

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**O ENSINO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:
NOÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS**

Produto Educacional

Lectícia Sobreiro Rezende de Souza
Amarildo Melchhiades da Silva

Juiz de Fora - MG

2024



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

Sumário

| | |
|--|----|
| Apresentação | 4 |
| Uma dinâmica para aplicação das Fichas de Trabalho à luz do Modelo dos Campos Semânticos . | 5 |
| Ficha de Trabalho 1 | 6 |
| Ficha de Trabalho 2 | 7 |
| Ficha de Trabalho 3 | 10 |
| Ficha de Trabalho 4 | 13 |
| Ficha de Trabalho 5 | 14 |
| Ficha de Trabalho 6 | 19 |
| Sugestões de leitura..... | 22 |

Apresentação

Cara(o) colega de profissão,

O presente material está configurado como um produto educacional, oriundo de pesquisa alocada em um mestrado profissional de educação matemática. O mestrado profissional é uma das modalidades de pós-graduação que atende, principalmente, profissionais que desejam se especializar e seguir estudos em sua área de atuação, mas sem o viés puramente acadêmico. É por essa e outras características que essa modalidade propicia a elaboração não só de uma pesquisa, mas também de um material, denominado produto educacional, que pode assumir diversas formas, como um site ou sequência de tarefas por exemplo, que esteja alinhado com a temática da pesquisa realizada e que seja disponibilizado para a comunidade, com as devidas descrições que tornem possível a aplicação do material por docentes que tenham esse interesse.

Nosso produto educacional é composto por fichas de trabalho constituídas de textos para discussão e tarefas sobre tópicos que envolvem números complexos, com a finalidade de colocar em marcha a produção de significados de estudantes, ou seja, inserir discentes em uma situação que seja possível observar o que pode ser dito sobre determinado problema. Visamos propor características metodológicas e um material didático que tornassem possível uma disciplina de variáveis complexas que, para além dos conteúdos matemáticos trabalhados, também propiciasse uma vivência metodológica diferente da tradicional aos licenciandos e licenciandas quando ainda em formação inicial, para que quando em sala de aula, já como docentes, fossem sensíveis ao processo de ensino e aprendizagem discente.

Primeiramente apresentamos as características relativas à metodologia que recomendamos para o momento de aplicação das tarefas. Nosso referencial teórico e metodológico é o Modelo dos Campos Semânticos, proposto pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins. Em seguida estão as fichas de trabalho, em ordem de aplicação, englobando assuntos que permeiam o conjunto dos números complexos, suas operações e representação geométrica. Também discutimos após cada ficha os objetivos pretendidos com a aplicação dela, além de comentários sobre as possíveis respostas esperadas. Por fim, anexamos todas as Fichas em ordem de aplicação e com os devidos espaços de resolução, para que possam ser impressas se preciso for.

Esperamos que se sintam confortáveis de utilizá-las em suas salas de aula, realizando as alterações que acharem necessárias, aliás todas as salas de aulas são diferentes umas das outras. Entretanto, acreditamos que o exercício de vivenciar uma nova metodologia também faz parte de nosso processo docente, já que estamos em constante formação. Aproveitamos e te convidamos a ler a dissertação que compõe esse material, para que conheça um pouco mais sobre as motivações dessa pesquisa e a trajetória de elaboração e aplicação desse produto.

Um grande abraço!

Uma dinâmica para aplicação das Fichas de Trabalho à luz do Modelo dos Campos Semânticos

Discutimos quatro tópicos entendidos por nós como importantes para que a dinâmica de sala de aula estivesse norteada pelo nosso referencial teórico – Modelo dos Campos Semânticos: aprendizagem colaborativa, dinâmica de produção, ordem de fala e intervenção docente.

1. **Aprendizagem colaborativa:** O termo colaborativo é utilizado para indicar que a aprendizagem nessa dinâmica é promovida em um ambiente em que os discentes se sintam motivados a falar e expressar suas conjecturas, sem o juízo de valor pela parte docente, e por meio dessa interação e colaboração é posto em marcha o processo de aprendizagem.
2. **Dinâmica de produção:** Para que a aprendizagem fosse colaborativa, mas sem que grupos fossem apagados pela produção de poucos discentes, a produção frente às tarefas ocorre, primeiramente, de maneira individual, para que em grupo diferentes construções sejam discutidas posteriormente.
3. **Ordem de fala:** Alinhado com o tópico anterior, a ordem de fala na exposição das produções também é de suma importância. Fala primeiro quem não tem certeza da direção que está tomando em sua produção, para que depois falem os que já tiverem mais certeza do que foi produzido.
4. **Intervenção docente:** A intervenção docente ocorre como uma mediação. Evita-se a ação de “indicar o caminho” para a solução matemática correta, e prioriza-se uma ação de tentar entender de onde a/o discente está falando, o que por ela(e) está sendo ou não legitimado, para que ao final de toda discussão seja possível realizar um fechamento do que foi produzido conjuntamente, além da formalização da matemática do matemático ali envolvida.

O material que será lido nas páginas seguintes foi utilizado em nossa aplicação em sala de aula como disparador de discussão sobre os temas planejados para uma disciplina de Variáveis Complexas. Por conta dessa característica metodológica, inserimos nas fichas de trabalho não só tarefas, mas também as definições matemáticas envolvidas em cada discussão.

Esta decisão visa que a(o) estudante em formação experiencie falar a partir de um texto matemático tomado como demanda de produção de significados, e não como algo a ser memorizado e aplicado. Esta prática se relaciona ao nosso referencial teórico por não apresentar o resultado matemático já estabelecido como o único possível.

Toda essa movimentação pode ser interessante para que estudantes vivenciem o estranhamento já vivido um dia pelos matemáticos ao precisarem desenvolver uma temática sem a exposição de uma definição prévia, sendo mais palpável a necessidade de se tornar sensível ao estranhamento frente ao desconhecido, tarefa cotidiana na prática de um(a) docente.

Ficha de Trabalho 1

Para a primeira ficha de trabalho, de tarefa única intitulada *Resolvendo Equações Algébricas*, questionamos, a partir da exposição de quatro equações algébricas, o significado atribuído à expressão “resolver uma equação” e o que pode ser dito após resolução das equações propostas.

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0$;

b) $x^2 + 4 = 0$;

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

1. O que significa a expressão matemática “resolver uma equação”?
2. Resolva as equações acima.
3. Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?

Comentários: Em nenhum momento a motivação da produção de significados relativa ao enunciado da tarefa induz a utilização de números complexos, o que foi intencional. A partir das resoluções, o esperado é que muito sutilmente iniciemos uma discussão sobre conjuntos numéricos, já que matematicamente a solução de equações pode ser dada por notação de conjuntos.

Nos colocando em uma posição de prever enunciações discentes, projetamos nos deparar com resoluções que consideram a ausência de soluções reais como um absurdo matemático, ou como uma evidência de que a equação “não poderia ser resolvida”, ou ainda enunciações que evidenciem a existência de números complexos.

Acrescentamos que a discussão de características de outros conjuntos, como o conjunto dos números reais, não é conflitante com a temática da ficha 1, pelo contrário. Historicamente a produção matemática não é linear, e acreditamos que, ao estudar o novo, aprendemos mais também sobre o que consideramos cotidiano.

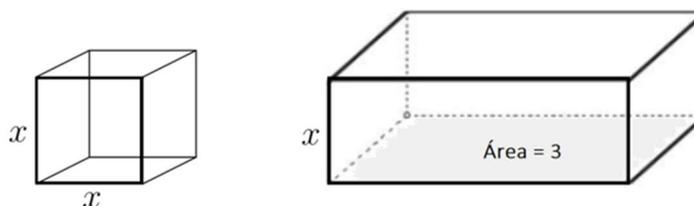
A interação das soluções encontradas na sala de aula faz com que a tarefa atinja seu objetivo: gerar a atmosfera da necessidade de estender o conjunto dos números reais, de modo que as equações admitam solução/soluções. No caso de soluções utilizando números complexos, é interessante motivar e validar a discussão nessa direção para tentar compreender o que já é conhecido da temática pela parte discente.

