



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUDESTE DE MINAS GERAIS - CAMPUS JUIZ DE FORA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Fernando Cezar Farineli de Souza

Princípio da Equivalência e Referenciais não Inerciais:
Uma abordagem através do Ensino por Investigação
utilizando a metodologia POE

Juiz de Fora
Outubro/2024

Fernando Cezar Farineli de Souza

Princípio da Equivalência e Referenciais não Inerciais:

Uma abordagem através do Ensino por Investigação
utilizando a metodologia POE

Dissertação apresentada ao Polo 24 do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora/Instituto Federal Sudeste de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física. Área de concentração: Física na Escola Básica.

Orientador: Professor Doutor Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Professor Doutor Bruno Gonçalves

Juiz de Fora

Outubro/2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Fernando Cezar Farineli de Souza.

Princípio da Equivalência e Referenciais não Inerciais : Uma abordagem através do Ensino por Investigação utilizando a metodologia POE / Fernando Cezar Farineli de Souza. -- 2024.

77 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Bruno Gonçalves

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2024.

1. Princípio da Equivalência. 2. Sequência de Ensino por Investigação. 3. Predizer, Observar, Explicar. Rizzuti, Bruno Ferreira Rizzuti, orient. I. Gonçalves, Bruno Gonçalves, coorient. II. Título.

Fernando Cezar Farineli de Souza

**Princípio da Equivalência e Referenciais não Inerciais:
Uma abordagem através do Ensino por Investigação utilizando a metodologia POE**

Dissertação apresentada ao Polo 24 do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora / Instituto Federal Sudeste de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física. Área de concentração: Física na Escola Básica.

Aprovada em 11 de outubro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora**

**Prof. Dr. Bruno Gonçalves - Coorientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais -
*Campus Juiz de Fora***

**Prof. Dr. José Luiz Matheus Valle
Universidade Federal de Juiz de Fora**

**Prof. Dr. Wagner Tadeu Jardim
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais -
*Campus Juiz de Fora***

Juiz de Fora, 12/09/2024.



Documento assinado eletronicamente por Bruno Ferreira Rizzuti, Professor(a), em 14/10/2024, às 11:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Bruno Gonçalves, Usuário Externo, em 15/10/2024, às 15:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Jose Luiz Matheus Valle, Professor(a), em 22/10/2024, às 13:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Wagner Tadeu Jardim, Usuário Externo, em 07/11/2024, às 14:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador 1982086 e o código CRC 2E006E32.

Dedico este trabalho a todos aqueles que me motivaram a buscar novos conhecimentos, em especial à minha esposa Verônica pela compreensão e apoio a esse meu ideal e aos meus filhos Guilherme, Jéssica e Fernanda pelo incentivo. Também à minha adorável e amada mãe que apesar de não estar mais entre nós com certeza estará orgulhosa dessa conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

Agradeço à minha família que me incentivou nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste sonho.

Agradeço aos alunos do Curso Garra que proporcionaram o desenvolvimento do tema central deste trabalho.

Agradeço aos Professores Bruno Rizzuti e Bruno Gonçalves pelas correções e ensinamentos que permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

Epígrafe

“Eu estava sentado na cadeira de meu escritório de patentes em Berna. De repente, um pensamento me assaltou: se alguém cai livremente, não sente o próprio peso. Fiquei chocado. Esse experimento mental simples causou profunda impressão em mim. Isso me levou à teoria da gravitação. Continuei meu pensamento: um homem em queda é acelerado. O que ele sente e julga está acontecendo no referencial acelerado. Decidi estender a teoria da relatividade para o referencial com aceleração. Senti que ao fazer isso eu estaria resolvendo o problema da gravidade ao mesmo tempo. Um homem em queda não sente o próprio peso porque em seu referencial há um novo campo gravitacional que cancela o campo gravitacional devido à Terra. No referencial acelerado, precisamos de um novo campo gravitacional”. (ALBERT EINSTEIN, 1907).

RESUMO

O Princípio de Equivalência nos diz que é impossível diferenciar fenômenos que ocorram num referencial com aceleração constante dos mesmos fenômenos num referencial com um campo gravitacional constante de mesma intensidade da aceleração do primeiro referencial. Assumindo-o, Einstein pôde formular a generalização dos conceitos relativísticos e referenciais não inerciais, culminando na Teoria da Relatividade Geral. O objetivo desse trabalho produzido no âmbito do MNPEF no Polo 24 UFJF/IFSUDESTEMG é permitir que os estudantes possam compreendê-lo e relacioná-lo com a teoria da proposta por Einstein. O produto apresentado é uma Sequência de Ensino por Investigação a partir de experimentos simples e de baixo custo e foi aplicado em uma turma do terceiro ano do ensino médio utilizando-se a metodologia POE (Previsão-Observação-Explicação). Nosso trabalho sugere que é possível construir, através da atividade investigativa proposta, a conexão entre campo gravitacional e referenciais acelerados. Dentre os resultados apurados ressalta-se que foi controverso para os estudantes apontar a conotação de gravidade como resultado da distorção do espaço tempo e não como força. Sobre a evidenciação experimental desenvolvida em sala de aula foi um aspecto bastante positivo e envolveu grande interação por parte dos estudantes. Na conclusão verifica-se que a sequência investigativa aplicada, apesar das restrições impostas pelo formato adotado, teve impacto positivo na apresentação do que vem a ser o Princípio da Equivalência no âmbito da Teoria da Relatividade Geral, uma vez que diversos episódios relacionados foram surgindo por relatos de alguns alunos e discutidos em sala de aula.

Ensino de Física: Princípio da Equivalência. Sequência de Ensino por Investigação. Predizer, Observar, Explicar.

ABSTRACT

The Principle of Equivalence tells us that it is impossible to differentiate between phenomena occurring in a reference frame with constant acceleration and the same phenomena in a reference frame with a constant gravitational field of the same intensity as the acceleration of the first reference frame. By assuming this, Einstein was able to formulate the generalization of relativistic concepts and non-inertial reference frames, culminating in the Theory of General Relativity. The aim of this work, produced within the scope of the MNPEF at Polo 24 UFJF/IFSUDESTEMG, is to allow students to understand it and relate it to the theory proposed by Einstein. The presented product is a Teaching Sequence by Inquiry based on simple and low-cost experiments and was applied to a third-year high school class using the POE (Prediction-Observation-Explanation) methodology. Our work suggests that it is possible to build, through the proposed investigative activity, the connection between the gravitational field and accelerated reference frames. Among the results obtained, it is noteworthy that it was controversial for students to point out the connotation of gravity as a result of spacetime distortion rather than as a force. Regarding the experimental demonstration developed in the classroom, it was a very positive aspect and involved significant interaction from the students. In conclusion, it was found that the applied investigative sequence, despite the restrictions imposed by the adopted format, had a positive impact on the presentation of what the Principle of Equivalence is within the scope of the Theory of General Relativity, as several related episodes emerged from the reports of some students and were discussed in the classroom.

Physics Education: Principle of Equivalence. Inquiry-Based Teaching Sequence. Predict, Observe, Explain.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 - Alice no foguete.....	24
Figura 02 - Elevador de Einstein gigante.....	25
Figura 03 - Comportamento de um feixe de luz num elevador em aceleração no espaço.....	26
Figura 04 - Coordenadas esféricas.....	30
Figura 05 - Exposição dialogada sobre Gravidade.....	47
Figura 06 - Deformação do espaço-tempo.....	47
Figura 07 - Exposição dialogada sobre Teoria da Relatividade Geral.....	48
Figura 08 - Experimento 1 - garrafa furada com água.....	49
Figura 09 - Experimento 2 - caixa com pote de água.....	50
Figura 10 - Relatório 1.....	53
Figura 11 - Relatório 2.....	54
Figura 12 - Relatório 3.....	55
Figura 13 - Relatório 4.....	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Contínuo problema-exercício.....	38
Tabela 02 - Níveis de investigação no laboratório de ciências.....	38
Tabela 03 - Graus de liberdade de professor (P) e alunos (A) em atividades experimentais...	42
Tabela 04 - Graus de liberdade de professor (P) e alunos (A) em aulas de resolução de problemas.....	42
Tabela 05 - Distribuição das aulas com cronograma.....	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEMs	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
SEI	Sequência de Ensino por Investigação
POE	Predizer - Observar - Explicar
MNPEF	Mestrado Nacional Profissional de Ensino da Física

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	13
2 - RELATIVIDADE GERAL.....	18
2.1 - Princípio da Equivalência.....	20
2.2 - Formulação matemática da Relatividade Geral.....	25
2.2.1 Métrica de Minkowski.....	26
2.2.2 Cálculo do determinante da métrica.....	30
2.2.3 Cálculo do elemento de volume diferencial dV	30
2.2.4 Equação Geodésica.....	31
2.2.5. - Tensor de Riemann ($R_{\rho\sigma\mu\nu}$).....	32
2.2.6. - Tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$).....	32
2.2.7. - Geometria do espaço-tempo.....	32
2.2.8. - Ação de Einstein-Hilbert.....	33
2.2.9. - Aplicando o Princípio da Ação Estacionária para obter a Equação de Einstein.....	33
3 - REFERENCIAL METODOLÓGICO	35
3.1 - Atividades Investigativas.....	35
3.2 - Metodologia POE.....	40
4 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	42
4.1 - Descrição do Produto Educacional.....	42
4.2 - Formulação matemática da Relatividade Geral.....	43
5 - ANÁLISE E REFLEXÕES	50
6 - CONCLUSÕES	55
REFERÊNCIAS	58
APÊNDICE A - MANUAL DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	61

1 - INTRODUÇÃO

O ensino da Relatividade Geral proporciona aos estudantes o contato com temas contemporâneos que podem suscitar bastante interesse. Os avanços tecnológicos permitiram o surgimento de inúmeros aparatos que facilitaram a vida da humanidade. Dentre eles podemos citar o Sistema Global de Posicionamento (GPS), utilizado para localizar endereços em mapas eletrônicos na sociedade contemporânea. O GPS requer correções relativísticas baseadas nas teorias de Einstein para garantir precisão nas medições temporais. Sem tais correções, erros de posicionamento da ordem de quilômetros em um único dia seriam observados. Além disso, a Relatividade Geral de Einstein serve como fundamento para a compreensão da física de buracos negros, supernovas, astrofísica e cosmologia moderna. Esta teoria também possibilita a análise das observações recentes das ondas gravitacionais, previstas pela teoria einsteiniana e essenciais para compreender a formação do Universo. A detecção dessas ondas ocorreu inicialmente em 14 de setembro de 2015 no Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro a Laser (LIGO) nos Estados Unidos.

O Prêmio Nobel de Física de 2017 foi concedido aos cientistas Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne em virtude de sua notável descoberta das ondas gravitacionais, as quais representam perturbações no espaço-tempo. O fenômeno é resultado da colisão entre dois buracos negros, conforme previsto por Albert Einstein há mais de um século, quando desenvolveu a Teoria Geral da Relatividade. Entretanto, somente recentemente a tecnologia científica alcançou a capacidade de registrar esse evento com precisão. A vibração detectada pelos pesquisadores foi produzida pela colisão de dois buracos negros que ocorreu aproximadamente 1,3 bilhão de anos atrás, mas podem ocorrer também quando objetos massivos se fundem, alterando a curvatura do espaço-tempo, enviando ondulações para fora do universo.

Os vencedores do prêmio Nobel de Física de 2019 foram o canadense James Peebs e os suíços Michel Mayor e Didier Queloz. James Peebs trabalha na universidade estadunidense de Princeton e desenvolveu teorias sobre a evolução do Universo para explicar sua composição atual, ganhando cerca de 1,86 milhões de dólares, a metade do prêmio Nobel. Michel Mayor e Didier Queloz são professores da universidade de Genebra, na Suíça e dividiram os outros 1,86 milhões de dólares do prêmio ao descobrirem o primeiro planeta fora do sistema solar, o 51 Pegasi b. Os planetas externos ao nosso sistema solar são chamados de exoplanetas e até 2019, já foram descobertos um total de 4.109.

O Prêmio Nobel de Física de 2020 foi atribuído ao físico britânico Roger Penrose por sua descoberta de que a formação de buracos negros é uma previsão robusta da Teoria Geral da Relatividade. Além disso, o prêmio foi concedido ao astrofísico alemão Reinhard Genzel e à astrônoma norte-americana Andrea Ghez pela descoberta de um objeto compacto supermassivo no centro da nossa galáxia. O estudo de Penrose demonstra que a Teoria Geral da Relatividade de Albert Einstein implica na formação de buracos negros, enquanto o trabalho de Genzel e Ghez revela a presença de um objeto extremamente massivo e invisível que influencia as órbitas das estrelas no centro da nossa galáxia. A instituição responsável pelo prêmio anunciou que um buraco negro supermassivo é a única explicação atualmente conhecida para esse fenômeno.

Conforme citado por Ostermann e Moreira (2016), na III Conferência Interamericana sobre Educação em Física (Barojas, 1988), foi organizado um grupo de trabalho para discutir o ensino de Física Moderna. Na discussão, foram levantadas inúmeras razões para a introdução de tópicos contemporâneos na escola média. Dentre elas, destaca-se a Física Moderna, considerada conceitualmente difícil e abstrata; mas, resultados de pesquisa em ensino de Física têm mostrado que, além da Física Clássica ser também abstrata, os estudantes apresentam sérias dificuldades conceituais para compreendê-la.

Convém ressaltar que os temas relacionados à relatividade geral e astronomia para o ensino fundamental e médio estão sendo mais abordados em trabalhos de conclusão de curso e também em dissertações de mestrado, inclusive do MNPEF. Dentre eles, temos a dissertação apresentada ao curso Mestrado Nacional em Ensino de Física do Departamento de Física da Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR da mestranda Gilvana Silva Pontes (2022) do Polo com o tema “Física e recursos didáticos: proposta para a inserção de storytelling de astronomia no último ano do ensino fundamental”. Podemos citar ainda a dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade de Brasília (UnB) no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física do mestrando Roberto Vinícios Lessa do Couto com o tema “Astronomia no ensino médio: Uma abordagem simplificada a partir da Teoria da Relatividade Geral”.

Segundo Pedrisa (2001), o ensino das disciplinas de Ciências Físicas e Naturais no território nacional sofre significativa influência negativa de diversos fatores, tais como a escassez de prática experimental, uma excessiva dependência do livro didático, a predominância do método expositivo, a limitada quantidade de aulas dedicadas a essas matérias, a desatualização e falta de contextualização do currículo, além da insuficiente formação profissional dos professores.

Para Ben-Dov (1996), o ensino de Física na Educação Básica tem sido caracterizado por uma abordagem que, em grande parte, se limita à memorização de fórmulas, muitas vezes com o único propósito de resolver questões específicas apresentadas em exames. Isso tem gerado uma experiência educacional desafiadora e, frequentemente, frustrante para os estudantes.

Em uma análise crítica, Moreira (2018) destacou que o ensino de Física no Brasil possui uma longa tradição, marcada por extensa pesquisa, criação de programas de pós-graduação, desenvolvimento de recursos instrucionais e contribuições significativas de renomados professores pesquisadores dedicados a esta área acadêmica. No entanto, observa-se uma tendência à predominância de uma abordagem educacional mercadológica e comportamentalista, orientada para a preparação de alunos para exames nacionais e internacionais. Embora existam possíveis exceções em determinados contextos educacionais, o mais comum é o ensino voltado para a testagem, ainda que maquiado com atividades adicionais. Este paradigma educacional é amplamente aceito de forma passiva e acrítica pela sociedade.

