UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Letianne Alves Venâncio de Pontes

O conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico

Juiz de Fora
2024

Letianne Alves Venâncio de Pontes

O conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Prof. Dr.ª Beatriz Casulari da Motta Ribeiro

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pontes, Letianne Alves Venâncio.
O conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico / Letianne Alves Venâncio de Pontes. – 2024.
53 f.

Orientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Semigrupo numérico. 2. Semigrupo de Weierstrass. 3. Conjunto de Buchweitz. I. Ribeiro, Beatriz Casulari da Motta. II. O conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico

Letianne Alves Venâncio de Pontes

O conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 25 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza

Universidade de Brasília

Juiz de Fora, 26/07/2024.

Documento assinado eletronicamente por **Beatriz Casulari da Motta Ribeiro**, **Professor(a)**, em 29/07/2024, às 21:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa**, **Professor(a)**, em 30/07/2024, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Matheus Bernardini de Souza**, **Usuário Externo**, em 30/07/2024, às 19:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1886833** e o código CRC **5F05F2EC**.

Dedico este trabalho à minha mãe, Lenilda, que incansavelmente lutou comigo pelas minhas conquistas, que nunca me deixou desistir e sempre me apoiou em todas as fases da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à mainha, por sempre me ofertar tudo que eu precisava e que estava no seu alcance. Se hoje a sua filha está se tornando mestre, a responsabilidade é integralmente sua. Amo você mais que tudo nesse mundo.

Ao Gabriel, meu companheiro, que me foi a minha sanidade nessa reta final. Agradeço por tudo e além disso por sempre aparecer com um “vem comer” na porta do quarto quando estava estudando. Você é minha melhor escolha.

Agradeço à minha família pelo incentivo, pelo apoio. Principalmente, as minhas irmãs, Luce e Liza, minhas trepeças e meus colos. Agradeço a Cauan, meu Titi, meu sobrinho e afilhado amado. Vocês são o motivo da continuidade da minha luta. Amo vocês.

A minha orientadora e professora Beatriz Casulari por tudo. Agradeço pela paciência, pelo tempo, pelo conhecimento compartilhado, por todo suporte e por ter acreditado que tudo ia dar certo. Você é um exemplo enorme de humanidade e respeito pra mim, Bia. Que mais pessoas incríveis como você cruzem a minha vida.

Agradeço aos professores Matheus Bernardini e Frederico Sercio por terem aceitado participar da banca.

A todos os meus amigos que fiz em Juiz de Fora e agora levo para vida. A Panelinha, Larisheu, Mimi, Waltinho, GabiFran, Thiago, Luca e Luiz, vocês foram e são extremamente importante pra minha vida e sabe Deus o que seria de mim sem vocês no processo.

Agradeço também aos meus amigos Mobrais, a Camila, meus primos, a Adiel, Yasmim, Jeff, Silvio e Alessandra. Eu poderia fazer um parágrafo para cada um, mas nada seria suficiente para falar o tanto que amo e agradeço o apoio e carinho de vocês. Em especial destaco Daniela, Aline, Alana e Yas por não terem me deixado desistir de ir para Juiz de Fora quando foi necessário. Obrigada por me ouvirem falar tanto durante esse período.

Agradeço também aos meus orientadores na graduação, especialmente a Thiago Tanaka por sempre me incentivar a seguir na pesquisa em matemática.

Agradeço a melhor pessoa do mestrado em matemática da UFJF, a melhor secretária do mundo e a melhor conselheira que alguém pode ter. Paula, obrigada por me acolher da forma que fez, obrigada por todas as dicas e por tudo que sei que ainda fará por mim. Se não fosse por você, eu jamais teria terminado esse mestrado. Você é incrível!

Por fim agradeço a mim, por não ter desistido (mesmo tendo vontade, e muita) e por me permitir toda essa experiência de aprendizado e vida.

RESUMO

Dada uma curva algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado, é possível associar cada ponto dessa curva a um semigrupo numérico que possui o mesmo gênero da curva. Já dado um semigrupo numérico S, uma condição necessária para que exista uma curva algébrica não singular definida sobre um corpo algebricamente fechado e um ponto nessa curva cujo semigrupo numérico associado seja exatamente S é que certo subconjunto dos naturais relacionado ao conjunto de lacunas de S seja vazio. Esse subconjunto é chamado conjunto de Buchweitz de S. O primeiro capítulo desse trabalho apresenta resultados conhecidos sobre semigrupos numéricos e seus invariantes com o objetivo de ter ferramentas para estudar o conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico no capítulo seguinte. Em especial, queremos estudar a finitude de tal conjunto, como um passo para estudar quando é vazio. Além disso, mostramos que, apesar de ser finito quando $g \geq 2$, a cardinalidade desses conjuntos não é limitada.

Palavras-chave: Semigrupo numérico. Semigrupo de Weierstrass. Conjunto de Buchweitz.

ABSTRACT

Given a non-singular algebraic curve defined over an algebraically closed field, it is possible to associate each point on that curve with a numerical semigroup that has the same genus as the curve. Given a numerical semigroup S, a necessary condition for the existence of a non-singular algebraic curve defined over an algebraically closed field and a point on that curve whose associated numerical semigroup is exactly S is that a certain subset of the naturals related to the set of gaps in S is empty. This subset is called the Buchweitz set of S. In the first chapter of this master's thesis, we present a study on numerical semigroups and their invariants with the aim of having tools to study the Buchweitz set of a numerical semigroup. In particular, we want to study its finiteness, as a step towards studying when it is empty. Furthermore, we show that, despite being finite when $g \geq 2$, the cardinality of these sets is not limited.

Keywords: Numerical semigroups. Weierstrass semigroup. Buchweitz set.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Semigrupos numéricos são subconjuntos dos números naturais que possuem o zero, têm complemento nos naturais finito e são fechados para a soma. Podemos provar que os elementos de um semigrupo numérico podem ser obtidos como combinação de certos naturais, que chamamos geradores do semigrupo. Ainda, destacamos alguns invariantes que caracterizam os semigrupos, como a multiplicidade (o menor elemento não nulo do semigrupo), o gênero (a cardinalidade do complemento do semigrupo nos naturais) e o número de Frobenius (maior elemento do conjunto complementar do semigrupo). Esse último invariante possui esse nome em homenagem a Frobenius, que propôs o seguinte problema. Imagine um local que só possui moedas de valores a e b primos entre si, qual é o maior valor que não pode ser pago com essas moedas sem utilizar troco? Em outras palavras, qual é o número de Frobenius do semigrupo gerado por a e b? Para essa situação, é conhecida uma fórmula polinomial(veja [19]) que determina o número de Frobenius em função de a e b, mas, para semigrupos gerados por mais do que dois naturais, sabe-se que não pode existir uma tal fórmula polinomial([4]).

Semigrupos numéricos aparecem em diversas situações, como, por exemplo, na teoria de curvas algébricas. Dada uma curva algébrica não-singular de gênero g definida sobre um corpo algebricamente fechado e dado um ponto nessa curva, esse ponto está relacionado a um semigrupo numérico de gênero g. Esse é o Teorema das Lacunas de Weierstrass, provado pelo alemão em 1860, e tal semigrupo é dito semigrupo de Weierstrass do ponto e é o mesmo para quase todo ponto na curva. Em 1893, Hurwitz propôs a pergunta: será que dado um semigrupo numérico S, sempre existem uma curva e um ponto nela de forma que S seja o semigrupo de Weierstrass desse ponto? Em 1980, Buchweitz apresentou um semigrupo numérico que não é de Weierstrass. Mais ainda, Buchweitz apresentou uma condição necessária para que um semigrupo seja de Weierstrass. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}_0$, seja $\mathcal{B}(A)$ o conjunto dos inteiros $n \geq 2$ tais que

$$|nA| > (2n-1)(|A|-1)\,,$$

onde nA é o conjunto soma $A + A + \cdots + A$. Buchweitz provou que se S é um semigrupo de Weierstrass, então $\mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S) = \emptyset$. Assim, nosso interesse nesse trabalho é estudar o conjunto de Buchweitz $Buch(S) := \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S)$ de um semigrupo numérico S. Vamos provar que se o gênero de S é pelo menos 2, então o conjunto de Buchweitz de S é finito. Porém, a cardinalidade desse conjunto pode ser tão grande quanto se queira.

Dividimos esse trabalho em dois capítulos. O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos que serão abordados no trabalho, visando familiarizar o leitor com os semigrupos numéricos. Iniciamos com a definição, motivação e exemplos de semigrupos numéricos, apresentando seus invariantes, o conceito de conjunto gerador de um semigrupo numérico e alguns resultados relacionados. Destacamos, em especial, o estudo de semigrupos simétricos, que nos dá base para o capítulo seguinte. Por fim, também apresentamos o conjunto de Apéry e as coordenadas de Kunz, que são ferramentas importantes para o estudo dos semigrupos numéricos, especialmente para provar o resultado de Sylvester sobre o número de Frobenius de semigrupos gerados por dois naturais.

No Capítulo 3, apresentamos o principal foco de estudo do trabalho: o conjunto de Buchweitz. Para desenvolver esse estudo, iniciamos o capítulo com algumas definições e resultados da Teoria Aditiva dos Números, que são necessários para o cálculo da cardinalidade de alguns conjuntos soma. Nessa parte, [11] foi a principal referência. Em seguida, definimos a função β_A e o conjunto $\mathcal{B}(A)$, permitindo, assim, a definição do conjunto de Buchweitz. Com todos os conceitos apresentados e exemplificados, apresentamos a prova de que o conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico com gênero maior ou igual a 2 é sempre finito. Nossa principal referência neste capítulo é o trabalho de Eliahou, García-García, Marín-Aragón e Vigneron-Tenorio [7]. No entanto, adotamos um caminho diferente nos casos em que o semigrupo é simétrico de multiplicidade maior que 2, segundo o resultado de Oliveira [12].

2 SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo, faremos uma introdução à teoria dos semigrupos numéricos, dando especial destaque as suas propriedades necessárias para o estudo do conjunto de Buchweitz que será feito no capítulo seguinte. Para tal, começaremos apresentando uma história-motivação, seguida da definição forma de semigrupo numérico e uma série de definições e propriedades clássicas. Nesse capítulo, nossa principal referência é o livro de Rosales e García-Sanchez [17].

Ao longo desse texto, usamos a notação $\mathbb{N}_0$ para representar $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e as notações $[a, b]$ e $[a, \infty)$ para representar os intervalos de inteiros $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ e $[a, \infty) \cap \mathbb{Z}$, respectivamente.

2.1 MOTIVAÇÃO

Em uma fábrica familiar de bombons de chocolates produz-se apenas dois tipos de caixas, sendo uma com 17 e outra com 25 unidades. Uma das definições do padrão de qualidade dessa fábrica está relacionada a quantidade de bombons produzidos. A meta é que todo dia só sejam fabricadas caixas fechadas a fim de que não haja desperdício de material. Por exemplo, caso sejam produzidos apenas 23 chocolates, não é possível preencher uma caixa com 25 e haveria desperdício ao completar uma caixa com 17 bombons. Já a quantidade de 34 bombons é interessante fabricar, pois pode-se preencher duas caixas com 17 bombons cada. Com essa realidade, o dono da fábrica já notou que precisa produzir, de cada vez, uma quantidade maior que 383 chocolates para não se preocupar com desperdício.

Porém, com a aproximação da época da Páscoa, o dono da fábrica sentiu a necessidade de ofertar mais um produto: uma caixa de chocolate com 8 bombons. Com essa nova realidade, é preciso decidir qual deve ser a produção diária mínima para não haver desperdício.

Essa história-motivação é semelhante ao Problema do Troco de Frobenius (século XIX EC), um marco da teoria de semigrupos numéricos. A pergunta é: qual é o maior número inteiro positivo que não pode ser obtido usando apenas moedas de valores fixados sem utilizar troco. De modo mais formal, o Problema do Troco de Frobenius investiga qual seria o maior número natural que não pode ser expresso como uma combinação linear não negativa dos inteiros positivos primos entre si $x_1, x_2, ..., x_n$. Para o caso de duas moedas de valores a, b com $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, Sylvester, em 1884, apresentou a solução: o maior valor que não pode ser obtido é $ab - a - b$. Para mais de duas moedas, o problema não tem uma solução fechada conhecida.

Veremos a seguir definições e resultados importantes da teoria de semigrupos numéricos que utilizaremos nesse trabalho.

2.2 SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

Definição 2.2.1 (Semigrupo Numérico)**.** *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Temos que S é um semigrupo numérico se são satisfeitas todas as condições a seguir:*

(i) $0 \in S$;

(ii) Dados $a, b \in S$, *temos que* $a + b \in S$;

(iii) O conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ *é finito.*

Exemplo 2.2.2. Considere o conjunto $S_2 = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$. Por construção, $\mathbb{N}_0 \setminus S_2 = \{1, 2\}$. Pelo fato de que todos os naturais a partir do 3 estão no conjunto, temos que S_2 é fechado para a soma concluindo assim que trata-se de um semigrupo numérico. De forma mais geral, considere g um número natural então o conjunto $S_g = \{0, g+1, g+2, g+3, ...\}$ é um semigrupo numérico. De fato,

- $0 \in S_g$;
- $\mathbb{N}_0 \setminus S_g = [1, g]$, que é finito;
- Dados $a, b \in S_g$ temos que $a = g + k, b = g + s$, para $k, s \in \mathbb{N}$ fixados. Com isso,

$$a + b = g + k + g + s = g + (g + k + s) .$$

  Como $g + k + s \in \mathbb{N}$, então $a + b \in S_g$.

Tal S_g é chamado semigrupo numérico ordinário.

Exemplo 2.2.3. Observe que o conjunto dos números pares não negativos, ou seja, $P = \{0, 2, 4, \dots\} = \{2k;\, k \in \mathbb{N}_0\}$ não é um semigrupo numérico. Apesar de $0 \in P$ e esse conjunto ser fechado para a adição, temos que o conjunto dos números ímpares (complementar de P) não é finito.