Ficha de Trabalho 2

A discussão de segunda ficha de trabalho é dividida em duas tarefas, *Tarefa 2.1 – Um problema geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico*, ambas com textos adaptados e tarefas inspiradas no seguinte problema geométrico observado em CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010. Este é o momento de apresentação de um problema, geométrico, que demanda a criação de novas ferramentas para que sua solução seja desenvolvida por completo.

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico

Seja V o volume de um cubo de aresta x , e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo.



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que $V = V' + 1$ na tabela abaixo:

| X | V | $V' + 1$ |
|-----|-----|----------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

cujas raízes podem ser escritas sob a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2)$$

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado discriminante) for negativo? Neste caso a radiciação não é possível em \mathbb{R} , por consequência a expressão das raízes (2) não tem significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindus e árabes não tinha passado despercebido este caso embaraçoso. Mas sempre que ele se dava, o problema concreto que tinha dado origem a equação, via-se que era um problema sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o problema não tinha

solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado porque essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse como resolver as do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebristas italianos, herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resolução.

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), empregando a linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$, reduz-se a equação (3) à forma

$$y^3 + ay + b = 0 \quad (4)$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \quad (5)$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e mais grave que se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V o volume de um cubo de aresta x , e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à resta do cubo. Determine x de modo que $V = V' + 1$.

Como $V = x^3$ e $V' = 3x + 1$, o problema leva imediatamente à seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma (4).

Temos, nesse caso, $a = -3$; $b = -1$; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$, mas esta raiz não existe.

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da experiência anterior concluiríamos que a não existência da raiz de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ quer dizer que o nosso problema é impossível.

Porém, uma análise mais detalhada sugere que o problema proposto não é impossível. De fato, quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume $V = x^3$ é também pequeno e menor que a soma $3x + 1$, mas, à medida que x aumenta V vai se aproximando de $V' + 1 = 3x + 1$ e chega mesmo a ultrapassá-lo, por exemplo, para $x = 1$, temos $V = 1$ e $V' + 1 = 4$, mas para $x = 2$, temos $V = 8$ e $V' + 1 = 7$. Conclui-se deste raciocínio que deve haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da equação do

problema: $x^3 = 3x + 1$. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida entre 1,8 e 1,9 visto que para $x = 1,8$; $V = 5,832 < V' + 1 = 6,4$ e para $x = 1,9$, $V = 6,859 > V' + 1 = 6,7$.

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos calculá-la.

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

Comentários: A questão final dessa ficha aponta para o traçado de uma estratégia, é preciso entender o que é o problema e o que precisa ser manipulado, ou o que está impedindo a manipulação, para em seguida elaborar um método de resolução.

O problema motivador pode ser simplificado por uma equação. Esta escolha vai além de uma manipulação algébrica tendo como finalidade o encontro de uma solução para uma equação justamente por ela não ser apresentada sem contexto. A equação é proveniente de um problema real, palpável, envolvendo uma medida linear. “Se podemos medir o comprimento dessa aresta, como encontrá-lo através de uma equação considerada sem solução?”, ou ainda, “Se o valor de x precisa estar compreendido entre 1,8 e 1,9, que são dois valores reais, porque não encontramos x como uma solução também real da equação?”.

Os questionamentos previstos podem surgir naturalmente da discussão realizada entre discentes, mas o último também pode ser motivado pela utilização do software GeoGebra, que nos auxilia na visualização geométrica de o questionamento é possível, já que suas representações geométricas possuem uma interseção (Figura 1), cabendo a nós evidenciá-la algebricamente.

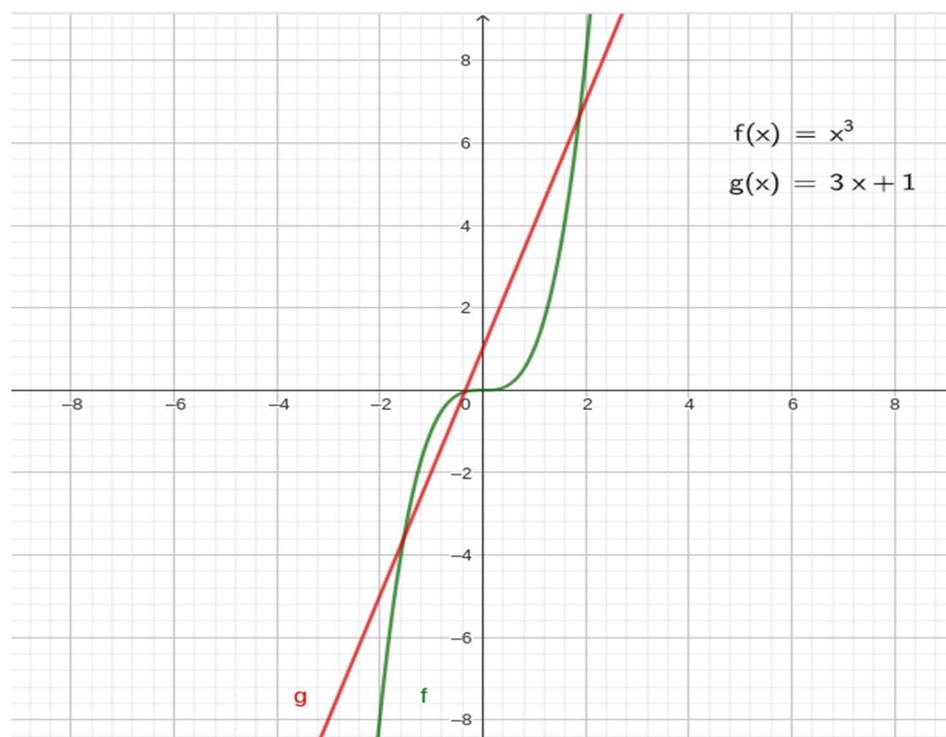


Figura 1: Criada pela autora no software GeoGebra.

Ficha de Trabalho 3

Nesta sequência, iniciamos a discussão à partir das necessidades nascidas pelas “insuficiências” de outros conjuntos numéricos ao longo da produção matemática a fim de inserir a turma em um ambiente de criação. Duas tarefas foram desenvolvidas, *Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico* e *Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)*, que possui fechamento apenas na Ficha de Trabalho 4.

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução de problemas não é um tema novo na sua vida escolar e acadêmica. Há muito tempo se verificou, por exemplo, que no conjunto dos números naturais, que denotamos por \mathbb{N} , a adição de dois números é uma operação sempre possível em \mathbb{N} pois seu resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a subtração.

A subtração $10 - 2$, por exemplo, pode levar à adição pois a operação equivale a perguntar: qual é o número natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação $x + 2 = 10$. Cujas soluções, existindo em \mathbb{N} , é a resposta procurada; um número natural.

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturais quaisquer?

Suponha que para respondermos a essa pergunta começemos a fazer experimentos com diferentes números até chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o que podemos concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x + 10 = 2$? Concluiremos que esse número não existe.

Logo, concluímos que em \mathbb{N} a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a concluir que a equação $x + b = a$ nem sempre tem solução em \mathbb{N} . Essa limitação do conjunto \mathbb{N} não passou despercebido historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto \mathbb{N} , construir um conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possível ampliar o conjunto \mathbb{N} , construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação $a + x = b$ tenha sempre solução, quando a e b pertencem a \mathbb{N} ?

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteiros, denotado por \mathbb{Z} .

O problema que passaremos a discutir é análogo ao anterior. A nossa questão atual é: será possível construir um conjunto numérico, ampliando o conjunto \mathbb{R} , dos números reais, no qual a raiz de um número negativo – como na equação $x^2 + 1 = 0$ – tenha solução nesse novo conjunto?

