

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE J**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO I**

**Francielle Alves Rodrig**

**Francielle Alves Rodrigu**

**Construções de Emparelhamentos de Arestas**

Dissertação apresentada à  
Graduação em Matemática  
Federal de Juiz de Fora  
à obtenção do título de  
Bacharel em Matemática. Área de  
Concentração em  
Topologia.



**Francielle Alves Rodrigues**

**Construções de emparelhamentos de arestas de polígono**

Dissertação apresentada ao  
Federal de Juiz de Fora  
Matemática. Área de conce

Aprovada em 29 de outubro de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**



Documento assinado eletronicamente por **Lonardo Rabelo, Professor(a)**, em 01/11/2024, às 10:01, c  
4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Esther Sanabria Codesal, Usuário Externo**, em 20/12/2024, às 10:01, c  
§ 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **NELSON BERROCAL HUAMANI, Usuário Externo**, em 20/12/2024, às 10:01, c  
fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através  
verificador **2068329** e o código CRC **D2DAACD1**.

---



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ser meu sustento em todo tempo e por todas as oportunidades que me trouxeram até este momento.

Agradeço à minha família pelo carinho e pela torcida. Agradeço a Marta e Jorge, pois com muito esforço e dedicação me permitiram que a graduação não era realidade para nossa família. Aos meus irmãos, ao cunhado Nathalia, pelo incentivo e suporte que me deram durante o processo. Agradeço pelo apoio emocional e mental que eu precisei durante este tempo. Agradeço a quem, com apenas um sorriso me concedia a disposição que eu precisava.

Agradeço à minha amiga Gabriela, que está comigo desde o início, ajudando-me a lidar em uma nova cidade, pelos momentos de diversão, acolhimento e por ter me soltado minha mão. A minha amiga e parceira de muitos momentos, a quem me recebeu em nosso cantinho e me garantiu bons momentos de descontração. Agradeço a quem fez durante o mestrado, vocês foram essenciais neste tempo. Agradeço ao pai especial, Walter e Thiago, pela ajuda com as incontáveis dificuldades.

Por fim, aos professores do departamento de Matemática, agradeço por poder ser aluna ou assistir alguma palestra, pois contribuíram para a minha formação. Em particular, a minha orientadora, professora, agradeço pela ajuda e ensinamentos durante este tempo. Ao meu coordenador, agradeço por aceitar o convite, pela disposição nos nossos encontros e pela ajuda na minha dissertação.

## RESUMO

Este trabalho tem como estudo principal a obtenção de superfícies regulares por meio do emparelhamento de arestas de polígonos regulares. São definidos grafos de emparelhamento e verificada a não unicidade de grafos de emparelhamento para polígonos na construção de uma dada superfície. Estudamos grafos de emparelhamento, definidos por *Mendes e Romer*, e a construção de novos grafos de emparelhamento de arestas. Dado um grafo de emparelhamento, verificamos se um dado está associado a algum emparelhamento de arestas. Apresentamos um algoritmo de emparelhamento (5), que permite construir novos grafos de emparelhamento especificamente, famílias de grafos de emparelhamentos conhecidos. O processo inverso, denominado decomposição, nos permite verificar se um dado grafo pode ser associado a um emparelhamento de arestas de um polígono regular. Essas técnicas, além de garantir a existência de um emparelhamento de arestas, garantem que sua aplicação resultam em novos grafos de emparelhamento de arestas.

Palavras-chave: Topologia Quociente. Emparelhamento de Arestas. Superfícies Regulares. Superfícies.

## ABSTRACT

This work aims to obtain closed and orientable surfaces from polygons (17), with the aim of defining pairing graphs and of the identification of polygon edges in the construction of the extension and contraction of pairing graphs, defined by the techniques that allow the construction of new edges-pairing graphs, whether a given graph is associated with some edges-pairing graph surgery (5), which allows the construction of new pairing graphs of trivalent pairing graphs from already known graphs. The decomposition, allows us to verify whether a given graph is an edge pairing of a regular polygon. These techniques, in a given graph is an edge-pairing graph, lead to results that establish a relationship between edge-pairing graphs results in new edge-pairing graphs.