Exemplo 2.2.4. Seja $g \in \mathbb{N}$. Seja H_g o conjunto a seguir

$$H_g = \{0, 2, 4, \dots, 2g - 2\} \cup [2g, \infty) .$$

H_g é um semigrupo numérico. De fato, $0 \in H_g$, H_g é fechado pra adição e seu complemento em $\mathbb{N}_0$

$$\mathbb{N}_0 \setminus H_g = \{1, 3, 5, \dots, 2g - 1\} .$$

é finito. Semigrupos numéricos com a característica de não conter os naturais ímpares menores que certo $2g$ fixado são chamados hiperelípticos.

Exemplo 2.2.5. No caso do problema da motivação, o semigrupo numérico S é o conjunto cujos elementos são as quantidade de bombons que podem ser fabricadas para que as caixas sejam completadas sem sobra. Para simplificar a visualização, suponha que as caixas da fábrica deveriam conter 5 e 7 bombons. Então, todas as caixas de bombons podem possuir quantidades múltiplas de 5, múltiplas de 7, ou ainda ter a combinação de ambos, ou seja, ser da forma $5m + 7n$, onde $m, n \in \mathbb{N}_0$. Por exemplo, os seguintes números estão em S:

$$\begin{aligned}
0 &= 5 \times 0 + 7 \times 0 \\
5 &= 5 \times 1 + 7 \times 0 \\
7 &= 5 \times 0 + 7 \times 1 \\
10 &= 5 \times 2 + 7 \times 0 \\
12 &= 5 \times 1 + 7 \times 1 \\
14 &= 5 \times 0 + 7 \times 2 \\
15 &= 5 \times 3 + 7 \times 0
\end{aligned}$$

Continuando dessa forma, vemos que o semigrupo numérico procurado é:

$$S = \{0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22\} \cup [24, \infty).$$

De fato, S é um semigrupo numérico, pois

1. $0 \in S$;
2. $\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23\}$ é um conjunto finito;
3. Se $a_1, a_2 \in S$, então existem $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ tais que

   $$a_1 = 5m_1 + 7n_1$$

   e

   $$a_2 = 5m_2 + 7n_2 \,.$$

   Dessa forma:

   $$a_1 + a_2 = 5(m_1 + m_2) + 7(n_1 + n_2)\,,$$

   onde claramente $m_1 + m_2$ e $n_1 + n_2$ são inteiros não negativos.

No caso do exemplo 2.2.5, dizemos que o semigrupo S é gerado por 5 e 7, já que todos os seus elementos são combinações inteiras não negativas desses números. Definir um semigrupo numérico através de seus geradores é muito útil. Esse é o assunto que trataremos agora.

Definição 2.2.6. *Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$. O conjunto gerado por $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é definido como*

$$\langle A \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle := \{x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n \ ; \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0\} .$$

Na Proposição 2.2.7 que faremos a seguir, dado $A \subset \mathbb{N}$ não vazio e finito, dizemos que $\mathrm{mdc}(A) = 1$ quando $\mathrm{mdc}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ para $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Vamos mostrar que existe uma condição necessária e suficiente para que um conjunto finito de naturais A gere um semigrupo numérico S. Essa condição é importante para garantir que o conjunto complementar de S em relação a $\mathbb{N}_0$ seja finito.

Proposição 2.2.7. *Seja $A \subset \mathbb{N}_0$ não vazio e finito. Então $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $mdc(A) = 1$.*

Demonstração. Considere $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e seja $d = mdc(A)$. Assim, para todo $s \in \langle A \rangle$, temos $s = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, com $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$. Como $d = \mathrm{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$ então d divide todos $a_1, \ldots, a_n$, donde d divide s. Como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, $\mathbb{N}_0 \setminus \langle A \rangle$ é finito e, portanto, existem k e $k+1$ inteiros positivos tais que d divide k e d divide $k+1$, concluindo que $d = 1$.

Em contrapartida, para mostrar que $\langle A \rangle$ é semigrupo numérico, basta mostrar que $\mathbb{N}_0 \setminus \langle A \rangle$ é finito. Como $\mathrm{mdc}(A) = 1$, temos que existem $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que

$$z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots + z_n a_n = 1 .$$

Para cada z_i negativo, podemos encontrar $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$z_{i_1} a_{i_1} + \ldots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \ldots - z_{j_l} a_{j_l} .$$

Daí existe $s \in \langle A \rangle$ tal que $s+1$ também pertence a $\langle A \rangle$. Provaremos que se

$$n \geq (s-1)s + (s-1) ,$$

então $n \in \langle A \rangle$. Sejam q e r inteiros tais que $n = qs + r$ com $0 \leq r < s$. Como

$$n \geq (s-1)s + (s-1) ,$$

deduzimos que

$$q \geq s - 1 \geq r .$$

Dessa forma:

$$n = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle .$$

$\square$

Pelo Teorema 2.2.7, sabemos quando um conjunto finito de naturais gera um semigrupo numérico. Faz sentido, então, perguntar se todo semigrupo numérico pode ser definido a partir de um conjunto finito de geradores. A resposta é sim e pode ser provada, por exemplo, usando um resultado da seção 2.5 (Teorema 2.5.4), assim, vamos admitir que é válido.

Exemplo 2.2.8. O conjunto de geradores de um semigrupo numérico não é único. Por exemplo, dado

$$S = \langle 3, 6, 8, 9, 12, 15, 17, 21 \rangle$$

observamos que 6, 9, 12, 15, 21 são múltiplos de 3 e $17 = 3 \times 3 + 8$, dessa forma podemos escrever $S = \langle 3, 8 \rangle$.

Com o exemplo 2.2.8 em mente, temos a seguinte definição:

Definição 2.2.9. *Dado S um semigrupo numérico, dizemos que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto minimal de geradores de S quando $S = \langle A \rangle$ e $a_i \notin \langle A \setminus \{a_i\} \rangle$ para todo $i = 1, \ldots, n$. A quantidade mínima de geradores de S é chamada dimensão de S e denotada por $e = e(S)$.*

Exemplo 2.2.10. Seja $S = \{0, 7, 10\} \cup [14, \infty)$. Temos que S é um semigrupo numérico cujo complementar em $\mathbb{N}_0$ é

$$\mathbb{N}_0 \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13\}.$$

Vamos calcular um conjunto minimal de geradores para S. Primeiro, notamos que todo múltiplo de 7 está em S, já que 7 é o menor elemento não nulo de S. Assim, vamos colocar 7 como um dos geradores. Agora, vamos encontrar os menores elementos de S que deixam resto $1, \ldots, 6$ na divisão por 7. Para resto 1, o menor elemento de S é 15 (já que $8 \notin S$). Para os restos $2, 3, 4$ e 5, os respectivos elementos de S são $16, 10, 18$ e 19. Já para resto 6, observamos que o menor elemento seria 20 (pois $13 \notin S$) e, assim, não precisamos colocá-lo no conjunto de geradores, já que $20 = 10 + 10$ e 10 já está no conjunto. Logo, $S = \langle 7, 10, 15, 16, 18, 19 \rangle$. Como nenhum dos geradores pode ser obtido dos demais, esse é o mínimo de geradores possível, donde a dimensão de S é 6.

2.3 INVARIANTES DE UM SEMIGRUPO NUMÉRICO

Apresentaremos agora os invariantes de um semigrupo numérico que são “personagens” fundamentais para formalizarmos mais o nosso problema.

Definição 2.3.1. *Dado um semigrupo numérico S, definimos os seguintes invariantes:*

(i) Se $\ell \in \mathbb{N}_0 \setminus S$, dizemos que ℓ é uma lacuna de S. Assim, o conjunto de lacunas de S é $G(S) = \mathbb{N}_0 \setminus S$;

(ii) O gênero $g(S)$ é a cardinalidade do conjunto das lacunas, ou seja, $g(S) = \#G(S)$;

(iii) A multiplicidade $m(S)$ é o menor elemento não nulo de S, ou seja,

$$m(S) := \min\{s \in S; s \neq 0\}\,;$$

(iv) O número de Frobenius $F(S)$ é o maior elemento do conjunto de lacunas, ou seja, $F(S) := \max\ (\mathbb{Z} \setminus S)$;

(v) O condutor $c(S)$ é o menor elementos de S tal que todos os seus sucessores estão em S, ou seja,

$$c(S) = \min\{s \in S; s + n \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0\};$$

ou ainda

$$c(S) = F(S) + 1\,;$$

(vi) A profundidade $q(S)$ é o menor inteiro maior ou igual à razão entre o condutor e a multiplicidade, ou seja,

$$q(S) = \left\lceil \frac{c(s)}{m(s)} \right\rceil .$$

Observação 2.3.2. *É usual nos referirmos aos elementos de S como não-lacunas de S.*

Exemplo 2.3.3. Notamos que o único semigrupo S de gênero 0 é $\mathbb{N}_0$. Além disso, esse é o único semigrupo S de multiplicidade 1, já que, como S é fechado para a adição, se $1 \in S$, então $\mathbb{N} \subset S$. Assim, se $S \neq \mathbb{N}_0$, temos que sua multiplicidade satisfaz $m \geq 2$. Pelo mesmo motivo, a menor lacuna de um semigrupo $S \neq \mathbb{N}_0$ é 1.

Exemplo 2.3.4. Dado o semigrupo numérico apresentado no exemplo 2.2.10, ou seja,

$$S = \{0, 7, 10\} \cup [14, \infty)\,,$$

já sabemos que seu conjunto de lacunas de S é

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13\}\,.$$

Como $G(S)$ possui 11 elementos, temos que o gênero de S é 11. O menor elemento não nulo de S, ou seja, sua multiplicidade, é $m = 7$. Já o maior elemento que está fora de S é 13 e seu sucessor é 14. Assim, número de Frobenius de S é 13 e seu condutor é 14. Finalmente, a profundidade desse semigrupo é

$$q(S) = \left\lceil \frac{14}{7} \right\rceil = 2$$

Exemplo 2.3.5. Na situação do exemplo 2.2.5, o conjunto de lacunas

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23\} \tag{2.1}$$

representa o conjunto de quantidade de bombons que não devem ser fabricados para não resultar em prejuízo. O gênero de S é, então, 12, o número de Frobenius é $F = 23$ e o condutor é $c = 24$. Assim, toda quantidade maior ou igual a 24 pode ser fabricada para se gerar as caixas de doces sem desperdício. Por fim, a profundidade do semigrupo numérico dos bombons é igual a

$$q(S) = \left\lceil \frac{24}{5} \right\rceil = 5 \ .$$

Exemplo 2.3.6. Apresentamos o semigrupo numérico e os invariantes para o caso original da produção de bombons sendo elaborado com o auxílio do Phyton. Usando o fato que os geradores desse semigrupo são 17 e 25 e, dessa forma, os elementos de S são da forma $17x + 25y$ com $x, y \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} S = \{&0, 17, 25, 34, 42, 50, 51, 59, 67, 68, 75, 76, 84, 85, 92, 93, 100, 101, 102, 109, 110, \\ &117, 118, 119, 125, 126, 127, 134, 135, 136, 142, 143, 144, 150, 151, 152, 153, 159, \\ &160, 161, 167, 168, 169, 170, 175, 176, 177, 178, 184, 185, 186, 187, 192, 193, 194, \\ &195, 200, 201, 202, 203, 204, 209, 210, 211, 212, 217, 218, 219, 220, 221, 225, 226, \\ &227, 228, 229, 234, 235, 236, 237, 238, 242, 243, 244, 245, 246, 250, 251, 252, 253, \\ &254, 255, 259, 260, 261, 262, 263, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 275, 276, 277, 278, \\ &279, 280, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 300, 301, 302, \\ &303, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, \\ &325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 342, 343, 344, \\ &345, 346, 347, 348, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 359, 360, 361, 362, 363, \\ &364, 365, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, \\ &382\} \cup [384, \infty) \, ; \end{aligned}$$

Assim, o conjunto de lacunas é o conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$, que tem 191 elementos, sendo o maior o 383. Concluímos então que:

- O gênero é $g(S) = 191$;
- A multiplicidade é $m(S) = 17$;
- O número de Frobenius é $F(S) = 383$;
- O condutor é $c(S) = 384$;
- A profundidade é $q(S) = \left\lceil \dfrac{384}{17} \right\rceil = 23$.

Observação 2.3.7. *Um problema central no estudo de semigrupos numéricos é a contagem fixando um invariante específico. Por exemplo, vamos fixar o gênero g. Se $g = 0$, então há apenas um semigrupo numérico: o próprio $\mathbb{N}_0$. Caso o gênero seja 1, então há novamente* *apenas um semigrupo numérico, o* $\langle 2, 3\rangle$*. De fato, se o conjunto de lacunas tem apenas um elemento, ele deve ser o 1. Agora, se o gênero for 2, então temos dois casos: se 2 for uma lacuna ou não. No primeiro caso, o conjunto de lacunas é* $\{1, 2\}$ *e, assim, o semigrupo é* $\langle 3, 4, 5\rangle$*; no segundo, o conjunto de lacunas é* $\{1, 3\}$ *e, assim, o semigrupo é* $\langle 2, 5\rangle$*. Com gênero 3, há 4 semigrupos possíveis; com gênero 4, há 7; já com gênero 5, há 12. O comportamento da sequência* (n_g) *do número de semigrupos com gênero* g *ainda não é totalmente conhecido ainda. Bras-Amorós [2] conjecturou que*

$$\lim_{g\to+\infty} \frac{n_g + n_{g+1}}{n_{g+2}} = 1 \qquad e \qquad \lim_{g\to+\infty} \frac{n_{g+1}}{n_g} = \Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

o que foi provado por Zhai [20], e também que

$$n_{g+2} \geq n_g + n_{g+1} \text{ para todo } g\,,$$

que ainda está em aberto.

Retomando o problema do troco de Frobenius e sua solução, o que Sylvester provou foi como determinar o número de Frobenius a partir dos geradores do semigrupo, no caso em que há apenas 2 geradores, como no teorema a seguir. A demonstração será feita mais a frente utilizando o Teorema 2.5.10.