Questão: Entendido nosso problema, devemos discutir (a) o que devemos fazer? (b) Por onde começar?

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto \mathbb{R} são:

(i) Resolver as deficiências que o conjunto numérico anterior. No nosso caso, resolver o problema das equações que não possuem solução em \mathbb{R} , ou seja, que possuem raiz negativa.

(ii) Preservar, ao máximo, as propriedades do conjunto R na construção do novo conjunto. Isto quer dizer, que é desejável, que tentemos manter as propriedades operatórias dos números reais, tais como, a associatividade e a comutatividade das operações de adição e multiplicação em R , a distributividade da multiplicação em relação à adição e todas as outras propriedades dos números reais.

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a ampliação do conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso consideremos a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x = \pm\sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi criar o símbolo i , chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R .

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejam alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \text{Seja } a \in \mathbb{R}, a > 0, x = \sqrt{-a^2} &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1) \cdot a^2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a^2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot a \\ &\Leftrightarrow x = ia \end{aligned}$$

Assim, operamos com o novo número i "como se ele fosse um número real", isto é, efetuando as propriedades operatórias dos números reais. Por exemplo,

$$(5i)^2 = (5i) \cdot (5i) = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25.$$

Questão:

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e $x^2 - 4x + 13 = 0$. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conjunto?

(c) Chamaremos esse novo número de número complexo e, lembrando que representamos o conjunto dos números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

Comentários: Um detalhe interessante é que a unidade imaginária (i) surge pela primeira vez em nosso material nessa sequência. Isso faz com que o texto valide o que a turma está produzindo, se já estiverem utilizando essa notação por terem esse conhecimento prévio, ou se torne um novo recurso, paralelo ao que já está sendo construído.

O trabalho frente essas tarefas é um exercício para a/o docente que estiver mediando a aplicação das mesmas. É um momento de caracterização de elementos de um conjunto e do próprio

conjunto, o que pode gerar certa insegurança aos discentes, sendo necessário promover essa motivação. No curso de Licenciatura em Matemática nos deparamos em muitas disciplinas com as generalizações já prontas, que é uma característica da matemática, logo o exercício de generalizar algo partindo de suas percepções é válido e enriquecedor à sua prática.

Ressaltamos que a temática da construção foi dividida em duas Fichas de Trabalho pelo nosso entendimento que esse tipo de manipulação poderia demandar mais tempo. Em nossa aplicação, as Fichas formavam o conteúdo semanal a ser trabalhado em sala de aula. Assim, delimitamos que esse tema seria trabalhado em aproximadamente duas semanas. Porém, essa escolha ocorreu pela percepção que tínhamos da sala de aula em que estávamos aplicando nosso trabalho, logo a sua percepção pode ser diferente em sua turma, sendo necessário alongar ou diminuir o tempo de discussão de acordo com a produção discente, sendo uma atitude recomendada por nós. Como dito anteriormente, cada turma possui suas características e necessidades próprias, cabendo a nós realizarmos as adaptações necessárias.

Ficha de Trabalho 4

A Tarefa 4 – Construção do novo conjunto numérico (parte II) foi planejada para o trabalho de criação e manipulação de operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de propriedades pertinentes à partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e existência de elementos neutro e simétrico.

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a “unidade imaginária” e os números desse novo conjunto, os “complexos”. Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão – irracionais eram os “inexprimíveis” e “quantidades fictícias” nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de entidade abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confortáveis e, por consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam apresentadas algumas definições e verificadas se algumas propriedades de R continuam a valer em C .

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

- a) Defina igualdade de dois números complexos.*
- b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em C .*
- c) Na operação de adição em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C .*
- d) Na operação de multiplicação em R são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em C .*
- e) Em R é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é também válida em C .*

Comentários: Por ser uma tarefa que em nosso entendimento demandaria mais tempo e por ser continuação da Ficha de Trabalho 3, iniciamos as tarefas nesta Ficha de Trabalho 4 com o trabalho em grupo, o que não necessariamente é uma regra para aplicação da mesma e sim apenas uma sugestão.

Projetávamos que essa tarefa nos daria informações de como as(os) discentes estariam manipulando os elementos do conjunto a pouco construído, utilizando seus conhecimentos a respeito de propriedades já estabelecidas com outros conjuntos numéricos, exercitando um nos nossos objetivos, que é o de aprender mais, ou consolidar, o que teoricamente já foi estudado em outra oportunidade na vida escolar e acadêmica.

Ficha de Trabalho 5

A Ficha de Trabalho 5 é a mais longa das 6 constituíntes deste trabalho, composta por 4 tarefas: *Tarefa 5.1 – A representação geométrica do conjunto dos números complexos*, *Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss*, *Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss*, e *Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo*, tendo como objetivo iniciar a discussão da representação geométrica de números complexos a partir de comparações com o conjunto dos números reais.

Tarefa 5.1 - A representação geométrica do conjunto dos números complexos

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos números complexos nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, como o conjunto dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser repelida, e até Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números inteiros e reais enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Álgebra.

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, propriedades e características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades são ganhas.

Os números reais, por exemplo, estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identificados como todos os pontos pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente necessária para identificarmos a posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior que entre os reais.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse conjunto, como poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente os seguintes números complexos:

A. $2 + i$

B. $2 - i$

C. $-4 + 6i$

D. $\sqrt{3} + 2i$

E. 5

F. $-3i$

G. $1 + i$

H. $-1 + i$

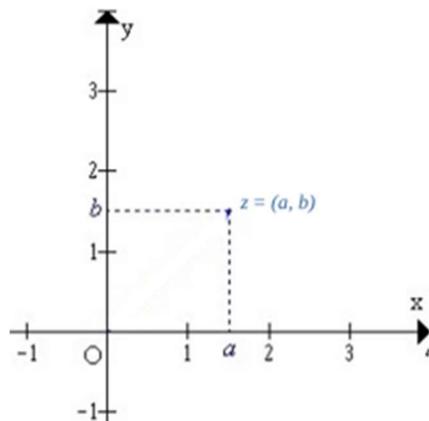
Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss

O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de Gauss. Wessel, um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números complexos - por meio de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Gauss como um grande matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais tempo para chegar na mesma conclusão que Wessel.

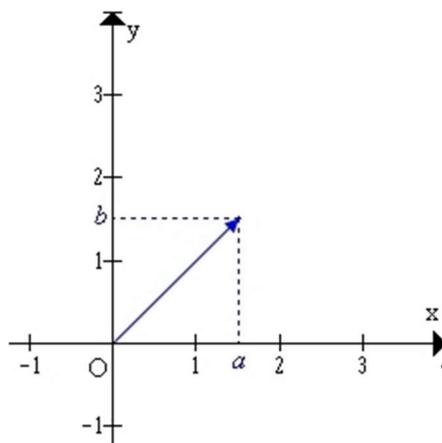
Nessa representação, cada número complexo $z = a + bi$ é identificado como um ponto do Plano de Gauss pelo par ordenado (a, b) . O eixo Ox , do Plano Cartesiano, passa a ser chamado de eixo real (Re) no Plano de

Gauss, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo Oy passa a ser chamado de eixo imaginário, onde representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando $z = a + bi$, tal que $1 < a = b < 2$.



Além de localizarmos um número complexo $z = a + bi$ no plano por coordenadas ditas cartesianas (a , b), interpretando z como um ponto P , podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela seta \overrightarrow{OP} .



Com a interpretação vetorial, é possível visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para os números complexos.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um número complexo, identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o módulo do vetor determinado pelo número complexo em questão.

- A. $2 + i$
- B. $2 - i$
- C. $-4 + 6i$

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula para o cálculo do módulo de um vetor gerado por um número complexo $z = a + bi$ para quaisquer valores de a e b ?

Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss

Texto para discussão

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilita visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses números, como a soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- **Produto de um número complexo por um número real**

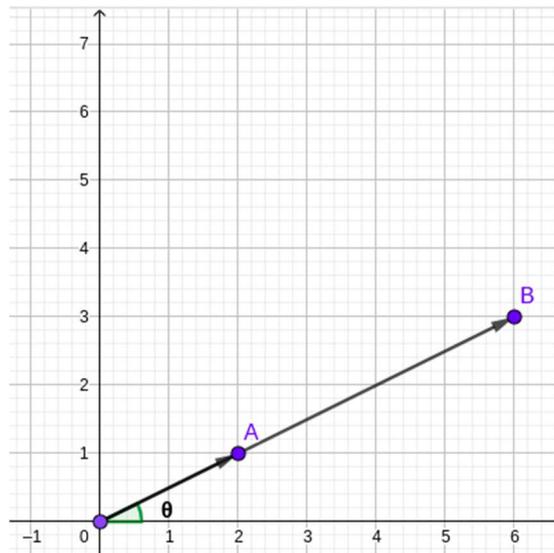
Considere $m = 2 + i \in \mathbb{C}$ e $3 \in \mathbb{R}$. O produto desses dois números resulta em $n = 6 + 3i$:

$$3 \cdot m = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$$m = 2 + i = (2, 1) = A$$

$$n = 6 + 3i = (6, 3) = B$$



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada **homotetia** – ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as características originais, como forma e angulação.

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambos em relação ao eixo real.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do plano, pode ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|n| = \sqrt{a^2 + b^2} = |n| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Assim, verifica-se que o módulo de n é três vezes maior que o módulo de m , ou seja, ocorreu uma ampliação da distância. Agora precisamos verificar se a angulação do primeiro vetor, m , foi preservada.

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada de **argumento** desse vetor; ou melhor, argumento do número complexo dado – $\text{Arg}(z)$. Essa angulação é demarcada no sentido anti-horário, a partir do eixo das abscissas Ox até o vetor indicado.

A angulação θ de z complexo é tal que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$.

Em relação a m , $\cos(\alpha) = \frac{a}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{|m|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Em relação a n , $\cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Assim, como $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ e $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$, $\alpha = \beta$. Esse resultado nos indica que o argumento de m é o mesmo argumento de n , logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último item da tarefa anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma de números complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos m e n quaisquer. Em seguida identifique-os no plano e calcule o módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre m e n e identifique o resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localização no plano e o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano abaixo para uma melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano cartesiano com linhas pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de como calcular o módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de argumento, podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas também pelo que chamamos de **forma trigonométrica**.

A forma trigonométrica de um número complexo $z = a + bi$ é escrita em função do argumento desse mesmo número, sendo um ângulo θ . Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um complexo:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$a = |z|\cos(\theta) \text{ e } b = |z|\text{sen}(\theta)$$

Como $z = a + bi$, podemos substituir o equivalente a a e b , encontrando o que chamamos de forma trigonométrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|\text{sen}(\theta)i$$

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$$

Vejamos um exemplo de escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica:

Seja $z = 1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, então

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar $\text{Arg}(z)$, então seguindo os cálculos...

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e como } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de $|z|$ e $\text{Arg}|z|$, reescrevemos z como:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de **forma trigonométrica**, é equivalente ao que chamam de **forma polar de um número complexo**. Na forma polar ganhamos as coordenadas polares, $(r; \theta)$, em que r representa a distância do número z até a origem, ou seja, $|z|$, e θ o argumento desse mesmo número: $\text{Arg}(z)$.

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

$$m = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$n = \sqrt{3} + i$$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plano, indicando $|z|$ e θ .

$$z = 1 + i$$

$$w = \sqrt{3} - i$$

$$x = 2i$$

Comentários: Esta ficha de trabalho pode ser explorada tanto em sala de aula, como foi realizado na aplicação de nosso trabalho, em que as(os) discentes realizaram as representações geométricas solicitadas em folhas fornecidas, quanto em um laboratório, para que seja explorada também a prática e adaptação de softwares de visualização gráfica, como o GeoGebra, para diferentes práticas pretendidas.

Assim, sugerimos que as representações gráficas sejam criadas em softwares de geometria dinâmica, a fim de facilitar o momento de exposição das criações de cada grupos, tornando a discussão mais dinâmica e interativa.

Ficha de Trabalho 6

Concluindo nossa sequência de Fichas de Trabalho temos a Ficha 6, constituída de três tarefas: *Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica*, *Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica* e *Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial*. Com elas, foi possível realizar o fechamento de nossa discussão inicial inserida na Ficha de Trabalho 02, envolvendo o volume de dois sólidos geométricos, tendo agora todos os elementos operatórios necessários para chegarmos em uma solução.

Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica

Dados os seguintes números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e seus respectivos argumentos $\text{Arg}(z_1) = \theta_1$ e $\text{Arg}(z_2) = \theta_2$, defina a multiplicação desses dois números complexos na forma trigonométrica.

Sejam dados os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$$

Então, calculando o produto $z_1 \cdot z_2$ obteremos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1)]$$

Portanto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Agora que sabemos multiplicar dois números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.

Questão:

- Como vocês fariam para resolver z^9 , sendo $z = \sqrt{3} + i$?
- Existe uma fórmula ou um resultado para resolver à potência z^n , com $n \in \mathbb{N}^*$, sendo z um número complexo da forma $z = a + bi$?

Quanto à potência z^n , com $n \in \mathbb{N}^*$, ela nada mais é que um produto de n fatores iguais a z :

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ fatores}}$$

Então, sendo dado o número complexo z na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, fórmula anterior nos mostra que:

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \dots \cdot |z|}_{\text{multiplicar } n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{[\cos(\theta + \theta + \dots + \theta)]}_{\text{somar } n \text{ argumentos}} + i \underbrace{\text{sen}(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{\text{somar } n \text{ argumentos}}$$

logo

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Obs: Para elevar um número complexo a n , $n \in \mathbb{N}^*$, devemos elevar seu módulo a n e multiplicar seu argumento por n .

Questão:

a) Calcule z^8 , sendo $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$.

b) Efetue $(1 + i)^{12}$.

Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica

A forma trigonométrica também nos será de grande utilidade na radiciação. Encontre as raízes cúbicas de $8i$, ou seja, quais são os números que elevados a 3 são iguais a $8i$?

Vejam os seguinte exemplo: Dado um número complexo z na forma trigonométrica, $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, não é difícil perceber que para obter uma raiz cúbica de z devemos realizar com seu módulo e argumento as operações inversas daquelas que efetuamos quando elevamos z ao cubo: extrair a raiz cúbica do módulo - ao invés de elevá-lo ao cubo - e dividir o argumento por 3 - ao invés de multiplicá-lo por 3. Assim fazendo, encontraremos:

$$w_1 = \sqrt[3]{|z|}(\cos \frac{\theta}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{3})$$

Podemos verificar, através da potenciação na forma trigonométrica, que:

$$(w_1)^3 = (\sqrt[3]{|z|})^3 [\cos \frac{3 \cdot \theta}{3} + i \operatorname{sen} \frac{3 \cdot \theta}{3}] = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = z$$

No entanto, se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_1 , encontraremos outro número complexo:

$$w_2 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$

Constata que:

$$(w_2)^3 = |z|[\cos(\theta + 2\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)] = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = z$$
$$3 \cdot (\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

Acrescentando, agora, $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_2 , encontraremos um terceiro número complexo:

$$w_3 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})]$$

$$(w_3)^3 = |z|[\cos(\theta + 4\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 4\pi)] = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = z$$
$$3 \cdot (\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})$$

Observe que se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_3 , voltaremos a encontrar w_1 . Portanto, $(w_1)^3 = (w_2)^3 = (w_3)^3 = z$, e w_1, w_2 e w_3 são raízes cúbicas de $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Propriedade: Todo número complexo z , não nulo, admite n raízes n -ésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Questão:

- a) Com base nessas informações, encontre as raízes cúbicas de $8i$ e faça sua representação geométrica.
 b) Olhando para a propriedade anterior, resolva em \mathbb{C} , a equação $x^6 - 1 = 0$.

