			Parcialmente	Estrutural	OK
18	P	Não	X	X			Parcialmente	Histórica	Não se faz
19	P	Não	X	X		X	Parcialmente	Operacional	OK
20	E	Não	X	X			Parcialmente	Estrutural	OK
TD= Tecnologia		FL= Função Linear	MV=Manipulação Virtual				RA= Representações e aprendizagem		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que, a relação entre termos ainda não é aperfeiçoada, já que; os documentos acabam por incluírem de forma parcial ou não incluírem alguma terminologia da revisão, porque as escritas não possuem as quatro palavras de forma conjunta, como pode ser ressaltado na coluna número quatro.

Também, pode-se conceber que os documentos com ID 1 e 9, fizeram abordagem parciais sobre as manipulações virtualizadas, explicando-o com cálculo diferencial e estudo de gráficas, sem aproximar-se a função linear ou aprendizagem e justificando que a relação procurada não termina sendo completa, já que a maioria dos documentos ainda não tem ênfase sobre a manipulação como fonte de preocupação, discussão e compreensão, no campo da tecnologia e matemática nos procedimentos em sala de aula com manuseio de aplicativos e sua constituição.

Observa-se que, só quatro documentos acabaram por relacionar tecnologia com função linear para a pesquisa (veja coluna 5 do Quadro 3), estabelecendo cada aplicativo como fonte de apoio e atribuindo para a tecnologia um mecanismo de artefato, sem uma discussão sobre a

sua potencialidade em sala de aula para auxiliar processos de manipulação digitalizada. A maioria dos documentos nessa coluna contém uma relação parcial, pois as abordagens foram situadas com funções e aplicações do cálculo diferencial e integral.

Somente o documento com ID 16 conseguiu incluir a tecnologia com as manipulações num contexto de aprendizado, sem obter sucesso na temática de estudo porque está relacionada com a estrutura dos números inteiros, mas tem essa integração de simulações e aplicativos no contexto de interação e movimentação com intenção de estudar cada elemento do aplicativo em questão (veja Quadro 2).

Em relação ao conceito matemático e seu entendimento na perspectiva epistemológica, sete documentos tiveram uma visão estrutural das funções, atribuindo um nível relevante no seu desenvolvimento, seguindo uma estrutura variacional que tem como objetivo principal a compressão de relação entre grandezas.

Do mesmo modo, cinco documentos tiveram um enfoque operacional que está encaminhado na representação algébrica, diante um conjunto de números e equações; algumas relações estão focalizadas na obtenção de uma resposta específica, sem oferecer um grau de importância na movimentação, articulação geométrica e relação entre grandezas.

Finalmente, um documento oferece uma definição abordando ambas visões (KIERAN; FILLOY, 1989). Este tipo de visão proporciona uma perspectiva mais abrangente porque faz uma abordagem da função pensando nos tópicos de numeração, medição, visualização geométrica e álgebra que existe em cada conjunto de dados estudados.

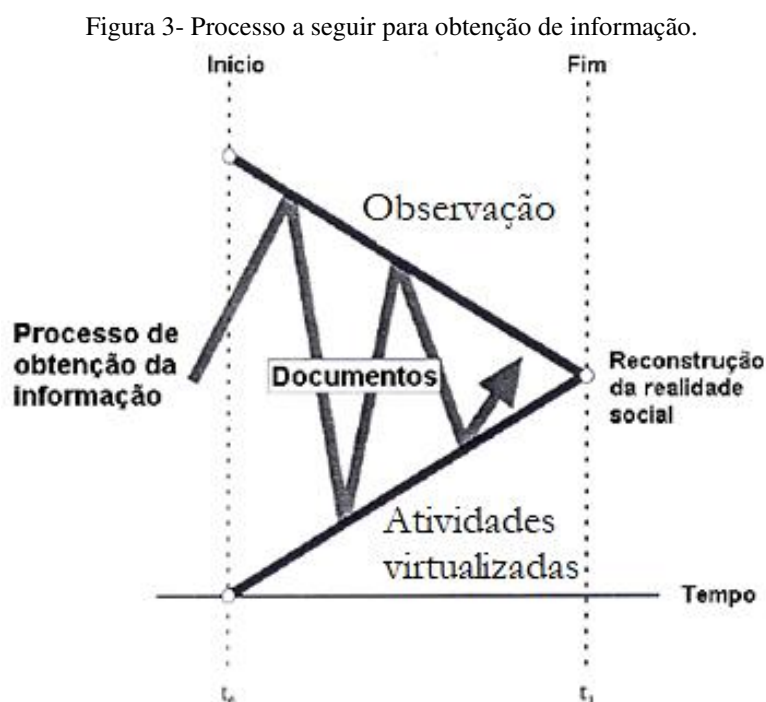
No capítulo a seguir, se irá apresentar a abordagem metodológica da pesquisa tentando utilizar como largada aspectos da Revisão Sistemática de Literatura com caracterizações de propriedades e descrições para desenvolver aspectos práticos dos manipulativos, uso de aplicativos através dos objetivos, questão de pesquisa e aplicação de um conjunto atividades que permitirão comprovar na execução a potencialidade que podem oferecer os aplicativos de forma virtualizada para o estudo de padrões e relações no plano escolar.

### 3 PERCURSO METODOLÓGICO

Após de considerar elementos dos documentos da RSL, optou-se por propor como metodologia de abordagem a pesquisa qualitativa, já que aceita nas suas coletas, utilização de materiais como questionários, fotografias e enquetes. No campo da Educação Matemática, esta metodologia tem sido aproveitada por seu caráter de auxílio na formação de pessoal, flexibilidade na sua composição e foco de descrição na realidade (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

Esta fonte de pesquisa está relacionada com aspectos educativos pelas atitudes e comportamentos a serem analisados num contexto baseado em: conceitos, pensamentos, investigação, fenomenologia e interações num ambiente natural (BOGDAN; BIKLEN, 2013).

O processo da análise dos aspectos já mencionados segue uma estrutura para obtenção da informação, observação e reconstrução, apoiado atividades virtuais como se apresenta na estrutura da Figura 3.



Fonte: Igea et al., (1995).

No entanto, a reconstrução da realidade desde a obtenção de informação, vai ser enfocada sobre aspectos em destaque dos elementos a saber: fonte de dados, descrição dos acontecimentos, processo sobre o resultado final, abstração dos dados e sentido das práticas com conceitos avaliados.

Sendo assim e baseado na estruturação qualitativa, se fez uma eleição da observação participante por parte do professor como fonte de abordagem porquanto, o pesquisador em questão manterá o equilíbrio nas práticas desenvolvidas com atividades propostas em sala de aula e ajudas externas.

Adotam-se três momentos específicos na análise e organização da informação, pensando na coleta e escrita final do documento, adotando a objetividade e validade das informações que são caracterizados no Quadro 4 baseado na estrutura de Bogdan e Biklen, (2013).

Quadro 4- Organização dos momentos para projeção da pesquisa.

<b>Momento</b>	<b>Características</b>
<b>Abordagem inicial</b>	Tem a ver com a organização desta pesquisa e seu conteúdo, elaboração e ajuste de questão e objetivos de pesquisa, metodologia e Referencial Teórico.
<b>Exploração</b>	Trabalho e análise das atividades, Produto Educacional e plataformas de utilização com os discentes.
<b>Reflexão e resultados</b>	Constata-se os resultados obtidos, resposta aos objetivos e perguntas de pesquisa, melhoramento dos elementos e Produto Educacional.

Fonte: Elaborado pelo autor, a partir das categorias de organização da análise propostas por Bardin (1977).

As ações a seguir foram estabelecidas desde a organização proposta por Bardin (1977), permitindo construir sistematizações dos dados coletados sem continuar com uma condição linear, para conseguir no estudo fazer aplicação e análise das atividades e produto educacional, seguindo um modelo exploratório da utilização dos aplicativos e sua funcionalidade.

A elaboração das atividades no plano virtual para a pesquisa, foram pensadas para ser desenvolvidas com discentes de faixa etária entre 13 e 15 anos que estão cursando oitavo ano. Inicialmente se avançou sobre um projeto piloto com 3 aulas síncronas acompanhando uma turma de 5 participantes de um colégio particular na cidade de Bogotá na Colômbia de ensino fundamental.

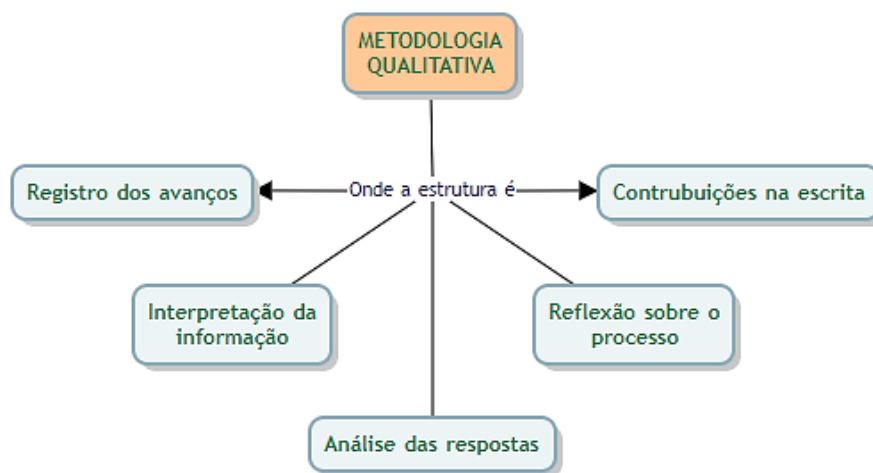
O detalhamento das aulas apresentadas para os discentes no Capítulo 6, estão focadas inicialmente na discussão e interação sobre um aplicativo específico para a aula planejada, fazendo uma ênfase sobre uma problemática ou situação interativa para depois estabelecer um conjunto de respostas e vantagens oferecidas pelo aplicativo na sua resolução. No encerramento se passava para os participantes uma enquete do aplicativo utilizado e se faziam algumas considerações sobre a importância de explorar ditos aplicativos em espaços de sala de aula.

### 3.1 EXPLICAÇÃO DO MÉTODO

O processo de análise de dados seguindo o método de observação participante, deverá responder à compreensão de fenômenos da matemática por meio da utilização de tecnologia com os passos a seguir: a) organização de material e aplicativos prévios a ser explorado com discentes, b) identificação de tendências e padrões nas estruturas conferidas pelos estudantes utilizando aplicativos de prova e c) delimitações associadas com os objetivos e questão de pesquisa para encaminhar a elaboração das atividades com aplicativos, fotografias e enquetes seguindo como fonte de aproveitamento o LaPEM-v.

Na Figura 4, a seguir, organizou-se elementos em destaque para desenvolver a pesquisa seguindo a metodologia qualitativa proposta como um foco teórico de pesquisa, esclarecendo que os quadrinhos em cor azul, respondem a formas de organizar e delimitar informações desde uma validação qualitativa sem a necessidade de continuar com uma estrutura linear e seguindo uma análise relacionada especialmente à contribuição na escrita.

Figura 4- Estrutura da pesquisa qualitativa na pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em consequência, o cenário da observação participante precisa que o pesquisador se adapte naquilo que deseja conhecer com intervenção e escuta que deverão seguir uma forma passiva (OSÓRIO; COOPER& QUIROZ, 1999). Este modo passivo é considerado no estudo pela estruturação virtual própria das atividades e sua execução na prática diária onde o professor será orientador nas diversas explicações e além disso, poderá oferecer elementos aos discentes nas contribuições e discussões que eles tiverem na hora de mexer sobre cada um dos aplicativos propostos.

No desenvolvimento das atividades, os materiais a serem utilizados estão suportados a partir de construções em diferentes aplicativos de fóruns, ambientes de aprendizagem já elaborados e programas *online* disponibilizados para os alunos. Além disso se terão registros fotográficos, formulários *online* e respostas escritas que apoiaram os argumentos para falar sobre a manipulação de objetos na matemática em diferentes faixas do processo, verificando os estados, intervenções, percepções e concepções mudadas ao longo do estudo, adotando também a complementação e reflexão sobre os materiais coletados.

A inquietação sobre a utilização da tecnologia, formas de emprego, potencialidade e projeção no estabelecimento de relações da matemática encaminhadas à função linear permitiram formular a pergunta diretriz da pesquisa sendo: **Quais características do contexto digital tecnológico na representação em atividades virtualizadas podem auxiliar para a compreensão do conceito de função linear no âmbito do ensino fundamental?**

Na busca dessas características no plano tecnológico com auxílio de recursos, aplicativos e representações para compreender fenômenos numéricos, algébricos e geométricos da função linear permitiram focar os objetivos a seguir:

### 3.2 OBJETIVO GERAL

- Analisar o emprego de manipulações virtualizadas, uso da linguagem algébrica e representações simbólicas com aplicativos digitais em uma turma de estudantes do ensino fundamental, com vistas à compreensão do conceito de função linear.

### 3.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconhecer momentos, ações específicas e conteúdos em que a manipulação virtual pode apresentar potencialidade na elaboração de atividades da matemática.
- Identificar concepções e dificuldades sobre a definição de função linear em uma turma de estudantes do ensino fundamental através da manipulação e utilização de aplicativos digitais.
- Elaborar atividades exploratórias investigativas aproveitando recursos tecnológicos na rede que sejam fonte de apoio na compreensão de algumas propriedades da função linear.

Em presença do cenário exploratório, se quer identificar percepções sobre um conceito da matemática com manipulação virtualizada, utilizando o recurso para a argumentação em

atividades exploratórias, relacionadas com perguntas que levarão à utilização de materiais que permitem analisar empregos, manipulações e utilização da linguagem (REHFELDT et al., 2019).

Os objetivos desde uma projeção profissional podem oferecer aportes na tendência e incidência da tecnologia no âmbito escolar, para examinar relações metodológicas, didáticas, epistemológicas, sociais e culturais com inter-relações e possíveis potencialidades inseridas de forma contextual (ESCHER; MISKULIN, 2019).

No capítulo seguinte, com o objetivo de estabelecer um marco de estudo, foi elaborada uma abordagem de estudo sobre manipulações virtualizadas no campo da Educação Matemática com uso de aplicativos y *software*, envolvendo como interesse conceitual a Função Linear em um campo de interações, discussões e reflexões que procuram contribuir para aprendizagem em discentes de ensino fundamental que vão auxiliar nesses processos de intercâmbio de saberes em sala de aula.

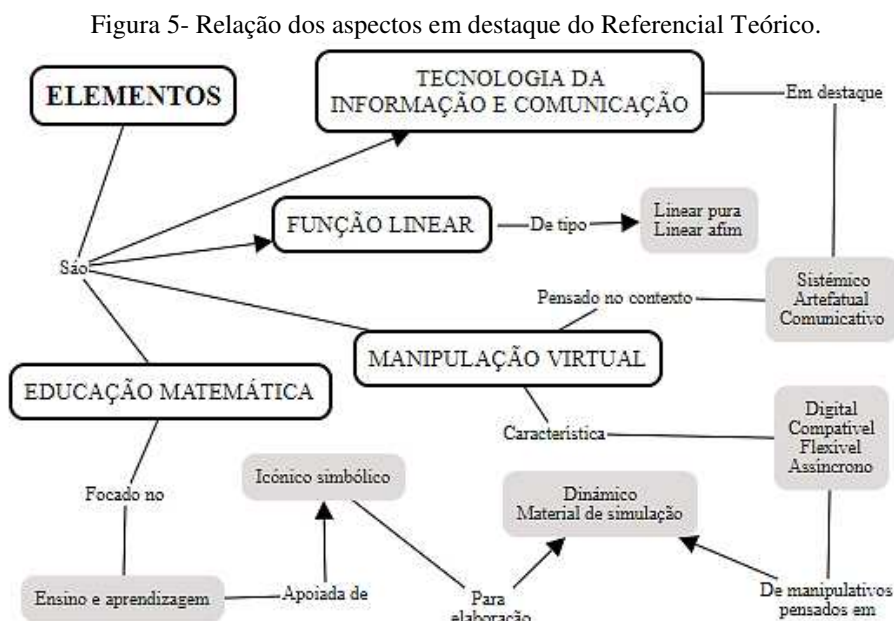


## 4 REFERENCIAL TEÓRICO

Este Referencial Teórico procura apresentar quatro elementos que são de interesse para o entendimento e desenvolvimento desta pesquisa em andamento os quais são: Educação Matemática, Manipulação Virtual, Tecnologia da Informação e Comunicação e Função Linear.

Inicialmente, concebe-se o conceito de Função Linear desde aspectos do pensamento algébrico com a Tecnologia da Informação e Comunicação como fonte de auxílio através da digitalização, manipulação virtualizada e aplicativos. Existem também alguns elementos secundários como os tipos de representações que a serem elaboradas para o aprendizado desde o campo da Educação Matemática que em si mesma apresenta uma abordagem epistemológica em parágrafos a seguir.

Sendo assim, o diagrama a seguir (Figura 5), apresenta-se de forma detalhada e gráfica aquela relação entre as partes concebidas para o desenvolvimento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Alguns elementos em destaque do esquema conceitual, serão sintetizados e analisados nos diferentes parágrafos do referencial, explicitando relações percebidas sobre as funções e sua classificação, uso de tecnologias com manipulativos e representações associadas aos registros cognitivos com utilização de gráficos, tabelas e fórmulas aritméticas ou algébricas para o aprendizado de alguma temática específica através de projetos com tecnologias e estudos diversificados.

No texto a seguir, se faz uma aproximação para a Educação Matemática com projetos, aplicações, entendimentos e estudos que tem sido de destaque e vão ajudar no desenvolvimento da pesquisa desde a relação matemática e tecnologia com manipulação de aplicativos.

#### 4.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EM)

A Educação Matemática é um campo de pesquisa em processo de consolidação que possui um conjunto de tendências voltadas para a reflexão de profissionais do campo da educação sobre práticas de ensino e aprendizagem desta área do conhecimento em sala de aula, baseado no princípio de que todos podem produzir matemática nas suas diferentes expressões, tendo como foco especial a atividade matemática desde a perspectiva interna e externa através da transposição didática (FALCÃO, 2015).

Considera-se percepções sobre este campo orientado ao desenvolvimento e construção de conhecimento voltado para o contexto escolar com necessidade questionar diferenças e semelhanças entre conceitos de níveis de profissionalização, especialmente aquele relacionado à Educação Matemática desenvolvida no Brasil como trajetórias, ideias e métodos de ensino e aprendizagem em sala de aula (FIORENTINI, 1994).

Aquelas percepções permitiram estruturar um caminho sobre situações de estudo e interesses baseados em fundamentos teóricos que levam a pensar o campo da Educação Matemática desde seus saberes e condições políticas (PEREIRA, 2005). É importante reconhecer dentre do enfoque da EM que o caráter pedagógico e didático são fontes que atribuem ao aprendizado da matemática pelas metodologias, instrumentos e características alternativas em sala de aula.

As atuações desta tipologia, permitem mudar prejuízos estruturais (BALDINO, 1991) enquanto vão propondo-se exemplos de um conhecimento com representações que podem ser algébricas, numéricas ou geométricas e que, ao mesmo tempo, são estudo teórico e prático (LERMAN, 2015).

Em conclusão, perspectivas da Educação Matemática não afastam e revalidam novos conhecimentos que podem trazidos para este trabalho com influências, ideias e produção relacionada ao uso de aparelhos digitais num laboratório para compreender conceitos da função linear e suas propriedades, já que; terão contidos inúmeros processos de cognição que devem ser encaminhados com situações de estudo para observar como é o processo de aprendizagem

e quais podem ser as emoções dos discentes ao experimentar com material digital e sistema de crenças no âmbito do saber cognitivo e afetivo, procurados no campo da Educação Matemática na atualidade, alinhados para a modelagem de funções no campo da matemática escolar em ensino fundamental (DIAZ; BELMAR; POBLETE, 2018).

#### 4.1.1 Concepções da Educação Matemática

Determinada quantidade de concepções da Educação Matemática (EM), estão encaminhadas ao auxílio de práticas pedagógicas exemplificadas em sala de aula para acessar conhecimentos que, aparentemente, podem ser difíceis para estudantes e professores, orientados na escola a uma relação curricular, democratização e percepção em sala de aula. No Quadro 5, a seguir, vamos exemplificar alguns pensamentos percebidos na literatura.

Quadro 5- Principais concepções da EM relacionadas com a pesquisa.

Tipo de concepção identificada	Caracterizações e descrições
Uma atividade matemática	É um conjunto de atividades desenvolvidas no contexto escolar e extraescolar para desenvolver conceitualmente aspectos em matemática (FALCÃO, 2015).
Pensamento matemático avançado	Pode ser envolvido como aquele corpo de conhecimento da matemática que é socialmente compartilhado, mas ainda delimitado e praticado por profissionais específicos para produção acadêmica. (FALCÃO, 2015).
Organização curricular da matemática	São formas de pensar conteúdos de abordagem em sala de aula seguindo uma série de orientações para projeções sociais (MEN, 2006; DBA, 2015; BRASIL, 2017).
Matemática e democracia	Pode ser um processo global de preparação para uma sociedade informacional que desempenha um papel significativo nos processos sociopolíticos de não exclusão social (SKOVSMOSE, 2007).
Uso de tecnologias em aula de Matemática	Educação Matemática é à base de uma sociedade tecnológica que fornece formas de conhecimento e técnicas para manipulação de tecnologias em diversos contextos (SKOVSMOSE, 2007).

Fonte: Elaborado pelo autor.

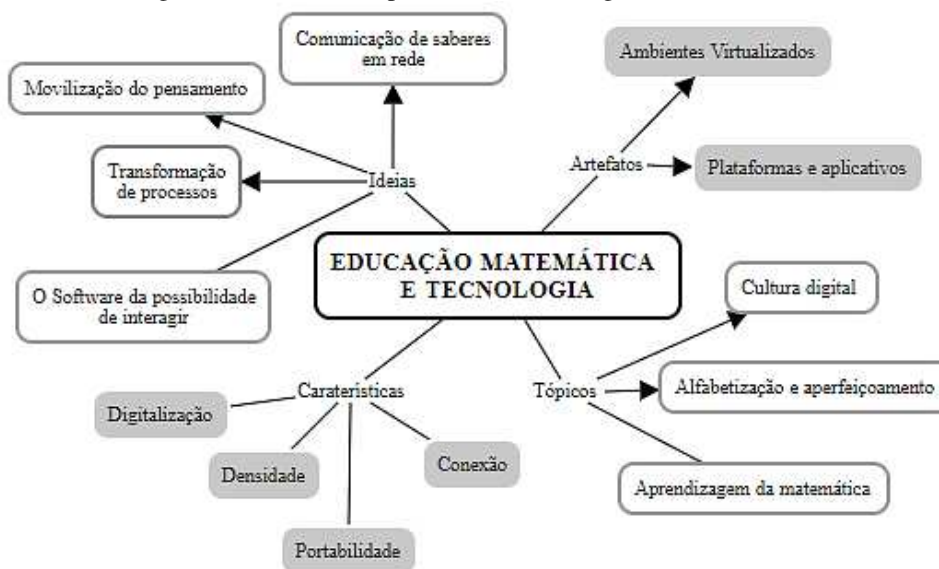
Os aspectos apresentados do Quadro 5 são exemplos identificados de forma própria, baseados na literatura e condicionamentos dos autores que ainda poderiam conter outro tipo de concepções, classificações e ampliação de perspectivas. Aquelas que já foram mencionadas podem estar conexas com fontes de apoio no desenvolvimento de um conjunto de saberes da função linear, por meio do manípulo de diversas tecnologias, seguindo processos de transformação do professor de matemática na sua prática e transposição de saberes em ambientes de escolaridade.

Esse processo de identificação de algumas tipologias (Quadro 5) é necessário já que “as práticas educativas oferecidas no campo da matemática contribuem para uma formação de pessoas racionais com formas de reconhecer saberes valorizados socialmente” (VALERO; MOLINA; MONTECINO, 2015, p.7).

O reconhecimento desses saberes por meio da democratização na matemática pode ser proposto com atividades simples, padronização e uso de tecnologias como parte de um processo educativo para inserir utilização e implicação da matemática escolar.

Seguindo essa fonte de padronização, faz imprescindível revisar consensos focados com interesse na utilização da tecnologia e outros elementos complementares em sala de aula, porquanto a tecnologia na dinâmica atual é fonte transversal e integradora de conhecimentos no campo da matemática. Na Figura 6, a seguir, se relacionam aqueles elementos de forma rápida.

Figura 6- Elementos importantes da tecnologia inseridos na EM.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que a categorização principal, está estabelecida diante ideias prévias, artefatos, tópicos e características focados na tecnologia. Inicialmente no campo da EM e seguindo as revisões de Aguirre e Gonzalez (2021), a primeira relação entre estes campos é dada por artefatos tecnológicos que podem ser concretizados através de aplicativos e ambientes virtualizados que vão permitir aprender, indagar, configurar e movimentar em um espaço ou entorno digital para a transformação de processos com comunicações em rede.

Do mesmo modo, existem características como digitalização, densidade dos recursos, não linearidade, portabilidade e conexão que vão relacionar aspectos da tecnologia e matemática em suas interações desde espaços propostos em sala de aula.

#### **4.1.2 Aprendizagem e Linguagem**

A elaboração deste parágrafo foi pensada como complementação no processo de manipulação de recursos, plataformas e aplicativos digitalizados, já que; o estudo está orientado aos discentes e nas dinâmicas da interação, eles falarão das suas experiências, apropriações experimentais e comunicarão ideias e conceitos desde um foco de tipo prático e verbal (LEONTIEV, 2004).

Sendo assim, este apartado não é o eixo central da pesquisa, mas ele possui elementos em destaque relacionados com as manipulações, uso da tecnologia e apropriação do conceito de função linear através das representações numéricas, geométricas e algébricas.

Interpretações para compreender como é que funciona o processo de aprendizagem, dão relevância para uma pequena abordagem deste apartado, começando com uma relação clássica entre procedimentos cognitivos com linguagem, atendendo que ela em si mesma é “aquela que tem contida funções mentais de caráter superior” (VIGOTSKY, 1934, p.32).

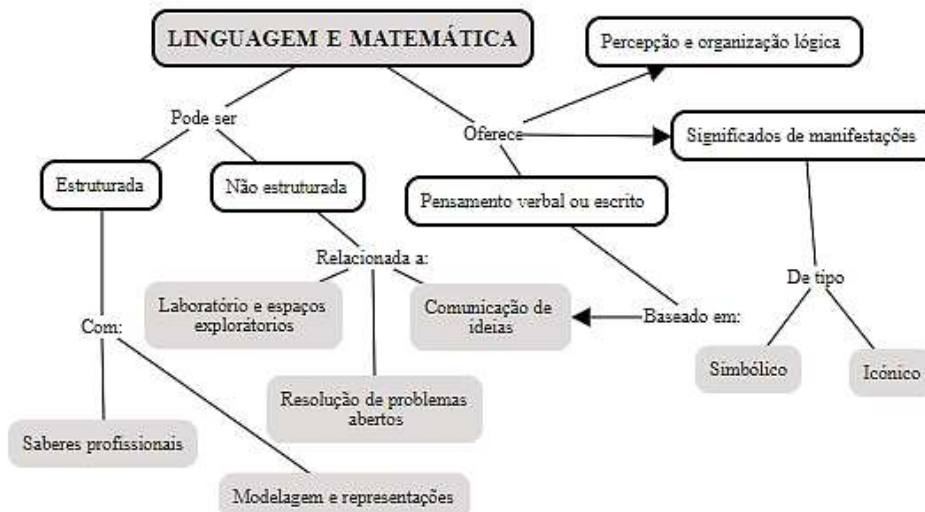
Estas relações permitem explorar dimensões que, segundo González (2010), podem ser internas, mentais e computacionais que são necessárias, já que os discentes poderão executar algumas dessas dimensões de desenvolvimento mental com simulados tecnológicos e plataformas interativas.

Explorar os resultados mentais exteriorizados por discentes vai ser parte da experiência em seus processos de aprendizado, entendimento e representação com utilização de significados, que podem involucrar respostas verbais ou escritas, fundamentadas principalmente na comunicação com manifestações icônicas ou simbólicas dependendo da atividade, habilidades, ciclo de formação e informação facilitada.

Os elementos dimensionais da linguagem no contexto educacional não podem ser reduzidos simplesmente aos códigos pelo oferecimento de interpretações e mapeamentos diversos da realidade que pode estar baseado em condições, sistemas especializados e transmissão de informações e pensamentos (VIGOTSKY, 1934).

Assim, é possível conectar representações da Figura 7 com relações entre linguagem matemática e linguagem natural, seguindo esquemas bem definidos com respostas estruturadas ou não estruturadas. A relação de saberes aplicados no campo da modelagem, resolução de problemas são estruturas que permitirão abordar assuntos baseados nas conversas e interações de tipo não formal.

Figura 7- Aspectos gerais da Linguagem com a Matemática.



Fonte: Elaborado pelo autor.

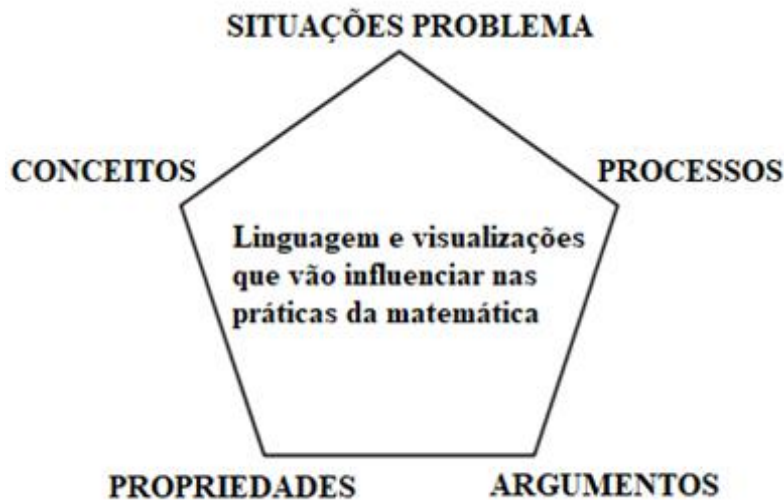
Pinto (2009), em sua análise sobre campos semânticos, faz uma abordagem sobre a existência de categorias da linguagem no campo da matemática, que são estudadas e analisadas diante um conjunto de registros, saberes e significados. Dita relação está bem organizada a nosso critério (Figura 7) como um modo de estabelecer aspectos da linguagem a serem utilizados como fonte de análise e relação com o campo da tecnologia e matemática vinculadas principalmente ao pensamento verbal, organização de estruturas lógicas e manifestação de significados exploratórios.

As relações linguísticas podem ser objeto de abordagem no cenário da EM com procedimentos, propriedades e argumentos sobre uma prática manipulativa com exploração sobre estruturas funcionais que vão ajudar na organização e abstração de informações e propriedades matemáticas, seguindo uma série de ações mentais por médio de objetos exteriores (LEONTIEV, 2004).

No esquema a seguir, apresenta-se na Figura 8, uma imagem que oferece compreensão sobre alguns elementos que podem ser envolvidos no processo de abordagem matemática

com utilização de material tecnológico como fonte de estudo, especialmente aqueles que estão relacionados com os processos e argumentos dos alunos.

Figura 8- Elementos relacionados no processo de articulação com a Linguagem.



Fonte: Tradução e adaptação de Godino, Gonzato, Cajaraville e Fernández (2012, p.114).

Pode-se reconhecer deste esquema elementos como conceitos, propriedades, situações e argumentos que estão relacionados com linguagem e artefatos como forma de fazer intervenções na prática de uma atividade matemática, desenvolvida em sala de aula com atos conexos com clareza, disposição e utilização de recursos de cunho tecnológico e visual.

#### 4.2 TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC)

A tecnologia em sua concepção geral pode ser compreendida por autores como Mitcham (2006) e Oliver (2016) a utilização de um conjunto de elementos e artefatos que têm impactos na sociedade e que são ambientes de transformação na cultura e suas práticas, orientada a ações causais empregadas na eficiência das atividades do homem e sua facilitação na vida cotidiana.

Algumas transformações de caráter ontológico (da nossa existência) permitem que a tecnologia na sua função seja uma prolongação dos sentidos humanos que tem uma relação com a ciência, sendo aquela relação de ordem biunívoca. Segundo Osório (2002), a tecnologia deve conter um caráter sistêmico (do enfoque e serviço ao homem) e dos artefatos (caso sua manipulação que é aquela extensão dos sentidos).

Um exemplo aplicado aos artefatos é a exposição dos aparelhos e informações com significado físico e cognitivo sobre uma atividade (LÉVY, 1992). Ao mesmo tempo, quando o significado é social, este enfoque destaca uma estrutura tecnológica sistêmica com dinâmicas contemporâneas, relacionando aspectos sobre um conjunto de elementos para o raciocínio.

Nesta discussão, tecnologia como forma sistêmica pode trazer novos usos de domínio público ou privado seguindo o padrão das redes virtuais. Estas redes virtuais permitirão situar novas conexões, digitalização e categorias para estudar a informação (LÉVY, 1992). Certamente a tecnologia é utilizada na educação já que segundo Rodríguez e Porras (2018), será produto de desenvolvimento das pessoas e atribuições de sentidos, imaginação e pensamentos.