O adequado ensino da disciplina de física demanda a implementação de uma metodologia eficaz e a utilização de recursos apropriados, visando assegurar a compreensão pelos estudantes. Nesse contexto, é imperativo que o conteúdo ministrado possua significado relevante para os alunos, promovendo uma abordagem do ensino de física que esteja alinhada com a perspectiva da aprendizagem significativa. Tal abordagem valoriza e incorpora o conhecimento prévio dos educandos, contribuindo para uma assimilação mais profunda e efetiva dos conceitos físicos.

Moreira (2012), corroborando com David Ausubel, expressa que para ocorrer a aprendizagem significativa, um novo conteúdo deve estar conectado com aquilo que o aluno já sabe, que são os chamados subsunçores.

Ao consultarmos a Base Nacional Comum Curricular (2018) vemos que ela estabelece de maneira inequívoca que a abordagem experimental no ensino não implica necessariamente a adesão a um conjunto de etapas predefinidas. Em vez disso, destaca a importância de iniciar a aprendizagem a partir de perguntas desafiadoras que incentivem a abordagem investigativa dos problemas. Essa abordagem não implica, de forma alguma, que as atividades devam ser estritamente guiadas por um conjunto fixo de etapas ou limitadas à manipulação de objetos e experimentação em laboratório. Pelo contrário, a BNCC pressupõe a organização das situações de aprendizagem em torno de perguntas desafiadoras, que levem em consideração a diversidade cultural e estimulem o interesse e a curiosidade científica dos alunos. Isso

possibilita a definição de problemas, a coleta, análise e representação de dados, a comunicação de conclusões e a proposição de intervenções adequadas.

Dentre as competências específicas e habilidades das Ciências da Natureza e suas Tecnologias no ensino médio da BNCC (2017) destaca-se a Competência Específica 2 que aponta para a análise e a utilização de interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis. Nesse contexto, ressalto a Habilidade (EM13CNT204), a qual preconiza a elaboração de explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs) objetivam a formação de cidadãos críticos além da formação profissionalizante, de acordo com alguns pontos do artigo 35 da Lei nº 9.394/96: A formação da pessoa, de maneira a desenvolver valores e competências necessárias à integração de seu projeto individual ao projeto da sociedade em que se situa; o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico (PCNEMs, p.10, 2000).

No caso do Ensino Médio, a área de “Ciência da Natureza e suas Tecnologias” passa a ter as seguintes Unidades Temáticas: “Matéria e Energia” e “Vida, Terra e Cosmos”, apoiando-se na ideia de que deverão ser desenvolvidas sob quatro eixos: “conhecimento conceituais”, “contextualização social, histórica e cultural da ciência e da tecnologia”, “processos e práticas de investigação” e “linguagens específicas”. Com isso, a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias apresenta três “competências específicas”, cada qual com suas respectivas habilidades associadas (BRASIL, 2018).

Borges (2002) preconiza que o papel desempenhado pelo professor durante a atividade é o de mediador no processo de investigação, incentivando os alunos a se envolverem nas discussões e a trabalharem juntos na busca da resolução do problema. Isso se diferencia de um ambiente de laboratório tradicional, no qual os alunos seguem estritamente as instruções do professor, seguindo roteiros predefinidos com o objetivo de produzir um resultado previamente estabelecido pela teoria. Um desafio adicional se apresenta quando a avaliação da experiência está vinculada a notas, o que pode prejudicar a análise crítica dos erros, levando os alunos a "ajustarem" seus dados para obter uma resposta que corresponda às expectativas do professor.

Sobretudo, Borges (2002) ressalta ser pertinente considerar que a prática investigativa proporciona a formação de grupos nos quais os alunos podem colaborar entre si, compartilhando responsabilidades referentes aos objetivos e procedimentos a serem adotados diante da atividade prática proposta. Além disso, essa abordagem pode conferir ao ambiente de laboratório um caráter mais informal, contrastando com a formalidade que caracteriza outras atividades de ensino.

Para melhor compreensão do conteúdo deste trabalho passamos a descrever de forma sucinta os próximos passos para o desenvolvimento do mesmo.

No próximo capítulo faremos uma revisão técnica sobre a Relatividade Geral, detalhando um pouco mais sobre o Princípio da Equivalência de Albert Einstein.

O capítulo 3 é dedicado ao referencial metodológico, onde abordaremos sobre a sequência de ensino por investigação (SEI) e mais especificamente sobre a metodologia POE (Previsão-Observação-Explicação).

No capítulo 4 será abordada a sequência didática com a descrição do Produto Educacional e sua aplicação.

No capítulo 5 serão apresentadas a análise e as reflexões sobre o trabalho e o capítulo 6 traz as conclusões tiradas a partir dos resultados obtidos.

Por fim ressalto que esse trabalho tem como objetivo geral mostrar para os estudantes que a gravidade foi tratada por Newton como sendo uma força, mas existem outras teorias que divergem desse conceito. Dentre elas, a teoria da Relatividade Geral de Einstein descreve a gravidade como o resultado da distorção do espaço-tempo causada pela distribuição de massa e energia.

Como objetivos específicos, os estudantes deverão conhecer alguns eventos históricos da Relatividade Geral, compreender que o espaço-tempo sofre deformação, entender como ocorre o desvio na propagação da luz e evidenciar experimentalmente como ocorre o Princípio da Equivalência.

2 - RELATIVIDADE GERAL

Sendo um proponente do modelo corpuscular da luz, Isaac Newton poderia, de maneira natural, ter considerado e até mesmo realizado cálculos relacionados à curvatura da luz em um campo gravitacional. Sua experiência no tratamento de problemas altamente complexos na dinâmica celeste poderia ter permitido abordagens relacionadas à curvatura da luz como um tema potencialmente acessível em seus estudos. Sobretudo, em seu livro *Opticks* (1704, Book IV, Part 1) abordou esse assunto na forma de indagação da seguinte forma: “Os Corpos não agem sobre a luz à distância, e por sua ação curvam seus raios, e esta ação (caeteris paribus) não é mais forte na menor distância?”

Em carta enviada pelo Reverendo John Michel (1784) à Henry Cavendish ele postula que a força gravitacional influencia as partículas de luz, determinando com precisão suas trajetórias quando situadas a distâncias consideráveis de corpos massivos. O impacto gravitacional sobre o movimento das partículas de luz, evidentemente, não se manifesta comumente devido à notável velocidade da luz. No entanto, um corpo extremamente massivo, como o de uma estrela, tem a capacidade de atrair sua própria luz com intensidade suficiente para induzir uma redução significativa em sua velocidade. Assim sendo, a luz emitida por uma estrela experimentaria uma diminuição em sua velocidade devido à atração gravitacional, resultando em uma modificação discernível nas características luminosas das estrelas.

Soldner (1801) publicou o artigo intitulado "Sobre o desvio de um raio luminoso de seu movimento em linha reta devido à atração de um corpo celestial que passa próximo" no periódico *Astronomisches Jahrbuch*. O propósito declarado era "desenvolver, com base na teoria, ou seja, nas propriedades gerais e interações da matéria, todas as situações que possam afetar a posição verdadeira ou média de um corpo celeste, permitindo assim derivar todo o benefício que uma boa observação é capaz de oferecer". Soldner inicialmente sugeriu que desvios consideráveis da luz já haviam sido observados, como na aberração estelar, mas salientou a possibilidade da existência de outros desvios tão pequenos que dificultavam a distinção entre serem verdadeiros ou erros de observação, como no caso do desvio de um raio luminoso ao passar próximo a um corpo celestial.

Esses problemas relatados acima foram bem explicados com a Relatividade Geral e um primeiro passo de quebra de paradigma surge com a Relatividade Especial ou Restrita a sistemas inerciais de Albert Einstein contida no artigo "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", submetido aos *Annalen der Physik* (1905).

Posteriormente, Einstein (1907) escreveu um texto por solicitação de Johannes Stark para o *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* (1907) com o título o “Princípio da Relatividade e suas implicações”, no qual passou a ter o entendimento de que todas as leis naturais exceto a lei da gravidade podiam ser discutidas dentro do contexto da teoria da relatividade restrita. O ponto mais insatisfatório era o seguinte: apesar de a relação entre inércia e energia ser explicitamente dada na teoria da relatividade restrita, a relação entre inércia e peso, ou a energia do campo gravitacional, não era claramente elucidada.

De acordo com a lei do movimento de Newton, temos:

$$\text{Força} = \text{massa inercial} \times \text{aceleração}$$

onde a “massa inercial” é uma constante característica do corpo acelerado. Por outro lado, se a força aceleradora é a gravidade, temos:

$$\text{Força} = \text{massa gravitacional} \times \text{intensidade de campo gravitacional}$$

onde a “massa gravitacional” também é uma constante característica do corpo. Dessas duas relações segue-se que:

$$\text{Aceleração} = \text{massa gravitacional/massa inercial} \times \text{intensidade do campo gravitacional.}$$

Se, como mostra a experiência, para um dado campo gravitacional a aceleração deve ser sempre a mesma, independentemente da natureza e do estado do corpo, então a relação entre massa gravitacional e a massa inercial também deve ser a mesma para todos os corpos. Por meio de uma escolha adequada das unidades, podemos fazer com que esta relação seja igual a um.

Vale então o princípio de que “a massa gravitacional e a massa inercial de um corpo são iguais uma à outra”, mas não podemos chegar a uma interpretação satisfatória senão quando reconhecermos este fato: conforme as circunstâncias, a mesma qualidade do corpo se manifesta ora como inércia ora como gravidade (peso).

Quatro anos após apresentar os conceitos destinados a expandir a teoria da relatividade restrita para abarcar a gravitação, Einstein, durante seu período na Universidade de Praga, publicou um artigo aos *Annalen der Physik* (1911) com o título: "Sobre a influência da gravidade na propagação da luz", o qual representou uma tentativa de concordar com sua previsão de 1907. Para isso ele se baseou em dois princípios fundamentais: o princípio da equivalência, segundo o qual um observador em um referencial uniformemente acelerado é equivalente a um referencial submetido a um campo gravitacional uniforme e o princípio da relatividade restrita, onde estabelece que os processos físicos devem ser os mesmos para referenciais equivalentes.

2.1 - Princípio da Equivalência

Conforme descreve Bassalo (1997), após examinar as questões pertinentes aos referenciais inerciais, Einstein concentrou-se na proposição central dessa teoria: a incapacidade de qualquer experiência física em diferenciar um sistema de referência inercial de outro. Ele passou a admitir que todos os sistemas de referência e não somente os referenciais inerciais, são equivalentes para a formulação das leis da Física.

Conforme traduzido do alemão da obra de Albert Einstein por Pereira (1999), campo gravitacional difere dos campos elétrico e magnético devido a uma propriedade notável de grande importância subsequente. Corpos sujeitos exclusivamente à ação do campo gravitacional experimentam uma aceleração que é independente do material e do estado físico do corpo.

Corroborando com Peruzzo (2012), a despeito da adequação da teoria da relatividade especial às leis que regem a eletricidade e o magnetismo, ela não era compatível com a lei da gravidade de Newton. Einstein estava ciente dessa incongruência e, em 1911, iniciou a contemplação do problema. Ele percebeu uma íntima relação entre aceleração e campo gravitacional. O *insight* que o conduziu à formulação da Teoria da Relatividade Geral foi um experimento mental sobre uma pessoa em queda livre que não percebia seu próprio peso.

Após examinar as questões pertinentes aos referenciais inerciais, Einstein passou a admitir que todos os sistemas de referência e não somente os referenciais inerciais, são equivalentes para a formulação das leis da Física. Ele também percebeu uma íntima relação entre aceleração e campo gravitacional. O seu objetivo era formular uma teoria da gravitação que fosse consistente com a teoria da relatividade especial por ele desenvolvida em 1905.

Assim, de acordo com os relatos de Brennan (1998), passamos a descrever o insight que conduziu Einstein à formulação da Teoria da Relatividade Geral:

Em um experimento mental, uma pessoa em queda livre dentro de um elevador não percebia seu próprio peso. Nesse empenho, ele concebeu a ideia de que, quando um objeto está em queda livre, todos os objetos em seu interior parecem estar isentos de peso. Um exemplo disso é observado quando o ônibus espacial em órbita está em queda livre na gravidade da Terra, fazendo com que os astronautas dentro dele sintam a ausência de peso. Embora, na realidade, os astronautas mantenham o mesmo peso, devido à equivalência das leis que regem a queda deles e do ônibus espacial, eles aparentam flutuar dentro da cabine, sem cair em relação à espaçonave.

Einstein então explorou a situação de uma espaçonave que está com os motores ligados e acelerando de forma que a mesma não está mais se despençando em queda livre. Um fenômeno semelhante à gravidade seria observado: a parede adjacente ao motor do foguete empurraria quaisquer ocupantes e iria transformar-se no piso da espaçonave, enquanto a parede oposta tornar-se-ia o teto. Os ocupantes da nave seriam capazes de ficar de pé sobre o piso e saltar para cima e para baixo. Se a aceleração for igual à aceleração da gravidade, um astronauta pode ficar de pé no piso da nave e sentir o seu peso normalmente. Quando um objeto é solto, ele cai em direção ao piso devido à aceleração para cima da nave, indicando que o objeto está sendo deixado para trás.

Einstein realizou um salto intelectual ao comparar a situação da espaçonave em aceleração com a de uma espaçonave semelhante em repouso na superfície da Terra. Ele conjecturou que as experiências ocorrem da mesma maneira em ambas as situações: os pés do astronauta estão firmemente apoiados no piso, e um objeto solto cai em direção ao piso com uma aceleração g . Se o astronauta não tiver meios de observar o ambiente externo, não será capaz de distinguir entre uma espaçonave em repouso na Terra e uma em aceleração no espaço livre, afastado o suficiente de outros campos gravitacionais. Este conceito, expresso matematicamente de maneira precisa na teoria da relatividade geral é conhecido como o princípio da equivalência de Einstein, o qual postula que as leis da física num referencial em queda livre são equivalentes a um referencial sem gravidade. Isso pode ser visto na Figura 01 que está representada logo abaixo. Na Figura 1a, o referencial está longe da Terra ou de qualquer outro objeto de grande massa. Na Figura 1b, o referencial está em queda livre. Em ambos os referenciais Alice não sente seu peso, e a bola aparenta, para ela, não estar caindo.

O princípio da equivalência se aplica a todas as situações onde um sistema está caindo livremente sob a ação da gravidade. Um objeto em órbita também está em queda livre, e é por conta disso que os astronautas na Estação Espacial Internacional não sentem seu peso, apesar do campo gravitacional da terra nessa altitude ser de aproximadamente $8,4 \text{ m/s}^2$. Depois disso, Einstein considerou como seria se o referencial estivesse acelerando na ausência de uma força gravitacional.

Na Figura 1c, Alice está novamente no espaço, longe da Terra ou de qualquer outro objeto de grande massa, mas dessa vez ela está num referencial acelerando a $9,8 \text{ m/s}^2$ em relação a seu referencial original, na Figura 1a. A sensação é a de estar na superfície da Terra (Figura 1d). A bola parece cair, e ela sente a força normal empurrando-a do chão.