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação do 3º grau. A resolução desta equação pela fórmula de Cardano-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao depararmos com a raiz quadrada de um número negativo.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém tivemos que interromper, novamente, a resolução quando chegamos no seguinte cálculo (envolvendo raízes cúbicas de um número complexo):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos por meio da forma trigonométrica. Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Resolução: Como $V = x^3$ e $V' = 3x + 1$, o problema leva imediatamente à seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma $y^3 + ay + b = 0$ e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, $a = -3$; $b = -1$; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com você, encontre a solução deste problema!

Sugestões de leitura

Gostaríamos de agradecer a você, cara(o) colega de profissão, pela oportunidade de apresentar a você nossa reflexão e produção. Nós docentes estamos em constante formação, e é importante que nossas práticas e ações docentes sejam repensadas, para não estagnarmos em uma posição confortável que não represente nossas concepções de educação, ensino e aprendizagem. É possível tomarmos posições metodológicas e didáticas diferentes das que vivenciamos em nossas formações iniciais, inclusive se nossa área de atuação for no Ensino Superior, na formação de futuras professoras e professores. A formação deve estar a serviço dessas(es) futuras(os) docentes, logo nossa prática precisa refletir nossas escolhas teóricas e metodológicas.

Pontuamos que as Fichas de Trabalho não estão acabadas. Essa formatação fez parte de nossa aplicação no mestrado, sofreram revisão mais de uma vez, adaptando à realidade em que estávamos inseridos, e o mesmo pode e deve ser feito para a sua realidade, de modo que atenda à necessidade de sua sala de aula. Ainda assim, esperamos que seja um material de grande auxílio em suas atividades, independente do conteúdo matemático que estiver ministrando, já que acreditamos que outras temáticas também podem ser exploradas a partir da direção aqui exposta.

Incluímos sugestões de leituras que de muito nos ajudaram na pesquisa e escrita deste trabalho, e que podem também ser referência e luz a questões que permeiam sua prática. Até a próxima!

- ALMEIDA, V. R. Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- ALVES, A. F. Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010.
- LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. Campinas: n.18, p.117-123, 2005a.
- OLIVEIRA, T. O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.
- SILVA, A. M. Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 2003. 244 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

Ficha de Trabalho 1

Para a primeira ficha de trabalho, de tarefa única intitulada *Resolvendo Equações Algébricas*, questionamos, a partir da exposição de quatro equações algébricas, o significado atribuído à expressão “resolver uma equação” e o que pode ser dito após resolução das equações propostas.

Tarefa 1 - Resolvendo Equações Algébricas

Considere as seguintes equações:

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0$;

b) $x^2 + 4 = 0$;

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

d) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

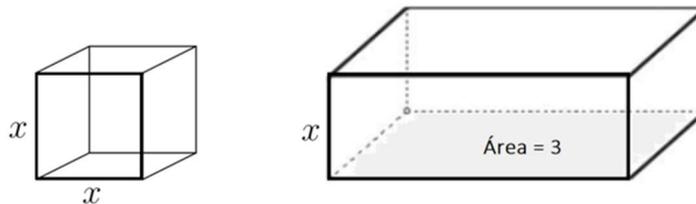
1. *O que significa a expressão matemática “resolver uma equação”?*
2. *Resolva as equações acima.*
3. *Que informações você pode tirar a partir da resolução das equações dadas?*

Ficha de Trabalho 2

A discussão de segunda ficha de trabalho é dividida em duas tarefas, *Tarefa 2.1 – Um problema geométrico* e *Tarefa 2.2 – Uma leitura algébrica do problema geométrico*, ambas com textos adaptados e tarefas inspiradas no seguinte problema geométrico observado em CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 7 ed. Lisboa: Gradiva, 2010 Este é o momento de apresentação de um problema, geométrico, que demanda a criação de novas ferramentas para que sua solução seja desenvolvida por completo.

Tarefa 2.1 - Um problema geométrico

Seja V o volume de um cubo de aresta x , e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo.



Verifique experimentalmente se existe uma aresta x tal que $V = V' + 1$ na tabela abaixo:

| x | V | $V' + 1$ |
|-----|-----|----------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

O que você pode dizer sobre o valor procurado?

Tarefa 2.2 - Uma leitura algébrica do problema geométrico

Ao resolvermos uma equação algébrica do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

cujas raízes podem ser escritas sob a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2)$$

deparamos com a seguinte situação: e se a expressão que figura abaixo do radical (o chamado discriminante) for negativa? Neste caso a radiciação não é possível em \mathbb{R} , por consequência a expressão das raízes (2) não tem significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindus e árabes não tinha passado despercebido este caso embaraçoso. Mas sempre que ele se dava, o problema concreto que tinha dado origem a equação, via-se que era um problema sem solução. O algebrista interpretava o discriminante negativo como querendo dizer que o problema não tinha solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado porque essa interpretação estava de acordo com a realidade e as necessidades da prática na época.

Passaram muitos séculos, sobre a resolução das equações do 2º grau, sem que soubesse como resolver as do 3º grau. Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel ao século XVI, que os algebristas italianos, herdeiros da cultura que os árabes tinham recolhido no oriente obtiveram, com êxito, a sua resolução.

Os resultados gerais desse estudo (que, a princípio, dava-se apenas em casos particulares), empregando a linguagem e forma de escrita de hoje, pode ser descrito considerando a equação do 3º grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

Por meio da transformação, $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$, reduz-se a equação (3) à forma

$$y^3 + ay + b = 0 \quad (4)$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \quad (5)$$

Como podemos observar, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Conhecida a resolução da equação do 3º grau, estava para surgir um fato mais importante e mais grave que se tornaria um grande embaraço para os matemáticos da época.

Para aplicarmos, a resolução da equação do 3º grau, coloquemos o seguinte problema: Seja V o volume de um cubo de aresta x , e V' o paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura à resta do cubo. Determine x de modo que $V = V' + 1$.

Como $V = x^3$ e $V' = 3x + 1$, o problema leva imediatamente à seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma (4).

Temos, nesse caso, $a = -3$; $b = -1$; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$, mas esta raiz não existe.

Estamos no mesmo caso que apontamos anteriormente para as equações do 2º grau, logo, da experiência anterior concluiríamos que a não existência da raiz de $\sqrt{\frac{-3}{4}}$ quer dizer que o nosso problema é impossível.

Porém, uma análise mais detalhada sugere que o problema proposto não é impossível. De fato, quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume $V = x^3$ é também pequeno e menor que a soma $3x + 1$, mas, à medida que x aumenta V vai se aproximando de $V' + 1 = 3x + 1$ e chega mesmo a ultrapassá-lo, por exemplo, para $x = 1$, temos $V = 1$ e $V' + 1 = 4$, mas para $x = 2$, temos $V = 8$ e $V' + 1 = 7$. Conclui-se deste raciocínio que deve haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da equação do problema: $x^3 = 3x + 1$. Pode-se observar, mas detidamente, que essa raiz está compreendida entre 1, 8 e 1, 9 visto que para $x = 1, 8$; $V = 5, 832 < V' + 1 = 6, 4$ e para $x = 1, 9$, $V = 6, 859 > V' + 1 = 6, 7$.

A conclusão é que existe a raiz da equação relativa ao problema proposto, mas não sabemos calculá-la.

Questão: Qual é então o problema que temos que resolver?

Ficha de Trabalho 3

Nesta sequência, iniciamos a discussão à partir das necessidades nascidas pelas “insuficiências” de outros conjuntos numéricos ao longo da produção matemática a fim de inseri a turma em um ambiente de criação. Duas tarefas foram desenvolvidas, *Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico* e *Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)*, que possui fechamento apenas na Ficha de Trabalho 4.

