

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE J**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO I**

**Larissa Mariane dos R**

Larissa Mariane dos Reis

Contando Curvas: Uma Aplicação da Geometria

Dissertação apresentada à  
Graduação em Matemática,  
Universidade Federal de Juiz de Fora,  
como requisito parcial à obtenção do  
grau de Mestre em Matemática. Área  
de Matemática Pura.



**Larissa Mariane dos Reis**

**Contando Curvas: Uma Aplicação da Geometria T**

Dissertação apresentada ao  
Federal de Juiz de Fora o  
Matemática. Área de conce

Aprovada em 18 de abril de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flaviana Andréa Ribeiro - Orientad**

Juiz de Fora, 07/05/2024.

---



Documento assinado eletronicamente por **Flaviana Andrea Ribeiro, Professor(a)**, em 10/05/2024, à  
do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa, Professor(a)**, em 12/09/2024, à  
do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Joana Darc Antonia Santos da Cruz, Professor(a)**, em 12/0  
fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Renato Vidal da Silva Martins, Usuário Externo**, em 18/09  
fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através  
verificador **1800567** e o código CRC **D74D5177**.

---



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço aos meus pais, Marlene e João, por Mamãe, você é a minha pessoa favorita e a sua força me por todas as palavras de incentivo e por sempre se fazer versão é fruto do seu amor e do seu cuidado. Aos de apoiaram, o meu muito obrigada.

Agradeço à minha amiga, gêmea, companheira de por todo apoio e por nunca ter me deixado desistir. Você chegar aqui, amiga, e não tem palavras nesse mundo q Agradeço também à minha amiga Júlia, por ser colo e fa A Elisa tem a melhor mãe do mundo!

Agradeço ao grupo “Panelinha”, por fazerem de mais leve e por todas as conversas e risadas compartilh ao Walter, por nunca ter soltado a minha mão desde o por terem me dado um lar nesses últimos meses. Aos de caminho e fizeram dessa trajetória única, sou eternamen

Agradeço à minha orientadora Flaviana, carinhos por ter me apresentado o mundo tropical, ter me feito ap os conselhos, desde o início da graduação. Você é uma in da minha caminhada, obrigada por nunca ter me deixad orientar neste trabalho. Agradeço também à minha coori participar deste trabalho conosco, por todo o apoio, por

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal a geometria tropical para contar o número de curvas algébricas de gênero  $g$  e grau  $d$ , que passam por  $3d + g - 1$  pontos por  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ . Para isso, primeiramente introduziremos conceitos algébrica necessárias para a compreensão do trabalho. De seguida, discutiremos a fórmula de Caporaso-Harris, utilizada para calcular  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ . Abordaremos as curvas tropicais, definindo o semicorpo tropical e as hipersuperfícies tropicais. Apresentaremos o Teorema da Dualidade, que relaciona curvas tropicais com os polígonos de Newton. Ademais, exibiremos as curvas tropicais como grafos e definiremos os caminhos reticulados  $\lambda$ -crescente e explicitaremos sua relação com o cálculo de  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ , utilizando as curvas tropicais. Mostraremos que os caminhos reticulados também satisfazem a Fórmula de Caporaso-Harris, o principal resultado do nosso trabalho.

Palavras-chave: Fórmula de Caporaso-Harris; geometria tropical

## ABSTRACT

The main objective of this work is to present some tools for counting the number of algebraic curves in the complex projective plane of genus  $g$  and degree  $d$ , which pass through  $3d + g - 1$  points in general position. This number is denoted by  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ . To do this, we will first introduce some notions for understanding the work. Then we will present the Caporaso-Harris formula to calculate  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ . Next, we will introduce tropical curves and tropical hypersurfaces, and prove the Duality Theorem for subdivisions of their Newton polygon. We will also show that the number of tropical curves is equal to the number of algebraic curves. Afterwards, we will define the  $\lambda$ -crescent lattice paths and use them for the calculation of  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ , using tropical curves. Finally, we will show that  $\lambda$ -crescent lattice paths also satisfy the Caporaso-Harris Formula, which is

Keywords: Caporaso-Harris formula; enumerative geometry

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>
<b>2</b>	<b>CURVAS ALGÉBRICAS . . . . .</b>
2.1	PLANO PROJETIVO . . . . .
2.2	CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS . . . . .
2.3	A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS . . . . .
<b>3</b>	<b>HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS E DADE . . . . .</b>
3.1	SEMICORPO TROPICAL . . . . .
3.2	POLINÔMIOS E HIPERSUPERFÍCIES TR . . . . .
3.3	A ESTRUTURA POLIÉDRICA DE HIPER . . . . .
3.4	TEOREMA DA DUALIDADE . . . . .
<b>4</b>	<b>CURVAS TROPICAIS COMO GRAFO . . . . .</b>
4.1	GRAFOS . . . . .
4.2	CURVAS TROPICAIS . . . . .
<b>5</b>	<b>CAMINHOS RETICULADOS E CUR . . . . .</b>
5.1	CAMINHOS RETICULADOS . . . . .
5.1.1	Multiplicidade de caminhos reticulados . . . . .
5.2	CONTANDO CURVAS . . . . .
<b>6</b>	<b>A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRI . . . . .</b>
6.1	CAMINHOS RETICULADOS GENERALIZ . . . . .
6.2	A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS P . . . . .
	DOS GENERALIZADOS . . . . .
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>

# 1 INTRODUÇÃO

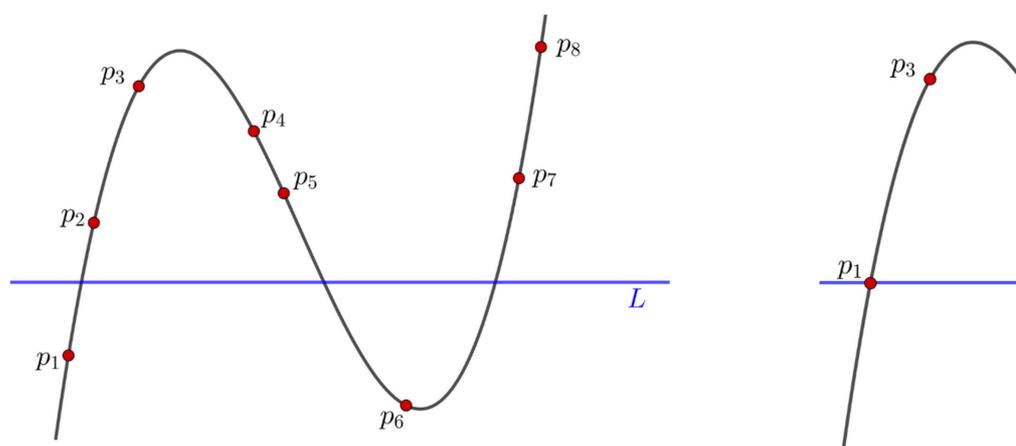
Neste trabalho apresentaremos importantes resultados da geometria tropical na geometria enumerativa. A geometria tropical é um ramo relativamente novo da geometria algébrica, tendo em mente que as variedades algébricas são trocadas por certos objetos em  $\mathbb{R}^n$ , lineares e convexas, estudados com ferramentas combinatórias. Por sua vez, a geometria enumerativa tem como principal objetivo contar objetos geométricos que satisfazem certas condições de incidência. Neste trabalho exploraremos o problema de contar o número  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  de curvas algébricas em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de grau  $d$  e gênero  $g$  passando por  $3d - g - 1$  pontos em posição geral. Esses números, para  $d$  e  $g$  inteiros, são conhecidos como invariantes de Gromov-Witten. Tendo como principais inspirações os matemáticos alemães Andreas Gathmann e Hannah Markwig, neste trabalho faremos a tradução do problema de contar curvas no plano projetivo para o plano tropical e usaremos algumas técnicas da geometria tropical para encontrar esses números.

Definimos a álgebra tropical, que é obtida considerando o semicorpo tropical  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  munido de duas operações: o máximo entre os elementos e a multiplicação, que coincide com a adição usual. Anteriormente, a álgebra tropical era denominada de álgebra max-plus, em homenagem ao matemático e cientista da computação francês René Thomas, que foi pioneiro no uso da álgebra tropical na teoria dos sistemas dinâmicos. A geometria tropical é uma geometria sobre essa álgebra tropical.

Além disso, podemos definir as curvas tropicais, que são objetos geométricos na geometria tropical no  $\mathbb{R}^2$ , como grafos equilibrados que satisfazem certas condições de incidência.

grau e gênero que satisfazem condições de tangência  
 processo de especialização, movendo os pontos um a um  
 esse processo relações recursivas que permitem calcular  
 sucinta de como esse algoritmo funciona, tomando como  
 que consiste em contar o número de cúbicas de gênero 0  
 em posição geral. Vamos mover os pontos  $p_i$  um a um p  
 ponto  $p_1$  e na sequência o ponto  $p_2$  para a reta  $L$ , não ter  
 com uma cúbica passando pelos 8 pontos. Os pontos  $p_1$  e  
 como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Cúbica e reta



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Agora, movendo o ponto  $p_3$  para a reta  $L$ , nec  
 componente da cúbica. A outra componente da cúbica se  
 pelos pontos  $p_4, \dots, p_8$ , como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Reta  $L$  e cônica

diminuir o grau das curvas, utilizando apenas que existem pontos no fim da recursividade.

Em 2005, o matemático russo Grigory Mikhalkin determinou os números  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  usando a geometria tropical. Ele mostrou que  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  coincide com o número de curvas que passam por  $3d + g - 1$  pontos em posição geral pelo Teorema da Correspondência. Além disso, Mikhalkin mostrou que  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  corresponde ao número de caminhos reticulados no triângulo  $(d, 0)$  que satisfazem certas condições e, utilizando a relação entre as curvas tropicais e a sua subdivisão dual, Mikhalkin mostrou, por uma abordagem geométrica, que o número  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  coincide com  $N_{\text{path}}(d, g)$ . Ambos os resultados descritos aqui utilizam cálculos, assim como na fórmula de Caporaso-Harris.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar que a fórmula de Caporaso-Harris também é válida para os caminhos reticulados, ou seja, a fórmula de Caporaso-Harris para o mundo tropical.

O presente trabalho está dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo, intitulado “Curvas Algébricas”, tem como objetivo introduzir os conceitos da geometria algébrica clássica que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Neste capítulo apresentaremos a fórmula de Caporaso-Harris e demonstraremos a recursividade através de um exemplo.

No Capítulo 3, definiremos o semicorpo tropical e as superfícies tropicais no  $\mathbb{R}^n$ . Depois, mostraremos que uma superfície tropical possui consigo uma estrutura de complexo poliédrico, que subdividirá a superfície em regiões convexas.

o número  $N_{\text{path}}(d, g)$  e enunciaremos o resultado encontrado, mostrando que o número  $N_{\text{trop}}(d, g)$  coincide com o número  $N_{\text{path}}(d, g)$  em exemplos como esses números são encontrados.

Por fim, o Capítulo 6 tem como principal objetivo a derivação da fórmula de Caporaso-Harris e os caminhos reticulados estudados anteriormente. Para isso, generalizaremos a definição de caminhos reticulados  $N_{\text{path}}^{\alpha, \beta}(d, g)$ , e definiremos uma fórmula não-recursiva para o número de caminhos, mostrando a equivalência entre essa e a que foi dada anteriormente. Por fim, mostraremos que o número  $N_{\text{path}}^{\alpha, \beta}(d, g)$  satisfaz

## 2 CURVAS ALGÉBRICAS

Neste capítulo vamos introduzir de forma sucinta a geometria algébrica clássica e contar um pouco sobre o assunto de interesse. Depois, apresentaremos a fórmula de Caporaso-Harris que será utilizada no nosso problema enumerativo. As referências foram o livro do Fulton, (5), para a parte de geometria algébrica e para a fórmula de Caporaso-Harris.

### 2.1 PLANO PROJETIVO

Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado. Chamamos o espaço afim  $\mathbb{A}^3$  sobre  $k$  e o denotamos por  $\mathbb{A}^3(k)$  ou simplesmente  $\mathbb{A}^3$ .

Definimos a relação de equivalência  $\sim$  em  $\mathbb{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  por

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \setminus \{0\}; (x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$$

**Definição 2.1.** O plano projetivo  $\mathbb{P}^2(k)$ , ou simplesmente  $\mathbb{P}^2$ , é o quociente

$$\mathbb{P}^2(k) = \mathbb{P}^2 := \frac{k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\sim}$$

O ponto de  $\mathbb{P}^2$  correspondente ao ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  é denotado por  $(x : y : z)$  e  $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$  são chamadas *coordenadas homogêneas*.

Dado

$$U_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; z \neq 0\} = \{(x : y : 1)\}$$

$$f(x, y, z) = \sum_{i+j+l=d} a_{i,j,l} x^i y^j z^l, a$$

**Definição 2.3.** Dado um polinômio homogêneo  $f \in k[x, y, z]$  em  $\mathbb{P}^2$  projetiva, denotada por  $V(f)$ , o conjunto de zeros do po

$$V(f) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; f(x, y,$$

**Definição 2.4.** O grau de uma curva plana projetiva homogêneo  $f$  que a define. Curvas de grau 1, 2, 3 e 4 são retas, cônicas, cúbicas e quárticas.

Seja  $V(f)$  uma curva plana projetiva e  $P = (x_0 : y_0 : z_0)$  (ou *não-singular*) de  $V(f)$  se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$$

Um ponto  $P$  que não é simples é chamado de ponto *múltiplo*. Uma curva que possui somente pontos simples é chamada de curva *lisa*.

**Definição 2.5.** Seja  $f \in k[x, y, z]$  um polinômio homogêneo de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^2$ . A desomogenização de  $f$  com respeito a variável  $z$  como sendo o polinômio

$$f_*(x, y) = f(x, y, 1).$$

As desomogenizações do polinômio  $f$  com respeito a  $x$  e  $y$  são denotadas por  $f_x$  e  $f_y$  de forma análoga.

onde cada  $f_i$  é um polinômio homogêneo em  $x$  e  $y$  de grau  $m$ . A *multiplicidade* de  $V(f_*)$  em  $P = (0, 0) \in \mathbb{A}^2$  e escrevemos  $m_P(f_*)$ . Se  $m = 2$ ,  $P$  é dito um *ponto duplo*, se  $m = 3$ ,  $P$  é dito um *ponto triplo*, e assim sucessivamente.

As definições acima podem ser estendidas a qualquer ponto  $P \in \mathbb{A}^2$ . Basta considerar a translação  $T(x, y) = (x + a, y + b)$ , onde  $(a, b) = P$ . Definimos  $m_P(f_*)$  como sendo  $m_{(0,0)}(f_*^T)$ .

**Definição 2.7.** Seja  $V(f)$  uma curva plana projetiva. Definimos a multiplicidade de  $V(f)$  em  $P = (x : y : 1) \in U_2$ ,  $m_P(f)$ , como sendo  $m_P(f_*)$ , onde  $f_*$  é a forma homogênea de  $f$  na variável  $z$ . O mesmo pode ser feito para  $P = (1 : y : z)$  desomogenizando  $f$  nas variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Como  $f_m$  é um polinômio homogêneo, podemos escrevê-lo como soma de potências de  $m$  formas lineares homogêneas distintas  $L_i$ . Essas  $L_i$ 's são polinômios homogêneos lineares distintos. Essas  $L_i$  são chamadas de *retas tangentes* a  $f_*$  em  $P$  e  $r_i$  é a multiplicidade de  $L_i$  em  $P$ . Essa multiplicidade pode ser feita para cada ponto  $P \in V(f)$ , bastando para isso escolher uma base adequada. Dizemos que as retas  $L_i^*$  são retas tangente a  $V(f)$  em  $P$  se  $r_i > 0$ . Dizemos que um ponto  $P \in V(f)$  é um *ponto múltiplo ordinário* de  $V(f)$  se existem retas distintas em  $P$ .

**Definição 2.8.** Uma curva plana projetiva é dita *nodal* se possui apenas pontos duplos ordinários (nós).

Definimos o corpo de funções de  $\mathbb{P}^2$ , denotado por

$$k(\mathbb{P}^2) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[x, y, z] \text{ formas de grau } m \right\}$$

**Proposição 2.11.** *Seja  $V(f)$  curva plana projetiva de grau  $d$  com  $s$  pontos múltiplos ordinários. O gênero de  $V(f)$  é dado por*

$$g := \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2}$$

onde  $m_P(f)$  é a multiplicidade do ponto  $P$ .

*Demonstração.* Ver (5), Proposição 5 do Capítulo 8.

Notemos que para uma cônica (grau 2) com pontos múltiplos ordinários  $s$ , o gênero  $g$  é dado por:

$$\begin{aligned} g &= \frac{(2-1)(2-2)}{2} - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2} \\ &= - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2} \end{aligned}$$

**Definição 2.12.** Dizemos que uma coleção finita de pontos  $P_1, \dots, P_s$  em posição geral se qualquer subcoleção contendo três (ou menos) desses pontos não é colinear, se os vetores  $\vec{OP}_1, \dots, \vec{OP}_s$  são linearmente independentes como vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.13.** O número de curvas planas no plano projetivo de grau  $d$  e gênero  $g$  que passam por  $3d + g - 1$  pontos em posição geral é denotado por  $N_{\text{cplx}}(d, g)$ .

Os números  $N_{\text{cplx}}(d, g)$  são chamados *invariantes de enumerativa complexa* e tem sido objetos de interesse de muitos geométricos. Os casos mais simples são  $N_{\text{cplx}}(1, 0) = 1$  e  $N_{\text{cplx}}(2, 0) = 1$ . Eles dizem que existe exatamente uma reta e uma cônica que passam por dois pontos em posição geral.

**Definição 2.15.** Dadas duas sequências  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$

- $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots;$
- $I\alpha := 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots;$
- $I^\alpha := 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \dots;$
- $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots);$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \binom{\alpha_3}{\beta_3} \dots$

Dizemos que  $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha_n \geq \beta_n$  para todo  $n$ . Denotamos por  $e_n$  a  $n$ -ésima coordenada sendo 1 e as demais 0.