Figura 01 - Alice no Foguete

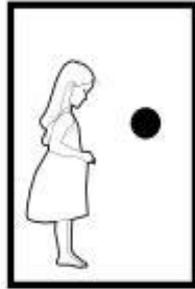


Figura 1a Alice e a bola não tem peso, pois não há grandes massas próximas

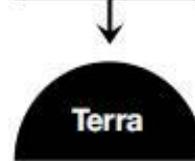
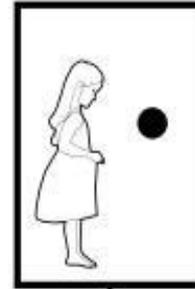


Figura 1b Alice não sente seu peso e a bola aparenta, para ela, não estar caindo.

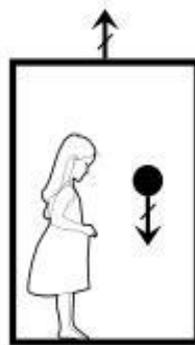


Figura 1c Alice se sente pesada, e a bola aparenta cair, pois o referencial está acelerando.

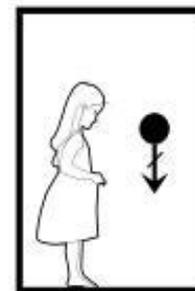


Figura 1d Alice se sente pesada, e a bola aparenta cair, por conta da gravidade da Terra.

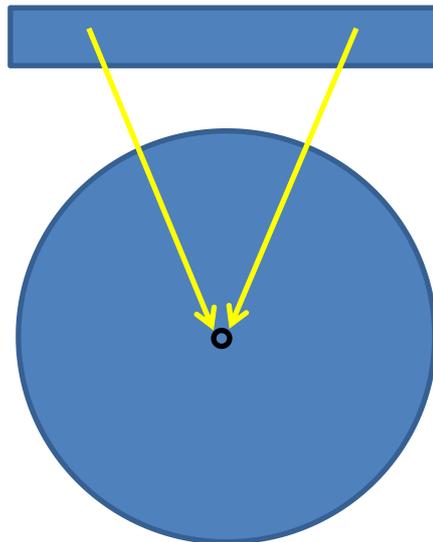
Fonte: Copyright © 2013 by Perimeter Institute for Theoretical Physics.

O princípio de equivalência nos diz que o mesmo fenômeno que ocorra num referencial com aceleração constante também acontece num referencial com um campo gravitacional constante, sem a menor diferença. Einstein usou isso para prever que a gravidade desacelera o tempo.

No entanto, a construção de um experimento mecânico como o “Elevador de Einstein” que consiga distinguir o efeito de um referencial acelerado de um efeito produzido por uma gravidade modificada pode ser possível, desde que esteja todo fechado e que seja pequeno o suficiente para não ser possível identificar o centro do campo gravitacional. Dessa forma, não somente se pode eliminar a gravidade pela queda livre, como também criá-la pela aceleração.

Segundo Lesche (2005), esta formulação do princípio da equivalência não é ainda satisfatória. Temos que dizer algo sobre o tamanho do elevador. Imagine um elevador gigantesco em queda livre no campo gravitacional da Terra; digamos que as arestas do piso do elevador tenham 500 m ou mais. Duas massas soltas dentro do elevador na mesma altura, mas bem afastadas uma da outra, caíam ambas para o centro da Terra. Mas como as direções para o centro da Terra são diferentes para as duas massas, observaríamos dentro do elevador que as massas se aproximam de maneira acelerada. Seria possível caminhar pelo elevador e identificar a presença de uma massa externa gerando gravidade, já que os vetores de força são diferentes nas extremidades do elevador. Veja na Figura 02 abaixo uma ilustração do Elevador de Einstein gigante.

Figura 02 - Elevador de Einstein Gigante



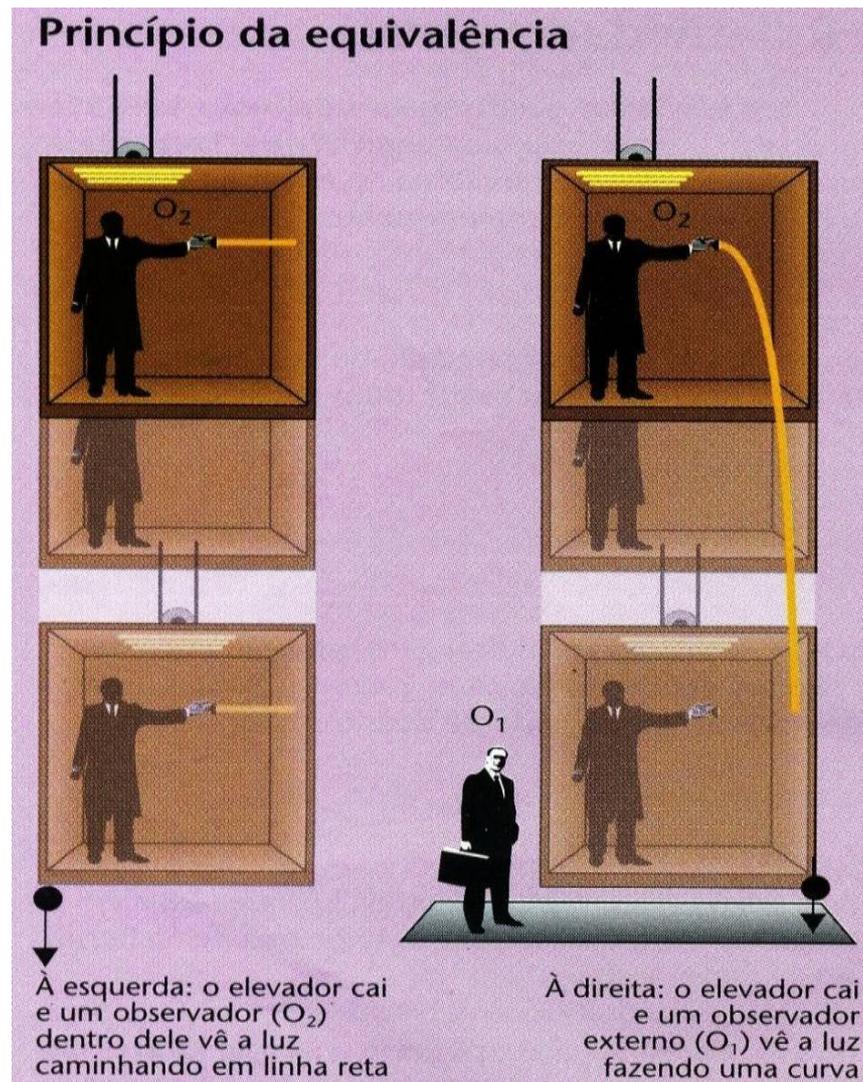
Fonte: o autor

Suponhamos agora que o elevador de Einstein esteja sujeito a uma aceleração constante para cima no espaço. Nessa situação, um feixe de luz emitido dentro do elevador seria observado de maneira diferente para um observador interno e um externo. Para um observador interno, que considera estar em repouso dentro do elevador em um campo gravitacional, acreditando que apenas este exerce influência sobre os corpos, o feixe de luz pareceria cruzar a cabine em uma trajetória horizontal reta. Por outro lado, para um observador externo, consciente do movimento acelerado do elevador, o feixe de luz seria percebido como se curvando. Isso ocorre porque durante o tempo em que a luz atravessa o

elevador, este se move para cima, fazendo com que a luz atinja a parede oposta em um ponto horizontal mais baixo do que o ponto de entrada inicial. A Figura 03 ilustra essa situação.

Figura 03 - Comportamento de um feixe de luz num elevador em aceleração no espaço.

a) Linha reta para o observador interno; b) Uma curva para o observador externo.



Fonte: https://sergiortorres.blogspot.com/2014/12/fisica-moderna-da-relatividade-restrita.html#google_vignette

Analisando mais detalhadamente a situação apresentada podemos concluir que os observadores interno e externo enxergam o feixe de luz de forma diferente. Isso se deve ao fato de que um raio de luz possui energia e, portanto, massa de acordo com a equação de Einstein ($E = mc^2$). Como a massa inercial e a massa gravitacional são equivalentes, o raio de luz é atraído pelo campo gravitacional.

Albert Einstein concluiu que os eventos ocorridos dentro do elevador em aceleração são análogos aos eventos que ocorreriam em um elevador em repouso dentro de um campo gravitacional. Na ausência de campo gravitacional, a luz se move em linha reta com velocidade constante. Quando um feixe de luz está presente em uma região com um campo gravitacional e é visto por um observador que está em queda livre nessa região, o feixe luminoso aparenta seguir uma trajetória reta para esse observador, como se não houvesse campo gravitacional presente. No entanto, para um observador que não está em queda livre, a luz não se move em linha reta; ao contrário, o feixe luminoso apresenta uma trajetória curva. Portanto, dentro de um campo gravitacional, a luz tende a curvar-se quando enxergada por um observador que não está em queda livre.

Conforme relata Peruzzo (2012), a ausência de peso no caso do elevador caindo em queda livre sugere que nenhuma força age sobre o objeto em queda. Uma solução foi propor que a gravidade não é uma força: os movimentos induzidos pela gravidade são movimentos livres, não sendo necessariamente uniformes. A trajetória do objeto é determinada pela geometria local do espaço-tempo.

2.2 - Formulação matemática da Relatividade Geral

Segundo Lesche (2005), a teoria relativística da gravitação recorre a instrumentos matemáticos e é essencial que compreendamos porque é tão necessário que seja modificada a descrição newtoniana da gravitação. O ordenamento parcial dos eventos no sentido de “mais tarde” ou “mais cedo” é intimamente relacionado ao conceito de causalidade. A força gravitacional newtoniana, que é representada pela equação $\vec{F} = -mMG r^{-3} \vec{r}$, demonstra incompatibilidade com essa ordem causal, uma vez que implica em uma interação instantânea, dentro de algum referencial privilegiado no qual a mesma é formulada.

Ainda de acordo com Lesche (2005) pode-se tentar desenvolver uma teoria da gravitação no espaço-tempo de Minkowski, de maneira análoga ao eletromagnetismo. Contudo, a situação apresenta-se significativamente mais complexa. A força gravitacional não pode ser blindada, exercendo sua influência sobre todos os corpos, o que abala os fundamentos de nossa geometria espaço-temporal. Dado que a gravitação não suporta blindagem e atua sobre todos os corpos, surge a seguinte questão: como vamos realizar um relógio atômico livre de forças? Sem átomos livres não temos mais como medir distâncias temporais em uma tentativa de construção da geometria do espaço-tempo usando tal grandeza.

No entanto, felizmente, existe uma solução para esse dilema, sugerida pelo Princípio da Equivalência.

2.2.1. - Métrica de Minkowski

De acordo com Pereira (1999), da obra em alemão de Albert Einstein, Minkowski descobriu que as transformações de Lorentz satisfazem às seguintes condições simples. Consideremos dois eventos vizinhos, cuja posição mútua no contínuo quadridimensional seja dada pelas diferenças das coordenadas espaciais dx , dy , dz e pela diferença temporal dt em relação a um corpo de referência galileano K . Em relação a um segundo sistema galileano, sejam as diferenças correspondentes para esses dois eventos, denotadas por dx' , dy' , dz' e dt' . Então estas diferenças sempre satisfazem à relação matemática $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2$.

Essa condição implica na validade das transformações de Lorentz, e podemos enunciá-la da seguinte maneira: a quantidade pertencente a dois pontos adjacentes no contínuo espaço-temporal de quatro dimensões, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, possui o mesmo valor para todos os corpos de referência privilegiados (sistemas galileanos). Se substituirmos x , y , z , $\sqrt{-1} ct$ por x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , obteremos como resultado que $ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i dx_i = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ é independente da escolha do referencial, por uma mera escolha da coordenada temporal complexa. Denominamos a quantidade ds de "distância" entre os dois eventos ou entre os dois pontos no espaço tempo em um conjunto quadridimensional. Se, portanto, escolhermos a variável imaginária $\sqrt{-1} ct$ em lugar da variável real do tempo t , podemos considerar o contínuo-espaço-temporal da Teoria da Relatividade Especial como um contínuo "euclidiano" quadridimensional, como se depreende das condições do item precedente. Vamos, contudo, manter a definição inicial.

A partir de agora vamos usar a notação de Einstein, onde índices repetidos significam soma. Tomando-se a expressão que descreve a distância entre pontos no espaço Euclidiano,

$$\delta l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \delta_{ij} \delta x_i \delta x_j, \quad (2.1)$$

onde,
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \delta_{ij} = \text{Delta de Kronecker} \\ i = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

e relacionando com o Espaço de Minkowski temos

$$\delta s^2 = c^2 dt^2 - \delta l^2. \quad (2.2)$$

As informações geométricas do espaço em questão, como veremos abaixo, ficam embutidas na métrica. O intervalo é expresso por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.3)$$

O mesmo pode ser representado por um produto escalar como na equação

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu, \quad (2.4)$$

ou seja,

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu, \quad (2.5)$$

em que $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico. Para a métrica de Minkowski temos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

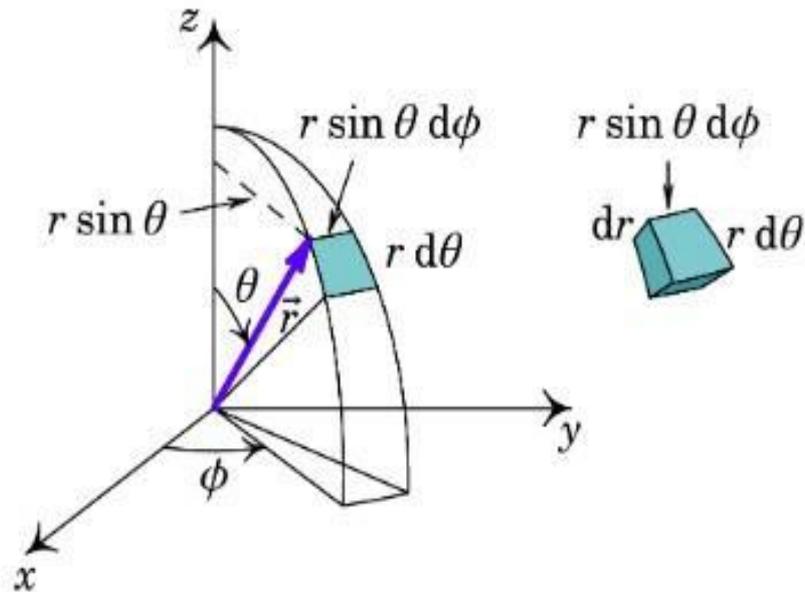
Segundo descreve Brennan (1998), a lacuna persistente para Einstein residia na ausência de um componente essencial do quebra-cabeça: embora ele tivesse identificado o princípio físico correto, carecia de um formalismo matemático rigoroso e poderoso capaz de expressá-lo adequadamente. Apesar de ter concebido esse princípio físico independentemente dos trabalhos de Riemann, Einstein enfrentou três anos de frustração enquanto buscava desesperadamente por uma estrutura matemática para sua formulação. Em um momento crucial, ele recorreu a Marcel Grossman, seu amigo e renomado matemático, em busca de auxílio. Durante uma pesquisa em sua biblioteca na tentativa de encontrar pistas para o dilema de Einstein, Grossman deparou-se casualmente com a obra de Riemann. Ele prontamente compartilhou com Einstein o trabalho de Riemann e seu tensor métrico, um conceito que havia sido negligenciado pela comunidade científica por seis décadas. Nesse momento, todo o aparato matemático necessário (cálculo tensorial) para descrever as complexidades da deformação do espaço-tempo em qualquer dimensão estava à disposição.