Tarefa 3.1 - A necessidade de um novo conjunto numérico

Texto para discussão

A necessidade de ampliação de um conjunto numérico devido a sua deficiência na resolução de problemas não é um tema novo na sua vida escolar e acadêmica. Há muito tempo se verificou, por exemplo, que no conjunto dos números naturais, que denotamos por \mathbb{N} , a adição de dois números é uma operação sempre possível em \mathbb{N} pois seu resultado é um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a subtração.

A subtração $10 - 2$, por exemplo, pode levar à adição pois a operação equivale a perguntar: qual é o número natural que devemos somar a 2 para obter 10? Essa pergunta pode ser traduzida na equação $x + 2 = 10$. Cujas soluções, existindo em \mathbb{N} , é a resposta procurada; um número natural.

Essa questão motiva outra indagação: é possível calcular a diferença de dois números naturais quaisquer?

Suponha que para respondermos a essa pergunta começemos a fazer experimentos com diferentes números até chegarmos a nos perguntar, qual é o número natural que devemos somar a 10 para obtermos 2, o que podemos concluir? Ou expressando em símbolos perguntamos: existe um número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x + 10 = 2$? Concluiremos que esse número não existe.

Logo, concluímos que em \mathbb{N} a operação de subtração nem sempre é possível. O que equivale a concluir que a equação $x + b = a$ nem sempre tem solução em \mathbb{N} . Essa limitação do conjunto \mathbb{N} não passou despercebido historicamente porque impossibilitava a resolução de muitos problemas práticos.

Como consequência, surgiu uma outra indagação: será possível, ampliando o conjunto \mathbb{N} , construir um conjunto numérico no qual a subtração seja sempre possível? Dito em outras palavras, é possível ampliar o conjunto \mathbb{N} , construindo a partir dele, um conjunto numérico, no qual a equação $a + x = b$ tenha sempre solução, quando a e b pertencem a \mathbb{N} ?

Como sabemos a resposta a essa questão foi positiva e foi criado o conjunto dos números inteiros, denotado por \mathbb{Z} .

O problema que passaremos a discutir é análogo ao anterior. A nossa questão atual é: será possível construir um conjunto numérico, ampliando o conjunto \mathbb{R} , dos números reais, no qual a raiz de um número negativo – como na equação $x^2 + 1 = 0$ – tenha solução nesse novo conjunto?

Questão: Entendido nosso problema, devemos discutir (a) o que devemos fazer? (b) Por onde começar?

Tarefa 3.2 - Construção do novo conjunto numérico (parte I)

Os pontos principais para se construir um novo conjunto numérico a partir do conjunto R são:

(i) Resolver as deficiências que o conjunto numérico anterior. No nosso caso, resolver o problema das equações que não possuem solução em R , ou seja, que possuem raiz negativa.

(ii) Preservar, ao máximo, as propriedades do conjunto R na construção do novo conjunto. Isto quer dizer, que é desejável, que tentemos manter as propriedades operatórias dos números reais, tais como, a associatividade e a comutatividade das operações de adição e multiplicação em R , a distributividade da multiplicação em relação à adição e todas as outras propriedades dos números reais.

(iii) Identificar, no final do processo de construção o que se ganhou e o que se perdeu com a ampliação do conjunto R para o novo conjunto.

Assim, nosso ponto de partida é resolver o problema da raiz de um número negativo. Para isso consideremos a equação $x^2 + 1 = 0$.

Sabemos que decorre dessa igualdade que $x = \pm\sqrt{-1}$.

A saída que os pensadores que estavam envolvidos em resolver o problema encontraram foi criar o símbolo i , chamado de unidade imaginária, tal que

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

E impondo a esse símbolo que obedeça a duas condições:

1ª) O símbolo i satisfaz ao maior número possível das propriedades operatórias usuais de R .

2ª) Satisfaça ainda a seguinte condição: $i^2 = -1$.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \text{Seja } a \in R, a > 0, x = \sqrt{-a^2} &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1) \cdot a^2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{a^2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{(-1)} \cdot a \\ &\Leftrightarrow x = ia \end{aligned}$$

Assim, operamos com o novo número i "como se ele fosse um número real", isto é, efetuando as propriedades operatórias dos números reais. Por exemplo,

$$(5i)^2 = (5i) \cdot (5i) = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25.$$

Questão:

(a) Com base nessas informações, retornemos às seguintes equações da tarefa 1, $x^2 + 4 = 0$ e $x^2 - 4x + 13 = 0$. Tente resolvê-las com base nas informações obtidas.

(b) Com base no item (a) como você representaria o caso mais geral de um número desse novo conjunto?

(c) Chamaremos esse novo número de número complexo e, lembrando que representamos o conjunto dos números racionais pela representação:

$$Q = \{a/b : a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Como você representaria em símbolos o conjunto dos números complexos?

Ficha de Trabalho 4

A Tarefa 4 – Construção do novo conjunto numérico (parte II) foi planejada para o trabalho de criação e manipulação de operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de propriedades pertinentes à partir das operações, como comutatividade, associatividade, distributividade e existência de elementos neutro e simétrico.

Tarefa 4 - Construção do novo conjunto numérico (parte II)

Trabalho em grupo:

Os números complexos custaram a serem aceitos, e a evidência mais fácil de ser constatada é retirada da forma com que até hoje os denominamos: o símbolo i é a “unidade imaginária” e os números desse novo conjunto, os “complexos”. Outros números também passaram pelo mesmo processo de repulsão – irracionais eram os “inexprimíveis” e “quantidades fictícias” nomeavam os negativos. Isso ocorreu pois a matemática lidava, e ainda lida, com objetos que nem sempre correspondem com a experiência real e não abstrata, chamada por Tatiana Roque de experiência sensível, e quando a comunidade matemática enxerga a necessidade de transicionar a noção do que é número, algo que significava apenas quantidade, para algum tipo de entidade abstrata, operações com o que antes era concebido como monstruosidade se tornam mais confortáveis e, por consequência, aceitas socialmente.

Dando continuidade à construção do nosso novo conjunto numérico é necessário que sejam apresentadas algumas definições e verificadas se algumas propriedades de \mathbb{R} continuam a valer em \mathbb{C} .

Com isso em mente, siga o roteiro de trabalho:

- a) Defina igualdade de dois números complexos.*
- b) Defina as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão em \mathbb{C} .*
- c) Na operação de adição em \mathbb{R} são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em \mathbb{C} .*
- d) Na operação de multiplicação em \mathbb{R} são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existe o elemento simétrico e o elemento neutro. Verifique se tais propriedades são válidas em \mathbb{C} .*
- e) Em \mathbb{R} é válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verifique se é também válida em \mathbb{C} .*

Ficha de Trabalho 5

A Ficha de Trabalho 5 é a mais longa das 6 constituintes deste trabalho, composta por 4 tarefas: *Tarefa 5.1 – A representação geométrica do conjunto dos números complexos*, *Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss*, *Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss*, e *Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo*, tendo como objetivo iniciar a discussão da representação geométrica de números complexos a partir de comparações com o conjunto dos números reais.

Tarefa 5.1 - A representação geométrica do conjunto dos números complexos

Texto para discussão

Como temos experimentado ao longo dos encontros, estudar e investigar a respeito dos números complexos nos impulsiona a também estudar e investigar algum conjunto numérico por nós já conhecido, como o conjunto dos números reais, junto de suas propriedades.

A comparação entre esses os dois conjuntos citados é uma ação quase impossível de ser repelida, e até Gauss tomou um caminho parecido. Em seus estudos, Gauss obteve resultados para os números inteiros e reais enquanto explorava a construção dos complexos, auxiliando seus estudos na Geometria Plana e Álgebra.

