UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTIC

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números

Dissertação apresentada ao Program
Graduação em Educação Matemátic
Universidade Federal de Juiz de For
requisito parcial à obtenção do título
em Educação Matemática. Área de c
Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr, Amarildo Melchiades da Silva

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Lectícia Sobreiro Rezende de.
Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática : o caso dos números complexos / Lectícia Sobreiro Rezende de Souza. -- 2024.
100 f.

Orientador: Amarildo Melchiades da Silva
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Formação Inicial de Professores. 3. Produção de Significados. 4. Variáveis Complexas. 5. Ensino Superior. I. Melchiades da Silva, Amarildo, orient. II. Título.

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza

Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso dos números c

Dissertaç
apresent
Program
graduaçã
Educaçã
da Unive
de Juiz
requisito
obtençã
Mestra
Matemát
concentr
Educaçã

Aprovada em 13 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti - Membro externo
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco - Membro interno

RESUMO

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa elaborada em mestrado p Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Feder Fora/Brasil, inserida na linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem da Matemátic condicionantes da sala de aula e Intervenção Pedagógica em Matemática. Esta compõe o macroprojeto de pesquisa do Programa Linsiano de Investigação intitul Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores Básica, sendo um dos subprojetos ao tratar da formação inicial de educadoras matemáticos nas disciplinas matemáticas, mais especificamente nas disciplinas discussões de tópicos relacionados a números complexos e variáveis complexas. como uma pesquisa qualitativa, seu objetivo foi o de investigar quais d características de uma disciplina de variáveis complexas, no conjunto das disc curso de Licenciatura em Matemática, para que esteja a serviço da formação da f professor de matemática, e delimitar tais características como uma proposta de sa consonância com o referencial teórico metodológico utilizado, o Modelo Semânticos, proposto por Romulo Campos Lins. Delimitamos característic disciplina de variáveis complexas após realização de análise das matrizes curricul pedagógicos disponíveis para acesso de onze Universidades Federais mineira literatura relacionada a formação matemática na Licenciatura em Matemática resíduos de enunciação obtidos após aplicação em campo do Produto Educacio em nossa pesquisa, constituído de Fichas de Trabalho com textos para discussão intenção de inserir discentes em uma proposta metodológica baseada nos concei dos Campos Semânticos, propicia experiências ao professor e professora em f além do conhecimento matemático, relacionadas à futura prática docente co metodológicas e pedagógicas frente aos conteúdos de variáveis complexas. reforçando a necessidade de construção de textos que sejam suficientes bibliografia base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, fazendo- realizarem cada vez mais pesquisas com objetivos de criação de materiais para

ABSTRACT

This work is the result of a research project carried out in a professional m program in the Mathematics Education Postgraduate Program of the Federal Uni de Fora/Brazil, inserted in the research line Teaching and Learning of Mathema of classroom conditions and Pedagogical Intervention in Mathematics. This invest of the macro research project of the Linsiano Research Program entitled Mathema in Schools in the 21st Century: the training of students and teachers of Basic Ed one of the subprojects that deals with the initial training of mathematics mathematical disciplines, more specifically in disciplines aimed at discussing to complex numbers and complex variables. Characterized as qualitative research was to investigate what the characteristics of a discipline of complex variables sho the set of disciplines of a Bachelor's Degree in Mathematics, so that it is at the training of future mathematics teachers, and to delimit such characteristics a proposal, in line with the theoretical methodological framework used, the Se Model, proposed by Romulo Campos Lins. We defined characteristics for a complex variables after analyzing the curricular matrices and pedagogical project access at eleven Federal Universities in Minas Gerais, reviewing the literat mathematical training in the Mathematics Degree Program, and reading th residues obtained after field application of the Educational Product formatted in consisting of Worksheets with texts for discussion and tasks with the intention students to a methodological proposal based on the concepts of the Semantic providing experiences to teachers in training that go beyond mathematical know to future teaching practice as methodological and pedagogical experiences i complex variables content. We conclude by reinforcing the need to construct sufficient to integrate the basic bibliography of syllabuses of disciplines with content, making it necessary to conduct more and more research with the objecti materials for the mathematics degree program with a different perspective fro presented by mathematicians.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AS	Assimilação Solidária
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CES	Câmara de Educação Superior
CNE	Conselho Nacional de Educação
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
IES	Instituição de Ensino Superior
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
MEC	Ministério da Educação
OA	Objeto de Aprendizagem
PPP	Projeto Político Pedagógico
Unifal MG	Universidade Federal de Alfenas
Unifei	Universidade Federal de Itajubá
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFLA	Universidade Federal de Lavras
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João del-Rei
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UFV	Universidade Federal de Viçosa
UFTM	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
UFVJM	Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mu

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente investigação é um dos projetos de pesquisa que integram o
Investigação intitulado "Programa Linsiano", em homenagem ao educador matema
Campos Lins (1955- 2017). Os objetivos do Programa interinstitucional são investigar
escolar com o propósito de educar matematicamente estudantes da Educação Básica n
e investigar, no interior das licenciaturas em Matemática, a formação inicial de l
licenciandos em matemática.

Nossa pesquisa integra um dos macroprojetos dp Programa, intitulado
Investigação ao tratar do ensino da disciplina Variáveis Complexas para a Lic
Matemática a partir da constatação de que, a concepção da disciplina, sua ementa
utilizada são propostas pela visão do matemático para a formação do futuro matemático,
especificamente à formação inicial do futuro professor ou professora da Educação Bás

Em minha graduação, me deparei com perguntas do tipo: "Como o conteúdo
dito "puro" em oposição a "aplicado" – agregará na experiência de minha futura práti
ou seja, "Para que serve o estudo das disciplinas de matemática pura?". O educado
Romulo Campos Lins, em 2005, já havia discutido sobre essa temática com o que usua
e ainda são atribuídas como justificativas para a permanência dessas disciplinas na for
de professores(as) de matemática:

> Os papéis usualmente considerados são dois: ensinar o conteúdo a ser ens
> (que, sempre supomos, não foi aprendido direito na escola), e prover
> fundamentos daquilo que se vai ensinar. As duas coisas devem s
> separadamente, embora certo discurso argumente que não, que a pessoa s
> Matemática se sabe os *verdadeiros* fundamentos matemáticos de cada assunt
> p. 119)

Tais questões rondavam minha formação curricular matemática, causando cert
pois ao mesmo tempo em que eu deslumbrava o prazer de conhecer mais da matemátic
estabeleciam de alguma forma.

Utilizando termos de Lins, do artigo intitulado *Matemática, Monstros, S*
Educação Matemática (2004a), eu estava, de alguma forma, tentando cruzar um terri

Foi frustrante, em minha experiência, não sentir que o Matemático me via
monstros de estimação, não sentir que havia outras formas de contemplar aquelas criaçõ
a possibilitar a produção de outros significados. Eu apenas precisava, observando
reproduzir como os conceitos e objetos se comportavam, como funcionavam. Fo
sentimentos que segui o caminho até chegar ao projeto dessa pesquisa.

Essa formação matemática, para além de uma vivência pessoal, aponta cara
estrutura curricular dos Cursos de Licenciatura em Matemática. No Brasil as diretrizes
a educação nacional são de responsabilidade do Estado. Em função disto, utilizamos
Curriculares Nacionais para a formação de professores (DCFP)[1] para embasar no
curricular.

Ressaltamos que Diretriz Curricular não é o mesmo que o currículo de um curso.
Curriculares Nacionais, por exemplo, são definidoras dos "marcos curriculares e regul
formação docente, instituindo normas como carga horária e estruturação curricular das
além de questões como princípios formativos a serem considerados pelos cursos.
FILHO; OLIVEIRA; COELHO, 2021, p. 941). Diferentemente do exemplificado, o cu
curso, inserido no dia a dia da sala de aula, é um processo vivo, sujeito a ser submetido
fases de formatação, como "[…] a de prescrição e regulamentação (âmbito político e ad
a de planejamento (âmbito de materiais, guias, etc.); organização (âmbito da escola); aç
ensino); e avaliação (âmbito do controle interno e externo)." (GOLLO JUNIOR, 2019,

Quando voltamos nossa atenção para as Diretrizes Curriculares para as lice
matemática, encontramos as indicações no Parecer CNE/CES nº 1.302/2001, aprov
novembro de 2001, primeiro e último até o momento de escrita deste trabalho. Perfil do
Competências e Habilidades, Estrutura do Curso, Conteúdos Curriculares e Estágio
Complementares são tópicos tratados neste documento.

A respeito dos Conteúdos Curriculares, mesmo diferenciando o currículo do ba
currículo da licenciatura, o parecer afirma uma perspectiva de que o professor que ensin
é um matemático ao afirmar que: os currículos "devem assegurar o desenvolvimento
dos diferentes âmbitos do conhecimento profissional de um matemático" (BRASIL, 2

“habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, ut lógico-científico na análise da situação-problema” (BRASIL, 2002a, p.3).

A demarcação da docência ser uma das possibilidades para um profissional dit é suficiente para justificar os conteúdos específicos indicados pelo parecer à Lic Matemática.

> Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licencia distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela Diferencial e Integral; · Álgebra Linear; · Fundamentos de Análise; · Álgebra; · Fundamentos de Geometria; · Geometria Analítica. A parte co incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas ár Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fo de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciênc da História e Filosofia das Ciências e da Matemática (BRASIL, 2002a, p. 6)

Essas disciplinas citadas como comuns a todos os cursos de Licenciatura, em possuem uma proposta curricular e metodológica generalista, o que em teoria atend Cursos, como as Engenharias, Física, Química, Computação, ao Bacharelado em Mate outros, não atendendo, ao nosso ver, a formação profissional da licencianda e li matemática.

> Enquanto o conteúdo matemático ensinado nas escolas, e nos cursos possuírem seu foco principal nas ciências modernas, no desenvolvimento sociedade, não poderemos rumar para o ensino de uma matemática que emancipação do educando. (GOLLO JÚNIOR, 2019, p. 10)

Acreditamos que, na Licenciatura em Matemática, como está formulada hoje, conteúdos não sejam diretamente aplicados em nosso dia a dia profissional como professoras da Escola Básica, a forma com que lidamos e os manipulamos é que faz c ou não, nos termos de D' Ambrósio (1991, p.1), “obsoletos, desinteressantes e inúteis” acreditamos que

> [...] a Matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum rua (LINS & GIMENEZ, 1997). É apenas ao se tornar sensível a este estran lo vivido como aluno-futuro-professor, que o professor poderá ser sens necessidade de ler seus alunos sempre, ao invés de apenas compará-lo co que deveria ser. (LINS, 2005a, p. 121)

Decidir estudar conteúdos específicos de disciplinas presentes num currículo d em Matemática, no tempo limite permitido a um mestrado profissional, nos restringe para o ingresso não foram suficientes para inibirem o estranhamento que vivi. Foi a di desafiadora que cursei e os sentimentos que experimentei iam de um extremo prazer em totalmente diferente do que eu tinha conhecimento para uma extrema impotência em aquele modo de produção de significado do matemático.

Realmente não internalizei tudo que imaginei que poderia e a oportunidade de disciplina para a pesquisa me despertou de que esse seria o momento de sanar, em pa que era ainda muito recente na minha curta trajetória. Tornou-se necessário para mim análise do próprio currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática, identificar outra de abordar os conteúdos específicos que lá estão identificados.

Assim, chegamos à problemática dessa pesquisa: "quais devem ser as cara disciplina Variáveis Complexas, no conjunto das disciplinas de um curso de Lic Matemática, para que esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de mate

Inserida em um Mestrado Profissional, o produto educacional, intrínseco à in formatado como fichas de trabalho compostas de tarefas disparadoras adequadas de sere no ensino de números complexos, tópico este associado a disciplinas de variáveis com alcançarmos nosso objetivo, traçamos três ações a serem consideradas e trabalhadas pesquisa.

A primeira ação realizada foi considerar a disciplina a partir da contribuição qu a formação da futura e futuro professor de matemática da Educação Básica. Com isso s nosso foco não está primariamente e exclusivamente no conteúdo, mas também n metodológica em que a/o estudante em formação experiencie falar a partir de um text tomado como demanda de produção de significados, e que assim vivencie o estranhame situações.

A segunda ação, na continuação, caracterizou-se como a identificação características da disciplina de Variáveis Complexas para um curso de Licenciatura em

Tendo essas características propostas, seguimos para a última ação, que seria a d e aplicar o produto educacional, um material didático para que os professores e profes utilizar, baseado nas características que propomos para o curso.

qual iremos nos referir neste trabalho como perspectiva tradicional – e que considera c
apenas significados legitimados pela matemática do matemático[2].

Em nossa pesquisa, utilizamos como referencial teórico o Modelo dos Campo
(MCS), proposto por Romulo Campos Lins (1999, 2001, 2005), que compartilha ideias d
e Leontiev.

Para atender nossas expectativas, o presente trabalho possui seis capítulos. N
intitulado *O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática*, analisamo
propostas de ensino de variáveis complexas de universidades federais mineiras, por mei
curriculares e projetos pedagógicos disponíveis para acesso em suas páginas oficiais.

No Capítulo 2, denominado *Revisão da Literatura,* apresentamos uma revisão d
especificamente dissertações, referenciadas teórica e metodologicamente de maneira pr
proposta e que tratam do ensino de tópicos relacionados a variáveis complexas.

No Capítulo 3, intitulado *Pressupostos Teóricos,* esclarecemos noções acerca d
Campos Semânticos (MCS) – nosso referencial teórico, como s*ignificado, c*
estranhamento e *descentramento*.

No Capítulo 4, denominado *Metodologia de Pesquisa*, tratamos a metodolo
pesquisa e da proposta metodológica caracterizada em nossa investigação para utilizaç
aula junto de nosso produto educacional.

No Capítulo 5, intitulado *A Dinâmica da Sala de Aula*, relatamos o processo de
nosso produto educacional, juntamente da apresentação das tarefas criadas e análise do
enunciação obtidos na aplicação delas.

O último capítulo, Capítulo 6, denominado *Comentários Finais*, discutim
realizado na pesquisa e perspectivas para pesquisas futuras.

1 O ENSINO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁ

Neste capítulo, analisaremos características relacionadas à caracterização, c planejamento curricular do ensino de disciplinas de tópicos de variáveis complexas cursos de Licenciatura em Matemática nas IES do Estado de Minas Gerais. Metodo escolhemos analisar apenas universidades federais de nosso estado, considerando o instituição onde nossa pesquisa se desenvolve é uma universidade federal mineira.

Assim, dissertamos sobre a presença da temática de Variáveis Complexas na for de licenciandos e licenciandas em matemática, incluindo o conteúdo relacionado a esse

1.1 Instituições e disciplina

Em nosso levantamento das Instituições de Ensino Superior mineiras com Lic Matemática identificamos onze universidades mineiras, são elas:

- Universidade Federal de Alfenas (Unifal – MG);
- Universidade Federal de Itajubá (Unifei);
- Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF);
- Universidade Federal de Lavras (UFLA);
- Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG);
- Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP);
- Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ);
- Universidade Federal de Uberlândia (UFU);
- Universidade Federal de Viçosa (UFV);
- Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM);
- Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Ao analisarmos as grades curriculares disponibilizadas na página oficial de cad

Tabela 1: Disciplinas de Variáveis Complexas nas Universidades Federais Mi

Universidades Federais Mineiras	**Disciplinas Relacionada a Números Complexos**	**Classificaçã Disciplin**
Unifal – MG	Funções de uma Variável Complexa	Eletiva
Unifei	MAT454 - Variável Complexa	Obrigatór
UFJF	MAT162 - Funções do Plano Complexo	Obrigatór
UFLA	GEX175 - Int. a Variáveis Complexas GEX210 - Trigonometria e Números Complexos	Eletiva Obrigatór
UFMG	MAT118-DIG - VARIÁVEL COMPLEXA	Obrigatór
UFOP	MTM224 - Funções de uma variável complexa	Obrigatór
UFSJ	Polinômios e Números Complexos Análise Complexa	Obrigatór Optativa
UFU	GMT031 - Funções de uma variável complexa	Obrigatór
UFV	MAT343 - Variáveis Complexas	Optativa
UFTM	Funções de Variáveis Complexas	Obrigatór
UFVJM	CEX053- F. de Variável Complexa	Eletiva

Fonte: Criado pela autora.

Cada graduanda(o) deve cumprir uma determinada carga horária, em acordo com de sua graduação, de disciplinas ditas eletivas, dentro da grade oferecida para essa fina

Ufla, UFVJM e Unifal oferecem a temática dos complexos em disciplinas class eletivas, ou seja, disciplinas não obrigatórias. Porém, de acordo com o que consta no Pr Pedagógico (PPP) de cada um de seus cursos de Licenciatura em Matemática, notamo não oferecendo disciplinas obrigatórias que possuam os números complexos co exclusivo, elas garantem o contato das alunas e alunos com esse conteúdo ao inseri disciplinas obrigatórias de sua grade.

Destacamos na *Tabela 1* duas disciplinas da Ufla: GEX175 (Int. a Variáveis GEX210 (Trigonometria e Números Complexos). A primeira é uma disciplina eletiva,

Na UFVJM, a disciplina obrigatória intitulada Matemática Elementar III é res
tratar dos números complexos simultaneamente aos conteúdos de trigonometria e polin
abaixo as informações complementares dessa disciplina.

Figura 1: Ementa da disciplina Matemática Elementar III

Disciplina: Matemática Elementar III				
Período: 2º período			**C.H. Semestral: 60 horas**	**Créditos: 4**
CH Teórica 60	**C. H. PCCs** 00	**Estágio** 00	**PRÉ-REQUISITOS** Matemática Elementar I	
Objetivos: Proporcionar uma visão mais crítica e profunda dos conteúdos do ensino médi				
Ementa: Trigonometria no triângulo retângulo; Trigonometria na circunferência; Funções Trigonométricas; polinômios e números complexos.				

Fonte: Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM

Já na Unifal notamos a presença do tema em duas disciplinas obrigatórias d
Cálculo I e Cálculo IV.