Conforme relata Hawking (2005), em 1913, Albert Einstein e Marcel Grossman elaboraram um trabalho em conjunto, no qual propuseram a concepção de que a força gravitacional é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Devido a um equívoco inicial por parte de Einstein, ambos não conseguiram encontrar as equações que relacionavam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia. Somente após um período de dois anos, Einstein foi capaz de corrigir esse erro e desenvolver as equações necessárias mediante um intenso esforço de trabalho.

Vamos primeiramente relembrar um pouco sobre as coordenadas polares para chegar a uma formulação possível que leva as equações de campo da Relatividade Geral.

Para entender a importância do tensor métrico para a descrição de propriedades geométricas do espaço, vamos considerar um exemplo em três dimensões.

Figura 04 - Coordenadas esféricas



Fonte: https://villate.org/eletromagnetismo/analise_vetorial.html

Inicialmente, temos

$$\vec{r} = r \sin\theta \cos\phi \hat{i} + r \sin\theta \sin\phi \hat{j} + r \cos\theta \hat{k}. \quad (2.7)$$

Os vetores unitários em coordenadas esféricas são:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos\theta \cos\phi \hat{i} + r \cos\theta \sin\phi \hat{j} - r \sin\theta \hat{k}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r \sin\theta \sin\phi \hat{i} + r \sin\theta \cos\phi \hat{j}. \quad (2.10)$$

Com eles, podemos escrever

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

É costume usar índices gregos para coordenadas de espaço-tempo. Como temos somente coordenadas espaciais, é costume na literatura usar letras gregas do meio do alfabeto. Sobretudo, como estamos em três dimensões poderíamos usar i, j, k onde correm valores de 1 a 3, sendo $x^1=x$, $x^2=y$ e $x^3=z$.

Observe que esta conta é análoga ao caso em que os vetores unitários são $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

A derivação em relação as coordenadas nem sempre nos levam a vetores unitários. Se este não for o caso, basta dividir o vetor pela norma correspondente, e assim ganhamos o vetor unitário correspondente. O que ganhamos quando derivamos em relação a uma coordenada específica é a direção em que aquela coordenada muda.

$$\delta = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \hat{i} & \hat{i} \cdot \hat{j} & \hat{i} \cdot \hat{k} \\ \hat{j} \cdot \hat{i} & \hat{j} \cdot \hat{j} & \hat{j} \cdot \hat{k} \\ \hat{k} \cdot \hat{i} & \hat{k} \cdot \hat{j} & \hat{k} \cdot \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Estas são grandezas geométricas centrais para descrição do espaço. De fato, ângulos entre vetores, suas direções e tamanhos podem ser obtidos a partir da métrica. Isto reforça o papel central deste tensor

O primeiro exemplo consiste no cálculo do ângulo entre vetores. Temos

$$\cos(\theta) = g_{\mu\nu} \hat{x}^\mu \hat{y}^\nu, \quad (2.13)$$

onde, $\hat{x}^\mu \hat{y}^\nu$ são os componentes de vetores unitários e θ é o próprio ângulo entre eles. O próprio cálculo de normas de vetores e a obtenção dos unitários correspondentes lança mão de g ,

$$\hat{x}^\alpha = \frac{x^\alpha}{\sqrt{g_{uv}x^u y^v}}. \quad (2.14)$$

Um outro exemplo seria o cálculo do elemento de volume em coordenadas esféricas a partir do determinante da métrica que veremos a seguir.

2.2.2. - Cálculo do determinante da métrica

O determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ é denotado como g ou $\det(g_{\mu\nu})$ e é calculado da seguinte maneira:

$$g = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\det g = r^4 \text{sen}^2 \theta. \quad (2.16)$$

No espaço euclidiano ele vale 1 e no espaço-tempo curvo, depende de onde ele está.

É possível mostrar que é exatamente o determinante da métrica que fornece o elemento de volume naquelas coordenadas. Pode-se observar que o resultado não é trivial, conforme descrito em https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_element.

2.2.3. - Cálculo do elemento de volume diferencial dV

A seguir passamos ao cálculo do determinante dV em coordenadas esféricas que representa o elemento de volume diferencial na geometria tridimensional, especificamente em um sistema de coordenadas esféricas. É calculado como o produto dos elementos diferenciais de r , θ e φ , com o ajuste feito pelo determinante da métrica e é dado por:

$$dV = \sqrt{\det g} \cdot dr d\theta d\varphi = r^2 \text{sen} \theta \cdot dr d\theta d\varphi, \quad (2.17)$$

onde r é a distância radial do ponto à origem, θ é o ângulo polar medido a partir do eixo z positivo e φ é o ângulo azimutal, medido no plano xy a partir do eixo x positivo.

Gostaria de chamar a atenção que diferentemente do espaço plano, para se calcular o volume de uma esfera ou de um cilindro do ponto de vista do espaço-tempo, vai depender de onde estão a esfera e o cilindro.

O elemento de volume diferencial dV em coordenadas esféricas reflete como o volume infinitesimal é representado no espaço tridimensional, levando em consideração as variações em todas as direções (radial, polar e azimutal). Esta expressão é fundamental em cálculos de integração em coordenadas esféricas, como na física teórica e na análise de campos vetoriais em geometria esférica.

A construção acima, embora simples, mostra como propriedades puramente geométricas podem ser extraídas do tensor métrico.

2.2.4. - Equação Geodésica

A partir desse momento passamos ao cálculo da geodésica na teoria da relatividade geral que é fundamental para determinar as trajetórias seguidas por partículas em movimento livre (isto é, sob a influência exclusiva da gravidade) no espaço-tempo curvo. Uma geodésica é a generalização relativística do conceito de linha reta no espaço plano e representa a trajetória de menor distância entre dois pontos.

A equação geodésica descreve a trajetória de uma partícula em um espaço-tempo curvo e é dada por

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (2.18)$$

onde,

- $x^\lambda(\tau)$ são as coordenadas da partícula no espaço-tempo em função do parâmetro afim τ , que é uma medida do tempo próprio ao longo da trajetória da partícula.
- $\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie, que representam a conexão covariante associada à métrica do espaço-tempo. Eles são dados por:

$$\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (\partial_\rho g_{\sigma\tau} + \partial_\sigma g_{\tau\rho} - \partial_\tau g_{\rho\sigma}). \quad (2.19)$$

- $dx^\lambda/d\tau$ é a derivada primeira das coordenadas da partícula em relação ao parâmetro afim τ , representando a velocidade da partícula no espaço-tempo.
- $d^2x^\lambda/d\tau^2$ é a derivada segunda das coordenadas da partícula em relação ao parâmetro afim τ , representando a aceleração da partícula.

2.2.5. - Tensor de Riemann ($R_{\rho\sigma\mu\nu}$)

O Tensor de Riemann é um tensor fundamental na teoria da relatividade geral e descreve a curvatura intrínseca do espaço-tempo. Ele é definido em termos dos símbolos de Christoffel ($\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}$) como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}. \quad (2.20)$$

Como vimos acima, os coeficientes Gama são obtidos a partir da métrica e suas derivadas.

2.2.6. - Tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$)

O Tensor de Ricci é obtido através da contração do Tensor de Riemann, somando sobre o primeiro e o terceiro índices:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\rho\mu}. \quad (2.21)$$

O Tensor de Ricci representa uma parte importante da curvatura do espaço-tempo na teoria da relatividade geral. Ele descreve como a curvatura do espaço-tempo é influenciada pela distribuição de massa e energia.

2.2.7. - Geometria do espaço-tempo

Na relatividade geral, o espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável equipada com uma métrica $g_{\mu\nu}$, que especifica a geometria local do espaço-tempo em cada ponto. A curvatura do espaço-tempo é descrita pelo tensor de curvatura Riemann. Basicamente, o que queremos dizer com essas palavras é que os eventos no espaço-tempo

admitem um sistema de coordenadas e podemos medir distância entre tais eventos utilizando o tensor métrico.

2.2.8. - Ação de Einstein-Hilbert

Para encontrar a equação de campo de Einstein, variamos a ação S com relação à métrica $g_{\mu\nu}$. A variação da ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (2.22)$$

onde,

- $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que é uma combinação das segundas derivadas da métrica.
- R é o escalar de curvatura.
- $\delta g^{\mu\nu}$ é a variação infinitesimal na métrica $g_{\mu\nu}$.
- G é a constante gravitacional.
- g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.
- $d^4 x$ é o elemento de volume no espaço-tempo.

O escalar de curvatura R é calculado a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas, representando a curvatura do espaço-tempo.

2.2.9. - Aplicando o Princípio da Ação Estacionária para obter a Equação de Einstein

Para obter a equação de campo de Einstein, exigimos que a variação da ação seja nula ($\delta S = 0$) para todas as variações infinitesimais permitidas da métrica $g_{\mu\nu}$. Isso corresponde impor o princípio da ação estacionária (ou princípio de Hamilton) à ação de Einstein-Hilbert.

Igualando a variação da ação a zero ($\delta S = 0$), obtemos

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} = \frac{8 \pi G}{C^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

$$\text{Assim,} \quad G_{\mu\nu} = \frac{8 \pi G}{C^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

onde,

- $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, representando a distribuição de massa, energia e pressão no espaço-tempo.

Segundo Weinberg (1971), eventualmente encontram-se equações da relatividade Geral com o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ adicionado à mão por Einstein por questões cosmológicas.

Ao variar a ação S com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, obtém-se a equação de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

onde,

- $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, representando a curvatura do espaço-tempo.

- Λ é a constante cosmológica.

Na geometria Riemanniana, a gravidade é incorporada na estrutura espaço-tempo e a métrica passa a desempenhar o papel de potencial gravitacional e determina a geometria do espaço-tempo.

Nossa apresentação mostra então que a equação de Einstein da Relatividade Geral é uma equação diferencial de segunda ordem e não-linear para a própria métrica. Em outras palavras, ao inserirmos o tensor de energia-momento, o espaço-tempo será descrito por g , que é obtido ao resolvermos tal equação. Assim, parafraseando John Wheeler, a Relatividade Geral pode ser descrita a partir da seguinte dicotomia: “o espaço-tempo diz à matéria como se mover (equação da geodésica) e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar (equação de Einstein)”.

3 - REFERENCIAL METODOLÓGICO

3.1 - Atividades investigativas

Passamos a partir desse momento a descrever o referencial metodológico que será utilizado neste trabalho o qual se propõe a utilizar ferramentas capazes de promover um avanço significativo na construção do conhecimento científico, possibilitando aos estudantes uma maior assimilação das concepções apresentadas e desenvolverem um pensamento analítico e crítico.

De maneira incisiva, Chalmers (1993) aponta que os laboratórios oferecem oportunidades significativas para que os estudantes testem suas próprias hipóteses relacionadas a fenômenos específicos, planejem suas ações e as executem de maneira a produzir resultados confiáveis. Para alcançar eficácia nesse processo, é imperativo que se programem atividades de explicitação dessas hipóteses antes da realização das ações práticas. Além disso, é fundamental que os educadores destaquem as distinções entre os experimentos conduzidos no laboratório escolar, com objetivos pedagógicos, e a pesquisa empírica realizada por cientistas.

Uma análise mais aprofundada da interação entre observação, experimentação e teoria pode ser observada na Teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991) que envolve a epistemologia da ciência, a teoria cognitiva da ciência, a didática do ensino e teorias sociais para se entender, criar regras e estudar os mecanismos que regem o processo de transformação do conhecimento produzido nas esferas de pesquisa, para o campo acadêmico, deste para os livros didáticos e deste para a sala de aula do ensino básico.

Em contraste, Borges (2002) discorre que, no contexto do ensino, em uma investigação de natureza aberta, a responsabilidade recai inteiramente sobre o aluno ou pesquisador, englobando desde a identificação e formulação do problema de pesquisa, tornando-o adequado para investigação, até o planejamento minucioso das etapas de pesquisa, a seleção dos métodos e procedimentos apropriados, a escolha de equipamentos e materiais relevantes, a preparação da configuração experimental, a condução das medições e observações necessárias, o registro sistemático dos dados em tabelas e gráficos, a interpretação dos resultados e a elaboração das conclusões.

A Tabela 01 representa as atividades investigativas e o laboratório tradicional, contrastando-os segundo três aspectos: o grau de abertura, o objetivo da atividade e a atitude do estudante em relação à atividade.

Tabela 01 - Contínuo problema-exercício.

Aspectos	Laboratório Tradicional	Atividades Investigativas
<i>Quanto ao grau de Abertura</i>	Roteiro pré-definido ← Restrito grau de abertura	Variado grau de abertura → Liberdade total no planejamento
<i>Objetivo da</i>	Comprovar leis	Explorar fenômenos
<i>Atitude do estudante</i>	Compromisso com o resultado	Responsabilidade na investigação

Fonte: Borges (2002)

Tamir (1991) descreve uma outra forma de entender essa distinção entre problema fechado e aberto baseada em estudos anteriores, onde ele propõe a categorização das atividades investigativas em quatro níveis, de acordo com a Figura 02 mostrada por Borges (2002).

Tabela 02 - Níveis de investigação no laboratório de ciências.

Nível de Investigação	Problemas	Procedimentos	Conclusões
Nível 0	Dados	Dados	Dados
Nível 1	Dados	Dados	Em aberto
Nível 2	Dados	Em aberto	Em aberto
Nível 3	Em aberto	Em aberto	Em aberto

Fonte: Borges (2002).

Contudo, Prado (2003, p. 7) orienta que nessa situação de aprendizagem, o aluno precisa selecionar a elaboração de projetos, informações significativas, tomar decisões, trabalhar em grupo, gerenciar confronto de ideias, enfim, desenvolver competências interpessoais para aprender de forma colaborativa com seus pares.

De acordo com Sasseron (2015), no contexto do ensino por investigação, é fundamental ressaltar que, ao longo de toda a atividade investigativa, ocorre uma constante interação entre o professor e os alunos. Os conhecimentos prévios dos estudantes e suas ações incrementais ao longo da execução das atividades desempenham um papel significativo e devem ser devidamente apreciados. Esse reconhecimento é essencial para que os alunos possam cultivar um senso de segurança e confiança ao abordar a resolução dos desafios propostos.

Para Carvalho (2018), a concretização do ensino de ciências por investigação passa, pela formação do professor, pois é um método educacional no qual o docente estabelece um ambiente na sala de aula que permite aos alunos engajarem-se em atividades nas quais eles são incentivados a pensar de maneira crítica, considerando a estrutura do conhecimento, comunicar suas ideias verbalmente, evidenciando seus argumentos e os conhecimentos que adquiriram, ler de forma crítica, compreendendo o conteúdo com discernimento e escrever de modo a demonstrar autoria e clareza nas ideias expressas.

A experimentação no âmbito educacional encontra-se respaldada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018, como destacado na página 321, tanto no segmento do ensino fundamental nos anos finais quanto no ensino médio. Cabe à área de Ciências da Natureza garantir que os estudantes tenham acesso a uma variedade de conhecimentos científicos, bem como aos principais processos, práticas e procedimentos da pesquisa científica.

A BNCC (2018, p.322) deixa claro que a abordagem da experimentação no ensino não implica necessariamente a adesão a um conjunto predefinido de etapas. Pelo contrário, enfatiza a importância de iniciar a partir de questões desafiadoras que conduzam a uma abordagem investigativa na resolução de problemas. Isso implica que as atividades não se restrinjam a seguir um conjunto fixo de etapas ou limitar-se à mera manipulação de objetos em um ambiente de laboratório. Em vez disso, a BNCC encoraja a organização das situações de aprendizado a partir de perguntas instigantes que reconheçam a diversidade cultural e estimulem o interesse e a curiosidade científica dos alunos. Essas abordagens devem permitir a identificação de problemas, a coleta, análise e representação de dados, a comunicação de conclusões e a proposição de intervenções no contexto do ensino de ciências.