**Definição 2.16.** Sejam  $d \geq 0$  e  $g$  números inteiros,  $I\alpha + I\beta = d$ . Fixemos uma reta  $L \subset \mathbb{P}^2$ . Denotamos por  $N_{\text{cplx}}^{\alpha, \beta}(d, g)$  o número de curvas planas projetivas nodais e não necessariamente irredutíveis que satisfazem as seguintes condições:

- intersectam  $L$  em  $\alpha_i$  pontos genéricos fixados com multiplicidade  $\beta_i$  para  $i \geq 1$ ;
- intersectam  $L$  em  $\beta_i$  pontos arbitrários, com multiplicidade  $\beta_i$  para  $i \geq 1$ ;
- passam adicionalmente por  $2d + g + |\beta| - 1$  pontos genéricos fixados.

Em síntese, o número  $N_{\text{cplx}}^{\alpha, \beta}(d, g)$  conta a quantidade de curvas planas projetivas nodais e não necessariamente irredutíveis que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\alpha' &\leq \alpha, \\
\beta' &\geq \beta, \\
I\alpha' + I\beta' &= d - 1, \\
g - g' &= |\beta' - \beta| - 1, \\
d - 2 &\geq g - g'.
\end{aligned}$$

A importância da fórmula de Lucia Caporaso e Harris é que os números  $N^{\alpha,\beta}(d, g)$  sejam calculados recursivamente e unicamente determinados por seus valores em  $d = 1$ .

**Teorema 2.18** (O algoritmo de Caporaso e Harris). *Os números  $N^{\alpha,\beta}(d, g)$  são unicamente determinados por seus valores em  $d = 1$  e  $g = 0$ . A fórmula de Caporaso-Harris.*

*Demonstração.* Ver (3).

Observemos que o Teorema 2.18 permite calcular  $N^{\alpha,\beta}(d, g)$  a partir da informação de que existe exatamente uma reta passando por  $d$  pontos de uma curva de gênero  $g$ .

**Exemplo 2.19.** Sejam  $\alpha = (0)$ ,  $\beta = (3)$ ,  $d = 3$  e  $g = 0$ . Então, utilizando a fórmula da Definição 2.17,

- **Primeiro passo:** Notemos que a primeira coordenada de  $\alpha$  é zero, garantindo que o primeiro somatório é todo zero. Assim, não existe  $\alpha'$  e  $\beta'$  tal que  $\alpha' \leq (0)$ ,  $\beta' \geq (3)$  e  $I\alpha' + I\beta' = d - 1$ . Logo, o segundo somatório da fórmula é nulo. Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0)+(1),(3)-(1)}(3, 0)$$

- **Terceiro passo:** Agora, aplicaremos a fórmula p...  
 primeiro somatório teremos a contribuição somente  
 passos anteriores, neste caso temos dois pares de se...  
 condições  $\alpha' \leq (2)$ ,  $\beta' \geq (1)$  e  $I\alpha' + I\beta' = 2$ , sendo  
 $\alpha' = (1)$ ,  $\beta' = (1)$  e  $g' = 1$ , ambas satisfazendo  $d -$

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0) &= 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + I^{(2)-(1)} \left( \right. \\ &\quad \left. I^{(1)-(1)} \begin{pmatrix} (2) \\ (1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (1) \end{pmatrix} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)} \right) \\ &= N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(3, 0) \end{aligned}$$

Novamente, como não existe cônica de gênero 1,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + 2$$

- **Quarto passo:** Vamos aplicar a recursividade em...  
 acima. Na primeira parcela, temos que  $\beta$  não possui...  
 que o primeiro somatório é nulo. Já no segundo som...  
 que satisfazem as condições exigidas, juntamente co...  
 a seguir:  $\alpha' = (0)$ ,  $\beta' = (2)$  e  $g' = -1$ ;  $\alpha' = (0)$   
 $\beta' = (1)$  e  $g' = 0$ ;  $\alpha' = (2)$ ,  $\beta' = (0)$  e  $g' = 1$ . Com

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) &= I^{(2)} \begin{pmatrix} (3) \\ (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2) \\ (0) \end{pmatrix} N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) + I^{(1)} \\ &\quad I^{(1)} \begin{pmatrix} (3) \\ (1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (0) \end{pmatrix} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0) + I^{(0)} \\ &= N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(0,1)}(2, 0) \end{aligned}$$

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, -1) + 4 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(1),(0)}(2, 0)$$

- **Sexto passo:** Novamente, para cada uma das par

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, -1) &= N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) \\ N_{\text{cplx}}^{(0),(1),(0)}(2, 0) &= N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0) \\ N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 0) &= 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 1) \end{aligned}$$

Sabemos que por 2 pontos no plano passa exatamente uma curva de grau 2. Logo,  $N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0) = 1$ . Além disso,  $N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 1) = 0$ . Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) + 4 \cdot 1$$

- **Sétimo passo:** Vamos aplicar novamente o algoritmo de Bezout para

$$N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) = 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 0) + 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(1, -1)$$

Portanto,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = 2 + 1 + 4 + 5$$

garantindo que existem 12 curvas de grau 3 e gênero 0 por pontos em posição geral.

### 3 HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS E O TEOR

Neste capítulo, definiremos os objetos geométricos hipersuperfícies tropicais em  $\mathbb{R}^n$ . Veremos que tais objetos são subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  em subconjuntos que são poliedros (alguns limitados) e que cada hipersuperfície tropical é o dual correspondente do polígono de Newton associado a ela. As principais referências utilizadas foram

#### 3.1 SEMICORPO TROPICAL

**Definição 3.1.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definimos as operações (denotadas por  $\oplus$  e  $\odot$ , respectivamente) como:

$$\begin{aligned}a \oplus b &= \max\{a, b\} \\ a \odot b &= a + b.\end{aligned}$$

Ou seja, a soma tropical é o máximo de dois números e a soma usual dos mesmos.

**Exemplo 3.2.** •  $2 \oplus 3 = \max\{2, 3\} = 3$ ;

•  $2 \odot 3 = 2 + 3 = 5$ ;

•  $10 \oplus 15 = \max\{10, 15\} = 15$ ;

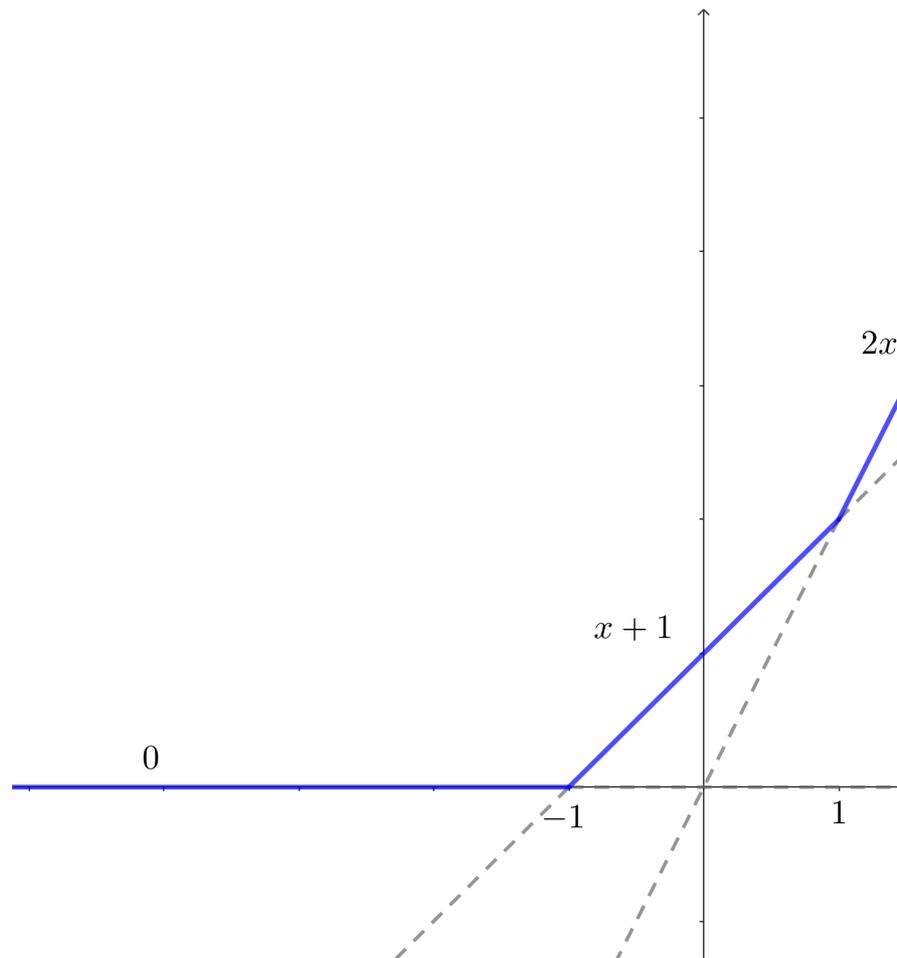
•  $10 \odot 15 = 10 + 15 = 25$ .

Notemos que a adição tropical não possui elemento

**Definição 3.4.** Dado um polinômio tropical  $f(x) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} a_j \odot x^j$  definimos o grau de  $f$  como máximo das somas  $j_1 + \dots + j_n$ .

**Exemplo 3.5.** O polinômio tropical em uma variável  $x$  é uma função afim por partes,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \max\{0, x+1, 2x\}$  representado na Figura 3.

Figura 3 –  $f(x) = x^2 \oplus 1 \odot x$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Definição 3.6.** Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical.

*Demonstração.* Notemos que se  $f(x)$  atinge o máximo a função é localmente afim, e, com isso, diferenciável. Logo, monômios atingem o máximo em  $x$ .

Por outro lado, seja  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que existem  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$f(x) = a_i + ix = a_j + jx$$

Suponhamos, por absurdo, que  $f$  é diferenciável em  $x$ . Então,  $i = j$ , com  $i \neq j$ . Absurdo. Logo, se  $f(x)$  atinge o máximo em  $x \in V(f)$ , provando a proposição.

**Exemplo 3.8.** Considere a reta tropical definida pelo polinômio

$$f(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 1 = \max\{x, y, 1\}$$

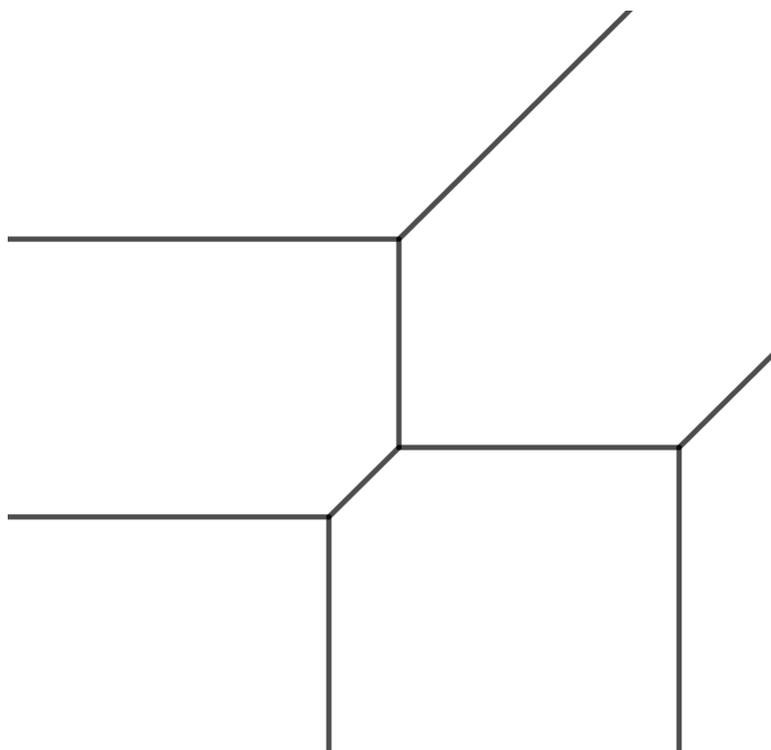
Então,  $V(f)$  é formada pelos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que

- $x = y$  e  $x \geq 1 \Rightarrow \{(x, x); x \geq 1\} \subset V(f)$ .
- $x = 1$  e  $1 \geq y \Rightarrow \{(1, y); y \leq 1\} \subset V(f)$ .
- $y = 1$  e  $1 \geq x \Rightarrow \{(x, 1); x \leq 1\} \subset V(f)$ .

Assim, a reta tropical  $V(f)$  é a união de três semi-retas

Figura 4 – Reta tropical  $p(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 1$

Figura 5 – Cônica tropical  $g(x, y) = y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y$



Fonte: Elaborada pela autora (2023)

### 3.3 A ESTRUTURA POLIÉDRICA DE HIPERSUPERFÍCIES

Uma função  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  da forma  $k(x) = a + jx$ , *função inteira afim* ou monômio tropical.

Dada uma função inteira afim,  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , os *semiespaços racionais*  $H_k^+$  e  $H_k^-$ , respectivamente, como

$$\begin{aligned}
 H_k &:= \{x \in V; k(x) = 0\} = \{x \in V; k(x) \leq 0\} \cup \{x \in V; k(x) \geq 0\} \\
 H_k^+ &:= \{x \in V; k(x) \geq 0\} \\
 H_k^- &:= H_{-k}^+, \text{ onde } (-k)(x) = -k(x)
 \end{aligned}$$

**Lema 3.11.** *Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical em  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $j \in A$ ,  $\sigma_j := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = a_j \odot x^j\}$  é poliedro racional.*

*Demonstração.* Fixado  $j \in A$ , definimos para cada  $i \in A$

$$H_{k_{ji}}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n; k_{ji}(x) = (a_j - a_i) + jx - ix \geq 0\}$$

Então,

$$\begin{aligned} x \in \sigma_j &\Leftrightarrow f(x) = a_j \odot x^j \\ &\Leftrightarrow a_j \odot x^j \geq a_i \odot x^i, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow a_j + jx - a_i + ix \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in H_{k_{ji}}^+, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+. \end{aligned}$$

**Definição 3.12.** *Seja  $\sigma$  um poliedro racional em  $\mathbb{R}^n$ . Um poliedro racional  $H_k^+$  em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $k$  é uma função inteira afim tal que  $\sigma \subset H_k^+$  ou  $\sigma \cap H_k^+ = \emptyset$ , é chamado de face de  $\sigma$ . A fronteira de  $\sigma$ , denotada por  $\partial\sigma$ , é definida como a união das faces próprias de  $\sigma$ .*

Notemos que a face de um poliedro racional também é um poliedro racional. Além disso, se  $k \equiv 0$ , então  $H_k^+ = H_k = \mathbb{R}^n$  e  $\sigma \cap \mathbb{R}^n = \sigma$ , garantindo que  $\sigma$  é uma face de si mesmo.

**Lema 3.13.** *Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical em  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $j \in A$ ,  $\sigma_j := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = a_j \odot x^j\}$  é poliedro racional.*

interseção  $\sigma_i \cap \sigma_j$  for diferente de vazio ela produzir um elemento  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Os elementos  $\sigma_i \in \mathcal{P}$  são chamados de faces. Faces de dimensão 1 e 0 são chamadas, respectivamente, de arestas e vértices. Uma face que contém apenas um vértice é chamada de raio. Definimos

$$|\mathcal{P}| := \bigcup_i \sigma_i.$$

Se  $|\mathcal{P}|$  é igual a um poliedro  $P$  (por exemplo,  $\mathbb{R}^n$ ), dizemos que  $\mathcal{P}$  é *poliédrico* de  $P$  (ou  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente).

Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical em  $\mathbb{R}^n$ .

3.13, a coleção de poliedros

$$\mathcal{S}(f) := \{\text{faces } \tau \text{ de } \sigma_j, \text{ para } j \in A\}$$

é um complexo poliédrico. Além disso,  $\mathcal{S}(f)$  forma uma coleção de faces. De fato, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,

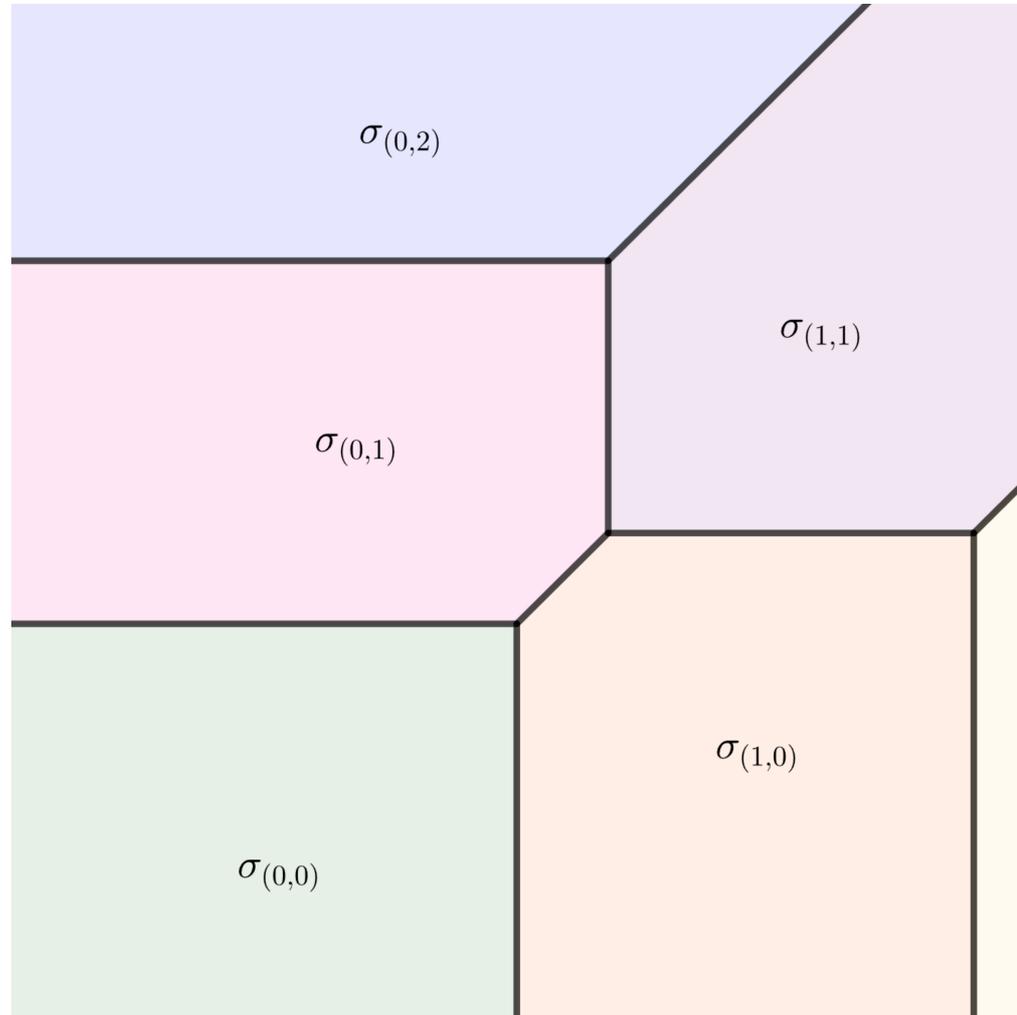
$$\max\{a_i + ix_0, i \in A\} = a_j + jx_0, \text{ para algum } j \in A.$$