Keywords: Quotient Topology. Edge Pairing. Re

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 2.1 – Exemplos de topologias no conjunto  $X = \{ \dots \}$
- Figura 2.2 –  $\mathbb{R}$  com a identificação definida pela função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Figura 2.3 – Construção de um cilindro a partir de um retângulo
- Figura 2.4 – Vizinhança dos pontos do retângulo e do cilindro
- Figura 2.5 – Exemplo de um grafo conexo. . . . .
- Figura 2.6 – O grafo conexo  $G_1$  e o grafo desconexo  $G_2$ .
- Figura 2.7 – (a) Laço; (b) arestas paralelas; (c) orientação
- Figura 2.8 – Grafo árvore. . . . .
- Figura 2.9 – Exemplo de uma 0-célula, 1-célula e uma 2-célula
- Figura 2.10 – Exemplo de uma 0-célula, 1-célula e uma 2-célula
- Figura 2.11 – Exemplo de distintos complexos celulares em  $\mathbb{R}^2$
- Figura 2.12 – Exemplos de complexos celulares. . . . .
- Figura 2.13 – Interseções não permitidas em um complexo celular
- Figura 2.14 – Superfície não orientável. . . . .
- Figura 2.15 – Soma conexa entre dois toros. . . . .
- Figura 2.16 – Soma conexa com uma esfera. . . . .
- Figura 2.17 – Superfícies Homeomórficas. . . . .
- Figura 3.1 – Emparelhamento de aresta de um quadrilátero
- Figura 3.2 – (a) Emparelhamento da esfera, (b) garrafa de Möbius
- Figura 3.3 – Emparelhamento de arestas de um  $P_6$  sobre a esfera
- Figura 3.4 – Curvas formadas sobre a superfície  $M_g$ . . . . .
- Figura 3.5 – Soma conexa do diagrama planar entre dois toros
- Figura 3.6 – Emparelhamentos do tritoro a partir de  $\mathcal{P}_{12}$

Figura 4.1 – Extensões do grafo $I_2$ . . . . .	
Figura 4.2 – Extensões do grafo $I_4$ . . . . .	
Figura 4.3 – Grafos estendidos sobre o bitoro. . . . .	
Figura 4.4 – Polígono após a extensão. . . . .	
Figura 4.5 – Exemplos de extensões de grafos sobre o toro. . . . .	
Figura 4.6 – Exemplo local de extensões de grafos sobre o toro. . . . .	
Figura 4.7 – Extensões do grafo $I_4$ sobre o Toro. . . . .	
Figura 4.8 – Possibilidades de extensão de um vértice pa. . . . .	
Figura 4.9 – Possibilidades de extensão de um vértice pa. . . . .	
Figura 4.10 – Exemplos de extensões de grafos sobre o Bi. . . . .	
Figura 4.11 – Diagramas e grafos de emparelhamento triv. . . . .	
Figura 4.12 – Grafos de emparelhamento trivalente do Tr. . . . .	
Figura 4.13 – Diagramas e grafos de emparelhamento 4-re. . . . .	
Figura 4.14 – Contração dos grafos de emparelhamento tr. . . . .	
Figura 4.15 – Contração dos grafos de emparelhamento tr. . . . .	
Figura 4.16 – Extensões de um grafo de emparelhamento. . . . .	
Figura 4.17 – Grafo de emparelhamento trivalente sobre o. . . . .	
Figura 4.18 – Visualização local da troca de arestas. . . . .	
Figura 4.19 – Exemplo de troca de arestas. . . . .	
Figura 4.20 – Exemplo de troca de arestas. . . . .	
Figura 5.1 – Diagramas e grafos de emparelhamento triv. . . . .	
Figura 5.2 – Emparelhamento de arestas com seus respe. . . . .	
Figura 5.3 – Soma conexa simultânea entre superfícies e. . . . .	
Figura 5.4 – Soma conexa de grafos. . . . .	
Figura 5.5 – Cirurgia $S_1$ nos polígonos de emparelhame. . . . .	

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES . . . . .</b>
2.1	TOPOLOGIA . . . . .
2.2	TEORIA DE GRAFOS . . . . .
2.3	COMPLEXOS E CARACTERÍSTICA DE I . . . . .
2.4	SUPERFÍCIES . . . . .
<b>3</b>	<b>EMPARELHAMENTO DE ARESTAS . . . . .</b>
3.1	EMPARELHAMENTO DE ARESTAS DE I . . . . .
3.2	GRAFOS DE EMPARELHAMENTOS . . . . .
3.3	DIAGRAMAS DE EMPARELHAMENTOS . . . . .
<b>4</b>	<b>EXTENSÃO DE GRAFOS DE EMPARELHAMENTOS . . . . .</b>
4.1	EXTENSÃO DE GRAFOS . . . . .
4.2	EXTENSÃO DE GRAFOS SOBRE $M_g$ . . . . .
<b>5</b>	<b>CIRURGIAS DE EMPARELHAMENTOS . . . . .</b>
5.1	SOMA CONEXA DE EMPARELHAMENTOS . . . . .
5.2	DECOMPOSIÇÃO DE EMPARELHAMENTOS . . . . .
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A teoria de grafos é um ramo da matemática que tem aplicações em várias áreas do mundo real. Em especial, no mundo tecnológico, a teoria de grafos tem se mostrado de forma significativa para as teorias de informação e comunicação. A tesselação, uma técnica de recobrimento de uma superfície por polígonos regulares, sem que haja sobreposição ou espaços vazios, é denotada por  $\{p, q\}$ , onde  $p$  é o número de lados e  $q$  o grau do vértice do grafo associado.