Teorema 2.3.8. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$ *tais que* $mdc(a, b) = 1$*, de modo que* $S = \langle a, b\rangle$*. Então, o semigrupo numérico* S *possui o número de Frobenius definido, e com isso, o maior elemento de* $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ *é o número ímpar*

$$F(S) = ab - (a + b) = ab - a - b.$$

Exemplo 2.3.9. Com esse resultado, podemos entender duas coisas anteriormente afirmadas. A primeira delas é a de que a maior quantidade de bombons que não deve ser produzida é a de 383 para o exemplo original da fábrica, já que

$$383 = 17 \times 25 - 17 - 25\,.$$

Já para o caso simplificado (exemplo 2.2.5), o número de Frobenius é

$$23 = 7 \times 5 - 7 - 5\,.$$

Para semigrupos gerados por mais de dois geradores, digamos $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, sabe-se que não pode existir uma fórmula polinomial geral para o número de Frobenius em função de $a_1, \ldots, a_n$ (veja [4]). Ainda, sabe-se que o problema de determinar o número de Frobenius de um semigrupo numérico gerado por n geradores é NP-completo (veja [14]). Assim, a literatura sobre o assunto busca encontrar fórmulas em casos especiais, além de algoritmos e cotas para o número de Frobenius. O livro [15] apresenta um histórico e uma coletânea de resultados sobre o tema até o início do século XXI.

Observação 2.3.10. *Uma famosa cota envolvendo a número de Frobenius de um semigrupo numérico é dada na conjectura de Wilf, que afirma que para um semigrupo de número de Frobenius f, dimensão e e gênero g temos*

$$e \geq \frac{f+1}{f+1-g}$$

Casos especiais desta conjectura foram verificados. Por exemplo, Bras-Amorós [2] a verificou para todos os semigrupos do gênero no máximo 50. Mas uma solução completa parece distante.

Veremos a seguir algumas relações importantes entre os invariantes apresentadas anteriormente.

Proposição 2.3.11. *Seja $S \neq \mathbb{N}_0$ um semigrupo numérico de gênero g e multiplicidade m. Então*

$$2 \leq m \leq g+1\,.$$

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade proposta, mostraremos que $m \leq 1$ e $m > g+1$ resultam em contradições. De fato, se $m \leq 1$ ocorre, como os elementos de S são números naturais, então $m = 1$ e, então, teríamos $S = \mathbb{N}_0$, o que é uma contradição com a hipótese. Se $m > g+1$, então $[1, g+1] \subset G(S)$. Logo, temos que

$$g+1 \leq g(S) = g,$$

o que é uma contradição. □

Proposição 2.3.12. *Seja S um semigrupo de gênero g e número de Frobenius f com conjunto de lacunas*

$$G(S) = \{\ell_1, \ldots, \ell_g = f\}\,.$$

Então:

$$\ell_j \leq 2j-1 \ \textit{ para todo } j = 1, \ldots, g\,. \tag{2.2}$$

Em particular, o número de Frobenius de S satisfaz $f \leq 2g-1$.

Demonstração. Como $g > 1$ temos que o primeiro elemento do conjunto de lacunas $\ell_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$, satisfazendo assim a proposição. Dessa forma, iremos analisar apenas para $j = 2, ..., g$. Considere os pares ordenados da forma $(a, \ell_j - a)$ com $1 \leq a \leq \left[\dfrac{\ell_j}{2}\right]$, onde $[x]$ representa a parte inteira de x. Desse modo, para cada a no par descrito, temos que $a \notin S$ ou $\ell_j - a \notin S$, ou seja, em cada par existe ao menos uma lacuna.

Então, se

$$G_j(S) = \left\{ \ell\ ;\ \ell \text{ é lacuna de } S, \text{ com } 1 \leq \ell \leq \left[\frac{\ell_j}{2}\right] \right\}$$

segue que

$$\#G_j(S) \geq \left[\frac{\ell_j}{2}\right],$$

e ainda

$$\#G_j(S) < j\,.$$

Assim,

$$\left[\frac{\ell_j}{2}\right] \leq \#G_j(S) \leq j - 1\,,$$

ou seja

$$\left[\frac{\ell_j}{2}\right] + 1 \leq j\,.$$

Como

$$\frac{\ell_j}{2} < \left[\frac{\ell_j}{2}\right] + 1\,,$$

então $\dfrac{\ell_j}{2} < j$, e assim, $\ell_j < 2j$ e, consequentemente,

$$\ell_j \leq 2j + 1\ .$$

Em particular, se $j = g$, temos

$$f = \ell_g \leq 2g - 1.$$

□

No próximo capítulo, vamos ver que esse resultado pode ser melhorado caso a multiplicidade do semigrupo numérico seja pelo menos 3 (Proposição 3.3.5).

Encerramos essa seção com uma cota para a profundidade de um semigrupo numérico obtida como consequência das proposições 2.3.11 e 2.3.12.

Proposição 2.3.13. *Seja $S \neq \mathbb{N}_{\not{0}}$ um semigrupo numérico de gênero g, multiplicidade m, condutor c e profundidade q. Então:*

$$1 \leq q \leq g\,.$$

Demonstração. Pelas proposições 2.3.11 e 2.3.12, temos que $c \leq 2g$ e que $m \geq 2$. Como $q = \left\lceil \dfrac{c}{m} \right\rceil$, temos que

$$q = \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil \leq \frac{2g}{2} = g.$$

Por outro lado, temos que $c \geq g + 1$ e também que $m \leq g + 1$, o que nos leva a

$$1 = \frac{g+1}{g+1} \leq q.$$

Unindo as informações, concluímos que $1 \leq q \leq g$. □

Exemplo 2.3.14. Considere o semigrupo numérico

$$H_g = \{0, 2, 4, ..., 2g\} \cup [2g + 1, \infty)$$

cujo conjunto de lacunas é

$$\mathbb{N}_0 \setminus H_g = \{1, 3, 5, \ldots, 2g - 1\} .$$

Temos que

$$q(H_g) = \left\lceil \frac{c(H_g)}{m(H_g)} \right\rceil = \left\lceil \frac{2g}{2} \right\rceil = g \, ,$$

atingindo a cota superior na Proposição 2.3.13. A cota inferior também é claramente atingida quando observamos que para um semigrupo ordinário H_g como no exemplo 2.2.2, então $q = 1$ pois $c(H_g) = m(H_g) = g + 1$.

Embora a profundidade seja um invariante importante no estudo de semigrupos numéricos, nesse trabalho, não estamos interessados em suas aplicações. De qualquer modo, observamos aqui que o nome profundidade foi fixado há pouco tempo (veja [6]), mas o parâmetro já tinha sido usado em problemas envolvendo semigrupos numéricos anteriormente. Por exemplo, sabe-se que a famosa conjectura de Wilf (veja a observação 2.3.10) é verdadeira para semigrupos de profundidades $q = 2$ e $q = 3$.

2.4 SEMIGRUPOS NUMÉRICOS SIMÉTRICOS

Pela Proposição 2.3.12, sabemos que dado um semigrupo numérico de gênero g e número de Frobenius f, então $f \leq 2g - 1$. Quando há igualdade, temos o seguinte caso de semigrupo numérico:

Definição 2.4.1. *Um semigrupo numérico S de gênero g, condutor c e número de Frobenius f é dito simétrico quando $c = 2g$ ou, equivalentemente, quando $f = 2g - 1$.*

Exemplo 2.4.2. O semigrupo numérico

$$S = \langle 3, 7 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, \ldots\}$$

é simétrico. De fato, temos que seu conjunto de lacunas é

$$\mathbb{N}_0 \setminus S = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\} ,$$

donde $g = 6$. Ainda, vemos que $c = 12$, que é, por sua vez, o dobro da quantidade de elementos de $\mathbb{N}_0 \setminus S$.

O exemplo 2.4.2 pode ser generalizado. De fato, vamos provar que todo semigrupo numérico gerado exatamente por dois naturais primos entre si é simétrico. Para tal, vamos precisar dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 2.4.3. *Seja S um semigrupo numérico de condutor c. Se $d \in S$, então $c-1-d \notin S$.*

Demonstração. Considere $d \in S$ e suponha que $c-1-d \in S$, então, como S é fechado para a adição, teríamos

$$c-1 = d + (c-1-d) \in S\,.$$

Porém, isso é uma contradição já que $c-1$ é o número de Frobenius de S. $\square$

Lema 2.4.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si e $S = \langle a, b\rangle$ o semigrupo numérico gerado por a e b. Se $c-1-d$ é um lacuna de S, então $d \in S$.*

Demonstração. Se p e q são inteiros tais que

$$ap + bq = c - 1 - d\,. \tag{2.3}$$

Daí, $p > 0$ e $q < 0$ ou $p < 0$ e $q > 0$. Sabemos ainda que as soluções dessa equação Diofantina, são da forma

$$\begin{cases} p &= p_0 + bt \\ q &= q_0 - at \end{cases}$$

onde t é um número inteiro e (p_0, q_0) é uma solução particular da equação (2.3). Agora, sabemos da definição de condutor e do Teorema 2.3.8 que $c = (a-1)(b-1)$. Assim:

$$\begin{aligned} d &= c - 1 - (ap_0 + bq_0) \\ &= (a-1)(b-1) - 1 - (ap_0 + bq_0) \\ &= ab - a - b + 1 - 1 - ap_0 - bq_0 \\ &= a(b-1-p_0) + b(-1-q_0). \end{aligned}$$

Se mostrarmos que

$$b - 1 - p_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad -1 - q_0 \geq 0$$

temos que d é a soma de elementos de $\langle a, b\rangle$ e, portanto, pertence a S .

Como $c-1-d > 0$, então $p_0 > 0$ ou $q_0 > 0$. Suponha, sem perda de generalidade que $p_0 > 0$, $q_0 < 0$ com $q_0 + a > 0$. Como $(p_0 - b, q_0 + a)$ é uma outra possível solução para a equação (2.3), então $p_0 - b < 0$. Disso, tiramos que $b - p_0 > 0$ e, consequentemente, $b - p_0 - 1 \geq 0$. Do fato de $q_0 < 0$, tem-se $-q_0 > 0$ e portanto $-1 - q_0 \geq 0$, concluindo assim a demonstração. $\square$

Proposição 2.4.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si. Então $S = \langle a, b\rangle$ é simétrico.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.8, temos que o número de Frobenius do semigrupo numérico $S = \langle a, b\rangle$ é

$$F(S) = ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1\,.$$

Assim, a quantidade de elementos do intervalo $[0, F(S)]$ é o número $(a-1)(b-1) = c(S)$. Como a e b são coprimos, temos que $a-1$ ou $b-1$ é par, donde c é par. Escolhendo qualquer elemento $d \in [0, F(S)]$ sabe-se pelos Lemas 2.4.3 e 2.4.4 que se $d \in S$, então $c-1-d \notin S$. Ainda, nessas mesmas condições, se $c-1-d \in G(S)$, então $d \in S$. Ou seja, a metade dos elementos de $[0, F(S)]$ estão em $G(S)$ e a outra metade está em S. Desta forma, constatamos que,

$$\#G = g = \frac{(a-1)(b-1)}{2} = \frac{c}{2}\,.$$

Diante disso, $c = 2g$, donde todo semigrupo númerico da forma $S = \langle a, b \rangle$, com $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ é simétrico. □

Porém, nem todo semigrupo numérico simétrico tem exatamente 2 geradores, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.6. O semigrupo numérico $S = \langle 4, 6, 7 \rangle = \{0, 4, 6, 7, 8\} \cup [10, \infty)$ é simétrico. De fato, o conjunto de lacunas de S é $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, ou seja, o gênero de S é $g = 5$. Assim, como $c = 10 = 2g$, S é simétrico.

Exemplo 2.4.7. O semigrupo numérico $D = \{0, 3, 4, 5\} \cup [6, \infty) = \langle 3, 4, 5 \rangle$, possui conjunto de lacunas $G(D) = \{1, 2\}$, ou seja, $g = 2$ e consequentemente $2g = 4$, o que nos diz que D não é simétrico, já que o condutor de D é $c = 3$.

Encerramos essa seção com uma outra forma de definir semigrupos simétricos que nos será útil no estudo do conjunto de Buchweitz:

Proposição 2.4.8. *Seja S um semigrupo numérico simétrico de gênero g e número de Frobenius f. Então $s \in S$ se, e somente se, $f - s \notin S$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Para um semigrupo numérico S qualquer, temos que se $s \in S$ e também $f - s \in S$, então pelo fechamento aditivo de S,

$$s + (f - s) = f \in S\,,$$

o que é uma contradição já que o número de Frobenius não pertence ao semigrupo.

Agora, como S é simétrico, então $f = 2g - 1$. Vamos analisar os casos em que $f - s < 0$ e $0 < f - s < 2g - 1$.

Para $f - s < 0$, temos que $2g - 1 - s < 0$, ou ainda, $2g - 1 < s$. Decorre então que $s \geq 2g$, ou seja, $s \geq c$ e portanto s está em S.

Para $0 < f - s < 2g - 1$, considere os $g - 1$ pares da forma $(a, f - a)$ com $1 \leq a \leq g - 1$. Tem-se listando os pares, a seguinte configuração:

$$\{(1, f-1), (2, f-2), ..., (g-1, f-g-1)\} = \{(1, 2g-2), (2, 2g-3), ..., (g-2, g-1)\}.$$

Olhando para o intervalo $[1, 2g-1]$ temos g lacunas e como $f = 2g-1 \notin S$ não aparece entre os pares ordenados listados tem-se, entre os pares, $g-1$ lacunas. Ou seja, cada par é formado por uma lacuna e uma não lacuna. Desse modo, como $f-s$, por hipótese, não está em S, então $s \in S$.

□

2.5 CONJUNTO DE APÉRY

Nessa seção, estudamos o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico S com relação a um elemento $n \in S \setminus \{0\}$. A partir do conjunto de Apéry de S, é possível construir um conjunto finito de geradores para S, como veremos na Proposição 2.5.4. Além disso, para $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si, utilizaremos o conjunto de Apéry de $S = \langle a, b\rangle$ e as coordenadas de Kunz de um semigrupo S em sua multiplicidade m para provar o Teorema 2.3.8 (Teorema de Sylvester) a partir do Teorema 2.5.10.

Definição 2.5.1. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Definimos o conjunto de Apéry de S (em n) como:*

$$Ap(S,n) = \{s \in S; s-n \notin S\}. \tag{2.4}$$

Caso n seja igual à multiplicidade m de S, escrevemos apenas $Ap(S,m) = Ap(S)$.