Logo,  $x_0 \in \sigma_j$ , para algum  $j \in A$ , garantindo assim que  $\mathcal{S}(f)$  é poliédrico. Pela definição que  $\sigma_j \subset \mathbb{R}^n$ , para todo  $j \in A$ . Portanto,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j.$$

**Exemplo 3.14.** Considere o polinômio tropical  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ . Então,

Figura 7 – Complexo poliédrico



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Aqui é importante chamar a atenção para o fato de que, para todo  $i \in A$  e para todo  $j \in B$ , podem definir a mesma função  $f_1(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  e  $f_2(x) = \bigoplus_{j \in B} b_j \odot x^j$ , onde  $A, B \subset \mathbb{N}$ . Por exemplo, se  $f_1(x) = 0 \oplus x \oplus x^2$  e  $f_2(x) = 0 \oplus (-1) \odot x \oplus x^2$  definem

$$f_1(x) = \max\{0, x, 2x\} = \max\{0, -1 + x, 2x\}$$

Então devemos mostrar que a subdivisão poliédrica

Nesse caso,  $A = \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2$  e

$$\begin{aligned}\sigma_{(1,1)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = \max\{2x, x + y, 2y\}\} \\ \sigma_{(2,0)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x = \max\{2x, x + y, 2y\}\} \\ \sigma_{(0,2)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2y = \max\{2x, x + y, 2y\}\}\end{aligned}$$

É fácil ver que  $\dim(\sigma_{(2,0)}) = 2$ ,  $\dim(\sigma_{(0,2)}) = 2$  e  $f^{\text{red}}(x) = x^2 \oplus y^2$ . Além disso, como funções em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$f^{\text{red}}(x) = \max\{2x, 2y\} = \max\{2x, x + y, 2y\}$$

Vamos mostrar mais adiante que, como funções em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f^{\text{red}})$ . Porém, antes disso, vamos ver que

**Lema 3.18.** *Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tal que  $\dim(\sigma_j) < n$  se, e somente se,  $\sigma_j \subset \sigma_i$ , para algum  $i \in A$ .*

*Demonstração.* Fixado  $j \in A$ , temos, pelo Lema 3.11,  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}^+$

$$H_{k_{ji}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; (a_j - a_i) + (j - i)x = 0\}$$

Primeiro vamos mostrar que  $\dim(\sigma_j) < n$  se, e somente se,  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}^+$  para algum hiperplano  $H_{k_{ji}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; (a_j - a_i) + (j - i)x = 0\}$ .

De fato, se  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}^+$ , para algum  $i \in A$ ,

$$L(\sigma_j) \subset L(H_{k_{ji}}^+) = \{x \in \mathbb{R}^n; (j - i)x = 0\}$$

$\dim(\sigma_j) = n$ . Absurdo. Para ver que  $x$  definido em (3.1) pertence a  $\sigma_j$ , seja  $l \in A$  diferente de  $j$ . Então,

$$\begin{aligned} k_{jl}(x) &= k_{jl} \left( \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i \right) = (a_j - a_l) + (j - l) \left( \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i \right) \\ &= (a_j - a_l) + \frac{1}{m} \left[ \sum_{i \in A - \{j\}} (j - l) x_i \right] = \frac{1}{m} \left[ \sum_{i \in A - \{j\}} k_{jl}(x_i) \right] \\ &= \frac{1}{m} \left[ \sum_{i \in A - \{j\}} k_{jl}(x_i) \right] > 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $k_{jl}(x_i) \geq 0$ , para todo  $i \in A - \{j, l\}$  pois  $x_i \in \sigma_j$  e  $k_{jl}(x_l) > 0$  ( $x_l \in \sigma_j$ , logo pertence ao semiespaço fechado definido pelo hiperplano  $H_{k_{jl}}$ ). Assim,  $x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^>$ . Logo, se  $\dim(\sigma_j) < n$  para algum  $i \in A$ ,  $i \neq j$ .

Finalmente, podemos concluir a demonstração do lema 3.18. Se  $\sigma_j$  não estiver contido em  $H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \in A$ ,  $i \neq j$ , então, pela igualdade (3.1),

$$\sigma_j = \sigma_j \cap H_{k_{ji}} = \sigma_i \cap \sigma_j \Rightarrow \sigma_j \subset \sigma_i, \text{ para algum } i \in A, i \neq j.$$

Com um argumento análogo ao usado na demonstração do lema 3.18, podemos concluir que os  $\sigma_j$ 's de dimensão menor que  $n$  são faces de  $\sigma_i$ , para algum  $i \in A$ , e que as faces próprias de  $\sigma_j$  são interseções de  $\sigma_j$  com um hiperplano  $H_{k_{ji}}$ .

**Lema 3.19.** *Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical em  $n$  variáveis, onde cada  $i \in A$  é uma face própria de  $\sigma_i$  e as faces próprias de  $\sigma_i$  são interseções de  $\sigma_i$  com hiperplanos  $H_{k_{ji}}$ .*

pois  $H_{kji}^>$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Absurdo pois  $\tau$  pode ser ponto interior de  $\sigma_j$  (que está contido, por definição, em  $H_{kji}$ ). Assim,  $\tau \subset H_{kji}$ , para algum  $i \in A$ ,  $i \neq j$  e

$$\tau = \sigma_j \cap H_k \subset H_{kji} \Rightarrow \tau = \sigma_j \cap H_k \cap H_{kji}$$

Isso mostra que  $\tau$  é uma face de  $\sigma_j \cap \sigma_i$ , que por sua vez é uma face de  $\sigma_j$ . Nada mais temos a fazer. Caso contrário,  $\tau$  será uma face de

$$\sigma_j \cap \sigma_i = \sigma_j \cap H_{kji} = \left( \bigcap_{i \neq j} H_{kji}^+ \right) \cap \sigma_j$$

Repetindo o argumento para  $\tau$  como face de  $(\bigcap_{i \neq j} H_{kji}^+) \cap \sigma_j$  para algum  $l \neq i, j$ . Como  $\sigma_j$  é interseção de um número finito de  $H_k$ , o processo é finito e termina quando  $\tau$  é uma interseção de  $\sigma_i$ .

**Observação 3.20.** Vimos até aqui que dado um polinômio

$$f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j,$$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j = \bigcup_{j \in A^{\text{red}}} \sigma_j,$$

onde a última igualdade segue do Lema 3.18. Também podemos afirmar que todo  $\sigma_j$  de dimensão máxima  $n$  tem interior não vazio. Mais precisamente,  $\sigma_j$  tem interior não vazio se e somente se  $\sigma_j$  é interior de  $\sigma_j$ , isto é, para qualquer  $x \in \sigma_j$  tal que  $x \notin V$

$$A^{\text{red}} := \{j \in A; \dim(\sigma_j) = n\} = \{d_x f; x \in \mathbb{R}^n\}$$

**Lema 3.21.** Sejam  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio transcendente

a mesma função se, e somente se, as suas representações são iguais. Pelo Lema 3.18, cada  $\sigma_j$  de dimensão menor que  $n$  está contido em algum  $\sigma_i$  ( $A$  é finito) e portanto é uma face de  $\sigma_i$  ( $\sigma_j = \sigma_j \cap \sigma_i$ ). Logo,  $\mathcal{S}(f)$  é independente da representação de  $f$ .

### 3.4 TEOREMA DA DUALIDADE

Nessa seção associaremos a um polinômio tropical  $f$  um polígono de Newton de  $f$ . Veremos também que esse polígono é dual à subdivisão poliédrica do  $\mathbb{R}^n$  definida pela h

**Definição 3.22.** Seja  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos o *convex hull* de  $X$ , denotada por  $\text{Conv}(X)$ , como

$$\text{Conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m b_i x_i; 0 \leq b_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, m \right\}$$

Em outras palavras,  $\text{Conv}(X)$  é o menor subconjunto convexo contendo  $X$ .

Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio tropical em  $n$  variáveis. O *polígono de Newton* de  $f$ , denotado  $NP(f)$ , como a envoltória convexa de  $A$ .

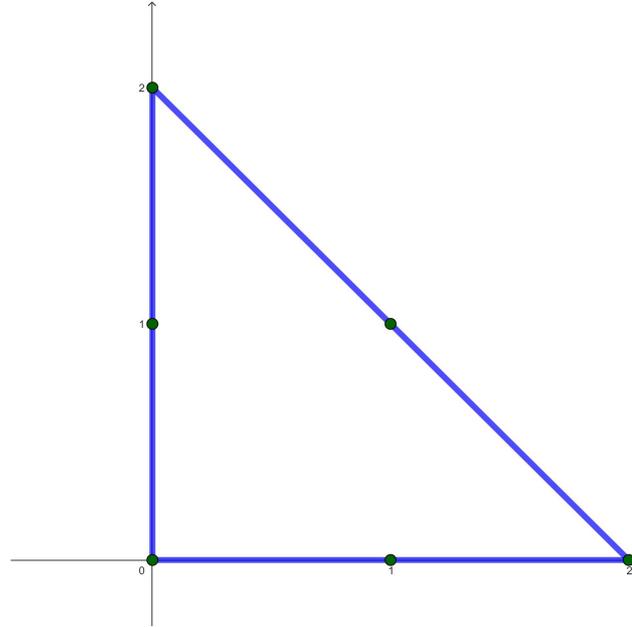
$$A' := \{j \in A; a_j \neq -\infty\}$$

**Exemplo 3.23.** Consideremos o polinômio tropical em duas variáveis

$$g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot 1$$

Notamos que  $A' = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$

Figura 8 – Polígono de Newton



Fonte: Elaborada pela autora (2024)

$$\tilde{A} = \{(2, 0, 0), (0, 2, -1), (1, 1, -4), (1, 0, -5)\}$$

A envoltória convexa de  $\tilde{A}$ , em várias perspectivas, está

Figura 9 – Envoltória convexa

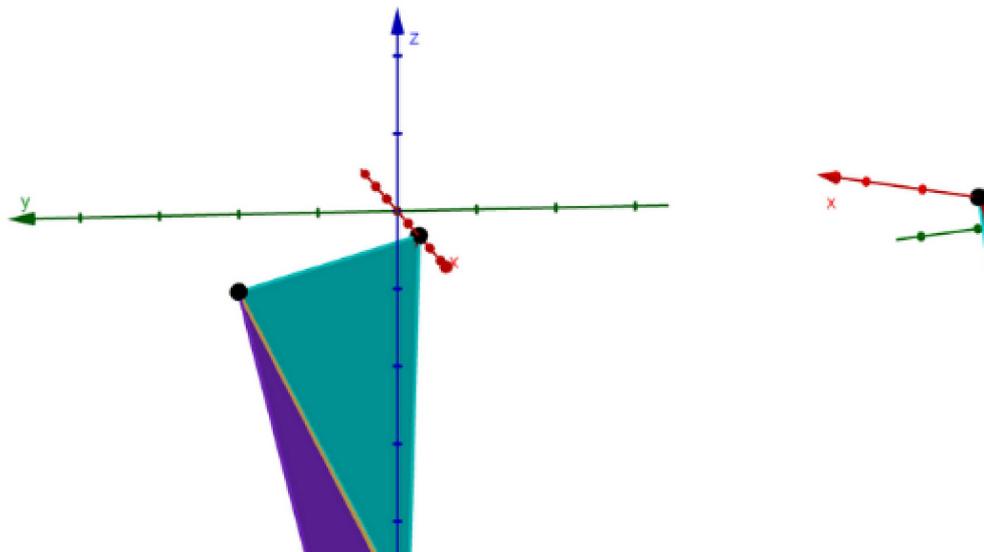
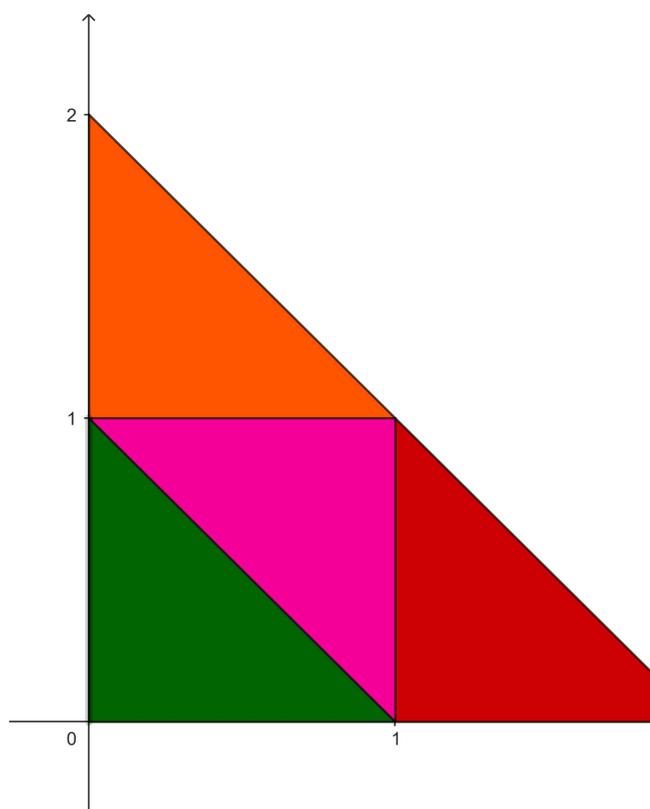


Figura 10.

Figura 10 – Subdivisão  $SD(g)$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

**Lema 3.26.** *Seja  $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$  um polinômio trocável. Para cada célula  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ , definimos o conjunto*

$$A_\sigma := \{j \in A; \sigma \subseteq \sigma_j\}.$$

*Temos  $\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$  e  $x \in \text{int}(\sigma)$ . Primeiro,  $A_\sigma \subseteq A_x$ . Sabemos que, em particular,  $x \in \sigma$ , garantindo

Agora, suponhamos, por absurdo, que  $A_x \not\subseteq A_\sigma$ . Então,  $\sigma \not\subseteq \sigma_j$ . Então,  $\sigma \cap \sigma_j$  é uma face própria de  $\sigma$  e  $\sigma_j$  não é uma face própria de  $\sigma$ . Portanto,  $\sigma \cap \sigma_j \subseteq \partial\sigma$ , o que é um absurdo, pois  $x \in \text{int}(\sigma)$ . Portanto,

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, sejam  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x \notin \sigma$ , então, para todo  $j \in A_x$  e, como  $\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$ , temos  $x \in \sigma$ . Se  $x \in \partial\sigma$ , então,  $x$  pertence a alguma face própria de  $\sigma$ , portanto,  $l \in A_\sigma$  para algum  $l \in A_x$ , portanto,  $x \in \sigma$ . Portanto,  $x \in \text{int}(\sigma)$ , como queríamos.

O teorema a seguir nos dá a relação entre a subdivisão de uma hipersuperfície tropical  $V(f)$ , que denotamos por  $\mathcal{S}(f)$ , e a subdivisão de  $NP(f)$ .

**Teorema 3.28** (Teorema da Dualidade). *As subdivisões de  $V(f)$  e  $NP(f)$  são duais no seguinte sentido: existe uma bijeção invertível*

$$\begin{aligned} D : \mathcal{S}(f) &\longrightarrow SD(f) \\ \sigma &\longmapsto D_\sigma := \text{Conv}(\dots) \end{aligned}$$

tal que  $\dim(\sigma) + \dim(D(\sigma)) = n$  e  $L(\sigma)^\perp = L(D(\sigma))$ . Além disso,  $D$  mapeia a representação de  $f$  e o conjunto de vértices de  $SD(f)$  para o conjunto de vértices de  $NP(f)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que a função  $D$  é uma bijeção invertível entre  $\mathcal{S}(f)$  e  $SD(f)$ .

Logo,

$$f(x) = a_{j_1} + j_1x = \cdots = a_{j_m} + j_mx > a_{j_i} + j_ix$$

Notemos que essa desigualdade é estrita, pois, caso contrário,  $l \in A_x$ , contrariando fato de que  $x \in \text{int}(\sigma)$ .

Para simplificar a notação, denotemos  $L := a_{j_m} + j_mx$ .  
 $L_i := a_{j_i} + j_ix, \forall i \in \{m+1, \dots, k\}$ . Então,  $(x, -1)(j_i, -a_{j_i}) \in L_i$ .  
 Como  $\tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A})$ , podemos escrever

$$\tilde{P} = \left\{ \sum_{i=1}^k b_i(j_i, -a_{j_i}); 0 \leq b_i \leq 1, i = 1, \dots, k \right\}$$

Assim, dado  $z \in \tilde{P}$ , temos:

$$\begin{aligned} (x, -1)z &= (x, -1)(b_1j_1 + \cdots + b_kj_k, -b_1a_{j_1} - \cdots - b_ka_{j_k}) \\ &= b_1j_1x + \cdots + b_kj_kx + b_1a_{j_1} + \cdots + b_ka_{j_k} \\ &= b_1(a_{j_1} + j_1x) + \cdots + b_m(a_{j_m} + j_mx) \\ &\quad + b_{m+1}(a_{j_{m+1}} + j_{m+1}x) + \cdots + b_k(a_{j_k} + j_kx) \\ &= (b_1 + \cdots + b_m)L + b_{m+1}L_{m+1} + \cdots + b_kL_k \end{aligned}$$

Como  $L_i < L$  e  $0 \leq b_i \leq 1, \forall i \in \{m+1, \dots, k\}$ , temos

$$(x, -1)z \leq L(b_1 + \cdots + b_k)$$

Logo, para todo  $z \in \tilde{P}$ , temos  $(x, -1)z \leq L$ . Ademais,

Logo,  $H_k \cap \tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ . Portanto,  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P}$ .