Figura 2: Ementa da disciplina Cálculo I

Disciplina: Cálculo I				
Pré-requisitos: Não possui.				
C.H. Total: 60	Teórica: 60	Prática :	Prática como componente curricular:	Estágio:
EMENTA: Conjuntos numéricos. Função: definição, domínio, contra conjunto imagem e gráfico. Função afim. Função quadrática. Ine produto e quociente. Função composta. Função exponencial. Função Função logarítmica. Funções Trigonométricas. Funções trigono inversas. Números complexos: Forma algébrica e polar, potenc radiciação de complexos (1ª e 2ª fórmula de Moivre). Limite e conti conceito, definição e propriedades. Derivadas: definição, regras de de				

Figura 3: Ementa da disciplina Cálculo IV

Disciplina: Cálculo IV				
Pré-requisitos: Cálculo III.				
C.H. Total: 60	Teórica: 60	Prática :	Prática como componente curricular:	Estágio:
EMENTA: Séries: Sequências, Sequências monótonas e limitadas, definição, Séries com termos não negativos, Convergências Abs Condicional, Séries de Potência, Séries de Taylor e Maclaurin. N Complexos: Números Complexos, Forma Polar, Conjugado, Fórmula de Conjuntos no Plano Complexo, Funções Complexas: polinomial, expo trigonométrica, logarítmica e potências. Equações Diferenciais Orc Definição de equação diferencial ordinária e de solução, Teorema de Ex e Unicidade. Equações lineares de primeira ordem, Equações Homo Equações Exatas, Mudança de Variável (Equações de Bernoulli, Clairault), Equações lineares de ordem superior, Exponencial de Matriz.				

Fonte: Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura da Un

Essa característica identificada no PPP da Unifal, de tratar de números co disciplinas de Cálculo, nos chamou atenção para o fato de que a não existência de u exclusiva para esse tema não implica a ausência dessas discussões em outras disciplina a importância da análise dos Projetos Político Pedagógicos além da observação Curriculares.

A terceira e última classificação é a de disciplina optativa. Pelo que notamos por da UFSJ e da UFV, o termo "optativa" é sinônimo de "eletiva" para esses documentos análise foi próxima à realizada acima para os cursos que disponibilizavam disciplina tema estudado neste trabalho.

Na UFSJ, os estudos acerca de números complexos estão restritos nas duas identificadas anteriormente – na disciplina obrigatória o tema está inserido motivado p

A UFV possui, em uma disciplina obrigatória indicada para o primeiro perío
Fundamentos de Matemática Elementar II (MAT – 206), uma ementa englobando tr
números complexos, parecida com a da disciplina GEX210 presente na grade curricula

Figura 4: Ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar I

Departamento de Matemática - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Catálogo: 2022
Número de créditos: 4 Carga horária semestral: 60h Carga horária semanal teórica: 3h Carga horária semanal prática: 1h Semestres: I

Objetivos
• Desenvolver conceitos elementares da Matemática, bem como estudar as suas diversas proprie Compreender métodos básicos e necessários à resolução de alguns problemas que envolvam c de trigonometria e funções trigonométricas. Compreender e aplicar as principais propriedades d números complexos. Estudar as principais propriedades dos polinômios com coeficientes reais.

Ementa
Trigonometria e funções trigonométricas. Introdução aos números complexos. Polinômios.

Fonte: Programa Analítico de Disciplina da UFV - MAT 206 - Fundamentos de Matemát Elementar II

No capítulo 4, em que discutiremos um design para a disciplina Variáveis Com
Licenciatura, trataremos das escolhas metodológicas que fizemos a respeito da ementa
básica do curso. Por isso, analisaremos a seguir a ementa/plano de ensino indicac
disciplinas, a fim de estabelecer futuramente uma comparação com a nossa proposta.

1.2 Ementas e suas referências

Por nosso olhar estar voltado para a formação básica do licenciando e l desenvolvermos uma disciplina que trata exclusivamente de variáveis complexas, restri análise às ementas das disciplinas obrigatórias citadas acima que possuem tamb relacionadas exclusivamente à variáveis complexas.

Tabela 2: Ementa das Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complexas

Universidades Federais Mineiras	**Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complexas**	**Ementa das Disciplinas**
Unifei	MAT454 - Variável Complexa	Plano Complexo; Funções analíticas; Te Séries de potências. Singularidades, resí Funções homomorfas. Teoria de
UFJF	MAT162 - Funções do Plano Complexo	Números Complexos, Funções Analít Elementares, Transformações por Funçõ
UFMG	MAT118-DIG - VARIÁVEL COMPLEXA	Números complexos. Topologia de C. Fu Equações de Cauchy-Riemann. Funçõe Integração. Teorema de Cauchy-Gor sat. de Cauchy. Séries de Taylor. Princípio Teorema de Liouville. Singularidades iso Laurent. Teoremas de resíduos e a
Ufop	MTM224 - Funções de uma variável complexa	Números Complexos. Topologia do Pl Holomorfas. Séries. Teoria de Cauchy. S Resíduos.
UFU	GMT031 - Funções de uma variável complexa	Números complexos. Cálculo no pla holomorfas. Séries. Teoria de Cauchy. S
UFTM	Funções de Variáveis Complexas	Funções de Variável Complexa. Limite Diferenciabilidade. Integral definida. Int Teorema, Fórmula de Cauchy. Séries de Laurent. Singularidades e Re

Gostaria de utilizar o tema de funções como exemplo para refutar essa crença. E
está presente, mesmo que de maneira reduzida, desde a Educação Básica na formaçã
seja, alunos e alunas podem chegar ao Ensino Superior familiarizados com es
possivelmente, com o que ela se relaciona.

Ainda assim, boa parte do trabalho realizado nas disciplinas de Cálculo é fund
funções, justamente por ser um tópico essencial para muitos temas tais como limit
integral. Assim, é de se esperar que, quando funções são trabalhadas num conjunto dif
usualmente são tratadas (conjunto dos números reais), mais tempo será necessário para
Porém, ao retornarmos para as ementas no quadro explicitadas, notamos que essa te
espaço com outras que demandam tanto tempo quanto para o seu ensino e aprendizage

O tempo destinado ao estudo completo de uma ementa é um problema não só p
mas também para docentes. Como promover um estudo detalhado e individualizado de u
variáveis complexas tendo que percorrer uma ementa tão extensa?

Torna-se necessário pontuar que nossa perspectiva não reflete o posicionament
a matemática do matemático na formação inicial do licenciando e licencianda, p
acreditamos, em concordância com Lins (2005), que

> o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre escla
> mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucid
> inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemátic
> produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. (
> 122).

A abundância de tópicos junto do tempo reduzido podem ser agentes da esco
docente, de um ensino tradicional – "o problema não é o giz e o quadro negro, mas o u
vezes se faz deles" (OLIVEIRA, 2002, p. 100). Nesse formato, torna-se inviáv
metodológica que gostaríamos de fazer ao professor e professora dessas disciplinas. Pa
estranhamento, é preciso tempo.

Para além dos conteúdos previstos de serem abordados, a bibliografia básica sug
nos indicou a tendência existente no que diz respeito à referência utilizada pelos
professoras de como trabalhar esses conteúdos em sala de aula. Do mesmo modo, s
relação dos livros-texto nas ementas indicados e a quantidade de vezes em que a

Tabela 3: Bibliografia das Disciplinas Obrigatórias de Variáveis Complex

Livro	Autor(a)	Número d
Variáveis complexas e Aplicações	AVILA, G.	
Variáveis Complexas e suas Aplicações	CHURCHILL, R.V.	
Introdução às funções de uma variável complexa	FERNANDEZ, Cecília S.; BERNADES Jr, Nilson C.	
Cálculo em uma variável complexa	SOARES, M. G.	
Funções de uma variável complexa	LINS NETO, A.	
Trigonometria e Números Complexos.	CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E.	
Introdução às variáveis complexas	COLWELL / MATHEWS	
Complex Number and Geometry	HAHN, L.	
Matemática Superior	KREYSZIG, E.	
Introdução as Funções Complexas	MEDEIROS, L. A. J.	
Variável complexa 1	SHOKRANIAN, Salahoddin.	
Variáveis complexas	SPIEGEL, M. R.	

Fonte: Criado pela autora.

Mesmo apontando no mínimo três livros como bibliografia básica, foi possíve destaque de quatro obras matemáticas, possuindo ao menos duas indicações Independente da repetição, a listagem nos indica um certo padrão, o texto matemático futuros e futuras educadoras matemáticas ainda é escrito por matemáticos.

A preocupação do matemático não passa pelas necessidades de um licenciando logo, um matemático ministrando uma disciplina de conteúdo matemático com textos também por matemáticos dificilmente romperá com o tradicional, evitando correr o cumprir com a ementa prevista no prazo estabelecido.

A *Tabela 1* foi resultado da análise das grades curriculares. Esse tipo de ex proporcionou informações baseadas não nos conteúdos programáticos das disciplina títulos atribuídos a elas. A partir da classificação de eletivas, optativas e obrigatória afirmar que aproximadamente 72% dos cursos de Licenciatura em Matemática nas U

não é uma temática de muito destaque comparando com disciplinas de Cálculo Diferenc
mas por ser tão representativa na nossa região, sinaliza a necessidade de se falar, estud
sobre, e é isso que nos propomos fazer.

O padrão notado pelo levantamento da bibliografia básica indicada estar de acc
das premissas deste trabalho, a concepção de disciplina, sua ementa, metodologia
bibliografia utilizada são propostas pela visão do matemático para a formação do futuro
Lins (2005a) aponta que no âmbito do ensino de matemática, "a questão central
conhecimento ensinar' e sim 'ensinar o conhecimento de quem'"(LINS, 2005a, p. 118)

Ensinar o conhecimento do matemático não significa precisar agir como um
futuro professor a passear pelo Jardim do Matemático, não o faço com a intenção de
sim com a intenção de permitir que eles experimentem a diferença." (LINS, 2005
experimentando a diferença como discente que se torna sensível à diferença que sera
experimentada quando no papel de docente estiver.

Assim, afirmamos nossa posição como professores e pesquisadores que o foco
exclusivo no conteúdo, a atenção deve estar voltada para o processo. Nossa concepção v
à de Alves (2013), os "cursos conteudistas ministrados com o enfoque da Educação
que levem em conta a ampliação de horizontes do futuro professor de Matemática, po
contribuir para a sua formação pré-serviço, enquanto estudante de Graduação." (ALV
50).

Nesse sentido, posicionamos nossas escolhas metodológicas com um enforque
Matemática. Não pretendemos apontar uma ementa extensa, mas suficiente
estranhamento pretendido a partir de tópicos relacionados a variáveis complexas; nos
apoio provavelmente não estão de todo em direção contrária dos anteriormente destacad
lidos e utilizados partindo de outra perspectiva. Não seguir o padrão não faz de nossa pr
ou pior, apenas demarca nossa posição educacional em apontar outra possibilidade.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste Capítulo, apresentaremos a revisão de literatura resultante de nossa pesqu
da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), em bancos de teses e
na área de Educação Matemática em sites de Programas de Pós-Graduação, e no ace
Sigma-t - Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática.

Visando encontrar trabalhos em que o ensino de variáveis complexas estivesse
formação da futura e futuro professor, combinações como "'Formação Matemática
Complexos' e 'Licenciatura em Matemática'" e "'Formação Matemática' e 'Variáveis
'Licenciatura em Matemática'" foram utilizadas, mas os resultados obtidos, além
numerosos, após leitura dos resumos notamos que não eram compatíveis com nossa ex

Retomamos então os objetivos deste trabalho cujo foco não está primariamente
mas sim na formação matemática de licenciandos e licenciandas.

Além disso, nosso pressuposto teórico precisava ser um norteador de traba
serviriam de referencial. Assim uma nova *string* foi criada, e dessa vez retornando
muito nos auxiliaram em nosso levantamento, e foi ela "'Formação Matemática' e
Significados' e 'Licenciatura em Matemática'".

Com esse formato de busca, tivemos como resultado 46 trabalhos, dos quais
selecionados como constituintes da revisão de literatura de nossa pesquisa.

Tabela 4: Trabalhos provenientes da pesquisa em banco de teses e dissertaç

Título do Trabalho	Autor(a)	Ano
Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática	ELIAS, Henrique Rizek	
Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares	ALMEIDA, Vitor Rezende	
Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais	ALVES, Aretha Fontes	
Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de	PROCÓPIO, Ricardo Bevilaqua	

A tese de Elias (2017) traz a problemática do distanciamento entre a matemá durante o curso de uma Licenciatura em Matemática e a matemática que compõe o trabalho de um docente dessa disciplina na escola. Sua pesquisa, de cunho qualitativo nas discussões a respeito da formação inicial de professores de matemática, com ênfase matemática de docentes de matemática.

Os referenciais teóricos citados por Elias são o Perfil Conceitual (MORT MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al., 2014a; MORTIMER et Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (JAKOBSEN et al., 2012; JAKOBSEN RIBEIRO, 2013) e a diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica DAVID, 2010).

Com essa bagagem teórica discutida e ênfase em um tópico matemático es números racionais, desenvolveu em seu trabalho uma sequência composta por três tar propor possibilidades para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em que aproximem essa temática da matemática escolar, favorecendo o desenvo conhecimento profissional do futuro e futura professora. Com isto, frisamos que est aproxima de nosso estudo pela produção de tarefas, mas não compartilhamos o mesm teórico.

As dissertações de Almeida (2013), Alves (2013) e Procópio (2011), com aborda qualitativas, se assemelham quanto a produção de tarefas e utilização de mesmo refere com finalidade em aprofundar o estudo entre os processos de ensino e aprendizagem e do Ensino Superior e a formação matemática do licenciando e licencianda em Matemá

O referencial teórico em comum dos três trabalhos é o Modelo dos Campos Se o tópico matemático em foco nos estudos se diferencia: Almeida (2013) trata de Tr Lineares em Álgebra Linear, Alves (2013) discute Espaços Vetoriais também em Álgeb (2011) se dedica a tópicos de Geometria Plana e Espacial.

Os objetivos dessas dissertações estavam em torno do mapeamento de caract disciplinas da Licenciatura em Matemática, voltadas para o tópico específico de cad forma que essas disciplinas desempenhassem o papel de um Curso de Serviço para a Li Matemáti

Por consequência de serem disciplinas de conteúdo matemático atentas à forma
caracterizam por serem disciplinas "que também se preocupam com a formação didática
do futuro professor de Matemática" (ALMEIDA, 2013, p. 2).

Elias (2017), mesmo não utilizando o termo Curso de Serviço, disserta sobre
ser também um curso profissional. Em seu texto, afirma a necessidade da propos
formação que, em seus termos, não priorize uma educação *para* a matemática, e
maneiras de lidar com as demandas da prática docente e que priorize os valores da Mater
em suas múltiplas possibilidades." (ELIAS, 2017, p. 35).

O termo Matemática Escolar acima é caracterizado por Elias (2017), com apo
Moreira e David (2010), "como um conjunto de saberes associados ao exercício da profi
(MOREIRA; DAVID, 2010 apud ELIAS, 2017, p. 35). Assim, seus valores seriam "o
produzidos e mobilizados pelos professores naquele contexto da sala de aula da Edu
considerando toda a heterogeneidade dos modos de pensar dos estudantes." (ELIAS, 2

Uma observação pertinente é a de que o termo *significado* utilizado por Elia
possui a mesma conotação de quando utilizado em nosso trabalho e nos outros aqui refe
também utilizam o Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico. Pa
significado possui definição específica, que discutiremos com mais atenção no capítulo

Voltando à nossa discussão anterior, em resumo, Elias (2017) aponta que a ma
a formação do futuro e futura professora de matemática deve ser caracterizada como

> … uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar,
> professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pens
> matemáticos em contextos variados da Educação Básica, e que possibilite
> mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo es
> relações com a Matemática Acadêmica. (ELIAS, 2017, p. 57)

Almeida (2013), ao dissertar a respeito de concepções do que seriam competênci
a professores e professoras de matemática, nos brinda expondo sua concepção de
docente deve ser guiada pela

> … preocupação em utilizar metodologias alternativas de ensino que propi
> uma oportunidade de leitura e ampliação dos modos de produção de sig
> considerando a prática docente como um processo dinâmico, onde não só
> noções matemáticas estejam envolvidas. (ALMEIDA, 2013, p. 8)

Esses recortes nos possibilitam uma importante reflexão. Normalmente vo atenção ao docente escolar, da Educação Básica, mas essa prática docente perpassa to de atuação, ou seja, é importante que professores e professoras da Educação Superi atentem às suas práticas e atuações.

É preciso ir além do estudar diferentes metodologias, passando a viven licenciandas(os) para sermos motivadas(os) a, ao menos, tentar também fazer o necessitamos de professores que tenham uma perspectiva ampla de sua sala de aula ant inicie sua docência" (ALVES, 2013, p. 81), por isso a atenção à formação inicial reforçada.

As leituras realizadas nos apontam a necessidade de se pesquisar o que nos prop são os conteúdos matemáticos ditos como puros e acadêmicos, pertencentes ao matemá mais eles forem discutidos em perspectivas além da tradicional teórica/axiomática, ma ser a experiência discente e docente.

Além disso, uma característica marcante dessas leituras é o apontamento para que vem como produção de significados da e do discente para o texto matemático. Ess matemáticas precisam estar a serviço dessa produção de significados para e pela(o) d exercício para suas práticas futuras, sejam elas acadêmicas ou não. Essa demarcação m com o referencial teórico que lança luz à nossa questão e objetivos, o Modelo Semânticos.

Realizamos busca também em uma plataforma que nos possibilitasse o contato publicações de autoras e autores que utilizam o Modelo dos Campos Semânticos con teórico e/ou metodológico, denominada Rede de Pesquisa e Desenvolvimento Matemática – Rede Sigma-t, uma rede de pesquisa constituída por oitenta pes pesquisadoras, professores e professoras com interesse no Modelo dos Campos Semân

Ao pesquisarmos em seu acervo digital de teses e dissertações disponíveis e d restringirmos a busca entre os trabalhos que foram orientados pelo pesquisador Romulo encontramos duas dissertações que se relacionam com nossa pesquisa e com as temátic trabalhos discutidos no tópico anterior, por restringirem suas investigações a uma

Tabela 5: Trabalhos provenientes da pesquisa na rede Sigma-t

Título do Trabalho	Autor(a)	Ano
Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para dimensão.	JÚLIO, Rejane Siqueira	
Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear.	OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada de	

Fonte: Criado pela autora.

Júlio (2007) disserta sobre a produção de significados para a noção de dimensão discussões de disciplinas matemáticas relacionadas a Álgebra Linear. Caracteriza s como parte da reflexão teórica denominada "As idéias fundamentais da Matemática Matemática" por Lins (2006).