Proposição 2.5.2. *Seja S um semigrupo numérico e n um elemento não nulo de S, então*

$$Ap(S,n) = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}, \tag{2.5}$$

onde $w_i = \min\{s \in S; s \equiv i \pmod n\}$.

Demonstração. Seja $x \in S$, de modo que $x-n \notin S$. Sabemos que existe $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $x \equiv i \pmod n$, restando apenas mostrar que x é o menor elemento com essa característica. Para isso, mostraremos que $x - kn \notin S$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que exista tal k de modo que $x - kn \in S$. Como $n \in S$, temos que

$$x - kn + (k-1)n = x - n\,.$$

Como S é fechado para adição, deveríamos ter $x - n \in S$, uma contradição com a escolha de x e n. Desse modo, x é o menor elemento de S que é congruente a i módulo n.

Por outro lado, considere agora,

$$p = \min\{s \in S\ ;\ s \equiv i \pmod n\}$$

para algum $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Se $i = 0$, temos $p = 0$, mas se $i \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} p &\equiv i \pmod n \\ \Rightarrow p - kn &\equiv i \pmod n, \text{para todo } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como $p - kn < p$, então $p - kn \notin S$ para todo $k \in \mathbb{N}$, confirmando que todo elemento da forma (2.5) está em (2.4), concluindo assim a demonstração. $\square$

Exemplo 2.5.3. Considere o semigrupo

$$S = \langle 3, 8\rangle = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12\} \cup [14, \infty)$$

O conjunto $Ap(S, 8)$ será formado pelos menores elementos de S que deixam restos $0, 1, \ldots, 7$ na divisão por 8. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
0 &= 8 \times 0 + 0, \text{ resto 0 na divisão por 8;}\\
3 &= 8 \times 0 + 3, \text{ resto 3 na divisão por 8;}\\
6 &= 8 \times 0 + 6, \text{ resto 6 na divisão por 8;}\\
8 &= 8 \times 1 + 0, \text{ resto 0 na divisão por 8;}\\
9 &= 8 \times 1 + 1, \text{ resto 1 na divisão por 8;}\\
11 &= 8 \times 1 + 3, \text{ resto 3 na divisão por 8.}
\end{aligned}$$

Observe ainda que 8 e 11 serão descartados do conjunto de Apéry pois 0 e 3 são os representantes minimais das respectivas classes. Continuando o processo acima, selecionando apenas os menores elementos de cada classe, temos que o conjunto de Apéry para $n = 8$ é

$$Ap(S, 8) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$$

De modo análogo, podemos obter

$$Ap(S, 6) = \{0, 3, 8, 11, 16, 19\} \text{ e } Ap(S) = \{0, 8, 16\}$$

A partir do conjunto de Apéry de um semigrupo numérico S, é possível encontrar os geradores de S, como no teorema a seguir.

Teorema 2.5.4. *Sejam S um semigrupo numérico e $Ap(S, n)$ o seu conjunto de Apéry. Temos que*

$$A = \{n\} \cup (Ap(S, n) \setminus \{0\})$$

é um conjunto de geradores para S.

Demonstração. Seja $x \in S$, como $x \in \mathbb{N}_0$, temos que existem $q, r \in \mathbb{N}_0$ tais que $x = nq + r$, onde $0 \leq r \leq n - 1$. Se $r = 0$, então $x = nq$, o que nos diz que

$$x \in \langle \{n\} \cup \{Ap(S, n) \setminus \{0\}\}\rangle .$$

Se $r \neq 0$, então existe $w_r \in Ap(S, n)$ tal que $w_r \equiv r \pmod n$, ou seja, $w_r = nq' + r$ para certos q' e r naturais. Como w_r é o menor elemento de S com a característica de ser congruente a r módulo n, temos que $q' \leq q$. Portanto,

$$\begin{aligned} x &= nq + r \\ &= nq + r + nq' - nq' \\ &= n(q - q') + w_r. \end{aligned}$$

□

Segue do Teorema 2.5.4 que todo semigrupo numérico tem um conjunto finito de geradores. Ainda, segue que a dimensão e de um semigrupo numérico é, no máximo, igual à multiplicidade m de S, já que esse é a maior cardinalidade possível para o conjunto de Apéry $Ap(S)$ e, portanto, para o conjunto minimal de geradores de S.

Exemplo 2.5.5. O semigrupo $S = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12\} \cup [14, \infty)$ tem $Ap(S, 3) = \{0, 8, 16\}$ como apresentado no exemplo 2.5.3. Pelo Teorema anterior, podemos obter um conjunto gerador de S através da seguinte união

$$S = \langle \{3\} \cup \{0, 8, 16\} \rangle$$

Como $16 = 2 \times 8$ e $0 \in \langle 3, 8 \rangle$, podemos simplificar a expressão acima para $S = \langle 3, 8 \rangle$, como apresentado no exemplo já citado.

A seguir, definimos as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico S em relação a um elemento $n \in S$. Em seguida, vemos que o gênero de S pode ser obtido dessas coordenadas (Proposição 2.5.8) e usar isso para demonstrar o Teorema de Sylvester.

Definição 2.5.6. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S$ com $n \neq 0$. Seja*

$$Ap(S, n) = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$$

o conjunto de Apéry de S em n, onde $w_i = \min\{s \in S; s \equiv i \pmod{n}\}$. Seja então $k_i \in \mathbb{N}_0$ o único tal que

$$w_i = k_i n + i\,.$$

Definimos as coordenadas de Kunz de S em n como

$$Kunz(S, n) = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

Para ilustrar melhor a definição de coordenadas de Kunz, apresentamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.5.7. Para o semigrupo numérico

$$S = \{0, 4, 5, 6, 8, 9, \ldots\}\,,$$

temos

1. $Ap(S,4) = \{0, 5, 6, 11\}$, e portanto, $Kunz(S,4) = (1,1,2)$, pois:

$$\begin{aligned} 5 &= 4 \times 1 + 1 \\ 6 &= 4 \times 1 + 2 \\ 11 &= 4 \times 2 + 3. \end{aligned}$$

2. $Ap(S,5) = \{0, 6, 12, 8, 4\}$, e portanto, $Kunz(S,5) = (1,2,1,0)$, pois:

$$\begin{aligned} 6 &= 5 \times 1 + 1 \\ 12 &= 5 \times 2 + 2 \\ 8 &= 5 \times 1 + 3 \\ 4 &= 5 \times 0 + 4. \end{aligned}$$

Proposição 2.5.8. *Seja S um semigrupo numérico de multiplicidade m. Seja*

$$Kunz(S,m) = (k_1, k_2, ..., k_{m-1}),$$

onde $k_i \geq 1$ para todo $i \in \{0, ..., m-1\}$. Então, o gênero de S é

$$g(S) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i .$$

Demonstração. Para cada coordenada de Kunz k_i, existe $w_i \in Ap(S,m)$ tal que

$$w_i = mk_i + i$$

é o menor elemento congruente a m em S. Assim, para cada $i = 1, ..., m-1$, temos que

$$A_i = \{i, m+i, 2m+i, ..., (k_i - 1)m + i\} \subseteq \mathbb{N}_0 \setminus S .$$

Portanto:

$$g(S) = \sum_{i=1}^{m-1} |A_i| = \sum_{i=1}^{m-1} k_i .$$

□

Exemplo 2.5.9. Retomando o exemplo 2.5.7 do semigrupo $S = \{0, 4, 5, 6, 8, 9, \ldots\}$. Vimos que $Kunz(S,4) = (1,1,2)$, ou seja, pela Proposição 2.5.8, o gênero desse semigrupo pode ser obtido pela soma das coordenadas, ou seja

$$g = 1 + 1 + 2 = 4 ,$$

o que pode ser confirmado pela cardinalidade de $\mathbb{N}_0 \setminus S = \{1, 2, 3, 7\}$.

Teorema 2.5.10. *Seja S um semigrupo numérico de gênero g e número de Frobenius f. Sejam $n \in S \setminus \{0\}$ e $Ap(S,n)$ o conjunto de Apéry de S em n. Então:*

(i) $f = \max(Ap(S,n)) - n$,

(ii) $g = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \dfrac{n-1}{2}$.

Demonstração. Pela definição do conjunto de Apéry,

$$\max(Ap(S,n)) - n \notin S\,.$$

Se $x > (\max Ap(S,n)) - n$, então $x + n > \max Ap(S,n)$ e $x + n \notin Ap(S,n)$. Vamos provar que $x + n \in S$, donde $x + n - n = x \in S$ pela definição de $Ap(S,n)$.

Considere $w \in Ap(S,n)$ tal que w e $x + n$ sejam congruentes módulo n. Como $w < x + n$, isso implica que $x = w + kn$ para algum inteiro positivo k e, consequentemente,

$$x - n = w + kn - n = w + (k-1)n$$

pertence a S, já que trata-se da soma de dois elementos de S. Assim, pela definição do número de Frobenius, $f = \max(Ap(S,n)) - n$, o que prova (i).

Da Definição 2.5.6,

$$Ap(S,m) = \{0, mk_1 + 1, \ldots, mk_{m-1} + (m-1)\}.$$

Logo, pela Proposição 2.5.8,

$$\begin{aligned} g(S) &= \sum_{i=1}^{m-1} k_i \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} nk_i + \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

□

De posse do resultado do Teorema 2.5.10, estamos prontos para demonstrar o Teorema 2.3.8, isto é, que o número de Frobenius de um semigrupo numérico gerado por a, b primos entre si é

$$F(\langle a,b\rangle) = ab - a - b\,.$$

Se S é um semigrupo numérico gerado por $\langle a,b\rangle$ temos que

$$\begin{aligned} Ap(S,a) &= \{s \in S;\ s - a \notin S\} \\ &= \{ax + by \in S\ ;\ ax + by - a \notin S\} \\ &= \{ax + by \in S\ ;\ a(x-1) + by \notin S\}\,. \end{aligned}$$

Desse forma, se $x \geq 1$, então

$$a(x-1) + by \in S$$

e resta apenas $x = 0$, donde

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \ldots, (a-1)b\}.$$

Agora, aplicando o Teorema 2.5.10 para $n = a$, temos então

$$\begin{aligned} F(\langle a, b \rangle) &= \max(Ap(S, a)) - a \\ &= (a-1)b - a \\ &= ab - a - b\,, \end{aligned}$$

demonstrando assim o Teorema de Sylvester (Teorema 2.3.8).

3 O CONJUNTO DE BUCHWEITZ DE UM SEMIGRUPO

Nesse capítulo, estudamos o conjunto de Buchweitz $Buch(S) = \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S)$ de um semigrupo numérico S, onde $\mathcal{B}(A)$ é o suporte positivo em $2 + \mathbb{N}$ de certa função $\beta_A : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. A motivação para o estudo (e a nomenclatura) do conjunto de Buchweitz é o resultado provado por Buchweitz em 1980 que diz que se um semigrupo numérico S é de Weierstrass, então $\mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S) = \emptyset$.

Começamos o capítulo com um pouco de teoria aditiva dos números. Em seguida, definimos a função β_A e o conjunto $\mathcal{B}(A)$, de forma a ser possível definir o conjunto de Buchweitz e, enfim, provar que ele é finito quando $g \geq 2$, mas pode ser arbitrariamente grande. Nossa principal referência nesse capítulo é o trabalho [7] de Eliahou, García-García, Marín-Aragón e Vigneron-Tenorio.

3.1 CONJUNTOS SOMA

A Teoria Aditiva dos Números é uma subárea de Teoria dos Números que estuda o comportamento de subconjuntos de inteiros sob a operação de soma. Um problema clássico é, dado um conjunto de inteiros A, estudar o conjunto soma nA de todas as somas de n elementos de A, como na definição a seguir.

Definição 3.1.1. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{Z}$, definimos a soma $A + B$ como:*

$$A + B = \{a + b \ ; \ a \in A, \, b \in B\}.$$

Em particular, se $A \subseteq \mathbb{Z}$, então $2A = A + A$ e, em geral, $nA = A + (n-1)A$ se $n \geq 2$.

Exemplo 3.1.2. Seja $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$. Por definição, $2A = A + A$ é o conjunto de todas as possíveis somas entre dois elementos de A. Assim:

$$2A = [2, 10] \cup \{12, 13, 15, 16, 19, 22\}.$$

Analogamente, podemos calcular:

$$3A = [3, 21] \cup \{23, 24, 26, 27, 30, 33\}$$

$$4A = [4, 32] \cup \{34, 35, 37, 38, 41, 44\}$$

$$5A = [5, 43] \cup \{45, 46, 48, 49, 52, 55\}$$

$$6A = [6, 54] \cup \{56, 57, 59, 60, 63, 66\}.$$

E, em geral, obtemos por indução:

$$nA = [n, 11n - 12] \cup \{11n - 10, 11n - 9, 11n - 7, 11n - 6, 11n - 3, 11n\}.$$

Em geral, dados $A \subseteq \mathbb{Z}$ e $n \geq 2$, não é simples encontrar uma fórmula para o conjunto soma nA. Mas o Teorema 3.1.4, que pode ser encontrado em [11], nos dá algumas informações para n suficientemente grande em certos casos. Para a demonstração, vamos precisar do lema a seguir.