As redes de tipo sistêmico podem ser chamadas de hipertexto que são classificadas em princípios relacionados com a interconectividade e interatividade (ORTIZ; RAMÍREZ, 2013). Os princípios baseados com interações e conexão são uma forma de projetar e produzir uma compreensão histórica de fenomenologia que pode “originar transformações com alguns artefatos que ajudam e explicam a existência de objetos na sociedade que levam a ter inter-relação continuada” (PIRES, 2016, p.58).

Essa coleção de artefatos estruturados leva a pensar a questão da tecnologia como uma disciplina de domínio com uma coleção de atividades que podem estabelecer causas, intervenções, sistemas dinâmicos, efeitos de rede e impacto social (CASTAÑEDA; SALINAS; ADELL, 2020).

As ações da tecnologia na atualidade têm uma revolução que ultrapassa as condições de interatividade ao plano mental que não somente ficam estabelecidas nas rotinas físicas, senão também nas colocações e ajuda de novos aparelhos que estão a serviço do homem. Dentre as novas linhas para interagir, surgiu a chamada cibernética que compõe ações de ciência e tecnologia (PIRES, 2016). Sendo assim:

[...] as novas formas de tecnologias digitais se combinarão com artefatos característicos da educação presencial, como a carteira e a lousa, mas também com artefatos que não eram pensados como participantes da educação: a geladeira de casa, o sofá da residência de cada um (BORBA; SILVA, 2014, p. 101).

Em conclusão, tecnologia hoje não se reduz somente aos aparelhos porque é necessário considerar o enfoque de relação entre Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) de caráter sistêmico, que permite auxiliar e progredir sobre processos do homem e seus interesses (RODRÍGUEZ; PORRAS, 2018).



Este tipo de concepção da tecnologia dá força para estabelecer práticas na utilização de objetos pela sua abrangência em nossa vida cotidiana que vem a ser aberta em processos, e interação na sociedade que não podem ser isoladas em ações de produção de conhecimentos e registros com mídias informáticas (PIRES, 2016).

Outras formas de se conceber a tecnologia são referidas à organização de conhecimentos e recursos na tomada de diversas decisões em que se “lida com métodos científicos e industriais e seu uso prático” (SKOVSMOSE, 2007, p.145). Estes processos permitem estabelecer a relação humana e não humana para exteriorizar e apoiar ações de construção e entendimento das dinâmicas num contexto particular conduzido a solução de problemas.

A obtenção de instrumentos tecnológicos e sua inserção nos processos de ensino e aprendizagem são necessárias pelas novas formas de comunicação e informação disponibilizadas. Segundo Pires (2016), estes processos são cada vez mais céleres no dia a dia pela grande utilização de aparelhos fixos e móveis, além de servir para a tomada de decisão de aspectos cotidianos como em redes sociais, interpretação de informações e validação de novos conhecimentos para a sociedade.

A tecnologia e suas dinâmicas neste século estão com uma trajetória marcada que facilitam questões não resolvidas e trazem facilidade na elaboração de novas práticas escolares que ainda precisam de mudanças no plano de execução (ESCHER, 2018). É assim como aparelhos tecnológicos que possuímos hoje em nosso cotidiano podem ser origem de oferecimento para uso de *software* de forma diversificada, com presença de elementos de apoio em sala de aula.

Nesse cenário, baseado nos experimentos com aparelhos digitais, existe um interesse particular por relacionar TIC no contexto educacional, pelas apropriações e influência na vida social, política, cultural e econômica (CASTELLS, 2016). Aqueles benefícios e influências, dão formação em nossa sociedade, seguindo ajudas e revoluções, principalmente na comprovação de “cálculos da matemática e estudo de padrões e sequências através dessas máquinas para otimizar processos, tempos de contagem e para abrangência de problemas e sua racionalidade de forma exata” (PIRES, 2016, p.15).

Dessa forma, as tecnologias devem ser inseridas no contexto educacional “porque estão na sociedade atual de forma natural e são agora um recurso de apoio em discussões e

ganho de riqueza conceitual da matemática pelo universo de possibilidades que oferecem” (BARREIRO et al., 2017, p.71).

Assim, os discentes podem sempre pensar na questão seguinte relacionada com a tecnologia:

[...] provar, descobrir e perguntar para eles e cada um, com o objetivo de acessar ao que ele precisa e usar a calculadora com maior ou menor profundidade; dependendo do que esteja resolvendo. Se somente o professor pede contas e manuseio, não aproveitarão o recurso, do mesmo jeito com os celulares, devem-se pedir outras coisas para usá-las com maior potencialidade (BARREIRO et al., 2017, p.71, tradução própria).

Os aparelhos tecnológicos estão inseridos em nossa sociedade atual e como profissionais da EM, existe um compromisso de interagir com aplicativos diversos em sala de aula, permitindo abrir o campo de discussões em sintonia com novas informações valorizadas para as práticas de aprendizagem através de metodologias híbridas que sejam harmônicas no plano cotidiano (ESCHER, 2018).

Nesta direção, a tecnologia é fonte de estudo porque oferecerá um papel proativo em sala de aula com um espaço de “matemática digital” (FREITAS; CARVALHO, 2017), que pode proporcionar manipulação de artefatos em qualquer local ou período que é importante pelo cenário de mudança em sala de aula (ESCHER, 2018).

No caso experimental, existe um destaque das possibilidades oferecidas pela tecnologia para revelar entendimentos, deveres e concepções dos estudantes que podem ser parametrizadas segundo crenças, padrões e pensamentos e “que tem ganhado espaço no conjunto de práticas na sociedade” (PIRES, 2016, p.34).

Ditas práticas na sociedade terão repercussões sobre a natureza e tratamento das novas informações em rede com formas de conceber o conhecimento já que:

A aprendizagem será entendida em termos de condicionamento ou acúmulo de dados. A natureza (na medida em que os computadores intervêm na pesquisa dela) se reduzirá a informação a ser processada, etc. Em particular, “ciência” irá significando cada vez mais a pesquisa tecnologicamente mediada e orientada, da qual se espera resultados úteis (tecnociência). (CUPANI, 2016, p.194).

Sendo assim, o caráter da tecnociência vai procurar uma tendência de aprendizagens utilizando recursos computacionais que orientem diversos processos científicos desde a escola e suas práticas úteis através da manipulação em sala de aula.

Melo (2002) e Pires (2016) afirmam que intervenção com computadores e redução de informação que já é processada, permite o aparecimento de aspectos como simulação,

aprofundamento e validações do pensamento matemático permitindo a sua apropriação e aplicação baseados na ideia fundamental da função com representações auxiliadas por diversas tecnologias e aparelhos digitalizados.

#### 4.2.1 Concepções da tecnologia

A tecnologia em seu entendimento encaixa diversidade de concepções adotando aspectos culturais, sociais, econômicos, físicos e educacionais. Na sua compreensão geral, tecnologia pode ser entendida como acesso de transformação cultural com implicações nas dinâmicas e interações dos homens (ORTIZ; RAMIREZ, 2013).

No sentido físico, a tecnologia é o emprego de bens, artefatos e serviços que podem ser manipuláveis e explorados, utilizando diversas plataformas por parte de sociedades desenvolvidas (MITCHAM, 2006). Nesse sentido, esta utilização física e digital de recursos fornece para a tecnologia, domínio de um conjunto de objetos e artifícios que dão a possibilidade de gerenciar atos para agir eficiente e rapidamente (CUPANI, 2016). Fala-se neste sentido que a sociedade não poderia ser representada sem ferramentas tecnológicas que seriam os objetos físico criados pelo homem desde seus inícios.

Tecnologia no plano digital, pode estar relacionada com representações mais dinâmicas de interconexões, conectividade em um ciberespaço, multimodalidades, armazenamento e visualização da informação que estarão orientados na análise e resolução de problemas do cotidiano. A fonte de significado da tecnologia neste cotidiano, vai ligada na personalização de dispositivos que neste século estão evoluindo sobre a utilização de celulares e redes de informação pessoal e que também vem sido impulsada por avanços na sociedade com a interação, produção e mão de obra acelerada seguindo aspectos da configuração de sistemas (CASTELLS, 2016).

Em relação a suas dimensões, podem-se conceber 3 possíveis interpretações da tecnologia que são validadas na revisão de concepções de Pinzón (2022) e são exploradas especificamente no âmbito educativo.

A primeira concepção explorada é a **disciplinar** que está justificada na área de conhecimento e utilização no campo da educação que no caso seria a matemática. A seguir, temos a concepção **instrumental** que é aquela que vai relacionada com os ambientes, recursos e programas de *software* dinâmico que vão serem incluídos no plano de aula. Finalmente temos

a concepção da **inovação** que está relacionada com as projeções pedagógicas e oferecimento de recursos digitais em sala de aula.

#### **4.2.2 Tecnologia e sociedade**

A diversidade de materiais no campo digital e avanços da tecnologia como auxílio para nossos processos, trouxeram a necessidade de inserção e relacionamento desta em campos do conhecimento como fonte de apoio para contextos sociais e culturais que, segundo Costa (2013), procuram dinâmicas de relação num ambiente globalizado norteado para uma revolução orientada à produção de produtos que desafiam os protótipos de construção e aporte significativo na sociedade.

Nossa sociedade, por meio da tecnologia centralizou e deu fonte de significado para um conjunto de sistemas que são dependentes que hoje não poderia ser representada sem estes recursos ou materiais (CASTELLS, 2016). Ao mesmo tempo, nesta evolução a tecnologia foi relacionada com a liberdade que auxiliou principalmente na produção, experiência e ganho de poder indo para uma sociedade informacional que vai tentar o reconhecimento e construção de identidades entre sujeito e objeto.

Sendo assim, a tecnologia dentre suas especificidades é uma fonte de convergência entre sujeito e objeto que é apresentada de forma atemporal, dita atemporalidade segue a lógica do ciberespaço com acrescentamento de recursos digitalizados, deste modo, o homem pode transformar suas características e configurações de se comportar num ambiente criado com interesse de aprendizagem (MENEGHETTI, 2010).

Esses ambientes da tecnologia estão ligados com seus paradigmas e conhecimentos científicos produzidos como parte do desenvolvimento e transformação digital que até vai focar a atenção na linguagem a atribuições sobre aspectos como processamento, informação e comunicação na automatização e configuração de programas e aplicações (CASTELLS, 2016).

A ênfase na matemática “pressupõe uma formação do indivíduo que considere os avanços da tecnologia, possibilitando a sua plena inserção na sociedade, como um ser crítico, consciente e livre” (MISKULIN, 1999, p. 41). A relação de inserção na sociedade através de saberes da matemática valoriza raciocínios com ajuda da tecnologia em uma imensidão de conhecimentos e adoção de novas perspectivas e incorporação de *software* (COSTA, 2013).

As atribuições sobre a tecnologia estão presentes com implicações sobre a nossa sociedade, produção e desenvolvimento que ainda são objeto de interesse e estudo (OSORIO, 2002). Esse fenômeno de estudo tecnológico também abrange estruturas da educação e saberes da matemática em sala de aula, que são destaque no desempenho e evolução de um grupo social. Os processos que podem ser envolvidos neste ambiente possuem lógica e caracterizações próprias.

Atualmente, sociedade e tecnologia estão aprimoradas em aspectos como a geração, processamento e transmissão que vai depender do entorno, localização geográfica e história que vem acompanhada do fenômeno da sinergia que é a relação dos aspectos propostos com a integração de dispositivos eletrônicos na execução e desempenho de redes mecânicas e de informação.

#### **4.2.3 Tecnologia e técnica**

A tecnologia no seu entendimento sistêmico pode conter discussões encaminhadas na técnica que é a arte de fazer e produzir saberes ou objetos com inovações levadas no plano da revolução. A tecnologia também tem atribuições relacionadas com um conjunto de procedimentos que estão na disposição de uma sociedade incluindo o desenvolvimento dos seus sentidos nas práticas históricas e culturais (VIEIRA PINTO, 2005).

Esta visão da tecnologia engloba o conceito de técnica, contendo um caráter ainda maior, que permite transformar uma realidade em um sistema integrado em sistemas de informação, projetos de cooperação e elaboração de *software* orientado nas revoluções e avanços (CASTELLS, 2016). Assim, na dinâmica do mundo atual a tecnologia vai estabelecer o ritmo nas atividades feitas pelos homens e transformação de seu contexto.

Descreve-se a técnica através da produção prática, seguindo propriedades e conhecimentos úteis nas relações do homem com sua realidade, seguindo um caráter objetivo materializado em máquinas, instrumentos e plataformas que são inseridos na cultura da informação com agrupamentos e organizações que acabam sendo um paradigma de tipo tecnológico, já que contém técnicas com uma variedade de produção e adaptação (PIRES, 2016). Além disso, é bem sabido que a técnica responde aos desejos e vontade do homem na melhora e satisfação de suas necessidades básicas com implementação de projetos focados na compreensão do mundo que os envolve.

Sabe-se que a técnica tem um relacionamento com os processos para a obtenção de respostas na prática e desenvolvimento de alguma atividade onde se faz importante a utilização dos significados, conhecimentos e saberes com influência da ciência.

No sentido dos procedimentos, **tecnologia e técnica** podem ser associadas seguindo o plano epistemológico, institucional e antropológico que vão orientar aspectos do conhecimento geral, organizações que apoiam a produção massificada e superação na dotação biológica (GONZÁLEZ; HERNÁNDEZ, 2000).

Para encerrar, a orientação da tecnologia com a técnica pode conter elementos como alteração e modificação de processos, atuação direta na informação recebida, novos efeitos na tecnologia e lógica das redes que convergem em sistemas que são integrados e classificados (CASTELLS, 2016).

#### **4.2.4 Educação em tecnologia**

Neste parágrafo, procura-se oferecer apontamentos sobre a defesa da utilização da tecnologia na escola, focalizada no espaço de sala de aula, como um instrumento de desenvolvimento e apoio nas atividades e abstrações de fenômenos do cotidiano, que geralmente são justificados pelo meio do computador (PAPERT, 1997).

Nesta criação de abstrações sobre o recurso eletrônico, existem os denominados micromundos de aprendizagem, que são ambientes que simulam operações do mundo real e dentro da escola, permitem destacar ações como: humanização dos professores e sua relação com recursos tecnológicos, reforma das políticas educativas, geração de ambientes lúdicos e, finalmente, interconexão e constituição de novas plataformas digitais (SILVEIRA, 2012).

O papel destes recursos na escola como fonte de compreensão, tem a qualidade de ser onipresentes atribuindo importância na sua utilização que traz benefícios educativos enquanto as crianças pertencem à geração de computadores (PAPERT, 1997). Na dinâmica atual, utilização de recursos demanda exploração sobre suas funcionalidades, operações e atribuições para o desenvolvimento de atividades no campo desejado em questão.

O campo desejado que vai ser focado é a matemática. Assim; os processos de tipo geométrico- algébrico serão:

Apoiados nesses pressupostos, acreditamos que a inserção de tecnologias no contexto da escola pode favorecer a participação social das pessoas, seja no âmbito da

instituição escolar ou nas práticas sociais externas. Somos partidários também de que as mudanças na prática pedagógica solicitam reflexões ancoradas no entendimento que o envolvido, no nosso caso em particular de matemática, tem sobre o uso da tecnologia no ensino, em favor da aprendizagem da matemática. (KALINKE; MOCROSKY, 2015, p.128).

Seguindo as palavras do pressuposto de utilização da tecnologia no campo educativo, se explora a possibilidade de discutir sobre aspectos da matemática com a linha da manipulação de aplicativos e verificação com programas que na decorrência da educação em tecnologia vai favorecer aspectos da sistematização e reflexão sobre a importância destes objetos em sala de aula.

#### **4.2.5 Recursos tecnológicos digitalizados**

Neste apartado, tentando compreender aspectos dos recursos digitais, a atenção será centralizada na utilização dessas tecnologias digitais como parte do processo de aprendizagem no campo da matemática, já que são indispensáveis no desenvolvimento das atividades propostas e estão focadas como uma fonte de apoio nas explorações prévias a serem estudadas.

Existem recursos desenvolvidos nos últimos anos denominados como ambientes dinâmicos, eles têm a utilidade de potencializar a exploração de situações na escola, permitindo representar e movimentar objetos de áreas como a geometria, álgebra e cálculo através da verificação e configuração concreta que até podem ser imediatas (PEREIRA, 2012).

Essas ações imediatas oferecem a vantagem de garantir verificações e conclusões vivenciadas no momento que até ser modificadas, movimentadas e analisadas de formas rápidas, úteis e flexíveis sem necessidade de procurar em elementos externos e que estão configuradas no plano de escolaridade, com importância na procura de generalizações e desenvolvimento de representações.

As atribuições de recursos digitais no plano da aprendizagem permitem a ilustração de conteúdo, adequação de novos saberes, curiosidade sobre fenômenos de movimentação e motivação na exploração de materiais digitalizados. Um exemplo deste tipo de materiais digitalizados são os Objetos de Aprendizagem (OA) que oferecem apoio para ensino de conteúdos em diversas áreas do conhecimento (AGUIAR; FLORES, 2014).

Além disso, OA podem-se caracterizar por ter propriedades de manípulo físico ou virtual, dependendo da situação com características ou categorias para sua utilização apropriada

no plano digital, em concordância com adaptações e temática de estudo. As categorias podem ser nomeadas como tecnológicas e pedagógicas e têm as seguintes condições (SCORTEGAGNA, 2016).

- **Interatividade:** O aplicativo oferece suporte e ações que podem ser concretizadas através dos vínculos da apresentação selecionada.
- **Cooperação:** Os usuários podem trocar ideias e fazerem abordagem sobre o conceito de estudo com interações em sala de aula e *feedback* por parte dos aplicativos de estudo.
- **Reusabilidade:** Onde pode existir forma de utilização do material com várias tentativas em espaços de aprendizado. Este material pode ser disponibilizado de forma *online* com possíveis adaptações por parte de professores e discentes em relação a suas novas tentativas e necessidades.
- **Adaptabilidade:** Pode-se utilizar o material em diversos entornos de ensino e com objetivos modificados e reelaborados.
- **Acessibilidade:** Uma utilização fácil e rápida que dá segurança aos usuários que consigam interagir em diversos locais. As atividades propostas estão disponibilizadas de forma *online* e podem ser salvas no dispositivo.

Algumas atividades propostas na etapa exploratória podem ter caráter de OA já que estes recursos digitalizados possuem porções deste entorno ao momento de pensarem nas atividades estruturadas de tipo exploratório. Em relação ao material lúdico e manipulativo, estas oferecerem animações e simulados em cada parte do material disponibilizado.

Os objetos que acolhem utilização da tecnologia promovem contextualização de forma dinâmica, trazendo compreensão de conhecimentos da matemática, passando pela questão de formular, resolver e testar com um grau de apropriação de modelos e ambientes experimentais (JÚNIOR; LAUDARES, 2019).

O processo de utilização de Objetos de Aprendizagem contém a possibilidade de adequar uma abordagem na criação de objetos e estruturas, isso com a finalidade de levar aos estudantes sua compreensão através da manipulação de aparelhos que sejam necessários no entendimento da função linear no plano tecnológico.



#### 4.3 MANIPULAÇÕES VIRTUALIZADAS

A utilização e diversificação de materiais físicos e digitais em nosso contexto atual, oferecem uma alternativa no campo da educação focado na formação de jovens com disponibilidade de aplicativos, jogos e recursos de aula que podem ser úteis no processo de aprendizagem de conceitos da matemática pela exploração, facilidade e visualização.

Os aplicativos físicos e virtuais são interessantes para os discentes pela facilidade na sua orientação em resolução de situações que podem se tornar complexas na prática. Ainda podem possuir também explorações com recursos de caráter informativo e vão gerar algum tipo de solução no problema proposto ou atividade oferecida.

Sendo assim, os dispositivos de utilização física e digital, comumente, podem não serem suficientes pela questão da experiência vivenciada, que deveria ser fortalecida com aspectos relacionados à busca e compreensão de saberes sobre recursos eletrônicos, como fonte de ajuda no processo em que é possível atribuir um papel tecnológico manipulativo, já que “não sempre os computadores ou dispositivos são tecnologia” (CARREIRA, 2009, p.60).

O recurso virtual como apoio apresentado na tela de um computador, celular ou tablete, deve ser fonte de descrição, movimentação e orientação sobre um conjunto de conhecimentos que são adquiridos pela experiência própria de conhecer as funcionalidades principais do aplicativo.

A manipulação virtual como uma ação de “manipular” objetos com tecnologia precisa do contato com recursos digitais e para que isso aconteça em seu desenvolvimento, deve-se conter um artefato onde seja possível observá-lo com suas alterações de posição e composição (DOS SANTOS, 2020).

Ainda com essa concepção sobre a manipulação virtual, existem outros elementos em destaque como percepção visual, estimulação do objeto tocando-o e sentindo diante dos dedos e das mãos, como pode ser o comportamento de um determinado material em seu estado inicial e final.

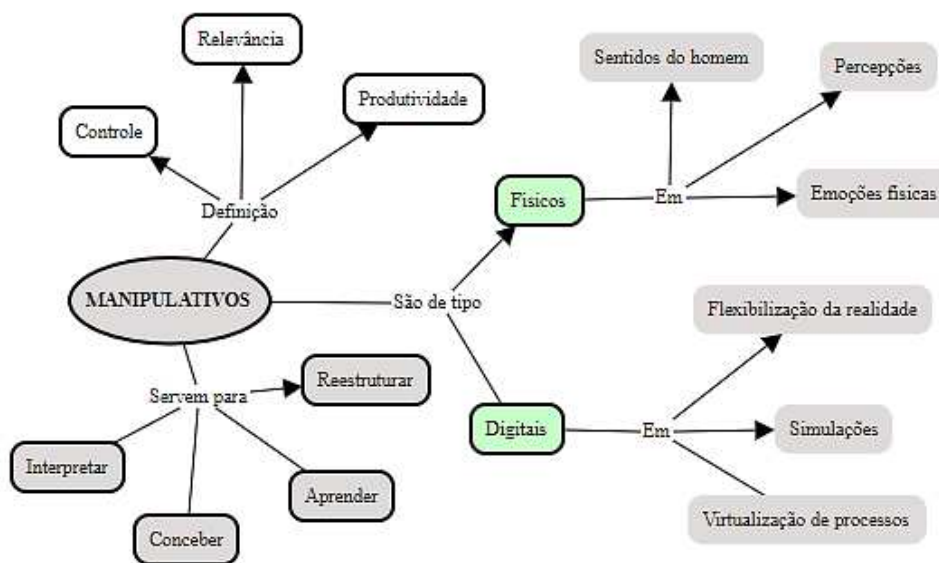
Do mesmo modo, alterações de posição e composição são necessárias, mas não suficientes no impacto de experiências e aproveitamento do recurso digitalizado, que pode conter outro tipo de caracterizações, como variação, associação e conscientização.

Na Figura 9, apresentam-se alguns aspectos acentuados dos manipulativos digitais, adotando perspectivas de controle, relevância e produtividade que estão relacionadas com os aspectos do parágrafo anterior, que até podem ser flexíveis para a realidade desde situações propostas.

Nesse sentido, os manipulativos possuem características para a interpretação e aquisição de um saber seguindo padrões como, por exemplo, controle da interface, programação do aplicativo a utilizar, relevância gráfica na tela, simulações apresentadas e produtividade dada pelo aluno quando interage no programa.

Estes recursos digitais podem ter um grau de diferenciação segundo sua simulação, virtualidade e flexibilidade com a realidade e que também vão se relacionar com as tipologias físicas o digitalizadas desses manipulativos seguindo uma realidade, emoção e percepção ao momento de interagir com aquele recurso.

Figura 9- Estruturação dos manipulativos desde seu tipo e definição.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os manipulativos no campo da tecnologia têm sido relacionados com simulações que oferecem experimentação baseada em estratégias para cumprir com finalidades em uma tentativa formulada.

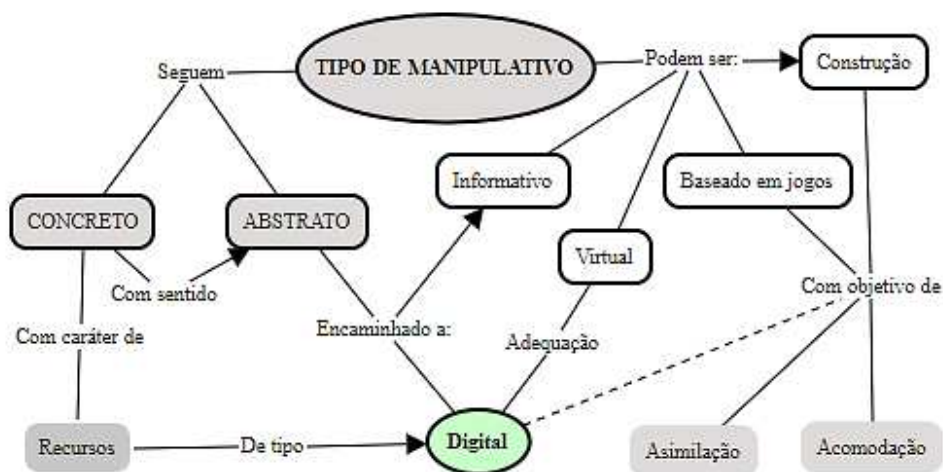
Segundo Carreira (2009), manipulações podem ser entendidas por um conjunto de dispositivos ou artefatos tecnológicos que vão possuir relações com a matemática em momentos específicos: saberes da disciplina, experimentação com o programa que vai gerar processos,

visualização sobre o objeto e inquirição levada ao plano das perguntas e pesquisa sobre um fenômeno.

Nestas fases da manipulação virtual, constituem-se um reconhecimento da aprendizagem com geração digital em crianças e jovens das escolas, que possuem um maior grau de familiaridade nas dinâmicas atuais do mundo, para o entendimento de fenômenos físicos e artificiais.

As concepções deste tipo de manipulativos digitais também podem ser geradas no plano concreto-abstrato como é apresentado na Figura 10 e oferecem opções virtuais, informativos, baseados em jogos e de construção, associadas no plano digital, ditas utilizações estão conduzidas no emprego de manipulativos virtuais.

Figura 10- Sobre o tipo de manipulativo digital e suas propriedades.



Fonte: Adaptação de ideias de Istianaru *et al.* (2017).

Acolhem-se que manipulações sejam efeito de controle e produtividade do homem em um sistema interdependente que ajuda na personalização de identidade e com perspectiva para conhecer experiências no plano abstrato, pois podem ajudar a interpretar saberes seguindo uma linha física o digital.

A linha corporal ou física está associada principalmente às emoções e utilização de nossos sentidos como pessoas para explorações concretas com manuseio de objetos e obtenção de respostas visuais e tácteis pelo meio do corpo (KONTAŞ, 2016).

A linha de tipo digital pode ser associada a simulados e uso de dispositivos em laboratórios ou espaços interativos que possuem flexibilidade e conectividade utilizando redes

*online* ou *off-line* com recursos de apoio como *smartphone*, computador, celular, *notebook* e tablets (ISTIANDARU et al., 2017).

Sendo assim, manipulações virtualizadas adequadas no plano digital são um tipo de manipulativo que até pode misturar ações comunicativas, uso de jogos, simulações de situações na realidade e informações sobre conceitos apoiado de fotografias, vídeos e telas de ordem interativa que vão auxiliar processos focados no ensino e aprendizagem de funções lineares com tecnologia.

#### 4.3.1 Manipulação virtual e experiência

O desenvolvimento da noção de experiência no contexto da manipulação física e virtual é necessária pela criação de sentido e realidade com foco na atribuição de um conjunto de práticas do cotidiano sobre o que pode estar acontecendo, ou sobre a singularidade de estar tocando algum objeto (BONDIA, 2002).

A experiência tem uma relação de proximidade com aspectos do corpo e o contato deste com objetos, onde acontecem algumas práticas singulares. Não deve confundir experiência com adequação e obtenção de informação porque existe um conjunto de sentimentos lógicos que manipulam as informações. Sendo assim, alguns aspectos em destaque sobre as possíveis experiências vivenciadas na conexão de manípulo estão esclarecidos no Quadro 6, a seguir.

Quadro 6- Descrição dos tipos de experiência identificadas.

Tipo de experiência	Aspectos relacionados com a manipulação
Experiência do saber	A experiência com objetos deve ser realizada de forma separada da informação, a quantidade de informação não vai garantir sucesso nas experiências.
Experiência não é opinião	Não se reduz a uma fala sobre informação obtida, deve ser justificada no ato de sentir, tocar e estabelecer conexões.
Experiência e tempo	Sempre vai ficar conectada com algumas ações do cotidiano que são próprias e vivenciadas.
Experiência e trabalho	Ela se fortalece diante momentos de melhora dos produtos, mas não pode ser confundida com um produto final.

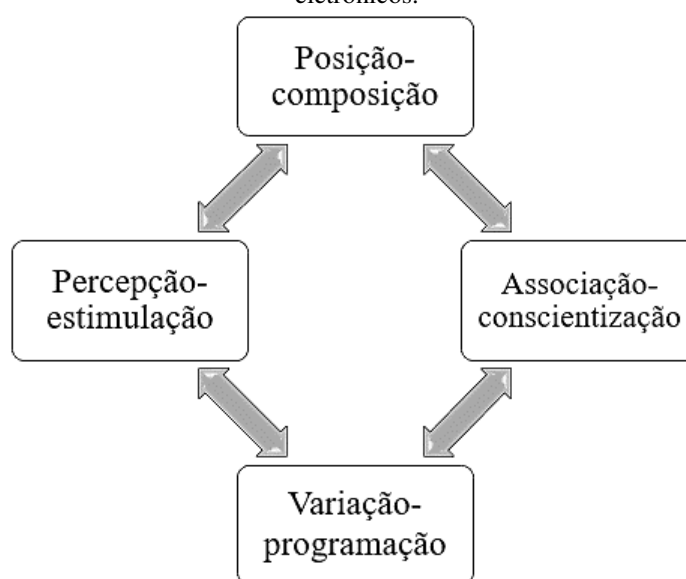
Fonte: Própria do autor.

Aquela experiência adota sentido na prática quando existe alguma tomada de decisão que oferece possibilidades amplas e no campo dos aplicativos tecnológicos estabelece contato com um objeto de forma singular seguindo aspectos como: parâmetros de movimentação,

situação do recurso e relação com a interface que está na ação da corporeidade dos recursos existentes.

Sendo assim, corpo singular e existência de um recurso digital permitem aquisição da experiência com uma série de linguagem impessoal e própria (ORBE; BONDIA; SANGRÁ, 2006). No esquema a seguir; Figura 11, baseado nos tipos de experiências se faz um ressalvo dos aspectos primários presentes na manipulação virtual que vão permitir constituir relações com o recurso eletrônico.

Figura 11- Aspectos principais da manipulação virtual percebidos na teoria e prática com dispositivos eletrônicos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os saberes próprios, podem dar singularidade aos processos de conscientização e associação, os quais são importantes para definir com clareza a relação entre manipulação virtual e experiência nas ações do cotidiano já que, cada pessoa de forma individualizada quando faz aquele estímulo com o aparelho tecnológico seguindo indicações terá a noção do pensamento sobre aquilo que está visualizando e tocando na tela, atribuindo significado para essas atuações realizadas no computador ou celular.

Apresentando a experiência com manipulativos digitais no contexto escolar, podem-se trazer contatos de singularidade diante a iniciativa de situações, relações e discussões, cuja práxis aprofunda na atuação que pode ser manifestada mexendo sobre aplicativos programados no computador e dispositivos eletrônicos e que vão permitir a estimulação e percepção sobre um conceito da matemática que estejam sendo construídos pelos alunos como parte da pesquisa e relacionado com o movimento e grandezas.

### 4.3.2 Laboratório em Educação Matemática

Possibilitar o estudo de conceitos da matemática em espaços de laboratório pode ampliar a panorâmica de estudo na Educação Matemática oferecida nos programas acadêmicos de graduação e pós-graduação, já que estes ambientes são “alternativa diferenciadora, aceitam repensar a imagem da sala de aula dentro de um plano didático com ajudas que ocasionam novos caminhos e saberes” (RIBEIRO, 2019, p. 39).

Sendo assim, laboratório em sala de aula deve ser dinâmico e garantir formação pelo meio das representações de material concreto e artefatos, contemplando aspectos gráficos, simbólicos e numéricos (CAMPOS, 2020). Além do mais, estes espaços devem permitir utilização de recursos dependendo do contexto, caracterizado porquanto a natureza destes espaços pode diferenciar Laboratório de Educação Matemática, Laboratório de Ensino em Matemática e Laboratório de Pesquisa em Matemática.

Estes locais oferecem opções de abordagem por suas condições e especificidades, aqui é considerado o **Laboratório de Educação Matemática** como uma fonte geral que contém Laboratório de Ensino e Pesquisa já que esses são aqueles que auxiliam e proporcionam ferramentas no processo de aprendizado onde o aluno tem uma importância maior e os espaços são diversos, dinâmicos e variáveis (RIBEIRO, 2019).