Em (6), *Faria e Palazzo* mostram que os códigos de correção de erro de baixa probabilidade de erro, estão relacionados com o empacotamento de esferas cuja a densidade é máxima. Os autores exibem que o número de arestas  $g$  é o gênero de uma superfície compacta, é a responsável por determinar as esferas com a maior densidade possível. Por isso, estudar as propriedades de arestas de polígonos hiperbólicos associados a tais tesselações com  $12g - 6$  arestas, permite obter informações necessárias para a construção de tais tesselações. Em virtude disso, há um interesse topológico na tesselação  $\{p, q\}$  está associada a uma superfície compacta, estamos interessados em estudar tais superfícies (com gênero  $g$ ) e os grafos associados a elas.

Em (9), *Jørgensen & Näätänen* mostram que para  $g = 2$ , um polígono composto por 18 lados identifica sua superfície. Tais emparelhamentos estão associados a cinco grafos triangulares e que qualquer outro emparelhamento (ou grafo) estará relacionado a eles. Por *Jørgensen & Näätänen*. Já para  $g = 3$ , os emparelhamentos

auxilia na determinação de possíveis grafos de emparelhamento. Este trabalho sobre emparelhamentos em (5), (9), (16) e (18) são construções a partir de polígonos regulares, focando em resultados obtidos por esta análise podem, posteriormente, ser aplicados em Geometria Hiperbólica, contribuindo para a teoria de sinais geométricos em especial, a *construção de constelações de sinais geométricos* em (3).

Neste trabalho, iniciamos descrevendo no Capítulo 1 os conceitos básicos que serão utilizados no desenvolvimento da dissertação, com ênfase nos conceitos básicos sobre Teoria de Grafos e a Característica de Euler.

No Capítulo 3 é abordada a construção do emparelhamento e a relação dos grafos com os emparelhamentos de arestas, bem como diagramas de emparelhamentos.

No Capítulo 4 explicamos o conceito de extensão de um emparelhamento fechada sobre uma superfície, apresentando os resultados que indicam se um dado está associado a algum emparelhamento de arestas.

Concluimos o trabalho com o Capítulo 5, onde exploramos a construção de famílias de grafos de emparelhamento com arestas e outra para verificar quando um grafo dado pode ser decomposto em polígonos regulares.

## 2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é descrever os conceitos de topologia. Serão abordados alguns tópicos de topologia, como espaços métricos, espaços métricos/completos, espaços métricos compactos, espaços métricos conexos/celulares e finalizando com superfícies.

### 2.1 TOPOLOGIA

Nesta seção serão apresentados os conceitos básicos de topologia. Será discutido o que é uma topologia quociente dado que a compactificação de arestas é feito através de tal topologia. As principais referências são (17), *Lee* (11) e *Kinsey* (10).

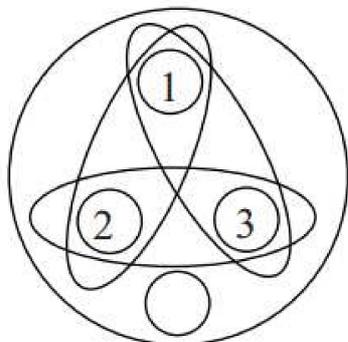
**Definição 2.1.1.** Uma topologia sobre um conjunto  $X$  é uma coleção  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
2. A união dos elementos de qualquer subcoleção de  $\mathcal{T}$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ ,  $\forall i \in J$ , então  $\cup\{U_i\}_{i \in J} \in \mathcal{T}$ .
3. A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de  $\mathcal{T}$  é um elemento de  $\mathcal{T}$ ,  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , então  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .

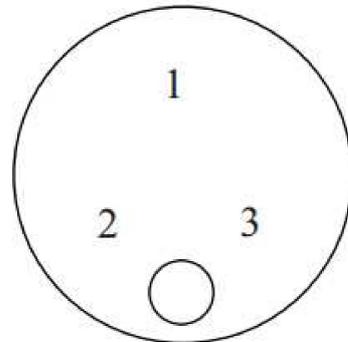
O conjunto  $X$  para o qual é definida a topologia  $\mathcal{T}$  é denotado pelo par ordenado  $(X, \mathcal{T})$ .