Lema 3.1.3. *Sejam $k \geq 2$ e $a_1, \ldots, a_{k-1}$, inteiros positivos tais que mdc$(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1$. Se*

$$(a_{k-1} - 1) \sum_{i=1}^{k-2} a_i \leq n \leq ha_{k-1} - (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1}, \tag{3.1}$$

para algum h, então existem $u_1, \ldots, u_{k-1}$ inteiros não negativos tais que

$$n = u_1a_1 + \cdots + u_{k-1}a_{k-1}$$

e

$$u_1 + \cdots + u_{k-1} \leq h$$

Demonstração. Como o mdc$(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1$, então existem inteiros $y_1, \ldots, y_{k-1}$ tais que $y_1a_1 + \cdots + y_{k-1}a_{k-1} = 1$, ou ainda, fazendo $x_i = y_in$

$$x_1a_1 + \cdots + x_{k-1}a_{k-1} = n.$$

Considere u_i o menor resíduo não negativo de x_i módulo a_{k-1}, para $1 \leq i \leq k-2$, ou seja,

$$x_i \equiv u_i \pmod{a_{k-1}} \text{ , com } 0 \leq u_i < a_{k-1}$$

ou,

$$0 \leq u_i \leq a_{k-1} - 1\,. \tag{3.2}$$

Usando as propriedades de aritmética modular, temos que

$$n \equiv a_1u_1 + \cdots + a_{k-2}u_{k-2} \pmod{a_{k-1}}\,.$$

Reescrevendo a relação de congruência, garantimos que existe um inteiro u_{k-1} tal que

$$n = u_{k-1}a_{k-1} + a_1u_1 + \cdots + a_{k-2}u_{k-2}.$$

Consequentemente,

$$u_{k-1}a_{k-1} = n - (a_1u_1 + \cdots + a_{k-2}u_{k-2})$$

Por (3.2),

$$\begin{aligned} u_{k-1}a_{k-1} = n - (a_1u_1 + \cdots + a_{k-2}u_{k-2}) &\geq n - (a_{k-1} - 1)(a_1 + \cdots + a_{k-2}) \\ &= n - (a_{k-1} - 1) \sum_{i=1}^{k-2} a_i \end{aligned}$$

Como $0 \leq n - (a_{k-1} - 1) \sum_{i=1}^{k-1} a_i = u_{k-1}a_{k-1}$ e $a_{k-1} \in \mathbb{N}$, então $u_{k-1} \in \mathbb{N}_0$, isto é, $u_{k-1} \geq 0$.

Assim, como $a_1, \dots, a_{k-1} > 0$, então $u_{k-1}a_{k-1} \le n$. Por (3.1), concluímos que,

$$u_{k-1}a_{k-1} \le n \le ha_{k-1} - (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1}$$

e, assim,

$$u_{k-1} \le h - (k-2)(a_{k-1}-1)\,.$$

Segue então de (3.2) que

$$u_1 + \cdots + u_{k-1} \le (k-2)(a_{k-1}-1) + u_{k-1} \le h\,,$$

encerrando a demonstração. □

Teorema 3.1.4. *Seja $k \ge 2$. Seja $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\} \subset \mathbb{Z}$ tal que*

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} \quad e \quad mdc(a_1, \dots, a_{k-1}) = 1\,.$$

Então, existem inteiros c, d não negativos e subconjuntos $C \subset [0, c-2]$ e $D \subset [0, d-2]$ tais que

$$nA = C \cup [c, a_{k-1}n - d] \cup (a_{k-1}n - D) \tag{3.3}$$

para todo $n \ge \max\{1, (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1}\}$, e $a_{k-1}n - D = \{x_i \ ; x_i = a_{k-1} - d_i$ para todo $d_i \in D\}$

Demonstração. Primeiro, se $k = 2$, então $A = \{0, 1\}$ e $nA = [0, n]$ para todo $n \ge 1$. Tomando $c = d = 0$, o resultado segue.

Seja então $k \ge 3$, donde $a_{k-1} \ge 2$. Definindo

$$n_0 = (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1}\,,$$

como $a_{k-1} > a_i$ para $1 \le i \le k-2$, temos

$$n_0 \ge (a_{k-1}-1)\left(1 + \sum_{i=1}^{k-2} a_i\right)\,. \tag{3.4}$$

Ainda, como $a_{k-1} \ge 2$, então de (3.4) temos

$$n_0 a_{k-1} \ge 2n_0 = n_0 + n_0 \ge (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1} + a_{k-1} - 1 + (a_{k-1}-1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i\,. \tag{3.5}$$

O que implica em

$$n_0 a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1} \ge (a_{k-1}-1) + (a_{k-1}-1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i\,.$$

Logo, $(a_{k-1}-1)\sum\limits_{i=1}^{k-2} a_i < n_0 a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1}$ e o intervalo

$$I = \left[(a_{k-1}-1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i, n_0 a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1}-1)a_{k-1}\right]$$

é não vazio. O Lema 3.1.3 (tomando $h = n_0$) implica que todo $n \in I$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} n &= u_1a_1 + \cdots + u_{k-1}a_{k-1} \\ &= a_1 + \cdots + a_1 + a_2 + \cdots + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \cdots + a_{k-1}. \end{aligned}$$

para certos $u_1, \ldots, u_{k-1} \in \mathbb{N}_0$, com $u_1 + \cdots + u_{k-1} \leq n_0$. Dessa forma, $n \in n_0A$ e, em particular, $I \subseteq n_0A$. Como o Lema 3.1.3 não considera elementos fora de I, pode acontecer de I ser ainda maior. Assim, seja

$$J = [c, n_0a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1}]$$

como o maior intervalo tal que $I \subset J \subset n_0A$. Portanto,

$$\left[(a_{k-1} - 1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i,\ n_0a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1}\right] \subseteq [c, n_0a_{k-1} - d] \subseteq n_0A\,. \tag{3.6}$$

Notamos que, dessa forma, $c - 1$ e $n_0a_{k-1} - (d-1)$ não pertencem a n_0A. Ainda, por (3.6), temos

$$c \leq (a_{k-1} - 1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i < n_0 \tag{3.7}$$

e

$$d \leq (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1}$$

donde, usando (3.5), obtemos

$$c + d \leq (a_{k-1} - 1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i + (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1} \leq n_0a_{k-1} - a_{k-1} + 1\,.$$

Assim

$$c + a_{k-1} - 1 \leq n_0a_{k-1} - d$$

donde

$$[c,\ c + a_{k-1} - 1] \subseteq [c,\ n_0a_{k-1} - d]\,. \tag{3.8}$$

Sejam C e D subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ dados por:

$$C = n_0A \cap [0, c-2]$$

e D tal que

$$n_0a_{k-1} - D = n_0A \cap [n_0a_{k-1} - (d-2),\ n_0a_{k-1}]\,.$$

Segue que $D \subset [0, d-2]$ e

$$n_0A = C \cup [c, n_0a_{k-1} - d] \cup (n_0a_{k-1} - D)\,.$$

Assim, (3.3) vale para $n = n_0$. Vamos provar por indução que vale para todo $n \geq n_0$. Suponha que vale para algum $n \geq n_0$. Seja

$$B = C \cup [c,\ (n+1)a_{k-1} - d] \cup ((n+1)a_{k-1} - D)\,. \tag{3.9}$$

Usando (3.8), podemos escrever

$$B = C \cup [c,\, c + a_{k-1} - 1] \cup [c + a_{k-1},\, (n+1)a_{k-1} - d] \cup ((n+1)a_{k-1} - D)\,.$$

Vamos estudar cada um desses conjuntos que forma B. Primeiro, como $0 \in A$, temos $nA \subseteq (n+1)A$, donde:

$$C \cup [c,\, c + a_{k-1} - 1] \subseteq C \cup [c,\, n_0 a_{k-1} - d] \subseteq nA \subseteq (n+1)A\,.$$

Como $a_{k-1} \in A$, segue que $a_{k-1} + nA \subseteq (n+1)A$, donde:

$$[c + a_{k-1},\, (n+1)a_{k-1} - d] \subseteq a_{k-1} + [c,\, na_{k-1} - d] = a_{k-1} + nA \subseteq (n+1)A\,.$$

Analogamente,

$$(n+1)a_{k-1} - D = a_{k-1} + (na_{k-1} - D) \subseteq (n+1)A\,.$$

Dessa forma, $B \subseteq (n+1)A\,.$

Agora, seja $b \in (n+1)A$. Vamos provar que $b \in B$, ou seja, $(n+1)A \subseteq B$.

Se $b < c$, então de (3.7), temos que b não pode ser a soma de $n+1$ elementos não nulos de A, ou seja, $b \in nA$ e, então, $b \in C \subseteq B$. Já se $c \le b \le c + a_{k-1} - 1$, então $b \in [c,\, c + a_{k-1} - 1] \subseteq B$. Suponhamos então que $b \in (n+1)A$ e $b \ge c + a_{k-1}$. Se $b - a_{k-1} \notin nA$, então b é soma de $n+1$ elementos de A, todos estritamente menores que a_{k-1} e, assim

$$b \le (n+1)(a_{k-1} - 1)\,. \tag{3.10}$$

Como $[c,\, na_{k-1} - d] \subseteq nA$, as condições $b - a_{k-1} \ge c$ e $b - a_{k-1} \notin nA$ implicam em

$$b - a_{k-1} > na_{k-1} - d \ge na_{k-1} - (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1}\,. \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11), obtemos:

$$(n+1)a_{k-1} - (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1} < b \le (n+1)(a_{k-1} - 1),$$

ou seja,

$$n + 1 < (k-2)(a_{k-1} - 1)a_{k-1} = n_0 \le n\,,$$

uma contradição. Dessa forma, devemos ter $b - a_{k-1} \in nA$.

Para completar a prova, notamos que, pela hipótese de indução, como $b - a_{k-1} \in nA$ e nA é como em (3.3), então:

$$b \in a_{k-1} + [c,\, na_{k-1} - d] = [c + a_{k-1},\, (n+1)a_{k-1} - d] \subseteq B$$

ou

$$b \in a_{k-1} + (na_{k-1} - D) = ((n+1)a_{k-1} - D) \subseteq B$$

onde as inclusões finais vêm da definição de B em (3.9).

Portanto, $B = (n+1)A$ e terminamos a prova. $\square$

No Teorema 3.1.4, usamos as hipóteses $0 \in A$ e $\mathrm{mdc}(A) = 1$. Observamos, no entanto, que essas não são hipóteses limitadoras para o cálculo da cardinalidade de nA. De fato, basta que $A' \subset \mathbb{Z}$ seja finito com $|A'| \geq 2$, que podemos usar a transformação $A = \frac{A'-\alpha}{d}$, onde $\alpha = \min A'$ e $d = \mathrm{mdc}(A' - \alpha)$. Desse modo, A será um conjunto que satisfaz as hipóteses e, ainda, $|nA| = |nA'|$ para todo n.

Para o estudo do conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico, precisamos da seguinte versão do Teorema 3.1.4

Corolário 3.1.5. *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um subconjunto finito contendo $\{1, 2\}$. Seja $a = \max(A)$. Então, existe um inteiro $b \leq 1$ tal que*

$$|nA| = (a-1)n + b \tag{3.12}$$

para todo $n \geq (|A| - 2)(a-2)(a-1)$.

Demonstração. Considere $A_0 = A - 1$ e $a_0 = a - 1$. Temos que $|A| = |A_0|$ e $a_0 = \max A_0$. Assim, pelo Teorema 3.1.4, existem inteiros c, d não negativos e subconjuntos $C \subset [0, c-2]$ e $D \subset [0, d-2]$ tais que

$$nA_0 = C \cup [c, a_0 n - d] \cup (a_0 n - D), \tag{3.13}$$

para todo $n \geq \max\{1,\ (|A_0| - 2)(a_0 - 1)a_0\}$.

Seja

$$b = |C| + |D| - c - d + 1\,.$$

Então, de (3.13), como

$$|[c, a_0 n - d]| = a_0 n - d - c + 1$$

e as uniões são disjuntas, temos

$$|nA| = |nA_0| = |C| + a_0 n - d - c + 1 + |D| = a_0 n + b = (a-1)n + b\,.$$

Ainda, temos:

$$|C| \leq \max\{0, c-1\}\,,$$

e

$$|a_0 n - D| = |D| \leq \max\{0, d-1\}\,.$$

Dessa forma, analisando os casos, vemos que $b \leq 1$. Um exemplo disso é, se $A = [0, a]$, assim $nA = [0, na]$. Tome $c = d = 0$, com isso, $nA = \emptyset \cap [0, na] \cap$ e $b = 0 + 0 - 0 - 0 - 0 + 1$. $\square$

3.2 A FUNÇÃO β_A E O CONJUNTO $\mathcal{B}(A)$

Definição 3.2.1. *Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito. Para cada $n \geq 2$, definimos $\beta_A : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ como*

$$\beta_A(n) = |nA| - (2n-1)(|A|-1)\,,$$

onde nA é como na definição 3.1.1

Para definir conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico, precisamos de um conjunto auxiliar definido a seguir.

Definição 3.2.2. *O conjunto $\mathcal{B}(A)$ é o suporte positivo em $2+\mathbb{N}$ da função $\beta_A(n)$, ou seja,*

$$\mathcal{B}(A) = \{n \geq 2; \beta_A(n) \geq 1\}. \tag{3.14}$$

Exemplo 3.2.3. Vamos provar que se $|A| = 0$ ou 1, então $\mathcal{B}(A)$ é infinito. De fato, se $A = \emptyset$, então $|nA| = 0$ e, assim,

$$\beta_\emptyset(n) = 0 - (2n-1)(0-1) = 2n-1$$

para todo $n \geq 2$, o que nos leva a

$$\mathcal{B}(\emptyset) = 2 + \mathbb{N}_0 = \{2, 3, 4, \dots\}\,.$$

De modo similar, se $|A| = 1$, então $\beta_A(n) = 1$, para todo $n \geq 2$. De fato, se $n \geq 2$ e $|A| = 1$, então $|nA| = 1$, com isso, temos,

$$\beta_A(n) = 1 - (2n-1)(1-1) = 1\,,$$

para todo $n \geq 2$ e, consequentemente, temos também

$$\mathcal{B}(A) = 2 + \mathbb{N}_0\,.$$

Exemplo 3.2.4. Voltando ao exemplo 3.1.2, lembrando que

$$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$$

temos

$$2A = [2, 10] \cup \{12, 13, 15, 16, 19, 22\}$$

$$3A = [3, 21] \cup \{23, 24, 26, 27, 30, 33\}$$

$$4A = [4, 32] \cup \{34, 35, 37, 38, 41, 44\}$$

$$5A = [5, 43] \cup \{45, 46, 48, 49, 52, 55\}$$

$$6A = [6, 54] \cup \{56, 57, 59, 60, 63, 66\}$$

Assim, em geral, para $n \geq 2$:

$$nA = [n, 11n - 12] \cup \{11n - 10, 11n - 9, 11n - 7, 11n - 6, 11n - 3, 11n\}$$

Dessa forma:

$$|nA| = 11n - 12 - n + 1 + 6 = 10n - 5 = 5(2n - 1) = (|A| - 1)(2n - 1)\,,$$

donde $\beta_A(n) = 0$ e, então, $\mathcal{B}(A) = \emptyset$.