O poliedro  $\tilde{P} + \rho$ , pode ser descrito como  $\tilde{P} + \rho$ . Assim, dado  $(a, b + \lambda) \in \tilde{P} + \rho$ , temos,

$$k(a, b + \lambda) = xa - b - \lambda - L \leq L - \lambda - L = -\lambda$$

Além disso, para todo  $(a, b + \lambda) \in \tilde{P} + \rho$

$$k(a, b + \lambda) = 0 \Leftrightarrow xa - b - \lambda - L = 0 \Leftrightarrow xa - b = L + \lambda$$

Logo,  $H_k \cap (\tilde{P} + \rho) = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ , garantindo que  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P} + \rho$ . Portanto,  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P}$ . Como a projeção  $D_\sigma$  é uma bijeção, garantimos que  $D_\sigma$  é, de fato, uma célula de  $SD(f)$ .

Ademais,  $D$  é uma bijeção bem definida com inversa dada por

$$\begin{aligned} D^{-1} : SD(f) &\longrightarrow \mathcal{S}(f) \\ C &\longmapsto \bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} D(D^{-1}(C)) &= D\left(\bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j\right) = C \\ D^{-1}(D(\sigma)) &= D^{-1}(\text{Conv}(A_\sigma)) = \bigcap_{j \in \text{Conv}(A_\sigma) \cap A} \sigma_j \end{aligned}$$

Além disso, a bijeção acima inverte inclusão, pois dado  $C \subseteq D$ , temos

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \alpha - \beta &= a_1 j_1 + \cdots + a_m j_m - (b_1 j_1 + \cdots + b_m j_m) \\
 &= ((1 - a_2 - \cdots - a_m) - (1 - b_2 - \cdots - b_m)) j_1 \\
 &= (j_2 - j_1)(a_2 - b_2) + \cdots + (j_m - j_1)(a_m - b_m).
 \end{aligned}$$

Como  $L(D_\sigma) = \langle \alpha - \beta; \alpha, \beta \in D_\sigma \rangle$ , temos  $L(A_\sigma) \supseteq L(D_\sigma)$ .  
 O espaço vetorial gerado por  $A_\sigma$  é igual ao espaço vetorial gerado por  $D_\sigma$ .

Além disso, como  $\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$ , podemos escrever

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx = a_i + ix > a_l + lx, \forall i, j \in A_\sigma\}$$

Assim, dados  $x, y \in \sigma$ ,

$$\begin{aligned}
 (a_j - a_i) + (j - i)x &= 0 \quad \text{e} \\
 (a_j - a_i) + (j - i)y &= 0, \forall i, j \in A_\sigma \\
 \Rightarrow (j - i)(x - y) &= 0, \forall i, j \in A_\sigma
 \end{aligned}$$

Ou seja, todo vetor de  $L(\sigma) = \langle x - y; x, y \in \sigma \rangle$  é ortogonal a  $A_\sigma$ .  
 Portanto,  $L(\sigma) \subset L(D_\sigma)^\perp$ . Para a inclusão contrária, veja o exercício (7).

Ademais, sabemos que

$$\dim(L(D_\sigma)^\perp) + \dim(L(D_\sigma)) = n \Rightarrow \dim(L(\sigma)) = \dim(L(D_\sigma)^\perp)$$

como queríamos.

Por fim, vamos mostrar que o conjunto de vértices de  $\sigma$  é exatamente  $A_\sigma$ .

**Exemplo 3.29.** Consideremos o polinômio tropical

$$g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot$$

A cônica tropical  $V(g)$  está representada na Figura 5.

O conjunto

$$A = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$$

Assim, a subdivisão do  $\mathbb{R}^2$  associada a  $g$  é dada por

$$\mathcal{S}(g) = \{\text{faces de } \sigma_{(i,j)}; (i, j) \in \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}\}$$

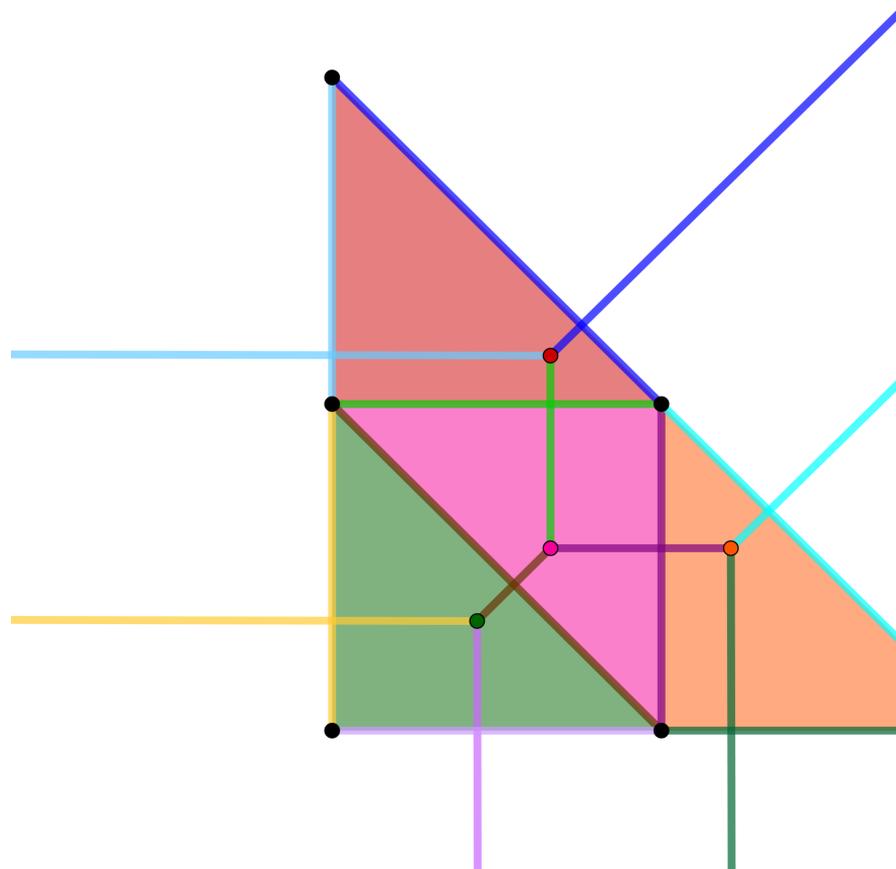
onde as faces dos  $\sigma_{(i,j)}$ 's são os próprios  $\sigma_{(i,j)}$ 's e as interseções são justamente as arestas e os vértices da curva tropical.

Notemos que para cada célula  $\sigma_{(i,j)} \in \mathcal{S}(g)$ , o  $\sigma_{(i,j)}$  como  $\sigma_{(i,j)}$  é uma célula de dimensão 2, não está contida no Teorema da Dualidade, cada célula  $\sigma_{(i,j)}$  é dual a  $\text{Conv}(A_{(i,j)})$  vértice da subdivisão dual  $SD(g)$ .

Por outro lado, se a célula de  $\mathcal{S}(f)$  for uma aresta, ela será a interseção das duas regiões que essa aresta pertence. Nesse caso,  $A_{a_l} = \{(i, j), (n, o)\} \Rightarrow \text{Conv}(A_{a_l})$  é o segmento de reta entre  $(i, j)$  e  $(n, o)$ . Seja, se a célula for uma aresta, ela se relaciona com um vértice da subdivisão dual  $SD(g)$ .

Agora, se a célula é um vértice  $v_m$  da curva tropical, ela pertence a três regiões  $\sigma_{(i,j)}$ , digamos,  $\sigma_{(i,j)}$ ,  $\sigma_{(n,o)}$  e  $\sigma_{(p,q)}$ . Neste caso,  $\text{Conv}(A_{v_m})$  é o triângulo de vértices  $(i, j)$ ,  $(n, o)$  e  $(p, q)$ .

Figura 11 – Curva  $V(g)$  e subdivisão



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

**Observação 3.30.** Seja  $V(f)$  uma curva tropical e  $SD(f)$  a subdivisão dual de  $V(f)$ . Seja  $v$  um vértice da curva tropical. Sabemos, pelo Teorema 3.1, que  $v$  corresponde a um polígono  $P$  na subdivisão dual  $SD(f)$ . Além disso, as arestas da fronteira desse polígono  $P$  são duais às arestas adjacentes a  $v$  na curva tropical. Denotemos essas arestas na curva tropical  $V(f)$  de  $a_1, \dots, a_m$ . Se  $A_1, \dots, A_m$  é a subdivisão dual de  $A_1, \dots, A_m$ . Lidando com essas arestas, podemos garantir que  $P$  é um polígono fechado, garantimos que

$$\sum_{i=1}^m A_i \equiv 0$$

## 4 CURVAS TROPICAIS COMO GRAFOS E

O nosso principal objetivo é contar o número de curvas de gênero  $g$  no plano projetivo passando por um determinado conjunto de pontos. As definições do capítulo anterior serem todas para hipersuperfícies, agora vamos nos restringir apenas às curvas tropicais. Inicialmente, estudaremos curvas tropicais utilizando grafos ponderados, tendo como objetivo principal a seguinte equação (1).

### 4.1 GRAFOS

**Definição 4.1.** Sejam  $I_1, \dots, I_k$  uma coleção de  $k$  intervalos reais (possivelmente ilimitados). No conjunto

$$I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k := \bigcup_{i=1}^k (I_i \times \{i\}) \quad (\text{união disjunta})$$

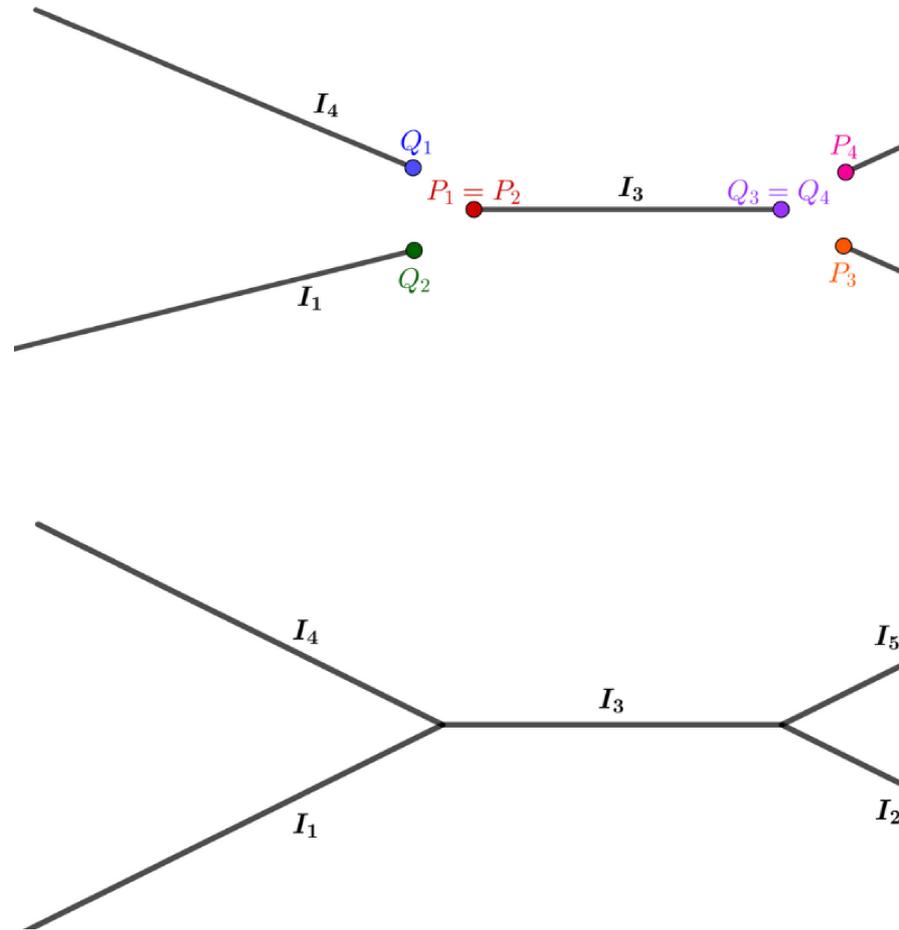
escolhemos  $P_1, \dots, P_r$  e  $Q_1, \dots, Q_r$  pontos de fronteira no conjunto. Um ponto  $P$  é, pontos da forma  $(x, j) \in I_j \times \{j\}$  tais que  $x$  é extremo de  $I_j$ . Definimos em  $I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k$  a relação de equivalência  $\sim$  que identifica  $P_i$  com  $Q_i$  para cada  $i$ . Seja ,

$$P \sim Q \Leftrightarrow P = P_i \text{ e } Q = Q_i, \text{ para algum } i$$

Chamamos de grafo o conjunto  $\Gamma = (I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k) / \sim$ . A aplicação quociente  $\pi : I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k \rightarrow (I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k) / \sim$  (c

**Exemplo 4.2.** Dados os intervalos

Figura 12 – Intervalos  $I_i$  e gr



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para o que segue, faremos as seguintes convenções

- identificamos o conjunto  $I_i \times \{i\}$  com o intervalo  $I_i$
- chamamos os pontos de fronteira dos intervalos  $I_1, \dots, I_5$  de *flags* e denotado por  $\Gamma'$ .
- as imagens dos *flags* de  $\Gamma$ , em  $\Gamma$ , são chamados de *vertices* e denotamos por  $\partial F$  o vértice de  $\Gamma$  que é imagem de  $I_1$  e denotado por  $\Gamma^0$ .

**Definição 4.3.** Um grafo  $\Gamma$  é chamado conexo se  $\Gamma$  é con-

gênero de um grafo é definido como

$$g(\Gamma) := 1 - \#\Gamma^0 + \#\Gamma_0^1$$

**Definição 4.4.** Um grafo  $\Gamma$ , com uma função  $w : \Gamma^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dito ponderado. Para cada aresta  $E \in \Gamma^1$ ,  $w(E)$  é cham-

Nas representações geométricas de um grafo  $\Gamma$ , in-

respectivo peso, quando este for diferente de 1.

## 4.2 CURVAS TROPICAIS

Seja  $\bar{\Gamma}$  um grafo ponderado sem vértices de valên-

valência 1 de  $\bar{\Gamma}$ , definimos  $\Gamma := \bar{\Gamma} \setminus \Gamma_\infty^0$ .

Seja  $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função contínua tal que, pa-

$h(E)$  está contida em uma reta afim com inclinação racio-

aplicação  $u : \mathbb{F}\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^2$  que leva o par ordenado  $(\partial F, [F])$

$(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ ), que inicia em  $h(\partial F)$  e apon-

**Definição 4.5.** Uma curva tropical plana parametrizada

como acima, tal que

- (a) Para cada aresta  $E \in \Gamma^1$ , a restrição  $h|_E$  é injetiva
- (b) Para cada vértice  $V \in \Gamma^0$ , vale a condição de balan-

$[F_i] = E_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$  e  $u(\partial F_i, [F_i]) = (a_i, b_i)$  que  $(-b_i, a_i)$  é um vetor perpendicular ao vetor  $(a_i, b_i)$ , em suponhamos que o segmento  $l(E_1)$  comece no ponto  $(m, n)$  descrito acima, o segmento  $l(E_1)$  terminará em  $(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1)$  e o  $l(E_2)$  terminará em  $(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1) + w(E_2)(-b_2, a_2)$  começará o segmento  $l(E_3)$ , e assim por diante. Usando o

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r w([F_i]) \cdot (a_i, b_i) &= (w([F_1])a_1 + \dots + w([F_r])a_r, w([F_1])b_1 + \dots + w([F_r])b_r) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

temos que o segmento  $l(E_r)$  terminará no ponto:

$$\begin{aligned} &(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1) + \dots + w(E_r)(-b_r, a_r) \\ &= (m - (b_1w(E_1) + \dots + b_rw(E_r)), n + (a_1w(E_1) + \dots + a_rw(E_r))) \end{aligned}$$

Ou seja, os segmentos  $l(E_i)$ , para  $i = 1, \dots, r$ , formam um polígono. Fazendo esse processo em todos os vértices e mantendo as arestas comuns a dois vértices, desenhemos um polígono  $P$  de Newton de  $C$ , subdividido em polígonos menores, chamados de *faces* de Newton de  $C$ , que raios da curva  $C$  não estão entre dois vértices e, portanto, cada face de dois polígonos na subdivisão dual, logo correspondem a uma face de Newton de  $C$ .

**Exemplo 4.6.** A Figura 13 representa uma curva tropical

Figura 13 – Curva tropical  $C$  e a sua subdivisão dual

**Teorema 4.7.** *Qualquer curva tropical  $C \subset \mathbb{R}^2$  é um subconjunto de uma hipersuperfície tropical de um polinômio  $f$ . Reciprocamente, toda hipersuperfície tropical parametrizada por uma curva tropical, isto é,  $V(f) = h(\Gamma)$ , é parametrizada  $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Ver (4), Corolário 3.16.

**Definição 4.8.** Uma curva tropical plana parametrizada  $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simplex* se satisfaz:

- todos os vértices de  $\Gamma$  tem valência 3,
- a aplicação  $h$  é injetiva no conjunto de vértices,
- dados um vértice  $V$  e uma aresta  $E$ , temos  $h(V) \in h(E)$ ,
- dados duas arestas  $E_1$  e  $E_2$ , temos  $\# \{h(E_1) \cap h(E_2)\} \leq 1$ ,
- para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , temos  $\#h^{-1}(p) \leq 2$ .

Uma curva tropical plana  $C$  é dita *simplex* se admite um parametrização simplex.

**Observação 4.9.** Na linguagem dual, uma curva é simplex se e somente se o diagrama dual contém apenas triângulos e paralelogramos.

**Exemplo 4.10.** A Figura 14 mostra uma curva tropical parametrizada simplex.

Figura 14 – Curva tropical parametrizada simplex



onde  $\Gamma^0$  é o conjunto de vértices de  $\Gamma$  e  $\Gamma_0^1$  é o conjunto de uma curva tropical plana simples é o menor gênero de curva permite.