Para Taha (2016) o docente assume o papel de coordenador da experimentação, ao introduzir debates e oportunidades de reflexão, configurando-se, dessa forma, como um meio eficaz para promover um ensino ativo, contextualizado e de relevância. Cabe ao professor a responsabilidade de selecionar o tipo mais apropriado de experimentação, considerando a sua metodologia de ensino e o contexto específico em que atua. A experimentação pode ser categorizada em quatro modalidades distintas: Experimentação Show, Experimentação Ilustrativa, Experimentação Problematizadora e Experimentação Investigativa.

Borges (2002) ressalta que cada modalidade de experimentação possui um propósito específico e pode ser adaptada de acordo com variáveis como o ambiente, o tempo disponível e o contexto escolar. No entanto, todas elas compartilham o objetivo comum de promover uma abordagem educacional mais interativa em contraste com o modelo tradicional de ensino. Os objetivos de uma atividade prática podem incluir a verificação de uma lei científica, a ilustração de conceitos previamente aprendidos em aulas teóricas, a descoberta ou formulação de uma lei relacionada a um fenômeno específico, a aplicação prática dos princípios teóricos ou a aquisição de habilidades no uso de instrumentos ou técnicas de laboratório.

Para Carvalho (2018), tanto a Experimentação Problematizadora quanto a Experimentação Investigativa desempenham um papel na promoção da aprendizagem por descoberta, tornando o aluno menos passivo durante as aulas. Ambas as abordagens, a Experimentação Problematizadora e a Experimentação Investigativa, constituem meios de envolver ativamente a experiência dos alunos em sala de aula e estão intrinsecamente relacionadas ao ensino por investigação. O ensino por investigação ocorre quando o professor estabelece as condições necessárias na sala de aula para que os alunos possam refletir sobre um problema com liberdade intelectual, levantar e testar suas hipóteses na busca pela solução do problema. Isso culmina na construção do desenvolvimento conceitual por parte dos estudantes.

Na abordagem da Experimentação Problematizadora, segundo Hartwing (2008), o professor atua como um participante ativo do processo educacional, colaborando com os alunos na resolução do problema sem fornecer respostas prontas, mas estimulando a reflexão. A problematização deve ser baseada em situações da vida real. Em seguida, é necessário organizar os conhecimentos necessários para abordar e solucionar o problema, buscando informações em diversas fontes, tais como questionários, vídeos, atividades e textos. A etapa final desse processo envolve a análise da situação-problema e a capacidade de generalizar o aprendizado adquirido para resolver outros problemas que possam ser abordados utilizando o conhecimento adquirido.

Para Taha (2016), a Experimentação Investigativa apresenta semelhanças substanciais com a Experimentação Problematizadora e está intrinsecamente relacionada ao ensino baseado na investigação. Essa modalidade de atividade demanda que o aluno formule e experimente suas próprias hipóteses para resolver um problema em aberto. O estudante pode projetar um experimento para testar suas hipóteses ou investigar um experimento já existente. O desenvolvimento do conteúdo conceitual

ocorre no decorrer das discussões relacionadas ao problema em questão, e o papel do professor assume a função de mediador, concedendo liberdade aos alunos na formulação de suas hipóteses.

Segundo Garret (1988), um problema representa um desafio apresentado ao aluno e pode ser expresso em variados graus de complexidade, abrangendo desde problemas inteiramente definidos e estruturados (fechados) até problemas que se encontram em estado aberto e carecem de definições precisas.

Como relata Borges (2002), ao criar um problema, os procedimentos e recursos são normalmente fornecidos pelo professor, pelo livro didático ou por um roteiro, incumbindo ao aluno a responsabilidade de coletar dados e chegar a conclusões. Em contrapartida, em uma investigação de natureza aberta, o estudante assume a total responsabilidade pela resolução do problema, abrangendo desde a identificação e formulação do problema, tornando-o passível de investigação; o planejamento das etapas de investigação; a seleção de métodos, a escolha de equipamentos e materiais, a configuração da montagem experimental, a condução de medições e observações necessárias; o registro dos dados em tabelas e gráficos; a interpretação dos resultados e a apresentação das conclusões obtidas.

No estudo de Borges (2002), foram realizadas pesquisas procurando compreender as dificuldades que os estudantes, com e sem experiência pessoal com trabalhos práticos escolares, enfrentam ao formular um problema a partir de uma situação proposta a eles, em planejar a sua solução e executar o seu planejamento. O aprendizado a partir disso sugere que uma atividade aberta pode ser muito difícil para estudantes sem conhecimento de conteúdo e sem experiência anterior com laboratório. No entanto ficou evidente que os estudantes, mesmo sem conhecimento específico sofisticado e experiência com aulas de laboratório, conseguem formular problemas mais simples e planejar a sua solução em laboratório.

Na perspectiva de incluir atividades experimentais no produto educacional proposto, Carvalho (2010) se apoia em distintos graus de liberdade. Ela registra, a partir dos estudos de Pella (1969), os possíveis graus de liberdade que podem ser assumidos em aulas experimentais na escola. As tabelas 03 e 04, que representam essas atividades, foram elaboradas a partir da discussão feita por Paiva (2015) em sua tese de doutorado.

A Tabela 03 sintetiza os aspectos centrais deste trabalho, em relação ao envolvimento do professor (P) e do aluno (A) na elaboração de problemas, hipóteses, plano de trabalho, obtenção de dados e conclusões. Nesse sentido, visualizamos que os graus destacados podem servir a nós, professores, como orientadores quando planejamos e construímos uma atividade experimental no contexto escolar.

Tabela 03 - Graus de liberdade de professor (P) e alunos (A) em atividades experimentais.

	Grau 1	Grau 2	Grau 3	Grau 4	Grau 5
Problema	P	P	P	P	A
Hipóteses	P	P/A	P/A	A	A
Plano de trabalho	P	P/A	A/P	A	A
Obtenção de dados	A	A	A	A	A
Conclusões	P	A/P/Classe	A/P/Classe	A/P/Classe	A/P/Classe

Fonte: Paiva, (2015).

Além da atividade de laboratório, analisamos duas outras atividades didáticas importantes no ensino das Ciências: a *resolução de problemas de lápis e papel* e a aula na qual se *introduz textos de História das Ciências* para os alunos lerem e analisarem.

Tabela 04 - Graus de liberdade de professor (P) e alunos (A) em aulas de resolução de problemas

	Grau 1	Grau 2	Grau 3	Grau 4	Grau 5
Problema	P	P	P	P	A
Hipóteses	P	P/A	P/A	A	A
Resolução do problema	A	P/A	A/P	A	A
Análise dos resultados	(quando existe) P	P/A/ Classe	P/A/ Classe	P/A/ Classe	P/A/ Classe

Fonte: Paiva, (2015).

3.2 - Metodologia POE (*Predizer - Observar - Explicar*)

A implementação de atividades investigativas pode ser desenvolvida de maneiras distintas, sendo uma delas utilizando a Metodologia POE que será foco desta dissertação.

White e Gunstone (1992) conceberam a metodologia conhecida com POE, com o propósito de avaliação, visando fomentar um processo investigativo de ensino e aprendizagem. Esse processo se baseia na utilização de um possível aparato experimental, na formulação de perguntas criteriosamente elaboradas e, acima de tudo, na execução de três fases bem definidas, a saber: prever, observar e explicar. Dessa maneira, a abordagem vai além da

tradicional exposição de conteúdo pelo professor, incentivando os alunos a desenvolver a interatividade, o pensamento crítico e a habilidade de expressar suas ideias de forma autônoma e clara. Além disso, ela promove a revisão e consolidação de conceitos pré-existentes.

Para Sasaki e Jesus (2016), a metodologia POE requer, de modo essencial, a apresentação de um experimento qualitativo, vídeo ou simulação por parte do professor durante as aulas. Nessa abordagem, a primeira etapa consiste na previsão, na qual os alunos são solicitados a formular suas previsões a respeito de um evento específico, fundamentando-as com base em seu conhecimento prévio. Subsequentemente, na segunda etapa, denominada observação, os alunos devem realizar ou observar o evento em questão, sendo incentivados a comparar suas previsões iniciais com os resultados observados. Por fim, na terceira etapa, chamada explicação, os estudantes são desafiados a explicar quaisquer diferenças que possam existir entre suas previsões iniciais e os resultados observados. Dessa forma, a aplicação da metodologia POE visa gerar discrepâncias entre as previsões dos alunos e os resultados observados durante o evento, incentivando assim a reflexão e o desenvolvimento de habilidades críticas.

Cabe ressaltar aqui que a aplicação da metodologia POE para o ensino do Princípio da Equivalência tem o intuito de estimular os estudantes a expor seus conhecimentos prévios e através disso incentivar a participação dos mesmos por meio das observações, debates e diálogos em sala de aula, promovendo a organização de ideias e proporcionando o estabelecimento de um elo com o conhecimento científico.

4 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1- Descrição do Produto Educacional:

O produto educacional foi gerado a partir de uma sequência de ensino por investigação com base na metodologia POE e para sua execução foram realizados dois experimentos de forma a reproduzir os efeitos ocorridos no Princípio da Equivalência de Albert Einstein.

Para aplicação do produto educacional foram necessárias quatro aulas presenciais de 50 minutos cada já inseridas no cronograma oficial do curso.

Os experimentos foram executados em sala de aula com materiais de baixo custo conforme propostas descritas nesse contexto.

A primeira reproduziu o experimento mental denominado elevador de Einstein. Esse conceito é uma construção mental de significância, conforme delineado por Albert Einstein segundo Brennan (1998), que desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral.

Para simular essa situação realizou-se o experimento da garrafa PET contendo água que jorra abundantemente na posição de repouso após ser perfurada. Na sequência, a mesma foi deixada cair em queda livre. Efeito semelhante ao experimento mental de Einstein foi ser observado.

Na segunda, uma caixa plástica transparente contendo um pote plástico também transparente cheio de água foi girada em 360 graus, sem derramar uma gota sequer, demonstrando como se dá a interação de forças em trajetórias curvilíneas.

O nível de investigação segundo a classificação de Borges (2002) foi o nível 1, pois os problemas e os procedimentos foram dados e somente as conclusões elaboradas pelos estudantes. Isso se justifica devido ao pouco conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema abordado e também pela pouca profundidade na aplicação do produto devido a escassez de tempo por se tratar de um curso preparatório para o ENEM.

Para melhor compreensão foi elaborado um manual de aplicação do produto educacional experimental, o qual encontra-se no Apêndice A.

4.2- A aplicação do Produto Educacional:

Foi aplicado em uma turma de estudantes de curso preparatório para o ENEM na cidade de Juiz de Fora no período de duas aulas seguidas de cinquenta minutos cada uma, com a presença de 22 alunos.

Para aplicação do produto educacional foram necessários dois encontros semanais presenciais que aconteceram em duas quintas-feiras à noite, nos dias 17/08/2023 e 24/08/2023. Cada encontro correspondeu a duas aulas consecutivas de 50 minutos cada totalizando quatro aulas dentro do cronograma oficial do curso.

A Tabela 03 sugere a distribuição das atividades que serão realizadas no ambiente de sala de aula.

Tabela 05: Distribuição das aulas com cronograma

Cronograma de Aplicação		
Aula	Sequência Didática	Duração/data
1	Exposição dialogada sobre gravidade	50 minutos / 17-08-23
2	Exposição dialogada a Teoria da Relatividade Geral	50 minutos / 17-08-23
3	Aplicação da SEI/POE com a realização do Experimento 1	50 minutos / 24-08-23
4	Aplicação da SEI/POE com realização do Experimento 2	50 minutos / 24-08-23

Na aula 1 foi introduzida uma breve discussão sobre as teorias da gravidade, destacando-se o espaço absoluto de Newton e o espaço-tempo curvo de Einstein. Na aula 2 abordou-se sobre a Relatividade Geral com enfoque na distorção do espaço-tempo, a gravidade como consequência da curvatura e a equivalência entre referenciais acelerados e sob a ação da gravidade. Na aula 3 foi realizado o primeiro experimento utilizando uma garrafa furada contendo água, caindo em queda livre e na aula 4 foi realizado o segundo experimento girando uma caixa plástica em 360° contendo um pote com água em seu interior.

AULA 1:

Para melhor situar os estudantes dentro do contexto em estudo, foi preparada uma exposição dialogada abordando alguns tópicos relevantes acerca do conteúdo gravidade. Essa atividade foi desenvolvida na primeira aula do capítulo de Física Moderna de acordo com o plano de aula desenvolvido para o curso Pré-ENEM. Procurou-se destacar o espaço absoluto de Newton e o espaço-tempo curvo de Einstein.

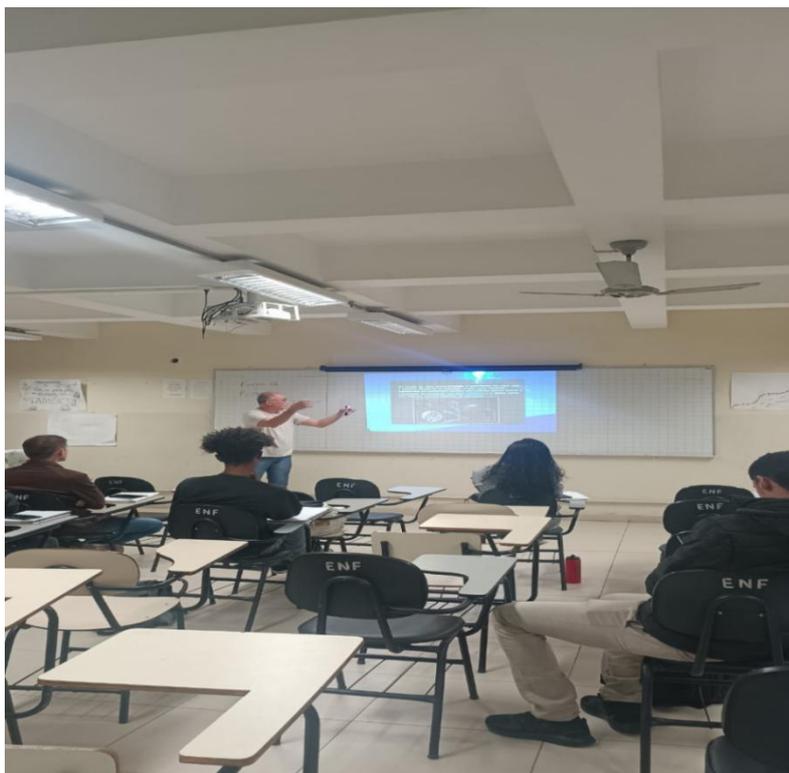
Conforme destaca Porto (2008), é importante fazer o contraponto entre o pensamento filosófico e o ponto de vista cosmológico. Dessa forma, de acordo com a cronologia dos fatos históricos e acontecimentos da antiguidade, destacamos o pensamento de Aristóteles que pensava que os objetos mais pesados aceleravam em direção ao chão mais rápido. No entanto, experimentos posteriores mostraram que este não era o caso, mas sim por causa da resistência do ar, que atua na direção oposta à da força devido à gravidade.