Uma das motivações do trabalho era divergir da crença de que antes de matemática é preciso aprender muita matemática. Suas ações e pensamentos eram volt curso de licenciatura que fosse baseado

> … em uma educação matemática, que lide com situações de sala de aula, ti a que os professores estão sujeitos na prática profissional. Além disso, professores discutam e experienciem nos cursos de licenciatura os processo significados matemáticos, não-matemáticos e as diferenças entre eles. (JÚL

Tendo o Modelo como referencial teórico, ao tratar não só do que se experienciar enquanto licencianda(o) num curso de matemática, mas também como (2007) explicita que

> … a matemática é o meio pelo qual se pode discutir a produção de significa e não-matemáticos e suas diferenças, mas, não a matemática pautada n matemático onde o que é verdade se dá por meio de axiomas, definições e numa matemática apresentada de modo que dê abertura para se discutir produção de significados. (JÚLIO, 2007, p. 14)

Esse modo de apresentar a matemática, de maneira diferente da dita tradicional, abordagem em que o conteúdo não seja justificado por suas aplicações, ou apenas por sim pelas possíveis reflexões que serão motivadas aos licenciandos e licenciandas 2002).

Como forma de explicitar a relação do Modelo com a abordagem citada, usarem

> • a diferença dos significados de que estamos falando não é questão de es
> interpretação ou versões de uma mesma essência: caracteriza, de fato,
> distintos; e
> • concebemos que a prática do professor deve ser na direção de criar na de
> espaço comunicativo compartilhado por todos. (OLIVEIRA, 2002, p. 26)

Oliveira (2002), mesmo investigando sobre transformações lineares, aponta pesquisa poderá, também, subsidiar discussões mais amplas sobre a formação inicial c professora de Matemática, como a nossa atualmente.

As discussões seguidas por essas duas dissertações nos orientaram na compree o Modelo dos Campos Semânticos visto no decorrer de uma pesquisa, desde o en respeito dos instrumentos da teoria até a utilização desses na análise proposta. Por ess aprofundarei neste momento a respeito de suas contribuições para minha escrita sem apresentado os instrumentos do Modelo.

Entretanto, antes de seguirmos para o próximo capítulo, fez-se necessário consu de nosso conhecimento que tratam de aplicações do conteúdo relacionado a variáveis diferentes formas de abordá-lo em sala de aula para essa determinada finalidade. Seguen dos dois trabalhos analisados.

Tabela 6: Trabalhos relacionados à temática de Variáveis Complexas

Título do Trabalho	**Autor(a)**	**Ano**
Objeto de aprendizagem para o ensino de números complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica	PINTO, José Eustáquio	
Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos	REIS NETO, Raimundo Martins	

Fonte: Criado pela autora.

As justificativas e objetivos desses trabalhos são diferentes das existentes em nos mostrou ser importante ter contato com discussões que envolvem o mesmo escolhemos – variáveis e números complexos.

Pinto (2015) centra sua pesquisa na criação de um Objeto de Aprendizage

ensino, de modo que os propósitos educacionais estejam bem definidos com relação a
de análise, síntese e reflexões." (PINTO, 2015, p. 23, grifo nosso). Na pesquisa, o OA
é composto de uma sequência didática que totalizou seis atividades digitais e interativa

A criação de um OA advém da necessidade de abordar os números complexos de
diferente da dita tradicional. Pinto (2015) afirma que a dificuldade em contextualizar
com a vivência estudantil, mesmo utilizando aplicações da área técnica em eletroeletrôn
docente de trabalhar esse conteúdo apenas em final de ano letivo fazem com que o en
pouco atraente.

Além disso, para o autor, o tópico números complexos "é quase sempre trabalha
superficial, enfatizando-se mais a parte algébrica que a geométrica, com cálculos repeti
atividades envolvendo aplicações." (PINTO, 2015, p. 27).

O autor abordou o conteúdo de números complexos de uma perspectiva q
representação geométrica, uma alternativa didática para se trabalhar aplicabilidade
eletroeletrônica, diversificando análises de circuitos elétricos antes realizadas
trigonometria.

Esse recurso, que foi nomeado pelo autor de Descomplicando os Complex
liberdade proveniente da tecnologia possibilitou o desenvolvimento da pesqui
preocupação também institucional, já que objetivou "com o OA construído minimizar a
encontradas pelos alunos das disciplinas que envolvem os números complexos e circu
bem como buscar a redução dos elevados índices de repetência e evasão escolar. (PI
16).

Reis Neto (2009), assim como Pinto (2015) possuía preocupações relacionadas
Nível Médio, mas voltadas para a Educação Básica, e não Educação Técnica.

Em sua dissertação, o autor procura "investigar, refletir e buscar formas alter
ensino e aprendizagem desses números." (REIS NETO, 2009, p. 15). A necessidade
metodologia advém da crença do autor na insuficiência do ensino mecanizado, que se
de técnicas operatórias e memorização, fazendo "com que os alunos apresentem muita
trabalhar com números complexos e até mesmo se neguem a aceitar sua existência." (

> a unidade imaginária é sem dúvida o principal obstáculo para o entendim
> (expansão do corpo dos reais para o corpo dos complexos), pois além da
> processo de abstração, muitos trazem, de forma muito categórica, o conc
> existe um número que elevado ao quadrado seja igual a um número negativ
> 2009, p. 16)

Cabe ressaltar que a opção do autor não foi a de privilegiar uma abordagem em outra, e sim estabelecer conexões entre a Álgebra e a Geometria, mas partindo da G esse fim. Em sua pesquisa de campo, Reis Neto (2015) constata que existe uma re dificuldade de manipulação de números complexos e definições existentes para números ao conjunto dos reais (R).

O fato de aprenderem que todo número elevado ao quadrado é igual a um núme torna um grande obstáculo no momento de apresentar a unidade imaginária. A escolha a unidade pelo método vetorial já permite a visualização da existência do número, ante ser definido.

Como recurso, sequências de atividades didáticas foram utilizadas na pesquis modo a impulsionar manipulações geométricas que desencadeavam manipulações a atividades foram desenvolvidas e analisadas com referenciais teóricos de Resoluções d Aprendizagem Significativa.

Nossa pesquisa possui referencial diferente dos utilizados nas duas pesquisas recorte, e por isso a fase das análises não é de nosso interesse. Porém, o modo de tratar de uma nova abordagem de números complexos e as justificativas utilizadas acresce nosso questionamento e posicionamento, ou seja, que a discussão desse tema é necessár nós acadêmicos, é preciso que essa discussão, textos, e materiais cheguem às salas de a de Licenciatura em Matemática e da Educação Básica.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

O referencial tem a função de nos dar embasamento teórico sobre o assunto q investigar. Não podemos avaliar as situações de pesquisa apenas com nossas opiniõ abordar os assuntos estando fundamentados em preceitos que tomamos como nossos g

Neste capítulo esclarecemos "de onde estamos falando" teoricamente, ou seja, o visão de mundo, de educação, do que é conhecimento, de como se dá a aprendizagem, questões importantes em uma pesquisa educacional dada sua tendência, e para isso literatura já disponível e publicada na área em que estamos investigando.

Em nossa pesquisa, utilizamos como referencial teórico o Modelo dos Campo (MCS), proposto pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins (1999, 20 compartilha ideias com Vygostky e Leontiev.

> O objetivo que guia, e guiou, sua criação e desenvolvimento [do MC instrumento (teórico) que possa oferecer suporte (teórico) ao professor em profissionais, em particular na sala de aula, ou, mais especificamente, perm dos processos de produção de significado que sejam finos o bastante pa interação produtiva com os alunos. (LINARDI, 2006, p. 31)

Para o Modelo, produzir significado é exatamente "*falar*" a respeito de "*algo*". palavras de Alves (2013) como suporte, esclarecemos que "quando dizemos falar referindo tanto à fala propriamente dita (oral) quanto à escrita, aos gestos, representaçõe seja, a todas as formas que um indivíduo tem para se expressar." (ALVES, 2013, p. 37) trás luz à importância de conhecer os termos de um referencial teórico antes de utili palavras utilizadas para caracterizar situações não necessariamente possuem seu sentid

Ainda com a função de elucidar os termos, Almeida (2015) afirma que esse "algo é constituído durante a fala do sujeito, acrescentando que "pode ser qualquer coisa sob pessoa está falando, seja ela 'concreta', por exemplo, uma mesa em nossa frente, ou como, por exemplo, palavras e desenhos em um livro" (ALMEIDA, 2013, p. 12 "produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poder dizer de um objeto e sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daque (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 102).

sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação - junto
sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação” (LINS, 1993, p. 86).

Ou seja, primeiro o sujeito precisa acreditar em algo, e a maneira dele demonstr
por meio de uma enunciação é afirmando-a. Ressaltamos que a afirmação se refere a “
de comunicação aceita por um interlocutor; não precisa ser de forma linguística” (LINS

Já sobre a justificação, é preciso pontuar que diferentes justificações
conhecimentos diferentes, isso porque a justificação está estreitamente relacionada co
legitimidade. Nem tudo que é legítimo para um leitor (direção para qual o autor enuncia)
para um outro.

Com esse pensamento é possível dizer da ausência de juízo de valores em uma an
na leitura positiva – não existe uma verdade universal ao discutir sobre produção de c
em uma dada atividade, o que é possível de ser feito é uma negociação de legitimida
como uma sugestão de outros modos de produzir significados à partir dos identificados

Torna-se pertinente ressaltar que até os significados identificados podem não
fiéis ao que o sujeito enunciou, eles dizem respeito a nossa leitura dos resíduos. Isso a
de acordo com o Modelo, a noção de comunicação é diferente da tradicional, como vere

Para o MCS, o processo de convergência de informações de fato acontece apena
em um espaço comunicativo, que é quando o autor (sujeito que produz a enunciaç
possuem os mesmos modos de produção de significados (interlocutores).

O processo comunicativo proposto por Lins possui três elementos constituti
anteriormente: autor, texto e leitor.

> O autor é aquele que, nesse processo, produz a enunciação: um profess
> expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos
> apresentando sua obra. O leitor é aquele que, ainda nesse processo, se pr
> significados para os resíduos das enunciações como, por exemplo, o aluno
> aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte que analisa a ob
> plástico ou uma pessoa que leia um romance buscando entender a história do
> é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor
> significado. (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 103)

Separando o processo nas duas perspectivas possíveis – a do autor e a do leit
elaborar a seguinte dinâmica:

> resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) en
> 1999, p. 82) Além disso, "é apenas na medida que o leitor fala, isto é, pro
> para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leit
> p. 82). (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 104)

Ao longo desse processo, a comunicação efetiva ocorre apenas se existir o com
de interlocutores entre autor e leitor. "Numa inversão conceitual, 'comunicação' não
mais a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para a outra', e sim a 'dois sujeitos cogn
na direção de um mesmo interlocutor.'" (LINS, 2012, p. 24). Para nossa pesquisa –
aplicação de um produto educacional em sala de aula, seguida de uma análise do mat
juntamente dos resíduos de enunciação produzidos – os processos de imper
estranhamento e descentramento serão incorporados a nossa leitura.

Em sala de aula, é possível identificar momentos em que alunos e alunas ap
fechadas ao que está sendo dito pelo professor ou professora, ou seja, quando as(os) est
em uma posição de "não compartilharem novos interlocutores em situação de interaçã
diferente daqueles para o qual eles estavam voltados; de não se propor a produzir signi
outra direção." (SILVA, 2012, p. 79).

Esta situação foi denominada por Silva (2003) como processo de impermeabiliza
um aprendiz em uma sala de aula, fica impermeável a tudo o que se diz ali, não m
maneira de operar." (SILVA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 111).

Silva (2012) nos alerta que "alguns casos de impermeabilidade podem levar a
ou limite epistemológico e a menos que o estudante mude sua maneira de operar, ele n
problema ou situação proposta." (SILVA, 2012, p. 79).

Torna-se necessário um olhar atento e aberto por parte do professor e pr
identificar as dificuldades apresentadas, seja ela um obstáculo ou um limite epistemoló
as atividades propostas.

O papel docente, mais uma vez, não será de fazer juízo de valor, mas sim de
função de apresentar outras formas de operar, diferentes da que o aluno ou aluna em q
operando, inclusive a legitimada pela matemática, pois "[...] na medida em que o profe
lidar com os conhecimentos que os alunos produzem para idéias matemáticas a p
experiências fora da escola e até mesmo dentro da escola, torna-se impraticável criar e

A docência carrega uma grande responsabilidade, como se fôssemos detentora de um conhecimento e ainda capazes de transpô-lo para quem quer que seja, com ap didaticamente, e sabemos que isso não ocorre na prática, o que gera insegurança Precisamos aprender a lidar com o erro e dificuldades sem ser pela falta.

"Para Lins (1993b), uma dificuldade deve ser entendida de duas maneiras exclu caracteriza-se como um obstáculo epistemológico ou como um limite epistemológ OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 117). Ou seja, a impermeabilização que gera a dificulda identificá-las e, principalmente, diferenciá-las?

Segundo o Modelo, "limite epistemológico é a impossibilidade do suj significados para o resíduo de uma enunciação numa certa direção devido a sua manei (SILVA, 2012, p. 88). Assim, "frente a um limite epistemológico, ou o aluno não co sua maneira de operar (e, portanto, nem mesmo realizando interações, altera sua significados) ou ele continua sem produzir algum significado." (ALVES, 2013, p. 28)

Este é o caso em que, se o sujeito não alterar seu modo de operar pode se enc local paralisante, onde não conseguirá produzir novos significados, sendo de total impo mediador docente, já que "o problema não está na diferença, mas exatamente na recusa la e lidar com ela frente a frente. Naturaliza-se a recusa passando ao aluno a responsabi com ela: decifra-me ou te devoro, nada mais." (LINS, 2004a, p. 116).

Lins (2001) nos aponta a importância dessa noção de limite para a(o) docente, p em momento de planejamento de sua aula, quando afirma que

> i) toda vez que significado é produzido existe uma restrição no horizont produções de significado, implicando que, (ii) se aprendizagem é entendida eu penso – como aprender a produzir significado, ensinar deve também a discussão explícita dos limites criados nesse processo. (LINS, 2001, p. 45)

Já o obstáculo epistemológico pode acontecer de duas maneiras:

> ou o aluno não produz significados numa determinada atividade ou produz uma direção distinta da do professor, mas que num segundo momento, ap alguém – seja o professor ou a leitura de um livro, por exemplo – ou mesmo *transpor* este *obstáculo* e produzir significado em alguma direção, mudan operar. (ALVES, 2013, p. 28)

A citação acima reforça a importância da interação. Interação essa, professor(a

A noção de estranhamento já surgiu anteriormente em nossa escrita, no mon

apontamos o estudo da matemática do matemático, pelo licenciando e licenciand

oportunidade de se tornar sensível à sensação de estranhamento.

Esse estranhamento é descrito no MCS como "o processo no qual o sujeit

enunciação do outro como algo que não possa ser dito, como algo que não seja legíti

OLIVEIRA; ALMEIDA, 2022, p. 112).

Um exemplo cotidiano para qualquer docente é a fala de que "a matemática não

ou seja, em algum momento o conteúdo enunciado em sala de aula não foi legitimad

enunciador dessa frase. Se não foi legitimado, ele não produzirá significados par

estabelecida, não porque não quer, mas, como em Lins (2004a) porque não pode:

> "o que é que o aluno pode dizer quando o professor afirma - e 'dem
> cardinalidade dos números reais é maior que a cardinalidade dos número
> infinito maior que o outro? Isso é verdadeiramente monstruoso para o
> professor - o representante da Matemática do matemático - embora
> reconhecido como peculiar, é nada mais que um monstro de estimação." (
> 116)

O interessante é notar que esse comportamento não é intrínseco de alunos

Educação Básica.

Os números complexos demoraram a serem aceitos como números por matemát

referência na época, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com

os denominamos: o símbolo i é a "unidade imaginária" e os números desse novo

"complexos". Outros números também passaram pelo mesmo processo de

estranhamento) – irracionais eram os "inexprimíveis" e "quantidades fictícias" n

negativos.

Isso ocorreu, pois, a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que

correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roqu

experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de

noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de enti

operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confo

consequência, aceitas socialmente.

> Quando priorizamos manter a interação em sala de aula, criando um espaço
> utilização de qualquer situação (seja ela realista ou não) não se sustenta se
> parte do professor, a tentativa de compreender de onde o aluno fala, se não se
> o "intrinsecamente" desse aluno, que é o exercício do descentramento. (Ol
> p. 208)

Já para a formação docente,

> Com o movimento de descentramento pretende-se que o professor/futu
> Matemática evite naturalizar seus modos de produção de significados
> impossibilitá-lo de conseguir ler o estranhamento acontecendo em sua sala
> isso, possa direcionar suas ações na tentativa de criar em sala de aula um espa
> (LINS, 1999 apud OLIVEIRA, 2012, p. 212)

A centralidade dessas duas noções, de estranhamento e descentramento, justific
cursos como os que foram propostos nas dissertações que aqui utilizamos como refere
propomos nessa dissertação para um Curso de Variáveis Complexas.

Por meio das noções gerais descritas e de outras mais internas à teoria, reunimo
para desde a criação de nosso material didático até a análise dos resíduos de en
obtivemos na aplicação de nosso produto educacional.

No próximo capítulo, descrevemos nossa metodologia de pesquisa e também
proposta para um Curso de Variáveis Complexas para a Licenciatura em Matemática, c
nosso produto educacional.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, composto de duas seções, discutiremos na primeira os aspect
caracterização de nossa pesquisa, abrangendo nossa abordagem metodológica, ambient
sujeitos da investigação e método de coleta dos resíduos que foram posteriormente ana

Na segunda, apresentamos a caracterização metodológica da disciplina
Complexas formatada durante a pesquisa, pontuando as decisões tomadas quanto à po
nesta sala de aula, o material didático utilizado e o formato de avaliação utilizado.

4.1 Caracterização da pesquisa

Nossa metodologia de pesquisa é caracterizada por uma abordagem q
investigação, na direção definida por Bogdan e Biklen (2013). Esses autores demarcam
como sendo qualitativa desde que ela se aproxime das cinco características listadas aba

> I) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natura
> investigador o instrumento principal. II) A investigação qualitativa é desc
> recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. III) O
> interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou p
> investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não rec
> provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas pre
> significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadore
> deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoa
> suas vidas. (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 47-51).

Além de notarmos uma identificação de nossa pesquisa às características citadas
capazes de relacionar um dos focos de nossa pesquisa (tornar o texto matemático u
demanda de produção de significados por parte discente para vivenciar o estranhament
de uma pesquisa qualitativa, que pode ser visto como a ação de tentar "compreend
mediante o qual as pessoas constroem significados[3] e descrever em que consistem
significados." (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 70).