3.2.1 Relação com semigrupos de Weierstrass

O conjunto B definido como na Definição 3.2.2 tem uma ligação intrínseca com a noção de semigrupo de Weierstrass. Nessa subseção, observaremos essa ligação sem apresentar demonstrações. Para mais detalhes, indicamos [9], [5] e [1].

Seja $\mathcal{C}$ uma curva algébrica plana não-singular de gênero g definida sobre um corpo algebricamente fechado k. Sabemos que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de $\mathcal{C}$ e os lugares do corpo de funções $k(\mathcal{C})$ (todos de grau 1). Daí, dado um ponto $P \in \mathcal{C}$, existem exatamente g inteiros $\alpha_i(P)$ com

$$1 = \alpha_1(P) < \alpha_2(P) < \cdots < \alpha_g(P) \leq 2g - 1$$

tais que não existe uma função $f \in k(\mathcal{C})$ com polo de ordem $\alpha_i(P)$ em P e nenhuma outra singularidade. Esse é o Teorema das Lacunas de Weierstrass, veja por exemplo [5]. Dada essa caracterização, pelo Teorema de Riemann-Roch, o conjunto

$$H(P) = \mathbb{N}_0 \setminus \{\alpha_1(P), \alpha_2(P), \ldots, \alpha_g(P)\}$$

é um semigrupo numérico de gênero g. Assim, dada uma curva e dado um ponto da curva, podemos associá-lo a um semigrupo numérico $H(P)$, chamado semigrupo de Weierstrass do ponto. Esse semigrupo é o mesmo para quase todos os pontos da curva.

Agora, dado um semigrupo numérico S de gênero g, será que existem uma curva $\mathcal{C}$ e um ponto $P \in \mathcal{C}$ de forma que o semigrupo de Weierstrass de P é exatamente S? A resposta é não.

No fim do século XIX, Hurwitz conjecturou que todo semigrupo numérico de gênero $g \geq 2$ seria de Weierstrass. Já na segunda metade do século XX, Buchweitz determinou que a condição $\mathcal{B}(\mathbb{N} \setminus S) = \emptyset$ é necessária para que um semigrupo numérico S seja de Weierstrass (veja, por exemplo, [9]). Desse resultado, surgiu o interesse pelo que agora chamamos conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico conforme definiremos na seção 3.3. Ao construir situações onde a condição $\mathcal{B}(\mathbb{N} \setminus S) = \emptyset$ falha, em 1980, Buchweitz encontrou um semigrupo que nega a conjectura de Hurwitz, ou seja, que tem gênero maior que 1, mas não é de Weierstrass, conforme descrevemos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.2.5 (Contraexemplo de Buchweitz para a conjectura de Hurwitz)**.** Considere

$$S = \langle 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23 \rangle$$

com seu respectivo conjunto de lacunas

$$G = \mathbb{N} \setminus S = [1, 12] \cup \{19, 21, 24, 25\} .$$

Temos que $|G| = 16$ e

$$2G = [2, 50] \setminus \{39, 41, 47\} ,$$

donde

$$|2G| = 50 - 2 + 1 - 3 = 46$$

e

$$\beta_G(2) = 46 - (2 \cdot 2 - 1)(16 - 1) = 46 - 3 \cdot 15 = 1 .$$

Assim, $2 \in \mathcal{B}(G)$, contrariando a condição de Buchweitz para que S seja de Weierstrass.

O semigrupo apresentado nesse exemplo de Buchweitz não é simétrico, já que seu número de Frobenius é 25 e seu gênero é 16. O método de Buchweitz para construir semigrupos numéricos que não são de Weierstrass, se baseia na caracterização das lacunas do semigrupo utilizando diferencial de Weil e, na verdade, não funciona para semigrupos numéricos simétricos, como foi observado por Oliveira [12]. Em 1993, um exemplo de semigrupo numérico simétrico que não é de Weierstrass foi construído por Oliveira e Stöhr.

3.2.2 Comportamento assintótico de $\beta_A(n)$

Dado um conjunto finito contendo $\{1, 2\}$, o teorema a seguir estuda o comportamento da função $\beta_A(n)$ quando n cresce utilizando a igualdade provada no Corolário 3.1.5.

Teorema 3.2.6. *Seja $A \subset \mathbb{N}_+$ um conjunto finito contendo $\{1, 2\}$. Considere $f = \max(A)$ e $g = |A|$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_A(n) = \begin{cases} -\infty, & se \quad f \quad \leq 2g - 2 \\ +\infty, & se \quad f \quad \geq 2g. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.5, para n suficientemente grande, temos

$$|nA| = (f - 1)n + b , \quad \text{com } b \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \beta_A(n) &= |nA| - (2n - 1)(|A| - 1) \\ &= (f - 1)n + b - (2n - 1)(g - 1) \\ &= (f - 1)n + b - 2gn + 2n + g - 1 \\ &= (f - 2g + 1)n + b + g - 1. \end{aligned}$$

Então, quando $f \geq 2g$, temos

$$\beta_A(n) \geq n + b + g - 1\,,$$

donde $\beta_A(n) \to \infty$ se $n \to \infty$.

Por outro lado, se $f \leq 2g - 2$, então

$$\beta_A(n) \leq -n + b + g - 1\,,$$

donde $\beta_A(n) \to -\infty$ se $n \to \infty$. $\square$

Um resultado importante que é consequência desse comportamento assintótico da função $\beta_A(n)$ é o corolário a seguir.

Corolário 3.2.7. *Nas condições do Teorema 3.2.6, se $f \geq 2g$, então $\mathcal{B}(A)$ é infinito. Já se $f \leq 2g - 2$, então $\beta_A(n) < 0$ para todo n suficientemente grande, donde $\mathcal{B}(A)$ é finito.*

Observação 3.2.8. *O Teorema 3.2.6 é parte do Teorema 2.3 de [7]. No caso do artigo, os autores afirmam ainda que, quando $f = 2g - 1$, tem-se que $\beta_A(n)$ é constante e não positiva para n suficientemente grande. Porém, a conclusão segue do que parece ter sido um erro de digitação que faz com que seja encontrado $\beta_A(n) = b - g - 1$ quando $f = 2g - 1$. Daí, usando que $b \leq 1$ (Corolário 3.1.5), segue que $\beta_A(n) \leq 0$, donde $\mathcal{B}(A) = \emptyset$. Veja que no Teorema 3.2.6, se considerarmos $f = 2g - 1$ e $b \leq 1$, obtemos*

$$\beta_A(n) = b + g - 1 \leq g\,,$$

o que, a princípio, não garante que $\beta_A(n)$ seja não positivo, como afirmado em [7], já que $g \geq 2$ pois $\{1, 2\} \subset A$. O resultado do Teorema 2.3 de [7] é utilizado no Corolário 2.4 e no Teorema 3.3 de [7]. Nessa dissertação, procuramos contornar esse problema a fim de obter, dentro do possível, resultados similares aos citados em [7].

3.3 O CONJUNTO DE BUCHWEITZ

Definição 3.3.1. *Seja $S \subset \mathbb{N}_0$ um semigrupo numérico. Define-se o conjunto Buchweitz de S como*

$$Buch(S) = \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S)\,,$$

ou seja, definindo G como o conjunto de lacunas de S:

$$\begin{aligned} Buch(S) &= \{n \geq 2; \beta_G(n) \geq 1\} \\ &= \{n \geq 2; \beta_G(n) > 0\} \\ &= \{n \geq 2; |nG| - (2n-1)(|G|-1) > 0\} \\ &= \{n \geq 2; |nG| > (2n-1)(|G|-1)\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.2. Consideremos os semigrupos numéricos $S_0 = \mathbb{N}_0$ e $S_1 = \langle 2, 3\rangle$. Observamos que S_0 e S_1 são os únicos semigrupos numéricos de gênero 0 e 1, respectivamente (como visto na observação 2.3.7). Como o conjunto de lacunas de S_0 é vazio e o de S_1 é unitário, pelo exemplo 3.2.3, temos então que

$$Buch(S_0) = 2 + \mathbb{N}_0 = Buch(S_1)\,.$$

Concluímos assim que todo semigrupo numérico de gênero $g \leq 1$ tem conjunto de Buchweitz infinito.

Exemplo 3.3.3. Seja

$$S = \{0, 21\} \cup [22, 34] \cup \{36\} \cup \{38, 39\} \cup [42, \infty)$$

o semigrupo numérico cujo conjunto de lacunas é

$$G = [1, 20] \cup \{35, 37, 40, 41\}\,.$$

Exibiremos o conjunto $Buch(S)$.

Para tal, precisamos calcular a cardinalidade de G e dos seus conjuntos soma. Visando facilitar esse processo, tomemos o conjunto auxiliar

$$A = 41 - G = \{41 - x;\, x \in G\} = \{0, 1, 4, 6\} \cup [21, 40]\,.$$

Como a função f que leva G em A dada por,

$$\begin{array}{rcl} f : G & \to & A \\ x & \to & 41 - x \end{array}$$

é claramente bijetiva, temos que $|A| = |G|$ e consequentemente, cada um dos respectivos conjuntos soma também possuem a mesma cardinalidade para todo valor de n. Assim, temos:

$$\begin{array}{rcl} 2A & = & [0, 2] \cup [4, 8] \cup \{10, 12\} \cup [21, 80]; \\ 3A & = & [0, 14] \cup \{16, 18\} \cup [21, 120] \\ 4A & = & [0, 20] \cup [21, 160] = [0, 160] \\ 5A & = & [0, 200] \\ 6A & = & [0, 240] \end{array}$$

Continuando o processo, observamos que para $n \geq 4$ temos $nA = [0, 40n]$. Calculando as cardinalidades dos conjuntos anteriores, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} |G| & = & |A| = 4 + 20 - 1 + 1 = 24\ ; \\ |2G| & = & |2A| = 3 + 5 + 2 + 60 = 70\ ; \\ |3G| & = & |3A| = 15 + 2 + 100 = 117\ ; \\ |nG| & = & |nA| = 40n - 0 + 1 = 40n + 1\ ,\ \text{para } n \geq 4. \end{array}$$

Portanto, lembrando que pela definição 3.2.1, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_A(2) &= |2A| - (4-1)(|A|-1) = 70 - 69 = 1 \\
\beta_A(3) &= |3A| - (6-1)(|A|-1) = 117 - 115 = 2 \\
\beta_A(n) &= 40n + 1 - (2n-1)(24-1) = -6n + 24\,, \text{ para } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\beta_A(n) \leq 0$, para todo $n \geq 4$ e, assim, $Buch(S) = \{2, 3\}$

Exemplo 3.3.4. Seja S o semigrupo simétrico $S = \langle 3, 7 \rangle$. Temos que o conjunto de lacunas de S é

$$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$$

como no exemplo 3.2.4, onde provamos que $\mathcal{B}(A) = \emptyset$. Assim, $Buch(S) = \emptyset$.

O exemplo 3.3.4 apresenta um semigrupo simétrico de multiplicidade maior que 2 com conjunto de Buchweitz vazio. Esse não é um exemplo único. Na subseção a seguir, vamos provar que todo semigrupo simétrico S de multiplicidade pelo menos 3 é tal que $Buch(S) = \emptyset$ (Teorema 3.3.7). Já o exemplo 3.3.3, apresenta um semigrupo que não é simétrico cujo conjunto $Buch(S)$ é não vazio, porém finito. Esse resultado também pode ser mais geral: de fato, o conjunto de Buchweitz de qualquer semigrupo de gênero pelo menos 2 é finito (Teorema 3.3.8).

3.3.1 Finitude de $Buch(S)$

Nessa subseção, como dito, estudamos a finitude do conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico de gênero pelo menos 2. Vamos começar com o caso em que S é simétrico e tem mutiplicidade $m \geq 3$ (Teorema 3.3.7). Esse resultado pode ser encontrado em [12], mas, para efeito de completude desse trabalho, vamos provar com a notação ajustada. Para isso, precisamos de dois lemas, que provamos a seguir.

Lema 3.3.5. *Seja $S \neq \mathbb{N}_0$ um semigrupo de gênero g, número de Frobenius f e conjunto de lacunas*

$$G = \mathbb{N}_0 \setminus S = \{\ell_1, \ldots, \ell_{g-1}, \ell_g = f\}\,.$$

Então, S tem multiplicidade $m \geq 3$ se, e somente se, $\ell_j \leq 2j - 2$, para todo $j = 2, \ldots, g-1$ e $\ell_g \leq 2g - 1$.

Demonstração. Primeiro, notamos que já temos da Proposição 2.3.12 que

$$\ell_j \leq 2j - 1 \text{ para todo } 1 \leq j \leq g\,. \tag{3.15}$$

Em particular,

$$f = \ell_g \leq 2g - 1\,.$$

Suponhamos que S tenha multiplicidade $m \geq 3$. Então, $\ell_2 = 2$. Logo, para $j = 2$, temos satisfeito

$$2 = \ell_2 \leq 2j - 2 = 2\,.$$

Vamos provar que $\ell_j \leq 2j - 2$ para $j = 3, \ldots, g - 1$. Note que só falta o caso quando $g \geq 3$. De fato, se $g = 2$, então $f = \ell_2 = 2$ e o resultado já está provado.

Se há igualdade em (3.15), isto é, se $\ell_j = 2j - 1$, então cada par $(x, \ell_j - x)$ com $x = 1, \ldots, [\ell_j/2]$ (onde $[x]$ representa a parte inteira de x) tem uma lacuna e uma não-lacuna. De fato, basta notar que o intervalo $[1, \ell_j] = [1, 2j - 1]$ tem exatamente j lacunas e que não podemos ter x e $\ell_j - x$ ambos não lacunas, já que, nesse caso, ℓ_j não poderia ser uma lacuna. Assim, como a quantidade de pares é $[\ell_j/2]$, exatamente uma entrada é lacuna.