A utilização de Laboratório no campo da Educação Matemática é uma possibilidade no espaço de aprendizagem, já que estudantes e professores podem indagar com autonomia, responsabilidade e interesse pessoal aspectos conceituais da matemática seguindo uma estrutura “informal” e fazendo descobertas com utilização de recursos que nesta pesquisa estão orientados sobre uso de tecnologias e aplicativos para perceber a função linear num plano variacional sobre ideias prévias dos discentes (FIGUEIREDO, 2017).

Alguns aspectos dos **Laboratórios em Educação Matemática** estão centrados na indagação, aprendizagem de algum conceito, cooperação nessa aprendizagem, construções de conhecimento coletivo e participação ativa (LORENZATTO, 2009).

Por outro lado, **Laboratório de Ensino em Matemática** tem o foco nos “materiais concretos que possibilitam uma experiência fundamental para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos, sendo um tipo de prática de ensino defendida já há algum tempo e que o professor precisa incorporar ao seu planejamento de ensino” (SOUZA, 2022,

p.12). Assim, neste espaço, os recursos manipuláveis que sejam de caráter virtual terão o papel de potencializar e levar aos discentes para a construção de saberes da matemática.

Em relação a **Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática** existe uma vinculação próxima com a formação de professores para a elaboração de ambientes específicos de estudo com a produção própria dos materiais didáticos a serem manipulados (SILVA; SANTOS; MIRANDA; SOUZA, 2023). Pode-se dizer, que a diferença do Laboratório no ensino e pesquisa está focada nos estudos dos materiais necessários para o desenvolvimento de um conjunto de competências em sala de aula, assim, a preocupação principal no campo da pesquisa é procurar, elaborar e pensar em materiais uteis e interessantes no processo de aprendizagem de um conjunto de discentes.

Nesta pesquisa, o foco vai relacionado com um **Laboratório em Educação Matemática** que já contém todas as premissas e as atividades na sua maioria foram pensadas previamente, se faz necessária a indagação e cooperação dos materiais disponibilizados através de utilização e manipulação de recursos tecnológicos que vão aceitar a obtenção de avanços nas diferentes atividades exploratórias propostas no processo com recursos digitalizados de auxílio no desenvolvimento principalmente de pensamento geométrico, aritmético e algébrico por meio de aplicações, discussões e encontros de perspectivas auxiliadas nos espaços propostos com discentes.

#### **4.3.3 Estruturação de um Laboratório no campo da Educação Matemática**

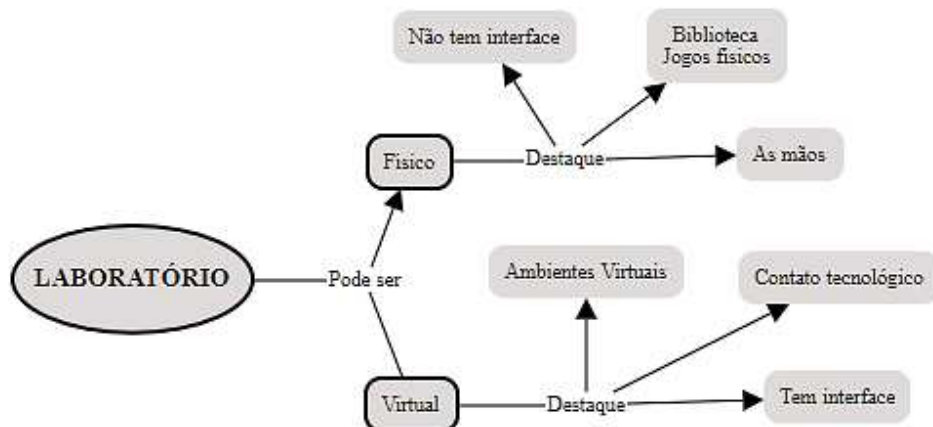
O Laboratório como local para interagir em sala de aula no plano da Educação Matemática, acolhe-se principalmente na manipulação de recursos físicos porque apresentam alternativas de exploração e experimentação, que são auxílio na identificação de conceitos matemáticos de diferente natureza.

Santos (2020) sugere o emprego deste local, partindo da premissa de ativação de pensamento matemático e reflexão de questionamentos com utilização de materiais, recursos e aplicativos que podem ser físicos, mas também podem ser levados no plano de recursos digitais.

Os recursos digitalizados em um espaço virtual permitem explorar propriedades acrescentadas de forma autônoma e proporcionam outro tipo de experiências na compreensão e abordagem de um saber que pode ser focalizado com ajuda de estudo e propriedades como flexibilidade, adaptabilidade e variabilidade.

Na Figura 12, a seguir, apresenta-se uma adaptação simples dos elementos em destaque de um laboratório físico e virtual, com suas principais ideias e atribuições.

Figura 12- Concepção do Laboratório Físico e Virtual.



Fonte: Elaborado pelo autor (Baseado nas ideias de Santos, 2020).

Os laboratórios na projeção atual estão voltados para um entorno digitalizado que também possui uma série de caracterizações associadas com um contato tecnológico, que trazem outro tipo de experiências nos discentes, diante de um conjunto de atividades em ambientes virtualizados, com uma interface e apresentação em uma variedade de explorações com maior efetividade, rapidez e atenção, numa direção que vai focalizar a atenção no estudo de outros elementos com um nível de conscientização ainda maior.

#### 4.3.4 Tipologia das atividades exploratórias virtuais

As atividades denominadas exploratórias no campo da EM podem ser compreendidas como um conjunto de experimentações e descobertas em sala de aula ou espaços de discussão a propósito de saberes e conhecimentos sobre um conteúdo específico do campo da matemática. O material disponibilizado, discussões, exercícios e perguntas planejadas estão geralmente relacionadas aos problemas ou situações propostas, classificadas em abertas ou fechadas (PONTE, 2003).

Nestas atividades, existem critérios que aceitam diferenciar-se ditas classificações com intenção didática, pedagógica ou matemática. No Quadro 7, se explicam de forma concreta aquelas formas de classificação das atividades exploratórias segundo o tipo de experimentação e tarefa executada.



Quadro 7- Caracterização das atividades exploratórias adaptadas no campo da Educação Matemática com Tecnologia.

<b>Tipo de atividade</b>	<b>Interpretação e aplicação</b>	<b>Execução</b>
Descoberta de conteúdo da matemática	Com utilização de materiais interativos e perguntas diretrizes procura-se que os discentes reconheçam conceitos da matemática.	Aberto- Investigação
De simulações	Os discentes com algum tipo de aplicativo, plataforma digital ou ambiente faz movimentação e simulação de um exercício, situação ou problema proposto.	Aberto- Exploração
Construção de objetos da matemática	Através da utilização de diferentes plataformas, os discentes têm a facilidade de explorar novos conceitos da matemática estudada.	Aberto- Exploração
De Resolução de Problemas (RP)	Com situações simples, o professor apresenta e orienta o processo para a resolução de um problema auxiliado com algumas plataformas digitalizadas.	Fechado- Problema
Aplicação de conhecimentos da matemática	Pelo meio da elaboração de atividades dos discentes utilizando os aplicativos para receber um feedback por parte do professor.	Fechado- Exercício

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada categorização abordada (Quadro 7) permite situar o tipo de atividade executada com discentes e com suas intencionalidades e provocações, sendo o foco principal a utilização de aplicativos, plataformas e recursos que vão reconstruir possibilidades de compartilhar e comunicar novos saberes, ideias e configurações desde um ambiente específico esquematizado na virtualização.

#### 4.4 FUNÇÕES E PENSAMENTO ALGÉBRICO NA ESCOLA

As diretrizes dos documentos oficiais estabelecem uma inclusão da função linear desde o ponto de vista algébrico onde se mencionam relações entre grandezas, padrões numéricos e emprego de operações com equações e proporcionalidade direta que são uma porta de entrada aos sistemas analíticos de variação e movimentação (MEN, 2006). Algumas das menções podem ser objeto de dificuldade para discentes em sala de aula, permitindo avanços nulos em relação à detecção de padronização. Sendo assim, é necessária uma abordagem sobre:

[...] a percepção, a identificação e a caracterização da variação e mudança de grandezas em diversos contextos, também sua descrição, modelagem e representação em diferentes sistemas ou registros de símbolos, sejam verbais, gráficos ou algébricos. Um dos objetivos de cultivar o pensamento variacional é construir desde o ensino fundamental, diferentes opções significativas para a compreensão e utilização de conceitos e processos das funções e seus sistemas analíticos (MEN, 2006, p. 66).

O conceito de função desde sua abordagem oferece para discentes elementos de pensamento variacional que tem sido objeto de estudo em diferentes momentos históricos por sua importância para a didática da matemática com interpretações gerais e específicas de um conjunto de dados para uma leitura prévia (GARCIA, 2012).

Sendo assim, a função é um campo de entrada ao pensamento algébrico que vai articulando diversos conhecimentos e saberes para afeição-se questões analíticas encaminhadas à noção de quantidades, variação dessas quantidades e modelagem utilizando relações entre grandezas.

Aproximar-se para as funções lineares no plano escolar, quiçá seja porque muitas situações do cotidiano estão relacionadas com seu acréscimo e desenvolvimento, por exemplo, a mudança de quantidades na movimentação de um automóvel, taxas de juros ou caminhada de uma pessoa que sempre estão dependendo da grandeza do tempo (BERNAL, 2021). Muitas situações podem ser assemelhadas e resolvidas com saberes da função linear por sua potencialidade e análise em contexto.

#### **4.4.1 Estudo da função na literatura**

As funções matemáticas dentre suas considerações podem ser levadas e pensadas desde uma perspectiva didática, epistemológica e tecnológica na atualidade e se faz importante reconhecer cada uma delas em algumas tarefas e desenvolvimento do pensamento variável e algébrico na escola.

A perspectiva didática do conceito de função propõe um estudo e abordagem de ensino e aprendizagem para desenvolver competências no pensamento algébrico, explorando algumas metodologias alternativas como modelagem matemática ou resolução de problemas, que sejam úteis para a modelagem e compreensão desta temática, apoiadas de dispositivos interativos e seguindo uma sequência didática (DUARTE, 2018).

É razoável considerar desde a Educação Matemática, indagação sobre situações simples de variação e mudança em contexto, seguindo estruturações e padronizações simples que expunham as relações deste conceito (BALVIN; VILLA, 2006). Sendo assim, existem possibilidades de gestação e constituição com uma série de levantamentos da temática de estudo (FIORENTINI, 1994).

O campo da didática em relação ao conceito de função linear “pode aportar a modelagem matemática como ferramenta lúdica para construir representações e interpretações associadas ao construto prévio” (BALVIN; VILLA, 2006, p.6, tradução própria), que serão justificativas no uso de representações, análise de diversas respostas obtidas e transições de pensamento aritmético, geométrico e algébrico seguindo raciocínios diversos.

A perspectiva epistemológica do conceito de função linear desde a Educação Matemática tem a ver principalmente com fontes e interpretações, que “estão associadas a sequências gerais de proporcionalidade que estudam padrões de mudança, variações de quantidades como velocidade, tempo, aceleração e finalmente estudo de equações em representações algébricas ou geométricas” (ORDOÑEZ, 2018, p.8).

Aqueles padrões de sequencialidade podem dar resposta ao conjunto de propriedades estabelecidas em sala de aula com discentes que estão focadas principalmente a relação entre grandezas, proporcionalidade direta, variação algébrica e razão instantânea através de representações verbais, tabelas, desenhos gráficos e símbolos algébricos que levam à “consolidação de estruturas de variação e movimento (outro tipo de funções) no desenvolvimento de conhecimento matemático” (BERNAL, 2021, p.42).

Finalmente, a perspectiva tecnológica para o processo de aprendizado da função linear é indispensável já que se estudam fenômenos do pensamento estático e dinâmico para conceber situações de tipo gráfico que ajudarão a compreender formas aritméticas, algébricas e geométricas com condições iniciais para obter uma resposta (SÁNCHEZ, 2015).

A tecnologia com seus avanços e disponibilidade de plataformas interativas no campo da matemática proporcionam novas possibilidades para fazer registros dos estados naturais como parte de um sistema para explicação da realidade matemática presente em conceitos de abordagem (CASTAÑEDA; SALINAS; ADELL, 2020).

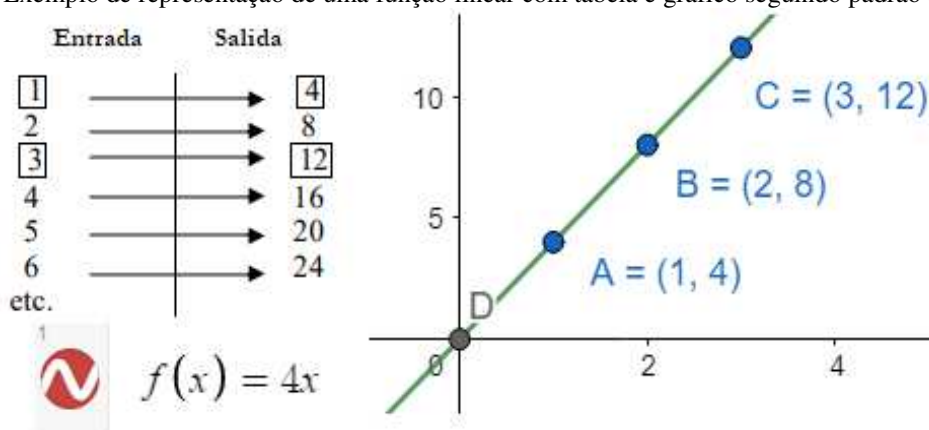
#### **4.4.2 Conceito de função linear pura e afim**

Uma função linear pode ser entendida como uma razão de movimento uniforme que existente entre duas grandezas onde existe uma relação de dependência entre quantidades (BERNAL, 2021). Geralmente as funções quando são de tipo linear podem ser de dois tipos, sendo aqueles um caráter puro ou afim, isso é uma característica estabelecida em livros de texto e definições sobre o conceito de função.

O caráter da função linear pura tem a caracterização de incidir pela origem do plano cartesiano, enquanto o caráter da função linear afim tem uma caracterização de não incidir pela origem do plano cartesiano, atravessando pelo eixo  $y$  com caracterizações e condições bem particulares.

As características da função estão dependendo das quantidades obtidas, ponto de corte no gráfico e representação algébrica. Segundo Duval (2016), para este tipo de caracterizações, existem registros de representação chamados de semióticos, que podem ser adotados para uma função linear desde sua forma numérica, geométrica ou algébrica. Na imagem a seguir (veja Figura 13), se podem olhar as principais representações adotadas para uma função linear.

Figura 13- Exemplo de representação de uma função linear com tabela e gráfico seguindo padrão de números.

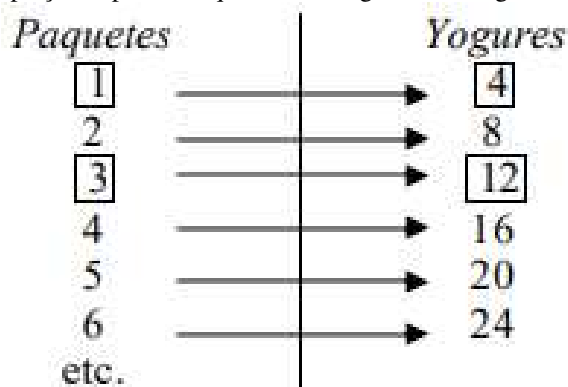


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os aspectos da multiplicação são também uma consideração importante no desenvolvimento da função linear já que pode cumprir com características do isomorfismo de medidas ao pensar em relações ampliadas com quantidades no caso para observar um padrão de crescimento com relações entre grandezas (VERGNAUD, 1991).

Nesse caso, o padrão considerado é de tipo iterativo e discreto porque os números são quantidades inteiras. Na imagem da Figura 14, a seguir, pode-se obter uma representação iterativa seguindo uma estrutura quaternária que relaciona pacotes e iogurtes abrangendo uma estrutura proporcional e tenta ser encaminhado na estrutura linear que é necessária no desenvolvimento de aspectos que estejam relacionados com a função enquanto se realiza uma correspondência entre grandezas que vai gerar um padrão de variação que poderá se escrever por meio de uma fórmula matemática vai trazer outro tipo de representações como a geométrica ou algébrica.

Figura 14- Adaptação explicativa que relaciona grandezas seguindo uma proporção.



Fonte: Vergnaud (1991, p.5).

Outra classificação que também pode ser considerada e baseada no exemplo proposto por Vergnaud (1991) de forma implícita, é aquela relacionada com soma reiterativa que é fundamental na introdução de processos multiplicativos e de contagem que permitem estabelecer padrões de crescimento entre uma quantidade determinada. Esta representação pode vai padronizar a relação a seguir:

$$\sum_{i=1}^k n = n + n + n + n + \dots + n = kn$$

A representação multiplicativa gerada sobre a expressão  $k \times n$  ou  $kn$  tem considerações importantes como, por exemplo; o valor de  $n$  faz o papel de uma medida ou variável, enquanto o valor de  $k$  representa um número de iterações ou repetições para dita quantidade. A forma  $kn$  no plano algébrico com grandezas discretas de números naturais e inteiros pode representar uma noção básica da função.

A variável descrita no parágrafo anterior pode indicar o valor  $n$  como uma quantidade qualquer indicada com um valor de crescimento ou decrescimento dado por a forma algébrica  $f(n) = kn$  e que faz sentido no plano aritmético, métrico, geométrico e algébrico pelas condições operacionais obtidas.

No plano operacional existem diversas formas de compreender aquelas relações funcionais, empregando registros para movimentação de valores numéricos, sequências especiais com grau de padronização e uso de recursividade para obter um valor específico com uma operação concreta que faça sentido no plano do problema e relação entre grandezas que será explorado no apartado a seguir.

#### 4.4.3 Grandezas discretas e contínuas

Uma variável, coleção ou número pode se considerar de caráter discreto, quando existe uma sequência numérica ou geométrica representativa que destaca uma relação entre quantidades inteiras (FLORES, 2021). Aquela relação entre quantidades pode arrumar um número finito de valores entre dois números, dando cumprimento à propriedade de valores inteiros entre eles.

De outro lado, uma variável pode se considerar de caráter contínuo quando existe uma variação entre números ou figuras, estabelecida pelo movimento ou mudança com quantidades reais (FLORES, 2021). Aquela relação entre quantidades pode alcançar um número infinito de valores entre dois números, dando cumprimento à propriedade da densidade nos números reais na qual sempre é possível obter quaisquer números entre duas quantidades inteiras.

A diferença entre variáveis de tipo discreto e contínuo está nas aproximações de medida que podem ser estabelecidas de fato, conjunto numérico definido e propriedades de densidade que faz parte da composição dos números reais que foi descoberta, demonstrada e abordada pelos matemáticos Dedekind, Cantor e Cauchy que no desenvolvimento de hoje são indispensáveis no plano da aprendizagem, história e construção matemática (MUÑOZ; CHOCÓ; MORENO, 2018).

#### 4.4.4 Função linear e representação

Algumas interpretações para a construção do conceito de função linear em sala de aula estão ligadas às formas de representar e utilizar a linguagem como fonte de compreensão e entendimento de fenômenos dinâmicos, sendo assim, a utilização de “jeitos ou regras” para justificar sua análise está relacionada às representações verbal, numérica, visual e algébrica. Aqui é possível para o estudante dentro de um espaço virtual, dinâmico e interativo “construir o conceito de função de uma forma significativa já que ele pode visualizar os gráficos e fazer simulações para entender melhor cada tipo de função” (JÚNIOR; LAUDARES, 2019).

A tipologia e modelo de representação podem também serem analisados diante esse sistema semiótico de transformações, que permite passar e evoluir sobre um conjunto de modelos seguindo um caráter de concreto até conseguir obter modelos de representação abstraídos da realidade que estabelecem, por exemplo, relações de tipo simbólica, algébrica

com entendimentos e apontamentos prévios do modelo oral e numérico que terá assim um maior grau de significado no sentido funcional e operacional.

As representações são assim, modelos linguísticos que simplificam a realidade para permitir estabelecer uma serie de pensamentos que levem a obtenção de respostas encaminhadas para esse modelo. No Quadro 8, a seguir, se exemplificam os modelos aludidos desde sua descrição matemática e tipológica.

Quadro 8- Adaptação de modelo de representação para uma Função Linear.

<b>Modelo ou representação</b>	<b>Linguagem</b>	<b>Descrição Matemática</b>
Verbal ou oral	De tipo enactivo	Descreve com palavras um processo de relação entre duas grandezas.
Númérica	De tipo icônico	Por meio de tabela de valores ou quantidades se faz uma relação proporcional.
Visual ou geométrica	De tipo gráfico- textual	Por meio de um gráfico geométrico ou desenho físico-digital.
Algébrica	De tipo simbólico	Utilizando-se uma fórmula explícita de tipo variacional.

Fonte: Elaborado pelo autor e baseado nas interpretações propostas por Júnior e Laudares, (2019).

Os modelos de representação seguindo as ideais do Quadro 8, podem dar indícios da configuração para se pensar um conjunto de processos encaminhados para a função linear com papel diversificado e focado na utilização de símbolos e gráficos, para responder a questões, percepções e definições sobre um objeto seguindo diversos auxílios físicos com uma ênfase sobre a tecnologia e recursos digitais.

#### **4.4.5 Interpretação da função linear no plano escolar**

Relacionando algumas definições, ideias prévias e argumentações de autores como Mesa (2016), Flores (2021), Castro e Rodrigues (2022) sobre o conceito de função desde a literatura e material didático para sua abordagem, propõe-se uma categorização associada a possíveis interpretações deste conceito no plano escolar por estudantes com execuções de atividades em sala de aula, revisão em materiais escolares, dissertações e livros de texto. Apresenta-se de forma detalhada uma adaptação com interpretação, tipo de variável e tratamento com uma descrição curta.

No Quadro 9 existem relações gerais sobre algumas percepções visadas para exploração da função linear na sala de aula, adotando uma estruturação progressiva com

respostas que podem ser elaboradas no plano discreto até adquirir consciência da utilização de quantidades contínuas com diversos elementos prévios como gráfico, tabelas, operações aritméticas e recursividade para exploração de respostas no plano do movimento, razão e generalidade no plano algébrico. Faz-se esclarecimento que aquelas caracterizações são próprias e baseadas na literatura e percepções exploradas.

Quadro 9- Concepções sugeridas para adotar e compreender ideias da Função Linear no plano escolar.

Interpretação	Tipo de variável	Características
Proporção geral	Discreta	Podem ser identificadas algumas regularidades de acordo a um instinto funcional que é de cunho multiplicativo (CASTRO; RODRIGUES, 2022).
Coordenação de valores reais como regra	Contínua	Se deixa uma quantidade numérica qualquer com um operador para obter uma resposta que obedeça a uma regra.
Razão, mudança e incremento	Contínua	Existe uma dependência variacional com expressões analíticas e geométricas no plano cartesiano (CASTRO; RODRIGUES, 2022).
Sequência numérica	Discreta	Servem para estabelecer padrões de valores numéricos para obter uma relação (FLORES, 2021).
Uma representação de linha reta	Contínua	É dinâmico e interage com o movimento de uma linha reta e sua inclinação com ponto de corte (MESA, 2016).
Equação aritmética	Discreta	Pode-se utilizar para relacionar um valor numérico que pode ser desconhecido e deve ter uma relação com um valor inicial.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Do Quadro 9, não existe uma ordem na aquisição ou reinterpretção das características propostas já que podem ser estudadas diante diversos materiais, situações e diálogos que levem a sua correta utilização e estabelecimento com auxílio de representações, equações e gráficos em concordância com as dinâmicas.

Segundo Lima (1999), as relações de função geralmente são pensadas no plano dinâmico e nela existem noções conceituais de transformações geométricas pelo domínio e contradomínio de conjuntos que podem ser nomeados de  $X$  e  $Y$  e que além, contém uma correspondência, regra, critério ou instrução (veja definição do Quadro 9) com características de pertencer ou não pertencer seguindo condições iniciais que podem ser de tipo numérico, geométrico e algébrico.

As classificações apresentadas no Quadro 9 estão dirigidas como fonte de orientação sobre possíveis entendimentos da função linear em atividades sequenciais, conhecimentos



prévios, utilização de material tecnológico e discussões que levam a pensar e potencializar cada interpretação. Além disso, estas interpretações aparecem em diversas aplicações práticas e leis da natureza que são úteis pela simplicidade e consideração de variações não lineares que até poderiam acarrear condição de linearidade.

Seguindo as experiências individuais, coletivas e baseadas na prática educativa desenvolvida, existe um interesse por estudar aspectos das funções porque este conceito é inserido em uma transição para o entendimento de fenômenos aritméticos e numéricos, visualizados com um nível de abstração de ordem algébrico; discentes e professores apresentam dificuldades para explorar e fazer abordagem pelas relações que devem ser estudadas já que:

[...] percebemos que em sala de aula as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao trabalhar com gráficos que representam uma função, é que eles analisam o gráfico no sentido de indicar o crescimento ou decrescimento, o valor máximo e mínimo nas funções onde é possível determiná-los, a associação de uma lei de formação ou a conexão do gráfico com o conceito formalizado de funções, os estudantes nem sempre conseguem estabelecer as relações adequadas (GONÇALVES, 2015, p. 75).

As preocupações e dificuldades percebidas no parágrafo referido são frequentes também no contexto colombiano, porque ensinar funções em um ambiente escolar de sala de aula traz implicações como entendimento da linguagem, consignação de relações sobre a mesma definição, expressão de grandezas por modelos de representação diversos e, finalmente, flexibilização de fenômenos em situações e conexões com várias áreas do conhecimento (GONÇALVES, 2015).

Além disso, sobre as diversas conexões que os discentes devem estabelecer, a representação e uso da consciência desta darão elementos para descrever mudanças, transformações e variações de quantidades que ainda hoje com as estratégias e uso de diversos aparelhos estão com dificuldade para modelagem de fenômenos e conversão de registros (VALENCIA; CERÓN, 2018).

Existem juízos que permitem dar comprovação para aproximar-se das funções como o conceito que está presente em vários locais, conectados com a própria matemática, sendo flexível para expressar relações entre modelos de tabelas, gráficos, fórmulas e figuras. Segundo Mesa (2016), aquelas relações entre grandezas dão possibilidades de estudar padrões e regularidade com modelagem para perceber fenômenos de variação. Assim:

[...] é um levantamento inicial para qualificar a variação de grandezas, mesmo que, em ensino fundamental se podem diferenciar as funções lineares fazendo conexões com um estudo de proporcionalidade direta para na frente, em ensino médio se façam

associações com variações que apresentam o conceito de derivada (MESA, 2016, p.19).

O estudo inicial e manipulação das funções lineares em disposição dos autores permitirão desenvolver nos discentes um pensamento dinâmico, estudando configurações de relação entre objetos em situações reais que vão inserindo conceitos como proporcionalidade direta, sequências de padrões e sucessões, com modelagem que irão encaminhar o conceito de função linear em um estado natural de compreensão.

Os procedimentos se mostram importantes pela opção para os discentes identificarem variáveis que estão no problema em distintos níveis, com coletas de dados e descrições em graus diferenciados em que função linear é um elemento inicial para descrever como uma quantidade depende de outra e pode ser validada com tecnologias pelas modificações de dados que estas oferecem (CUARTAS, 2012).

A consideração de dados numéricos e algébricos terá consequências em procedimentos futuros, já que professores e estudantes darão sucesso seguindo a estrutura de reconhecer, perceber, identificar e caracterizar objetos, relações e grandezas do pensamento aritmético, levado ao plano do pensamento algébrico.

O processo de estudo com funções lineares, como temática central no ensino e aprendizagem, permite estabelecer transformações de corpos, figuras e números que podem ser vivenciadas e experimentadas em espaços de sala de aula, com autonomia e com tendências à procura de fonte de significado (CABALLERO; VILLAREAL, 2021).

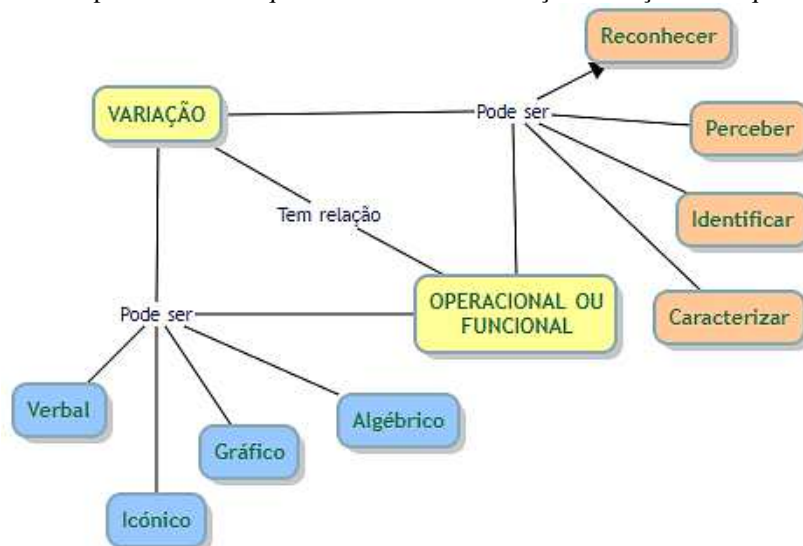
No entanto, aspectos teóricos e práticos tem sido objeto de reflexão nas condições de ensinamento e aprendizagem, gerando pensamentos dinâmicos e abstratos, estes pensamentos irão ser encaminhados a fatores de interpretação em disciplinas de estudo por meio de uma série de condições de emprego de fórmulas, gráficos ou tabelas que podem ser físicas e digitais.

Enfatiza-se no caso digital, elaborações interdependentes na tendência de utilização da tecnologia por abranger construções interativas e de movimentação de uma Função Linear que sempre no contexto escolar vai permitir “mudança de cenários da sala de aula para um ambiente computacional, com efetivas participações do aluno para, conseqüentemente, apropriar-se da teoria” (PAULA; RODRIGUES; SILVA, 2016, p. 19).

No esquema da Figura 15, se expõem alguns aspectos em destaque sobre a percepção de condições de variabilidade importantes na apropriação e entendimento de conceitos da

matemática relacionados com o pensamento algébrico que são necessários para serem levados na sala de aula seguindo diversas estruturas como identificação de padrões de sequencialidade, caracterização de grandezas e reconhecimento de vários tipos de representações sobre um objeto ou situação.

Figura 15- Aspectos em destaque do fenômeno da variação e relação entre quantidades.



Fonte: Elaborado pelo autor (Baseado nas ideias de Duval, 2016).

Este material de apoio vai dar abrangência às representações sobre um conhecimento da matemática que pode ajudar na solução de problemas encaminhados à função linear, reconhecendo parâmetros como grandeza, pendente de uma função, interseção e quantidade variável em um contexto estrutural, representacional como está apresentado na Figura 14, quando explicitamente se tem os elementos principais para pensar em fenômenos da variação com representações encaminhadas ao plano tecnológico.

No capítulo seguinte se vão apresentar aspectos experimentais estruturados a partir do percurso metodológico da pesquisa. A ênfase será estabelecida sobre a estrutura do Produto Educacional e a construção das atividades baseado nas contribuições de parâmetros pedagógicos curriculares (MEN, 2006) e de organização didática, seguindo uma estrutura descritiva de cada atividade a ser proposta com elementos em destaque como: organização, descrição, tempo, desenvolvimento e aplicativo e *links* utilizados.

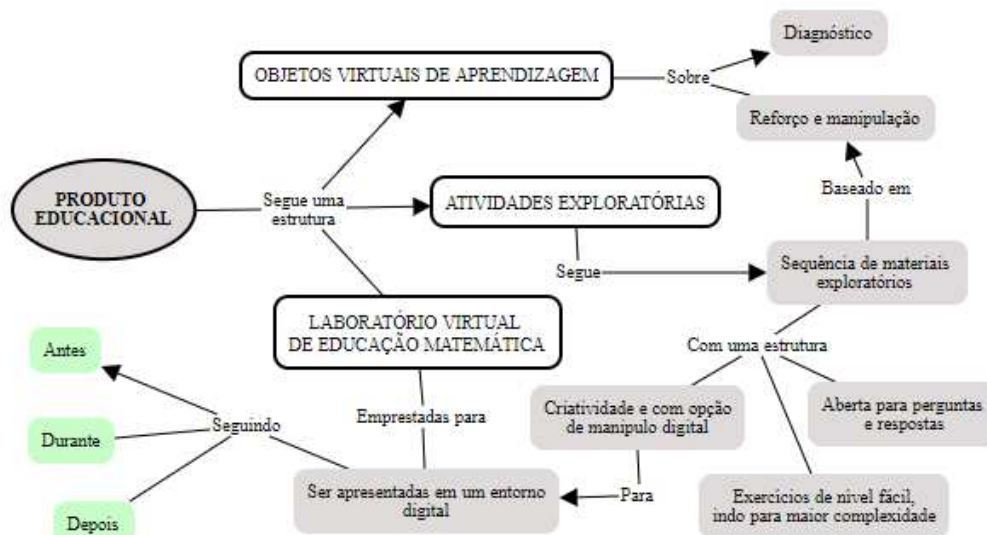
## 5 DESENVOLVIMENTO DE MATERIAL DAS ATIVIDADES

Para a elaboração do material utilizado em sala de aula, se fizeram diversas explorações sobre atividades *online*, ambientes de aprendizagem e aplicativos disponibilizados que foram analisados seguindo a linha dos objetivos e questão de pesquisa. Os recursos achados foram organizados na primeira etapa em um espaço virtual, depois se exploraram aplicativos e programas através de atividades exploratórias para finalmente deixar na disposição de forma *online* com módulos seguindo como padrão o desenho do LaPEM-v.