**Definição 2.1.2.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico.

Figura 2.1 - Exemplos de topologias no com



(a) Discrete topology



(b) Trivial topology

Fonte: Retirada de (11), p.

1. Qualquer intervalo fechado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  é um subconjunto fechado.
2. No espaço topológico  $X = \{1, 2, 3\}$  do Exemplo 2.1.6, os subconjuntos  $\{3\}$ ,  $\{2, 3\}$  e  $\{1, 2, 3\}$  são fechados.

**Definição 2.1.7.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $S \subseteq X$  um subconjunto. Dizemos que a topologia  $\mathcal{T}_S$  em  $S$  é dada por

$$\mathcal{T}_S = \{U \subseteq S : U = S \cap V, \text{ para algum subconjunto aberto } V \text{ em } X\}$$

Em outras palavras, os subconjuntos abertos de  $\mathcal{T}_S$  são exatamente os subconjuntos de  $S$  que são abertos em  $X$ . A topologia  $\mathcal{T}_S$  é chamada de **topologia relativa** em  $S$ .

**Definição 2.1.8.** Seja  $(X, \mathcal{T})$  um espaço topológico. Um subconjunto  $B$  de  $X$  é chamado de **elemento básico** se  $B$  é aberto em  $X$  e cada elemento aberto de  $X$  pode ser escrito como união de elementos básicos.

1. Todo espaço métrico é de Hausdorff: seja  $r = d(x, y)$ , as bolas abertas de raio  $\frac{r}{2}$  em torno de  $x$  e  $y$  são disjuntas.
2. A topologia trivial em qualquer conjunto contendo pelo menos dois pontos não é de Hausdorff. Ainda, o espaço  $X = \{1, 2, 3\}$  com a topologia trivial também não é um espaço de Hausdorff.

**Definição 2.1.12.** Sejam  $(X, \mathcal{T}_X)$  e  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  espaços topológicos. A topologia produto sobre  $X \times Y$  é a topologia que tem como base a coleção de todos os conjuntos  $U \times V$ , onde  $U \in \mathcal{T}_X$  e  $V \in \mathcal{T}_Y$ .

**Exemplo 2.1.13.** ((11), p.60) No plano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , a topologia produto é a topologia usual. Os conjuntos  $I \times J$ , onde  $I$  e  $J$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}$ , são abertos em  $\mathbb{R}^2$ . Um conjunto  $I \times J$  é um retângulo aberto.

**Definição 2.1.14.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $q: X \rightarrow Y$  é dita **aplicação quociente** se  $U \subset Y$  é aberto em  $Y$  se, e somente se,  $q^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .

**Definição 2.1.15.** Seja  $X$  um espaço topológico,  $A$  um conjunto e  $q: X \rightarrow A$  uma aplicação sobrejetiva. Então existe exatamente uma topologia  $\mathcal{T}$  em  $A$  tal que  $q$  é uma aplicação quociente,  $\mathcal{T}$  é denominada **topologia quociente**.

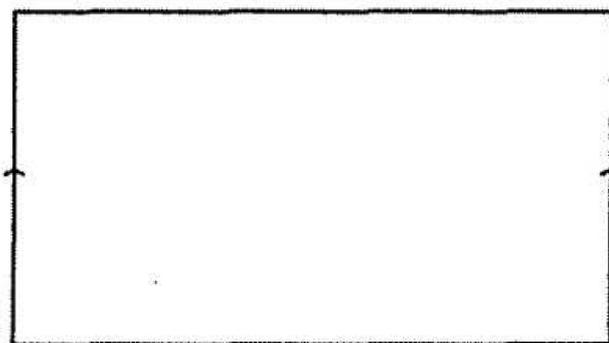
**Exemplo 2.1.16.** ((10), p. 51) Um exemplo da construção é a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dos números reais para  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Note que  $f(t) \in \mathbb{S}^1$ , visto que  $\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t) = 1$ .

**Exemplo 2.1.17.** ((10), p.52) A Figura 2.3 ilustra colocando as duas bordas opostas de um retângulo. Para este do retângulo para o cilindro, em que é fácil identificar podemos descrever da seguinte forma: os pontos do interior do retângulo são deixados "sozinhos" e os pontos da borda da borda direita.

Figura 2.3 - Construção de um cilindro a partir de um retângulo.



Fonte: Retirada de (10), p.

Para realizar tal colagem é necessário seguir alguns princípios:

- Nenhum ponto  $x$  pode descolar-se de si mesmo.
- Se  $x$  é colado em  $y$ , então  $y$  é colado em  $x$ .
- Se  $x$  é colado em  $y$  e  $y$  é colado em  $z$ , então  $x$  é colado em  $z$ .