Agora sabemos que na construção de um conjunto, como discutido na Tarefa 3.2, propriedades e características são perdidas em referência aos conjuntos já conhecidos, e outras propriedades são ganhas.

Os números reais, por exemplo, estão dispostos no que chamamos de reta real, sendo identificados como todos os pontos pertencentes a essa reta. No caso desse conjunto, a ordenação é extremamente necessária para identificarmos a posição de cada número real na reta, através das relações de menor que ou maior que entre os reais.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e na definição geral dada para um número desse conjunto, como poderíamos desenvolver uma representação geométrica para os números complexos?

(b) De acordo com a representação geométrica desenvolvida em (a), identifique geometricamente os seguintes números complexos:

A. $2 + i$

B. $2 - i$

C. $-4 + 6i$

D. $\sqrt{3} + 2i$

E. 5

F. $-3i$

G. $1 + i$

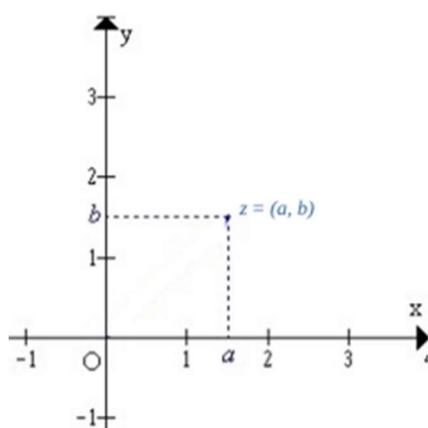
H. $-1 + i$

Tarefa 5.2 – Interpretações de um número no Plano de Gauss

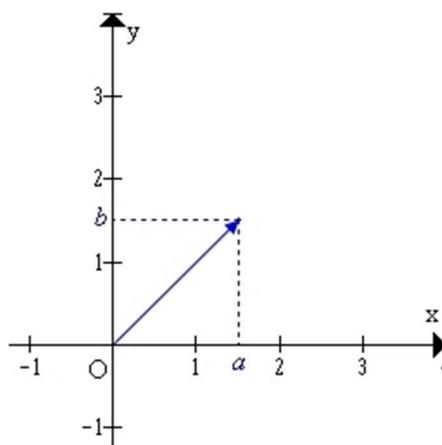
O plano onde representamos geometricamente os números complexos é chamado de Plano de Gauss. Wessel, um agrimensor, no ano de 1798, já havia identificado esse modelo para representar números complexos - por meio de pares ordenados representando pontos em um plano - porém o reconhecimento de Gauss como um grande matemático fez com que esse plano incorporasse o seu nome, mesmo tendo demorado mais tempo para chegar na mesma conclusão que Wessel.

Nessa representação, cada número complexo $z = a + bi$ é identificado como um ponto do Plano de Gauss pelo par ordenado (a, b) . O eixo Ox , do Plano Cartesiano, passa a ser chamado de eixo real (Re) no Plano de Gauss, onde representamos a parte real de z (a) e o eixo Oy passa a ser chamado de eixo imaginário, onde representamos a parte imaginária de z (b).

Observe um exemplo na imagem, considerando $z = a + bi$, tal que $1 < a = b < 2$.



Além de localizarmos um número complexo $z = a + bi$ no plano por coordenadas ditas cartesianas (a, b) , interpretando z como um ponto P , podemos interpretá-lo também como um vetor determinado pela seta \overrightarrow{OP} .



Com a interpretação vetorial, é possível visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para os números complexos.

Questão:

(a) Com base nas informações anteriores, e considerando a interpretação vetorial de um número complexo, identifique os seguintes números complexos no Plano de Gauss e, em cada caso, indique o módulo do vetor determinado pelo número complexo em questão.

A. $2 + i$

B. $2 - i$

C. $-4 + 6i$

(b) De acordo com os cálculos realizados, você acredita que é possível estabelecer alguma fórmula para o cálculo do módulo de um vetor gerado por um número complexo $z = a + bi$ para quaisquer valores de a e b ?

Tarefa 5.3 – Tradução das operações com números complexos no Plano de Gauss

Texto para discussão

Como citado na Tarefa 5.2, a interpretação vetorial de um número complexo possibilita visualizar transformações geométricas por meio das operações usuais que já foram definidas para esses números, como a soma e o produto.

Vamos analisar um desses casos, o produto de um complexo por um número real.

- **Produto de um número complexo por um número real**

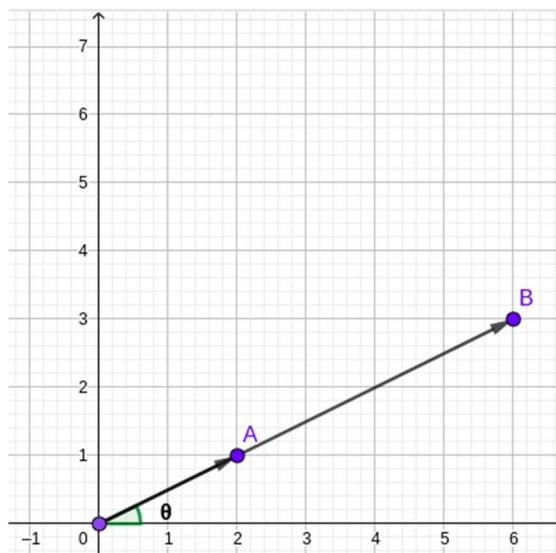
Considere $\mathbf{m} = 2 + i \in \mathbb{C}$ e $3 \in \mathbb{R}$. O produto desses dois números resulta em $\mathbf{n} = 6 + 3i$:

$$3 \cdot \mathbf{m} = 3 \cdot (2 + i) = 6 + 3i$$

Se representarmos esses dois números complexos no plano teremos a seguinte representação:

$$\mathbf{m} = 2 + i = (2, 1) = A$$

$$n = 6 + 3i = (6, 3) = B$$



Analisando o plano nota-se a ocorrência de uma transformação geométrica chamada **homotetia** – ampliação ou redução de uma distância ou área, a partir de um ponto fixo, que preserva as características originais, como forma e angulação.

Podemos verificar a homotetia sabendo o módulo dos vetores envolvidos e a angulação de ambos em relação ao eixo real.

O módulo de um vetor qualquer nesse plano, ou seja, a distância de um ponto até a origem do plano, pode ser calculado da seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No nosso caso, temos:

$$|m| = \sqrt{a^2 + b^2} = |m| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|n| = \sqrt{a^2 + b^2} = |n| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Assim, verifica-se que o módulo de **n** é três vezes maior que o módulo de **m**, ou seja, ocorreu uma ampliação da distância. Agora precisamos verificar se a angulação do primeiro vetor, **m**, foi preservada.

A angulação θ de um vetor nesse plano, sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é chamada de **argumento** desse vetor, ou melhor, argumento do número complexo dado – $Arg(z)$. Essa angulação é demarcada no sentido anti-horário, a partir do eixo das abscissas Ox até o vetor indicado.

$$A \text{ angulação } \theta \text{ de } z \text{ complexo é tal que } \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

$$Em \text{ relação a } m, \cos(\alpha) = \frac{a}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \sin(\alpha) = \frac{b}{|m|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Em relação a } n, \cos(\beta) = \frac{a}{|n|} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \operatorname{sen}(\beta) = \frac{b}{|n|} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Assim, como $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)$, $\alpha = \beta$. Esse resultado nos indica que o argumento de m é o mesmo argumento de n , logo a angulação é preservada, verificando a homotetia!

Diferentes operações terão diferentes traduções no plano. Assim, retornaremos no último item da tarefa anterior, em que tínhamos como objetivo investigar qual a tradução não do produto, mas da soma de números complexos no Plano de Gauss.