**Proposição 4.12.** *Uma curva tropical simples  $C \subset \mathbb{R}^2$  é tropical simples. Além disso, qualquer outra parametrização estritamente maior que o gênero da parametrização simples*

*Demonstração.* Ver (4) Proposição 4.3.

**Observação 4.13.** Na linguagem dual, o gênero de um subd é o número de pontos do reticulado internos na subdivisão paralelogramos.

**Definição 4.14.** O grau  $\Delta$  de uma curva tropical plana raios juntamente com a soma dos pesos para cada direção apenas o polígono de Newton.

Para facilitar a notação, se o grau de uma curva  $(0, -1)$  e  $(1, 1)$  cada um  $d$  vezes (contados com os respectivos da curva  $C$  é  $d$ .

**Exemplo 4.15.** Consideremos a curva tropical  $C$  representada que temos dois raios na direção  $(-1, 0)$ , mas um deles tem  $(1, 1)$  e três raios na direção  $(0, -1)$ . Logo, o grau  $\Delta$  des

$$\Delta = \{3 \cdot (-1, 0), 3 \cdot (1, 1), 3 \cdot (0, -1)\}$$

Note que a definição de multiplicidade de um vértice de uma curva tropical parametrizada  $(\Gamma, h)$  está bem definida pois, por exemplo,  $w(E_1)u(V, E_1) + w(E_2)u(V, E_2) + w(E_3)u(V, E_3) = 0$  e,

$$\begin{aligned} w(E_1)w(E_2)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)| &= w(E_2)w(E_1)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)| \\ &= w(E_1)w(E_2)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)| \end{aligned}$$

**Observação 4.19.** Na subdivisão dual, a multiplicidade de uma curva tropical parametrizada  $(\Gamma, h)$  é 2 vezes a área da subdivisão dual.

**Definição 4.20.** A multiplicidade  $mult(C)$  de uma curva tropical  $C$  é o produto das multiplicidades de todos os vértices de qualquer parametrização simples de  $C$ .

**Observação 4.21.** Na linguagem dual, a multiplicidade de uma curva tropical simples  $C$  é o produto de todos os dobros das áreas dos triângulos da subdivisão dual.

**Definição 4.22.** Dizemos que os pontos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são *genéricos* se para qualquer curva tropical  $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  de gênero  $g$  e grau  $x$  tais que  $p_1, p_2, \dots, p_k \in h(\Gamma)$  e  $k \geq g + x - 1$  valem as seguintes condições:

- (i) a curva  $C = h(\Gamma)$  é simples;
- (ii) as imagens inversas  $h^{-1}(p_1), \dots, h^{-1}(p_k)$  são disjuntas;
- (iii)  $k = g + x - 1$ .

**Definição 4.23.** Sejam  $d \geq 0$  e  $g$  inteiros,  $\Delta_d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq d\}$  e  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{3d+g-1}\} \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto de pontos e

## 5 CAMINHOS RETICULADOS E CURVAS

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de caminho reticulado e mostrar como são calculadas as suas multiplicidades. Damos exemplos de que esses caminhos possuem com o nosso problema enumerativo e as ferramentas utilizadas foram o artigo (1) e a tese de doutorado (9).

### 5.1 CAMINHOS RETICULADOS

**Definição 5.1.** Um caminho  $\gamma : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamado caminho reticulado se, para  $j = 1, \dots, n$ , é função afim e  $\gamma(j) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\forall j = 0, \dots, n$ .

**Observação 5.2.** A imagem de um caminho reticulado  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  é e, portanto,  $\gamma|_{[j, j+1]}$  fica completamente determinado por  $\gamma(j)$  e  $\gamma(j+1)$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Vamos fixar uma aplicação linear  $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\lambda(x, y) = \alpha x + \beta y$ , onde  $\alpha$  é um número irracional positivo e pequeno. Com essa aplicação linear  $\lambda$  irracional.

**Definição 5.3.** Um caminho reticulado  $\gamma$  é dito  $\lambda$ -crescente se  $\lambda(\gamma(j)) < \lambda(\gamma(j+1))$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Definição 5.4.** Dado um caminho reticulado  $\gamma$   $\lambda$ -crescente, a imagem de nosso caminho a imagem de um intervalo entre dois pontos consecutivos de nosso caminho a imagem de um intervalo entre dois pontos consecutivos seja, um passo é dado por  $\gamma|_{[j-1, j]}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

- $(x_k, y_k)$  e  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  estão em colunas diferentes,  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Com isso,

$$\begin{aligned} i - \varepsilon y_k &< j - \varepsilon y_{k+1} \\ i - j &< \varepsilon(y_k - y_{k+1}) \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  é um número irracional pequeno, podemos garantir que  $|y_k - y_{k+1}| < d$ , pois  $y_k$  e  $y_{k+1}$  estão em  $\Delta_d$ . Com isso,

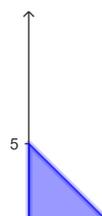
$$\varepsilon(y_k - y_{k+1}) < \varepsilon|y_k - y_{k+1}| < 1 = \dots$$

Sabemos ainda que  $i, j \in \mathbb{Z}$  e  $i \neq j$ . Assim,  $i - j \geq 1$ . Logo,  $x_{k+1} = j$ . Logo, a relação entre  $y_k$  e  $y_{k+1}$  é irrelevante.

Portanto, podemos ter dois tipos de passos: um que começa na reta  $\{x = i\}$  e termina na reta  $\{x = j\}$ , com  $j > i$  (podendo ser crescente ou decrescente).

**Exemplo 5.5.** A Figura 15 representa um caminho reticulado  $\lambda$  em  $\Delta_5$ , onde podemos observar os passos mencionados acima. O caminho começa descendo verticalmente na reta  $x = 0$ , e o passo  $\gamma|_{[1,2]}$  começa em  $x = 1$ .

Figura 15 – Caminho reticulado  $\lambda$



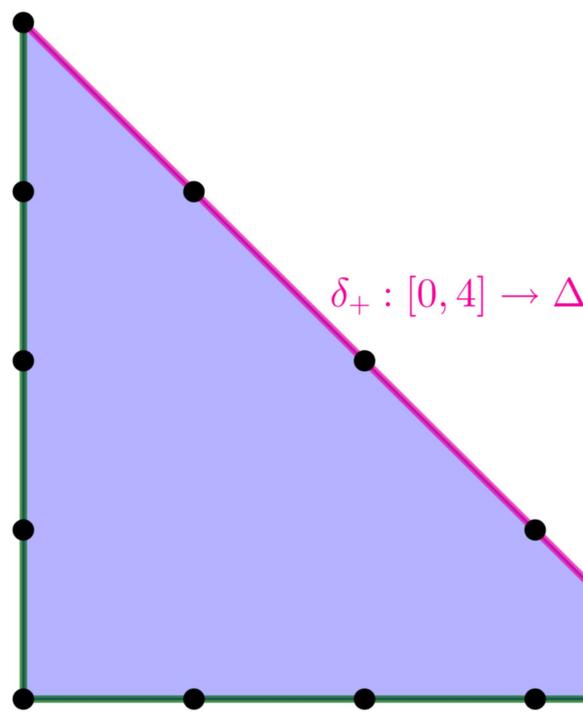
### 5.1.1 Multiplicidade de caminhos reticulados $\lambda$ -

Consideremos o triângulo  $\Delta_d$ . Denotemos por  $p$  o ponto onde  $\lambda|_{\Delta_d}$  atinge o mínimo ou seja,  $p = (0, d)$  e  $q$  o ponto onde  $\lambda|_{\Delta_d}$  atinge o máximo e  $p$  e  $q$  dividem a fronteira  $\partial\Delta_d$  em dois caminhos reticulados

- um caminho que liga  $p$  a  $q$  e que percorre  $\partial\Delta_d$  no sentido horário  $\delta_+ : [0, n_+] \rightarrow \partial\Delta_d$ , onde  $n_+$  é o número de pontos da fronteira menos um;
- um caminho que liga  $p$  a  $q$  e que percorre  $\partial\Delta_d$  no sentido anti-horário  $\delta_- : [0, n_-] \rightarrow \partial\Delta_d$ , onde  $n_-$  representa o número de pontos da fronteira menos um.

**Exemplo 5.6.** A Figura 16 representa os caminhos  $\delta_+$  e  $\delta_-$ .

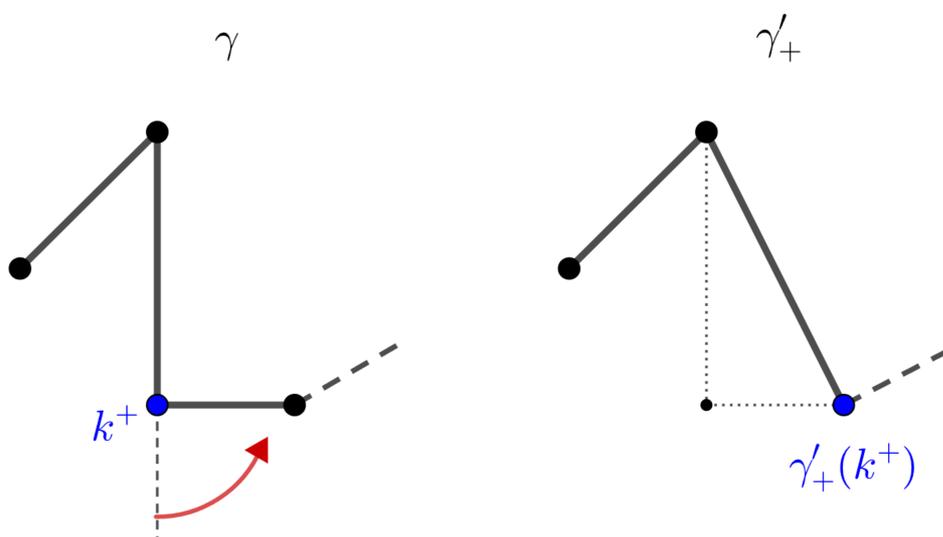
Figura 16 – Caminhos  $\delta_+$  e  $\delta_-$ .



- $\gamma''_+ : [0, n] \rightarrow \Delta_d$  tal que  $\gamma''_+(j) := \gamma(j)$ , para todo  $j \in [0, k^+ - 1]$  e  $\gamma''_+(k^+) := \gamma(k^+ - 1) + \gamma(k^+ + 1) - \gamma(k^+)$ .

Os caminhos  $\gamma'_+$  e  $\gamma''_+$  estão representados na Figura 17.

Figura 17 – Caminhos  $\gamma'_+$  e  $\gamma''_+$



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

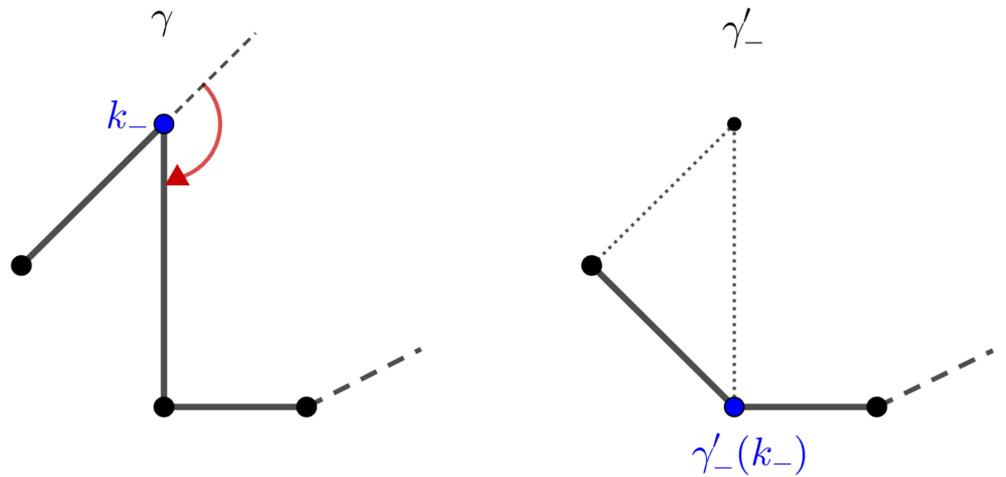
Seja  $T$  o triângulo com vértices  $\gamma(k^+ - 1)$ ,  $\gamma(k^+ + 1)$  e  $\gamma(k^+)$ . Definimos a constante positiva  $\mu_+(\gamma)$  como:

$$\mu_+(\gamma) := 2 \cdot \text{área de } T \cdot \mu_+(\gamma'_+)$$

Se a imagem de  $\gamma''_+$  não está em  $\Delta_d$ , definimos  $\mu_+(\gamma) = 0$ .

Por fim, se não existir  $k^+ \in [0, n]$  inteiro tal que  $\gamma(k^+) > 0$ , definimos  $\mu_+(\gamma) = 0$ .

Figura 18 – Caminhos  $\gamma'_-$  e



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Se a imagem de  $\gamma''_-$  não está em  $\Delta_d$ , definimos  $\mu_-$

E se não existir  $k^- \in [0, n]$  inteiro tal que  $\gamma$  vira

$\mu_-(\gamma) = 0$ .

A multiplicidade  $\mu$  do caminho  $\gamma$  é dada por:

$$\mu(\gamma) := \mu_+(\gamma)\mu_-(\gamma).$$

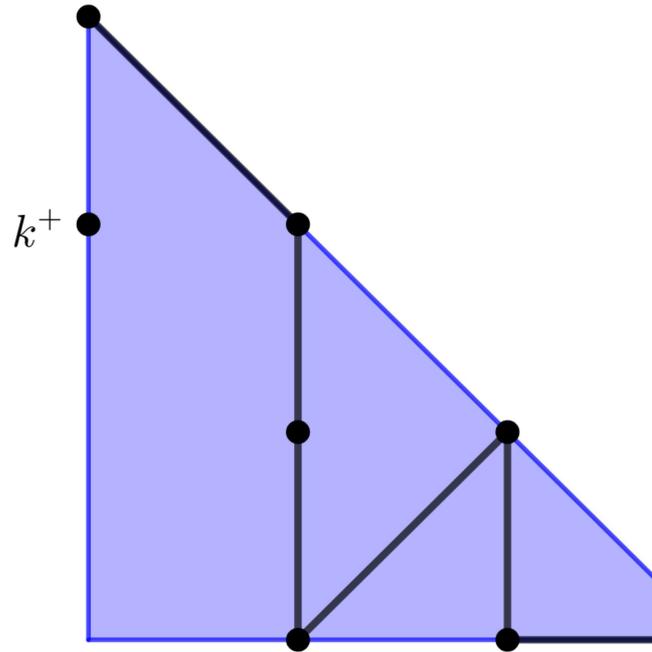
**Exemplo 5.7.** Seja  $\gamma : [0, 8] \rightarrow \Delta_3$  indicada na Figura 1

Figura 19 – Caminho  $\gamma$  em





Figura 21 – Caminho  $(\gamma'_+)$

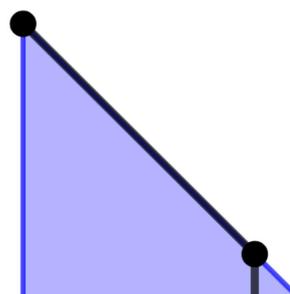


Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Vamos repetir o processo para o caminho  $(\gamma'_+)'$ . O primeiro  $k^+$  tal que  $(\gamma'_+)'$  faz uma curva à esquerda é o caminho  $((\gamma'_+)'')$ . Novamente, temos a multiplicidade do

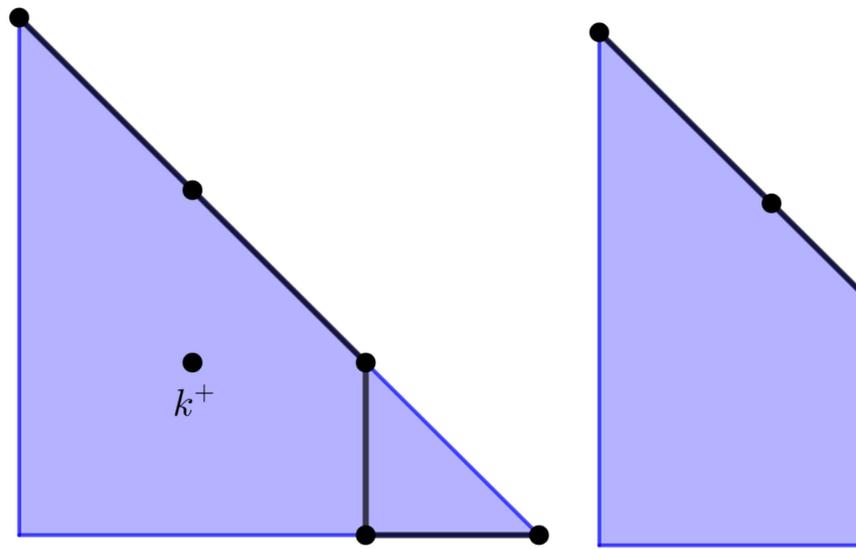
$$((\gamma'_+)'')'(3) = (1, 1) + (2, 1) - (1, 0) =$$

Figura 22 – Caminho  $((\gamma'_+)'')$



construído como nula (pela mesma justificativa do caso anterior) e como sendo  $\frac{1}{2}$ . Representamos os caminhos resultantes da

Figura 23 – Próximos caminhos da



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Notemos que o último caminho encontrado na região possui multiplicidade 1. Portanto, a multiplicidade positiva

$$\mu_+(\gamma) = \mu_+(\delta_+) = 1.$$

Agora, vamos calcular a multiplicidade negativa. Para o primeiro caminho da Figura 19, temos que o primeiro  $k^- \in [0, 3]$ ,  $k^- = 3$ . Construindo os caminhos  $\gamma'_-$  e  $\gamma''_-$ , temos:

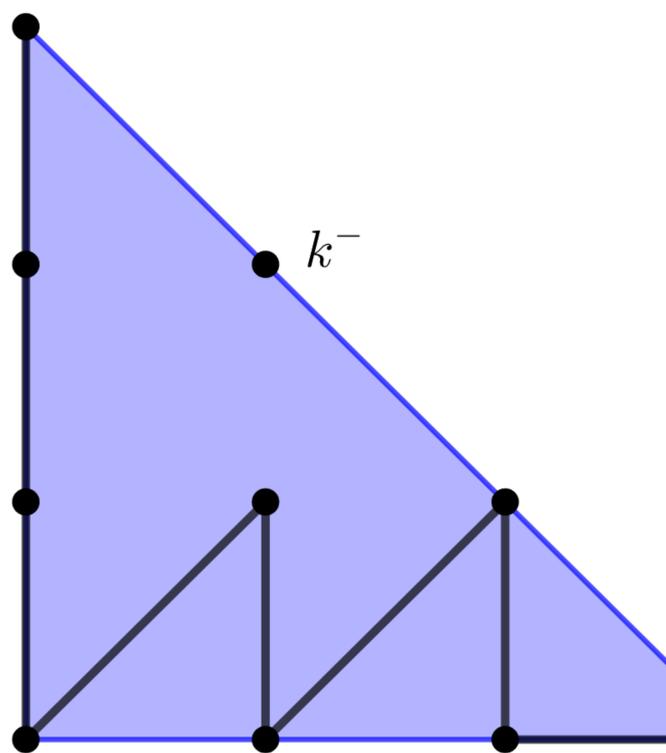
- O caminho  $\gamma'_-$  é construído “esquecendo” o ponto  $k^+$  e está representado na Figura 24

- O caminho  $\gamma''_-$  é construído mantendo todas as imagens de  $\gamma$  em  $T$  e é definido por:

$$\gamma''_-(3) = \gamma(2) + \gamma(4) - \gamma(3) = (0, 1) + (1, 2) - (1, 1) = (0, 2)$$

Este caminho está representado na Figura 25.