Nosso ambiente de pesquisa foi composto por uma sala de aula do Ensino Su
curso de Licenciatura em Matemática. Essa sala de aula estava localizada em um campu
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais. As aulas da

O professor regente dessa disciplina e coordenador do curso de Licenciatura em
na ocasião possuía pesquisa em andamento sobre temáticas intrínsecas ao assunto
Complexas. Assim, a pesquisa de campo foi realizada em colaboração de modo a at
projetos de pesquisa.

A disciplina que observamos, intitulada Introdução às Variáveis Comp
Licenciatura, foi ofertada como uma disciplina eletiva para estudantes da Licenciatura em
desse Instituto, possuindo ementa a necessária para a ocorrência das duas pesquisas con

Bogdan e Biklen (2013) afirmam que independente do material utilizado para
campo, como caderno de campo, equipamento de vídeo ou de áudio, as informações e da
sempre passam pelos olhos de quem realizou a pesquisa no momento de análi
entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise" (BOGDAN e BIKLEN

Essa concepção reforça a importância do contato direto não só com o universo
mas com os sujeitos dessa pesquisa enquanto ela acontece. Aplicamos um Questi
Avaliação Diagnóstica, anexos I e II deste trabalho – respectivamente, antes das
começarem. Nossa intenção com esses dois recursos foi de conhecer parte do histórico
leituras das(os) estudantes participantes, além de recolher informações que poderiam
momento de análise dos resíduos de enunciação das tarefas finais da disciplina.

Assim, as próprias tarefas aplicadas nos serviram de recurso para coleta de
enunciação por parte das(os) participantes da pesquisa, além dos registros do cader
realizados nos dois encontros que foram possíveis no semestre de aplicação da pesquis

Visto que precisaríamos utilizar registros próprios das(os) participantes, alé
observacionais, diretrizes relativas à ética precisaram ser aplicadas em nossa pesquisa.

Segundo Bogdan e Biklen (2013), existem dois pontos cruciais para uma inve
sujeitos humanos estar de acordo com preceitos de proteção de informações. O primeiro
"sujeitos aderem voluntariamente aos projetos de investigação, cientes da natureza do
perigos e obrigações nele envolvidos." (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 75). Para isso,
Compromisso Ético (apêndice III) foi redigido e assinado por todas e todos os pa
pesquisa, tendo sido escrito e revisado pela pesquisadora e pelo professor regente da

Para Lins (2012), o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, "em a dizemos que a construção teórica do MCS visa servir de ferramenta para pesqui professores(as) produzirem seus significados a partir da análise dos resíduos de en possuem, sejam esses resíduos os registros produzidos em meio a uma pesquisa, un enunciações feitas por alunos e alunas em meio a uma atividade proposta em sala de au o conceito de "atividade" no sentido proposto por Leontiev).

É preciso ressaltar que a análise feita pelo pesquisador ou pesquisadora, a parti de enunciação coletados, precisa ser realizada a partir de uma leitura positiva dos resíd

> Para nós, a Matemática do professor de matemática é caracterizada por nel além dos significados matemáticos, significados não matemáticos. Há exemplos, como o de que 'fração é pizza', 'decimais são dinheiro' e 'númer dívidas'. Mas isto não basta, porque o professor não tem que dar conta concorda com o que ele diz, com o que está 'certo'. O professor precisa ser ca seu aluno diz, mesmo que esteja 'errado', tanto quanto como quando est 2004b, p. 3)

A leitura positiva visa uma imersão de quem está analisando ao que foi registrado de entender de onde o sujeito enunciador está falando, ou seja, ao invés de analisar visando o que ali falta, precisa-se entender como esse sujeito opera e porque diz o que imersão, contamos com as noções gerais do MCS que foram discutidas no terceiro dissertação.

Na sessão seguinte, explicitamos nossa proposta metodológica, dizendo da formatação das tarefas até o processo avaliativo do Curso formatado.

4.2 Caracterização da disciplina

Nossa proposta para a metodologia de ensino para a disciplina, tomando como premissas do Modelo dos Campos Semânticos, se distancia da ação docente que, enga numa transmissão efetiva de conhecimento de uma pessoa para outra. Para nós essa p possível. Conhecer a matemática como algo preconcebido e imutável não causaria o e aos licenciandos e licenciandas, seria apenas uma repetição do que acompanhamos que por anos e anos nas disciplinas matemáticas nas Licenciaturas em Matemática.

Para isso, precisariam se deparar com o desafio e, invés de aplicar as soluçõ divulgadas e conhecidas pelo mundo matemático, precisariam por si só, e as vezes em g uma estratégia em busca do entendimento. Em suas mãos estaria a necessidade de cr nova ferramenta. Isto se relaciona com o nosso objetivo de investigação, era precis resíduos de informações produzidos frente a temas de Variáveis Complexas. Logo, importância receber a reflexão discente, sem juízo de valor e sem intervenções ou cor linhas de raciocínio ali criadas.

Além disso, nossa pesquisa é de cunho qualitativo, abordagem essa que "exige seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para consti que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objet (BOGDAN e BIKLEN, 2013, p. 49). Nesse exercício de se ver como um(a) p significados, assim como em uma sala de aula tradicional, o diverso acontece.

Neste ponto, reforçamos a preocupação de que a tarefa possua um texto não Silva (2003) afirma, "o fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permit professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando." (SILVA, Logo, não basta criar um ambiente propício e confortável para que a pessoa fale, é preci a ela entregue mobilize-a a resolvê-lo.

Para essa finalidade, desenvolvemos o que denominamos de fichas de trabalho trabalho são constituídas de tarefas, situações problema e textos para discussão, r atenção em duas características centrais de enunciados destinados à produção de signif familiares e não-usuais. Segundo Silva (2003), um enunciado é "familiar, no sentido d as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha q um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo." (SILVA, 2003, p. 41).

Cada tema trabalhado na disciplina contava com até três fichas de trabalho. Nes o processo de apresentação e desenvolvimento esperado do tema foi nomeado de ciclo.

A estrutura da primeira ficha de um ciclo contava com a introdução, em que te histórico eram apresentados. Este é um recurso utilizado para aproximar o leitor do co surgiram as primeiras discussões acerca do que seria tratado à diante.

diferentes legitimidades seriam expostas e negociadas. Justificamos metodologicamen
de produção e discussão a uma influência da Assimilação Solidária. Na AS,

> … quem "não sabe" fala, explica, e quem "sabe" faz perguntas. Se un
> entendeu, o resto do grupo deve perguntar de volta: "o quê você entende
> ocasiões de síntese, aquele que "sabe" explica. O sujeito falante deve ocupar
> da sua própria aprendizagem: "o sujeito é 'ouvido' e devolve-se a ele aquil
> do que ele diz, o significado do que disse; é falando que se aprende, é ouvind
> (SILVA, 1998, p. 163).

Essa dinâmica foi benéfica para nossa sala de aula devido nosso entendimento
a produção de conhecimento. O trabalho inicial em grupo pode, por vezes, beneficiar
produção de significados, e nossa intenção era gerar a discussão dos diferentes m
emergissem, por isso a opção de organizar o tempo nesses três momentos.

Porém, mesmo estabelecendo esta dinâmica, se a ordem de fala não fo
previamente, um modo de produção de significados pode, ainda assim, ser beneficiado
de discussão em grupo, assim, é preciso propor um novo comportamento. No nosso ca
que a ordem de fala fosse iniciada por quem tivesse dúvidas e incertezas, seguido por
mais confiança de que a resposta obtida era a almejada na tarefa em questão.

Um ponto desafiador nessa dinâmica constituída é relacionado ao impulso doc
as dúvidas e muitas vezes orientar nossa turma no caminho de uma solução por nós já

É preciso ter em mente que esse comportamento, no ambiente que queremos
fichas de trabalho, mina toda e qualquer produção de significados que esteja em uma dir
da nossa como regente da aula, pois "se para nós o significado produzido é a fala,
observarmos e interferirmos no seu processo de produção se não dermos voz aos no
(OLIVEIRA, 2002, p. 100).

Nosso papel nessa sala de aula foi o de mediar a discussão e, no momento cer
uma maneira, a legitimada pelo matemático, de resolver e utilizar os conceitos
conhecidos academicamente, porém, "conduzir atividades que possibilitem ao al
significados exige também do professor certa experiência matemática, no que diz res
com possíveis significados produzidos para idéias matemáticas." (OLIVEIRA, 2002, p

Em outras palavras, é possível que, em algum momento, a discussão iniciada

A noção de tempo, de quando agir e quando interferir, tendo o Modelo como
adquirida com o uso, como dito por quem compartilha de nosso mesmo referencial teó
Modelo é colocá-lo em prática.

A teoria matemática vigente era também apresentada e formalizada. Isso foi ne
permitir a utilização das fichas não só como atividades em sala, mas também como
teórico para uma disciplina. Isso implica que a teoria matemática envolvida num dete
está inserida nas fichas de trabalho programadas para essa discussão, o diferencial é o m
ela é apresentada, após os momentos de discussão e produção.

Esse movimento metodológico faz com que o andamento das discus
desenvolvimento da turma. As definições nunca são apresentadas de antemão em
produção matemática da turma é uma prioridade, seguida do trabalho com a produçã
vigente.

Destacamos desde já a importância da adaptação frente ao que ocorre em sal
produto educacional aqui desenvolvido não está fechado e finalizado, cada sala de au
próprias características e necessidades, sendo necessária uma leitura por parte do
ambiente. A nossa proposta é uma das possíveis, e serve para mostrar que esse form
possível.

A avaliação do curso foi inspirada no trabalho desenvolvido por Baldino (1987,
1995c; Cabral, 1992), denominado Contrato de Trabalho.

O Contrato de Trabalho é um dos instrumentos integrantes da Assimilação Soli
qual

> caracteriza-se como proposta interventora na sala de aula, mudando o conce
> seja, instituindo valores que vão além do valor atribuído à competênci
> Considera-se, nessa abordagem, acoplado ao prêmio ao saber, o justo prê
> coletivo produzido em sala de aula. (SILVA, 1998, p. 157)

Utilizar os preceitos da AS para avaliação implica na projeção de uma avaliaçã
realizado. Isso significa que a produção ocorrida em sala de aula constitui instrumento

Vale ressaltar que, mesmo existindo discussões e produção em grupo, a avaliaç
da disciplina seria contabilizada individualmente, proporcional ao número total de aula
cursada. Em situações de ausência que não fosse por motivo de força maior, como em

frente uma nova metodologia, seja individual ou em grupo, é a demanda da disciplina, lo
justo que a avaliação ser sobre a ação discente durante esse processo.

Ao adaptarmos nossa proposta metodológica às necessidades que visualizamos p
de Variáveis Complexas, dividimos o tempo disponível de um semestre letivo em
momentos de estudo.

O primeiro momento era centrado no estudo de Geometria Analítica e Número
em que pudemos realizar nossa investigação e intervenção. O segundo momento foi
Equações Algébricas e Funções Complexas, voltado para a investigação do outro
também participante do Programa Linsiano.

Utilizamos textos acadêmicos para consulta, como o *História da matemátic*
crítica, desfazendo mitos e lendas (2012), de Tatiana Roque, e *Conceitos fundamentais d*
(2010), de Bento de Jesus Caraça para produção de nosso material didático, que co
Produto Educacional, composto por 10 tarefas (fichas de trabalho) inseridas em 5 ciclos
a seguir na ordem de aplicação por nós escolhida, juntamente de seus respectivos objet

No capítulo seguinte, relatamos nossa experiência na pesquisa de campo duran
da disciplina para ensino de variáveis complexas para Licenciatura em Matemática, e a
à discussão nossa análise a partir dos resíduos de enunciação coletados em nossa aplicaç
educacional.

5 A DINÂMICA DA SALA DE AULA

Neste capítulo, discutiremos a dinâmica da sala de aula em que ocorreu nossa c disciplina Introdução a Variáveis Complexas para Licenciatura. Nosso interesse esteve os elementos envolvidos nessa dinâmica entendidos como importantes na formaçã metodológica e epistemológica do futuro professor e professora de matemática. Com is que a disciplina não foi concebida como apenas de conteúdo matemático, como su tradicional, as(os) estudantes vivenciaram uma experiência diferente em sala de aula.

Observamos as dimensões epistemológicas, metodológicas e cognitivas que processos de ensino e aprendizagem. Em particular, nosso interesse esteve em avalia fichas de trabalho quanto a suas potencialidades para orientar o processo de ensino da maneira alternativa a aulas exclusivamente expositivo-explicativas a fim de elaborar Educacional.

5.1 A história da disciplina

Nosso ambiente de pesquisa foi uma sala de aula de Ensino Superior, loca Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais.

A disciplina então acompanhada, intitulada Introdução às Variáveis Com Licenciatura, foi ofertada como uma disciplina eletiva para estudantes da Licenciatura e desse Instituto. Os tópicos indicados na ementa foram divididos em duas temáticas variáveis complexas: números complexos e sua representação geométrica e funçõe Nossa pesquisa se debruçou no primeiro momento da disciplina, trabalhando com o números complexos, operações com números complexos e representação geométrica d

Nossa pesquisa contou com nove participantes. Este grupo era composto por a da Licenciatura em Matemática desse Instituto, estudantes do 7º período do curso, iden seguintes pseudônimos: Cristina, Doronice, Jota, Juliana, Lero, Malu, Manoel, Nyna e

A disciplina inicia, no primeiro dia letivo, com a apresentação de cada estudante

explicitamos os processos postos em marcha, junto do texto das tarefas e análise realiza
por nós realizada em contato com os resíduos de enunciação coletados nos encontros.

Pontuamos de antemão que os resíduos a seguir expostos são de quatro dos nove
A escolha de Doronice, Jota, Lero e Sandora é justificada pelo volume de resíduos prod
foram as pessoas com menor número de faltas durante o período letivo de aplicação,
uma leitura com maior continuidade das produções individuais e coletivas.

A primeira ficha de trabalho constituída pela tarefa 1, denominada *Resolver*
Algébricas, visava discussão, decorrente de quatro equações algébricas propostas,
atribuído à expressão “resolver uma equação” e resolução das equações propostas.
produção de significados das(os) discentes é deflagrado a partir da primeira tarefa prop

***

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0$;

b) $x^2 + 4 = 0$;

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

1. O que significa a expressão matemática ”resolver uma equação”?

2. Resolva as equações acima.

3. Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?

***

Com essa discussão, tínhamos como objetivo observar o que os alunos podia
resolução de equações e gerar a necessidade de estender o conjunto dos números reais,
as equações admitam solução.

A motivação da discussão de propriedades do conjunto dos números reais este
longo dos ciclos seguintes desde este primeiro, não só a fim de estabelecer um comp
novo a ser desenvolvido, mas também porque acreditamos que, ao estudar o novo, apr
também sobre o que consideramos conhecido, no caso, os números reais. Para a prime

Sandora: Existem três coeficientes a, b e c, onde o coeficiente angular a, determina s
crescente ou decrescente. O delta pode ser $\Delta = 0$, única raiz real; $\Delta < 0$, não existe raíz
complexas; $\Delta > 0$, existem duas raízes reais.

Lero, Jota e Doronice, ao produzirem seus significados, sugerem novos objetos
à parte constituinte de uma equação, tais como a igualdade e expressão matemática.
que manipulações podem ser realizadas, mas a necessidade de definir/confirmar uma i

Sandora já produz significado para um tipo específico de equação, as de 2º grau
que sua direção decorre da exposição de quatro equações de 2º grau na própria quest
assim a exposição de suas crenças-afirmações não indica sua produção de significad
significa resolver uma equação.

Após indagação, houve o momento dedicado a resolução da tarefa das quatro eq
propósito era o de fazê-los reencontrar uma situação comum no estudo de equações do
que é o surgimento de raízes quadradas de valores negativos – casos das letras b) e d).

Nesses dois casos específicos, Lero afirma não ser possível resolver a partir do
se depara com as raízes negativas.

Jota e Sandora justificam de outra maneira, indicando que esses casos são de
não possuem raízes reais ao calcularem o valor de Δ e encontrarem valores negativ
enunciações são condizentes com o que responderam na questão anterior. Jota diz
significa encontrar ou não os valores que satisfazem a igualdade, ou seja, o fato
encontrado não implicou no apontamento de ser impossível resolver as equações. Entret
em nenhum momento afirmou que o encontro ou não de raízes implica em ter resolvido
Ainda assim, suas afirmações podem ser lidas como estipulações locais, já que a forma
segunda questão foi baseada na afirmação realizada anteriormente.

Doronice é a única participante que não encerra os cálculos ao encontrar $\Delta <$
inclusive notação de números complexos, ainda não apresentada por nós, na man
encontro de duas raízes complexas como solução. Porém, ao solicitarmos na discus
Doronice falasse sobre o surgimento do índice i em seus cálculos, nos respondeu que
sabe explicar, mas sabe aplicar”.

Doronice e Sandora são participantes que já haviam cursado discipli
Trigonometria e Números Complexos. Por isso, ao analisarmos o questionário oferecido
já contávamos com a possibilidade de obtermos resíduos de enunciação que apontasser
do conjunto dos números complexos, mas é perceptível a diferença dos significados p
cada uma à respeito deste conteúdo ao analisarmos seus resíduos de enunciação.

Em nossa leitura, Sandora utiliza a noção de números complexos como uma jus
a existência de raízes quadradas de números negativos; Doronice utiliza essa mesma
para justificar a existência, mas também para manipular os cálculos até a notação
"novo" conjunto.

Nosso último questionamento dessa primeira ficha motivava os participantes
partir das resoluções individuais e do grupo, e em seguida apontarem as informações
obter à partir dessas resoluções.

Lero: Eu não consegui chegar em um resultado final da igualdade em algumas equaçõ

Nossa leitura perante os resíduos de enunciação de Lero é de que pode existir
obstáculo epistemológico em sua produção de significados. Lero não afirmou que as
existem apenas no conjunto dos números reais, apontando a possibilidade de exist
conjunto numérico ainda desconhecido, mas sim que a resolução é impossível, ou
momento ele não havia criado/definido objetos que tornassem possível as resoluções p

Nossa leitura partindo da escrita de Sandora nos aponta também para uma noçã
raízes não forem reais, não podem ser consideradas uma solução:

Sandora: O delta vai determinar se a equação terá raízes ou será complexa.