### 5.1 PRODUTO EDUCACIONAL (PE)

O Produto Educacional (PE) desta pesquisa, foi pensado sobre três etapas pelas razões a seguir: temática de estudo e sua abrangência, apoio ao referencial teórico, busca de informações para disponibilizar de aplicativos e atividades na manipulação com recursos e simulações oferecidas pela tecnologia. Na Figura 16, a seguir, apresenta uma sequência do decorrer com uma explicação rápida do funcionamento do PE com algumas das suas principais caracterizações.

Figura 16- Organização da estrutura do Produto Educacional.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os espaços para o desenvolvimento do PE estão baseados em atividades para estudantes seguindo a série de manuseio de aplicativos digitais por meio de atividades de estudo, *design* de orientações para o professor e *feedback* com a intenções de reconhecer

algumas aprendizagens prévias, avanços, concepções e formas de desenvolver com cada material disponibilizado de forma *online*.

Pensou-se inicialmente na elaboração de atividades sobre um Objeto de Aprendizagem (OA) com atividades diagnósticas sem serem aplicadas e com uma estruturação e organização definida para descobrir o funcionamento de alguns aplicativos em espaços digitais e com interfaces de tipo interativo.

Em seguida, a estruturação principal está sendo focada na construção de atividades exploratórias com diversos aplicativos como *Desmos*, *Mathigon*, *Colab-Python*, *GeoGebra*, *PhET* e *Wolfram*, para serem provadas com estudantes em algumas sessões virtuais, focalizando aspectos principais da construção de uma função linear e suas interpretações.

No final, espera-se estabelecer módulos com atividades virtualizadas seguindo como, por exemplo, o LaPEM-v com uma guia para o professor e estudante que seja útil na reestruturação de conhecimentos focados na função linear com uso de recursos tecnológicos.

## 5.2 OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAGEM (OA)

Após encontrar atividades nomeadas de “boas atividades” na disciplina *Softwares Educacionais*, foi possível esquematizar de forma prática um OA que aportou ideias na trajetória percorrida, especialmente na inserção de aplicativos e estudo de laboratórios digitais para analisar manipulação de artefatos, nas compreensões da função linear com discentes de ensino fundamental.

O local no qual foi desenvolvido o OA foi no aplicativo *Genially*, que possui facilidade, acessibilidade e navegabilidade na sua interface e, além disso, dá garantia de que a informação pode ser acessada em qualquer lugar, situação ou momento se o pessoal tem acesso à *internet*.

As unidades temáticas deste OA estiveram centradas inicialmente no reforço sobre a proporção direta com relações numéricas que vão se levando ao plano algébrico, através da manipulação de sequências geométricas com fórmulas algébricas. O usuário poderá acessar e verificar as informações do OA [clcando aqui](#). Na tela inicial, haverá a opção de explorar ferramentas e aplicativos inseridos segundo a orientação e interesse do usuário com apoio de material referido as funções lineares.

O material encontrado foi elaborado em língua espanhola pelo contexto de manipulação onde se faz necessário o domínio das palavras e terminologia e onde o usuário pode acessar a 6 *sites* diferentes que trazem funcionalidade caso o discente possa explorar, de forma autônoma e direta, aplicativos no mesmo programa, vídeos interativos que são explicativos e leituras que podem aperfeiçoar o processo.

No Quadro 10, a seguir, apresentam-se aspectos em destaque da janela principal, começando com os conceitos até chegar ao material de apoio que é fonte para fazer *feedback* do processo.

Quadro 10- Descrição dos elementos principais elaborados no aplicativo Genially.

Bloco	Descrição
<b>Nova missão</b>	Neste bloco estão contidas as atividades propostas no Objeto de Aprendizagem que fazem um total de três e podem ser acessadas de forma automática e direta com uma explicação e pergunta de abordagem em cada <i>slide</i> ou bloco.
<b>Conceitos</b>	Neste bloco, o discente poderá acessar a diversas definições de proporção direta como um reforço inicial e apoio que explicam sua origem e composição para generalizar funções lineares. Os usuários também poderão acessar para um vídeo explicativo sobre as funções e sua relação com a proporção simples.
<b>Feedback</b>	Este bloco permitirá aos estudantes e professor acessar a uma janela interativa no aplicativo <i>Padlet</i> para escrever algumas considerações das atividades iniciais desenvolvidas no processo. Os usuários podem compartilhar respostas e utilizar de forma pública cada comentário deixado, além disso, o professor pode conferir e corrigir no aplicativo de forma direta.
<b>Explicação</b>	Neste bloco se podem acessar a diferentes aplicações clicando sobre cada destaque e, além disso, o discente poderá encontrar um formulário de avaliação sobre conceitos prévios da proporcionalidade que ajudarão a encaminhar atividades sobre a função linear.
<b>Storyboard</b>	Neste bloco se apresenta uma situação do cotidiano para fazer provocações sobre o conceito a ser estudado nos blocos que vão ser explorados na frente do processo de desenvolvimento.

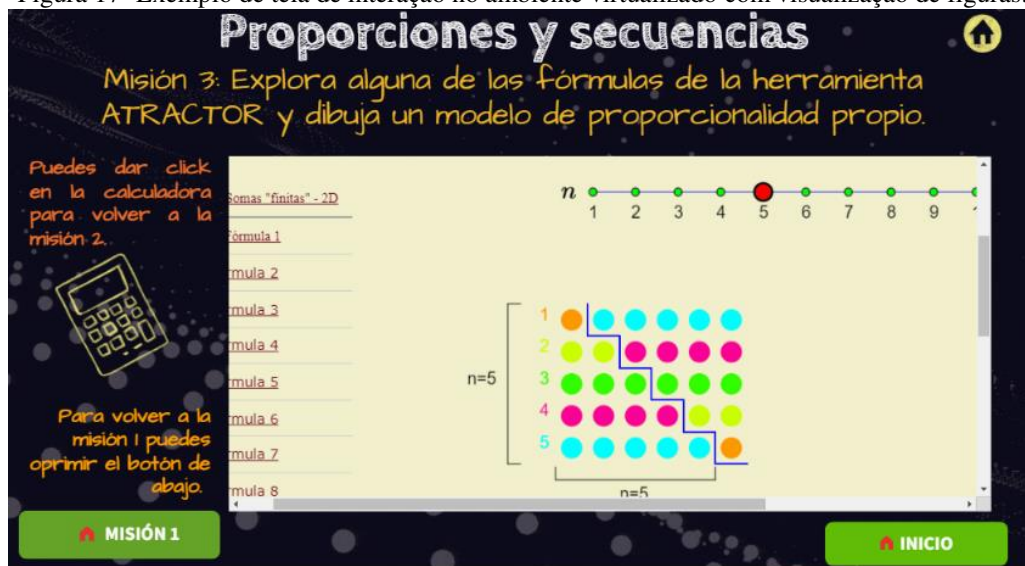
Fonte- Elaborado pelo autor.

Além disso, existe um bloco de apoio nomeado de “material de apoio”, que é de encerramento das atividades propostas e está focado em oferecer atividades que estejam relacionadas diretamente com a temática de estudo, utilizando e executando uma manipulação de aplicativos digitais para compreender a função linear.

Um exemplo do desenvolvimento pensado e que foi utilizado também tanto na aplicação piloto como no módulo 2 é sobre a missão 3 do jogo na plataforma *Atrator*, onde está disponibilizado um ambiente com movimento e figuras geométricas que possui uma fórmula e

representação de movimento que permitiu discutir algumas ideias da proporção direta e função linear (veja Figura 17).

Figura 17- Exemplo de tela de interação no ambiente virtualizado com visualização de figuras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os blocos deste ambiente interativo podem aportar elementos na construção e *design* das atividades a ser inseridas num espaço digital com manuseio de vários aplicativos de tipologia interativa, além de ter a propriedade de permitir fazer retorno para a tela do início em cada uma das janelas, simulações ou explicações como parte do procedimento para compreender e propor ações de cada momento.

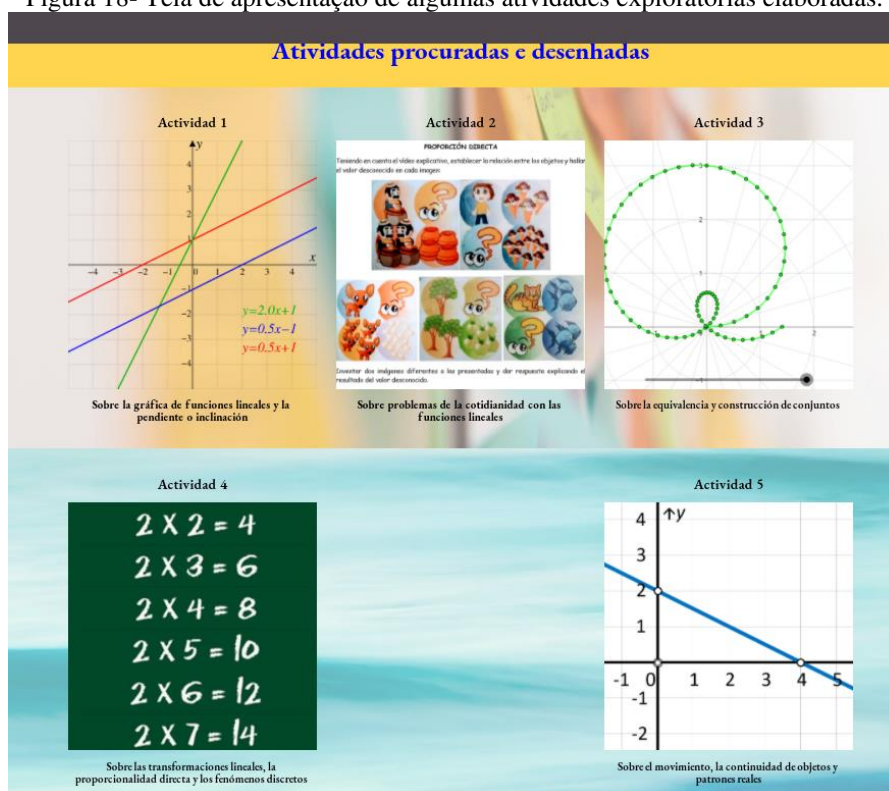
O professor e os alunos também podem escolher o percurso para desenvolver e estudar cada material com *links* e apresentações emergentes, vídeos, textos e navegação livre que está organizado e vai permitir que cada estudante dê evidência de avanços a disposição em sala de aula e com seu próprio ritmo na construção dos saberes, que esperam se explorar com o professor no espaço digital.

Algumas das construções que foram elaboradas e, além, utilizadas nas fases da pesquisa, estão propostas no aplicativo *GeoGebra* como auxílio aos processos de manipulação gráfica, tabela de valores e equação algébrica que, na frente, terão inseridas perguntas de apoio e materiais em outros aplicativos digitalizados como *Desmos* ou *Cabri* em outras atividades, que são fonte de apoio digital nas manipulações virtualizadas e simulações de situações da matemática escolar.

### 5.3 ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

No processo de elaboração e busca de atividades, também se arrumou uma sequência de materiais em forma de exemplo para descobrir atividades e aplicativos úteis que pudessem ser manipulados com os estudantes de forma síncrona e híbrida. Estes aplicativos estão baseados inicialmente nas experiências com materiais físicos que podem ser utilizados em espaços digitalizados, para compreender diversos fenômenos da matemática com a tecnologia como foco de atenção na sua utilização.

Figura 18- Tela de apresentação de algumas atividades exploratórias elaboradas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, foi importante a elaboração de um mapeamento no espaço do *Google Sites* que permitiu estabelecer de forma simples e rápida um conjunto de atividades digitalizadas (Figura 18). Cada atividade inserida, tem uma relação com manipulação de recursos para construir o conceito de função linear que foram estruturados posteriormente nos módulos de aula planejados para os discentes (veja atividade 4 no parágrafo seguinte).

Alguns resultados daquelas atividades têm a ver principalmente com a questão da provocação em uma situação problema, jogo interativo e manuseio de algumas expressões básicas que pessoalmente foram escolhidas pelo interesse que podem ter e facilidade para serem



adaptadas com perguntas e discussões em um espaço de aula. O número de atividades procuradas foram cinco e estão descritas de forma geral, conforme a seguir:

1. **Atividade 1:** Posições das retas no plano e seu estudo com um jogo na plataforma PhET.
2. **Atividade 2:** Estudo de situações para identificar uma variável dependente e independente com linguagem algébrica.
3. **Atividade 3:** Da equivalência com números inteiros e pontos num plano para a construção de um conjunto de retas.
4. **Atividade 4:** Sobre o movimento de um objeto para estudar fenômenos dinâmicos e de mudança.
5. **Atividade 5:** Exercício de provocação e manipulação de gráficos com funções de grau um no Laboratório Virtual de Pesquisa em Educação Matemática.

O modelo de atividades procuradas em plataformas digitais ajudou na escolha dos aplicativos a serem organizados em cada módulo, e além disso, deram uma visão de possibilidades para o planejamento das perguntas e aproveitamento dos recursos com um conhecimento prévio do aplicativo em questão. O experimento também permitiu adotar sobre novos saberes propostos na compreensão da função de primeiro grau chamada de função linear no âmbito geométrico e algébrico com a tecnologia como o foco principal na experiência em um espaço como *Google Sites* que oferece de forma dinâmica vídeos, explicações e representações escritas disponíveis de forma livre<sup>3</sup>.

#### 5.4 APLICATIVOS PARA LABORATÓRIO

Após da busca de aplicativos, se optou por organizar cada informação desses programas nos módulos propostos de cada plano de aula para serem abordados com os discentes em cada espaço segundo a temática orientada sobre a compreensão da função linear partindo do plano numérico até o plano algébrico.

---

<sup>3</sup> Exemplo de página de acesso disponibilizada na plataforma *Google Sites* sobre a noção de função, exemplos e explicações com vídeos no YouTube, [clique aqui](#) para acessar.

Os aplicativos a serem utilizados inicialmente, tinham que oferecer uma exploração fácil e dinâmica na abordagem das situações propostas. Assim, se fez a escolha dos aplicativos *Desmos* e *PhET* (Quadro 11) já que na sua página se compartilha material que sempre está disponibilizado e até propõe-se questões provocadoras que podem ser fonte de apoio para o professor. Além disso, no aplicativo *GeoGebra* se elaborou uma atividade simples com controle deslizante que permitisse complementar aqueles materiais dos outros programas a serem explorados nos módulos iniciais.

Quadro 11- Programas utilizados como fonte de apoio para o desenvolvimento de cada plano de aula.

APLICATIVO	FUNCIONALIDADE E DESCRIÇÃO
<b>GeoGebra</b>	É um <i>software</i> dinâmico de matemática de uso gratuito que tem material disponibilizado de forma <i>online</i> e que possui também um aplicativo <i>off-line</i> .
<b>Desmos</b>	É um aplicativo gratuito que tem muita similitude com o GeoGebra e que também tem material disponibilizado de forma <i>online</i> .
<b>Mathigon</b>	É uma plataforma com lousas interativas e material para elaborar situações de aprendizagem envolvendo aspectos de frações, álgebra e funções.
<b>Atractor</b>	É uma ferramenta disponibilizada de forma <i>online</i> onde vai se explorar sequências de padrões numéricos e geométricos.
<b>PhET Colorado</b>	É uma ferramenta de física desenvolvida para atividades com aplicativos e simulações interativas que fazem <i>feedback</i> de forma <i>online</i> .
<b>Colab- Python</b>	Colab é um serviço de nuvem da <i>Google</i> para inserir comandos de inteligência artificial e programação.
<b>DFD</b>	DFD é um programador de código livre que ajuda na análise de sistemas, tomada de decisão e detecção de erros diante um diagrama de fluxo com descrições e simbologia de dados.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No Quadro 11 apresentado, observa-se a descrição desses aplicativos escolhidos pela facilidade para serem explorados em sala de aula com estudantes, utilização de recursos *online*, que traz atividades bem interessantes e variedade na exploração de aplicativos com interface de geometria e álgebra.

Estes aplicativos possuem recursos *online* que vão acabar sendo auxílio na resolução das situações propostas de forma rápida e dinâmica. Além disso, o professor vai orientando com diferentes discussões, a resolução e compreensão das questões planejadas, que finalmente serão respondidas seguindo as interações corretas com cada recurso mexido e explorado.

## 6 ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Sobre o estudo na pesquisa, é necessário instituírem aspectos fundamentais seguindo o cunho qualitativo para a elaboração e aplicação das atividades sobre a temática de estudo (BOGDAN; BIKLEN, 2013). Baseado nos critérios de delimitação da questão de pesquisa, objetivos da pesquisa, formulações para o referencial teórico, Revisão da Literatura e testagem sobre algumas atividades com discentes com respostas sobre os aplicativos (Figura 19), realizou-se um quadro com algumas explicações do procedimento a seguir na elaboração da pesquisa no percurso final.

### 6.1 PLANEJAMENTO INICIAL

Veja-se a estruturação construída das etapas e projeção para a implementação das atividades com os discentes, seguindo um procedimento e tempo de aplicação (Quadro 12) que permitiu analisar e relacionar os aspectos relevantes com as manipulações virtualizadas em sala de aula.

Quadro 12- Sequência das atividades e sua projeção de elaboração com discentes.

<b>Etapa</b>	<b>Procedimento</b>	<b>Tempo</b>
1	Estudo de <i>sites</i> digitalizados e manipulação de <i>software</i> para o <i>design</i> das atividades e diagnóstico e elaboração de aulas piloto para testar as atividades.	2 meses
2	Criação dos espaços seguindo a sequência de exploração nos aplicativos utilizados no diagnóstico com os discentes.	5 meses
3	Análise dos resultados obtidos com estudantes em aplicações prévias sobre o processo manipulativo dos aplicativos, formulários, enquetes e fotografias.	4 meses
4	Preparação de relatório com o respectivo Produto Educacional, referências bibliográficas, traduções caso sejam necessárias para desenvolver a defesa da pesquisa com todas as sugestões da qualificação.	5 meses

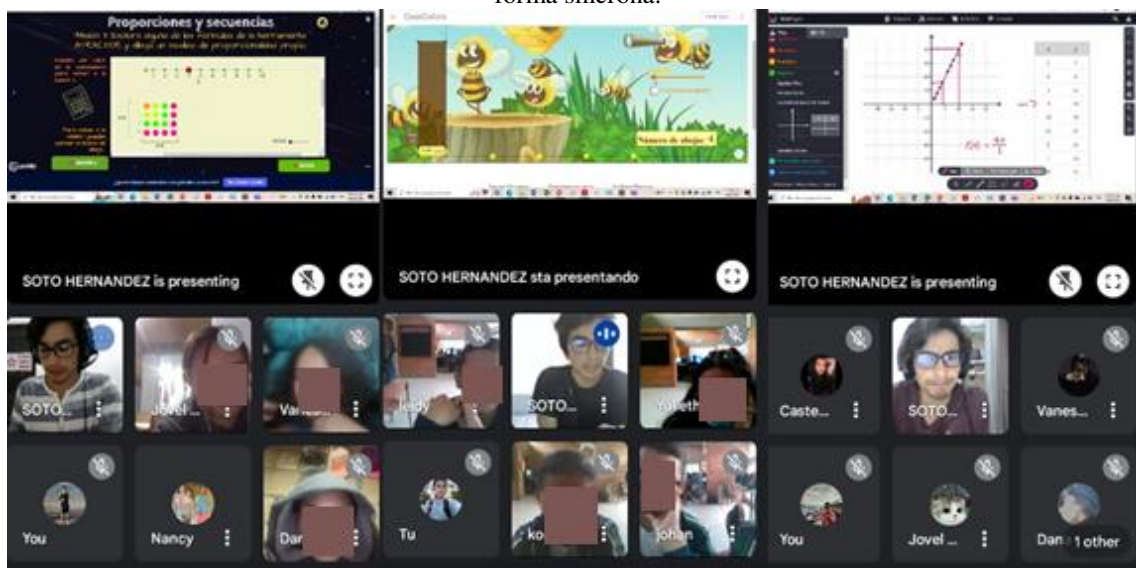
Fonte: Elaborado pelo autor.

O planejamento (veja Quadro 12) oferece tentativas de tempo e procedimento a seguir depois da elaboração escrita encaminhando aspectos práticos. Em relação aos *softwares* e aplicativos a serem utilizados, se fez uma testagem inicial (Anexo 1 e 2) com a intenção de explorar alguns recursos tecnológicos e plataformas interativas, gerando uma série de discussões que estivessem focadas na importância e auxílio que a tecnologia pode oferecer na resolução de situações simples.

Nesta testagem inicial, se propuseram 3 aulas piloto organizadas no módulo 0 com discentes de 8º do ensino fundamental que foram ministradas de forma síncrona com a intenção

de esclarecer ideias sobre o uso dos aplicativos estudados e as atividades exploratórias propostas. As aulas ministradas tinham uma exposição inicial dos aspectos relevantes do *software* em questão, uma situação problemática, uma discussão sobre a resolução da situação utilizando o aplicativo como auxílio e uma reflexão “avaliativa” sobre o conteúdo relacionado com sua produção e importância (veja Figura 19).

Figura 19- Exemplo da aplicação das aulas piloto com estudantes de ensino fundamental na escola de Bogotá de forma síncrona.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A exploração inicial utilizando recursos tecnológicos, ajudou no esclarecimento de ideias, organização e abordagem da temática seguindo uma estrutura que permitisse aprontar os elementos em destaque para a pesquisa, além coletar as entregas dos discentes.

## 6.2 TESTAGEM INICIAL SÍNCRONA E ASSÍNCRONA

O processo nas aulas de testagem, permitiu ilustrar um percurso sobre o emprego dos aplicativos e organização das aulas a serem ministradas em encontros futuros síncronos (Figura 19). Essencialmente, foi pensado ministrar todas as aulas na escola, mas pela questão da internet, as sessões foram programadas para que os discentes fizessem a exploração desde casa com um horário fixado e com apoio do professor no processo de aprendizagem (Figura 20).

Neste piloto, foram explorados aplicativos como *Atractor*, *Mathigon*, *GeoGebra* e *PhET* como auxílio na solução de situações do cotidiano e relação entre grandezas. Além, se propuseram questões aproximadas à reprodução de uma representação em papel ou tela do

aplicativo com aproveitamento da ferramenta para evoluir na solução e compreensão de conceitos e manuseio de aplicações para descobrir um padrão de recursividade sobre sequência de números e figuras que são abordados e analisados no Capítulo 7.

A exploração dos aplicativos e discussão com os discentes, estiveram orientadas sobre questões do plano de aula elaborado (Anexos 1 e 3) com formulários que auxiliaram também o seguimento dos discentes do Colégio Chuniza Fámaco na Colômbia com quem se fez a parceira e quem permitiu que a turma pudesse acessar para um espaço de explicação focado especialmente no entendimento e compressão de fenômenos da matemática saídos da sala de aula que fossem complementados em casa.

Figura 20- Exploração dos aplicativos por parte dos discentes no colégio Chuniza Fámaco com reunião síncrona.



Fonte: Elaborado pelo autor.

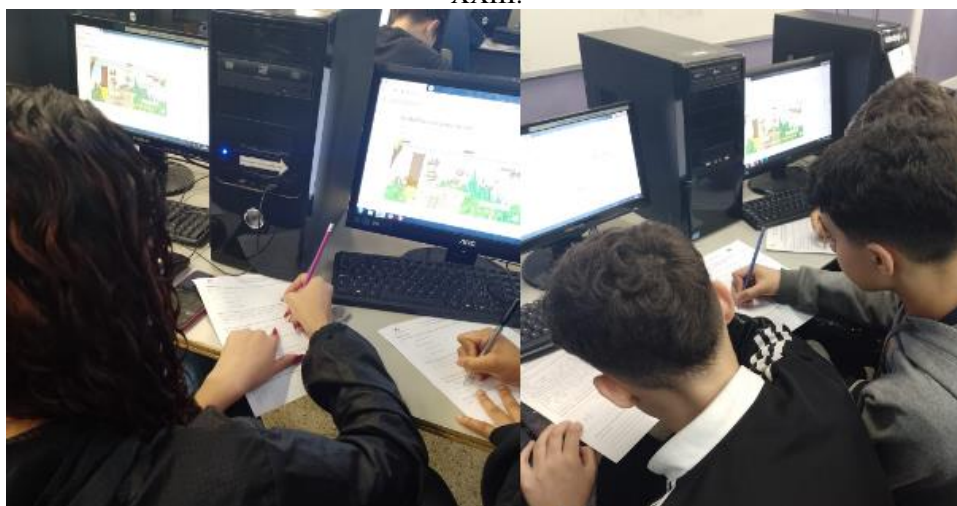
Atribuiu-se uma atenção sobre elementos na manipulação virtual, seguindo uma estrutura de exploração e orientação feita por parte do professor nos espaços síncronos, assíncronos e físicos. Deve-se elucidar que as primeiras atividades desenvolvidas foram realizadas quando a pesquisa estava ainda em andamento ou etapa de projeto de pesquisa e alguns referenciais, corpo da metodologia e escolha dos aplicativos estavam sendo estudados e precisavam de um maior aprofundamento para as futuras aplicações.

Alguma tentativa das atividades propostas inicialmente, constituiu provocações para esta pesquisa que foram pensadas desde a disciplina de *software* educacional como uma opção na elaboração de recursos educacionais baseados na tecnologia e utilização de aplicativos na matemática que fossem explorados por os discentes na constituição de saberes relacionados com a proporção direta.

### 6.3 INTERVENÇÃO NO COLÉGIO DE APLICAÇÃO JOÃO XXIII

O processo de intervenção no Colégio de Aplicação João XXIII foi realizado com estudantes de oitava série, propondo a leitura das questões (Anexo 2) sem utilização dos aplicativos, mas com acesso para computadores e organizados em duplas no Laboratório de Informática.

Figura 21- Resolução das questões propostas para os estudantes no Laboratório de Informática do colégio João XXIII.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente, tinha se pensado fazer esta aplicação só utilizando a primeira turma de estudantes da oitava série com instrução proposta no anterior parágrafo. Porém, a atividade foi realizada com as turmas inteiras dos discentes em espaços bem diferenciados e com horários definidos pela professora da escola.

Na primeira turma de discentes, o processo foi levado conforme com o plano de aula elaborado e sem problema nenhum, mas na segunda turma aconteceu que os computadores ficaram ligados e os discentes desde o começo da atividade, conseguiram acessar para o aplicativo GeoGebra com o problema da abelha aberto na janela. Assim, os estudantes deram



as respostas rapidamente do formulário (Anexo 2) e o tempo para conferir, discutir e analisarem foi curto porque cada consideração foi resolvida na hora.

Figura 22- Interação e discussão dos discentes no aplicativo das abelhas no Laboratório de Informática do colégio João XXIII.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na última turma, foram readaptadas algumas ideias para a aplicação com ajuda da professora para otimização de tempo, organização do espaço e utilização dos computadores. Assim, a atividade foi feita apresentando unicamente o *slide* e seguindo a sequência para acessar ao aplicativo depois de serem resolvidas as 4 primeiras questões. Nesta turma, a atenção foi dada especialmente na resolução de dúvidas e questões operativas com o computador.

Destaca-se no processo desenvolvido com os discentes de maneira presencial que todas as turmas disseram que não tiveram a oportunidade em espaços anteriores de utilizar o aplicativo GeoGebra e ainda ter a sua disposição o aplicativo pronto como auxílio para responder as questões propostas. Além disso, na experiência pessoal dos alunos, eles manifestaram a importância de interagir em Laboratório de Informática para a resolução e discussão de situações baseadas no uso de aplicativos e dispositivos tecnológicos.

Encerrando a testagem com os estudantes e seguindo os parâmetros do plano de aula elaborado, se discutiram algumas respostas e se fizeram esclarecimentos com o aplicativo sobre os cálculos matemáticos a serem feitos para a resolução, além de coletar as informações dos formulários para ser analisada como parte do processo, focando uma atenção especial nas respostas vinculadas com a manipulação virtualizada em espaços físicos e digitais através de uma tabela no Excel (Anexo 6).

## 6.4 MÓDULOS E CRONOGRAMA

Seguindo as orientações nas disciplinas e encontros coletivos, acompanhados da exploração prévia com os aplicativos digitalizados escolhidos, se discorreu sobre a seguinte organização para a estruturação das atividades com três módulos, cada um deles com uma ou duas atividades a serem estudadas com aplicativos diferenciados e complementares que serão importantes no desenvolvimento e compreensão da situação proposta.

Ressalta-se que para cada módulo se tem um objetivo de estudo proposto para os discentes, recursos a serem utilizados no desenvolvimento das aulas e finalmente um resumo geral da abordagem (Quadro 13).

Quadro 13- Organização do curso para ser ministrado com os discentes do Colégio Chuniza Fámaco.

Módulo	Objetivo	Recursos	Resumo
Módulo 1: Piloto	Explorar problemas que envolvam proporcionalidade direta com tabelas e gráficos numéricos.	Aplicativos de <i>software</i> dinâmico em geometria e álgebra <i>GeoGebra</i> e <i>PhET</i> .	Partindo de construções nos aplicativos <i>GeoGebra</i> e <i>PhET</i> se fazem discussões sobre elementos na tela para relacionar quantidades numéricas.
Módulo 2: Recursos <i>online</i>	Distinguir situações de variação relacionadas com conceitos da função linear diante sua representação numérica e geométrica.	Aplicativos com atividades interativas projetadas ( <i>PhET</i> , <i>Desmos</i> , <i>Mathigon</i> )	A partir de um conjunto de aplicativos e programas procura-se manipular ambientes de forma <i>online</i> .
Módulo 3: Simuladores e programação	Descrever a explicitação de um padrão em sequências recursivas de números, objetos e figuras com progressões aritméticas.	Aplicativos com programadores e simulados de sequências padrão com algum comando ou pacote ( <i>Colab</i> , <i>DFD</i> , <i>Atrator</i> )	Seguindo exemplos de sequências programadas de forma <i>online</i> os estudantes farão manipulações para determinar um padrão numérico com uso da álgebra e geometria.

Fonte: Elaborado pelo autor.

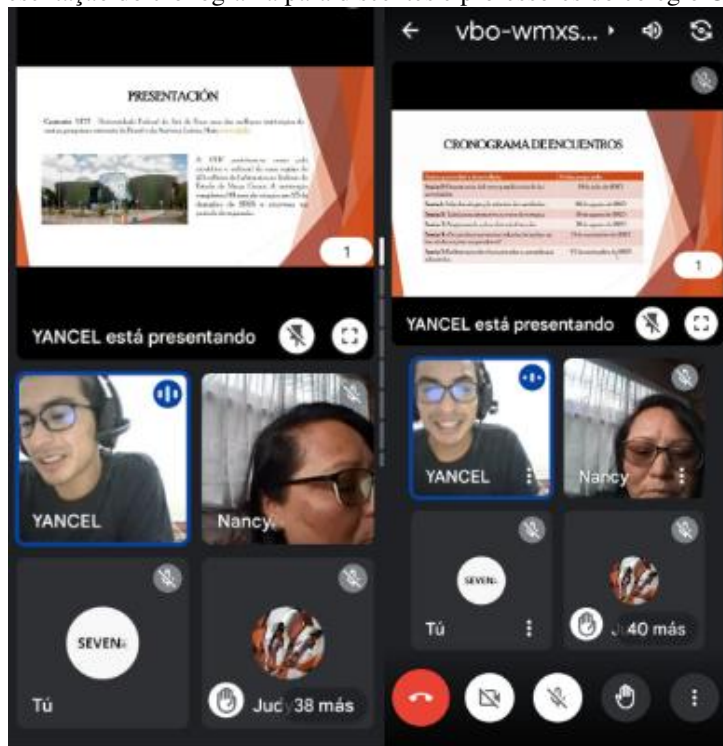
Os módulos projetados, foram pensados na utilização de diferentes aplicativos manipuláveis como fonte bem diferenciada na resolução das questões propostas, tentando seguir a estrutura do LaPEM-v, diante um plano de aula, guia do professor, *links* de acesso para os programas e formulários para os estudantes e professores que participarem da experiência.

Neste ambiente, projeta-se a participação dos alunos sobre uma discussão de questões apresentadas com um material disponibilizado de forma *online*, seguindo um conjunto de padrões de organização que apoiem a construção do conceito de função linear com os estudantes



desde suas percepções e vivências com cada um dos aplicativos escolhidos para serem mexidos em cada encontro.