É evidente que a colagem realizada é uma relação de equivalência.

colados a nenhum outro ponto do quadrado, e ainda, para  
Assim,

$$[(x, y)] = \begin{cases} \{(x, y)\}, & \text{se } x \neq 0 \\ \{(0, y) \sim (1, y)\}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Com isso, concluímos que se  $X$  é um espaço topológico e  $\sim$  uma identificação obtido através de  $X$ , então existe uma função

$$f(x) = [x].$$

O conjunto  $X/\sim$  com a topologia quociente induzida pela identificação  $\sim$  em  $X/\sim$  e é um caso particular da Definição 2.1.18. Para  $[x] \in X/\sim$  é definida como um conjunto tal que a imagem das vizinhanças de todos os pontos  $y$  com  $y \sim x$ .

**Exemplo 2.1.19.** ((10), p.54) A Figura 2.4 ilustra o quociente do quadrado unitário a topologia padrão herdada de um espaço euclidiano. As vizinhanças são discos intersectados com o quadrado.

1. Discos no interior do quadrado (onde não há nenhuma identificação).
2. Meios discos (abertos na topologia relativa) sobre as bordas inferior, como o ponto  $z$ .
3. Como os pontos  $(0, y)$  e  $(1, y)$  são identificados no quadrado, uma vizinhança de  $[(0, y)] = [(1, y)]$  são discos (abertos na topologia relativa do quadrado) centrados em  $(0, y)$  e  $(1, y)$ .

**Definição 2.1.21.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua. Se  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também for contínua, então  $f$  é dita um **homeomorfismo**.

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

são ambas contínuas, então  $f$  é dita um **homeomorfismo**.

**Definição 2.1.22.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e injetiva. Tome  $Z$  o conjunto imagem de  $f(X)$ , onde  $f(X)$  é considerado um subespaço de  $Y$ . Então a função  $g : X \rightarrow Z$  é bijetiva. Se  $g^{-1} : Z \rightarrow X$  também for contínua, dizemos que a aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é um **mergulho topológico** de  $X$  em  $Y$ .

**Definição 2.1.23.** Seja  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$  uma coleção de subconjuntos abertos de  $X$  tal que  $X = \cup A_i$ , a coleção  $\mathcal{A}$  é denominada **cobertura** de  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é **aberta** de  $X$  se cada  $A_i$  for aberto em  $X$ .

**Definição 2.1.24.** Um espaço  $X$  é dito **compacto** se toda cobertura aberta de  $X$  possui uma subcoleção finita que também cobre  $X$ .

**Exemplo 2.1.25.** Se  $X$  é um espaço topológico com número finito de pontos, então  $X$  é trivialmente compacto, pois qualquer cobertura por abertos possui uma subcoleção finita que cobre  $X$ .

**Teorema 2.1.26.** (Haine-Borel, (10)) Um conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é compacto se e somente se é fechado e limitado.

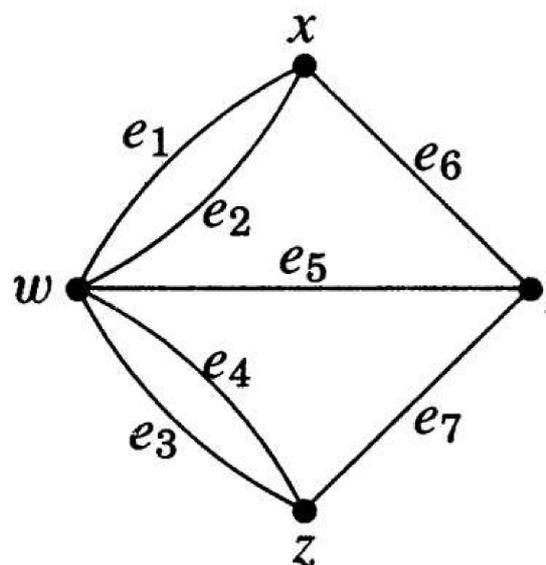
*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [1].

**Teorema 2.1.27.** (Teorema Principal da Compacidade)

Geometricamente, um grafo conexo  $G$  (ou  $G(V, E)$ ) é um conjunto de vértices  $V = V(G)$  e curvas que representam as arestas  $E = E(G)$ . Um grafo é finito se o seu conjunto de vértices e arestas for finito. Todo grafo mencionado é finito.

**Exemplo 2.2.2.** A Figura 2.5 é um exemplo de grafo: os vértices são  $x, y, z, w$  e as arestas são  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ . Nele,  $w$  e  $z$  são extremos das arestas  $e_1$  e  $e_2$ ,  $w$  e  $z$  são extremos das arestas  $e_3$  e  $e_4$ , os vértices  $x$  e  $y$  são extremos da aresta  $e_5$  e, por fim,  $x$  e  $y$  são extremos das arestas  $e_6$  e  $e_7$ .