A afirmação nos aponta para uma possível distinção entre raiz e resultado
princípio de que um resultado complexo não é considerado uma raiz, sendo apenas um
a equação.

Doronice: Utilização de método sem compreensão.

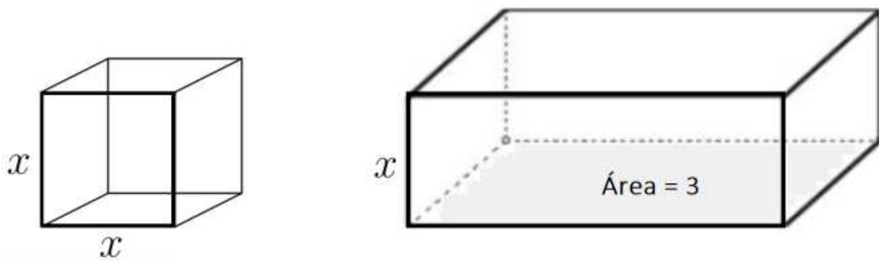
Doronice, que até o momento líamos como a participante que havia produzido
relacionados ao conjunto dos números complexos nos faz refletir a partir de sua en
manipulação automática, meramente mecânica, poderia ser considerada como

Assim, no segundo ciclo, dividimos a discussão em duas tarefas, *Tarefa 2.1 –* *geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico*. O objetivo uma tentativa da(o) estudante observar, em uma situação geométrica, a existência complexa para analisarmos a sua produção de significados. Segue abaixo o problema n

***

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico[4]

Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 é igual à aresta do cubo.



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que V = V' + 1 na tabela abaixo:

X	*V*	*V'+ 1*
1		
2		
3		
4		

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

***

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

cujas raízes podem ser escritas sob a forma

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad (2)$$

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado di *for negativa? Neste caso a radiciação não é possível em R, por consequência a expressão das raízes* *sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o probler solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.*

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse comc do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebrist herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resoluç

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), er linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$, *reduz-se a equação (3) à forma*

$$y^3 + ay + b = 0$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, pr resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e ma se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à res Determine x de modo que V = V' + 1.

Como $V = x^3$ *e* $V' = 3x + 1$*, o problema leva imediatamente à seguinte equação:* $x^3 = 3x + 1$*, qu (4).*

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. *e, portanto, a resolução (5) dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$, *mas esta raiz não existe.*

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da *problema: $x^3 = 3x + 1$. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida entr visto que para x = 1, 8; V = 5, 832 < V' + 1 = 6, 4 e para x = 1, 9, V = 6, 859 > V ' + 1 = 6, 7.*

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos c

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

***

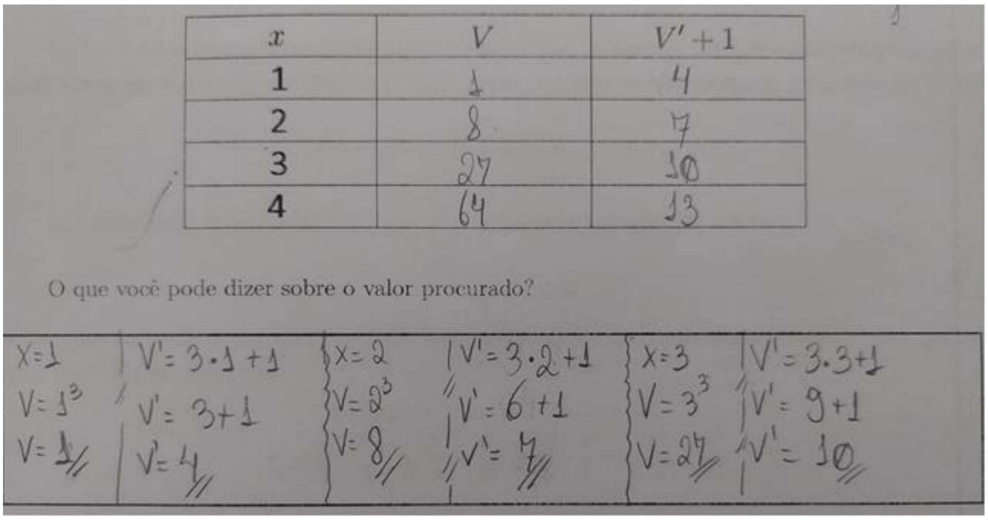
Nosso problema motivador pode ser simplificado por uma equação. Esta escolha p como mais do que já é realizado, já que a existência dos números complexos é normalm em textos didáticos, considerando o conhecimento relacionado aos números reai manipulação algébrica tendo como finalidade o encontro de uma solução para uma eq pouco tempo, considerávamos não existir.

Porém, o estranhamento aqui gerado é justamente por não apresentarmos uma contexto. A equação é proveniente de um problema real, palpável, envolvendo uma r "Se podemos medir o comprimento dessa aresta, como encontrá-lo através de considerada sem solução?", ou ainda, "Se o valor de x precisa estar compreendido en que são dois valores reais, porque não encontramos x como uma solução também real

A questão final desse ciclo aponta para o traçado de uma estratégia, é preciso ente problema e o que precisa ser manipulado, ou o que está impedindo a manipulação, pa elaborar um método de resolução. Esperávamos obter resíduos de enunciação n insuficiência de ferramentas conhecidas, pelo conjunto dos números reais, que permita da situação proposta.

Iniciada a produção da Tarefa 2.1, constatamos uma primeira "dificuldade", relacion do volume de um paralelepípedo. Neste momento a intervenção docente foi mobiliz objetivo da lista não era a utilização da fórmula do volume em si, e sim a compa resultados, não vimos problema em motivá-los a discutirem sobre qual seria o for fórmula a ser utilizada.

Lero não produziu significado na direção que imaginávamos para a primeira dema Ao indagarmos na Tarefa 2.1 sobre o que poderiam dizer sobre o valor procurado após p da tabela, Lero apenas indicou formalmente os cálculos realizados.



x	V	$V'+1$
1	1	4
2	8	7
3	27	10
4	64	13

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

X=1 V=1³ V=1	V'=3·1+1 V'=3+1 V=4	x=2 V=2³ V=8	V'=3·2+1 V'=6+1 V'=7	X=3 V=3³ V=27	V'=3·3+1 V'=9+1 V'=10

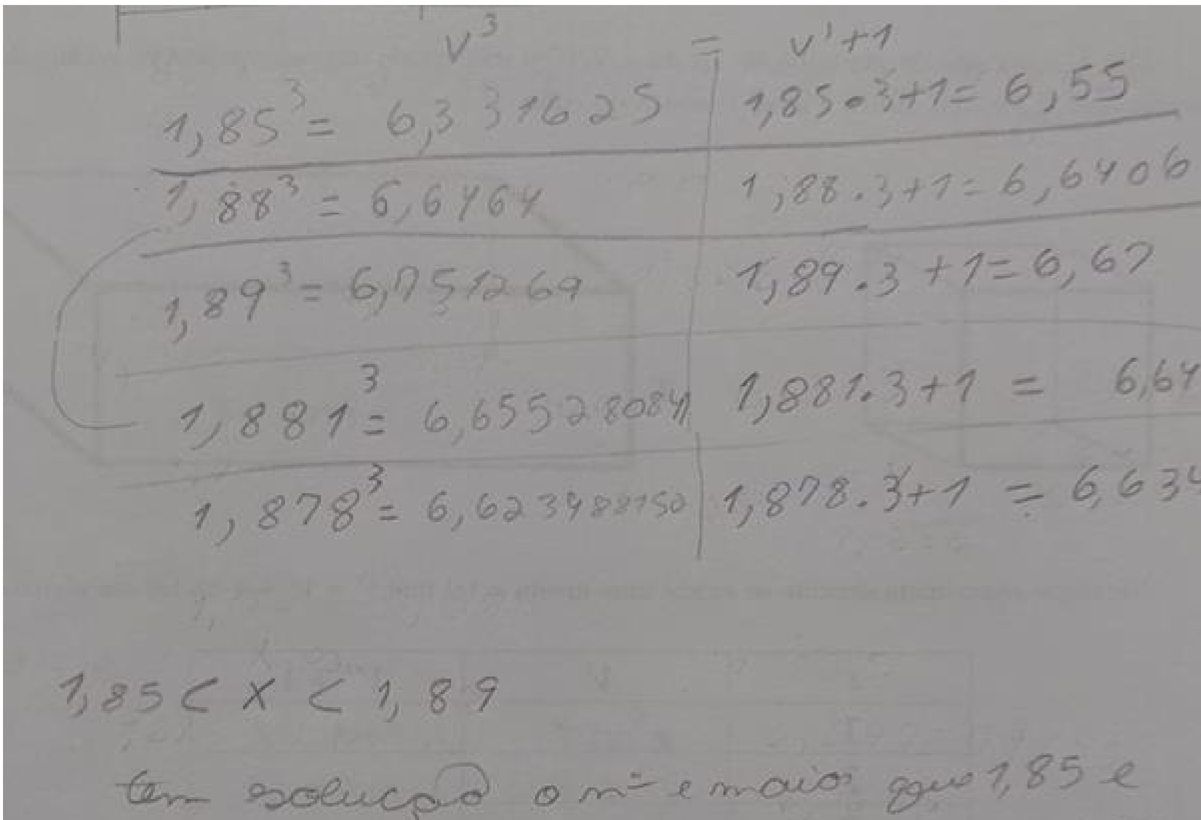
Jota, Sandora e Doronice também indicam seus cálculos na tabela fornecida, certa previsão para o valor x de nosso interesse, ao notarem pelos seus cálculos a comportamento de quando x = 1 para quando x > 1.

Jota: O valor de x está próximo da raiz de 3.

Sandora: O que eu percebo é que o valor de x está próximo quando x está entre 1 e 2.

Doronice: Tem solução, o número é maior que 1,85 e menor que 1,89. Conforme o cál

Doronice inclusive indicou formalmente a equação algébrica referente à situaç como podemos notar no recorte de sua ficha a seguir.



$V^3 = V'+1$

$1,85^3 = 6,331625$	$1,85 \cdot 3+1 = 6,55$
$1,88^3 = 6,6464$	$1,88 \cdot 3+1 = 6,6406$
$1,89^3 = 6,751269$	$1,89 \cdot 3+1 = 6,67$
$1,881^3 = 6,65528084$	$1,881 \cdot 3+1 = 6,64$
$1,878^3 = 6,623488150$	$1,878 \cdot 3+1 = 6,63$

$1,85 < x < 1,89$

tem solução o nº é maior que 1,85 e

Realizamos então em seguida a leitura da Tarefa 2.2. Este momento transformou
da turma frente ao que estavam manipulando. Na Tarefa 2.1, por meio de testes individu
discussão em grupo afirmaram existir soluções reais para o valor x de interesse, inclusi
intervalos para melhor demarcação desse valor até então desconhecido.

Quando a produção do matemático para o mesmo problema é exposta, surge o qu
geral, como através da fórmula da equação do 3º grau aparentemente não existe uma
presença da raiz quadrada de – ¾ sendo que, por aproximação, foi possível determinar
de solução para o problema proposto?

Com essa nova situação instaurada, Lero enuncia que achava mais fácil então en
procurada por aproximação, já que não tinha conhecimento para achar uma solução.
relata:

Lero: O problema fica menos difícil de responder se for por eliminação, utilizando vári
valores aproximados ao resultado da equação. Concluo que eu não possuo conhecimento
tais problemas.

Mesmo com a sugestão da própria tarefa de que a altura solicitada (valo
compreendida em um intervalo numérico muito próximo do que alguns estudantes
discussão da primeira tarefa, o contato com a resolução matemática muda a direção da
significados, focando a atenção em dizer sobre a raiz quadrada de – ¾, quando quest
"*Qual é então o problema que temos que resolver?*".

Jota: O conjunto dos reais não tem um número que atenda à esta raiz, então teria que
conjunto.

Sandóra: No problema proposto uma maneira que vejo é retirar o $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ da raiz.

Doronice: Podemos realizar o desmembramento $\sqrt{\frac{-3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{-1}$.

Como continua raiz negativa $\sqrt{-1}$ crio uma unidade imaginária (i) ficando $\sqrt{-1}$ = i.
consigo realizar a operação tomando $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot$ i.

Entendido o problema apresentado e sabendo da necessidade de desenvolvime
ferramentas, tratamos no **Ciclo 3** da produção de um novo conjunto numérico e o que i

***

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução d não é um tema novo em Matemática. A muito tempo atrás, se verificou, por exemplo, que no conjunto naturais, que denotamos por IN, a adição de dois números é uma operação sempre possível em resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a subtração.

A subtração $10 - 2$, por exemplo, leva à adição pois a operação equivale a perguntar: qual natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação $x +$ 2 solução, existindo em IN, é a resposta procurada; um número natural.

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturai

Suponha que para respondermos a essa pergunta comecemos a fazer experimentos com diferen e chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o q concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número $x \in IN$ tal que $x + 10 = 2$? C que esse número não existe.

Logo, concluímos que em IN a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a a equação $x + b = a$ nem sempre tem solução em IN. Essa limitação do conjunto IN não passou d historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto IN, c conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possív conjunto IN, construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação $a + x = b$ tenha sem quando a e b pertencem a IN?

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteir por Z.

O problema que passaremos a discutir é análogo ao anterior. A nossa questão atual é: s construir um conjunto numérico, ampliando o conjunto R, dos números reais, no qual a raiz de negativo – como na equação $x^2 + 1 = 0$ – tenha solução nesse novo conjunto?

Questão: Entendido nosso problema, devemos discutir (a) o que devemos fazer? (b) Por onde c

***

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto R são:

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a a conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso c a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x^2 = \sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi cri i, chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R.

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejamos alguns exemplos:

Seja $a \in R$, $a > 0$, $x = \sqrt{-a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1) \cdot a^2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ia$$

Assim, operamos com o novo número i "como se ele fosse um número real", isto é, e propriedades operatórias dos números reais. Por exemplo,

$$(5i)^2 = (5i) \cdot (5i) = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25.$$

Questão:

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ *e*
= 0. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo

(c) Chamaremos a esse novo número de número complexo e lembrando que representamos o c números racionais pela representação:

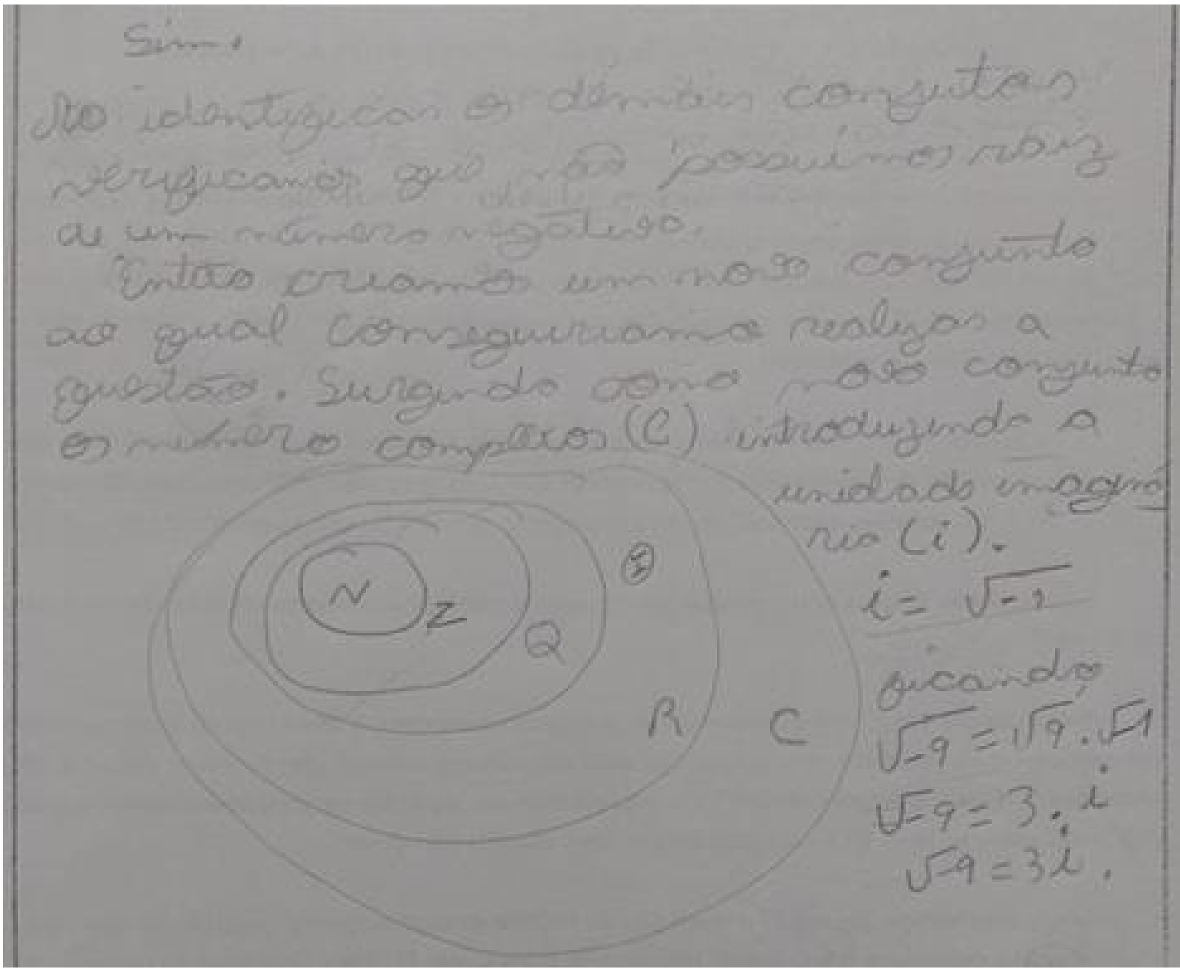
$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

A partir da questão (a) "O que devemos fazer?" e da questão (b) "Por ond recolhemos os seguintes resíduos de enunciação.

Jota: Entendendo que não existe raiz de índice par de números negativos em R, pode "corrigir" este fato utilizando algum argumento algébrico que esteja nos reais.



Doronice: Sim. Ao identificar os demais conjuntos verificamos que não possuímo
número negativo. Então criamos um novo conjunto ao qual conseguiríamos realiz
Surgindo como novo conjunto os números complexos C introduzindo a unidade imag
raiz quadrada de -1 ficando raiz quadrada de -9 = raiz de nove vezes raiz de -1 = 3 vez
Lero: Para que a equação informada acima possa ter um resultado “aceitável”, será
utilização de um conjunto que é um tanto complexo, pois historicamente sem a ut
“novo” tipo de conjunto, o conjunto dos números complexos C, tal resultado não seri
caso da equação o valor que poderia atender a necessidade seria raiz quadrada de -1.