Figure 23- Apresentação do cronograma para discentes e professores do colégio Chuniza Fámaco.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação ao desenvolvimento dos módulos projetados com as dicas e considerações da testagem inicial, se realizou um encontro prévio com professores e discentes da escola para discutir um pouco sobre como ia ser ministrado cada encontro (Quadro 14) e as possibilidades de participação ativa dos estudantes nas datas estabelecidas (Figura 23).

Quadro 14- Cronograma das aulas a serem ministradas e desenvolvidas no Colégio Chuniza Fámaco.

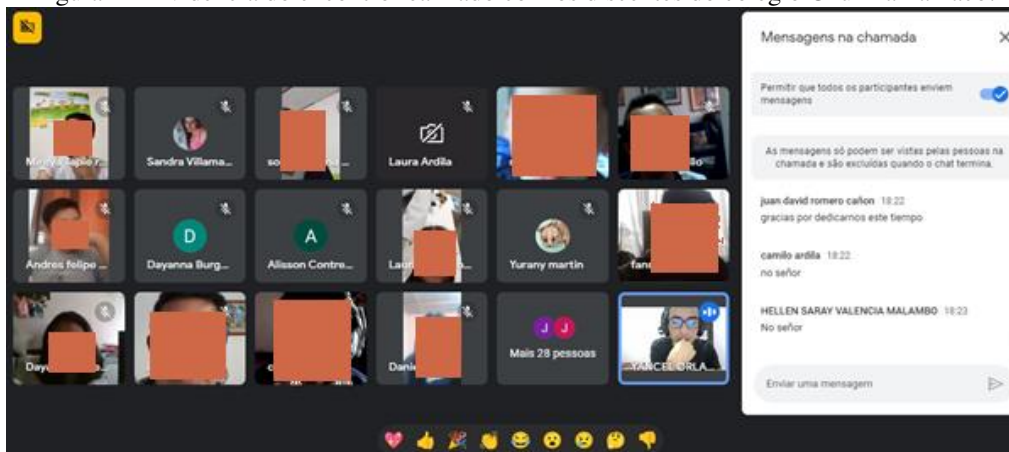
Módulos	Data projetada
<b>Número 0:</b> Apresentação do curso e considerações gerais.	19 de julho de 2023
<b>Número 1:</b> Sobre as abelhas e a relação entre grandezas.	02 de agosto de 2023
<b>Número 2:</b> Representação em tabela interativa e tartarugas.	16 de agosto de 2023
<b>Número 3:</b> Programando e descobrindo fórmulas	30 de agosto de 2023
<b>Número 4:</b> Representação com celulares e computadores.	13 de setembro de 2023
<b>Número 5:</b> Reflexão sobre os materiais e aprendizados.	27 de setembro de 2023

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, se fez ênfase na importância da exploração e discussão sobre cada aplicativo a ser manipulado em cada aula com questões e situações que levem ao desenvolvimento das competências procuradas. Os discentes neste espaço, tiveram a

oportunidade de esclarecer dúvidas sobre o desenvolvimento dos módulos, sendo conscientes do processo de pesquisa e autonomia no decorrer das aulas (Figura 24).

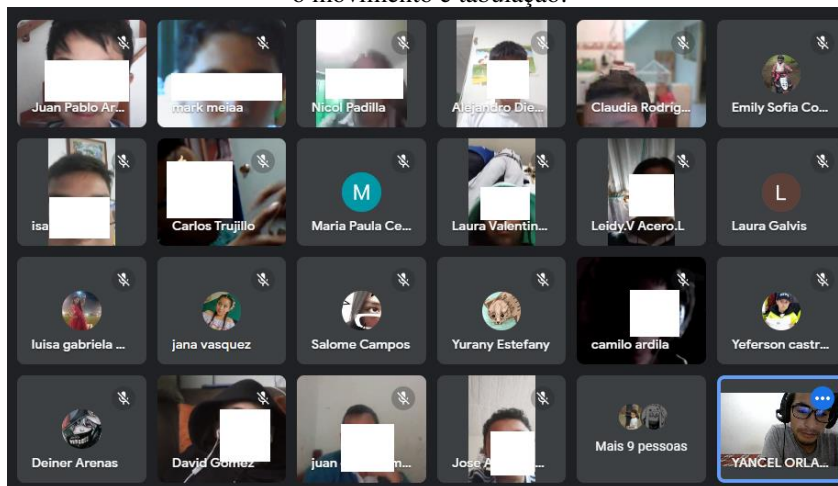
Figura 24- Evidencia do encontro realizado com os discentes do colégio Chuniza Fámaco.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por meio do estudo dos aplicativos e disponibilização no espaço virtualizado, procura-se proporcionar uma contribuição e enriquecimento sobre uso de plataformas digitalizadas focadas na temática de estudo que podem ser manipuláveis em sala de aula presencial no estudo e visualização de outros padrões, dependendo do foco e interesse sobre as questões propostas para abordar com os discentes em cada módulo.

Figure 25- Exemplificação da aula 2 com os discentes para desenvolver a atividade na plataforma *Desmos* sobre o movimento e tabulação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para encerrar e fazendo a clarificação sobre os módulos, para cada um deles, se pensou na utilização de um ou vários aplicativos diferenciados que ajudassem no processo de desenvolvimento das habilidades e compreensão da temática de estudo com respostas enviadas por Google Sala de aula e WhatsApp para o professor.

## 7 ANÁLISE E DISCUSSÃO

Seguindo a estrutura metodológica, se fez a abordagem sobre atividades que utilizam recursos tecnológicos manipulados por discentes para compreender aspectos da função linear e suas propriedades. Sendo assim, os resultados obtidos na pesquisa, estão divididos em duas partes. Primeiramente, as aplicações piloto e testagens realizadas para provar as atividades e recursos tecnológicos explorados, com as interações realizadas por estudantes do colégio João XXIII no Brasil e Chuniza Fámaco na Colômbia (Anexo 6).

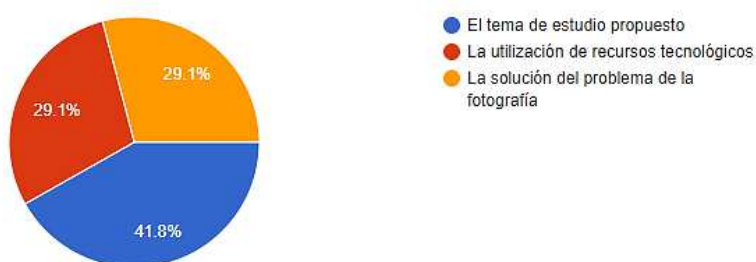
Em seguida, as atividades dos módulos feitas de forma síncrona com os discentes da Colômbia com obtenção de aspectos relacionados às concepções, dificuldades e potencialidades da manipulação virtual para a compreensão a função linear no plano do pensamento geométrico e algébrico.

### 7.1 RESULTADOS DO PROJETO PILOTO

Na aplicação inicial com os discentes das escolas, propõe-se uma enquete sobre a utilização dos recursos tecnológicos e conhecimento deles na resolução e abordagem de um problema com condições geométricas e algébricas.

Figura 26- Enquete realizada aos discentes antes da aplicação das atividades sobre uso de materiais tecnológicos.

**¿Cuál fue el aspecto que más te llamó la atención de la sesión informativa?**



**¿Conoces programas tecnológicos que ayuden a encontrar valores numéricos en matemáticas?**



Fonte: Dados de pesquisa.

A propósito das noções relacionadas com a manipulação virtual, destaca-se na amostragem, que os discentes possuem percepções dos aplicativos digitais, eles dizem que

ajudam na elaboração de situações da matemática de forma rápida e que além, podem ser aproveitados na relação entre grandezas com quantidades numéricas (Figura 26).

Da gráfica apresentada na Figura 26, observa-se que, 41,8% dos participantes tem um interesse pela temática a ser estudada nos módulos. Este fato foi apontado por eles na aula já que, estão sentindo que ainda tem dificuldades para compreender aspectos da álgebra e notam que no curso, poderão reforçar aspectos focados e complementares da disciplina.

Também das atividades testadas, se identificou uma interação interessante no *chat* sobre o assunto do *slide* apresentado na tela para descrever a situação da abelha (Figura 27).

Figura 27- Interações e comentários no *chat* do *Google Meet* sobre a situação da abelha por discentes do colégio Chuniza Fámaco.



Fonte: Trecho dos comentários feitos pelos alunos no *Google Meet* (2023).

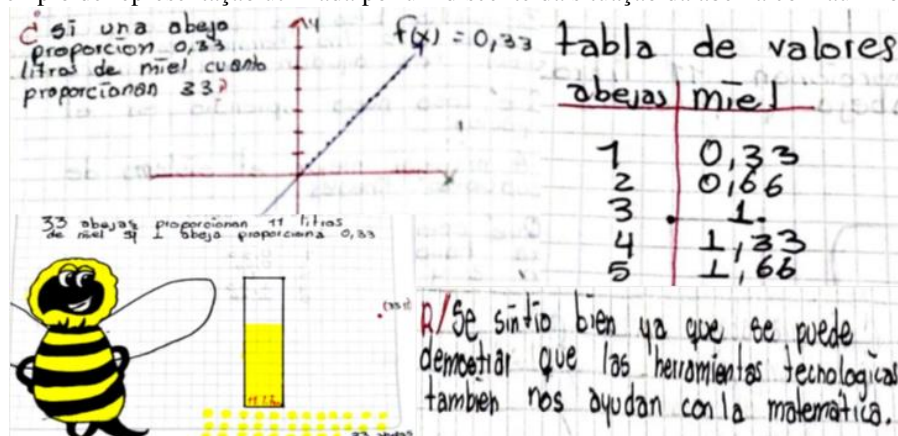
Nesta interação, eles de forma coletiva foram conseguindo dar uma resposta para a questão proposta inicialmente com relações simples. Além, essa discussão no espaço digital, também permitiu que falassem sobre a utilidade do aplicativo para perceber quantidades diferentes de abelhas e potes de mel, percebendo o que acontecia na tela quando se mexia o controle deslizante.

Alguns outros discentes (Figura 27) mencionaram a aplicação da regra de três como operação multiplicativa para responder aquelas questões com aplicativo e sem aplicativo seguindo só um processo com uma operação.

Sobre as elaborações dos discentes fazendo manuseio do aplicativo GeoGebra, existem relações elaboradas que tem uma associação simples de parâmetros e padrões para a construção de tabelas com quantidades numéricas (Figura 28). Neste caso, do trecho elaborado a apresentado pelo discente, fala-se da importância de utilização de tecnologia no campo da

demonstração de uma ação específica que vai auxiliar a compreensão focada na relação numérica de crescimento.

Figura 28- Exemplo de representação utilizada por um discente da situação da abelha com auxílio do aplicativo.

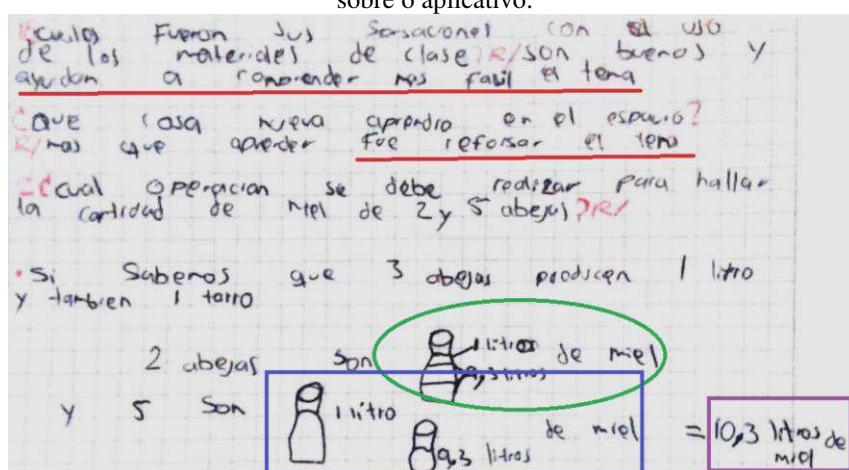


Fonte: Trecho retirado de uma resolução de um aluno (2023).

Outro exemplo de verificação dos processos da manipulação virtualizada na situação da abelha, está relacionado com o reforço do aplicativo para o desenho do problema com quantidades específicas (Figura 28).

O estudante diante a utilização de uma representação dos potes de mel, consegue estabelecer a relação numérica e dar uma resposta exata, também neste exemplo, se esclarecem aspectos da relação numérica falando da facilidade para compreender a questão utilizando o aplicativo.

Figura 29- Exemplo da resolução da situação proposta por parte de um discente depois de fazer manipulação sobre o aplicativo.



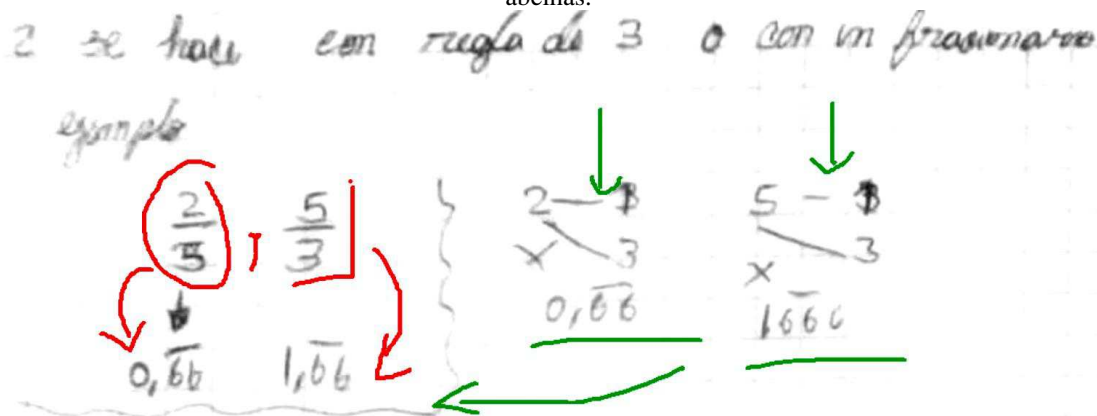
Fonte: Trecho retirado de uma resolução de um aluno (2023).

Outro exemplo mais dos apresentados pelos discentes mostra que com a utilização dos potes de mel, se podem estabelecer relações dos valores específicos, atribuindo fenômenos da



posição desses números (Figura 30). Finalmente, vai ser necessário também a utilização de operações simples que estão sendo auxiliadas pelo aplicativo e que tem uma aplicação da regra de 3 com os valores atribuídos e seguindo a dinâmica do aplicativo para organizar ditos números de forma específica.

Figura 30- Exemplo de operação e utilização da regra de 3 para achar os quantidade de mel produzido por as abelhas.



Fonte: Trecho retirado de uma resolução de um aluno (2023).

Cada um dos exemplos apresentados está relacionado com as concepções da função linear e suas interpretações já que no exemplo inicial, o discente com a tabela e representação da abelha consegue estabelecer uma sequência numérica (Quadro 9). No exemplo 2 e 3 a relação vai focada em uma equação aritmética que no caso é a regra de três simples que vai permitir relacionar números diante uma operação com um resultado final.

## 7.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO MÓDULO 1

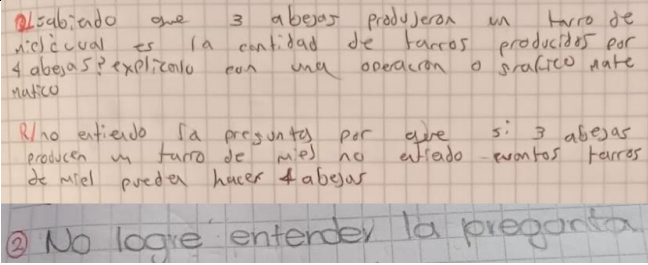
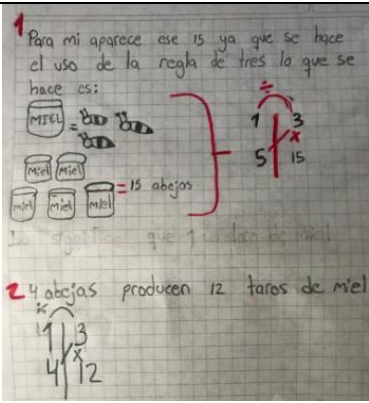
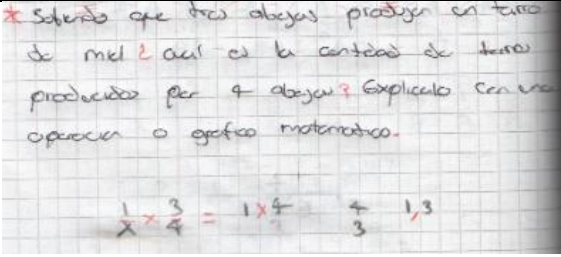
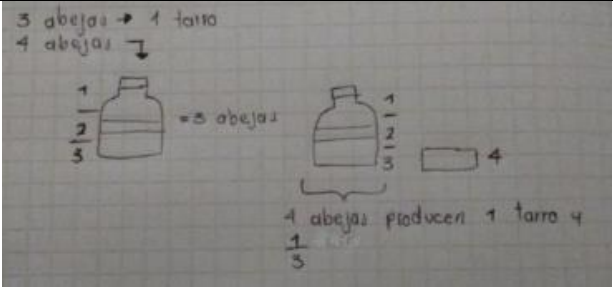
Para a análise deste módulo, serão consideradas as respostas dos discentes (Anexo 6) com suas respectivas classificações. Faz-se a aclaração que foram registradas 100 respostas que foram divididas em 4 turmas, já que, alguns deles desenvolveram a atividade de forma presencial e outros de forma *online*.

### 7.2.1 Exemplo de classificação das respostas

Os tipos de respostas dadas para a questão 1 e 2 foram classificadas em: **percebe, não percebe ou percebe parcialmente** a relação dos objetos que estão na tela. Para as respostas da questão 3 foram consideradas as opções de sem resposta, resposta incorreta, resposta parcialmente correta e resposta correta. No quadro a seguir, vai se apresentar um exemplo do tipo de resoluções para essas primeiras questões com a intenção de focalizar um pouco sobre

sua variedade. Assim, é proposto um quadro com uma descrição na qual são colocados exemplos sobre o tipo de resposta dada pelo aluno (Quadro 15).

Quadro 15- Descrição simples dos processos e respostas elaboradas pelos discentes na atividade da abelha depois de mexer o aplicativo.

Descrição	Tipo de resposta
<p>Neste caso, observa-se no estudante que não percebe uma relação dos valores e números quando mexeu o aplicativo e diz de forma direta que não entendeu a pergunta.</p>	
<p>O exemplo apresentado aqui, elucida que o discente percebe uma relação numérica e faz uma multiplicação. Porém, o cálculo feito não da resposta para a questão proposta.</p>	
<p>Aqui o estudante percebe a relação numérica com auxílio do aplicativo. Além disso, faz operação com regra de três simples seguindo o padrão do programa.</p>	
<p>Neste último nível de exemplo, percebe-se que o padrão estabelecido foi proposto com o desenho e aplicação da proporção das quantidades com uma sequência definida.</p>	

Fonte: Trechos retirados das resoluções dos alunos (2023).

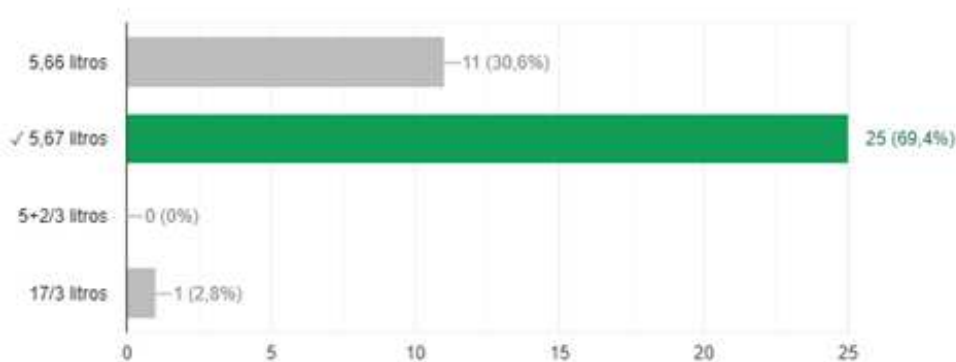
No quadro apresentado, existem descrições que vão auxiliar as respostas oferecidas pelos alunos que estão categorizadas no tipo de resposta construída. Na linha inicial, tem alunos que não conseguiram compreender as questões propostas só até utilizar o aplicativo; depois temos os alunos que utilizam saberes prévios sem o aplicativo para tentar dar uma resposta nas questões de forma parcial no sentido de perceber uma relação com alguns erros na escolha da

operação, processo ou resposta final e aqueles que percebem a relação e utilizaram representações ou operações numéricas como nas linhas do final (Quadro 15).

### 7.2.2 Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma *online*.

Por outra parte, se coletaram algumas respostas com os alunos da Colômbia que participaram da experiência mexendo o aplicativo nas aulas iniciais. Na questão 4, por exemplo, com uma amostra de 37 alunos que fizeram as interações *online*, obteve-se a seguinte classificação das respostas no momento de manipular o aplicativo e mexer o controle deslizante.

Figura 31- Resposta dada pelos alunos que fizeram a atividade de forma *online*.  
De acuerdo con el aplicativo GeoGebra, la cantidad de miel producida por 17 abejas es:



Fonte: Dados de pesquisa.

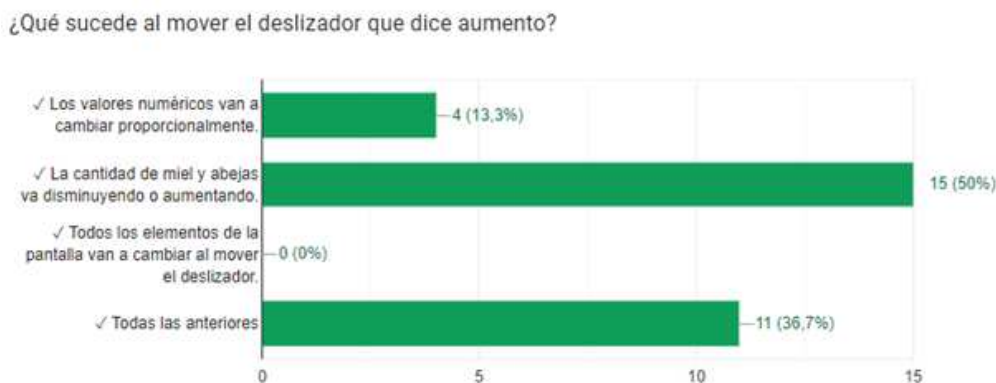
Observa-se que um 70% dos alunos com auxílio do aplicativo deram uma resposta correta na questão proposta, esclarecendo processos manipulativos da percepção e posição que ligados também com experiências de opinião e tempo, já que, com o programa GeoGebra, cada estudante vai arrumando o controle deslizante até obter o valor certo para uma quantidade específica das abelhas que vai ser justificado no ato de cutucar, mexer e estabelecer conexões com o posicionamento dos elementos na tela.

Além disso, essas percepções e posições dos valores numéricos com os elementos do aplicativo, serão próprias e vivenciadas de forma pessoal no tempo de cada aluno por serem *online*. No processo, entende-se também que com uma porcentagem de alunos que deram uma resposta que na prática seria errada, eles possuem na sua experiência, opiniões valorizadas a partir da sua interação com o aplicativo que vai se relacionar com a percepção e estimulação quando fazem movimentação do controle e encontram uma resposta aproximada na opção inicial que foi oferecida.



Em relação aos aspectos da associação das quantidades, que vai se relacionar com elementos da coordenação de valores numéricos e variação dos objetos da tela. Observa-se que, os alunos em sua maioria percebem com ajuda do aplicativo que as grandezas estudadas, estão aumentando ou diminuindo ao mexer o controle e como consequência, os valores numéricos vão mudar.

Figura 32- Questão proposta para determinar aspectos da manipulação desde a variação e associação de quantidades.



Fonte: Dados de pesquisa.

É importante dizer do gráfico analisado (Figura 32) que um 36% dos alunos conseguem estabelecer uma relação completa de variação, já que, consideram as opções iniciais como um conjunto que vai permitir mudar de qualquer jeito essas grandezas estudadas, relacionando-as com uma representação numérica, geométrica e algébrica. Para encerrar, existe também uma porcentagem de alunos que conseguiram através do aplicativo estabelecer uma relação de proporção, seguindo com o mesmo programa regularidades de acordo a um instinto funcional que é de cunho multiplicativo (CASTRO Y RODRIGUES, 2022).

### 7.2.3 Sobre alguns casos a relatar nas interações físicas e virtuais

Na interação com os alunos, tentando seguir a estrutura de observação- participante, se apresentaram casos interessantes e diferenciados tanto no contexto presencial como no contexto virtual em relação as construções, interações e geração de respostas com o aplicativo que vão focadas diretamente na experiência com a utilização do programa.

Um exemplo dessas interações, que no parecer foi bem interessante para ser relatada, tem a ver com a medição e padrão do ponto vermelho (Figura 33) fazendo comparações com objetos físicos na mesma tela quando o controle deslizante estava sendo mexido.

Figura 33- Adaptação do sistema de medição feito por alguns discentes em relação à comparação do ponto vermelho na tela.



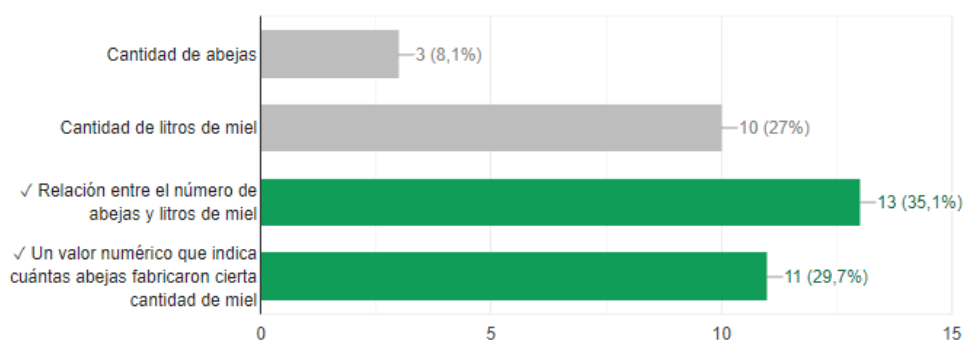
Fonte: Elaborado pelo autor baseado na interação que tiveram os estudantes em sala de aula com a tela.

Aqui, os alunos vivenciaram a experiência de tipo com objetos, que vai procurar separar informações para depois garantir sucesso em dita experiência, o seja uma obtenção de uma resposta certa para a questão proposta em relação com o número de abelhas e potes de mel. Além disso, existem aspectos da posição direta dos objetos com uma combinação física para relacionar o número de abelhas com potes de mel de forma digital.

Figura 34- Questão relacionada com a posição do ponto vermelho no aplicativo da abelha.

Pregunta 5: ¿Qué representa el punto rojo en el material de la abeja?

24 / 37 respuestas correctas



Fonte: Dados de pesquisa.

Finalmente, este processo de manipulação virtualizada e discussão sobre a obtenção de valores numéricos, vai ligado na compreensão da sequência fazendo comparações para obter uma relação (FLORES, 2021). Na Figura 34 já apresentada, observa-se que os alunos conseguiram diante processos de movimentação e comparação (diferentes do apresentado no exemplo), estabelecer uma relação de abelhas com potes de mel. Também se pode dizer da

abordagem feita pelos alunos medindo a distância do ponto vermelho que essa ação permitiu melhorar a resposta.

Outras respostas que foram interessantes nas interações presenciais, têm a ver com a conversas que iam surgindo com provocações simples quando o pesquisador passava pelo espaço. No quadro a seguir, observa-se um exemplo de trecho de um *bate-papo* entre 2 alunos do colégio de aplicação Joao XXIII.

Quadro 16- Exemplo de uma das conversas que foi escutada entre os alunos quando fizeram a interação com o aplicativo.

<b>Locutor</b>	<b>Conversa</b>
<b>Estudante 1</b>	Pergunta para seu colega: <i>Então, cada pote faz três abelhas ou cada três abelhas fazem um pote?</i>
<b>Estudante 2</b>	Pensa... <i>As abelhas fazem um pote!</i>
<b>Estudante 2</b>	<i>Mas, 1/3 é quanto?</i>
<b>Estudante 1</b>	Pensa... <i>Tem que saber quantas partes divide</i>
<b>Pesquisador</b>	<i>Tentem fazer a operação ou também você pode mexe aí na tela, dps pode responder à questão.</i>
<b>Estudante 2</b>	<i>Como se mexe?</i>
<b>Estudante 1</b>	<i>Tu não sabe! kkkk</i> Ele começa mexer no GeoGebra o controle deslizante
<b>Pesquisador</b>	<i>Abelhas vão depender da mel ou mel das abelhas ai que você mexeu?</i>
<b>Estudante 2</b>	<i>Tá!</i> Ele faz alusão de que conseguiu entender.

Fonte: Dados de pesquisa.

Desta conversa surgiram vários elementos como o estabelecimento da relação correta de dependência entre os objetos quando se faz algum movimento no aplicativo ou as proporções de quantidades na procura de uma resposta numérica que foi percebida por parte dos alunos e com conversa coletiva auxiliados do GeoGebra.

Os alunos diante a interação pessoal e as perguntas provocadoras, conseguiram compreender que tinha uma relação com uma coordenação de valores que iam depender do controle deslizante o tempo tudo e além, utilizariam a divisão como um método de comprovação diferente do aplicativo que permitiria conferir as ações que eles executavam com ele. Finalmente, a utilização da linguagem informal para perceber o que estava acontecendo na

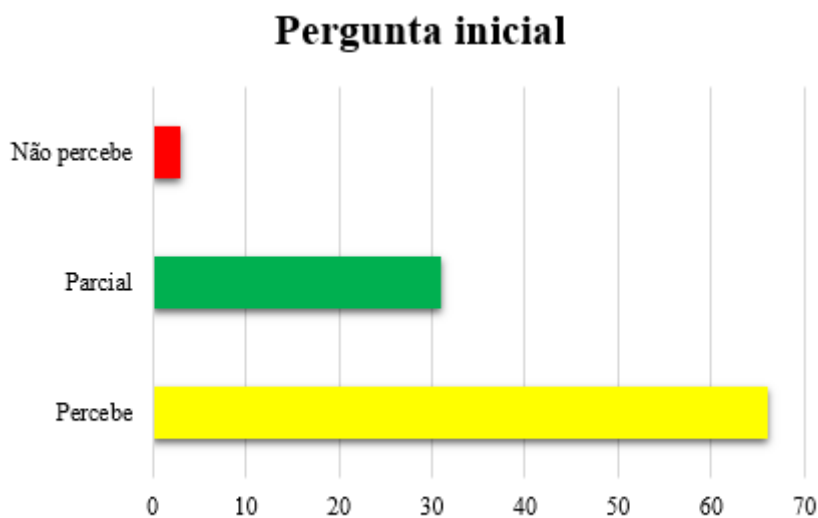
tela foi um elemento muito importante na conversa que ajudou a cada estudante compreender a relação das grandezas com experiências do tempo (BONDIA, 2002).

#### 7.2.4 Tabulação de algumas respostas dadas pelos alunos na atividade da abelha

Neste último parágrafo e para encerrar a discussão do primeiro módulo, se fizeram os gráficos das respostas em maior destaque dadas pelos alunos das duas escolas. As respostas foram organizadas e classificadas em quatro grupos com os quais se desenvolveu a atividade da abelha seguindo a estrutura do Excel apresentado no Anexo 6.

Na Figura 35, apresenta-se a classificação das respostas oferecidas pelos alunos em relação com a primeira questão que tinha a ver com a quantidade de abelhas, as respostas foram classificadas em três categorias, sendo a primeira “não percebe”, a segunda “percebe parcialmente” e a última “percebe”.

Figura 35- Percepção dos alunos da relação de abelhas e potes de mel quando fizeram leitura da pergunta inicial proposta.



Fonte: Dados de pesquisa.

Das respostas, 66 foram positivas já que independente do grupo de estudo, muitos conseguiram compreender a relação e além dar uma explicação da mesma utilizando alguma representação, operação ou escrita. Por outra parte, 31 alunos deram uma resposta parcial para a pergunta porque não conseguiram perceber essa relação numérica proposta com essa questão provocadora.

Para as questões que foram propostas no percurso da atividade e utilizando o aplicativo, destaca-se a utilização própria do programa, especialmente nas questões 5 e 6 (Figura 36). As perguntas que foram propostas com o aplicativo procuravam que a pesquisa revelasse aqueles aspectos da manipulação virtualizada e utilização de saberes da matemática focados na função linear.

Figura 36- Classificação das respostas dos alunos utilizando o aplicativo das abelhas e potes de mel trazendo elementos da manipulação virtual.

<b>Perguntas 2 e 3</b>		<b>Perguntas 5 e 6</b>	
<b>Opção</b>	<b>Resposta</b>	<b>Opção</b>	<b>Resposta</b>
Relação e operação	28	Perceber	24
Relação	28	Posicionar	39
Operação	32	Associar	18
Sem resposta	2	Mudar	3
Outra	10	Outros	16
<b>TOTAL</b>	<b>100</b>	<b>TOTAL</b>	<b>100</b>

Fonte: Dados de pesquisa.