De acordo com Lomar (2014) do ponto de vista cosmológico, a gravidade faz com que a matéria dispersa se aglutine, e que essa matéria aglutinada se mantenha intacta, permitindo dessa forma a existência de planetas, estrelas, galáxias e a maior parte dos objetos macroscópicos no universo. A gravidade é ainda responsável por manter a Terra e os demais planetas e satélites nas respectivas órbitas, pela formação das marés pela convenção natural, por aquecer o interior de estrelas e planetas em formação e por vários outros fenômenos na Terra e no universo.

Segundo descreve Gomes (2022), Newton defendia a tese de que o espaço é uma entidade distinta dos corpos. Disso decorre que mesmo se, por algum motivo, todos os corpos viessem a deixar de existir, ainda assim restaria algo que chamaríamos de espaço. Em outras palavras, o espaço absoluto é uma entidade não afetada pelos corpos nele contidos. Newton faz uma distinção entre espaço absoluto e espaço relativo. Este último nada mais é do que alguma forma pela qual medimos o espaço absoluto em relação a um conjunto de corpos. Espaço absoluto, de sua própria natureza sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre homogêneo e imóvel. Espaço relativo é qualquer medida móvel ou dimensão deste espaço absoluto.

Para Brenann (1998), o espaço-tempo é curvado pela presença de massas grandes como o Sol. Essa curvatura é o campo gravitacional. Um planeta, como a Terra, que se move em torno do Sol desloca-se numa órbita elíptica não porque é “puxado” pelo Sol, mas porque o campo (a depressão criada no espaço pela massa do Sol) é tal que, uma elipse, é o caminho mais curto possível que ele pode tomar no espaço-tempo.

Figura 05 - Exposição dialogada sobre Gravidade

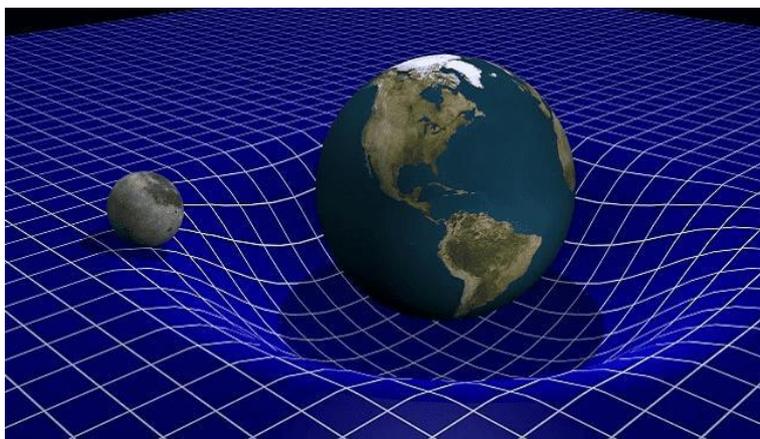


AULA 2:

Iniciou-se uma breve explanação sobre a teoria da Relatividade Geral, destacando que a presença de matéria “distorce” o ambiente de espaço-tempo local, fazendo com que linhas aparentemente “retas” no espaço e no tempo tenham características que são normalmente associadas a linhas “curvas”.

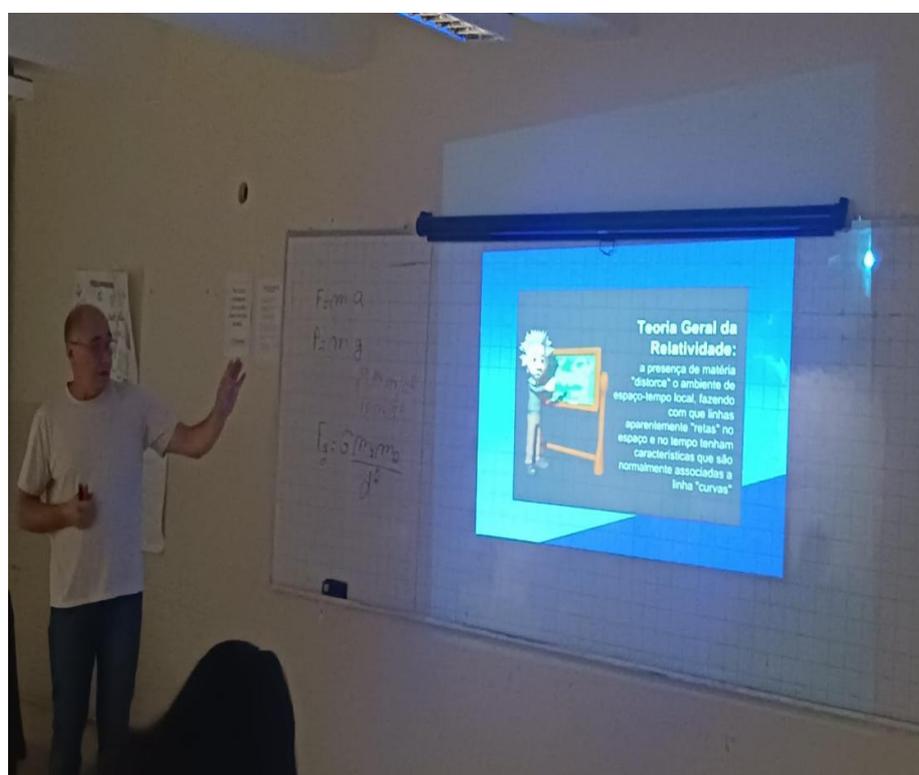
A figura a seguir ilustra uma analogia e não a descrição exata do formalismo matemático.

Figura 06 - Deformação do espaço-tempo.



Assim, foi apresentado aos estudantes o pensamento de Albert Einstein de que a gravidade não é uma força, mas sim uma consequência da curvatura do espaço-tempo que regula o movimento dos objetos inertes, ou seja, a força da gravidade é provocada pela própria estrutura geométrica do espaço-tempo. E nesse contexto, os estudantes tomaram conhecimento de que um referencial acelerado, com aceleração “a” é equivalente a um referencial submetido a um campo gravitacional com intensidade “g”. Por “equivalente” queremos dizer que é impossível diferenciar “a” de “g” para observadores em referenciais submetidos às respectivas acelerações “a” e “g”.

Figura 07 - Exposição dialogada sobre Teoria da Relatividade Geral



AULA 3:

Foi iniciada a aplicação de uma sequência de ensino por investigação utilizando-se a metodologia POE a partir de um experimento com materiais de baixo custo reproduzido no ambiente da sala de aula.

Para o desenvolvimento dessa atividade foram necessárias três garrafas PET transparentes de tamanho médio, perfuradas lateralmente na parte inferior para que possa vaziar a água que será inserida no interior das mesmas.

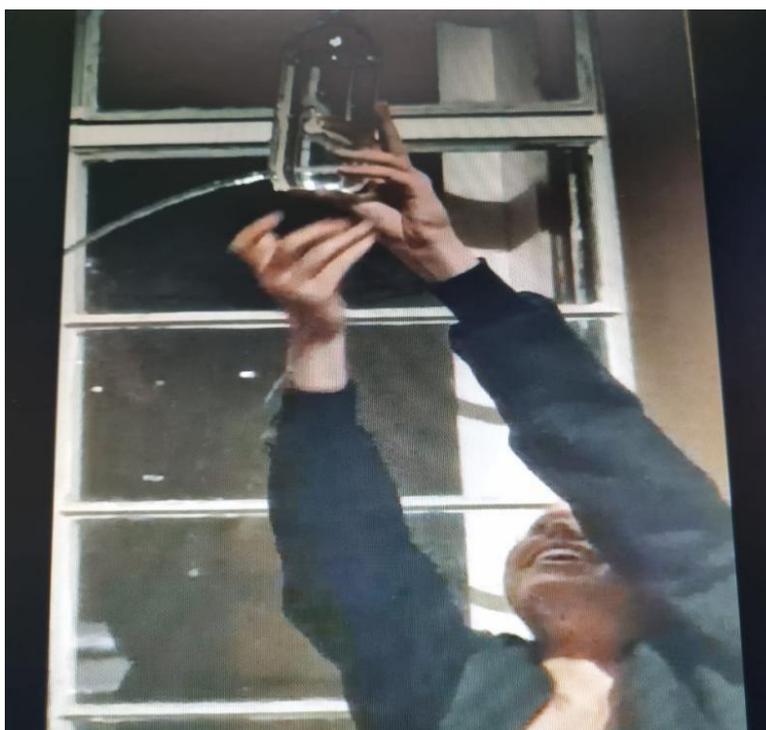
Didaticamente essa sequência foi dividida em três momentos como forma de caracterizar as etapas da metodologia POE conforme o que se segue:

Primeiro momento: Os estudantes foram divididos em três grupos e a cada grupo foi distribuída uma garrafa PET com a perfuração mencionada anteriormente. Foi solicitado que cada grupo enchesse a garrafa com água vedando a mesma com a tampa e tapando o furo com o dedo para a água não vazar. A seguir cada grupo se posicionou com a garrafa elevada pelos braços, abrindo a tampa da mesma e retirando o dedo do orifício. Verificaram que a água da garrafa vazava continuamente. Nesse momento foi solicitado que fizessem uma previsão do fato subsequente respondendo à seguinte pergunta: O que acontecerá com a água da garrafa se a mesma for deixada cair em queda livre? As respostas obtidas foram registradas em um roteiro distribuído previamente.

Segundo momento: Imediatamente após o registro das previsões foi solicitado aos estudantes que promovessem a execução do experimento, deixando a garrafa cheia de água cair em queda livre. Essa fase é puramente reflexiva pois confronta as previsões realizadas anteriormente com a realidade dos fatos. A observação é a tônica desse momento conforme preconizado na metodologia POE.

A Figura 05 mostra a execução da etapa de observação.

Figura 08 - Experimento 1 - garrafa furada com água



Terceiro momento: O passo seguinte concentrou-se em promover entre os estudantes uma discussão sobre os conflitos cognitivos surgidos durante o processo. Finalmente foi solicitado aos mesmos a elaboração de uma explicação razoável que justifique os resultados alcançados e da mesma forma o registro em relatório.

AULA 4:

Dando continuidade à sequência de ensino por investigação utilizando-se a metodologia POE também com materiais de baixo custo foi reproduzido outro experimento em ambiente da sala de aula.

Os materiais utilizados foram 01 caixa de plástico transparente medindo 26 cm x 36 cm x 20 cm, um pote de plástico transparente com capacidade para 250 ml e 4 metros de corda de material diverso com 05 mm de diâmetro.

Os detalhes da montagem podem ser vistos na Figura 06.

Figura 09 - Experimento 2 - caixa com pote de água



Essa sequência também foi dividida em três momentos seguindo a metodologia POE da seguinte forma:

Primeiro momento: O experimento dessa vez foi executado para todos os estudantes reunidos em apenas um grupo no interior da sala de aula e foi confeccionado a partir de uma caixa de plástico transparente sustentada por quatro hastes de cordas afixadas em suas extremidades e unidas através de um único nó (veja a Figura 04). A caixa de plástico continha em seu interior um pote também transparente cheio de água ao fundo e ao centro. Com o experimento prestes a ser iniciado foi solicitado aos estudantes que fizessem uma previsão do fato subsequente respondendo à seguinte pergunta: O que irá acontecer com a água no pote quando a caixa for girada num círculo vertical completo? As respostas obtidas foram também registradas em um roteiro distribuído previamente.

Segundo momento: Após o registro escrito das previsões o experimento foi executado conforme planejado. Novamente os estudantes iniciaram a fase de observação conforme preconizado na metodologia POE.

Terceiro momento: Após observar atentamente a execução do experimento é chegado o momento de refletir sobre os conflitos cognitivos originados durante o processo. Ao término dessa fase novamente foi solicitado aos estudantes a elaboração de uma explicação razoável que justifique os resultados alcançados e da mesma forma o registro em relatório.

Foi surpreendente o engajamento dos estudantes durante as atividades na etapa da observação. Eles ficaram trocando ideias e tentando imaginar de fato o que estava por acontecer. Alguns deles se anteveram e arriscaram palpites sobre o resultado. O comportamento dos estudantes foi de muita atenção ao que estava sendo apresentado e a grande maioria estava focada no aprendizado.

5 - ANÁLISE E REFLEXÕES

Inicialmente ressalta-se que pelo fato do Produto Educacional ter sido aplicado em uma turma de estudantes de curso preparatório para o ENEM , o tempo foi insuficiente para o desenvolvimento das atividades propostas.

Analisando qualitativamente o resultado dos registros produzidos pelos estudantes a conclusão imediata percebida é que houve uma grande divergência de entendimento entre eles, sendo que dos 22 alunos presentes, 11 deles opinaram que no experimento 1 a água não iria vaziar da garrafa, enquanto 10 estudantes acreditaram que a água vazaria da garrafa em taxa lenta. Nesse experimento, 01 estudante entregou o roteiro de registros em branco.

Ao justificarem o evento gerado a partir do Experimento 1, a grande maioria, em torno de 11 estudantes entendeu que o não vazamento da água da garrafa caindo em queda livre se deve em consequência da gravidade, enquanto 06 estudantes justificaram que poderia ser devido à pressão atmosférica e outros 04 estudantes relataram que foi devido à ação da gravidade, mas também relacionado à Pressão atmosférica. Como mencionado anteriormente, 01 estudante entregou o roteiro de registros em branco.

Em relação ao Experimento 2 os estudantes foram unânimes em afirmar que a água permaneceria no pote. O resultado, alcançado, não necessariamente reflete com precisão o pensamento genuíno de cada estudante, dado que pode ter sido influenciado pelo experimento anterior. Mas por outro lado, poderíamos pensar que o Experimento 1 imprimiu um aprendizado capaz de fornecer aos estudantes o conhecimento necessário para a elucidação do Experimento 2. Diante disso, seria mais instrutivo apresentar ambos os experimentos simultaneamente e posteriormente realizado suas execuções em um segundo momento.

Analisando agora as explicações produzidas pelos estudantes sobre o Experimento 2, podemos verificar que as respostas divergiram bastante. Apenas 01 estudante mencionou em sua justificativa que o acontecimento foi devido à gravidade, enquanto outro atribuiu ao fato de que a gravidade não atuou sobre a água. Entretanto 09 estudantes mencionaram ser devido à gravidade associada à força centrípeta e ainda 03 deles disseram estar relacionado com a pressão e a força centrípeta. Tivemos ainda 05 estudantes que registraram em suas respostas atribuindo à pressão atmosférica e um outro relacionou pressão e força constante. No total de 22 estudantes presentes na aula, 02 precisaram se ausentar e não responderam ao roteiro de registros e outro entregou o relatório em branco.

Vejam na sequência alguns registros coletados dos estudantes :

v
ATIVIDADE I:

1) De posse de uma garrafa furada cheia de água ao elevá-la a uma certa altura, tapando o furo para não vazar e em seguida tirando o dedo do orifício, veremos que a água irá vazar. O que você prevê que acontecerá com a água se deixar a garrafa cair?

- a) A água vazará na mesma taxa de vazão verificada quando a garrafa estava parada.
- b) A água vazará numa taxa mais lenta que a verificada quando a garrafa estava parada.
- c) A água vazará numa taxa mais rápida que a verificada quando a garrafa estava parada.
- d) A água permanecerá na garrafa.

Justifique sua resposta:

→ No início a garrafa se encontra parada (fixa). Após a queda livre a gravidade e a inércia fazem com que caia simultaneamente, logo não haverá desprendimento de água.

2) Agora observe com bastante atenção a garrafa com água caindo em queda livre e tire suas próprias conclusões. Se possível registre esse momento em vídeo e de preferência no modo slow motion para melhor visualização dos detalhes do experimento.