A partir da forma que Lero enuncia sua conclusão, realizamos a leitura de c
enuncia não é algo ainda legitimado por ele. Ele aponta o que é necessário de ser f
incorpora esse resultado como algo em que ele acredita ou compartilha como verdade,
enunciações de Doronice e Jota, que utilizam as expressões “verificamos”, “criamos
“poderíamos”.

Após motivarmos a investigação do que é necessário para o novo conjunto a fin

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e x^2 −
Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conj

(c) Chamaremos a esse novo número de número complexo e lembrando que representamos o c
números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

Na primeira questão após formalização do cálculo com raízes quadradas de núme
obtivemos resíduos de enunciação quase que idênticos, dos quais identificamos a leg
parte discente da operação com a parte imaginária i, devidamente identificada e ope
matemático define.

Entretanto, na representação mais geral de um número complexo tivemos diver

Jota: (b) xi e x + yi

(c) C = {a + bi; a, b pertence R e I = raiz quadrada de -1}

Jota aponta duas representações gerais, baseado nos resultados da questão (a)
formaliza o conjunto dos números complexos apresenta a maneira mais geral p
representar. Lemos nesse caso que no primeiro momento havia um obstáculo epistemol
ele poderia produzir significados para a primeira demanda, mas não produziu da manei

Notamos que ele poderia produzir significados, denotando como obstáculo
devido sua enunciação na questão seguinte, onde ele demonstra conhecimento leg
matemático a respeito do tópico em questão. Essa situação nos aponta novamente um
tomado na escrita de nossas tarefas ao motivar a produção de significados.

Doronice: (b) Representaria que os reais estão contidos no conjunto dos complexos
unidade imaginária criada para satisfazer z = a + bi (a real e b imaginário).

(c) Símbolo = C, C = {a + bi; a,b pertence R e b diferente de 0 | i é o número imaginári

Doronice constrói uma representação mais geral na primeira questão, indican

Lero não produz significado para nossa primeira demanda. Na segunda questão indica que Lero produz significados para a direção de que um número complexo é a imaginária, ou seja, apenas a raiz quadrada de um valor negativo.

O **quarto ciclo**, de tarefa única [*Tarefa 4 – Construção do novo conjunto nu* *II)*], foi utilizado para o trabalho de criação e manipulação de operações básicas (adiç multiplicação e divisão), além da validação, ou não, pela parte discente, de propriedad à partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e elementos neutro e simétrico.

***

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada e forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a "unidade imaginária" e os números conjunto, os "complexos". Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão - eram os "inexprimíveis" e "quantidades fictícias" nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstra por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a nec transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confor consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam a algumas definições e verificadas se algumas propriedades de R continuam a valer em C.

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

a) Defina igualdade de dois números complexos.

b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em C.

c) Na operação de adição em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemen e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

d) Na operação de multiplicação em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

e) Em R é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é ta em C.

As produções quanto a definição das operações de adição e subtração foram indicando a operação de parte real com parte real e parte imaginária com parte ima efetuamos em expressões algébricas, por exemplo, operando com semelhantes. Já a definições de multiplicação e divisão trouxe elementos a serem discutidos.

Destacamos que nenhuma produção de participante aqui analisada utilizou generalizantes, o que é interessante para discutir se a forma com que foi definida pela(o) partic exclusivamente para o exemplo utilizado ou se é generalista.

Doronice e Sandora, por exemplo, definem a multiplicação de números complexos multiplicação de um fator real por um fator complexo, e não de dois fatores complexos.

$$2(7 - 2i) = 14 - 4i$$

Jota já define a multiplicação de duas maneiras, uma semelhante ao process propriedade distributiva da multiplicação, e outro que mantém a forma de operar se semelhante utilizada para a adição e subtração.

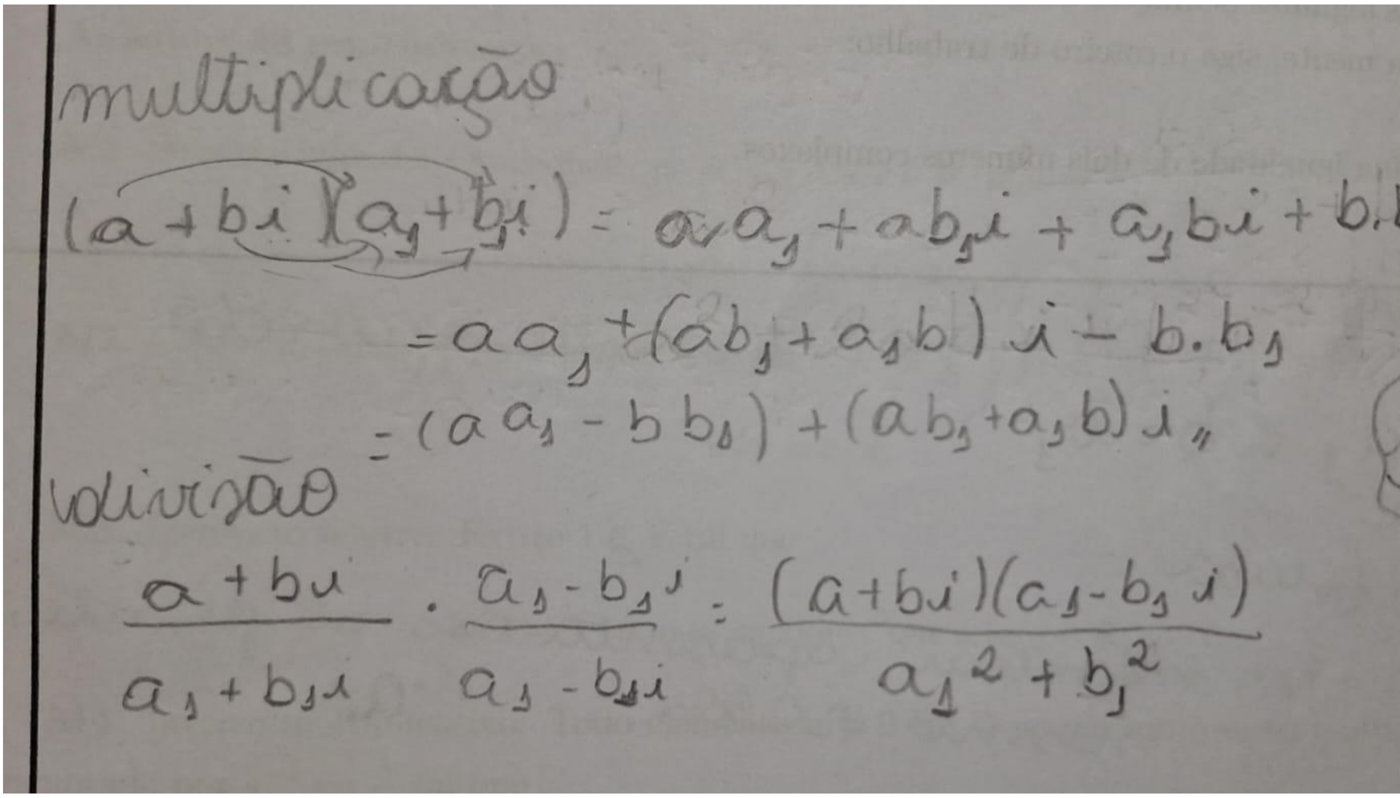
$$(2 + 3i)x(3 + 2i) = 6 + 4i + 9i + 6i^2 = 0 + 13i$$

$$(2 + 3i)x(3 + 2i) = 6 + 6i^2 = 6 – 6 = 0$$

Porém, quando verifica na letra d) as propriedades da operação de multiplicaçã da primeira definição para afirmar que a operação de multiplicação em C é associativa Essa escolha é interessante para nos questionarmos se Jota testou as duas definições e, a primeira verifica a comutatividade e associatividade, manteve essa verificação no p notar que a primeira definição foi suficiente para verificar as propriedades já descar produção. Esse comportamento reflete a produção matemática realizada por matemát esses anos, o que é definido é assim porque só existe uma única representação ou por funciona dentro do interesse do matemático?

Um elemento que não havia sido previamente apresentado à turma e que foi im a produção das verificações de propriedades da multiplicação foi o conjugado. Doron que já haviam tido contato com a disciplina, lembravam da necessidade de reescreve indica a divisão de números complexos de forma que o denominador seja formado a real. Em sua ficha, elas registram esse conhecimento partindo da forma geral a/bi :

que permitiria reescrever uma fração complexa com denominador apenas real, representação registrada na ficha de Lero, que nesta aula dividiu sua produção com **Malu:**



A noção de conjugado foi utilizada, mas não foi nomeada nem formalizada derivada do conhecimento de parte do grupo, sendo discutida e aperfeiçoada a pa numéricos até uma formalização mais generalista. Entendemos o que ocorreu na ap tarefa como um ótimo exemplo do que pode acontecer em uma sala de aula que permite estudantes e que põe em marcha a produção de significados a partir de uma demanda, e partir de um conhecimento pronto e imutável.

Por fim, analisamos a produção discente nas tarefas do **Ciclo 5**. Composto de (*Tarefa 5.1 – A representação geométrica do conjunto dos números complexos, Interpretações de um número no Plano de Gauss, Tarefa 5.3 – Tradução das operações complexos no Plano de Gauss, e Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número com* se dizer que o quinto ciclo teve o papel de inserir o Plano para permitir a discussão da geométrica de números complexos, ao mesmo tempo que encerrou o primeiro momento e a fase de aplicação de nossa pesquisa.

Motivadas pela noção de que propriedades e características são perdidas em

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos númer nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, com dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser re Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números in enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Ál

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, pro características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades Podemos dizer que a representação geométrica em C deixa visível a perda de ordenação[5] *de e conjunto dos números complexos, que por consequência implica em uma disposição geométrica dife estamos habituados.*

Os números reais estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identificados como tod pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente necessária para ide posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior que entre os rea

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse co poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente números complexos:

A. $2 + i$	B. $2 - i$	C. $-4 + 6i$	D. $\sqrt{3} + 2$
E. 5	F. $-3i$	G. $1 + i$	H. $-1 + i$

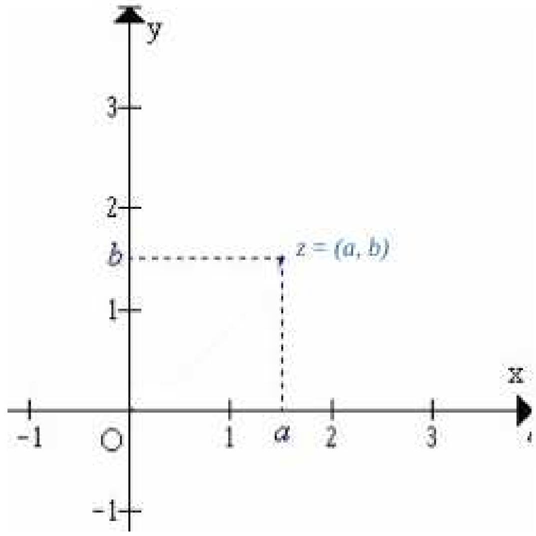
***

Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss

O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de G um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números comple de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Gauss com matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais tempo na mesma conclusão que Wessel.

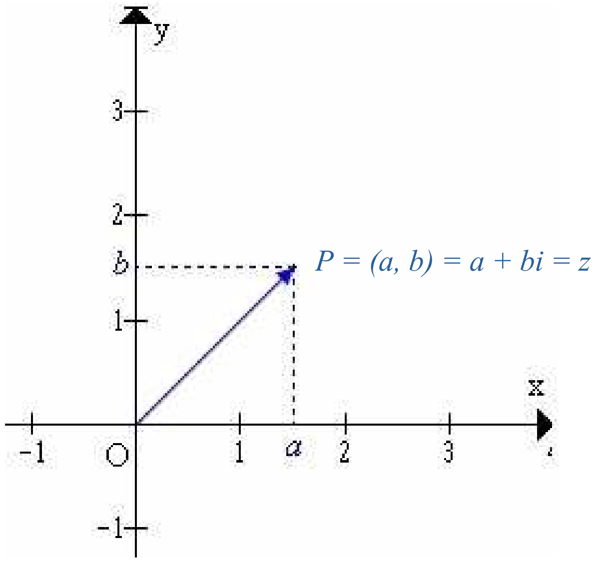
Nessa representação, cada número complexo $z = a + bi$ é identificado como um ponto do Pla pelo par ordenado (a, b). O eixo Ox é o eixo real, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo O de eixo imaginário, onde representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando $z = a + bi$, tal que $1 < a = b < 2$.



Além de localizarmos um número complexo z = a + bi no plano por coordenadas ditas cartesi

interpretando z como um ponto P, podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela



Com a interpretação vetorial, é possível visualizar transformações geométricas por meio da usuais que já foram definidas para os números complexos.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um númer identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o mód determinado pelo número complexo em questão.

A. 2 + i

B. 2 – i

C. - 4 + 6i

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula p

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilit transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses núme soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- ***Produto de um número complexo por um número real***

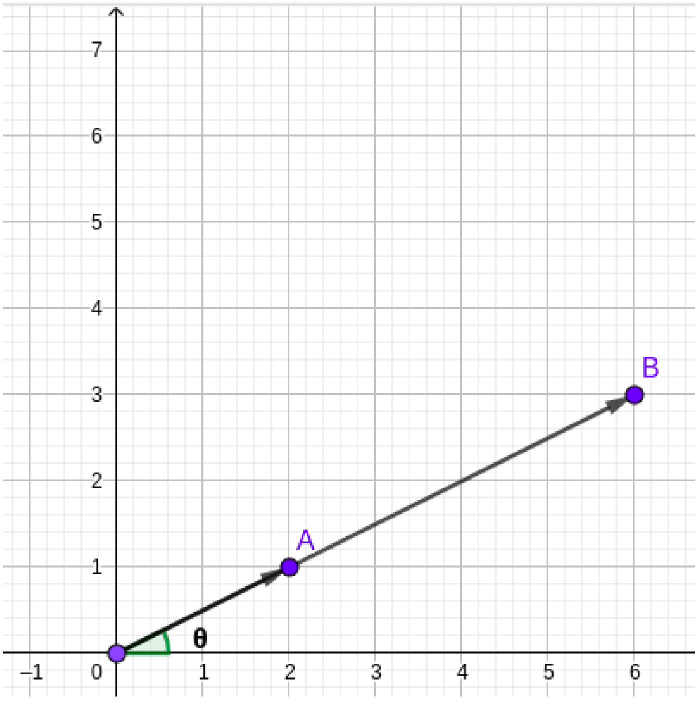
Considere $\boldsymbol{m} = 2 + i \in \mathbb{C}$ *e* $3 \in \mathbb{R}$*. O produto desses dois números resulta em* $\boldsymbol{n} = 6 + 3i$*:*

$$3 \cdot \boldsymbol{m} = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$\boldsymbol{m} = 2 + i = (2, 1) = A$

$\boldsymbol{n} = 6 + 3i = (6, 3) = B$



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as ca originais, como forma e angulação.

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambo ao eixo Ox das abscissas.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada de ***argumento*** *desse veto argumento do número complexo dado – Arg (z). Essa angulação é demarcada no sentido anti-hor do eixo das abscissas Ox até o vetor indicado.*

A angulação θ de z complexo é tal que $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ *e* $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

Em relação a m, $cos(\alpha) = \frac{a}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\alpha) = \frac{b}{|m|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Em relação a n, $cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ *e* $sen(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, como cos (α) = cos (β) e sen (α) = sem (β), α = β. Esse resultado nos indica que o argu o mesmo argumento de ***n****, logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!*

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último ite anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos ***m*** *e* ***n*** *quaisquer. Em seguida identifique-os no plan módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre* ***m*** *e* ***n*** *e resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localizaçã o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano aba melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano cartesian pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]*

***

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de com módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas tamb chamamos de ***forma trigonométrica****.*

A forma trigonométrica de um número complexo z = a + bi é escrita em função do argumento número, sendo um ângulo θ. Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um comple

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \ e \ sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$z = |z|\left(cos(\theta) + isen(\theta)\right)$$

Vejamos um exemplo de escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica:

Seja $z = 1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, *então*

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar Arg (z), então seguindo os cálculos…

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{ e } sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e como } 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de $|z|$ *e* $Arg|z|$*, reescrevemos z como:*

$$z = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de ***forma trigonométrica****, é equiva*
chamam de ***forma polar de um número complexo****. Na forma polar ganhamos as coordenadas polar*
que ***r*** *representa a distância do número z até a origem, ou seja,* $|z|$*, e* θ *o argumento desse mesmo nú*

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

m $= 2 + 2\sqrt{3}i$

n $= \sqrt{3} + i$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plan
$|z|$ *e* θ*.*

z $= 1 + i$

w $= \sqrt{3} - i$

x $= 2i$

***

Diferente dos resíduos produzidos nas tarefas dos quatro ciclos anteriores, os d

Interpretamos que a passagem da temática das operações para a temática da
geométrica pode ter sido muito abrupta, necessitando um novo olhar para o mate
alterações sejam realizadas a fim de tornar o texto das tarefas não usual e familiar, com
para que assim fossem desde o início da confecção de nosso produto educacional.

O **sexto ciclo** realiza a transição dos dois momentos do Curso de Introdução
Complexas desenvolvido. É composto de três tarefas (*Tarefa 6.1 – Multiplicação e Po
Forma Trigonométrica, Tarefa 6.2 – Radiciação na Forma Trigonométrica e Tarefa 6.3
o Problema Inicial),* que além de serem de extrema importância para as inferências
seguintes produzidas pelo trabalho de Tiago de Oliveira, também foram essenciais par
de nossa motivação inicial, o problema do volume, que após obtenção de todas essas fe
longo dos 6 ciclos, pode ser efetuado.

Apresentamos apenas a *Tarefa 6.3 – Resolvendo o Problema Inicial*, a fi
fechamento de nossa motivação inicial, que para resolução também contou com o "col
massa" pela turma participante da pesquisa.

***

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação d
resolução desta equação pela fórmula de Cardamo-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao
com a raiz quadrada de um número negativo.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém tivemos que
novamente, a resolução quando chegamos no seguinte cálculo (envolvendo raízes cúbicas de
complexo):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos através da forma tri
Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Encontre os valores da aresta x tal que V = V' + 1.