Na primeira tabela da Figura 36, observa-se que nas questões número 2 e 3 pelo menos 80 dos alunos conseguiram estabelecer uma operação ou relação entre as quantidades, além que ditas respostas foram apoiadas pelo aplicativo e os elementos que iam aparecendo. Nas questões que tem a ver com os processos de manipulação virtualizada, a posição e composição de quantidades no aplicativo, foi o que mais se fez no momento de mexer o programa.

Normalmente, tentando compreender aqueles valores da manipulação virtualizada, os alunos deram uma importância para a percepção e posição já que, sempre falavam e argumentavam que ao clicar, relacionar ou arrastar, podiam perceber relações numéricas e estabelecer uma posição dos valores numéricos que se precisavam para dar uma resposta correta.

Em relação com associação e variação de quantidades, foram 21 alunos que conseguiram estabelecer ações virtuais nestas concepções, já que, aqui este grupo conseguia incluir ações algébricas de razão de mudança entre as quantidades para qualquer valor numérico proposto. Finalmente, o restante dos discentes, deram indícios de manipulação com várias das opções oferecidas, percebendo o que acontecia no aplicativo, relacionando uma posição específica e aumentando ou diminuindo valores para associar ditos valores em um gráfico cartesiano.

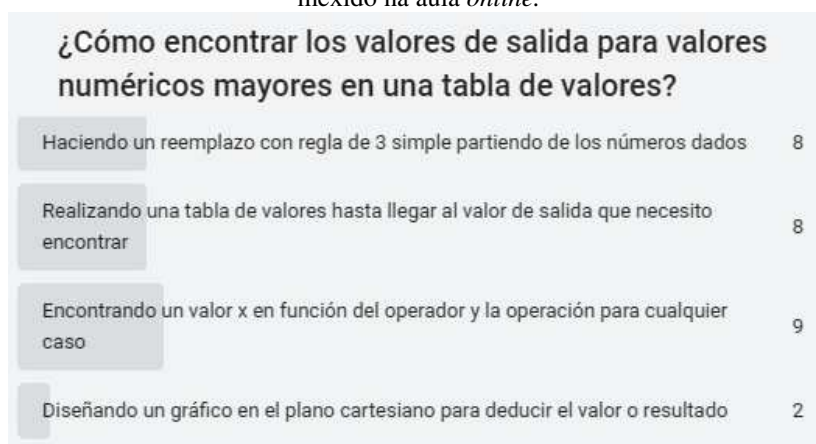
## 7.3 ANÁLISE E DISCUSSÃO MÓDULO 2

Para a análise deste módulo, serão consideradas as respostas dos discentes que foram dadas no desenvolvimento das atividades *online* e coleta de dados no *Google Classroom* com suas respectivas considerações. Faz-se a aclaração que foram registradas só as respostas dos alunos que participaram das aulas que foram feitas com os aplicativos *PhET* e *Desmos*.

### 7.3.1 Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma *online*

Na abordagem realizada com os alunos fazendo uso do aplicativo *PhET*, eles alteraram alguns valores numéricos da relação que tem muita relação com a descoberta de objetos da matemática que tinham uma mistura de coordenação de valores como uma regra com uma mudança e incremento (CASTRO Y RODRIGUES, 2022). As opções de múltipla escolha (Figura 37), apresentam em detalhe a distribuição das ideias dos discentes sobre como podem ser compreendidos alguns aspectos da função linear em relação com seu incremento.

Figura 37- Enquete proposta aos alunos sobre a forma de encontrar valores utilizando o aplicativo que foi mexido na aula *online*.



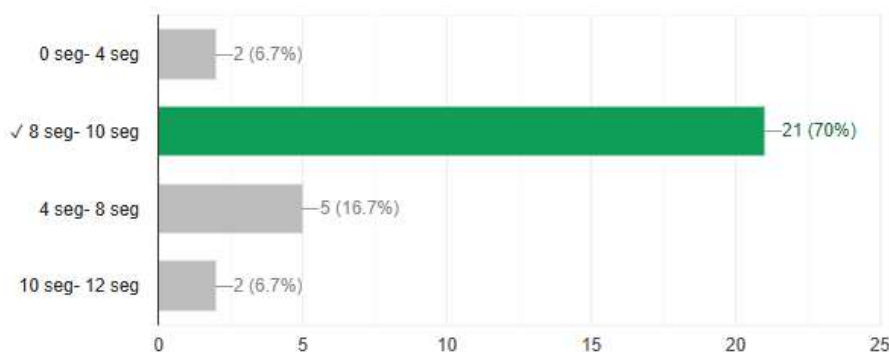
Fonte: Dados de pesquisa.

Percebe-se que na primeira opção de escolha que os alunos disseram que só é necessário fazer uma substituição dos valores partindo dos números que já foram dados. Esta resposta expõe na experiência com o aplicativo, que, a manipulação possui aspectos da percepção e posição de valores ligados com uma alteração desses números para obter outros números (DOS SANTOS, 2020). Além, o aplicativo apresenta explorações com movimentações simples, cutucando botões até encontrar uma resposta.

As opções que foram dadas e que estão distribuídas em parcelas bem parecidas, mostram que aquela coordenação de valores vai se realizar quantas vezes precisar com um operador que vai estabelecer padrões de valores numéricos para obter uma relação com uma variável (FLORES, 2021). Trabalhando no programa, 17 alunos conseguiram dizer nas suas considerações que esse padrão tem uma operação e um conjunto de saída que vai se relacionar com a função e seu crescimento.

Na utilização do aplicativo *Desmos* na segunda atividade do módulo, se estudaram aspectos do movimento baseado na relação das quantidades numéricas, tentando saber como os discentes mexendo o aplicativo, achavam grandezas e tentavam estabelecer um padrão. Na Figura 38, um 70% deles conseguiram dizer partindo de uma representação e simulação da tartaruga o intervalo de maior rapidez que vai se ligar com a experiência de não opinião porque cutucando e sentindo, foram estabelecidas conexões de incremento.

Figura 38- Relação de movimento da tartaruga no aplicativo *Desmos*.  
De acuerdo a la imagen ¿En cuál intervalo de tiempo la tortuga se movió más rápido?



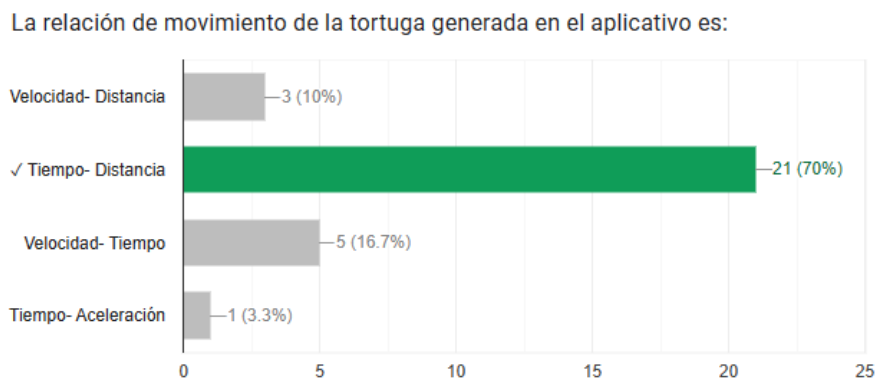
Fonte: Dados de pesquisa.

Observa-se nas respostas dadas pelos alunos, que só o 30% deles deram informações bem diferenciadas sobre o tempo de movimento da tartaruga que tem a ver com experiências diferentes, percepção do movimento e manipulação do aplicativo sem chegarem a perceber como foi aquele movimento da tartaruga o como cresceu o decresceu o movimento gráfico.

Sobre a relação entre grandezas do movimento da tartaruga com a representação geométrica gerada no aplicativo *Desmos*, a mesma quantidade de alunos que é o 70%, disseram que o movimento tem a ver principalmente com o tempo e a distância, já que, quando o tempo vai transcorrendo, a distância do ponto inicial vai mudando, seguindo um padrão que vai ser

dinâmico que além interage com o movimento de uma linha reta e sua inclinação com ponto de corte (MESA, 2016).

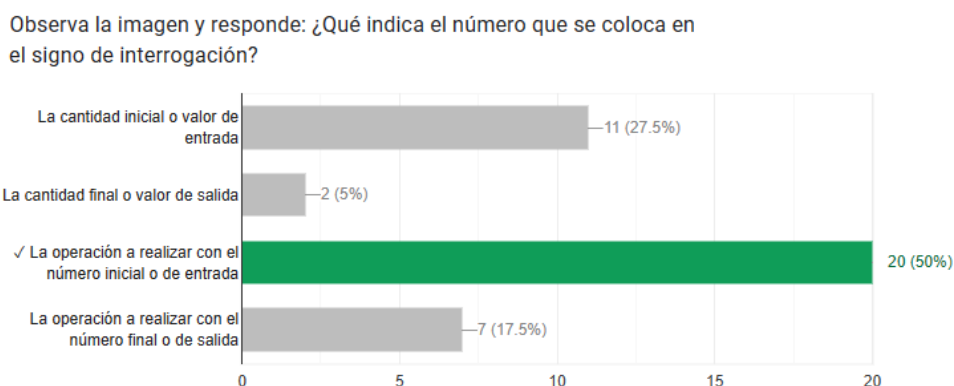
Figura 39- Opções de grandezas e sua relação para estabelecer uma função de movimento da tartaruga no aplicativo *Desmos*.



Fonte: Dados de pesquisa.

Da Figura 39, pode-se dizer também que a maioria dos alunos percebeu a relação exata pelo movimento simulado da tartaruga com a experiência do saber nesse aplicativo que vai permitir a separação de informações para conferir a sua resposta. É bem necessário conversar sobre o 30% das respostas “erradas” que não tem a ver diretamente com uma interpretação sobre a percepção ou posição da tartaruga, senão o reconhecimento da característica que vai permitir estabelecer o movimento da tartaruga.

Figura 40- Interação dos alunos com os botões do aplicativo *PhET* para saber a funcionalidade do comando apresentado.



Fonte: Dados de pesquisa.

Em relação com a representação oferecida nos aplicativos, também foram explorados e estudados pelos discentes aspectos relacionados com quando o valor numérico mudava. Assim, por exemplo, na Figura 40, a metade dos alunos propõem que sempre deve existir uma



quantidade numérica para estabelecer uma relação final e que ela vai depender sempre desse número.

Uma porcentagem menor dos alunos, concebe que o ícone do aplicativo ao ser cutucado, vai estabelecer o valor inicial só e que além, não tem relação com a operação porque esse valor é fixo. Na opção final, alguns deles disseram que tem mais relação com a resposta ou valor final e que dito valor vai ser operado.

Para encerrar a análise dos gráficos apresentados para as atividades que foram feitas com os alunos tanto no aplicativo da tartaruga como no aplicativo da caixa misteriosa, os alunos conseguem relacionar com a manipulação de cada aplicativo um conjunto de valores numéricos e além, estabelecer representações numéricas e geométricas principalmente que vão ligadas com modelos icônicos e gráficos.

### **7.3.2 Discussões e respostas dos alunos dadas de forma *online***

Neste parágrafo, propõe-se como forma de organização e exemplo, um quadro com uma descrição na qual são colocados alguns trechos dos alunos sobre o tipo de resposta dada mexendo o aplicativo *PhET* (Quadro 17).

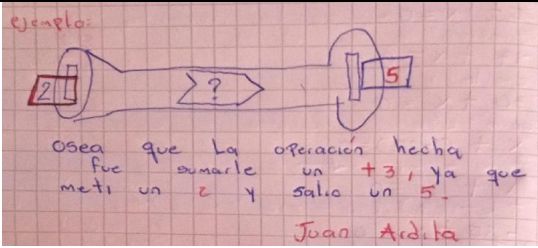
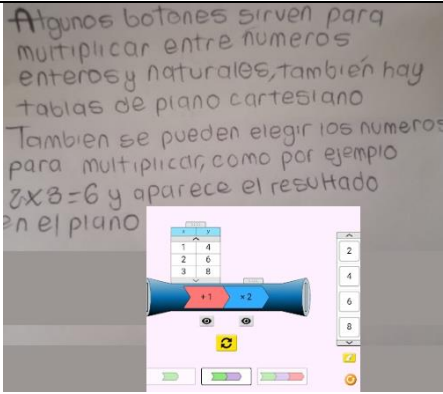
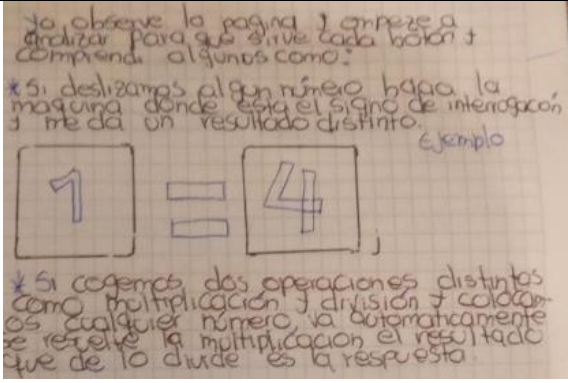
Das respostas oferecidas pelos alunos, pode-se dizer que tem como ponto comum a caracterização dos elementos que estão aparecendo na tela com a sua principal funcionalidade. Além disso, cada exemplo escolhido, es justificado diante as propriedades estudadas no aplicativo.

Há um fenômeno observado da manipulação com este aplicativo (Quadro 17) na primeira imagem, ao utilizar a palavra “meti” que tem uma constituição de introduzir alguma coisa no aplicativo para obter uma resposta que esteja bem relacionada com esse valor inicial. Essa constituição também é justificada quando o aluno diz que saiu um número que neste exemplo vai ser a resposta de ter feito aquela operação com auxílio do aplicativo.

Aqui a posição e percepção desses valores, são elementos bem importantes no desenvolvimento dos processos com o aplicativo, já que, com a descoberta de um valor numérico que vai ser introduzido para uma quantidade final, se estabelece uma associação que no contexto matemático está ligado com uma visão numérica e geométrica com um desenho digital (JÚNIOR; LAUDARES, 2019). Para encerrar, a coordenação de valores como regra é

bem evidente na manipulação virtual do programa porque se deixa uma quantidade numérica com uma operação que vai obedecer uma regra.

Quadro 17- Evidência de processos de manipulação dos discentes no aplicativo PhET para estabelecer relações numéricas.

Descrições	Evidência
<p>Aqui o aluno tenta representar os elementos importantes que ele viu no aplicativo e como é o procedimento para fazer uma operação numérica introduzindo um valor numérico.</p>	
<p>Neste exemplo, o aluno diz que os botões servem para fazer multiplicações e que quando clica, aparece uma tabela e além, tem disposição de eleger números apresentando um exemplo particular.</p>	
<p>O aluno neste trecho diz que faz observação da página e cutuca cada botão para saber a função de cada um deles, além faz arrastre e apresenta um exemplo do valor inicial e final com a operação de soma.</p>	
<p>Neste último exemplo do trecho tirado de um aluno, faz uma descrição de cada elemento e botão que vai aparecendo no aplicativo com duas operações.</p>	

Fonte: Trechos retirados das resoluções dos alunos (2023).

Os exemplos e trechos escolhidos para serem apresentados, mostraram a abordagem feita pelos alunos e diferenças que existem também na compreensão, interpretação e eleição de cada exemplo sabendo aproveitar o material e suas experiências no campo da matemática.

## 7.4 ANALISE E DISCUSSÃO MÓDULO 3

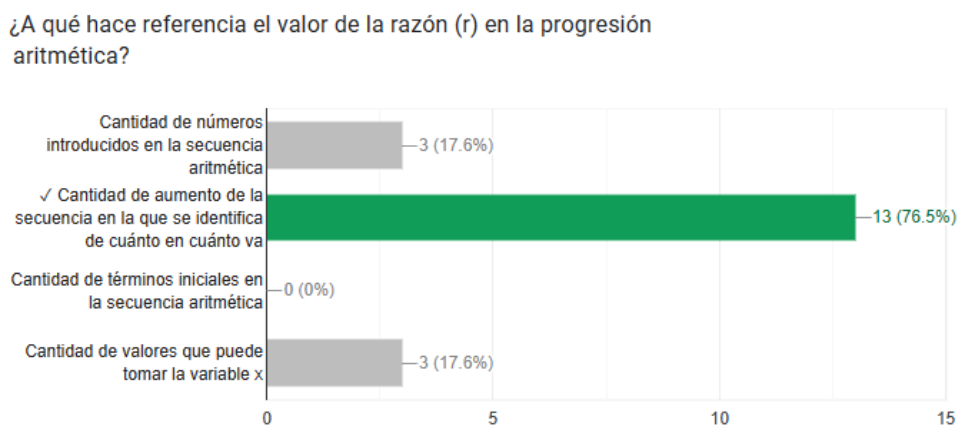
Para a análise do último módulo, serão consideradas as respostas dos discentes que foram dadas no desenvolvimento das atividades *online* e coleta de dados no *Google Classroom* com suas respectivas considerações. Faz-se a aclaração que foram registradas só as respostas dos alunos que participaram das aulas que foram desenvolvidas utilizando os aplicativos DFD, *Colab-Python* e *Mathigon*.

### 7.4.1 Gráficos das respostas dos estudantes que participaram de forma *online*

No módulo final, apresentou-se para os alunos nas duas atividades, aplicativos que relacionassem aspectos geométricos, numéricos e algébricos diretamente com a função linear e as transformações que podem existir entre quantidades quando ao mexer no programa se fazem tabelas, gráficos ou equações que estarão ligadas com a mesma forma de representar um objeto da matemática.

Sendo assim, com os códigos e aplicativos já prontos para preencher cada espaço, os alunos tinham que relacionar os valores numéricos com uma letra que vai arrolada com a representação algébrica de dita função linear. Da Figura 41, um 76% dos discentes conseguiram algebrizar o processo de aumento dos valores só introduzindo esse valor no programa.

Figura 41- Identificação de elementos da função linear seguindo um padrão de progressão com um valor estabelecido.



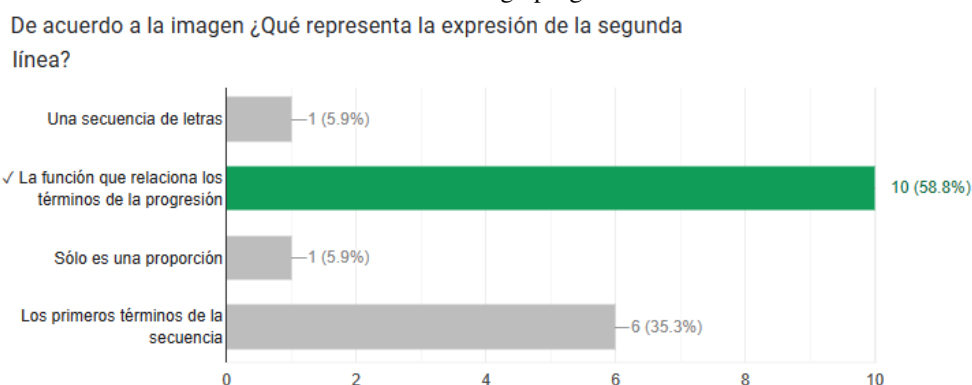
Fonte: Dados de pesquisa.

A quantidade restante de alunos que foi o 24% estabeleceu essa relação algébrica com o aplicativo falando da quantidade de termos que aparecem na sequência que é uma interpretação bem diferenciada do aumento ou diminuição desse padrão. Aqui, é bem

importante dizer que a manipulação do aplicativo vai ajudar na compreensão desses valores e as formas de se representar num gráfico ou equação algébrica.

Na questão que já tinha uma composição só algébrica, os alunos que participaram, conseguiram em sua maioria dizer diretamente que a forma  $mx + b$  que foi representada no código do programa para que eles preencheram, tinha a ver com a função que relacionava cada termo da progressão (Figura 42).

Figura 42- Interpretação por parte dos alunos sobre a forma  $mx + b$  de uma função linear com valores numéricos no código programado.



Fonte: Dados de pesquisa.

As respostas que nas opções propostas estão estabelecidas como “erradas” também permitiram saber como este grupo de alunos percebiam a forma da função linear seguindo uma sequência de valores. Na Figura 42, observa-se que um 12% deles deram uma atenção diferente na interpretação da forma algébrica, focada em condições verbais como por exemplo a proporção, sem dizer que dita conexão de proporções ou sequência de letras vai levar para uma harmonia algébrica dos valores estudados.

Neste processo de manipulação do aplicativo, os discentes também fizeram interpretações ligadas com a quantidade de termos na sequência, sem perceber que cada valor tinha uma funcionalidade bem diferenciada, isso pode ser explorado com a última opção de resposta onde um 35% deles afirmaram que a representação algébrica só ia mostrar os primeiros termos da progressão, sem acrescentar a relação com outras variáveis ou elementos que mudam no aplicativo.

Os aplicativos que foram utilizados neste módulo, permitiram para os alunos perceber que as representações e utilização das letras podiam ser diferenciados e que tem uma colocação bem estabelecida que vai auxiliar no entendimento dos processos simbólicos da função linear e

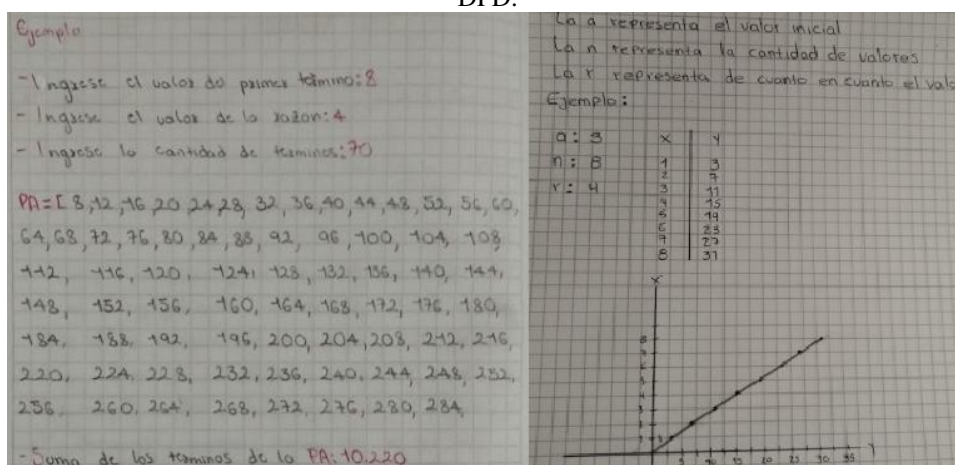
suas aplicações na constituição de sequências, movimento de valores e finalmente relação entre grandezas

#### 7.4.2 Exemplo de abordagem dos alunos utilizando o aplicativo Python

Na utilização destes aplicativos na parte final do processo, os alunos tentaram representar relações da função linear que estivessem ligadas com uma sequência numérica e representação em linha reta (Figura 43).

Assim, as interações virtuais estiveram ligadas com clicar e preencher com comandos específicos para retirar valores com uma relação bem definida que ajudasse também na compreensão de fenômenos algébricos e utilização da letra.

Figura 43- Representações numéricas e atribuição do significado das letras com apoio da plataforma Python e DFD.



Fonte: Trechos retirados das resoluções dos alunos (2023).

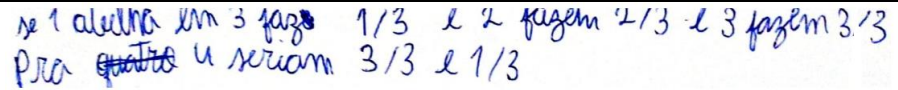
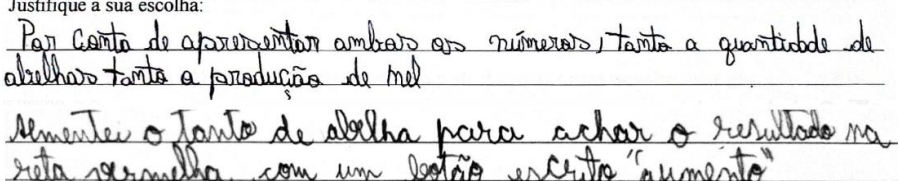
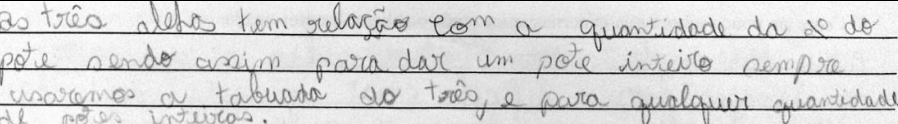
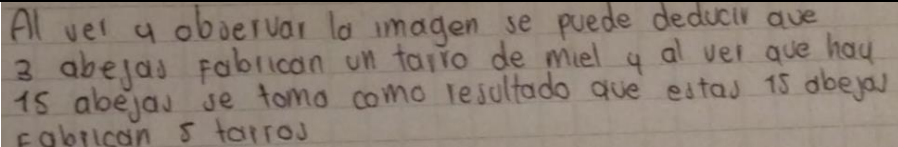
Pode-se observar destes trechos tirados dos alunos o seguinte: 1) a interação no aplicativo, ajudou para eles a dizer o papel que ia desempenhar cada uma das letras dadas no comando, 2) o código de programação, permitiu descrever o jeito de inserir os números de forma rápida, dando uma alusão em ações específicas como preencher e clicar e 3) a listagem dos valores e as representações utilizadas no aplicativo vão ser diferentes para cada aluno pela constituição conceitual da função, utilizando tabelas, gráficos e sequências da progressão.

Na trajetória final deste módulo, os estudantes fizeram explicações individualizadas dos processos com o aplicativo e código disponível de forma oral ([Vídeo 1](#) e [Vídeo 2](#)) que permitiram compreender os aspectos da manipulação virtual focado na associação numérica e gráfica, argumentando e visualizando o que estava acontecendo em cada momento.

## 7.5 RESPOSTAS SOBRE APLICATIVOS E MANIPULAÇÃO VIRTUALIZADA

Nesta parte final da análise, se apresentarão algumas das respostas em destaque oferecidas pelos alunos (Quadro 18) com as valorações que eles deram para a utilização de aplicativos no desenvolvimento dos módulos e sua importância na aula de matemática como forma de se movimentar e dinamizar seus espaços na prática. No Quadro 18, se apresenta uma classificação simples das percepções interessantes dadas em relação com a atividade das abelhas e também um trecho das escritas feitas como parte da argumentação com ajuda do aplicativo para gerar um conjunto de informações e deduções.

Quadro 18- Respostas que foram bem interessantes na atividade inicial em cada turma de estudantes.

Grupo	Destaque	Exemplos apresentados
A	19	
B	15	Justifique a sua escolha: 
C	13	
D	13	

Fonte: Trechos retirados das resoluções dos alunos (2023).

O processo de manipulação virtualizada ajudou para os alunos compreender de forma positiva as relações numéricas que existiam quando se utilizavam os elementos do programa, por exemplo, na primeira resposta oferecida, as frações foram um método para estabelecer o crescimento e produção de potes de mel que vem a ser justificado com uma sequência. No quadro também se podem perceber respostas sobre visualização, movimentação e percepção de operações como a tabuada do número três, as multiplicações e finalmente o aumento linear com aquele botão vermelho.

A distribuição e caracterização dos grupos de alunos que estudaram sobre esta atividade de forma alternativa e com tempos bem diferenciados, permitiu saber que as compreensões e formas de pensar sobre uma questão ou ideia vai depender da experiência que

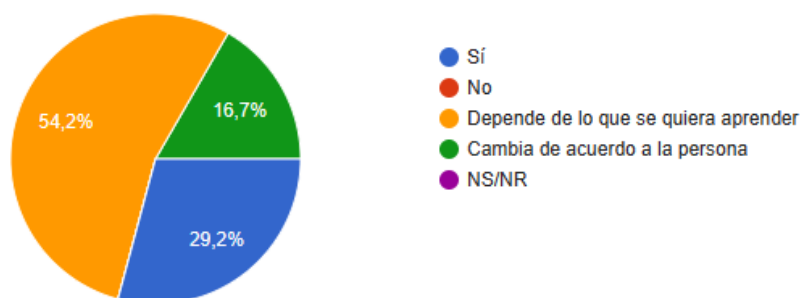
cada pessoa pode adquirir com o aplicativo sem falar de uma coisa correta ou errada. As técnicas importantes estão na manipulação desse recurso e justificação de saberes matemáticos com ajuda desse aplicativo para relacionar quantidades e objetos num contexto particular proposto desde a função linear.

### 7.5.1 Valoração, experiência e opinião da utilização dos aplicativos em sala de aula

Na avaliação proposta para os alunos que participaram da experiência, se fizeram algumas perguntas sobre as possibilidades e potencialidades de utilizar aplicativos tecnológicos em sala de aula para auxiliar sobre as atividades e reforçar saberes da disciplina. Em relação com o conteúdo das funções lineares que foi o foco de ensino e aprendizagem, os discentes deram as seguintes respostas (Figura 44).

Figura 44- Respostas sobre uso dos aplicativos.

Crees que con el uso de las herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas ¿La sensación de aprender sobre funciones lineales cambia?



Fonte: Dados de pesquisa.

Ainda, a maioria dos alunos, pelos menos aqueles que participaram de forma *online*, acham que a utilização do recurso tecnológico vai depender do conteúdo que vai ser estudado em sala de aula. Além disso, um 16% restante manifestou que também pode ser variável e vai mudar de pessoa em pessoa. Nessa linha, os processos de manipulação e aprendizagem estarão ligados com os interesses e atenções que os alunos deem para seus próprios aprendizados e que uso de tecnologia em sala de aula só vai ser uma fonte de apoio para que o professor consiga interagir de forma positiva em sala de aula.

Porém, 30% dos alunos na enquete proposta, afirmaram que aprender o conceito de função linear com uso de recursos tecnológicos vai mudar a forma de conceber e perceber os saberes que aparecem ali. Neste contexto, o aplicativo tecnológico deverá ter um desempenho



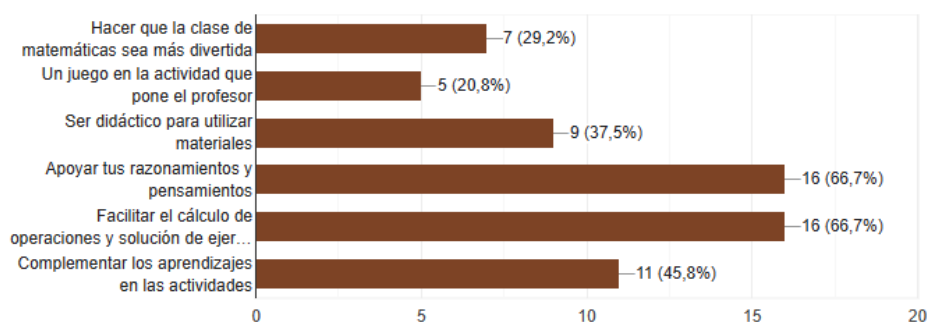
importante e diferenciado para entender e descrever procedimentos numéricos, geométricos e algébricos.

As concepções sobre os dispositivos tecnológicos em sala de aula de matemática, também foram na experiência um jeito de valoração dos alunos, já que, eles dizem que os recursos tecnológicos podem ajudar na disponibilidade e funcionalidade de aspectos relacionados com os saberes. Na Figura 45, observa-se que o 66% das respostas oferecidas pelos estudantes estão dispostas no auxílio de raciocínios, operações, pensamentos e solução de exercícios. Sendo assim, os recursos tecnológicos segundo as valorações e opiniões desse grupo de alunos, vão ser fundamentais para ter experiências positivas na disciplina.

Outro grupo de alunos com porcentagem menor que é de 45%, diz ao respeito dos dispositivos tecnológicos, que eles são complementares nos aprendizados, um 37% diz que estes materiais permitem que as aulas sejam lúdicas e mais interessantes no processo de ensino e aprendizagem de algum conteúdo da matemática.

Figura 45- Concepção sobre ter um aparelho tecnológico em sala de aula de matemática.

Poseer un aparato tecnológico en la clase de matemáticas puede significar: (Selecciona máximo 3 opciones).



Fonte: Dados de pesquisa.

Para encerrar, uma porcentagem menor dos alunos manifestou que os recursos digitais em sala de aula só fazem que elas sejam engraçadas e que além, esses materiais são jogos propostos pelo professor. A importância nestas respostas, segundo os estudantes, está oferecida no lazer e disponibilidade de material para que o tempo em sala de aula seja legal, sem dar uma conexão direta de apoio destes materiais para estabelecer e perceber novos saberes na trajetória escolar e estudo de conteúdos complexos. Da experiência oferecida no trajeto desta pesquisa, os alunos conseguiram desempenhar e dar valorações importantes para seus raciocínios pessoais, coletivos e matemáticos que serão fonte de desenvolvimento no futuro e em diferentes espaços da academia.