3) Faça um breve relato com as explicações sobre as discrepâncias e concordâncias entre suas previsões e os resultados por você observado.

No período inicial a garrafa se encontra fixa na mão. Ao abrir a água que se encontrava tampada com o dedo, houve a vazão da água já que a mesma sofreu a ação da gravidade. Ao soltar a garrafa em queda livre, ambas sofrem a mesma gravidade, deste modo atuam da mesma forma fazendo com que no período da queda não haja vazamento de água.

ATIVIDADE I:

1) De posse de uma garrafa furada cheia de água ao elevá-la a uma certa altura, tapando o furo para não vazar e em seguida tirando o dedo do orifício, veremos que a água irá vazar. O que você prevê que acontecerá com a água se deixar a garrafa cair?

a) A água vazará na mesma taxa de vazão verificada quando a garrafa estava parada.

b) A água vazará numa taxa mais lenta que a verificada quando a garrafa estava parada.

c) A água vazará numa taxa mais rápida que a verificada quando a garrafa estava parada.

d) A água permanecerá na garrafa.

Justifique sua resposta:

Porque a garrafa e a água estão em movimento e com isso causando uma certa pressão. Sendo assim, vai descer com uma taxa mais lenta do que quando a garrafa está na parada.

2) Agora observe com bastante atenção a garrafa com água caindo em queda livre e tire suas próprias conclusões. Se possível registre esse momento em vídeo e de preferência no modo slow motion para melhor visualização dos detalhes do experimento.

3) Faça um breve relato com as explicações sobre as discrepâncias e concordâncias entre suas previsões e os resultados por você observado.

No observar o experimento, pode-se concluir que ao soltar a garrafa, o líquido contido dentro do recipiente não sai, ele permanecerá dentro da garrafa. Diferente do que eu imaginei, para eu achar que ao descer a garrafa o líquido iria derramar.

ATIVIDADE II:

1) Temos agora uma caixa de plástico transparente sustentada por cordas para que possa ser girada em movimento circular, contendo um pote também transparente cheio de água no centro e ao fundo da mesma. O que você prevê que acontecerá com a água do pote quando a caixa for girada num círculo vertical completo?

- a) Ela irá vazar do pote quando este estiver de ponta-cabeça.
- b) Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para cima.
- c) Ela irá permanecer no pote, o qual irá permanecer na caixa de plástico.
- d) Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para baixo.

Justifique sua resposta:

Devido a pressão do movimento em movimento circular uniforme faz com que o pote e a água não saiam (vazem) fora.

2) Agora observe com bastante atenção a caixa de plástico com o pote de água girando em movimento circular e tire suas próprias conclusões. Se possível registre esse momento em vídeo e de preferência no modo slow motion para melhor visualização dos detalhes do experimento.

3) Faça um breve relato com as explicações sobre as discrepâncias e concordâncias entre suas previsões e os resultados por você observado.

De acordo com o experimento com a pressão empurra no movimento o pote com água não saiu e não vazou como eu já tinha imaginado pois foi uma pressão maior para que não saia a água.

ATIVIDADE II:

1) Temos agora uma caixa de plástico transparente sustentada por cordas para que possa ser girada em movimento circular, contendo um pote também transparente cheio de água no centro e ao fundo da mesma. O que você prevê que acontecerá com a água do pote quando a caixa for girada num círculo vertical completo?

- Ela irá vazar do pote quando este estiver de ponta-cabeça.
- Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para cima.
- Ela irá permanecer no pote, o qual irá permanecer na caixa de plástico.
- Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para baixo.

Justifique sua resposta:

Por A ÁGUA PERMANECERÁ NO POTE E O POTE PERMANECERÁ NA CAIXA PORQUE ELAS SOFRERÃO AÇÃO DE UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME EM CONJUNTO COM A FORÇA GRAVITACIONAL QUE MANTÉM O POTE E A CAIXA NA MESMA INÉRCIA/FORÇA SENTRÍPETA

2) Agora observe com bastante atenção a caixa de plástico com o pote de água girando em movimento circular e tire suas próprias conclusões. Se possível registre esse momento em vídeo e de preferência no modo slow motion para melhor visualização dos detalhes do experimento.

3) Faça um breve relato com as explicações sobre as discrepâncias e concordâncias entre suas previsões e os resultados por você observado.

O CONJUNTO DO MOVIMENTO GIRANDO E DA GRAVIDADE CRIA UMA FORÇA SENTRÍPETA QUE MANTÉM A ÁGUA NO POTE E O POTE NA CAIXA.

6 - CONCLUSÕES

A física é frequentemente percebida pelos estudantes como uma disciplina teórica, abstrata e centrada na aplicação de fórmulas. Nesse contexto, a implementação de metodologias ativas, como o uso de laboratórios didáticos e abordagens de ensino investigativo em todos os níveis educacionais, desempenha um papel crucial na aproximação entre a teoria e a prática experimental. Além de explorar o potencial intrínseco das atividades experimentais e investigativas, tais abordagens contribuem para a harmonização da física com sua definição mais fundamental: a análise dos fenômenos naturais. Embora seja inegável a importância da construção teórica e matemática, as metodologias ativas buscam estabelecer uma conexão entre a teoria e a prática, permitindo que os alunos compreendam o funcionamento e os princípios subjacentes aos fenômenos físicos.

A formulação de uma sequência de ensino por investigação centrada no Princípio da Equivalência e Referenciais não inerciais, empregando a metodologia POE, pode desempenhar um papel significativo na construção do conhecimento científico. Essa abordagem possibilita que os estudantes desenvolvam um pensamento mais analítico, permitindo a assimilação das concepções apresentadas durante a exposição dialogada e sua conexão com os experimentos conduzidos ao longo das aulas.

Mediante a análise das respostas registradas nos roteiros, examinando a interação dos estudantes com os conteúdos abordados, foi observado que a sequência investigativa, apesar das restrições impostas pelo formato adotado, teve impacto positivo na apresentação do que vem a ser o Princípio da Equivalência no âmbito da Teoria da Relatividade Geral, uma vez que diversos episódios foram surgindo por relatos de alguns alunos e discutidos em sala de aula, como por exemplo, a foto que foi tirada recentemente de um buraco negro amplamente difundida pelos noticiários da televisão, a detecção das ondas gravitacionais na Terra oriundas da fusão de dois buracos negros, discussões e críticas sobre Terra plana também bastante badalada tanto nas mídias televisivas como nas redes sociais.

O tempo destinado à aplicação da sequência de ensino por investigação foi insuficiente, mas representou uma contribuição significativa para a melhoria das aulas, oferecendo aos alunos a oportunidade de desenvolverem seu conhecimento de maneira mais orgânica. Esse enfoque permite que os estudantes assumam um papel central na busca por conhecimentos fundamentais para consolidar o conteúdo, tornando-se protagonistas ativos do processo educacional. No entanto, a restrição de tempo enfrentada pelo professor para

abranjer uma extensa lista de conteúdos programáticos nem sempre viabiliza essa abordagem mais prolongada e imersiva.

Não fosse o problema da restrição do tempo, outros exemplos e materiais extras poderiam ter sido apresentados aos estudantes para melhor ilustrar o conteúdo desse trabalho. Contudo algumas sugestões interessantes podem ser indicadas aos professores que desejarem replicar esse produto em suas turmas de estudantes. Uma delas seria indicar aos estudantes que assistam obras de ficção, mas “possivelmente reais” como a nave que se mantém girando para simular a gravidade e coibir os efeitos da não-gravidade no corpo humano no filme “Interestelar”. Outra situação bastante ilustrativa é a estação espacial internacional que funciona com uma cidade inteira e se utiliza do mesmo princípio.

Ainda com o mesmo propósito seria muito produtivo indicar para que assistam à série “**The Expanse**”. Situada 200 anos no futuro, The Expanse narra a história de um tempo em que a humanidade já colonizou o sistema solar. O enredo gira em torno de habitantes da Terra, de Marte e de uma nave (BELT) que fica no espaço e os seus habitantes são maiores, mais fracos e com ossos ocos por conta da gravidade menor no local.

Outra situação que pode ser trabalhada com os estudantes é demonstrar um vídeo produzido pela BBC que mostra o experimento de queda livre com bolas de boliche e penas em uma câmara de vácuo gigante, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>.

A implementação da sequência de ensino por investigação objetivou propiciar a superação das concepções espontâneas e promover uma aprendizagem eficaz, minimizando as concepções empírico-indutivistas. O foco principal era possibilitar a interligação entre conceitos fundamentais e essenciais para a compreensão de fenômenos físicos e também ressaltar a relevância da construção social no contexto educacional. Entretanto, o tema abordado ainda não é de domínio do público alvo deste trabalho e por essa razão, conforme estampado nos resultados colhidos dos roteiros de registros, muitos equívocos foram cometidos pelos estudantes, embora o foco central de atividades investigativas não seja o erro ou acerto, e sim o processo todo.

Destaco aqui que o objetivo geral de apontar uma nova conotação para a gravidade não como força, mas sim como o resultado da distorção do espaço-tempo, foi um tanto controverso para os estudantes.

Quanto aos objetivos específicos, também foi muito complexo para os estudantes compreenderem que o espaço-tempo sofre deformação e por conseguinte que ocorre o desvio na propagação da luz.

O ponto forte do trabalho foi a evidenciação experimental do Princípio da Equivalência desenvolvida em sala de aula. Ao visualizarem a água vazando da garrafa no repouso e posteriormente verificarem que em queda livre o vazamento havia cessado não foi difícil para os estudantes, mas no momento de explicarem o fato, poucos perceberam o que proporcionou tal acontecimento.

Da mesma forma não foi difícil perceber que a água do pote não entornaria quando o mesmo fosse girado num círculo vertical completo. A dificuldade nesse caso foi elaborar uma explicação razoável para justificar os resultados alcançados.

Contudo um fato bastante positivo a ser destacado foi a possibilidade de se desenvolver e estruturar uma sequência de ensino por investigação com base em experimentos simples e de baixo custo.

REFERÊNCIAS

BASSALO, José M. F. Aspectos Históricos das Bases Conceituais das Relatividades. *Revista Brasileira de Ensino da Física*. v.19, nº 2, 1997.

BEN-DOV, Y. (1996). *Convite à Física*. Rio de Janeiro, Editora Zahar.

BORGES, A. T. (2002). Novos rumos para o laboratório escolar de ciências. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 21(Especial), 9–30.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (2018). Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, DF: MEC. Recuperado de: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, p.1-23, 2000.

BRENNAN, Richard P.. Gigantes da Física: Uma história da Física Moderna através de oito biografias. Acesso em 14/01/2024. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar., 1998.

CARVALHO, A. M. P. de. (2018). Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino por Investigação. *Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências*, 18(3), 765–794. <https://doi.org/10.28976/1984-2686rbpec2018183765>.

CHALMERS, A.F. O que é a ciência afinal?- editora Brasiliense, São Paulo, SP; 1993.

CHEVALLARD, Y. La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado. La Pensée Sauvage, Argentina. (1991).

COUTO, R. V. L. do. Astronomia no ensino médio: Uma abordagem simplificada a partir da teoria da relatividade geral. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade de Brasília (UnB) no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF). Brasília, 2020.

EINSTEIN, A., *Annalen der Physik*. v.17. Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. p. 891-921 (1905).

EINSTEIN, A. *Jahrbuch der Radioaktivitat und Elektronik*, v. 4. Editora S. Hirzel. Sobre o princípio da relatividade e suas implicações. p. 411-462 (1907).

EINSTEIN, A., *Annalen der Physik*. v.35. Sobre a influência da gravidade na propagação da luz. p. 898-908 (1911).

GARG, Anupam. *Classical electromagnetism in a nutshell* (em inglês), página 564 (Princeton university press, 2012).

GOMES E. R. O papel do espaço absoluto e da gravidade para o argumento do desígnio de Isaac Newton. *Kalagatos Revista de Filosofia*. V.19, N.2. e-ISSN: 1984-9206 (2022). <https://doi.org/10.23845/>.

HAWKING, Stephen. Uma breve História da Relatividade. In: Andrew ROBSON (Org). *Einstein: Os 100 Anos da Teoria da Relatividade*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

LESCHE, Bernhard. *Teoria da relatividade*. São Paulo: Livraria da Física, 2005. 165 p.

LOMAR S. *Gravidade*. <https://prezi.com/dvfb0zxadb0k/gravidade/> 2014.

MICHELL J., *Philosophical Transactions* 74, 35 (1784).

MOREIRA, M. A. Uma análise crítica do ensino de física. *Ensino de Ciências*. Estud. av. 32 (94). Sep-Dec 2018. <https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0006> acesso em 03/03/2024.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? *Revista Cultural La Laguna Espanha*, 2012. Disponível em <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. acesso em: 03/11/2023.

NEWTON, I., *Livro Opticks* (1704, Book IV, Part 1).

OSTERMANN, F., & MOREIRA, M. A. (2016). Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa “física moderna e contemporânea no ensino médio”. *Investigações Em Ensino De Ciências*, 5(1).

PEDRISA, C.M. Características históricas do ensino de ciências. **Ciência & Ensino**, Campinas, n. 11, p. 9-12, 2001.

PELLA, M. O. (1969). *The Laboratory and Science Teaching*. In H. O. Andersen. *Reading in Science Education for the Secondary School*. London: MacMillan.

PEREIRA, C. A. *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*; traduzida do original alemão de Albert Einstein. - Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.

PERIMETER, Institute for Theoretical Physics. *Inspirações Perimeter*. Einstein no dia a dia: GPS e Relatividade. Canadá, 2013.

PERUZZO, Jucimar. *Teoria da Relatividade - Conceitos Básicos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2012.

PONTES G. S.. Física e recursos didáticos: proposta para a inserção de storytelling de astronomia no último ano do ensino fundamental /. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Núcleo de Ciências Exatas e da Terra, Fundação Universidade Federal de Rondônia. Porto Velho, 2022.

PORTO, C.M. e PORTO, M.B.D.S.M.. A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna. *História da Física e Ciências Afins*. Rev. Bras. Ensino Fís. 30 (4). Dez 2008. <https://doi.org/10.1590/S1806-11172008000400015>

PRADO, M.E.B.B.. Pedagogia de projetos: fundamentos e implicações. In: Almeida, M.E.B.; Moran, J.M. Integração das Tecnologias na Educação. **Salto para o Futuro**. Brasília:SEED-MEC, <http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/livros.asp> (acesso em 03/11/2023).

LOMAR S. Gravidade. <https://prezi.com/dvfb0zxadb0k/gravidade/> Acesso em 19 de outubro de 2024.

SASAKI & JESUS Avaliação de uma metodologia de aprendizagem ativa em óptica geométrica através da investigação das reações dos alunos - Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 39, no 2, 2017.

SASSERON, L. H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. Ensaio em Educação em Ciências (Belo Horizonte), 2015. v.17, n.spe, p. 49-67.

SEVERINO, Aguinaldo M., CASANAVE, Abel L.. Sobre a precedência de Hilbert em Relação a Einstein. In: Ciência e Ambiente 30. Julho, 2005.

SOLDNER, J. G. vom, Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1804 (C.F.E. Spfithcn, Berlin, 1801), p. 161.

WEINBERG, Steven. Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Cambridge, Massachusetts-EUA. April 1971.

WHITE, R., & GUNSTONE, R.. Probing understanding. London and New York: The Falmer Press, 1992.