Agora, seja $1 \leq j < g$ tal que $\ell_j = 2j - 1$. Como a próxima lacuna satisfaz $\ell_{j+1} > \ell_j = 2j - 1$, então $\ell_{j+1} \geq 2j$. Vamos provar que $\ell_{j+1} > 2j$. De fato, se $\ell_{j+1} = 2j$, tomando $0 < x < j$ uma não-lacuna, então $2j - x$ é uma lacuna (caso contrário $2j - x + x = 2j$ seria uma não-lacuna). Dessa forma,

$$\ell_j - (2j - x) = 2j - 1 - 2j + x = x - 1$$

é uma não-lacuna (já que cada par $(x, \ell_j - x)$ com $x = 1, \ldots, [\ell_j/2]$ tem uma lacuna e uma não-lacuna). Porém, pelo mesmo procedimento aplicado $x - 1$ vezes, isso implica $1 \in S$, o que é uma contradição pois $\ell_1 = 1$ é uma lacuna. Assim, provamos que $\ell_{j+1} > 2j$. Como de (3.15) já tínhamos

$$\ell_{j+1} \leq 2(j + 1) - 1 = 2j + 1\,,$$

segue que $\ell_{j+1} = 2j + 1$.

Analogamente ao observado para ℓ_j, como $\ell_{j+1} = 2j + 1$, cada par $(x, \ell_{j+1} - x)$ com $x = 1, \ldots, [\ell_{j+1}/2]$ tem exatamente uma lacuna. Tomando então $x = \ell_j$, temos que $\ell_{j+1} - \ell_j$ não é uma lacuna, ou seja,

$$2 = \ell_{j+1} - \ell_j \in S\,,$$

o que é uma contradição pois S tem multiplicidade $m \geq 3$. Logo, não podemos ter igualdade em (3.15) e, assim,

$$\ell_j < 2j - 1\,,$$

ou seja,

$$\ell_j \leq 2j - 2\,,$$

Para a recíproca, basta notar que 2 é uma lacuna. De fato, como 1 é a primeira lacuna e $1 < \ell_2$ e $\ell_2 \leq 2$ por (2.2), então, $\ell_2 = 2$. $\square$

Lema 3.3.6. *Seja S um semigrupo numérico simétrico de gênero g e multiplicidade $m \geq 3$. Então, cada inteiro $2 \leq n \leq 2g$ é a soma de dois elementos do conjunto de lacunas de S, com exceção do número de Frobenius f de S .*

Demonstração. Seja $n \geq 2$. Suponhamos que n não seja a soma de duas lacunas de S. Vamos provar que se $n \leq 2g$, então n é o número de Frobenius de S.

Consideremos os pares ordenados da forma $(a, n-a)$ tais que $1 \leq a \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, onde $[x]$ representa a parte inteira de x. É claro que cada um dos pares tem pelo menos uma não lacuna. Assim, no intervalo $[1, n-1]$ existem pelo menos $\left[\frac{n}{2}\right]$ não lacunas. Seja j a quantidade de lacunas tais que $\ell_i < n$. Temos que:

$$(n-1) - j \geq \left[\frac{n}{2}\right],$$

isto é,

$$j \leq (n-1) - \left[\frac{n}{2}\right].$$

Agora, como $\left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2} < \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, temos $j < \frac{n}{2}$, donde

$$n \geq 2j + 1\,.$$

Além disso, se $n \leq 2g$, então $j < g$ e, da definição de j, temos que $\ell_{j+1} \geq n$. Assim:

$$2j + 1 \leq n \leq \ell_{j+1}\,. \tag{3.16}$$

Como S tem multiplicidade $m \geq 3$, pelo Lema 3.3.5 temos que se $j + 1 < g$, então

$$\ell_{j+1} \leq 2(j+1) - 2 = 2j$$

Logo, devemos ter $j + 1 = g$ e $\ell_{j+1} = f$, assim, de (3.16):

$$2g - 1 \leq f\,,$$

mas, novamente pelo Lema 3.3.5,

$$2g - 1 \geq f\,.$$

Portanto, $2g - 1 = n = f$, ou seja, S é simétrico e o número de Frobenius não é a soma de duas lacunas. □

Teorema 3.3.7. *Seja S um semigrupo simétrico de gênero g, multiplicidade $m \geq 3$ e número de Frobenius f. Então, $Buch(S) = \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S) = \emptyset$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que $\beta_G(n) = 0$ e, para isso, com

$$G = \{\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_g\}$$

vamos provar que

$$|nG| = (2n-1)(g-1)$$

para todo $n \geq 2$ .Essa igualdade vem do fato que

$$nG = \{n, n+1, n+2, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1)+\ell_j \; ; \; j = 1, \ldots, g\}, \quad (3.17)$$

como provaremos.

Para verificar (3.17), precisamos provar

$$nG \subset \{n, n+1, n+2, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1)+\ell_j \; ; \; j = 1, \ldots, g\},$$

e a inclusão inversa. Para a primeira inclusão, seja $k \in nG$, então

$$k = \ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \cdots + \ell_{i_n}.$$

Se $n \leq k \leq (n-1)\ell_g - 1$ nada temos a mostrar. Se $k \geq (n-1)\ell_g$ então $k = (n-1)\ell_g + q$ para algum $s \in \mathbb{N}_0$. Assim:

$$\begin{aligned} &(n-1)\ell_g + q = \ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \cdots + \ell_{i_n} \\ \Rightarrow\, &\ell_{i_n} = (n-1)\ell_g + q - \ell_{i_1} - \ell_{i_2} - \cdots - \ell_{i_{n-1}} \\ \Rightarrow\, &\ell_{i_n} - q = (\ell_g - \ell_{i_1}) + \cdots + (\ell_g - \ell_{i_n-1}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pela Proposição 2.4.8, sabemos que em um semigrupo simétrico $q \in S$ se, e somente se, $\ell_g - q \notin S$. Assim, cada termo $\ell_g - \ell_{i_t}$ está em S, pois cada ℓ_{i_t} é uma lacuna. Daí, como S é fechado, a soma

$$(\ell_g - \ell_{i_1}) + \cdots + (\ell_g - \ell_{i_n-1})$$

está em S e, portanto, de (3.18), q é uma lacuna, ou seja, $q = \ell_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, g\}$. Podemos então escrever $k = (n-1)\ell_g + \ell_j$, concluindo assim a primeira inclusão já que $\ell_g = 2g-1$.

Vamos mostrar a inclusão inversa por indução sobre n.

Para $n = 2$, devemos mostrar que $2G$ coincide com

$$\{2, \ldots, (2g-1)-1\} \cup \{(2g-1)+\ell_j \; ; \; j = 1, \ldots, g\}.$$

Pelo Lema 3.3.6, temos que cada elemento $n \in \{2, 3, \ldots, 2g\} \setminus \{\ell_g = 2g-1\}$ é a soma de dois elementos do conjunto de lacunas e, assim,$\{2, \ldots, (2g-1)-1\} \subset 2G$. Como $(2g-1)+\ell_j = \ell_g + \ell_j$ então $\{(2g-1)+\ell_j \; ; \; j = 1, \ldots, g\} \subset 2G$ o que finaliza o argumento.

Agora, como hipótese de indução, consideramos que para $n = k$ a inclusão é válida, ou seja,

$$\{k, \ldots, (k-1)(2g-1)-1\} \cup \{(k-1)(2g-1)+\ell_j \; ; \; \ell_j \in G \; e \; 1 \leq j \leq g\} \subset kG.$$

Para $n = k+1$, queremos mostrar que $(k+1)G$ contém o conjunto

$$\{k+1, \ldots, k(2g-1)-1\} \cup \{k(2g-1)+\ell_j \ ; \ \ell_j \in G \ e \ 1 \leq j \leq g\}.$$

Lembramos que $c-1 = f = 2g-1 = \ell_g$. Essas diferentes representações do mesmo natural podem ser úteis para compreender a indução.

Seja

$$z \in \{k(2g-1)+\ell_j \ ; \ \ell_j \in G \ e \ 1 \leq j \leq g\}.$$

É imediato que $z \in (k+1)G$, pois $z = k\ell_g + \ell_j$ para algum j.

Consideremos então

$$z \in \{k+1, \ldots, k(2g-1)-1\}.$$

A partir daqui, analisaremos três casos.

Caso 1: Se $z \leq k+2g-3$, como $2g-3 \geq 1$, temos

$$k+1 \leq z \leq k+2g-3$$

e consequentemente,

$$k \leq z-1 \leq k+2g-4. \tag{3.19}$$

Como $k \geq 2$, temos $2k \geq 4$ e, como $g-1 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} 2k(g-1) &\geq 4(g-1) \\ 2kg-2k+k-2g &\geq 4g-4+k-2g \\ 2kg-2g-k &\geq k+2g-4 \end{aligned}$$

Logo,

$$k+2g-4 \leq 2g(k-1)-k = (2g-1)(k-1)-1 = \ell_g(k-1)-1. \tag{3.20}$$

Juntando (3.19) e (3.20), temos

$$z-1 \leq \ell_g(k-1)-1.$$

Pela hipótese de indução, $z-1 \in kG$, e então existem $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, g\}$, tais que

$$z-1 = \ell_{i_1} + \cdots + \ell_{i_k},$$

ou seja,

$$z = \ell_{i_1} + \cdots + \ell_{i_k} + 1.$$

Como a multiplicidade de S é maior ou igual a 3, então $2 \in G$ e, com isso, $z \in (k+1)G$ $z \in (k+1)G$.

Caso 2: Se $z = k + 2g - 2$, então $z - 2 = k + 2g - 4$. Analogamente ao caso anterior, temos que $z - 2 \in kG$, isto é,

$$z = \ell_{i_1} + \cdots + \ell_{i_k} + 2\,.$$

Novamente, como a multiplicidade de S é maior ou igual a 3, então $2 \in G$ e, com isso, $z \in (k+1)G$.

Caso 3: Suponha agora que $z \geq k + 2g - 1$. Como $z \in \{k+1, \ldots, k(2g-1) - 1\}$, temos

$$\begin{array}{rcl} k + 2g - 1 & \leq & z \;\leq\; k(2g-1) - 1 \\ k & \leq & z - (2g-1) \leq (k-1)(2g-1) - 1\,, \end{array}$$

resultando que

$$z - \ell_g \leq (k-1)\ell_g - 1\,,$$

ou seja, pela hipótese de indução, $z - \ell_g \in kG$. Daí, existem $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, g\}$ tais que

$$z = \ell_{i_1} + \cdots + \ell_{i_k} + \ell_g\,,$$

concluindo que $z \in (k+1)G$.

Desta forma, finalizamos a indução e provamos que

$$\{n, n+1, \ldots, (n-1)\ell_g - 1\} \cup \{(n-1)\ell_g + \ell_j; \ell_j \in G, \text{ para todo } 1 \leq j \leq g\} \subset nG.$$

Com a igualdade (3.17), temos que a cardinalidade de nG é a soma das cardinalidades dos conjuntos que o formam. Agora, notamos que

$$|\{n, n+1, \ldots, (n-1)\ell_g - 1\}| = (n-1)\ell_g - 1 - n + 1$$

e

$$|\{(n-1)\ell_g + r_j; \ell_j \in G,\ e\ 1 \leq j \leq g\}| = g$$

Portanto:

$$|nG| = (n-1)\ell_g - 1 - n + 1 + g = (n-1)(2g-1) - n + g = (2n-1)(g-1)\,.$$

□

Passemos agora para o teorema principal desse trabalho. Esse resultado está em [7], mas aqui apresentamos a demonstração com ajustes devido aos apontamentos feitos na observação 3.2.8.

Teorema 3.3.8. *Seja $S \subset \mathbb{N}_0$ um semigrupo numérico de gênero $g \geq 2$. Então, o conjunto de Buchweitz de S é finito.*

Demonstração. Considere $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ de modo que $Buch(S) = \mathcal{B}(G)$. Sejam f o número de Frobenius de S e m a multiplicidade de S. Assim, como $g \geq 2$ e $[1, m-1] \subset G$, temos $m \geq 2$.

Tem-se que $m \geq 3$, ou seja, $\{1, 2\} \subset G$. Como $g \geq 2$, pela Proposição 2.3.12, temos que $f \leq 2g - 1$. Se $f \leq 2g - 2$, então $Buch(S) = \mathcal{B}(G)$ é finito pelo Corolário 3.2.7.

Agora, se $m \geq 3$ e $f = 2g - 1$, temos justamente o caso do Teorema 3.3.7, donde $Buch(S) = \emptyset$.

Por fim, vamos analisar o caso em que $m = 2$. Primeiro, notamos que 2 é um dos geradores de S. Além disso, se $S = \langle 2, 3 \rangle$, teríamos $\mathbb{N}_0 \setminus S = \{1\}$, contrariando $g \geq 2$. Desse modo, deve existir $b \geq 5$ ímpar de forma que $S = \langle 2, b \rangle$. Logo:

$$S = \langle 2, b \rangle = \{0, 2, 4, \ldots, b-3\} \cup [\, b-1, \infty) \,.$$

Assim, $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ é o conjunto de todos os naturais ímpares de 1 a $b - 2$, isto é,

$$G = \{1, 3, \ldots, b-2\} \;.$$

Com isso,

$$G - 1 = \{0, 2, \ldots, b-3\}$$

e $\operatorname{mdc}(G - 1) = 2$. Dessa forma, podemos considerar

$$A = \frac{(G-1)}{2} = \left\{0, 1, \ldots, \frac{b-3}{2}\right\} = \left[0, \frac{b-3}{2}\right] = [0, k] \,,$$

onde $k = \dfrac{b-3}{2}$. Com isso, para todo $n \geq 2$ tem-se,

$$|nG| = |nA| = nk + 1 = n(|G| - 1) + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \beta_G(n) &= |nG| - (2n-1)(|G|-1) \\ &= n(|G|-1) + 1 - (2n-1)(|G|-1) \\ &= -(n-1)|G| + n \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $Buch(S) = \mathcal{B}(G)$ é vazio. $\square$

Juntando o Teorema 3.3.8 com o exemplo 3.3.2, obtemos:

Teorema 3.3.9. *Seja S um semigrupo numérico de gênero g. Então, o conjunto de Buchweitz de S é finito se, e somente se, $g \geq 2$.*

3.3.2 Cardinalidade de $Buch(S)$

O resultado a seguir mostra que, apesar de finito, o conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico pode ser arbitrariamente grande. De fato, vamos mostrar que qualquer intervalo finito I de inteiros não-negativos com $|I| \geq 2$ e $\min I = 2$ pode ser visto com o conjunto de Buchweitz de um semigrupo numérico.