## 8 CONCLUSÕES

A trajetória deste processo de pesquisa em relação a utilização de recursos tecnológicos, tinha como motivo primário a abordagem sobre a manipulação virtual para a compreensão do conceito de função linear porque é bem sabido que geralmente “existem dificuldades dos discentes em relação à compreensão do conceito de função linear e afim, problema que se faz aberto quando o professor propõe atividades com registros que podem encerrar uma modelagem com aquele objeto matemático” (PEÑA, 2016, p.13, tradução própria). Dito isto, adotamos a premissa de que a modelagem matemática deste conceito poderia ser explorada com tecnologia como fonte de apoio, mobilização e permeabilidade através de experiências locais baseadas em manipulação de aplicativos educacionais.

Assim, as conclusões da pesquisa visam a ser relacionadas com os motivos, objetivos e questão proposta no percurso feito na etapa de iniciação, desenvolvimento e análise. Iremos aqui responder as questões levantadas em relação com manipulação virtual de aplicativos digitais e a importância deles para refletir sobre processos matemáticos levados no plano geométrico, numérico e algébrico da função linear.

Em relação com o objetivo relacionado em perceber a compreensão do objeto matemático, observou-se que os aplicativos utilizados em diferentes níveis, permitiram que os alunos tivessem noções sem menos prejuízos sobre o significado da função, ela não era necessariamente do tipo algébrico, mas tinha repercussão nas relações numéricas e geométricas que permitiam estabelecer uma caracterização das quantidades com exemplos, desenhos, tabelas e sequências.

Para a questão de pesquisa e tentando responder de forma consequente trazendo elementos da pesquisa, as características principais do contexto digital tecnológico para compreender o conceito de função linear diante a manipulação virtualizada são: consciência de processos feitos sobre o aplicativo apresentado, lembrança de saberes que já foram estudados no contexto físico que podem ser auxiliados com recursos tecnológicos e finalmente experiências de tempo, saber e prática que estão ligadas com conexões vivenciadas com os recursos próprios dos alunos.

A manipulação virtual que foi o elemento de estudo na pesquisa, focado na utilização de aplicativos, uso da linguagem natural e adequações das representações da matemática, apresentou elementos por parte dos discentes diretamente na sua relação com cada programa

utilizado, onde se tem destaque em frases como: mexer na linha indicada, introduz um valor para dar uma resposta ou fazer um “*cliquebait*” que são muito favoráveis para estudar os aspectos da posição e percepção quando os ícones da tela fossem movimentados, além de justificar a elaboração desse conteúdo na compreensão de saberes ligados com aspectos numéricos da função linear.

Alguns aspectos da pesquisa, por enquanto, na prática elaborada, também podem ser relacionados com os componentes a seguir: a) comparações estabelecidas pelos alunos com auxílio do programa ou aplicativo para dar uma resposta a alguma questão, b) discussões coletivas dos discentes sobre a importância do aplicativo para dar uma solução no problema proposto seguindo instruções e “mexendo” na tela como um elemento físico e c) consciência sobre elementos que estão aparecendo no *site* do aplicativo para fazer um conjunto de comprovações.

Em afinidade já com as transcrições dos alunos no percurso da pesquisa, observa-se que cada um deles tentou utilizar categorias estabelecidas para encaminhar ações matemáticas de forma particular onde se ressalta por exemplo: utilização da regra de três como uma relação, utilização de equações que são elaboradas e resolvidas com ajuda dos aplicativos e identificação de sequências que padrões que podem ser programados de forma manipulável para que os valores apresentados possam ser alterados.

Compreender neste processo de pesquisa o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino e aprendizagem da função linear, foi fundamental no desenvolvimento dos módulos e teve consequências mais do que manusear o recurso digital em sala de aula. Os aplicativos utilizados permitiram que os alunos discutissem sobre elementos bem diferenciados e necessários também na prática como: lembrar conteúdos seguindo uma série de indícios diretos do aplicativo e agilizar alguns dos cálculos com auxílio das representações gráficas que são aproveitáveis nas dinâmicas do recurso tecnológico.

A distribuição das respostas oferece aspectos da linguagem bem interessantes que podem ser descritos de forma simples diante a utilização de verbos como por exemplo: mexer, cutucar, pegar, mudar, clicar, apresentar, aumentar, diminuir e olhar que foram aproveitados tanto no português quanto no espanhol como formas de se referir aos processos de elaboração e exploração com cada aplicativo no momento de ser utilizado.

O emprego de manipulações virtualizadas e utilização de diversas representações no percurso das atividades propostas em vista para compreender o conceito de função linear, foram bem reconhecidas nos trechos das respostas oferecidas pelos alunos, diante a justificativa com o mesmo aplicativo e com aspectos específicos como investigar um valor específico, arrastre de um controle deslizante, aumento ou diminuição de um conjunto de valores e finalmente ajuste sobre botões e comandos clicando e apertando.

Com certeza, outros olhares poderiam identificar ainda outras potencialidades da manipulação virtualizada, assim como, o espectro amplo que essa área de pesquisa levanta indicam a possibilidade de novas pesquisas para compreender como os recursos digitais podem auxiliar no processo educativo, especificamente no estudo de aspectos da matemática que estejam relacionados com aspectos dinâmicos que precisam ser analisados e estudados com materiais que permitam estabelecer essas visualizações sobre um conjunto de objetos concretos que sejam interessantes para os alunos.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, E; FLORES, M. Objetos de Aprendizagem: conceitos básicos. In: TAROUCO, L. *et al.* (Orgs.). **Objetos de Aprendizagem: teoria e prática**. Porto Alegre: Evangraf, 2014, p. 12-28.
- BALDINO, R. Ensino da Matemática ou Educação Matemática. **Revista Temas e Debates**, SBEM, v.1, n.3.p. 51-60. 1991.
- BALLESTEROS, V. *et al.* La integración de dispositivos móviles en el aula para la enseñanza del álgebra: el caso de la función lineal. **Revista Educación y Humanismo**, v. 24, p. 1-20, 2022.
- BALVIN, F; VILLA, J. **Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional**. 2006. 191 f. Disertación (Maestría en docencia de las matemáticas) - Universidad de Antioquia, Medellín- Colombia, 2006.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Trad., de Luís Antero e Augusto Pinheiro. Lisboa-Portugal: Edições 70 LTDA, 1970.
- BARREIRO, P. *et al.* **Perspectivas metodológicas en la Enseñanza y en la investigación en Educación Matemática**. Los Polvorines- Argentina: Edición Universidad General de Sarmiento, 2017.
- BASNIAK, M. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 9(1), p. 43-58, 2020.
- BERNAL, Y. **EVA como medio para la conceptualización de la función lineal al abordar situaciones de variación en grado octavo**. 2021. 172, f. Disertación (Maestría en Educación en Tecnología – Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2021.
- BICUDO, M; PAULO, R. Um Exercício Filosófico sobre a Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 251-298, ago. 2011.
- BOGDAN, R. C; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Trad. Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto – Portugal: Porto Editora, 2013.
- BORBA, M. C. SILVA, R. S. R. da. GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. – Belo Horizonte. Autêntica Editora, 2014. – (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- BRASIL, S.E. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental e Médio. Brasília: MEC, 2017.
- CABALLERO, E; VILLARREAL, R. Estrategia TIC para enseñar la función lineal en estudiantes universitarios. **Boletín REDIPE**, v.10, n.2. p. 413-429. 2021.
- CAMPOS, A. Salas ambientes: Os laboratórios de ensino da matemática. **HISTEMAT**, São Paulo, v. 6, n. 3, p. 24-41, ago. 2020.
- CARREIRA, S. Matemática e tecnologias. Ao encontro dos nativos digitais com os manipulativos virtuais. **Revista de Investigação em Educação Matemática**, v. 18, p. 53-86, 2009.

- CASTAÑEDA, L; SALINAS, J; ADELL, J. Hacia una visión contemporánea de la Tecnología Educativa. **Revista Digital de Educación**, Murcia, n. 37, p. 240- 268, junio. 2020.
- CASTELLS, M. **A Sociedade em rede- A era da informação**. São Paulo– Brasil: Edições Paz e Terra, 2016.
- CASTRO, A. A formação de professores de matemática para uso das tecnologias digitais e o currículo da era digital. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo/SP. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**: SBEM, 2016. v. 1. p. 01-12.
- CASTRO, K; RODRIGUES, C.K. Ideias Básicas de Função: uma abordagem historiográfica. **RIDEMA: Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, RS, v. 6, n. 1, p. 01-20. 2022.
- COSTA, E. **O Teorema fundamental da álgebra e o software TFA: Atividades investigativas no ensino aprendizagem pelas TIC**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Instituto de Ciências Exatas. Juiz de Fora, 2013.
- CUARTAS, O. **Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC**. 2012. f.91. Disertación (Maestría en la enseñanza de las Ciencias exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 2012.
- CUBILLO, M; CASTILLO, H; MARTÍNEZ, B. El uso de aplicaciones móviles en el aprendizaje de las matemáticas: una revisión sistémica. **Revista de la Facultad de Educación de Albacete (Ensayos)**, v. 36, p. 17-34, 2021.
- CUPANI, A. **Filosofia da Tecnologia: um convite**. Edição 3. Local: UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), 2016.
- DÍAZ, V; BELMAR, H; POBLETE, Manifestación emocional y modelación de una función matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1198-1212, dez. 2018.
- DUARTE, E. **Resolución de problemas con la función lineal a través de una secuencia didáctica utilizando GeoGebra**. 2018, 153 f. Dissertação (Maestría en Proyectos Educativos mediados por TIC) - Universidad de La Sabana, Bogotá DC, 2018.
- DUVAL, R. Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. In: DUVAL, R; LUDLOW, A. **Comprensión y aprendizaje en matemáticas, perspectivas semióticas seleccionadas**. Bogotá: Editora Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016, p 61-94.
- ESCHER, M. Tecnologias em sala de aula: e agora? In: SOARES, T. *et al.* **Ciência em dia: jornadas de divulgação científica. A Matemática está em tudo**. Juiz de Fora: Livraria da Física, 2018, p 53-74.
- ESCHER, M; MISKULIN, R. Dimensões Teórico- Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem. **Investigação e Divulgação em Educação Matemática**. Juiz de Fora, v. 3, n. 1, p. 22-48, jan/jun, 2019.
- FALCÃO, J. **Psicologia da Educação Matemática: Uma introdução**. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão. Belo Horizonte– Brasil: Autêntica, 2015.
- FIORENTINI, D. A Educação Matemática enquanto campo profissional de produção de saber: a trajetória brasileira. **Revista Tecno-Científica DYNAMIS**, v.2, n.7, 1994.

- FLORES, J. **Razonamiento variacional de estudiantes de tercero de secundaria con respecto a funciones de variable continua y discreta**. 2021. p.01-101. Disertación (Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima, 2021.
- FREITAS, R; CARVALHO, M. Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática. **Laplage em Revista**, v. 3, n.2, p. 46-58, 2017.
- GODINO, J; GONZATO, M; CAJARAVILLE, J; FERNÁNDEZ, T. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en Educación Matemática. **Investigación y Experiencias Didácticas**. Granada, v. 30, n. 2, p. 109-130, mar. 2011.
- GONÇALVES, A. **Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos**. f. 104, 2015. Dissertação (Ciências Matemáticas e da computação). USP, Universidade de São Paulo. São Paulo- Brasil, 2015.
- GONZALEZ, W; HERNÁNDEZ, L. Tecnología y técnica: tres perspectivas. *Energía y computación*, v.9, n.1.p. 01-19. 2000.
- GONZALEZ, C. La relación entre Lenguaje y Pensamiento de Vygotsky en el desarrollo de la Psicolingüística moderna. **RLA, Revista de Lingüística Teórica y aplicada**, 48 (2), II Sem. 2010, ISSN 0718-4883. pp. 13-32.
- IÑESTA, E. Lenguaje, aprendizaje y conocimiento. **Revista Mexicana de Psicología**. Ciudad de México, v.24, n.1, p.07-14, jun, 2007.
- JÚNIOR, A; LAUDARES, J. Objetos de aprendizagem para o estudo do conceito de função e suas representações em modelos matemáticos no ensino médio na educação profissional técnica. In: MIRANDA, D. *et al.* **Objetos de Aprendizagem para o ensino de Matemática: uma prática educativa**. Belo Horizonte: PUC Minas, 2019, p 63-87.
- KALINKE, M; MOCROSKY, L. **Educação Matemática: pesquisas e possibilidades**. Edição 1. Curitiba: UTFPR, 2015.
- KIERAN, C; FILLOY, E. **El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica**. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), 229-240. 1989.
- KITCHENHAM, A. **Procedures for Undertaking Systematic Reviews. Technical report, Computer Science Department**. Keele University. 2004.
- LEONARDINI, M; TOVAR, M. Desempenho docente en el desarrollo de competencias matemáticas en educación preescolar: una revisión sistemática. **Revista Científica HACEDOR (AIAPAEC)**, v. 5, p. 80-92, 2021.
- LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. 2 ed. São Paulo: Brasil. Centauro, 2004.
- LERMAN, S. Relações entre Teoria e Prática na Educação Matemática: lentes diferentes. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, Brasil ISSN 1980-4415, p. 83-94, 2015.
- LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência: O futuro do Pensamento na era da Informática**. Edição 34 Ltda. Brasil: Sindicato Nacional, p. 1-199, 2004.
- LÜDKE, M; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. Câmara Brasileira do livro. f. 50. 1986.

MELO, E. Classificação de *Apps* educativos para dispositivos móveis com potencial para matemática: uma revisão sistemática de literatura. **Anais...** in: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Cuiabá/MT. SBEM, 2019. v. 1. p. 01-15.

MEN– MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. **Potenciar el pensamiento matemático escolar**. Bogotá: SED, 2006.

MENEGHETTI, R. Ambiente Virtual e Educação Matemática: necessidades e potencialidades educacionais. In: CLARETO, S; DETONI, A; PAULO, R. (Orgs.). **Filosofia Matemática e Educação Matemática**. Juiz de Fora: UFJF, 2010, p. 165-169.

MESA, J. **Desarrollo del razonamiento variacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo**, p.86. Disertación (Trabajo de Maestría Ciencias Básicas). Universidad de Medellín, Medellín, 2016.

MISKULIN, R. **Concepções Teórico Metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 1999.

MUÑOZ, M; CHOCÓ, J; MORENO, A. Ventajas y limitaciones de la representación intervalar: una aproximación a la propiedad de la densidad de los números reales en el grado once. **Anales do: ENCUENTRO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (EIEM)**, IV, 2018, Barranquilla. Memorias del 4º EIEM. Puerto Colombia: Universidad del Atlántico. p.324-330. Online.

OLIVER, M. **What is Technology**. En N. Rushby; D. Surry (Eds.), Wiley Handbook of Learning Technology (Edición: 1). Wiley Handbooks in Education. 2016.

ORDOÑEZ, J. **Uso del software libre GeoGebra para interpretar algunos modelos matemáticos de ciertos fenómenos cotidianos que facilite al estudiante la apropiación adecuada del concepto de función lineal y cuadrática y sus distintas representaciones**. 2018, v. 1, n. 1, 250, f. ago. Dissertação (Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales)- Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2018.

ORTIZ, R; RAMÍREZ, A. **Ellos vienen con el chip incorporado: aproximación a una cultura informática escolar**. Edição 3. Bogotá: IDEP, 2013.

OSORIO, C. La Educación Científica y tecnológica desde el enfoque en Ciencia, Tecnología y Sociedad. **Revista Iberoamericana de Educación**. Madrid, v. 28, n.2, p.60-81, enero. 2002.

OYARBIDE, M. Jerome Seymour Bruner: de la percepción al lenguaje. **Revista Iberoamericana de Educación**. España, v. 34, n.1, p.1-19. 2004.

PAULA, S; RODRIGUES, C; SILVA, J. **Educação Matemática e Tecnologia: articulando práticas geométricas**. Appris. Curitiba: CIP, 2016.

PEÑA, D. **Conceptualización de la función lineal y afín: una experiencia de aula**. 2016. f.98. Dissertação (Mestrado em Educação com ênfase em Educação Matemática). Universidade Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2016.

PEREIRA, D. J. **História do movimento democrático que criou a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)**. 2005. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2005.

PEREIRA, T. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública**, Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, 2012.

PINTO, T. **Linguagem e Educação Matemática**: Um mapeamento de usos na sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2009.

PIRES, L. **As Influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, 2016.

PINZÓN, L. Tecnología Educativa en América Latina: Revisión de definiciones y artefactos. **EDUTEC**, Ciudad de Panamá, v. 1, n. 81, p. 122-136, sep. 2022.

REHFELDT, M. et al. Elaboração de atividades exploratório-investigativas: uma possibilidade de planejamento coletivo. **Debates em Educação**, [S. l.], v. 11, n. 25, p. 202–221, 2019.

RIBEIRO, A. **A utilização do Laboratório de Educação Matemática na escola: experiências com professores que ensinam matemática**. 2019. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.

RODRÍGUEZ, F; PORRAS, N. Educación y tecnología: problemas y relaciones. **Revista Pedagogía y Saberes**, Bogotá, v. 48, p. 59- 70, noviembre. 2018.

SÁNCHEZ, A. Estrategias para el aprendizaje de las funciones reales con la plataforma Moodle. **Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento**, Zulia, v.12, n.2, p. 41-54, mayo. 2015.

SILVA, A; SANTOS, A; MIRANDA, C; SOUZA, P. O Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UNEB e o constituir-se professor pesquisador: itinerários e narrativas de formação. **Com a Palavra, O Professor**, 8(20), 246–267. 2023.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica**: Incerteza, Matemática, Responsabilidade. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo-Brasil: Cortez, 2007.

SOUZA, D. **Laboratório de Matemática e o uso de materiais manipulativos: um relato de experiência**. 2022. 33 f. TCC (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VIEIRA PINTO, A. **O Conceito de Tecnologia**, v. 1. Edição 2, Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.


VIGOTSKY, L. **Thought and Language**. Trad. Eugenia Hanfmann, Gertrude Vakar e Alex Kozulin. Editorial Revised and Expanded. Londres. 2012.

WROBEL, J; ZEFERINO, M; CARNEIRO, T. Cálculo Diferencial e Integral no ENEM: Um mapa da produção científica na última década. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**– ISSN 2178–034X. Versão digital.



## 9 ANEXOS

### ANEXO 1- FORMATO DE PLANEACIÓN DEL MÓDULO 1 DE LAS ACTIVIDADES APLICADAS EN LOS COLEGIOS CHUNIZA FÁMACO Y JOÃO XXIII

<b>UNIVERSIDAD FEDERAL DE JUIZ DE FORA</b> <b>MAESTRÍA PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA</b> <b>Estudiante:</b> Yancel Orlando Soto Hernández- 102280213			
Módulo 1	<b>Fecha:</b> 02/08/2022	<b>Colegio:</b> Chuniza Fámaco IED	<b>Curso:</b> 8°
<b>TEMA DE ESTUDIO:</b> Proporcionalidad directa enfocado a la razón entre magnitudes			
<b>OBJETIVOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseñar estrategias para la resolución del problema propuesto, relacionándolo con relaciones numéricas entre cantidades.</li> <li>• Describir situaciones de variación y relación entre cantidades, relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales y cálculos simples).</li> <li>• Reconocer regularidades y patrones de crecimiento en contextos numéricos (caso de lo multiplicativo y de la razón de cambio).</li> </ul>			
<b>DESCRIPCIÓN GENERAL:</b> Para el desarrollo del módulo 0, se espera que los estudiantes reconozcan y apliquen estrategias de la multiplicación, razón de magnitudes y proporción entre cantidades con conteos, mediciones y relaciones entre objetos.			
<b>APLICACIÓN DE LA ACTIVIDAD:</b> Las actividades del módulo se desarrollarán de forma sincrónica con estudiantes del Colegio Chuniza Fámaco en la ciudad de Bogotá- Colombia y de forma presencial con estudiantes del Colegio João XXIII en la ciudad de Juiz de Fora- Brasil.			
<b>MOMENTOS</b>			<b>TIEMPO</b>
<b>Momento 1:</b> Presentación general y explicación de la dinámica para el desarrollo de las actividades con las respectivas instrucciones para la resolución de las preguntas.			10 minutos
<b>Momento 2:</b> Exploración del material de estudio para la sesión y proyección de las primeras preguntas con la situación de la abeja. En este momento se propone realizar lo siguiente: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lectura de las primeras 3 preguntas y apreciaciones iniciales de los estudiantes por el micrófono y el chat de la reunión sobre la situación.</li> <li>• Envío del link de la actividad de las abejas a los estudiantes e interacción sobre las preguntas 4 y 5.</li> <li>• Retroalimentación y discusión sobre la facilidad o dificultad para responder a las preguntas utilizando el programa y conocimientos matemáticos.</li> </ul>			40 minutos
<b>Momento 3:</b> Recordatorio de aspectos conceptuales sobre la proporcionalidad directa, utilización de la regla de 3 y relaciones multiplicativas a partir de ejemplos del problema de la abeja.			20 minutos
<b>Momento 4:</b> Exploración del material en la plataforma GeoGebra y PhET Colorado para representar relaciones directas mediante la utilización de aplicaciones siguiendo los comandos de cada programa.			40 minutos
<b>Momento 5:</b> Discusiones sobre los 2 aplicativos explorados, cierre del primer bloque de las actividades y explicación del formulario de preguntas sobre lo realizado en la actividad.			10 minutos
<b>RECURSOS:</b> Se utilizarán materiales de acceso libre construidos en las plataformas GeoGebra y PhET respectivamente con tableros digitales y una presentación de apoyo en donde se proyectarán las preguntas. Los enlaces para acceder a cada aplicación de las herramientas son los siguientes: Actividad GeoGebra: <a href="#">Sobre las abejas</a> PhET: <a href="#">Modelo de tabulación</a>			

Los aplicativos anteriores, permitirán proponer las preguntas en el espacio sincrónico o físico y además complementar las discusiones sobre el concepto matemático.

### ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se propone a los estudiantes observar una imagen en la que se presenta la relación que existe entre la cantidad de miel en litros fabricada por un grupo de abejas.



A partir de la fotografía, se espera que los estudiantes respondan las siguientes preguntas y razonen sobre algunos elementos de la proporción.

- ¿Por qué en la fotografía aparece el número 15? ¿qué está representando y cuál es su función en el problema? Justifica tu respuesta con alguna representación numérica o gráfica.
- Sabiendo que 3 abejas producen un litro de miel ¿es posible determinar la cantidad de litros de miel producido por 4 abejas? Explica mediante alguna operación o gráfico cuál fue el razonamiento utilizado.
- ¿Es posible averiguar la cantidad de litros de miel producido por 39 y 40 abejas? Explica cómo podría ser el razonamiento para determinar dicha cantidad de litros.

En la pregunta 3, se le presenta al grupo de estudiantes el aplicativo con la actividad de las abejas para que exploren y respondan nuevamente las preguntas. Para acceder al aplicativo, se puede dar [click aquí](#).



Los estudiantes responderán las preguntas 1,2 y 3 utilizando el material facilitado por el profesor, explicando el cambio de razonamientos y facilidades con la herramienta. Utilizando el aplicativo, se deberá explicar la relación entre la cantidad de miel producida y abejas y cómo es el aumento respondiendo a las siguientes preguntas:

- ¿Qué haces con el programa para encontrar la cantidad de miel que producen 17,18,20 y 25 abejas?
- ¿Existe alguna operación matemática que permita encontrar los valores numéricos tan rápido como el programa?

Al final, los estudiantes manipularán con ayuda del profesor el aplicativo de la plataforma PhET Colorado ([click aquí](#)) en el que se representan valores numéricos mediante una tabla. Se espera representar valores numéricos obtenidos en la actividad anterior para corroborar la información y abordar el concepto de proporción directa de manera básica.

Posterior a la finalización de las actividades y con los razonamientos generados, se les propondrá a los estudiantes diligenciar un formulario de retroalimentación en el que se exploren elementos iniciales de la temática de estudio. (FORMULARIO 1).



ANEXO 2- FORMULARIO DE PREGUNTAS FÍSICO UTILIZADO EN LA SIMULACIÓN DE LA ACTIVIDAD DEL MÓDULO INICIAL CON ESTUDIANTES DEL COLEGIO JOÃO XXIII

**FORMULÁRIO 1**

Nesta atividade gostaríamos de ressaltar a importância de responder as questões propostas. Para respondê-las, veja o aplicativo do GeoGebra e ouça as indicações do professor.

1) Diga de forma simples o que você pode dizer da imagem apresentada no slide. Percebe alguma relação numérica?

---

2) Explique com as suas palavras por que apareceu o número 15 na imagem? Descreva qual é a sua função no problema utilizando alguma operação ou gráfico.

3) Sabendo que 3 abelhas produziram um pote de mel, qual é a quantidade de potes produzidos por 4 abelhas? Resolva utilizando alguma operação ou gráfico.

4) Explique com suas palavras quem depende de quem na relação entre quantidade de abelhas e potes de mel produzidos.

---

5) Ao manipular o aplicativo GeoGebra, você encontra que a quantidade de mel produzida por 17 abelhas foi:

5,60 litros de mel

Diga com as suas palavras o que você fez para encontrar a quantidade de mel no aplicativo.

5,67 litros de mel

5,76 litros de mel

5,06 litros de mel

6) Com o apoio do aplicativo GeoGebra, ache a quantidade de mel produzida por 17, 18, 20 e 25 abelhas e descreva como você fez.

---

7) No aplicativo, ao clicar sobre o ícone “exibir ponto” vão aparecer uns pontos vermelhos que representam o que?

As abelhas

Os potes de mel

Relação entre as abelhas e os potes de mel produzidos

Somente um valor numérico que indica quantas abelhas produziram certa quantidade de mel

Justifique a sua escolha:


---

8) Conte um pouco sobre a sua experiência mexendo o aplicativo apresentado:

---

---

ANEXO 3- FORMATO DE PLANEACIÓN DEL MÓDULO 2 DE LAS ACTIVIDADES APLICADAS EN EL COLEGIO CHUNIZA FÁMACO

<b>UNIVERSIDAD FEDERAL DE JUÍZ DE FORA</b> <b>MAESTRÍA PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA</b> <b>Profesor:</b> Yancel Orlando Soto Hernández- 102280213		
Módulo 2	<b>Fecha:</b> 16/08/2023	<b>Curso:</b> 8°
<b>TEMA DE ESTUDIO:</b> Noción de función lineal y representación con tabla de valores		
<b>OBJETIVOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar mediante tablas de valores y expresiones algebraicas simples, relaciones entre cantidades numéricas identificadas en el plano cartesiano.</li> <li>• Reconocer valores de entrada y salida en un conjunto de números con su respectivo patrón de crecimiento desde el contexto numérico.</li> <li>• Asociar representaciones de una función lineal mediante el movimiento y seguimiento de secuencias básicas con tablas de valores.</li> </ul>		
<b>DESCRIPCIÓN GENERAL:</b> Para el desarrollo del módulo 1, se espera que los estudiantes construyan tablas de valores de manera interactiva y relacionen los diferentes tipos de representaciones generadas en una proporción llevada al plano de la función lineal.		
<b>APLICACIÓN:</b> Los 3 recursos propuestos para el desarrollo del módulo, estarán enfocados en el desarrollo de habilidades del pensamiento numérico mediante la construcción de secuencias con tablas de valores en los programas de PhET y Mathigon respectivamente.  En relación a la noción de función, se propone el abordaje de aplicativos con la construcción de gráficas que simulen movimientos de objetos en el programa Desmos.		
<b>MOMENTOS</b>		<b>TIEMPO</b>
<b>Momento 1:</b> Saludo y presentación general del módulo con las dinámicas para su desarrollo y utilización de cada uno de los aplicativos.		10 minutos
<b>Momento 2:</b> Exploración del material de estudio de las plataformas PhET y Mathigon mediante el planteamiento de preguntas y manipulación del realizando lo siguiente. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Abordaje de la actividad del número misterioso y preguntas por parte del profesor.</li> <li>• Proceso de resolución y manipulación del aplicativo para construir diferentes tablas de valores de relaciones numéricas por parte de los estudiantes.</li> <li>• Discusión sobre los diferentes elementos que aparecen en el aplicativo y su funcionalidad.</li> </ul> Al finalizar la exploración sobre los íconos del número misterioso, se solicitará a los estudiantes el envío de las preguntas mediante una fotografía o pantallazo.		40 minutos
<b>Momento 3:</b> Utilizando el programa Mathigon, se explicarán las relaciones encontradas en la actividad del número misterioso con la tabulación de valores y generación de tablas numéricas. Posteriormente, los estudiantes deberán representar un ejemplo simple en el que se retroalimentarán las potencialidades de los programas en cuestión.		20 minutos
<b>Momento 4:</b> Exploración del material de estudio para la siguiente actividad sobre el movimiento de la tortuga en donde se propone lo siguiente: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lectura de las preguntas y apreciaciones iniciales de los estudiantes por el micrófono y chat sobre lo que está ocurriendo en el programa.</li> <li>• Envío del link de la actividad para su exploración y elaboración de gráfica en el plano cartesiano.</li> <li>• Retroalimentación y discusión sobre la facilidad o dificultad para responder a las preguntas utilizando el programa y conocimientos matemáticos.</li> </ul>		40 minutos
<b>Momento 5:</b> Cierre de la segunda actividad y elaboración de formulario de preguntas con la discusión de las respuestas y retroalimentación para la utilización de los programas (especialmente Mathigon).		10 minutos

**RECURSOS:** En este módulo se utilizarán 3 programas de acceso libre construidos en las plataformas de PhET, Desmos y Mathigon en donde se abordarán directamente las preguntas. Los enlaces para acceder a cada aplicación de las herramientas son los siguientes:

PhET: [Número misterioso](#)

Mathigon: [Modelo de tabulación interactiva](#)

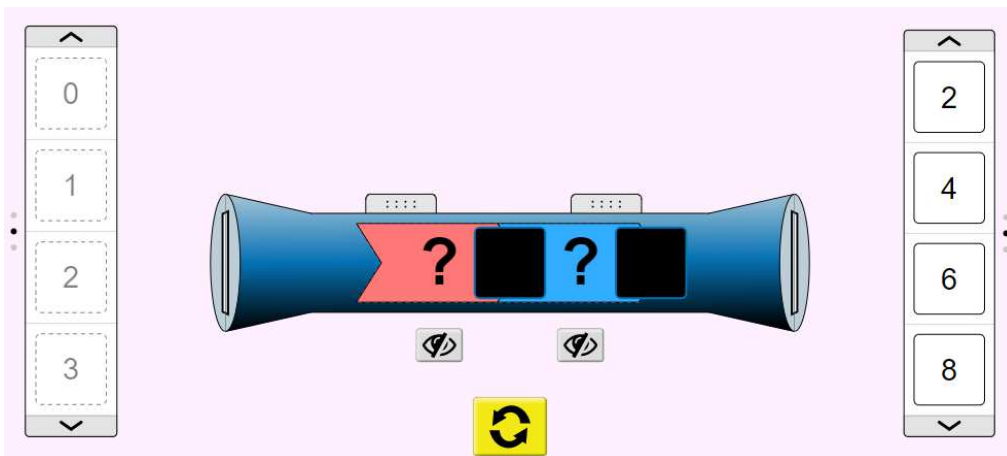
Desmos: [Cruce de tortugas \(1,3 y 4\)](#)

Los aplicativos anteriores, serán el medio de trabajo en el espacio sincrónico y permitirán complementar las preguntas elaboradas.

### ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se propone a los estudiantes inicialmente observar una captura de pantalla de la aplicación PhET Colorado en la que aparece una caja de número y una máquina y responder la siguiente pregunta.

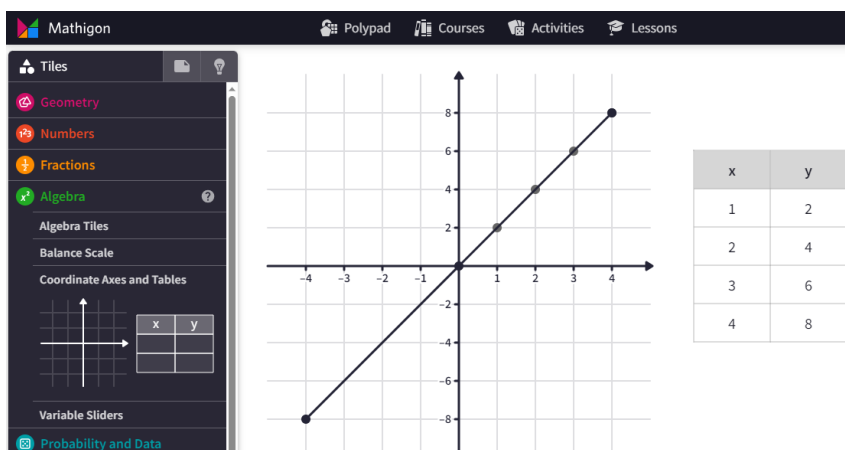
- Al introducir un valor numérico de la columna de la parte izquierda ¿qué crees que está sucediendo en la caja misteriosa de la máquina transformadora? Justifica.



A partir de la interacción y discusión con el grupo de estudiantes, se facilita el enlace para ingresar directamente a la actividad y se plantean las siguientes preguntas en las que tendrán que manipular el programa.