PAIVA, J. R.. Múltiplas representações na construção do conhecimento científico escolar. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

APÊNDICE A - MANUAL DO PRODUTO EDUCACIONAL



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUDESTE DE MINAS GERAIS - CAMPUS JUIZ DE FORA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Fernando Cezar Farineli de Souza

**UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA DO PRINCÍPIO DA
EQUIVALÊNCIA COM A METODOLOGIA POE**

Juiz de Fora
Outubro/2024

Fernando Cezar Farineli de Souza

**UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA DO PRINCÍPIO DA
EQUIVALÊNCIA COM A METODOLOGIA POE**

Produto educacional apresentado ao Polo 24 do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora/Instituto Federal Sudeste de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física. Área de concentração: Física na Escola Básica.

Orientador: Professor Doutor Bruno Ferreira Rizzuti
Coorientador: Professor Doutor Bruno Gonçalves

Juiz de Fora
Outubro/2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Fernando Cezar Farineli de Souza.

Uma abordagem Investigativa do Princípio da Equivalência com a metodologia POE / Fernando Cezar Farineli de Souza. -- 2024.

15 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Bruno Gonçalves

Manual do Produto Educacional - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2024.

1. Princípio da Equivalência. 2. Sequência de Ensino por Investigação. 3. Predizer, Observar, Explicar. Rizzuti, Bruno Ferreira Rizzuti, orient. I. Gonçalves, Bruno Gonçalves, coorient. II. Título.

SUMÁRIO

MANUAL DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL EXPERIMENTAL

INTRODUÇÃO.....	65
MONTAGEM DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL.....	65
- DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL.....	65
- MATERIAL UTILIZADO.....	66
EXECUÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL.....	67
- SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	67
- ROTEIRO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO.....	67
- EXECUÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL.....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem como objetivo primordial detalhar de forma roteirizada o produto educacional elaborado a partir de experimentos de baixo custo com o intuito de auxiliar na compreensão do princípio da equivalência da Relatividade Geral de Einstein, cujo enfoque encontra amparo nas diretrizes definidas para a educação no âmbito legal.

A BNCC (2018) deixa claro que a abordagem da experimentação no ensino não implica necessariamente a adesão a um conjunto predefinido de etapas. Pelo contrário, enfatiza a importância de iniciar a partir de questões desafiadoras que conduzam a uma abordagem investigativa na resolução de problemas. Isso implica que as atividades não se restrinjam a seguir um conjunto fixo de etapas ou limitar-se à mera manipulação de objetos em um ambiente de laboratório. Em vez disso, a BNCC encoraja a organização das situações de aprendizado a partir de perguntas instigantes que reconheçam a diversidade cultural e estimulem o interesse e a curiosidade científica dos alunos. Essas abordagens devem permitir a identificação de problemas, a coleta, análise e representação de dados, a comunicação de conclusões e a proposição de intervenções no contexto do ensino de ciências.

Neste sentido, propomos aqui uma sequência didática baseada no ensino por investigação para abordar o princípio da equivalência da Relatividade Geral de Einstein utilizando a metodologia POE (Predizer-Observar-Explicar) conforme preconizada por White e Gunstone (1992).

MONTAGEM DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Descrição da atividade experimental

A primeira proposta tem por objetivo reproduzir o experimento mental denominado elevador de Einstein. Esse conceito é uma construção mental de significância, conforme delineado por Albert Einstein segundo Brennan (1998), que desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral.

Conforme coletado por Stachel (1989) em um artigo de 1907 sobre a Relatividade, Einstein teve uma revelação enquanto estava sentado em sua cadeira no escritório de patentes em Berna, que ele mais tarde descreveria como a "ideia mais feliz" de sua vida: imaginou um observador em queda livre e percebeu que seus experimentos seriam os mesmos que os de um referencial inercial. Isso o levou a concluir que um observador em queda livre é equivalente a

um referencial inercial na ausência de gravidade. Neste cenário imaginário, Einstein concebeu a situação de uma pessoa em queda livre a partir do telhado de uma casa, explorando sua percepção das bases físicas durante o processo. Esta evidência mental expressa um princípio observacional de grande importância assim descrito: todos os corpos caem com a mesma aceleração quando sujeitos a um campo gravitacional uniforme, desprezando-se a resistência do ar.

Para simular essa situação sugere-se a realização do experimento da garrafa PET contendo água que jorra abundantemente na posição de repouso após ser perfurada. Na sequência, a mesma deverá ser deixada cair em queda livre. Efeito semelhante ao experimento mental de Einstein deverá ser observado. Essa demonstração ilustra metade do princípio de equivalência – o fato de que a experiência de estar em queda livre num campo gravitacional uniforme é como estar em gravidade zero.

A segunda proposta consiste em manter um copo com água executando voltas completas de 360 graus, sem derramar uma gota sequer, demonstrando como se dá a interação de forças em trajetórias curvilíneas. Essa demonstração ilustra a outra metade do princípio de equivalência – o fato de a aceleração mimetizar muitas das características da gravidade

Material utilizado

- 03 garrafas PET transparentes de tamanho médio, perfuradas lateralmente na parte inferior;
- 01 caixa de plástico transparente medindo 26cm x 36cm x 20cm;
- 01 pote de plástico transparente com capacidade para 250 ml;
- 04 metros de corda de material diverso com 05 mm de diâmetro.

O material pode ser visto na Figura 01.



Figura 1 - Material utilizado

EXECUÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Sequência Didática

O produto educacional foi gerado a partir de uma sequência de ensino por investigação baseado na metodologia POE e para sua execução foram realizados dois experimentos com materiais de baixo custo de forma a reproduzir os efeitos ocorridos no Princípio da Equivalência de Albert Einstein.

A metodologia POE foi concebida por White e Gunstone (1992) com o propósito de avaliação, visando fomentar um processo investigativo de ensino e aprendizagem baseado na utilização de um aparato experimental com formulação de perguntas criteriosamente elaboradas que funcionarão como elementos norteadores na execução de três fases bem definidas: prever, observar e explicar.

Roteiro de Aplicação do Produto

Para facilitar a compreensão dos estudantes, foi elaborado um roteiro com o propósito de coletar os dados para a análise dos resultados. Este poderá ser aplicado individualmente e orientará o estudo através dos experimentos que serão executados. Consta de perguntas fechadas com opções de respostas, porém, com solicitação de justificativas para as mesmas.

Execução do Produto Educacional

Para aplicação do produto educacional serão necessários no mínimo dois encontros presenciais. É razoável que o professor(a) tenha duas aulas consecutivas de 50 minutos cada, totalizando ao final, quatro aulas já inseridas dentro do cronograma oficial da escola onde será aplicado o referido produto.

Tabela 03: Distribuição das aulas com cronograma

Cronograma de Aplicação		
Aula	Sequência Didática	Duração
1	Exposição dialogada (dialógica) sobre gravidade	50 minutos
2	Exposição dialogada (dialógica) sobre gravidade	50 minutos
3	Aplicação da SEI/POE com a realização do Experimento 1	50 minutos
4	Aplicação da SEI/POE com a realização do Experimento 2	50 minutos

AULA 1:

Para melhor situar os estudantes dentro do contexto em estudo, sugere-se uma exposição dialogada abordando alguns tópicos relevantes acerca do conteúdo gravidade, dentre eles, as forças fundamentais da natureza (força forte, força fraca e eletromagnetismo), uma recaptulação sobre a força peso, apresentação da gravidade do ponto de vista histórico e cosmológico, teoria do espaço absoluto de Newton, teoria do espaço-tempo flexível de Einstein, teoria da gravitação universal de Newton e teoria da relatividade geral de Einstein.

Busca-se primeiramente mostrar o contraponto entre o pensamento filosófico e o ponto de vista cosmológico. Dessa forma, de acordo com a cronologia dos fatos históricos e acontecimentos da antiguidade, destaca-se o pensamento de Aristóteles que pensava que os objetos mais pesados aceleravam em direção ao chão mais rápido. No entanto, experimentos posteriores mostraram que este não era o caso, mas sim por causa da resistência do ar, que atua na direção oposta à da aceleração devido à gravidade.

A seguir deve-se abordar que a gravidade faz com que a matéria aglutinada se mantenha intacta, permitindo dessa forma a existência de planetas, estrelas, galáxias e a maior parte dos objetos macroscópicos no universo.

Também uma breve discussão sobre as teorias da gravidade, destacando-se o espaço absoluto de Newton e o espaço-tempo flexível de Einstein.

AULA 2:

Sugere-se iniciar uma breve explanação sobre a Teoria da Relatividade Geral, destacando que a presença de matéria “distorce” o ambiente de espaço-tempo local, fazendo com que linhas aparentemente “retas” no espaço e no tempo tenham características que são normalmente associadas a linhas “curvas”.

Assim, deve-se apresentar aos estudantes o pensamento de Albert Einstein de que a gravidade não é uma força, mas sim uma consequência da curvatura espaço-tempo que regula o movimento dos objetos inertes, ou seja, a força da gravidade é provocada por uma distorção na relação entre espaço e tempo. E nesse contexto, os estudantes tomarão conhecimento de que um referencial que sofre aceleração é equivalente a um referencial submetido a uma força atuando à distância.

AULA 3:

Iniciar a aplicação de uma sequência de ensino por investigação utilizando-se a metodologia POE a partir de um experimento com materiais de baixo custo reproduzido no ambiente da sala de aula.

Para o desenvolvimento dessa atividade serão necessárias três garrafas PET transparentes de tamanho médio, perfuradas lateralmente na parte inferior para que possa vaziar a água que será inserida no interior das mesmas.

Didaticamente essa sequência deve ser dividida em três momentos como forma de caracterizar as etapas da metodologia POE conforme o que se segue:

Primeiro momento: Os estudantes devem ser divididos em grupos de acordo com o tamanho da turma e a cada grupo será distribuída uma garrafa PET com a perfuração mencionada anteriormente. Solicitar que cada grupo encha a garrafa com água vedando a mesma com a tampa e tapando o furo com o dedo para a água não vaziar. A seguir cada grupo deve-se posicionar com a garrafa elevada pelos braços, abrindo a tampa da mesma e retirando o dedo do orifício. Verificarão que a água da garrafa vaza continuamente. Nesse momento deve-se solicitar que façam uma previsão do fato subsequente respondendo à seguinte pergunta: O que acontecerá com a água da garrafa se a mesma for deixada cair em queda livre? As respostas obtidas devem ser registradas em um roteiro distribuído previamente.

Segundo momento: Imediatamente após o registro das previsões deve ser solicitado aos estudantes que promovam a execução do experimento, deixando a garrafa cheia de água cair em queda livre. Essa fase é puramente reflexiva pois confronta as previsões realizadas anteriormente com a realidade dos fatos. A observação é a tônica desse momento conforme preconizado na metodologia POE.

Terceiro momento: O passo seguinte deve concentrar-se em promover entre os estudantes uma discussão sobre os conflitos cognitivos surgidos durante o processo. Finalmente deve ser solicitado aos mesmos a elaboração de uma explicação razoável que justifique os resultados alcançados e da mesma forma o registro em relatório.

O modelo do relatório para o primeiro experimento pode ser conferido conforme o que se segue:



APLICAÇÃO DE PRODUTO EDUCACIONAL

ALUNO: _____

ESCOLA: _____

TURMA: _____ MATRÍCULA: _____

DATA: ___/___/___ CIDADE: _____ ESTADO: _____

ATIVIDADE I:

1) De posse de uma garrafa furada cheia de água ao elevá-la a uma certa altura, tapando o furo para não vazar e em seguida tirando o dedo do orifício, veremos que a água irá vazar. O que você prevê que acontecerá com a água se deixar a garrafa cair?

- a) A água vazará na mesma taxa de vazão verificada quando a garrafa estava parada.
- b) A água vazará numa taxa mais lenta que a verificada quando a garrafa estava parada.
- c) A água vazará numa taxa mais rápida que a verificada quando a garrafa estava parada.
- d) A água permanecerá na garrafa.

Justifique sua resposta:

2) Agora observe com bastante atenção a garrafa com água caindo em queda livre e tire suas próprias conclusões. Se possível registre esse momento em vídeo e de preferência no modo slow motion para melhor visualização dos detalhes do experimento.

AULA 4:

Retomar a sequência de ensino por investigação utilizando-se a metodologia POE também com materiais de baixo custo reproduzindo outro experimento em ambiente da sala de aula.

Os materiais utilizados são: Uma caixa de plástico transparente medindo 26 cm x 36 cm x 20 cm, um pote de plástico transparente com capacidade para 250 ml e 04 metros de corda de material diverso com 05 mm de diâmetro.

Essa sequência também deve ser dividida em três momentos seguindo a metodologia POE da seguinte forma:

Primeiro momento: O experimento dessa vez deve ser executado para todos os estudantes reunidos em apenas um grupo no interior da sala de aula e deve ser confeccionado a partir de uma caixa de plástico transparente sustentada por quatro hastes de cordas afixadas em suas extremidades e unidas através de um único nó. A caixa de plástico contém em seu interior um pote também transparente cheio de água ao fundo e ao centro. Com o experimento prestes a ser iniciado solicitar aos estudantes que façam uma previsão do fato subsequente respondendo à seguinte pergunta: O que irá acontecer com a água no pote quando a caixa for girada num círculo vertical completo? As respostas obtidas devem também serem registradas em um roteiro distribuído previamente.

Segundo momento: Após o registro das previsões o experimento deverá ser executado conforme planejado. Novamente os estudantes iniciarão a fase de observação conforme preconizado na metodologia POE.

Terceiro momento: Após observar atentamente a execução do experimento é chegado o momento de refletir sobre os conflitos cognitivos originados durante o processo. Ao término dessa fase novamente deve ser solicitado aos estudantes a elaboração de uma explicação razoável que justifique os resultados alcançados e da mesma forma o registro em relatório.

O modelo do relatório para o segundo experimento pode ser conferido conforme o que se segue:



APLICAÇÃO DE PRODUTO EDUCACIONAL

ALUNO: _____

ESCOLA: _____

TURMA: _____ MATRÍCULA: _____

DATA: ___ / ___ / _____ CIDADE: _____ ESTADO: _____

ATIVIDADE II:

1) Temos agora uma caixa de plástico transparente sustentada por cordas para que possa ser girada em movimento circular, contendo um pote também transparente cheio de água no centro e ao fundo da mesma. O que você prevê que acontecerá com a água do pote quando a caixa for girada num círculo vertical completo?

- a) Ela irá vazar do pote quando este estiver de ponta-cabeça.
- b) Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para cima.
- c) Ela irá permanecer no pote, o qual irá permanecer na caixa de plástico.
- d) Ela irá vazar quando o pote cair da caixa de plástico no caminho para baixo.

Justifique sua resposta:

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL - MEC – Ministério da Educação e Cultura (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, p.1-23, 2000.

BRENNAN, Richard P.. Gigantes da Física: Uma história da Física Moderna através de oito biografias. Acesso em 14/01/2024. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar., 1998.

EINSTEIN, A.; “On the Relativity Principle and the Conclusion Drawn from it” In: J. Stachel (ed.) Einstein Collected Papers Vol 2: The Swiss Years Writings: 1900-1909, Princeton University Press (1989).

PERIMETER, Institute for Theoretical Physics. Inspirações Perimeter. Einstein no dia a dia: GPS e Relatividade. Canadá, 2013.

TAMIR, P. Pratical work at school: An analysis of current practice. In: WOOLNOUGH, B. (ed) Pratical Science. Milton Keynes: Open University Press, 1991.

WHITE, R., & GUNSTONE, R. (1992). Probing understanding. London and New York: The Falmer Press.