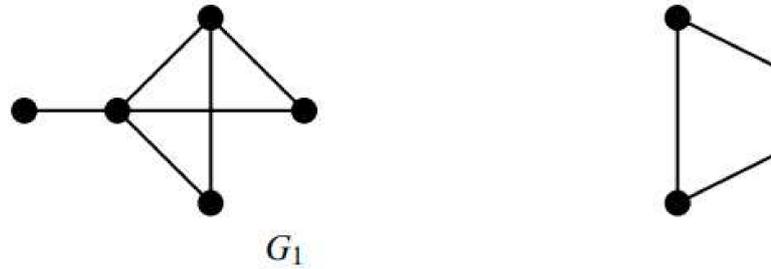
Figura 2.5 - Exemplo de um grafo



Fonte: Retirada de (22), p.

**Observação 2.2.3.** Tem-se que a aresta que une os vértices  $v$  e  $w$  é denotada por  $vw$  (ou  $wv$ ). No caso do Exemplo 2.2.2, o grafo conexo consiste em  $e_1 = wx$ ,  $e_2 = wx$ ,  $e_3 = wz$ ,  $e_4 = wz$ ,  $e_5 = wy$ ,  $e_6 = xy$  e  $e_7 = zy$ .

Figura 2.6 - O grafo conexo  $G_1$  e o graf



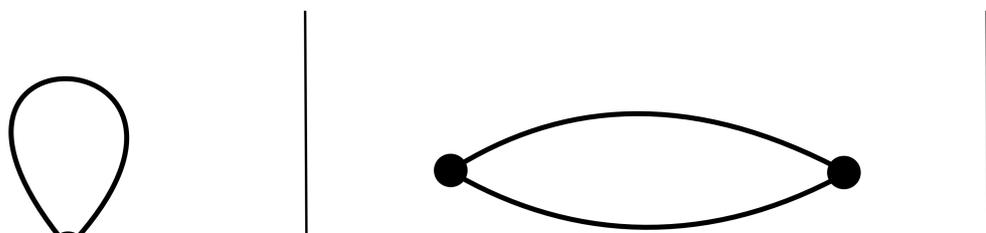
Fonte: Retirada de (21), p.

vértice. A Definição 2.2.5 apresenta o conceito para cas que é um grafo orientado.

**Definição 2.2.5.** Seja  $G$  um grafo, onde  $v, w \in V(G)$  e

1. Se  $a = vv$ , então essa aresta será chamada de **laço**.
2. Se  $a = vw = b$ , então  $a$  e  $b$  são ditas **arestas múltiplas**.
3. Se  $a = vw \neq wv = b$  então as arestas  $a$  e  $b$  são ditas **arestas orientadas**, isto é, se a aresta é formada por um par ordenado.
4. Se  $G$  possuir todas as arestas orientadas, então  $G$  é chamado de **grafo orientado**, ou **dirigido**).

Figura 2.7 - (a) Laço; (b) arestas paralelas; (c) e



**Definição 2.2.9.** Um **ciclo** em um grafo é um caminho que  $v_1 = v_{n+1}$ .

**Definição 2.2.10.** Um grafo que não possui ciclos é deno-

**Observação 2.2.11.** A Figura 2.8 exibe grafos tipo árvore

Figura 2.8 - Grafo árvore



Fonte: Retirada de (21), p.

**Definição 2.2.12.** ((15), p. 2) O número de **ciclos** é o número mínimo de arestas que podem ser retiradas de  $G$  para deixar um grafo sem ciclos. Este número é o primeiro número de Betti e se

**Proposição 2.2.13.** (Primeiro número de Betti, (17)) O primeiro número de Betti de um grafo  $G(V, A)$  é dado por:

$$\beta(G) = S - V + A$$

onde  $S$  é o número de componentes conexas do grafo  $G$ .

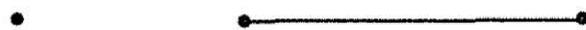
**Observação 2.2.14.** Como neste trabalho serão tratados grafos conexos, o primeiro número de Betti será dado por:

$$\beta(G) = 1 - V + A$$

3. Uma célula 2-dimensional (bidimensional) é um po
4. Uma célula 3-dimensional (tridimensional) é um  
arestas e vértices como faces. A Figura 2.9 ilustra c

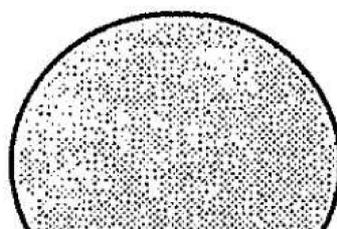
**Observação 2.3.3.** Pela Definição 2.3.1, tem-se que a  
são células de dimensão inferior. Isto é, uma 1-célula c  
extremidades, em que tais pontos são 0-células. A frontei  
é formado pelas arestas (1-célula) e vértices (0-células). D  
3-célula composto por 2-células, 1-células e 0-células. C  
2.10 não é uma célula, visto que sua fronteira não é pa  
de células cuja a dimensão é menor. Já o círculo à direit  
uma reunião finita de 1-células e 0-células.