Resolução: Como V = x³ e V' = 3x + 1, o problema leva imediatamente `a seguinte equação:
que é da forma y³ + ay + b = 0 e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que
do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4}=\frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27}=-1$; $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{-3}{4}$. *e, portanto, a*
resolução dá para a raiz da equação,

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{-3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com vocês, encontrem a solução desse problema.

***

5.2 Nossa análise para além das fichas de trabalho

A questão de nossa pesquisa estava em torno da busca das características
Variáveis Complexas que caracterizassem a mesma como um curso em serviço da forma
e futuro professor de matemática.

Ao questionarmos as(os) participantes sobre o que acharam da metodologia base
de trabalho, obtivemos as seguintes respostas:

Doronice: "Legal pois proporciona uma análise crítica.".

Jota: "Achei muito boa, pois ela permitiu analisar com calma os aspectos relacionados
como o aspecto histórico em torno do problema dos volumes que deu início a discussão
isso para mim sem dúvida agregou ao conhecimento adquirido."

Lero: "Interessante e bastante didático".

Sandora: "Legal, porém fazer questões sem compreender o conteúdo abordado, perde n

Como apontado por Sandora, entendemos que na prática docente o tempo semp adversário, seja na prática, seja no planejamento. Porém quando estamos em um proce e aprendizagem, nos questionamos, o que seria perder tempo?

Ao questionarmos as(os) participantes sobre quais as vantagens e desvantage nessa metodologia, obtemos as seguintes respostas:

Jota: "As desvantagens acredito que seja o tempo, pois, toda ficha necessita do tempo discutir e isso talvez atrapalhe em praticar o conteúdo".

Sandora: "Desvantagem: perda de tempo quando não compreende os conteúdos.".

Interpretamos que essa sensação pode ter sido despertada pela vivência escol debruçarmos sobre o novo e já sermos apresentados aos resultados e definições pronta certa inquietação - isto não já foi descoberto? Por que preciso pensar sobre isso?

Produzir a partir de tarefas é trabalhoso e demanda longos prazos, assim como c dessa metodologia também é. É preciso construir textos que sejam suficientes bibliografia base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, e para isso faz- realizarem cada vez mais pesquisas com objetivos de criação de materiais para a li matemática com uma perspectiva diferente da já apresentada pelos matemáticos.

Sendo possível, enquanto não tivermos bibliografia suficiente relacionada matemática, incentivamos a utilização de ementas que sejam abertas às necessida discente dentro da temática trabalhada. No caso de nossa pesquisa, as fichas, que s nosso material didático, foram criadas durante a aplicação delas, o que nos dava persp acrescentar, ou não, nas fichas e listas de exercício seguintes dentro da temática programado.

Entretanto, os ajustes feitos durante o período de aplicação foram realizados a p leitura do que a turma necessitava a partir dos resíduos de enunciação. É importante, a discente, avaliarmos também que seria possível intercalar listas de exercícios em mais curso, e que isso poderia ter minimizado a sensação de perda de tempo relatada.

Uma ferramenta que não foi utilizada em nossa pesquisa e que, se utilizada, s valia é a gravação das aplicações. Os registros do caderno de campo somados a

Lero apresenta outro tópico em sua avaliação sobre vantagens e desvantagens da o erro.

Lero: "Vantagem que aprendemos com os nossos erros pois iniciamos os trabalhos utilizando o que imaginamos saber e depois discutimos os resultados com o professor e conseguimos detectar o que fizemos de errado e aprendemos com os erros. A desva não sabemos no primeiro momento se o que fizemos está bem direcionado.".

Frisamos que nos manter dentro do proposto e não apresentar o conteúd expositiva foi um desafio. A prática do professor ser o detentor do conteúdo e int momento evitando os erros e direcionando para a produção de significados por ele des que intrínseca da prática docente, uma ação automática, e vivenciar algo novo foi enriquecedor para nossa prática e pesquisa.

Este desafio se estende para toda a turma, que provavelmente lida com o negativa, já que socialmente o erro é sinônimo de equívoco, absurdo e falha. Trabalh forma que o erro não seja um fator desmotivador não é simples. Em nossa prática exposição do erro não foi tão delicada pela proximidade das(os) participantes, que se como turma e já se conheciam há muito tempo, porém é um fator de atenção ao utilizar que demandam mais participação e exposição da produção discente.

Doronice inclusive sugere em sua avaliação que seja incentivada uma pesq aplicação das atividades de determinado tema, para que a turma esteja mais preparada de produção. Entretanto, nos questionamos se a pesquisa prévia não seria uma espécie d apresentação das definições e resultados do tópico a ser estudado, o que tornaria produção de significados mais uma vez condicionado ao que o matemático já produziu

Por fim, a avaliação da disciplina também esteve presente na avaliação di apontada como uma vantagem da utilização dessa metodologia.

Jota: "A primeira vantagem do ponto de vista do aluno é não haver prova, o que par vantagem, pois tira a preocupação com a nota, que geralmente rem disciplinas sobrepõe a preocupação com a aprendizagem, além disso a interação com o professor e alunos nas discussões sobre as fichas ajudam, pois o colega pode ter uma visão diferente

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste trabalho era o de investigar quais devem ser as caracterí disciplina de variáveis complexas para que ela esteja a serviço da formação da fu professor de matemática. Delimitamos tais características como uma proposta de sala de nosso referencial teórico, o Modelo dos Campos Semânticos, e em nossas consid apontamos tais escolhas, justificadas, juntamente de reflexões sobre esse processo.

Após análise da organização da oferta de disciplinas que tratam de tópicos complexas em onze universidades federais mineiras, confirmamos um argumento intro trabalho de que, na licenciatura em matemática, a concepção de disciplina é tradicion além dos documentos oficiais discutidos, proposta pela visão do matemático para a futuro matemático, e não do(a) futuro(a) professor(a) de matemática.

No caso, realizamos análise por meio das matrizes curriculares e projetos disponíveis para acesso da Universidade Federal de Alfenas (Unifal – MG), Universida Itajubá (Unifei), Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Universidade Fede (Ufla), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal de Ouro Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Universidade Federal de Uberl Universidade Federal de Viçosa (UFV), Universidade Federal do Triângulo Mine Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Nossa revisão de literatura embasou nossa constatação de que podemos generali das disciplinas de tópicos de variáveis complexas que muitas disciplinas refletem matemático. Esta constatação aponta a necessidade de produção de materiais didáticos exemplo - que possibilitem uma discussão diferente da tradicional do matemático, seja p com números racionais, tópicos de geometria, álgebra linear, números complexos ou cálculo, análise, estruturas algébricas, dentre outras.

Fundamentados teórica e metodologicamente pelo Modelo dos Campos Semânti revisão da literatura e pela aplicação de nosso produto educacional, elencamos as carac em nossa concepção, são necessárias para a formação não só matemática, mas também

Reforçamos que essa sugestão está baseada na discussão que realizamos ao l
nosso trabalho a respeito da impossibilidade de conclusão de ementas extensas devid
existente entre o tempo real de aprendizagem e o tempo institucional de ensino como
Silva (2015). Além disso, retomamos que é de grande valia trabalhar esses mesmos q
temas fazendo referências ao que já é ensinado por anos na Educação Básica, esses m
temas centrados no conjunto dos números reais.

Acreditamos que a discussão de algo novo é capaz de elucidar concei
compreendidos, sendo um recurso para justificar a presença desse estudo na grade
licenciatura em matemática. Os documentos oficiais indicam o estudo do tema, torna-
direcionar esse estudo para a prática futura docente, e não para uma formação distin
matemático.

Em nossa concepção de pesquisa, nosso foco não estava primaria e exclu
conteúdo, logo buscamos contribuições para além do conhecimento matemá
relacionadas à futura prática docente como vivências metodológicas e pedagógic
conteúdos de variáveis complexas, ou seja, buscamos identificar uma proposta metodo
a(o) estudante em formação experienciasse falar a partir de um texto matemático.

Consequentemente, como **segunda característica** indicamos que a biblio
mesmo que formada por livros escritos para a formação de matemáticos, também engl
trabalho, semelhante às desenvolvidas nesta investigação e na pesquisa desenvolvida
(2024), que podem ser utilizadas, modificadas e adaptadas de acordo com a necessidad

Sabemos que o tempo de planejamento é curto, e que criar tarefas não é um trab
porém acreditamos que, para que o curso esteja a serviço de uma formação também m
pedagógica, as(os) discentes precisam ser apresentados ao estranhamento, para que as
sensíveis aos futuros estranhamentos que vivenciarão sem suas salas de aula, e a
encontramos em nossa pesquisa de tornar isso possível é inserir a turma em uma situa
massa, de resolver uma tarefa sem uma orientação prévia de como obter uma solução, e
sempre à relação de serem tarefas de textos familiares e não-usuais.

Esta prática se relaciona ao nosso referencial teórico por não apresentar uma disciplina de ementa aberta, ou seja, que a(o) docente tenha a liberdade de planej

a ser trabalhado dentro de cada tema, frente à dinâmica naquela turma específica de

evolução de suas aulas. Isto evita a existência de assincronismo, já que o tempo instituci

estará alinhado ao processo de aprendizagem em ação na sala de aula.

Paralelamente, consideramos a **terceira característica** - a postura docente ne

um fator fundamental para que ela esteja a serviço do licenciando e licencianda em

matemática e pedagógica/metodológica.

A(o) docente, sendo educador(a) matemático(a) ou matemático(a), é o mediado

aula, e por isso cabe a ele(a) a função de proporcionar um ambiente em que diferentes

significado sejam valorizadas, que o trabalho em grupo e individual seja realizado, q

seja lido com o juízo de valor que já é normalmente associado, e que diferentes metodo

espaço de atuação.

Em nosso texto, descrevemos o processo metodológico que foi utilizado em

aplicação, mas sugerimos, em concordância com nossa revisão de literatura, que

também possam ser experimentados, desde que o trabalho frente ao conteúdo não seja

formação de matemáticos, e sim de futuros e futuras professoras de matemática.

Para a quarta e última característica, apontamos o processo de avaliação co

de atenção. O sistema de avaliação por nota a partir de uma avaliação tradicional, c

relacionadas ao tema, não foi aplicado por nós, e não é o que acreditamos como cara

uma disciplina neste formato. O trabalho produtivo ser avaliado já é uma mudança me

que nas disciplinas matemáticas esse tipo de valorização não é o padrão, e justame

necessário realizar uma conscientização da turma de que, além da frequência, o trabal

tarefas em sala também é importante, já que todas as discussões são pautadas a partir

discentes produzirem. Sem que a turma se aproprie dessa ação é difícil que o curso s

seguindo seu objetivo formativo.

Acreditamos que as características apontadas para o curso podem ser adaptad

em outras disciplinas matemáticas, já que em nosso texto, propomos e discutimos

possíveis, mais metodológicas do que conteudistas, de acordo com nossa premissa de q inviabiliza a necessidade de pesquisas como a nossa, que podem servir de exemplo e outras(os) pesquisadoras(es) e professoras(es) a pensarem a formação além do conteúd

A experiência desse estudo e pesquisa me elucidaram que, em termos de Lins monstro monstruoso pode tornar-se de estimação, e nós, educadoras e educadores ma precisamos apenas reproduzir nossa formação ao trabalhar com a matemática do mat contrário, podemos pesquisar, experimentar e implementar diferentes metodologias Números Complexos, mas para toda a diversidade de tópicos matemáticos a ser acessa

Existe a necessidade de construção de textos que sejam suficientes para integra base de ementas de disciplinas de conteúdo matemático, com perspectivas dife apresentadas pelos matemáticos. Faz-se necessário fomentar pesquisas, desde iniciação pesquisas mais longas, como os doutorados, para que materiais sejam construídos, sequências didáticas e livros-texto. É preciso que a referência exista para que possam temos escolha de fazer diferente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. R. Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformaçõ
2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto d
Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ALVES, A. F. Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemá
estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educ
Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz
2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação:** Uma Introdu
e aos Métodos. Porto: Porto Editora, 2013. 335 p.

BRASIL, Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre
Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Di
da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Matemática, Ensino e Educação: Uma Proposta Global. Te
Debates, SBEM, Ano IV, n. 3, p. 1 – 15, 1991.

ELIAS, Henrique Rizek. Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo d
racionais na formação de professores de matemática. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em
Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 20

FICHTER FILHO, G. A.; OLIVEIRA, B. R.; COELHO, J. I. F. A trajetória das Diretr
Curriculares Nacionais para a formação docente no Brasil: uma análise dos textos ofic
Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 16, n. esp. 1, p. 940-956,
e-ISSN: 1982-5587. DOI: https://doi.org/10.21723/riaee.v16iEsp.1.14930

GOLLO JUNIOR, R. A. Diretrizes Curriculares para Formação de Professores de Mat
Estado em Ação. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRA
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23, 2019, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Univers
Cruzeiro do Sul, Campus Anália Franco, 2019, p. 1 – 13.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemá
"dimensão"**. 2007. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto
Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Fil
Claro, 2007.

LINARDI, P. R. **Rastros da Formação matemática na prática profissional de uma
de matemática: do problema inicial ao estudo real.** ULBRA. Canoas. 2007.

LINS, R. C. Design e Implementação de um programa de formação continuada de prof Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte solicitação de concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa ao CNPq.**, 2004b,

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas a Pesquisa. **Revista da Educação Matemática da SBEM-SP**. Ano 1, n.1, 1993, p.75-9

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M Borba, M. C. (org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cor p.92-120.

LINS, R. C. O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos de notas e de teoriza ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemá** de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, p.110-128.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Mate Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspecti Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

LINS, R. C. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a The Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. N Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XX** Papirus, 1997.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** Lice prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemáti

OLIVEIRA, T. O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o c funções complexas. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemátic de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

OLIVEIRA, V. C. A. Sobre a produção de significados para a noção de transformação álgebra linear. 2002. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Institut Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filh Claro, 2002.

OLIVEIRA, V. C. A. Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na formação professores de matemática. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Se Educação Matemática:** 20 anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, cap. 1 216.

PROCÓPIO, R. B. Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matema
leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos. 2011. 82 f. Dissertação (Mes
Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Fe
de Fora, Juiz de Fora, 2011.

REIS, G. L. dos; Silva, V. V. da. **Geometria Analítica**. 2a ed. Rio de Janeiro: LTC, 19

REIS NETO, R. M. Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números
uma experiência com professores e alunos. 2009. 142 f. Dissertação (Programa de Pós-
em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Ger
Horizonte, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e len
Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

SILVA, A. M. Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 200
(Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em E
Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos) - Instituto
Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estatual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, A. M. Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álg
In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Mate**
anos de história. 1. ed. São Paulo: Midiograf, 2012, cap. 4, p. 79-90.

SILVA, A. M.; OLIVEIRA, V. C. A.; ALMEIDA, V. R. O Modelo dos Campos Semâ
Teorização e Desdobramentos para a Pesquisa e para o Ensino. In: MAGINA, S. M. P.
S. L.; SPINILLO, A. G. (Org.). **Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação M**
teoria, pesquisa e sala de aula [livro eletrônico] 1. ed. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2
p. 98-122.

SILVA, A. M. Sobre o Assincronismo nos Processos de Ensino e de Aprendizagem en
Aula de Matemática. **Revista de Educação, Ciências e Matemática.** v. 5, n. 3, p. 92-
2015.

SILVA, M. R. S. Avaliação: um contrato de trabalho. In: **Interface** — Comunicação ,
Educação, Botucatu, SP: Fundação UNI, 1998. v.2, n.2, p. 155-172.

ANEXOS

ANEXO I: Questionário Discente

DISCIPLINA: Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura – MAT06025
PERÍODO LETIVO: 2022.1
PROFESSOR: Tiago de Oliveira

Questionário

Nome:
Período:
(   ) Licenciatura em Matemática
(   ) Outro curso. Se sim, qual?
É formando neste semestre? (   ) SIM   (   ) NÃO
Disciplinas que cursará em 2022/1:
1)
2)
3)
4)
5)
6)

Marque com um X a(s) disciplina(s) abaixo que você já estudou:
( ) TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS
( ) CÁLCULO I
( ) CÁLCULO II
( ) CÁLCULO III
( ) INTRODUÇÃO À TEORIA DOS NÚMEROS
( ) ANÁLISE REAL I
( ) ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

( ) PIBID ou outras atividades com bolsa

( ) Monitoria

( ) Prática de ensino

( ) Outra. Qual?

Quantos livros você leu, de capa a capa:

(a) No ano de 2020: (   )

(b) No ano de 2021: (   )

(c) Em toda a sua vida (aproximadamente): (   )

ANEXO II: Avaliação Diagnóstica

Com intuito de nos programar e até mesmo para saber como vamos conduzir n gostaríamos que respondessem as seguintes perguntas:

1) Descreva o conjunto dos números:

Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q), Irracionais (I) e Reais (R).

2) Resolva as seguintes equações: (a) $x^2 + x - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ e (b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

3) Considere o seguinte Teorema:

Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par.

i) Qual é a hipótese do Teorema?

ii) Qual é a tese do Teorema?

iii) Demonstre o Teorema.

4) Defina com suas palavras o que é função, em seguida apresente alguns exemplos.

ANEXO III: Termo de Compromisso Ético

A problemática da pesquisa intitulada O Ensino de Variáveis Complexas na Li
Matemática se expressa pela seguinte questão: “quais devem ser as características
Variáveis Complexas, no conjunto das disciplinas de um curso de Licenciatura em Ma
que esteja a serviço da formação da futura e futuro professor de matemática?”. Um do
criação de um material didático para que os professores e professoras possam utilizar,
características que teremos proposto para a disciplina. A aplicação desse mate
juntamente da análise de resíduos de enunciação que serão coletados, servirão como
embasar as conclusões da pesquisa.

Durante a aplicação e discussão do material didático os encontros poderão s
registros escritos de participantes podem ser solicitados, a fim de que seus dados seja
posteriormente pela pesquisadora e pesquisador. Esses dados respeitarão o sigilo
das(os) participantes, que poderão escolher seus nomes fictícios no caso de haver p
resultados da pesquisa.

A participação nesta pesquisa é voluntária, podendo ser interrompida a qualque
for do desejo da(o) participante. Assim, o presente termo torna-se necessário com a p
esclarecer e firmar o compromisso de participantes da pesquisa com as ações explicita

____________________________________, _____ de abril de 2022.

____

Nome da(o) licencianda(o) participante da pesquisa

____

ANEXO IV: Fichas de Trabalho constituintes do Produto Educacional

Ficha de Trabalho 1

Para a primeira ficha de trabalho, de tarefa única intitulada *Resolvendo Equações Algébricas*, q
partir da exposição de quatro equações algébricas, o significado atribuído à expressão “resolver
e o que pode ser dito após resolução das equações propostas.