Figura 25 – Caminho  $\gamma''_-$

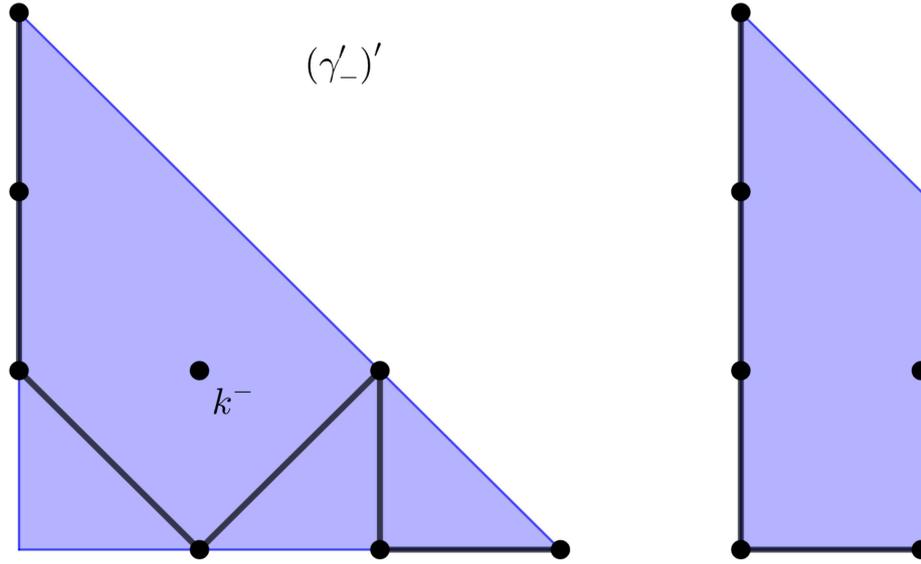


Fonte: Elaborada pela autora (2019)

O triângulo  $T$  é formado pelos vértices  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  e  $(1, 1)$ .

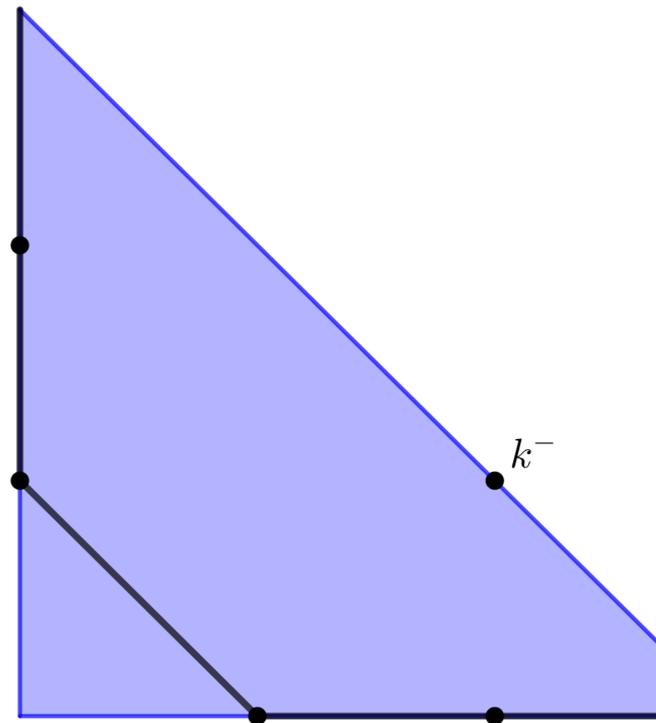
$$\begin{aligned} \mu_-(\gamma) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-) \\ &= \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-) \end{aligned}$$

Figura 26 – Caminhos  $(\gamma'_-)$  e



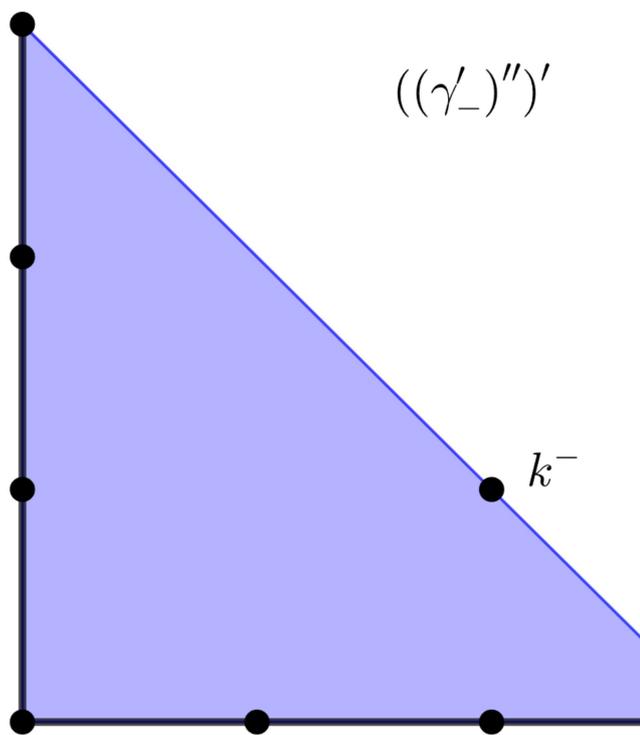
Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Figura 27 – Caminho  $((\gamma'_-$



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

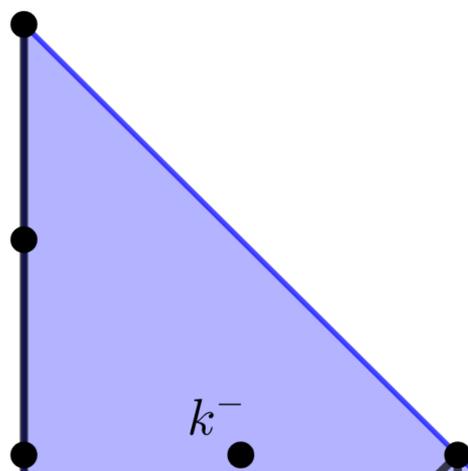
Figura 28 – Caminho  $((\gamma'_-)'')$



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

$$\mu_-(\gamma''_-) = 1.$$

Figura 29 – Caminho  $\gamma'_-$



## 5.2 CONTANDO CURVAS

**Definição 5.8.** Sejam  $d \geq 0$  e  $g$  inteiros. Denotamos por reticulados  $\lambda$ -crescente  $\gamma : [0, 3d + g - 1] \rightarrow \Delta_d$  com  $\gamma(0)$  com as suas multiplicidades.

Utilizaremos os caminhos reticulados  $\lambda$ -crescentes para o cálculo do número  $N_{\text{trop}}(d, g)$ , relacionando-os com possíveis caminhos de Newton, que são duais às curvas tropicais. Mais detalhes na demonstração do teorema abaixo, como referenciado.

**Teorema 5.9.** Para todo  $d, g \in \mathbb{Z}$ ,  $d \geq 0$ , temos  $N_{\text{path}}(d, g) = N_{\text{trop}}(d, g)$ .

*Demonstração.* Ver (4), Teorema 2.

**Exemplo 5.10.** A Figura 30 mostra o único caminho reticulado  $\lambda$ -crescente  $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_1$ .

Figura 30 –  $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_1$

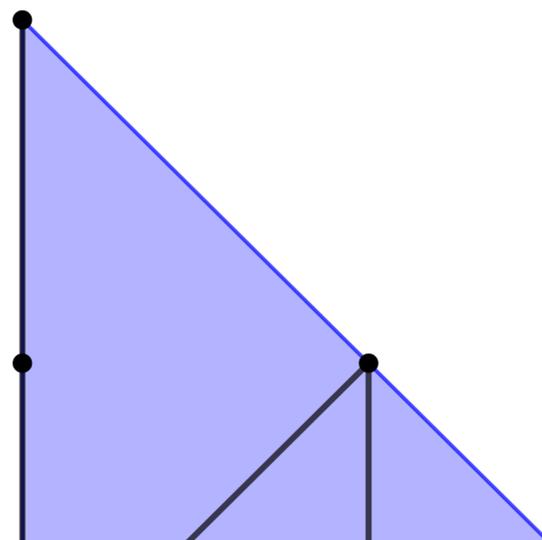
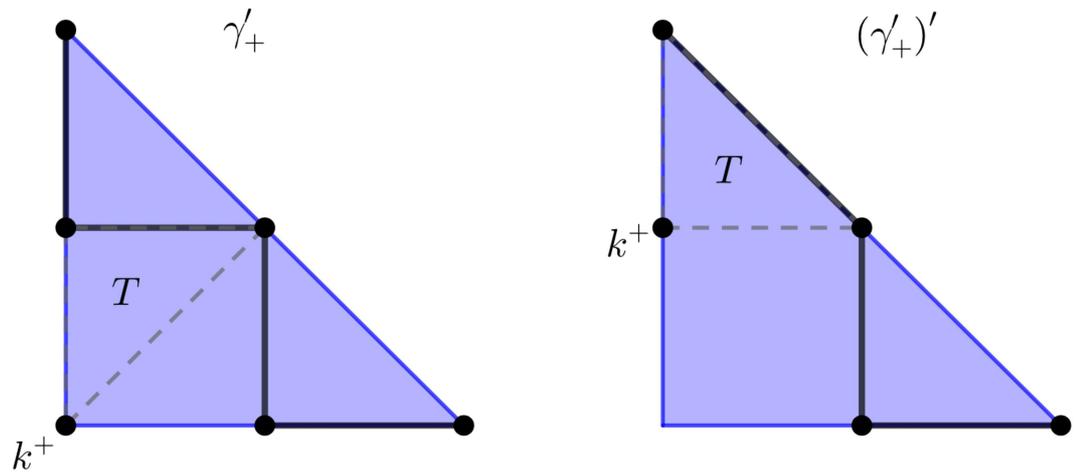
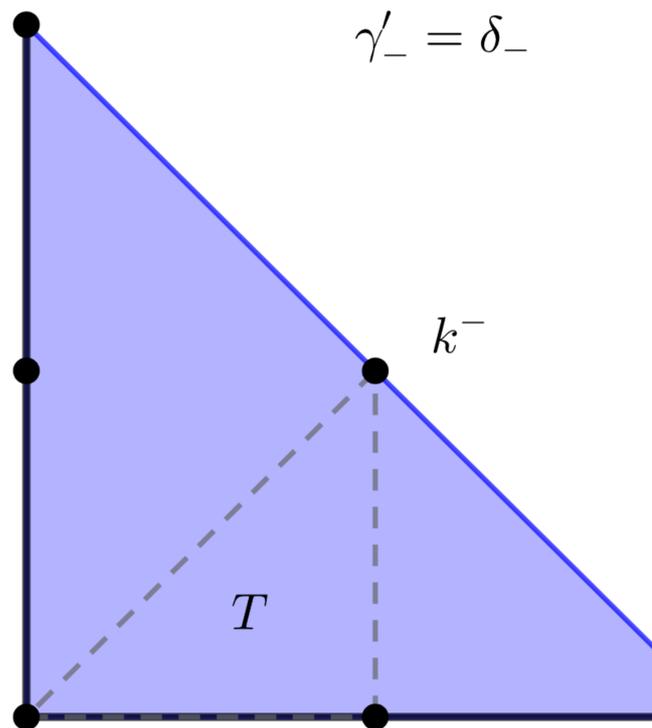


Figura 31 – Multiplicidade positiva de



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

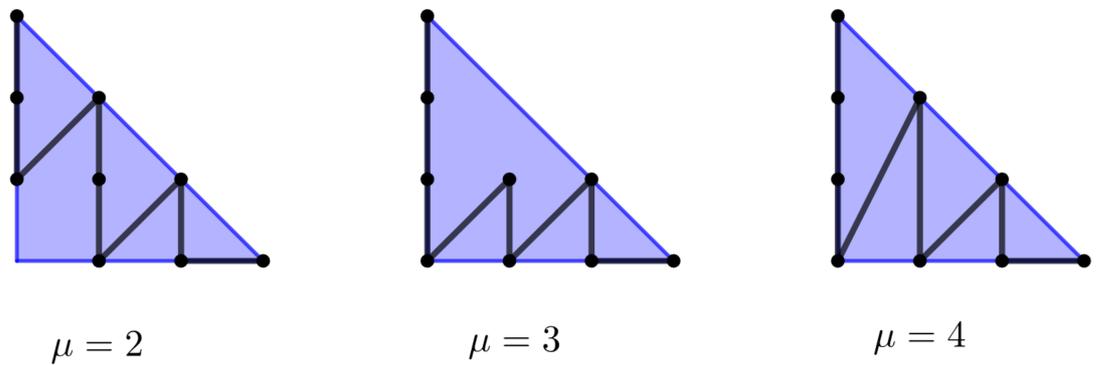
Figura 32 – Multiplicidade ne  
de  $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_2$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Logo, existem 12 curvas de grau  $d = 3$  e gênero  $g = 0$  que  
geral no plano projetivo complexo.

Figura 33 – Caminhos reticulados  $\lambda$ -crescente



Fonte: Elaborada pela autora (2023) com base em (1).

## 6 A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS P

Neste capítulo generalizaremos a Definição 5.1 de como (1), e mostraremos que o número  $N_{\text{path}}^{\alpha, \beta}(d, g)$  também Harris, definida na Seção 2.3, sendo esse o principal r principais referências utilizadas foram o artigo (1) e a te

### 6.1 CAMINHOS RETICULADOS GENERALIZADOS

A generalização da Definição 5.1 de caminho re seção, permitirá um maior números de caminhos reticul os números  $N_{\text{cplx}}^{\alpha, \beta}(d, g)$  para caminhos.

Em todo o capítulo,  $d$  e  $g$  serão números inteiros e denotará o o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, d)$  e  $(d, 0)$  e se de números inteiros não negativos.

**Definição 6.1.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas sequências tais que por  $\lambda(x, y) = x - \epsilon y$ , onde  $\epsilon$  é um número irracional um caminho reticulado  $\lambda$ -crescente  $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ ,  $n$  generalizado  $\lambda$ -crescente se  $\gamma(0) = (0, d - I\alpha) = (0, I\beta)$

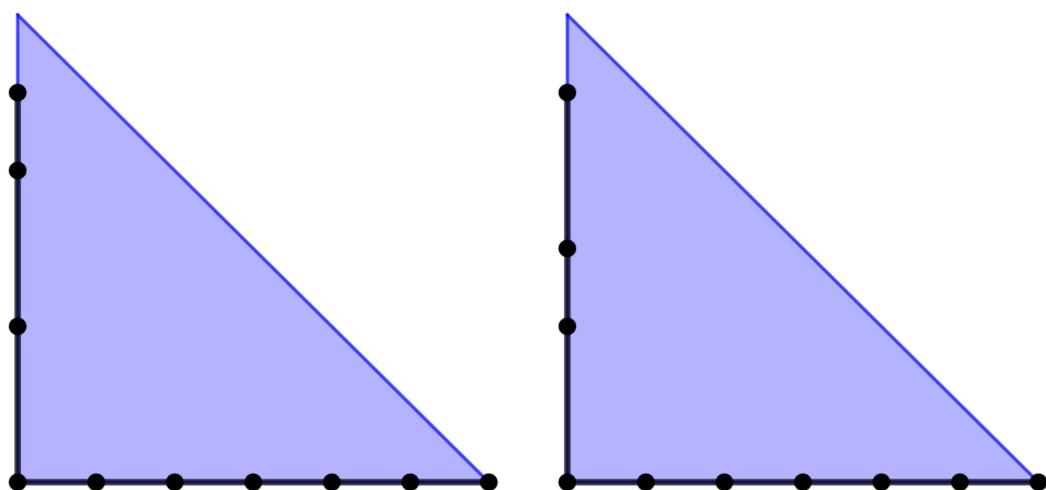
Vamos definir uma multiplicidade para um caminho ao que foi feito no Capítulo 5, usando o produto de um multiplicidade negativa as quais definiremos a seguir.