Proposição 3.3.10. *Para qualquer inteiro $b \geq 3$, existe um semigrupo numérico S tal que $Buch(S) = \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S) = [2, b]$.*

Demonstração. Considere $k = b - 2 \geq 1$ e seja S o semigrupo numérico de multiplicidade $m = 6k + 15$, de profundidade $q = 2$ definido por

$$S = \{0, m, \ldots, 2m - 8, 2m - 6, 2m - 4, 2m - 3, 2m, 2m + 1, \ldots\}.$$

Temos que o conjunto de lacunas de S é

$$G = [1, m - 1] \cup \{2m - 7, 2m - 5, 2m - 2, 2m - 1\}.$$

Vamos provar que $Buch(S) = [2, k + 2]$. Para isso, vamos considerar o conjunto auxiliar de inteiros não-negativos dado por um *shift* de G:

$$A = (2m - 1) - G = \{2m - 1 - x;\, x \in G\} = \{0, 1, 4, 6\} \cup [m, 2(m - 1)].$$

Vamos calcular nA para $n \geq 2$ conforme a definição 3.1.1. Começamos com

$$2A = A + A = [0, 2] \cup [4, 8] \cup \{10, 12\} \cup [m, 4(m - 1)].$$

Em seguida, calculamos $3A = A + 2A$:

$$3A \;=\; [0, 14] \cup \{16, 18\} \cup [m, 6(m - 1)]. \tag{3.21}$$

Agora mostraremos por indução sobre n que

$$nA = [0, 6n - 4] \cup \{6n - 2, 6n\} \cup [m, 2n(m - 1)],$$

para todo $n \geq 3$. Para $n = 3$ é válido conforme (3.21). Suponha válido para $k \geq 3$. Vamos mostrar que vale para $k + 1$. Temos

$$\begin{aligned} (k + 1)A &= A + kA \\ &= (\{0, 1, 4, 6\} \cup [m, 2(m - 1)]) + ([0, 6k - 4] \cup \{6k - 2, 6k\} \cup [m, 2k(m - 1)]). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} x \in [0, 6k-2) \subset kA \Rightarrow x = x + 0 \\ 1 + 6k - 4 = 6k - 3 \\ 0 + 6k - 2 = 6k - 2 \\ 1 + 6k - 2 = 6k - 1 \\ 0 + 6k = 6k \\ 1 + 6k = 6k + 1 \\ 6 + 6k - 4 = 6k + 2 \\ 6 + 6k - 2 = 6k + 4 \\ 6 + 6k = 6k + 6. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} (k+1)A &= [0, 6k+2] \cup \{6k+4, 6k+6\} \cup [m, 2k(m-1) + 2(m-1)] \\ &= [0, 6(k+1) - 4] \cup \{6(k+1) - 2, 6(k+1)\} \cup [m, 2(k+1)(m-1)]. \end{aligned}$$

Assim,

$$nA = [0, 6n-4] \cup \{6n-2, 6n\} \cup [m, 2n(m-1)] \tag{3.22}$$

é válido para todo $n \geq 3$.

Agora, em (3.22), observamos que $\{6n-2, 6n\} \cup [m, 2n(m-1)]$ será uma união disjunta se, e somente se, $6n + 1 \leq m$. De fato, como $m = 6k + 15$, então

$$6n + 1 \leq m \iff n \leq k + \frac{7}{3}\,,$$

ou seja, se, e somente se, $n \leq k + 2$. Em contrapartida, se $n \geq k + 3$ então $6n - 3 \geq m$ concluindo que $nA = [0, 2n(m-1)]$.

Assim, estamos prontos para calcular a cardinalidade de nA em cada caso:

- Para $A = \{0, 1, 4, 6\} \cup [m, 2(m-1)]$, tem-se

$$|A| = 4 + (2m - 2 - m + 1) = m + 3\,;$$

- Para $2A = [0, 2] \cup [4, 8] \cup \{10, 12\} \cup [m, 4(m-1)]$, tem-se

$$|2A| = (2 - 0 + 1) + (8 - 4 + 1) + 2 + (4m - 4 - m + 1) = 3m + 7\,;$$

- Para $3 \leq n \leq k + 2$, tem-se

$$nA = [0, 6n-4] \cup \{6n-2, 6n\} \cup [m, 2n(m-1)]$$

  e portanto,

$$|nA| = (6n - 4 + 1) + 2 + (2n(m-1) - m + 1) = (2n-1)(m-1) + 6n - 1\,;$$

- Para $n \geq k+3$ temos $nA = [0, 2n(m-1)]$ e consequentemente

$$|nA| = 2n(m-1)+1\,.$$

A partir disso, conseguimos calcular o valor de $\beta_A(n) = |nA| - (2n-1)(|A|-1)$, como definido em 3.2.1, obtendo

$$\beta_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = 2. \\ 2, & \text{se} \quad 3 \leq n \leq k+2. \\ -6(n-k-3), & \text{se} \quad n \geq k+3. \end{cases}$$

Observamos que para $n \geq k+3$ temos $\beta_A(n) \leq 0$, ou seja, $Buch(A) = [2, k+2]$. Ainda, como $|nA| = |nG|$ para todo n, segue que $\beta_A(n) = \beta_G(n)$, e concluímos que

$$Buch(G) = [2, k+2] = [2, b-2+2] = [2, b]$$

já que $k = b-2$. □

Os intervalos do tipo $[2, b]$ dados na Proposição 3.3.10 não são os únicos que representam conjuntos de Buchweitz de semigrupos numéricos, conforme a Proposição a seguir.

Proposição 3.3.11. *Para qualquer inteiro $b \geq 4$, existe um semigrupo numérico S tal que $Buch(S) = \mathcal{B}(\mathbb{N}_0 \setminus S) = [3, b]$.*

Demonstração. Seja $k = b-3 \geq 1$. Consideremos S o semigrupo numérico de multiplicidade $m = 6k+19$, com profundidade $q = 2$ e conjunto de lacunas

$$G = [1, m-1] \cup \{2m-7, 2m-6, 2m-2, 2m-1\}.$$

Vamos mostrar que $Buch(S) = [3, b]$. Para tal, consideremos novamente o conjunto auxiliar $A = 2m-1-G$, ou seja,

$$A = [0, 1] \cup \{5, 6\} \cup [m, 2(m-1)].$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} 2A &= [0,2] \cup [5,7] \cup [10,12] \cup [m, 4(m-1)]. \\ 3A &= [0,3] \cup [5,8] \cup [10,13] \cup [15,18] \cup [m, 6(m-1)]. \\ 4A &= [0,24] \cup [m, 8(m-1)]. \\ 5A &= [0,30] \cup [m, 10(m-1)]. \end{aligned}$$

Verifica-se, por indução, para $n \geq 4$, que

$$nA = [0, 6n] \cup [m, 2n(m-1)]\,. \tag{3.23}$$

Vamos analisar quando a união em (3.23) será disjunta. Como $m = 6k + 19$, então

$$6n + 1 \leq m \Longleftrightarrow n \leq k + 3\,.$$

Em contrapartida, se $n \geq k + 4$ então

$$6n - 5 \geq 6k + 19 = m\,,$$

donde $m \in [0, 6n]$. Logo, a união não é disjunta nesse caso, isto é,

$$nA = [0, 2n(m - 1)]$$

para todo $n \geq k + 4$. Assim, estamos prontos para calcular as cardinalidades em cada caso:

- Como $A = [0, 1] \cup \{5, 6\} \cup [m, 2(m - 1)]$, então
$$|A| = 2 + 2 + (2m - 2 - m + 1) = m + 3\,;$$
- Como $2A = [0, 2] \cup [5, 7] \cup [10, 12] \cup [m, 4(m - 1)]$, então
$$|2A| = 3 + 3 + 3 + (4m - 4 - m + 1) = 3m + 6\,;$$
- Como $3A = [0, 3] \cup [5, 8] \cup [10, 13] \cup [15, 18] \cup [m, 6(m - 1)]$, então
$$|3A| = 4 + 4 + 4 + 4 + (6m - 6 - m + 1) = 5m + 11\,;$$
- Para $4 \leq n \leq k + 3$, temos
$$nA = [0, 6n] \cup [m, 2n(m - 1)]$$
e então
$$|nA| = 6n + 1 + 2n(m - 1) - m + 1 = 6n + 1 + (m - 1)(2n - 1)\,.$$
- Para $n \geq k + 4$, temos $nA = [0, 2n(m - 1)]$ e, portanto,
$$|nA| = 2n(m - 1) + 1\,.$$

A partir disso, conseguimos calcular $\beta_A(n) = |nA| - (2n - 1)(|A| - 1)$ como definido em 3.2.1

$$\beta_A(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n = 2. \\ 1, & \text{se} \quad n = 3. \\ 2, & \text{se} \quad 4 \leq n \leq k + 3. \\ -6(n - k - 4) - 2, & \text{se} \quad n \geq k + 4. \end{cases}$$

Como $k \geq 1$, se $n \geq k + 4$, segue que $\beta_A(n) \leq 0$. Dessa forma, de modo análogo ao feito na Proposição 3.3.10, obtemos $Buch(G) = [3, k + 3]$ $\square$

Observação 3.3.12. *Em [7], os autores observam ainda que, para qualquer inteiro* $k \geq 1$, *existem ainda semigrupos cujos conjuntos de Buchweitz são dos tipos* $[4, k + 4]$, $[5, k + 5]$, $[6, k + 6]$ *e* $[7 + 2k, 7 + 4k]$. *Não se sabe, no entanto, se qualquer intervalo finito de naturais é o conjunto de Buchweitz de algum semigrupo numérico.*

4 CONCLUSÃO

O estudo de Buchweitz demonstrando que uma condição necessária para um semigrupo numérico ser de Weierstrass é que seu conjunto Buchweitz seja vazio despertou matematicamente um interesse em estudar mais sobre o comportamento desse conjunto.

Apesar de concluirmos que o conjunto de Buchweitz de semigrupo numérico de gênero maior ou igual a dois é sempre finito, mas que pode ser tão grande quanto se queira, pouco ainda se sabe sobre sua estrutura. Por exemplo, algumas perguntas que ainda podem ser estudadas são: 1) será que conjuntos de Buchweitz sempre podem ser descritos como intervalos (ou união de intervalos) de naturais?; 2) será que todo intervalo $[a, b]$ é o conjunto de Buchweitz de algum semigrupo numérico; 3) Ou ainda, será que dado qualquer A subconjunto finito de $\mathbb{N}$ existe um semigrupo numérico com conjunto de Buchweitz A?; 4) Mais ainda, é possível estabelecer condições diretas sobre um semigrupo numérico S para que seu conjunto Buchweitz seja vazio?

Tendo essas questões em mente, a possibilidade da continuação dos estudos sobre esse conjunto, baseados no que esse trabalho apresentou, é provocadora e esperamos contribuir para algumas respostas desses questionamentos no futuro.

REFERÊNCIAS

1 ARABELLO, E.; CORNALBA, M.; GRIFFITHS, P. A.; HARRIS, J. **Geometry of Algebraic Curves**. v. I, New York: Springer-Verlag, 1985.

2 BRAS-AMORÓS, M. Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus, **Semigroup Forum**, v. 76, p. 379–384, 2008.

3 CRUZ, C. **Semigrupos Numéricos Gerados por Dois Elementos e uma Identificação Geométrica**, **Análise de semigrupos numéricos por coordenadas de Kunz**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2023. Disponível em: `http://repositorio.unb.br/jspui/handle/10482/48355`. Acesso em 28 jun. 2024.

4 CURTIS, F. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup, **Math. Scand.**, v. 67, p. 190-192, 1990.

5 DEL CENTINA, A. Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the "Lückensatz" to the 1970s, **Ann. Univ. Ferrara** v. 54, n. 1, p. 37-59, 2008.

6 ELIAHOU, S.; FROMENTIN, J. Gapsets and numerical semigroups. **Journal of Combinatorial Theory**, Series A, v. 169, p. 105-129, 2020.

7 ELIAHOU, S.; GARCÍA-GARCÍA, J. I.; MARÍN-ARAGÓN, D.; VIGNERON-TENORIO, A. The Buchweitz Set of a Numerical Semigroup. **Bull Braz Math Soc**, New Series v. 54, n. 4, 2023. Disponível em : `https://doi.org/10.1007/s00574-022-00322-8`.

8 GARCIA, R. Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester. **Revista da Olimpíada - IME - UFG**, Goiânia, n. 8, p. 47-68, 2013.

9 KOMEDA, J. Non-Weierstrass Numerical Semigroups, **Semigroup Forum**,v. 57, p. 157 - 185, 1998.

10 MAZZINI, S. **Semigrupos numéricos não associados a curvas algébricas**, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2017. Disponível em: `https://posmatematica.ufv.br/wp-content/uploads/2018/01/Dissertacao-Sarah-Faria-Monteiro-Mazzini.pdf`. Acesso em 28 jun. 2024.

11 NATHANSON, M. B. **Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets**, Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer , 1996.

12 OLIVEIRA, G. Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves, **Manuscripta mathematica**, v. 71, n. 1, p. 431-450, 1991.

13 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNB. **Semigrupos Numéricos - Parte 01 - Matheus Bernardini (UnB-Gama)**. Youtube, 24 de fevereiro de 2022. Disponível em:`https://www.youtube.com/watch?v=5HBrgeBWP-0`. Acesso em: 03 de junho de 2023.

14 RAMIREZ ALFONSIN, J. L. Complexity of the Frobenius Problem. **Combinatorica**, v. 16, p. 143-147, 1996.

15 RAMIREZ ALFONSIN, J. L. **The Diophantine Frobenius Problem**, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, v. 30, Oxford: Oxford University Press, 2005.

16 RODRIGUES, V. **Análise de semigrupos numéricos por coordenadas de Kunz**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2023. Disponível em: `http://repositorio.unb.br/jspui/handle/10482/48355`. Acesso em 5 mar. 2024.

17 ROSALES, J.C.; GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A. **Numerical Semigroups**. New York: Springer, 2009.

18 SILVA, R. **Sobre semigrupos numéricos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2006. Disponível em: `https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/394533`. Acesso em 10 abr. 2024.

19 SYLVESTER, J.J.Excursus on rational fractions and partitions. **American Journal of Mathematics**, Vol. 5, No. 1, p. 79-136, 1882.

20 ZHAI, A. Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus, **Semigroup Forum 86**, p. 634–662, 2013.