Questão: Defina dois números complexos m e n quaisquer. Em seguida identifique-os no plano e calcule o módulo dos vetores gerados por eles. Após o cálculo dos módulos, realize a soma entre m e n e identifique o resultado obtido no plano. Por fim, analise o número complexo resultante da soma, a sua localização no plano e o seu módulo. O que podemos dizer sobre esse resultado geométrico? Se preferir, utilize o plano abaixo para uma melhor visualização de sua investigação. [Na questão indicada, havia impresso um plano cartesiano com linhas pontilhadas para facilitar a realização do que foi solicitado em enunciado]

Tarefa 5.4 – Forma Trigonométrica de um número complexo

Agora que temos conhecimento da interpretação vetorial de um número complexo, de como calcular o módulo de um vetor nesse plano e também como encontrar a sua angulação, que chamamos de argumento, podemos identificar um número complexo não mais apenas por coordenadas cartesianas, mas também pelo que chamamos de **forma trigonométrica**.

A forma trigonométrica de um número complexo $z = a + bi$ é escrita em função do argumento desse mesmo número, sendo um ângulo θ . Até agora vimos duas relações envolvendo o argumento de um complexo:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } \operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte maneira:

$$a = |z|\cos(\theta) \text{ e } b = |z|\operatorname{sen}(\theta)$$

Como $z = a + bi$, podemos substituir o equivalente a a e b , encontrando o que chamamos de forma trigonométrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|\operatorname{sen}(\theta)i$$

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$$

Vejamos um exemplo de escrita de um número complexo em sua forma trigonométrica:

Seja $z = 1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

Temos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, então

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Precisamos ainda encontrar $\text{Arg}(z)$, então seguindo os cálculos...

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{ e } \text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e como } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \theta = \frac{\pi}{3}$$

Assim, tendo os valores de $|z|$ e $\text{Arg}|z|$, reescrevemos z como:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Essa nova forma de identificar um complexo, nomeada de **forma trigonométrica**, é equivalente ao que chamam de **forma polar de um número complexo**. Na forma polar ganhamos as coordenadas polares, (r, θ) , em que r representa a distância do número z até a origem, ou seja, $|z|$, e θ o argumento desse mesmo número: $\text{Arg}(z)$.

Questão:

(a) Obtenha a forma trigonométrica dos números apresentados abaixo.

$$m = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$n = \sqrt{3} + i$$

(b) Exprima os seguintes números na forma trigonométrica e os represente geometricamente no plano, indicando $|z|$ e θ .

$$z = 1 + i$$

$$w = \sqrt{3} - i$$

$$x = 2i$$

Ficha de Trabalho 6

Concluindo nossa sequência de Fichas de Trabalho temos a Ficha 6, constituída de três tarefas: *Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica*, *Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica* e *Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial*. Com elas, foi possível realizar o fechamento de nossa discussão inicial inserida na Ficha de Trabalho 02, envolvendo o volume de dois sólidos geométricos, tendo agora todos os elementos operatórios necessários para chegarmos em uma solução.

Tarefa 6.1 - Multiplicação e Potenciação na Forma Trigonométrica

Dados os seguintes números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e seus respectivos argumentos $\text{Arg}(z_1) = \theta_1$ e $\text{Arg}(z_2) = \theta_2$, defina a multiplicação desses dois números complexos na forma trigonométrica.

Sejam dados os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$$

Então, calculando o produto $z_1 \cdot z_2$ obteremos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1)]$$

Portanto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Agora que sabemos multiplicar dois números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.

Questão:

- Como vocês fariam para resolver z^9 , sendo $z = \sqrt{3} + i$?
- Existe uma fórmula ou um resultado para resolver à potência z^n , com $n \in \mathbb{N}^*$, sendo z um número complexo da forma $z = a + bi$?

Quanto à potencia z^n , com $n \in \mathbb{N}^*$, ela nada mais é que um produto de n fatores iguais a z :

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ fatores}}$$

Então, sendo dado o número complexo z na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, fórmula anterior nos mostra que:

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \dots \cdot |z|}_{\text{multiplicar os fatores}} \cdot \underbrace{[\cos(\theta + \theta + \dots + \theta) + i\text{sen}(\theta + \theta + \dots + \theta)]}_{\text{somar os argumentos}},$$

logo

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]$$

Obs: Para elevar um número complexo a n , $n \in \mathbb{N}^*$, devemos elevar seu módulo a n e multiplicar seu argumento por n .

Questão:

a) Calcule z^8 , sendo $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3})$.

b) Efetue $(1 + i)^{12}$.

Tarefa 6.2 - Radiciação na Forma Trigonométrica

A forma trigonométrica também nos será de grande utilidade na radiciação. Encontre as raízes cúbicas de $8i$, ou seja, quais são os números que elevados a 3 são iguais a $8i$?

Vejam o seguinte exemplo: Dado um número complexo z na forma trigonométrica, $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, não é difícil perceber que para obter uma raiz cúbica de z devemos realizar com seu módulo e argumento as operações inversas daquelas que efetuamos quando elevamos z ao cubo: extrair a raiz cúbica do módulo - ao invés de elevá-lo ao cubo - e dividir o argumento por 3 - ao invés de multiplicá-lo por 3. Assim fazendo, encontraremos:

$$w_1 = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\theta}{3} + i\text{sen}\frac{\theta}{3})$$

Podemos verificar, através da potenciação na forma trigonométrica, que:

$$(w_1)^3 = (\sqrt[3]{|z|})^3 [\cos\frac{3\cdot\theta}{3} + i\text{sen}\frac{3\cdot\theta}{3}] = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = z$$

No entanto, se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_1 , encontraremos outro número complexo:

$$w_2 = \sqrt[3]{|z|}[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$

Constate que:

$$(w_2)^3 = |z|[\cos(\theta + 2\pi) + i\text{sen}(\theta + 2\pi)] = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = z$$

$$3 \cdot \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Acrescentando, agora, $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_2 , encontraremos um terceiro número complexo:

$$w_3 = \sqrt[3]{|z|}[\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)]$$

$$(w_3)^3 = |z|[\cos(\theta + 4\pi) + i\text{sen}(\theta + 4\pi)] = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = z$$

$$3 \cdot \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Observe que se acrescentarmos $\frac{2\pi}{3}$ ao argumento de w_3 , voltaremos a encontrar w_1 . Portanto, $(w_1)^3 = (w_2)^3 = (w_3)^3 = z$, e w_1 , w_2 e w_3 são raízes cúbicas de $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$.

Propriedade: Todo número complexo z , não nulo, admite n raízes n -ésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$, enquanto seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Questão:

- Com base nessas informações, encontre as raízes cúbicas de $8i$ e faça sua representação geométrica.
- Olhando para a propriedade anterior, resolva em \mathbb{C} , a equação $x^6 - 1 = 0$.

Tarefa 6.3 - Resolvendo o Problema Inicial

No início dos nossos estudos (Ficha 02) vimos um problema que recaiu em uma equação do 3º grau. A resolução desta equação pela fórmula de Cardano-Tartaglia foi interrompida, pela primeira vez, ao depararmos com a raiz quadrada de um número negativo.

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Esta barreira foi superada com a criação dos números complexos, porém tivemos que interromper, novamente, a resolução quando chegamos no seguinte cálculo (envolvendo raízes cúbicas de um número complexo):

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

A questão da radiciação de números complexos foi esclarecida, como vimos por meio da forma trigonométrica. Agora temos todas as ferramentas para resolver o nosso problema inicial.

Resolução: Como $V = x^3$ e $V' = 3x + 1$, o problema leva imediatamente à seguinte equação: $x^3 = 3x + 1$, que é da forma $y^3 + ay + b = 0$ e esta, após um artifício conveniente, mais longo e trabalhoso do que as equações do 2º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula que já vimos na ficha 02:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Temos, nesse caso, $a = -3$; $b = -1$; $\frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^3}{27} = -1$; $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{-3}{4}$. e, portanto, a fórmula de resolução (5) dá para a raiz da equação,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}}$$

Agora é com você, encontre a solução deste problema!