***

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0;$

b) $x^2 + 4 = 0;$

c) $x^2 - 12x + 36 = 0;$

d) $x^2 - 4x + 13 = 0.$

1. O que significa a expressão matemática “resolver uma equação”?

2. Resolva as equações acima.

3. Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?

***

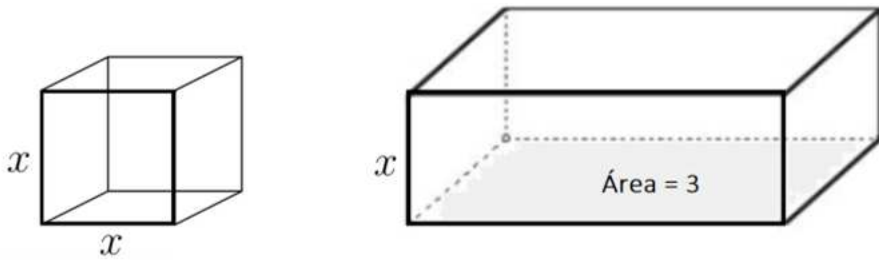
Ficha de Trabalho 2

A discussão de segunda ficha de trabalho é dividida em duas tarefas, *Tarefa 2.1 –* *geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico,* amba adaptados e tarefas inspiradas no seguinte problema geométrico observado em CARA **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010 Este é c apresentação de um problema, geométrico, que demanda a criação de novas ferramentas para c seja desenvolvida por completo.

***

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico

Seja V o volume de um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 *é igual à aresta do cubo.*



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que V = V' + 1 na tabela abaixo:

x	*V*	*V'+ 1*
1		
2		
3		
4		

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

***

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado di
for negativa? Neste caso a radiciação não é possível em R, por consequência a expressão das raíze
significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindus e árabes não tinha passado despercebido este caso
Mas sempre que ele se dava, o problema concreto que tinha dado origem a equação, via-se que era
sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o proble
solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado
interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse com
do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebris
herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resoluç

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), e
linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$, reduz-se a equação (3) à forma

$$y^3 + ay + b = 0$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, pr
resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam,
o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e m
se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V
um cubo de aresta x, e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à re
Determine x de modo que V = V' + 1.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$*, mas esta raiz não existe.*

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da anterior concluiríamos que a não existência da raiz de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ *quer dizer que o nosso problema é imp*

Porém, uma análise mais detalhada sugere que o problema proposto não é impossível. De fa aresta x do cubo é muito pequena, o volume $V = x^3$ *é também pequeno e menor que a soma 3x + 1, m que x aumenta V vai se aproximando de V' + 1 = 3x + 1 e chega mesmo a ultrapassá-lo, por exemp 1, temos V = 1 e V' + 1 = 4, mas para x = 2, temos V = 8 e V' + 1 = 7. Conclui-se deste racioc haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da problema:* $x^3 = 3x + 1$*. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida ent visto que para x = 1, 8; V = 5, 832 < V' + 1 = 6, 4 e para x = 1, 9, V = 6, 859 > V ' + 1 = 6, 7.*

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos cal

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

***

Ficha de Trabalho 3

Nesta sequência, iniciamos a discussão à partir das necessidades nascidas pelas "insuficiênc conjuntos numéricos ao longo da produção matemática a fim de inseri a turma em um ambie Duas tarefas foram desenvolvidas, *Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico Construção do novo conjunto numérico (parte I)*, que possui fechamento apenas na Ficha de T

***

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução d não é um tema novo na sua vida escolar e acadêmica. Há muito tempo se verificou, por exemplo, que dos números naturais, que denotamos por IN, a adição de dois números é uma operação sempre po pois seu resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a su

A subtração 10 − 2, por exemplo, pode levar à adição pois a operação equivale a perguntar: qua natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação x + 2 solução, existindo em IN, é a resposta procurada; um número natural.

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturais

Suponha que para respondermos a essa pergunta comecemos a fazer experimentos com diferen até chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o q concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número x ∈ IN tal que x + 10 = 2? C que esse número não existe.

Logo, concluímos que em IN a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a a equação x + b = a nem sempre tem solução em IN. Essa limitação do conjunto IN não passou d historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto IN, c conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possív conjunto IN, construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação a + x = b tenha sem quando a e b pertencem a IN?

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteir

***

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto R são:

(i) Resolver as deficiências que o conjunto numérico anterior. No nosso caso, resolver o p equações que não possuem solução em R, ou seja, que possuem raiz negativa.

(ii) Preservar, ao máximo, as propriedades do conjunto R na construção do novo conjunto. Ist que é desejável, que tentemos manter as propriedades operatórias dos números reais, t associatividade e a comutatividade das operações de adição e multiplicação em R, a distrib multiplicação em relação à adição e todas as outras propriedades dos números reais.

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a a conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso c a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x = \pm\sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi cri i, chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R.

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejamos alguns exemplos:

Seja $a \in R$, $a > 0$, $x = \sqrt{-a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)\cdot a^2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{(-1)}\cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ia$$

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e
= 0. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo

(c) Chamaremos esse novo número de número complexo e, lembrando que representamos o
números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

***

Ficha de Trabalho 4

A *Tarefa 4 – Construção do novo conjunto numérico (parte II)* foi planejada para o trabalh
manipulação de operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de propriedad
partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e existência de el
e simétrico.

***

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada e forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a "unidade imaginária" e os números conjunto, os "complexos". Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão – eram os "inexprimíveis" e "quantidades fictícias" nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstra por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a nec transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confor consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam a algumas definições e verificadas se algumas propriedades de R continuam a valer em C.

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

a) Defina igualdade de dois números complexos.

b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em C.

c) Na operação de adição em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemen e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

d) Na operação de multiplicação em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, exist simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C.

e) Em R é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é ta em C.

Ficha de Trabalho 5

A Ficha de Trabalho 5 é a mais longa das 6 constituintes deste trabalho, composta por 4 tarefa *A representação geométrica do conjunto dos números complexos, Tarefa 5.2 – Interpretações no Plano de Gauss, Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Pla Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo,* tendo como objetivo iniciar representação geométrica de números complexos a partir de comparações com o conjunto dos

***

Tarefa 5.1 - A representação geométrica do conjunto dos números complexos

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos númer nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, com dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser re Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números in enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Ál

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, pro características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades são

Os números reais, por exemplo, estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identi todos os pontos pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente nec identificarmos a posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior reais.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse co poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

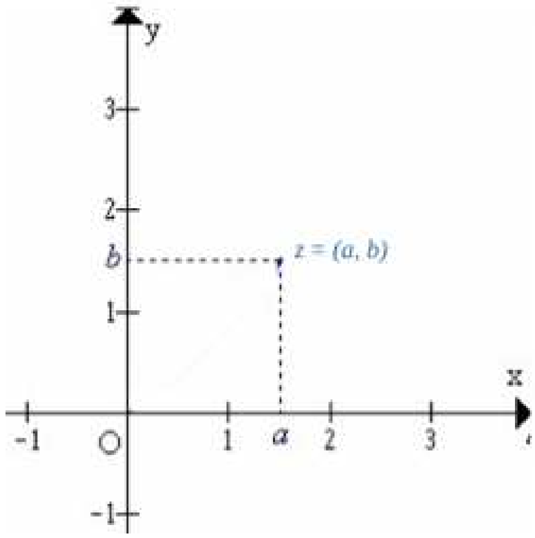
(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente números complexos:

A. $2 + i$ *B.* $2 - i$ *C.* $-4 + 6i$ *D.* $\sqrt{3} + 2$

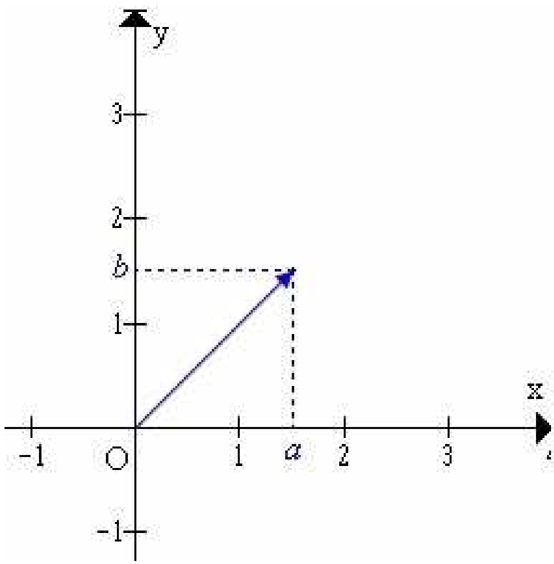
O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de Ga um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números pormeio de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Ga grande matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais chegar na mesma conclusão que Wessel.

Nessa representação, cada número complexo z = a + bi é identificado como um ponto do Pla pelo par ordenado (a, b). O eixo Ox, do Plano Cartesiano, passa a ser chamado de eixo real (Re) Gauss, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo Oy passa a ser chamado de eixo imag representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando z = a + bi, tal que 1 < a = b < 2.



Além de localizarmos um número complexo z = a + bi no plano por coordenadas ditas cartes interpretando z como um ponto P, podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela



(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um númer identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o mód determinado pelo número complexo em questão.

A. $2 + i$

B. $2 - i$

C. $-4 + 6i$

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula pa do módulo de um vetor gerado por um número complexo $z = a + bi$ para quaisquer valores de a e b

***

Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss

Texto para discussão

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilit transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses núme soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- **_Produto de um número complexo por um número real_**

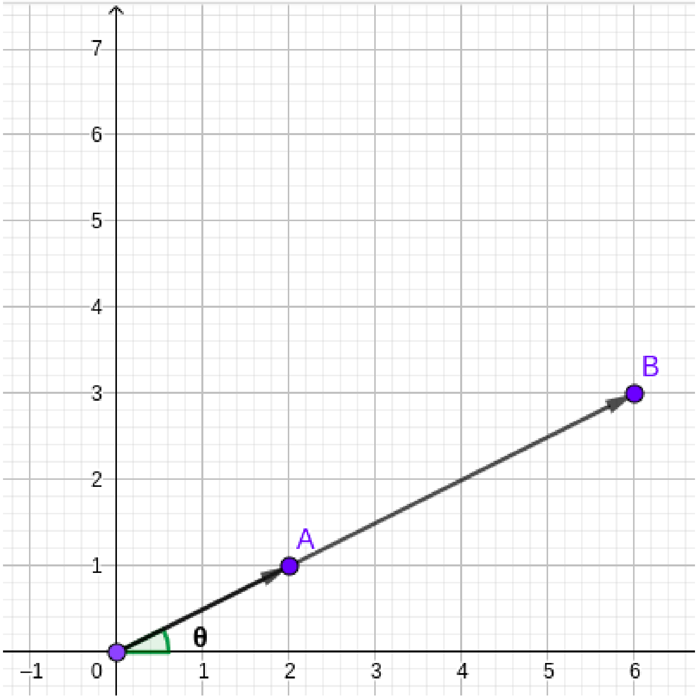
Considere $\boldsymbol{m} = 2 + i \in \mathbb{C}$ *e* $3 \in \mathbb{R}$. *O produto desses dois números resulta em* $\boldsymbol{n} = 6 + 3i$:

$$3 \cdot \boldsymbol{m} = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$\boldsymbol{m} = 2 + i = (2, 1) = A$

n *= 6 + 3i = (6, 3) = B*



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as ca originais, como forma e angulação.

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambo ao eixo real.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|n| = \sqrt{a^2 + b^2} = |n| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Assim, verifica-se que o módulo de ***n*** *é três vezes maior que o módulo de* ***m****, ou seja, ocorreu um da distância. Agora precisamos verificar se a angulação do primeiro vetor,* ***m****, foi preservada.*

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo 0 ≤ θ ≤ 2π, é chamada de ***argumento*** *desse veto argumento do número complexo dado – Arg (z). Essa angulação é demarcada no sentido anti-hora*

Em relação a n, $\cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, como cos (α) = cos (β) e sen (α) = sem (β), α = β. Esse resultado nos indica que o argum
o mesmo argumento de **n**, logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último ite
anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma
complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos **m** e **n** quaisquer. Em seguida identifique-os no plano
módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre **m** e **n** e
resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localizaçã
o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano
uma melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano car
linhas pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]

***

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de como
módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de
podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas tamb
chamamos de **forma trigonométrica**.

A forma trigonométrica de um número complexo z = a + bi é escrita em função do argumento d
número, sendo um ângulo θ. Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um comple

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \ e \ sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$a = |z|\cos(\theta) \ e \ b = |z|sen(\theta)$$

Como z = a + bi, podemos substituir o equivalente a a e b, encontrando o que chamam
trigonométrica:

Seja z = 1 + $\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, *então*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar Arg (z), então seguindo os cálculos…

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \ e \ sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \ e \ sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e como } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de |z| e Arg|z|, reescrevemos z como:

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3}))$$

*Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de **forma trigonométrica**, é equiva chamam de **forma polar de um número complexo**. Na forma polar ganhamos as coordenadas polar que **r** representa a distância do número z até a origem, ou seja, |z|, e θ o argumento desse mesmo núm*

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

m = $2 + 2\sqrt{3}i$

n = $\sqrt{3} + i$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plan |z| e θ.

z = $1 + i$

w = $\sqrt{3} - i$

Ficha de Trabalho 6

Concluindo nossa sequência de Fichas de Trabalho temos a Ficha 6, constituída de três tarefa *Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica, Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Tr Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial.* Com elas, foi possível realizar o fechamento de n inicial inserida na Ficha de Trabalho 02, envolvendo o volume de dois sólidos geométricos, ter os elementos operatórios necessários para chegarmos em uma solução.

***

Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica

Dados os seguintes números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, com a, b, c e d $\in \mathbb{R}$ e seus argumentos $Arg(z_1) = \theta_1$ e $Arg(z_2) = \theta_2$, defina a multiplicação desses dois números complex trigonométrica.

Sejam dados os números complexos z1 e z2 na forma trigonométrica:

$$z1 = |\, z1 \,|(\cos\theta 1 + i\operatorname{sen}\theta 1) \text{ e } z2 = |\, z2 \,|(\cos\theta 2 + i\operatorname{sen}\theta 2)$$

Então, calculando o produto $z1 \cdot z2$ obteremos:

$$z1 \cdot z2 = |\, z1 \,| \cdot |\, z2 \,|[(\cos\theta 1 \cdot \cos\theta 2 - \operatorname{sen}\theta 1 \cdot \operatorname{sen}\theta 2) + i(\operatorname{sen}\theta 1 \cdot \cos\theta 2 + \operatorname{sen}\theta 2 \cdot \cos\theta 1$$

Portanto:

$$z1 \cdot z2 = |\, z1 \,| \cdot |\, z2 \,|[\cos(\theta 1 + \theta 2) + i\operatorname{sen}(\theta 1 + \theta 2)]$$

Agora que sabemos multiplicar dois números complexos na forma algébrica e na forma trigono

Questão:

a) Como vocês fariam para resolver z^9 , sendo $z = \sqrt{3} + i$?

b) Existe uma fórmula ou um resultado para resolver à potência zn, com n $\in$ N*, sendo z um núme

Então, sendo dado o número complexo z na forma trigonométrica z = | z |(cosθ + isenθ), fórn
nos mostra que:

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot\ldots\cdot |z|}_{multiplicarosnfatores} \cdot [\cos \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{somarosargumentos} + isen \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{somarosargumentos}],$$

logo

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

Obs: Para elevar um número complexo a n, n ∈ N∗ , devemos elevar seu módulo a n e mu
argumento por n.

Questão:

a) Calcule z^8, sendo $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$.

b) Efetue $(1 + i)^{12}$.

***

Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica

A forma trigonométrica também nos será de grande utilidade na radiciação. Encontre as raízes c
ou seja, quais são os números que elevados a 3 são iguais a 8i?

Vejamos o seguinte exemplo: Dado um número complexo z na forma trigonométrica, z = | z |(c
não é difícil perceber que para obter uma raiz cúbica de z devemos realizar com seu módulo e a
operações inversas daquelas que efetuamos quando elevamos z ao cubo: extrair a raiz cúbica do módu
de elevá-lo ao cubo - e dividir o argumento por 3 - ao invés de multiplicá-lo por 3. Assim fazendo, enc

$$w1 = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\theta}{3} + isen\frac{\theta}{3})$$

Podemos verificar, através da potenciação na forma trigonométrica, que:

$$(w1)^3 = (\sqrt[3]{|z|})^3[\cos\frac{3\cdot\theta}{3} + isen\frac{3\cdot\theta}{3}] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$$

$(w2)^3 = |z|[\cos(\theta + 2\pi) + isen(\theta + 2\pi)] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$

$$3\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Acrescentando, agora, $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w2, encontraremos um terceiro número complexo:

$$w3 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})]$$

$(w3)^3 = |z|[\cos(\theta + 4\pi) + isen(\theta + 4\pi)] = |z|(cos\theta + isen\theta) = z$

$$3\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Observe que se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w3, voltaremos a encontrar w1. Portanto, (
= $(w3)^3$ = z, e w1, w2 e w3 são raízes cúbicas de z = $|z|(cos\theta + isen\theta)$.

Propriedade: Todo número complexo z, não nulo, admite n raízes n=ésimas distintas. Todas elas
igual a $\sqrt[n]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e c

Questão:

a) Com base nessas informações, encontre as raízes cúbicas de 8i e faça sua representação geométric

b) Olhando para a propriedade anterior, resolva em C, a equação $x^6 - 1 = 0$.

***

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação d
resolução desta equação pela fórmula de Cardamo-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao
com a raiz quadrada de um número negativo.

$$\sqrt[3]{1 \quad \sqrt{-3}} \quad \sqrt[3]{1 \quad \sqrt{-3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos por mei trigonométrica. Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Resolução: Como V = x^3 e V' = 3x + 1, o problema leva imediatamente à seguinte equação: x^3 = é da forma $y^3 + ay + b = 0$ e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, a = - 3; b = - 1; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$*;* $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$*;* $\frac{a^3}{27} = -1$*;* $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$*. e, portanto, a resolução (5) dá para a raiz da equação,*

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com você, encontre a solução deste problema!

***