**Definição 6.2.** Seja  $\delta_\beta : [0, |\beta| + d] \rightarrow \Delta_d$  um caminho

- nos pontos da fronteira de  $\Delta_6$  em que  $y = 0$ , existe

A Figura 34 mostra todos os possíveis caminhos  $\delta_{(1,2)}$  no

Figura 34 – Caminhos  $\delta_{(1,2)}$  no tri

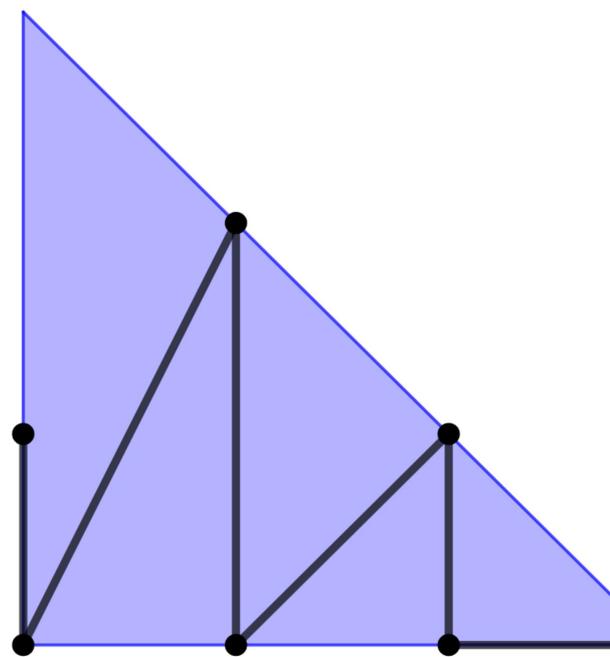


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Definimos a *multiplicidade negativa* de um caminho crescente  $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ , denotada por  $\mu_{\beta,-}(\gamma)$ , usando a Subseção 5.1.1, sendo  $\delta_\beta$  o caminho final da recursividade. positiva precisamos fazer um ajuste.

**Definição 6.4.** Dado um caminho reticulado  $\lambda$ -crescente definimos o caminho  $\gamma_\alpha : [0, |\alpha| + n] \rightarrow \Delta_d$ , chamado etapas de comprimento inteiro  $i$  no lado de  $\Delta_d$  sobre  $\gamma_\alpha(|\alpha|) = (0, I\beta)$ . Calculamos  $\mu_+(\gamma_\alpha)$  como na Subseção

Figura 35 – Caminho  $\gamma$



Fonte: Elaborada pela autora (2012)

Figura 36 – Caminho  $\gamma'_-$

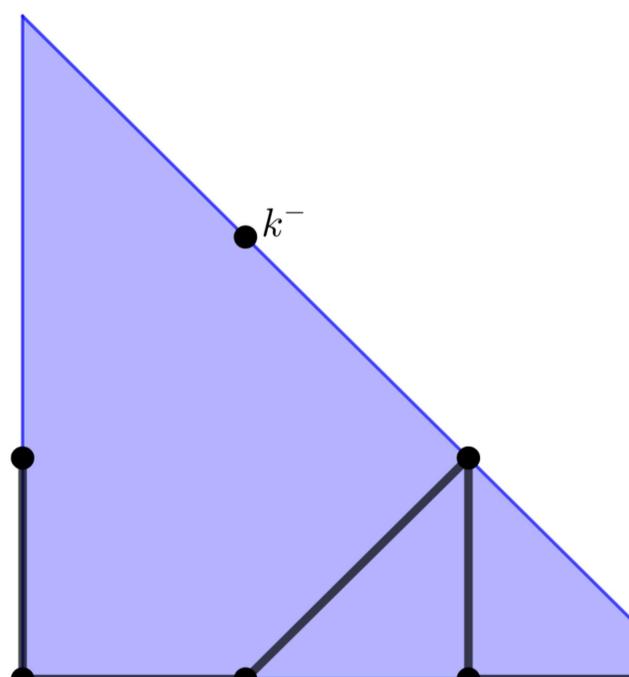
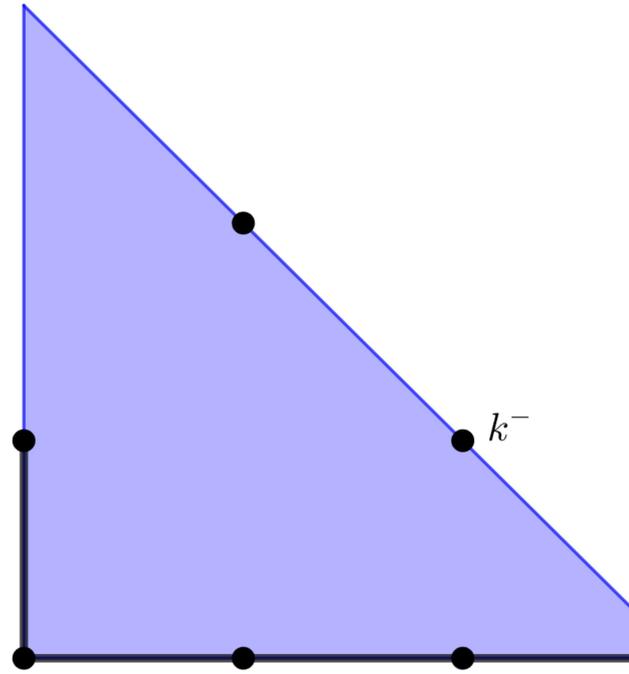


Figura 37 – Caminho  $(\gamma'_-$



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Portanto,  $\mu_{(1),-}(\gamma) = 2$ .

Por fim, vamos calcular a multiplicidade positiva do caminho  $\gamma$  para o caminho  $\gamma_{(0,1)} : [0, 7] \rightarrow \Delta_3$ , adicionando um ponto  $k^+$  no caminho  $\gamma$  em  $\{x = 0\}$ . O novo caminho está representado na Figura 38.

Figura 38 – Caminho  $(\gamma_{(0,1)}$

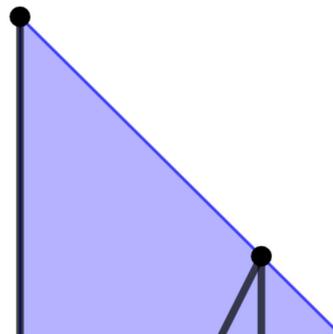
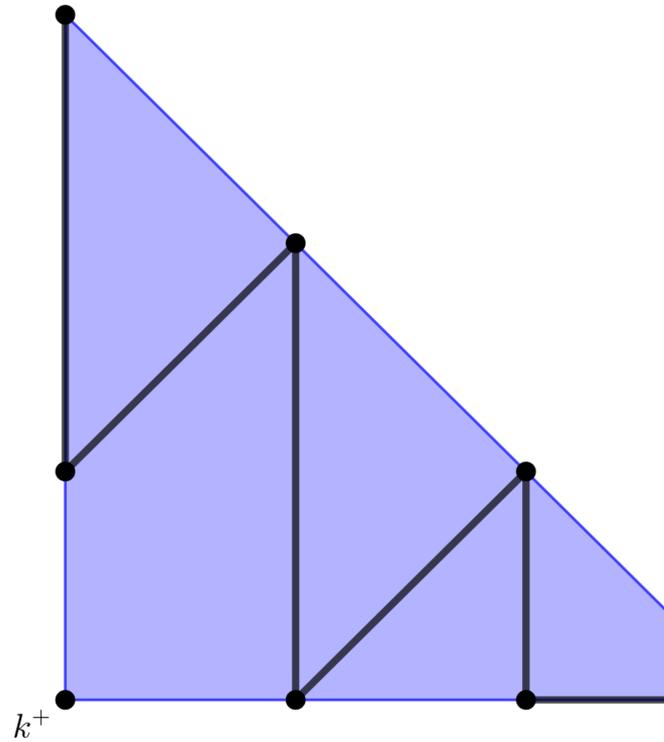


Figura 39 – Caminho  $\gamma'_{(0,1)}$



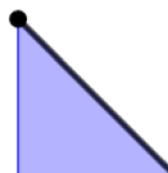
Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Logo,

$$\mu_+(\gamma_{(0,1)}) = 2 \cdot \text{Área de } T \cdot \mu_+(\gamma'_{(0,1)+}) + \mu_+(\gamma_{(0,1)+})$$

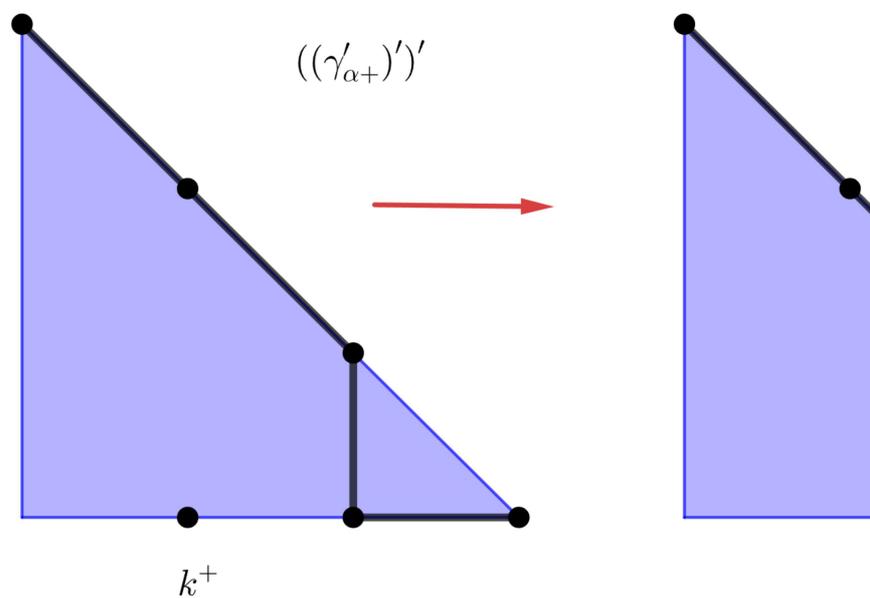
- Observando agora o caminho  $\gamma'_{(0,1)+}$ , temos  $k^+ = 1$ .  
Figura 40.

Figura 40 – Caminho  $(\gamma'_{(0,1)+})$



- Vamos repetir este processo, onde os caminhos  $\gamma'$  e  $\gamma''$  possuem multiplicidade 0

Figura 41 – Caminhos  $\gamma$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Notemos que durante o processo surge mais um triângulo assim que  $\mu_+(\gamma_{(0,1)}) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ .

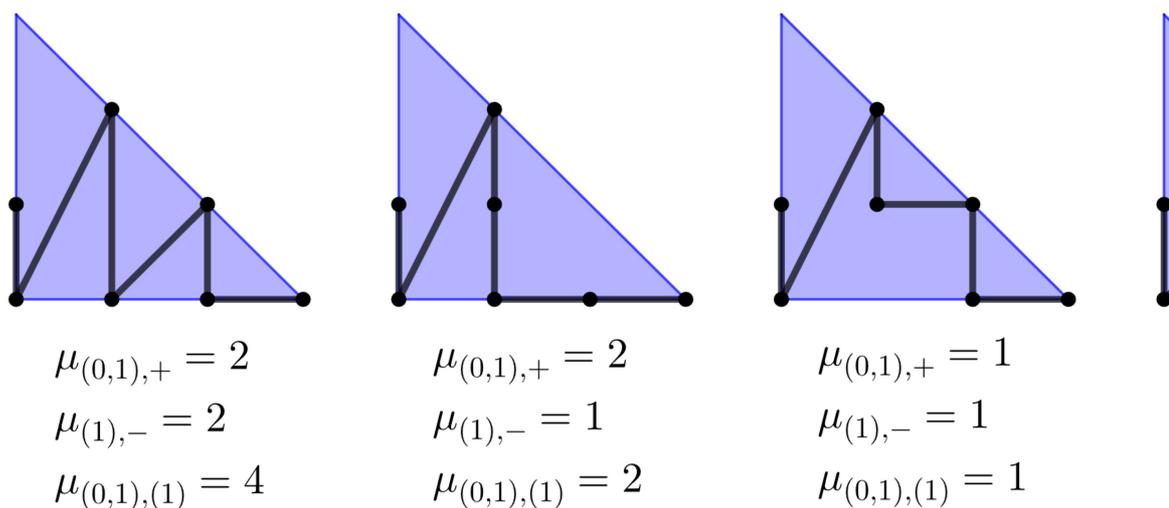
Logo,

$$\mu_{(0,1),+} = \frac{1}{I_{(0,1)}} \cdot \mu_+(\gamma_{(0,1)}) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a multiplicidade  $\mu_{(0,1),(1)}(\gamma) = 2 \cdot 2 = 4$

**Definição 6.7.** Suponhamos fixados  $d$  e  $g$  inteiros, tais que  $I\alpha + I\beta = d$ . Definimos  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  como o número

Figura 42 –  $N_{\text{path}}^{(0,1),(1)}(3,0)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023) com base em (9).

## 6.2 A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS PARA GENERALIZADOS

Para provar que os números  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  da Definição 6.1 são os números de caminhos Caporaso-Harris, vamos expressar a multiplicidade negativa de caminhos no reticulado generalizado de maneira não recursiva. Para isso, vamos seguir.

**Lema 6.9.** *Sejam  $d$  e  $g$  inteiros,  $d \geq 0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  duas sequências de inteiros não negativos. Se  $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$  um caminho reticulado generalizado. Se  $\gamma$  começa na reta  $x = i$  e termina na reta  $x = j$ , para algum par  $i, j$  com  $i < j$  e  $\gamma$  não contém "move pelo menos duas colunas para a direita"), então  $\mu_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(\gamma) = 0$ .*

que movem no máximo uma coluna para a direita. Por nos passos da recursividade.

Pelo lema anterior, garantimos que qualquer caminho crescente com multiplicidade diferente de zero tem apenas um ponto que desce verticalmente e outro que se move exatamente uma unidade na variação na coordenada  $y$  podendo ser crescente ou decrescente.

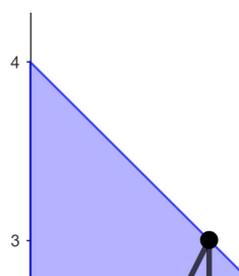
Para o que segue, faremos a seguinte definição.

**Definição 6.10.** Seja  $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$  um caminho  $\lambda$ -crescente. Para  $0 \leq i \leq n$ , denotamos por:

- (a)  $h(i)$  a coordenada  $y$  do ponto mais alto de  $\gamma$  na reta  $x = i$ .
- (b)  $\alpha^i$  a sequência que descreve os comprimentos dos passos de  $\gamma$  na coluna  $x = i$ , ou seja, a sequência  $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots)$  é tal que  $\alpha_1^i$  representa o comprimento de tamanho 1 na coluna  $x = i$ ,  $\alpha_2^i$  representa a quantidade de passos de tamanho 1 na coluna  $x = i$ , e assim sucessivamente.

**Exemplo 6.11.** Para o caminho  $\gamma$  ilustrado na Figura 43, temos  $h(2) = 2$ ,  $h(3) = 1$ ,  $h(4) = 0$  e  $\alpha^0 = (0)$ ,  $\alpha^1 = (1, 1)$ ,  $\alpha^2 = (1, 1, 1)$ .

Figura 43 – Caminho  $\gamma$



(a) A multiplicidade negativa de  $\gamma$  é dada pela fórmula

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \right) \left( \alpha^0 + \beta^0 - \beta \right)$$

onde a soma é calculada sobre todas as  $(d+1)$ -uplas  $(\beta^0, \dots, \beta^d)$  que  $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$  e  $I\alpha^i + I\beta^i = h(i)$  para todo  $i$ .

(b) A multiplicidade positiva de  $\gamma$  é dada pela fórmula

$$\mu_{\alpha,+}(\gamma) = \frac{1}{I\alpha} \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1}} \right) \left( \alpha^d + \beta^d - \beta \right)$$

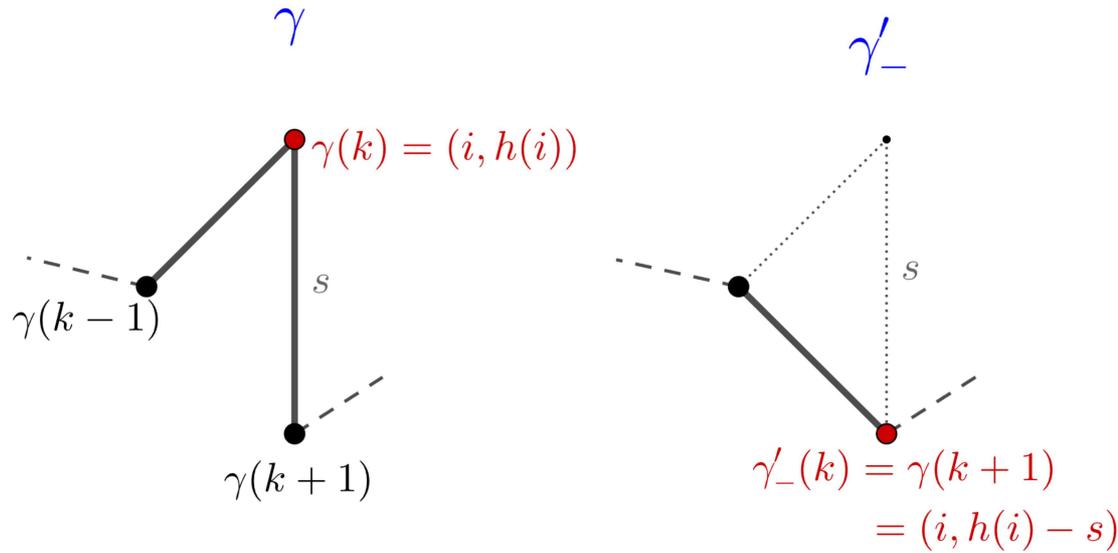
onde a soma é calculada sobre todas as  $(d+1)$ -uplas  $(\beta^0, \dots, \beta^d)$  que  $\beta^0 = \alpha$  e  $d - i - I\beta^i = h(i)$  para todo  $i$ .