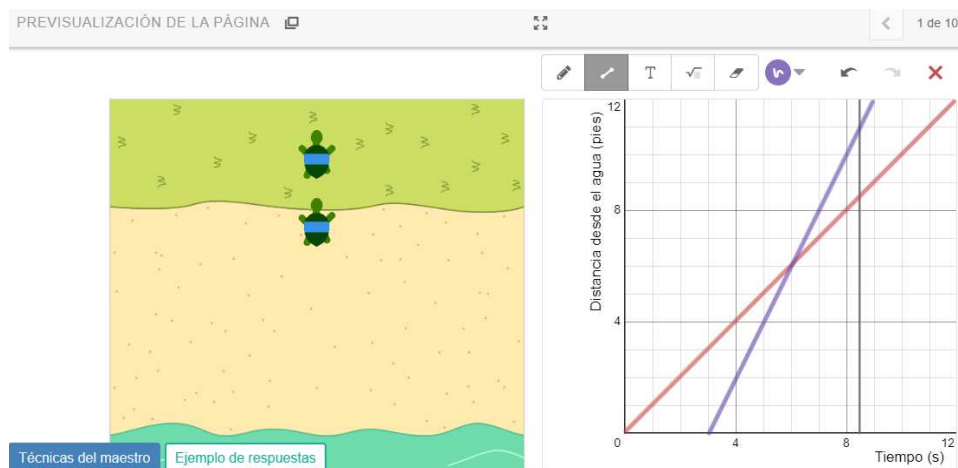
- Explore el programa y justifique la existencia y papel de los elementos dentro del mismo aplicativo que permitan averiguar la respuesta del número y operación misteriosa.
- Con ayuda del programa, encuentre el valor de salida al aplicar una operación misteriosa a las siguientes cantidades (5,6 y 7). ¿Es posible encontrar los valores de salida para valores numéricos mayores?

Después de responder y discutir las preguntas, se explorará el tablero digital de Mathigon en el que se diseñará una de las gráficas de los números misteriosos y se les orientará a los estudiantes sobre la elaboración de un ejemplo propio.



Los estudiantes harán un envío del material construido y finalmente se hará una pequeña formalización sobre los tipos de representaciones existentes con apoyo de los aplicativos utilizados. En la actividad de la tortuga, se les propondrá a los estudiantes el abordaje de las siguientes preguntas en las que tendrán que jugar previamente con el aplicativo y tener en cuenta la construcción de tablas de valores.

- Es posible diseñar una tabla de valores que represente el movimiento de la tortuga. Realiza un ejemplo simple.
- Representa el movimiento de una tortuga con una línea cualquiera y explica qué está sucediendo al clicar el botón de pausa en el programa.
- Explora la herramienta facilitada por el profesor y explica con tus palabras cómo se está moviendo la tortuga al dibujar una línea recta.
- ¿Qué sucede con la tortuga cuando la línea está más inclinada? Presenta un ejemplo con valores numéricos o alguna fórmula si es posible.



Explorando ejemplos sobre el aplicativo, se discutirá sobre los elementos importantes del movimiento y la relación funcional existente entre el movimiento de la tortuga y la generación de un gráfico geométrico que muestra el funcionamiento de dicho movimiento en un intervalo de tiempo. Al final, se les recomendará a los estudiantes la exploración sobre otros materiales de la actividad “cruce de tortugas” en donde aparecen diversos ejercicios para averiguar el movimiento de la tortuga.

**1 Calentamiento**

**2 La gráfica de Luca**


**6 Descúbrelo**

**7 Un cruce peligroso**

Posterior a la finalización de las actividades del módulo y con los razonamientos generados, se les propondrá a los estudiantes diligenciar un formulario de retroalimentación sobre el proceso y temáticas de estudio con los programas propuestos ([FORMULARIO 2](#)).



ANEXO 4- FORMATO DE PLANEACIÓN DEL MÓDULO 3 DE LAS ACTIVIDADES APLICADAS EN EL COLEGIO CHUNIZA FÁMACO

<b>UNIVERSIDAD FEDERAL DE JUÍZ DE FORA</b> <b>MAESTRÍA PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA</b> <b>Profesor:</b> Yancel Orlando Soto Hernández- 102280213		
Módulo 3	<b>Fecha:</b> 30/08/2023	<b>Curso:</b> 8°
<b>TEMA DE ESTUDIO:</b> Función lineal y su representación algebraica		
<b>OBJETIVOS DE LA SESIÓN</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Programar secuencias básicas de funciones lineales a partir de una serie de parámetros y representaciones iniciales.</li> <li>• Describir con ejemplos la variación y generalización de una función lineal utilizando una ecuación con parámetros específicos.</li> <li>• Reconocer los elementos principales en la ecuación de una función lineal a partir de cambio de valores en progresiones aritméticas simples.</li> </ul>		
<b>DESCRIPCIÓN GENERAL:</b> Para el desarrollo del módulo, se espera que los estudiantes a través de la programación de cantidades iniciales, reconozcan elementos principales que componen una función lineal y su aplicación en la generación de respuestas determinadas por un programa tecnológico.		
<b>HABILIDADES- CONOCIMIENTOS:</b> La actividad trabajará sobre habilidades del pensamiento numérico llevadas al plano del álgebra a través de la manipulación de comandos simples programados que serán explicados y abordados previamente con orientación del profesor en los programas Atrator, Excel, Colab y DFD.		
<b>MOMENTOS</b>		<b>TIEMPO</b>
<b>Momento 1:</b> Saludo y presentación de aspectos relevantes del módulo anterior en relación a la tabulación de cantidades y movimiento de las mismas.		10 minutos
<b>Momento 2:</b> En este momento, se les facilitará a los estudiantes el acceso a la herramienta Atrator y se les solicitará realizar la manipulación y movimiento de los puntos y deslizadores en cuestión. Se propondrá en una diapositiva una pregunta en la que se discuta acerca del patrón de cambio generado en los puntos al mover el deslizador.		20 minutos
<b>Momento 3:</b> Se propone la exploración sobre el código programado en la plataforma Colab en el que se esperan abordar los siguientes aspectos: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicación por parte del profesor del código programado en la herramienta y envío del enlace para que de manera autónoma se generen valores numéricos de salida y se construyan ejemplos particulares.</li> <li>• Discusión sobre preguntas relacionadas con la manipulación de la herramienta tecnológica y reemplazo de valores, su funcionalidad y modelación.</li> <li>• Formalización del funcionamiento del código con el apoyo de Excel para la generación de valores y su relación con los tipos de representaciones.</li> </ul>		40 minutos
<b>Momento 4:</b> En este momento y utilizando la aplicación DFD, se esperan reforzar aspectos de la programación y generación de códigos para tabular rápidamente diversos valores a partir de un operador determinado. Posteriormente se discutirán aspectos relevantes sobre la importancia de la letra y su papel en la comprensión y construcción de dichos códigos y se dejará el formulario de preguntas sobre lo realizado.		20 minutos
<b>RECURSOS:</b> En este módulo se utilizarán 3 aplicaciones de apoyo para su desarrollo. La primera de ellas será la plataforma Atrator. un programa de acceso limitado del paquete de Google llamado <i>Colab</i> en el que se rediseñó una secuencia programada para que los estudiantes puedan manipular. También se utilizará un programa de escritorio llamado DFD que permite construir diagramas de flujo Los enlaces para acceder a Colab y Atrator son los siguientes:		

Colab: Descubriendo la progresión aritmética programada

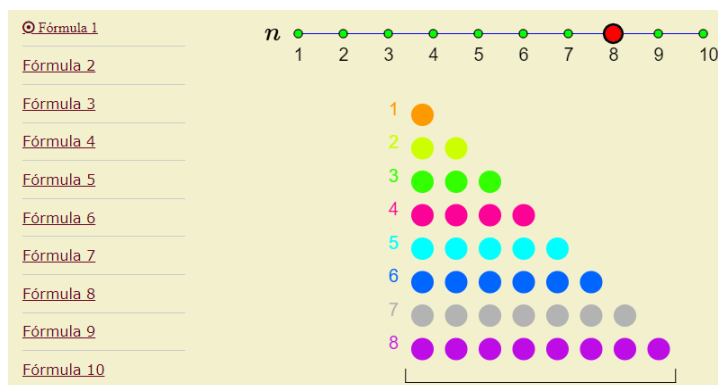
Atrator: Fórmulas de progresiones aritméticas

Los aplicativos anteriores, serán el medio de trabajo en el espacio sincrónico y permitirán complementar las preguntas elaboradas. En este módulo se espera orientar a los estudiantes sobre una formalización utilizando los aplicativos en cuestión con preguntas relacionadas al papel de cada letra en el material disponible.

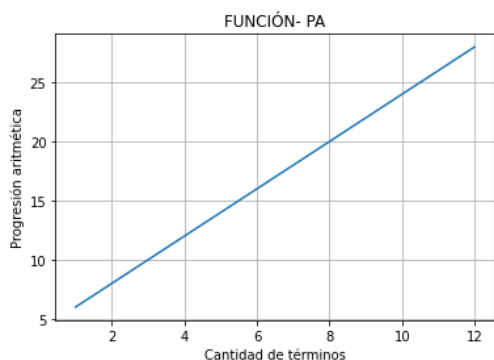
Es importante resaltar que en caso de generarse preguntas al momento de discutir sobre las acciones matemáticas realizadas, se acudirá a los anteriores aplicativos o a la presentación elaborada para cada uno de los módulos.

### ACTIVIDAD PROPUESTA

Primero se buscará trabajar con la plataforma Atrator, aquí los estudiantes deberán reconocer el movimiento de los puntos al deslizar, se les facilitará el enlace de acceso y deberán sobre ese mismo, determinar relaciones visuales, también se les explicará sobre cómo se relacionan los elementos geométricos y algebraicos específicamente, llevándolos poco a poco a la comprensión de la letra que es un factor determinante para entender la parte de programación del DFD y el Colab porque esos programas contienen las secuencias programadas a partir de letras, además se les intentará hacer un recuento de las representaciones ya abordadas con explicaciones sobre la generación de las tablas de valores.



Luego se les deberá pasar este aplicativo de Colab que previamente ha sido diseñado con las especificaciones para que ellos coloquen los números (no se espera que ellos programen nada, pero sí que entiendan los comandos que aparecen allí para que en ocasiones futuras consigan comprender incluso nociones de programación). Así, se les explicará también cómo funcionan y se les preguntará si han tenido algún tipo de experiencia con este tipo de recursos tecnológicos.



```
# Función de la progresión en el plano
fig,ax=plt.subplots()

#Puntos y comandos
x=np.array([PA])
x=np.linspace(1,n,50)
ax.plot(x,a1+(x-1)*r)
ax.grid()
ax.set_title('FUNCIÓN- PA')
ax.set_xlabel('Cantidad de términos')
ax.set_ylabel('Progresión aritmética')
plt.show()
```

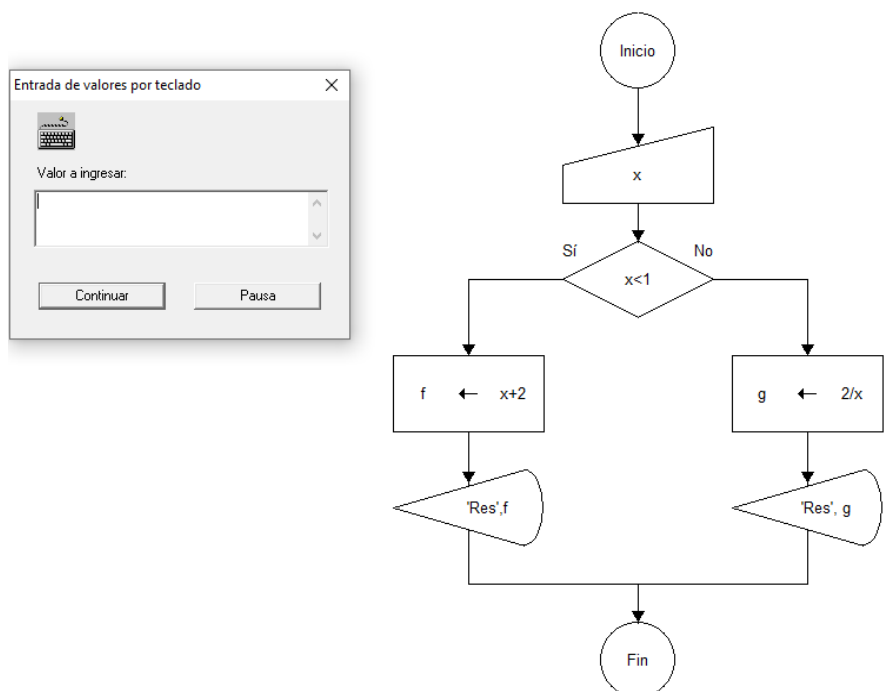
En este espacio la idea es que ellos mismos descubran la función de cada comando y letra que aparece, además de la gráfica y el cambio de números que se puede generar allí, además se les plantearán las siguientes preguntas para debatir de manera más abierta.

- ¿Qué representan las letras  $a$ ,  $n$  y  $r$  en la aplicación y cómo se pueden escribir? Diseña un ejemplo de una secuencia.
- ¿Cuál es la diferencia entre decir que tengo una variable  $x$  y una letra  $n$  que define la cantidad de valores? Explica con tus propias palabras.

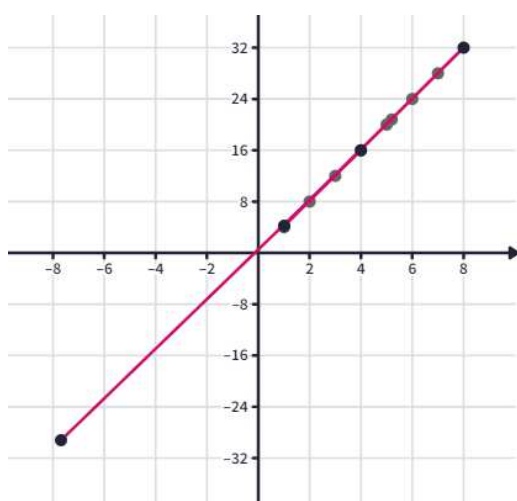


- ¿Existe algún tipo de vínculo entre las cantidades de la secuencia y la gráfica representada al final del comando?

En el último momento se espera abordar un aplicativo que ha sido trabajado en las clases de informática del colegio de forma específica y del cual los estudiantes ya tienen conocimiento llamado DFD en el que se explicará cómo programar de manera simple secuencias de funciones lineales con valores de entrada y salida siguiendo un estilo de diagrama de flujo con inicio y final al cual incluso se le pueden alterar los tipos de función para un rango determinado, números negativos, decimales y parámetros de la letra.



La idea con este aplicativo también es mostrar a los estudiantes la variedad de herramientas y su funcionalidad dispuestas incluso dentro de otras asignaturas, complementando el trabajo y dando valor agregado a los conocimientos adquiridos. Por último, se diligenciará el formulario y se discutirá sobre la importancia de programar secuencias numéricas (FORMULARIO 3).



x	y
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
5.2	20.8
6	24
7	28

A diferencia de los primeros módulos, en esta etapa del proceso, se espera que con las herramientas se logren reconocer aspectos de la variación y además se puedan revelar aspectos de lo algebraico siguiendo modelos de representaciones con tablas de valores que permitan comprender el cambio y variación de las cantidades con el apoyo de los programas utilizados previamente como GeoGebra, Desmos, Mathigon y otros *softwares* matemáticos que permitan visualizar diferentes representaciones de un fenómeno proporcional.

ANEXO 5- EXEMPLO DE FORMATAÇÃO, ANÁLISE E CLASSIFICAÇÃO DAS RESPOSTAS DOS DISCENTES DAS ESCOLAS NO EXCEL

Grupo A	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
A1	Percibe	Relación y operación	Correcto, aplica dos opciones al no estar seguro	Dependencia simple	Percepción y posición con una operación multiplicativa de asociación	Se observan 3 procesos de la manipulación virtual	Reconoce asociación y variación con la relación abeja y miel	Positivo
A2	Percibe	Relación	Ayuda del aplicativo	Sin respuesta	Percepción y posición con ayuda de la aplicación	Se observan 2 procesos de manipulación virtual	Existe un fenómeno de la asociación de magnitudes	Positivo
A3	Percibe	Relación	Operación correcta, respuesta incorrecta	Dependencia simple	Percepción y posición con ayuda de la aplicación	Se observa el proceso de posición con indicios de la percepción	Se comprende una asociación elemental con la posición fijada	Positivo
A4	Percibe	Relación y operación	Correcto, ayuda de la aplicación	Dependencia simple	Percepción y posición con el deslizador	Se observan 2 procesos de manipulación virtual	Asociación con el movimiento del deslizante	Positivo
A5	Parcial	Relación	Incorrecto	Dependencia sin reconocer una relación funcional	Percepción y posición relacionado con la disminución	Se observa un proceso de manipulación virtual sólo aludiendo a la posición	Se proporciona un valor partiendo de una relación "lógica" que da cuenta de la percepción con la aplicación	Positivo
A6	Parcial	No hay indicios de relación y operación	Correcto, con apoyo del aplicativo	Dependencia simple	Percepción, aunque relacionada con la disminución	Se observa un solo proceso de manipulación virtual ya que sólo se posicionan las cantidades	Relaciona cantidades numéricas sin dar los indicios de la variación	Positivo
A7	Parcial	Operación sin contexto	Correcto	Dependencia simple	Se observan aspectos de la posición y la percepción con el término "mover en la línea indicada"	Se observa un aspecto de la manipulación virtual	Existe una asociación simple entre litros de miel y abejas	Positivo
A8	Percibe	Operación	Correcto, cálculo con división	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción, posición y asociación con aumento de las cantidades	Se observan 3 procesos de la manipulación virtual siempre haciendo énfasis en el aumento	Se relaciona a la asociación entre cantidades numéricas	Positivo
A9	Parcial	Operación sin contexto	Respuesta con ayuda del aplicativo	Dependencia simple	Percepción y posición colocando los valores correspondientes	Se observan 3 procesos de la manipulación virtual, con la asociación entre cantidades	Asociación como una regla o valor numérico de relación	Positivo
A10	Percibe	Operación	Elaboración de una ecuación aritmética, correcta	Coordinación y dependencia de magnitudes	Percepción y posición al momento de clicar sobre elementos de la pantalla	Se observan 2 procesos de la manipulación virtual	Relación de variación simple con aumento o disminución como factores importantes	Positivo
A11	Parcial	Operación	Respuesta compartida con A10	Coordinación y dependencia de magnitudes	Posición, se utiliza la palabra "clicquear"	Se observan 2 procesos de manipulación virtual, énfasis sobre descubrir	Relación de aumento que va ligada con la asociación de cantidades numéricas	Positivo
A12	Percibe	Relación	Esquema gráfico de regla de 3, correcto, asociación de	Dependencia simple y directa	Percepción y posición con la barra de aumento	Se observan 2 procesos de manipulación virtual	Existe una asociación simple entre litros de miel y abejas	Positivo
A13	Parcial	Relación gráfica	Respuesta con ayuda del aplicativo y dibujos	Dependencia simple	Percepción y posición al colocar las cantidades correspondientes	Se observan 2 procesos de manipulación virtual	Existe una asociación de cantidades al apretar y exhibir valores	Positivo
A14	Parcial	Relación gráfica	Respuesta con ayuda de la aplicación	Dependencia simple	Posición con ayuda de la aplicación, el programa realiza toda la función y muestra	Posición de cada cantidad	Existe una asociación de cantidades al apretar y exhibir valores	Positivo, se hace énfasis en que el programa hace todo
A15	Percibe	Relación y operación con una división	El estudiante presenta 2 acciones al no estar seguro de establecer la relación	Dependencia simple, pero dada de forma inversa	Percepción y posición con una operación multiplicativa de asociación	Se observan 3 procesos de manipulación virtual	Hay fenómenos de asociación entre los elementos, es bastante perceptible por la cuestión de la multiplicación	Positivo

Grupo B	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
B1	Percebe	Operación	Incorrecto	Incremento y cambio	Percepción y posición con aspectos de asociación	Se identifican 3 procesos de la manipulación virtualizada	El aplicativo permitió comprender un proceso de asociación elemental	Positiva
B2	Parcial	Relación y operación	Ayuda del aplicativo	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con las herramientas	Se observan 2 procesos de la manipulación virtualizada	Se comprende una asociación elemental con la posición fijada	Positiva
B3	Parcial	Relación y operación	Ayuda del aplicativo	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con las herramientas	Se observan 2 procesos de la manipulación virtualizada	Se comprende una asociación para un ejemplo específico	Positiva, aspecto en destaque con una relación 3 a 1 para varios ejemplos
B4	Parcial	Relación bien justificada	Ayuda del aplicativo	Coordinación y dependencia simple	Percepción y posición con las herramientas	Se observan 2 procesos de la manipulación virtualizada	Existe una asociación entre las cantidades para valores específicos	Positiva
B5	Percebe	Operación fuera de contexto	Ayuda del aplicativo	Dependencia simple	Posición con ayuda de la herramienta	Se observa el proceso de posición con indicios de la percepción	Una respuesta algo "extraña" ya que coloca como opción la variación, sin embargo lo realiza a partir de la relación de posición	Positiva
B6	Percebe	Operación fuera de contexto	Ayuda del aplicativo	Dependencia simple	Percepción y posición con la herramienta, se enfatiza en aumentar y disminuir	Sólo existe proceso de posición al asignar valores para cada ejemplo	Una respuesta inusual porque se asocian las magnitudes, sin pensar en los procesos para justificar la variación	Positiva
B7	Parcial	Operación, aunque con una ecuación que no corresponde	Correcto	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con aspectos de asociación	Se observan 2 procesos de la manipulación virtualizada	El aplicativo permitió comprender un proceso de asociación elemental	Positivo, se enfatiza en el uso de aplicativos tecnológicos
B8	Parcial	Operación, aunque con una ecuación que no corresponde	Correcto	Coordinación de magnitudes con dependencia	Se enfoca en la posición con un aspecto interesante, la comparación	Sólo existe proceso de posición al asignar valores para cada ejemplo	El aplicativo permitió comprender un proceso de asociación elemental	Positiva
B9	Percebe	Relación	Incorrecto	Dependencia simple	Posición con ayuda de la herramienta	Sólo existe proceso de posición al asignar valores para cada ejemplo	El aplicativo permitió comprender un proceso de asociación elemental	Positiva
B10	Parcial	Uso de ecuaciones, sin embargo no tiene relación total con la situación	Operación correcta	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con aspectos de asociación usando como principio una regla de 3 sin la herramienta tecnológica	Sólo existe proceso de posición al asignar valores para cada ejemplo	Hay indicios de variación en la respuesta dada porque se establece la relación de las cantidades para diversos casos	Positiva
B11	Parcial	Uso de ecuaciones, sin embargo no tiene relación total con la situación	Correcto	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con aspectos utilizando una regla de 3	Sólo existe proceso de posición al asignar valores para cada ejemplo	Respuesta colectiva a la B10	Positiva
B12	Percebe	Operación	Correcto	Existe una relación de dependencia, sin embargo no se establece de forma lógica	Percepción y posición con aspectos de asociación usando la herramienta	Se observan 2 procesos de la manipulación virtualizada, sin embargo no se explotan los valores	El aplicativo permitió comprender un proceso de asociación elemental	Positivo, es interesante la expresión "sistema básico"
B13	Percebe	Operación	Correcto	Respuesta colectiva a la B12	Percepción y posición (la cual es entendida como regular el curso)	Existe el proceso de posición y ajuste para encontrar sólo un resultado	Se comprende una asociación elemental con la posición fijada	Positiva
B14	Percebe	Relación y operación	El cálculo utilizado no permite dar respuesta a la pregunta	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con aspectos de asociación usando la herramienta	Se identifican 3 procesos de la manipulación virtualizada	Se comprende una asociación para un ejemplo específico	Positiva
B15	Percebe	Relación y operación	Ayuda del aplicativo con relaciones básicas de números	Coordinación de magnitudes con dependencia	Percepción y posición con aspectos de asociación usando la herramienta (se explicitan verbos como clic y ver)	Se identifican 3 procesos de la manipulación virtualizada con la explicación de las asociaciones para	Se comprende una asociación elemental con la posición fijada	Positiva

Grupo C	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
C1	Percibe	Operación, sin embargo la elección es incorrecta	Correcto, ecuación aritmética con regla de 3	Dependencia simple	Percepción y posición con el aumento y la disminución correspondiente	Se observan 2 procesos de manipulación virtual con muestras de la asociación	Proceso de variación a través de la acción de deslizar	Positiva, pueden incorporarse más funciones
C2	Percibe	Relación simple	Correcto, se realiza una división de las cantidades	Dependencia simple	Percepción y posición con ayuda del aplicativo	Se observan 2 procesos de la manipulación virtual	Existe una asociación de las cantidades	Positiva
C3	Parcial	Operación sencilla	Correcto, se realiza una división de las cantidades	Dependencia simple	Percepción, posición y variación de una recta, se observa la relación proporcional	Se realiza únicamente el posicionamiento de las cantidades	Se realiza el proceso de posición y percepción de las cantidades con la aplicación	Positiva
C4	Parcial	Operación sencilla	Respuesta similar a C3	Dependencia simple	Percepción únicamente con aumento en las cantidades	Posición de las cantidades con ayuda de la aplicación	Se observan aspectos básicos de la percepción y posición de cantidades con ayuda de la aplicación	Positiva
C5	Percibe	Relación simple	Correcto, se realiza una división de las cantidades	Dependencia simple	Se observa percepción al momento de aumentar la cantidad de abejas	Se observan 2 procesos de la manipulación virtual	Realiza una asociación en relación a la producción dada	Positiva
C6	Percibe	Relación simple	Correcto, se realiza una división de las cantidades	Dependencia simple	Respuesta compartida con C5	Se posicionan las cantidades correspondientes con ayuda del	Realiza una asociación en relación a la producción dada	Positiva
C7	Percibe	Relación con un gráfico	Correcto, se observa una ecuación con regla de 3 ayudado con la aplicación	Dependencia simple	Realiza un cálculo multiplicativo relacionando la cantidad con un caso específico	Posición de las cantidades con ayuda de la aplicación	Asocia y relaciona las magnitudes correspondientes con lo que observa en pantalla	Negativa, dice que fue "entediante" como estudiante a pesar de que la construcción de la aplicación es genial
C8	Percibe	Relación numérica	Realiza una división con apoyo de la aplicación	Dependencia biunivoca	Posición de la cantidad de acuerdo al movimiento del cursor	Posición de las cantidades con ayuda de la aplicación	Percepción en cuanto al uso de una relación de cantidades	Positiva
C9	Percibe, existe una asociación de incremento	Operación sencilla	Correcto, división y utilización de la aplicación	Dependencia biunivoca	Posición de la cantidad de acuerdo al movimiento del cursor	Posición de las cantidades con ayuda de la aplicación	Asociación de cantidades a partir del incremento de las magnitudes	Positiva
C10	Parcial	Operación	Correcto, se realiza una división de las cantidades con ayuda de la aplicación	Dependencia simple	Posición de las cantidades con movimiento del deslizador	Se observan 2 procesos de la manipulación virtual con indicios de la asociación de cantidades	Existe una asociación de las cantidades en términos del crecimiento	Positiva
C11	Parcial	Operación sencilla	Realiza 2 cálculos, sin embargo no hay respuesta	Dependencia simple	Posición a partir del aumento de las cantidades	Se identifica un proceso de la manipulación virtual	Existe una asociación con el aumento de las cantidades	Positiva
C12	Parcial	Operación sencilla	El estudiante utiliza una ecuación aritmética	Dependencia simple	Percepción y posición utilizando la herramienta y aumentando las cantidades	Se observan 2 procesos de manipulación virtual	Se establece una relación de las cantidades a partir de lo observado en el programa	Positiva
C13	Percibe	Relación y operación	El estudiante realiza una suma de cantidades relacionando con números decimales, existe una secuencia numérica simple	Dependencia simple	Percepción y posición al momento de mover la barra de la aplicación	Posición y percepción de las cantidades con ayuda de la aplicación	Existe una asociación simple de la cantidad de abejas con los tarros de miel	Negativa
C14	Percibe	Relación	Aplicación de una secuencia con las cantidades	Coordinación de cantidades e incremento, se observa aspectos del cambio	Percepción y posición de las magnitudes, además de ejemplificar	Posición y percepción de las cantidades con ayuda de la aplicación	Se observan aspectos básicos de la percepción y posición de cantidades con ayuda de la aplicación	Positiva, hace énfasis en la creatividad
C15	Parcial	Operación con regla de 3	Cálculo con una ecuación y ayuda de la aplicación	Dependencia simple	Percepción y posición con ayuda del aplicativo	Se observan 2 procesos de la manipulación virtual	Se establece un ejemplo para relacionar las cantidades, existe aspecto de la posición	Positiva

Grupo D	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
D1	Percibe	Operación, se realiza un gráfico y suma de las cantidades con múltiplos de 3	Relación igual al de la pregunta anterior, sin realizar la resolución	Dependencia simple	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	Existen procesos de percepción y relación, aunque enfocados únicamente en las abejas
D2	Percibe	Relación simple	Sin respuesta	Dependencia con proporcionalidad directa y relación de división	Se observan aspectos de la percepción del aplicativo, sin posicionar correctamente los valores numéricos	Se observan aspectos de la asociación dado desde lo proporcional	El estudiante realiza la distinción de los elementos de la aplicación con la asociación de los elementos que aparecen allí
D3	Percibe	Relación, lo propone desde la multiplicación	Sin respuesta	Dependencia simple con aumento de las cantidades	Se observan aspectos de la percepción del aplicativo, sin posicionar correctamente los valores numéricos	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	El estudiante realiza la distinción de los elementos de la aplicación con la variación y asociación
D4	Percibe	Relación, lo propone desde la multiplicación	No comprendió la pregunta realizada	Dependencia simple con incremento siguiendo un valor numérico	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Se observan procesos de asociación y variación de las cantidades al mover el deslizador por el cambio de todos los elementos	El estudiante identifica de manera adecuada procesos de variación con ayuda del aplicativo ya que justifica la relación de dependencia como un cambio de cantidades
D5	Percibe	Relación simple	El estudiante argumenta que no entiende la posibilidad de que 4 abejas produzcan tarros de miel	Dependencia a partir de una magnitud	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Se observan procesos de asociación y variación de las cantidades al mover el deslizador por el cambio de todos los elementos	El estudiante realiza la distinción de los elementos de la aplicación con la variación y asociación
D6	Percibe	Relación, se argumenta a partir de la suma de las cantidades	Incorrecto, el argumento es dado con una cantidad no correspondiente	Dependencia simple (fabricación)	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	Se observa la percepción de la cantidad con las abejas como elemento clave, sin relacionarlo totalmente hacia la variación
D8	Percibe	Relación, menciona de forma directa la regla de 3 y la multiplicación	Correcto, realiza equivalencia de cantidades	Dependencia simple	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	Se reconocen aspectos de la asociación entre magnitudes al relacionar abejas y miel
D9	Percibe	Relación y operación con la multiplicación	Establece una relación gráfica con el tarro de miel	Relación de incremento la cual es proporcional	Se observan aspectos de la percepción con la aplicación, sin embargo, el cálculo es realizado sin ayuda de la misma	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	Se reconocen aspectos de la asociación entre magnitudes al relacionar abejas y miel
D10	Percibe	Relación numérica con la multiplicación	Correcto, establece valores con fracciones	El estudiante no da una respuesta a la pregunta	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	El estudiante asocia cantidades en términos de una relación estática
D11	Percibe	Operación	Correcto, aplica operaciones de multiplicación y división	Incremento simple	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Se observan aspectos de la asociación dado desde lo proporcional	Existen procesos de percepción dados con la magnitud de los litros de miel
D12	Percibe	Relación con un gráfico asociado a la regla de 3 con dibujos	Incorrecto, aplica regla de 3 de forma diferente	Dependencia e incremento	Se observan aspectos de la percepción del aplicativo, sin posicionar correctamente los valores numéricos	Se observan procesos de asociación de las cantidades al mover el deslizador por el cambio de todos los elementos	El estudiante realiza procesos de percepción y posición de cantidades sin llegar a relacionarlas con el programa
D13	Percibe	Relación simple	Realiza la operación de la pregunta 2	Dependencia inversa sin completa seguridad de la respuesta	Se observan aspectos de la percepción con la aplicación, sin embargo, el cálculo es realizado sin ayuda de la misma	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	Se reconocen aspectos de la asociación entre magnitudes al relacionar abejas y miel
D14	Percibe	Relación, se mencionan aspectos de la regla de 3 con su paso a paso	Sin respuesta	Dependencia simple	Se observan aspectos de la percepción y posición respecto a la manipulación de la aplicación	Existe un proceso de asociación entre las cantidades al aumentar o disminuir	El estudiante realiza procesos de percepción y posición de cantidades sin llegar a relacionarlas con el programa
D15	Percibe	Relación, se establece una secuencia de la fabricación	Correcto, realiza una división de las cantidades	Dependencia simple	Se observan aspectos de la percepción del aplicativo, sin posicionar correctamente los valores numéricos	Se observan procesos de asociación y variación de las cantidades al mover el deslizador por el cambio de todos los elementos	El estudiante realiza la distinción de los elementos de la aplicación con la variación y asociación