Figura 2.9 - Exemplo de uma 0-célula, 1-cé



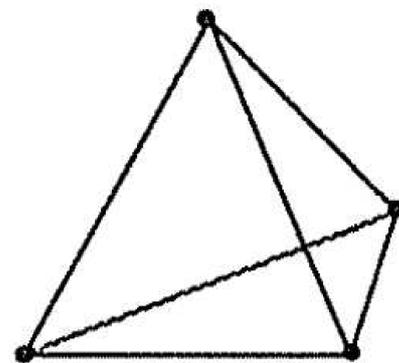
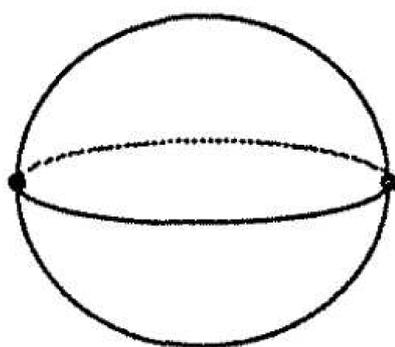
Fonte: Retirada de (10), p.

Figura 2.10 - O círculo à direita é uma  $n$ -célula, enquan



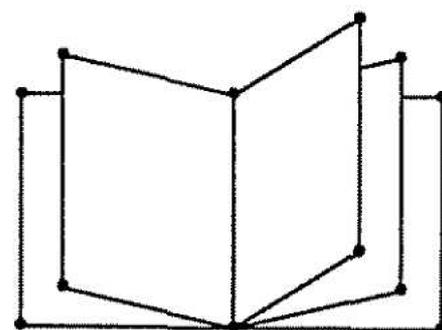
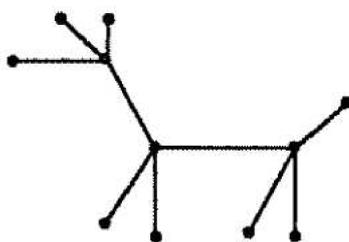
A dimensão de um complexo  $K$  coincide com a dimensão da maior célula contida nele, ver Figuras 2.11 e 2.12.

Figura 2.11 - Exemplo de distintos complexos



Fonte: Retirada de (10), p.

Figura 2.12 - Exemplos de complexos



Fonte: Retirada de (10), p.

Embora seja óbvio, vale destacar que casos como este podem ocorrer, devido ao item 2 da Definição 2.3.4. Por exemplo, um conjunto de pontos pode definir um complexo simplicial apenas um conjunto de pontos, dado que a distribuição das células de variadas dimensões. Em cada um dos casos d

Seja  $S$  um conjunto finito qualquer e considere  $\#$

**Definição 2.3.6.** (Característica de Euler, (10), p. 97)  
A característica de Euler de  $K$ , denotada por  $\mathcal{X}(K)$ , é dado pela

$$\mathcal{X}(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-células}) - \#(3\text{-células}) + \dots$$

Para um 2-complexo, sejam  $F = \#\{\text{faces}\}$ ,  $A = \#\{\text{arestas}\}$  e  $V = \#\{\text{vértices}\}$ . A característica de Euler pode ser escrita como

$$\mathcal{X}(K) = V - A + F$$

**Observação 2.3.7.** Note que os grafos definidos na seção anterior, na forma, a Definição 2.3.8 exibe a característica de Euler de

**Definição 2.3.8.** Seja  $G$  um grafo composto por  $V$  vértices e  $A$  arestas. A característica de  $G$  é dado por:

$$\mathcal{X}(G) = V - A$$

## 2.4 SUPERFÍCIES

Nesta seção será apresentado o conceito de uma superfície, com referências utilizadas *Kinsey* (10), *Massey* (13), *Ellis-Monghan e M*