*Demonstração.* Vamos provar somente a afirmação (a), pois a afirmação (b) é análoga. A demonstração será por indução no número de dimensões  $d$ . Para  $d=0$ , o cálculo de  $\mu_{\beta,-}$ . Primeiramente, observemos que os caminhos  $\delta_\beta$  (Definição 6.2), satisfazem a fórmula. De fato, para os caminhos  $\delta_\beta$ , temos que  $\beta^0 = (0)$ . Além disso, como os caminhos estão somente na fronteira do triângulo  $\Delta$ , temos  $h(i) = 0$ , e, portanto,  $\alpha^i = 0$ , concluindo que  $\beta^i = (0)$  para todo  $i$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{(\beta^0=(0), \dots, \beta^d=(0))} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \right) \left( \alpha^0 + \beta^0 - \beta \right) \\ &= I^{(0)+(0)-(0)} \binom{(0) + (0)}{(0)} \dots I^{(0)+(0)-(0)} \binom{(0) + (0)}{(0)} \end{aligned}$$

- ou  $\gamma(k+1)$  está na mesma coluna  $i$  de  $\gamma(k)$ , como

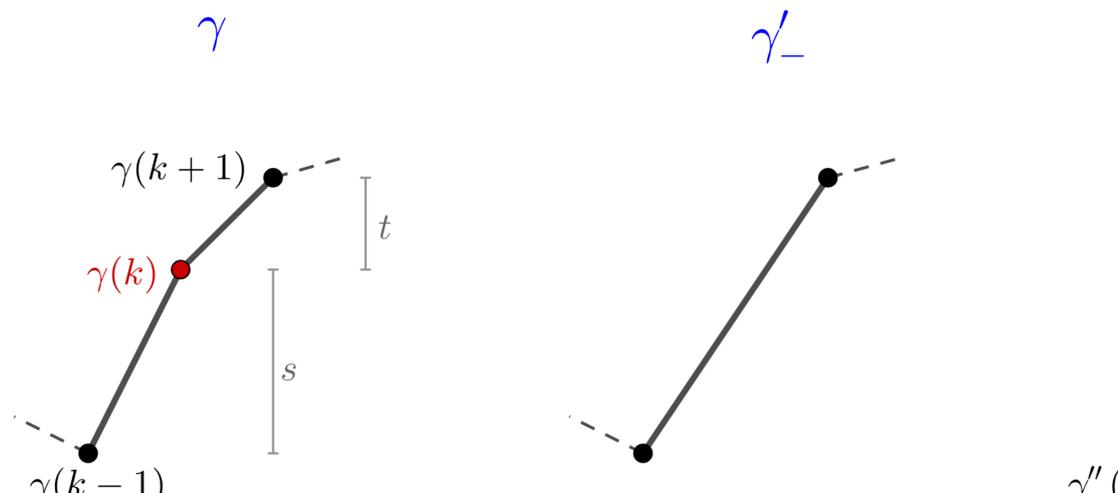
Figura 44 – Primeiro caso



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

- ou  $\gamma(k+1)$  está uma coluna à direita de  $\gamma(k)$ , com

Figura 45 – Segundo caso



$$\delta_{l,i} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq i; \\ 1, & \text{se } l = i. \end{cases},$$

$I^{-\delta_{j+1,i}e_s} = 1/s$  e as condições nas variáveis de soma  $\beta^j$  s

$$I(\alpha^j - \delta_{j,i}e_s) + I\beta^j = h(j) - \delta_{j,i}s \Rightarrow I\alpha^j$$

Ou seja, a soma é tomada sobre as mesmas condições da

Já o caminho  $\gamma''_-$  tem os valores de  $h(j)$  e  $\alpha^j$  iguais. Será substituído por  $h(i) - s$ ,  $\alpha^i$  por  $\alpha^i - e_s$  e  $\alpha^{i-1}$  por  $\alpha^{i-1}$

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma''_-) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^0} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \dots I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2}} \binom{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1}}{\beta^{i-2}} \right. \\ &\quad \left. I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i-1} - e_s} \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} \dots I^{\alpha^d + \beta^d - \beta^{d-1}} \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \right) \end{aligned}$$

Usando que  $I^{e_s} = s$  e que  $I^{-e_s} = 1/s$ , temos

$$I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2} + e_s} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i-1} - e_s} = I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2}}$$

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}}{\beta^j} \right)$$

onde as condições nas variáveis de soma  $\beta^i$  são:

$$\begin{aligned} &\alpha^0 + \delta_{0,i-1}e_s + \dots \\ &I(\alpha^j - \delta_{j,i}e_s + \delta_{j,i-1}e_s) + I\beta^j = h(j) \end{aligned}$$

Podemos tornar as condições (6.3) iguais às da n

Porém, para deixarmos os somatórios (6.1) e (6.4) nas mesmas formas novamente como

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}}{\beta^j} \right)$$

Substituindo (6.1) e (6.5) na definição de multiplicidade

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) := 2 \cdot \text{área de } T \cdot \mu_{\beta,-}(\gamma'_-)$$

onde  $T$  o triângulo de vértices  $\gamma(k^- - 1)$ ,  $\gamma(k^- + 1)$  e  $\gamma(k^-)$

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= s \cdot \mu_{\beta,-}(\gamma') + \mu_{\beta,-}(\gamma'') \\ &= s \cdot \frac{1}{s} \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}}{\beta^j} \right) \\ &\quad + \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}}{\beta^j} \right) \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \right) \dots \\ &\quad \dots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \left( \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1}} \right) \end{aligned}$$

Vamos analisar o termo  $\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1} - e_s}$

- $\alpha^i + \beta^i - e_s = (\alpha_1^i + \beta_1^i, \dots, \alpha_s^i + \beta_s^i - 1, \dots, \alpha_m^i + \beta_m^i)$
- $\beta^{i-1} - e_s = (\beta_1^{i-1}, \dots, \beta_{i-1}^{i-1} - 1, \dots, \beta^{i-1})$

Usando a identidade binomial  $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  com  $k = \beta_s^{i-1}$ , temos

$$\binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1}} + \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1} - 1} =$$

Com isso,

$$\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s} =$$

garantindo que em (6.6) vale a igualdade,

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \right) \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \left( \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1} - e_s} \right) \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \right) \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1}} \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \right) \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1}} \end{aligned}$$

como queríamos.

Já no segundo caso, a ideia é semelhante ao caso anterior, mas o caminho  $\gamma'_-$  não contribui para o cálculo de  $\mu_{\beta,-}(\gamma)$ . Assim,

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \mu_{\beta,-}(\gamma''_-).$$

- $\tilde{\alpha}^0 = \alpha^0 \Rightarrow \alpha^0 + \tilde{\beta}^0 = \beta \Rightarrow \tilde{\beta}^0 = \beta^0,$
- $\tilde{\alpha}^j = \alpha^j, \forall j.$
- $\tilde{h}(j) = h(j) - \delta_{j,i}(s - t), \forall j \Rightarrow \begin{cases} \tilde{h}(j) = h(j), \forall j \neq i \\ \tilde{h}(i) = h(i) - (s - t) \end{cases}$

Com isso,  $\tilde{\beta}^j = \beta^j, \forall j \neq i$  e  $\tilde{\beta}^i$  é tal que

$$I\alpha^i + I\tilde{\beta}^i = h(i) - (s - t)$$

Como o caminho  $\gamma$  é  $\lambda$ -crescente, sabemos que, se existirem, são sempre decrescente na segunda coordenada.

- na reta  $x = i - 1$ , se existirem deslocamentos verticais, o deslocamento vertical do caminho  $\gamma$  na reta  $x = i - 1$  é  $y_{k-1}$ . Assim,  $y_{k-1}$  é a menor coordenada de um deslocamento vertical do caminho  $\gamma$  na reta  $x = i - 1$ . Como  $I\alpha^{i-1}$  é o comprimento de  $\gamma$  que está na reta  $x = i - 1$ , temos  $I\alpha^{i-1} = h(i - 1) - y_{k-1}$ . Logo,

$$I\alpha^{i-1} + I\beta^{i-1} = h(i - 1) \Rightarrow h(i - 1) - y_{k-1} + I\beta^{i-1} = h(i - 1)$$

- na reta  $x = i$ , não temos deslocamento vertical do caminho  $\gamma$ , logo, seja,  $I\beta^i = h(i) = y_k$ .
- na reta  $x = i + 1$ , o deslocamento vertical do caminho  $\gamma$  na reta  $x = i + 1$  é  $y_{k+1}$ . Assim,  $h(i + 1) = y_{k+1}$ , garantindo que  $I\alpha^{i+1} = h(i + 1) - y_{k+1}$ .

Temos,

sendo substituído por

$$\begin{pmatrix} \alpha^i + \beta^i + (\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i) \\ \beta^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^i + (\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i) \\ \beta^{i-1} \end{pmatrix}$$

Porém esses termos são os mesmos pela identidade

$$\begin{pmatrix} n + k + m \\ n + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n + k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + k + m \\ n + l \end{pmatrix}$$

onde  $n = \beta_l^{i-1}$ ,  $k = \beta_l^i - \beta_l^{i-1}$  e  $m = \alpha_l^{i+1} + \beta_l^{i+1} - \beta_l^i$ , para as sequências. Lembremos que  $\alpha^i = (0)$ .

Portanto,

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \right) \begin{pmatrix} \alpha^d + \beta^d \\ \beta^d \end{pmatrix}$$

como queríamos demonstrar.

Notemos que as fórmulas acima nos oferece uma fórmula para a multiplicidade de um caminho reticulado, como podemos ver no exemplo a seguir.

**Exemplo 6.13.** Sejam  $\alpha = (0, 1)$ ,  $\beta = (1)$ ,  $d = 3$  e  $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{Z}^d$  representado na Figura 46. Vamos calcular a multiplicidade do caminho  $\gamma$  usando as fórmulas demonstradas na Proposição 6.12. Notemos que o caminho  $\gamma$  é representado na Figura 42.

Primeiramente, vamos calcular a multiplicidade  $n$  em todas as 4-uplas de sequências  $(\beta^0, \dots, \beta^3)$  tais que  $\alpha^0 = \beta^0$  para todo  $i = 0, \dots, 3$ .

- $\alpha^0 + \beta^0 = \beta \Rightarrow (1) + \beta^0 = (1) \Rightarrow \beta^0 = (0)$ .

Notemos ainda que  $I\alpha^0 + I\beta^0 = 1 + 0 = 1 = h(0)$ .

- $I\alpha^1 + I\beta^1 = h(1) \Rightarrow 1 + I\beta^1 = 2 \Rightarrow I\beta^1 = 1 \Rightarrow \beta^1 = (1)$

- $I\alpha^2 + I\beta^2 = h(2) \Rightarrow 1 + I\beta^2 = 1 \Rightarrow I\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = (0)$

- $I\alpha^3 + I\beta^3 = h(3) \Rightarrow 0 + I\beta^3 = 0 \Rightarrow I\beta^3 = 0 \Rightarrow \beta^3 = (0)$

Aplicando os valores acima na fórmula apresentada na letra (a), temos:

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= \sum_{(\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)} \left( \prod_{i=0}^2 I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i}{\beta^i} \right) \\ &= I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^0} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} I^{\alpha^2 + \beta^2 - \beta^1} \binom{\alpha^2 + \beta^2 - \beta^1}{\beta^1} \\ &= I^{(2)} \binom{(2)}{(0)} I^{(0)} \binom{(1)}{(1)} I^{(0)} \binom{(0)}{(0)} = 1^2 \binom{(2)}{(0)} \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a multiplicidade positiva  $n$  em todas as 4-uplas de sequências  $(\beta^0, \dots, \beta^3)$  tais que  $\alpha^i = \beta^i$  para todo  $i = 0, \dots, 3$ .

- $\beta^0 = \alpha = (0, 1)$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} 1^1 2^1 \binom{1}{0} \binom{1}{0} 1^1 \binom{1}{0} 1^1 \binom{1}{0} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Portanto, a multiplicidade  $\mu_{(0,1),(1)}(\gamma) = 1 \cdot 1 = 1$

**Teorema 6.14.** *Sejam  $d$  e  $g$  inteiros,  $d \geq 0$ , e  $\alpha, \beta$  duas não negativos tais que  $I\alpha + I\beta = d$ . O número  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  de Harris. Em particular, temos  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  por*

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [0, 2d + g + |\beta| - 1] \rightarrow \Delta_d$  um caminho começando em  $(0, I\beta)$  e terminando em  $q = (d, 0)$ . A ideia da demonstração é dividir o caminho em dois passos para o primeiro passo do caminho  $\gamma$ . Temos apenas dois casos:

(i) o ponto  $\gamma(1)$  está na reta  $\{x = 0\}$ ;

(ii) ou o ponto  $\gamma(1)$  está na reta  $\{x = 1\}$ .

pois, nos demais casos, o primeiro passo de  $\gamma$  move pelo interior do triângulo, e, pelo Lema 6.9, a multiplicidade de  $\gamma$  é 0.

No caso (i), o ponto  $\gamma(1) = (0, I\beta - k)$ , para algum  $k \geq 1$ , e a restrição  $\tilde{\gamma} := \gamma|_{[0,1]}$  que é imagem do intervalo  $[0, 1]$  se manterá durante todo o caminho, portanto a multiplicidade é negativa. Se esse passo de tamanho  $k$  não ocorrer, pela recursividade não encontraríamos o caminho  $\delta_\beta$ , tornando a multiplicidade zero. Além disso,  $I(\alpha + e_k) + I(\beta - e_k) = d$ . Façamos  $\tilde{\alpha} = \alpha + e_k$  e  $\tilde{\beta} = \beta - e_k$ .

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{\alpha},+}(\tilde{\gamma}) &= \frac{1}{I^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\tilde{\alpha}^i + \tilde{\beta}^i - \tilde{\beta}^{i+1}} \binom{\tilde{\alpha}^i + \tilde{\beta}^i}{\tilde{\beta}^{i+1}} \right) \\
&= \frac{1}{I^{\alpha + e_k}} \sum_{(\beta_0, \dots, \beta_d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1} - \delta_{i,0}k} \right) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{I^\alpha} \sum_{(\beta_0, \dots, \beta_d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1} - \delta_{i,0}k} \right)
\end{aligned}$$

onde o somatório em (6.8) é sobre todas as  $d + 1$ -uplas  $(\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_d)$  tais que  $d - i - I\tilde{\beta}^i = \tilde{h}(i)$  e o somatório em (6.9) sobre todas as  $d + 1$ -uplas  $(\beta_0, \dots, \beta_d)$  tais que  $\beta^0 = \alpha + e_k$  e  $d - i - I\beta^i = h(i) - \delta_{i,0}k$ . Fazendo a mudança de variáveis  $\eta^i = \beta^i - \delta_{i,0}k$  para todo  $i$ , temos  $\eta_0 = \alpha$  e  $d - i - I\eta^i = h(i)$ . Portanto

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{I^\alpha} \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_d)} \left( \prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \eta^i - \eta^{i+1}} \binom{\alpha^i + \eta^i}{\eta^{i+1}} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) &= \mu_{\beta,-}(\gamma) \mu_{\alpha,+}(\gamma) = \mu_{\tilde{\beta},-}(\tilde{\gamma}) \cdot k \cdot \mu_{\alpha,+}(\tilde{\gamma}) \\
\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) &= k \cdot \mu_{\alpha+e_k, \beta-e_k}(\tilde{\gamma}).
\end{aligned}$$

Portanto, os caminhos  $\gamma$  tais que  $\gamma(1)$  pertence à reta  $x = \beta - e_k$

$$\sum_{k; \beta_k \neq 0} k \cdot N_{\text{path}}^{\alpha+e_k, \beta-e_k}(d, g)$$

onde a soma é tomada sobre todos os  $\beta'$  e  $g'$ , possíveis.

$$\mu_{\alpha,+}(\gamma) = \sum_{\alpha'} \binom{\alpha}{\alpha'} \mu_{\alpha',+}(\tilde{\gamma})$$

e, portanto,

$$\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) = \sum_{\alpha',\beta'} I^{\beta'-\beta} \binom{\beta'}{\beta} \binom{\alpha}{\alpha'} \mu_{\alpha',\beta'}(\tilde{\gamma})$$

onde a soma é tomada sobre todos os  $\beta'$ ,  $\alpha'$  e  $g'$ , possíveis, e  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $g$  são esses possíveis valores. Notemos que, pela construção,

$$I\alpha' + I\beta' = (d - 1 - h(1)) + h(1)$$

Como  $\tilde{\gamma}$  tem um passo a menos que  $\gamma$ , temos

$$2d + g + |\beta| - 1 - 1 = 2(d - 1) + g$$

garantindo que  $g - g' = |\beta' - \beta| - 1$ . O caminho  $\lambda$ -crescente  $\tilde{\gamma}$  do reticulado  $(d, 0)$  que passa por todos os pontos possíveis do reticulado

$$|\beta| + (d - 1) + (d - 2) + \dots + 1 = |\beta| + \frac{d(d+1)}{2}$$

passos. Como  $\gamma$  tem  $2d + g - 1 + |\beta|$  passos,

$$|\beta| + \frac{d(d+1)}{2} - (2d + g - 1 + |\beta|) = \frac{d(d+1)}{2} - (2d + g - 1)$$

o número de pontos do reticulado são perdidos por  $\gamma$ . Notemos que o número de pontos do reticulado e esse número é necessariamente o número de pontos perdidos por  $\gamma$ , pois em  $\tilde{\gamma}$  os pontos da coluna  $x = 1$  em

Portanto,  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  satisfaz a fórmula de Caporaso

Finalmente, sabendo que  $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  e  $N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$  são iguais por um resultado de Harris, para todo  $\alpha, \beta, d, g$  e que ambos coincidem para

$$N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g).$$

## REFERÊNCIAS

- 1 GATHMANN, Andreas; MARKWIG, Hannah. The plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry. **Annalen**, v. 338, n. 4, p. 845–868, 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0504392.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 2 KONTSEVICH, Maxim; MANIN, Yuri. Gromov-Witten invariants and enumerative geometry. **Communications in Mathematical Physics**, v. 157, n. 3, p. 525–562, 1994. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02046042>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 3 CAPORASO, Lucia; HARRIS, Joe. Counting plane curves. **Inventiones mathematicae**, v. 131, n. 2, p. 345–398, 1995. Disponível em: <http://www.mat.uniroma3.it/users/caporaso/Cap-Har95.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 4 MIKHALKIN, Grigory. Enumerative tropical geometry. **American Mathematical Monthly**, v. 113, n. 2, p. 107–124, 2006. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/jams/2005-18-02/jams-18-02-94-0347-05-00477-7.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 5 FULTON, William. **Algebraic Curves: An Introduction**. Cambridge University Press, 2008. Disponível em: <https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/Curves.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 6 MIKHALKIN, Grigory; RAU, Johannes. Tropical enumerative geometry. **Journal of Algebraic Geometry**, v. 15, n. 2, p. 207–244, 2006. Disponível em: <https://www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/papers/06-02-07.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.