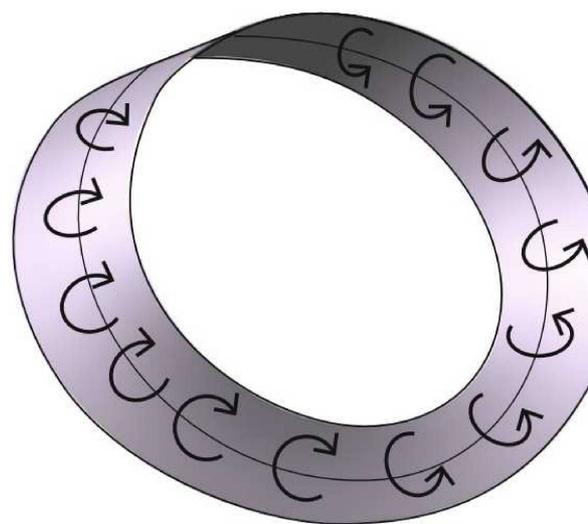
**Definição 2.4.1.** ( $n$ -variedade, (10)) Uma variedade  $n$ -dimensional é um espaço de Hausdorff tal que cada ponto  $x$  possui uma vizinhança topologicamente equivalente a um disco aberto  $n$ -dimensional.

$$D^n(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|x - u\| < r\}.$$

**Definição 2.4.4.** (Orientação, (4)) Uma superfície é orientável se um caminho fechado preserva a orientação, e é **não orientável** se um caminho fechado invertendo o caminho fechado na sua superfície.

**Exemplo 2.4.5.** O toro e a esfera são exemplos de superfícies orientáveis. A Faixa de Möbius é uma superfície **não orientável** (ver (4)).

Figura 2.14 - Superfície não orientável



Fonte: Retirada de (4), p.

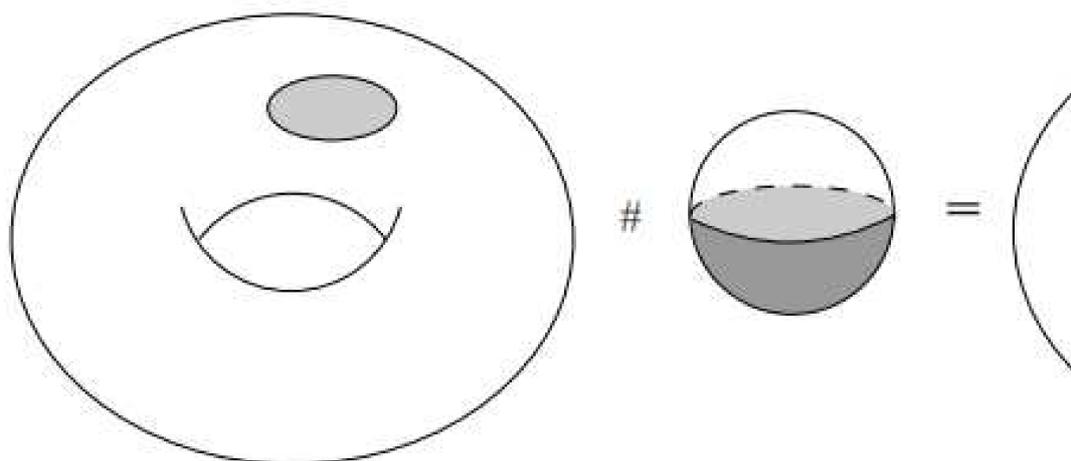
**Definição 2.4.6.** ((10), p. 68) Uma superfície fechada é orientável se não contém uma faixa de Möbius.

**Definição 2.4.7.** (Soma conexa, (10), p.69) Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies e  $D_1$  e  $D_2$  dois discos em cada uma das superfícies e cole os bordos formando uma nova superfície chamada **soma conexa** de  $S_1$  e  $S_2$ , denotada por  $S_1 \cup S_2$ .

**Exemplo 2.4.8.** (Soma conexa entre dois toros) Sejam  $T_1$  e  $T_2$  dois toros e  $D_1$  e  $D_2$  dois discos em cada um dos toros. A Figura 2.15 ilustra a soma conexa entre  $T_1$  e  $T_2$ . Em cada um dos toros, um disco é removido e os bordos são colados.

**Exemplo 2.4.9.** (Soma conexa entre uma superfície e qualquer  $n$ -variedade, então a soma conexa  $M \# \mathbb{S}^n$  é hom...  
 Seja  $B_2 \subseteq \mathbb{S}^n$  o hemisfério inferior aberto, então  $(\mathbb{S}^n)' =$   
 fechado, que é homeomórfico a uma bola fechada. Então  
 bola aberta  $B_1$  e colando de volta uma bola fechada ao lo  
 não alteramos nada.

Figura 2.16 - Soma conexa com u



Fonte: Retirada de (11), p. 1

**Proposição 2.4.10.** ((10), p. 107) *Seja  $S$  uma superfície compacta formada pela soma conexa de duas superfícies compactas  $S_1$  e  $S_2$ . A característica de Euler de  $S$  é dada por*

$$\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

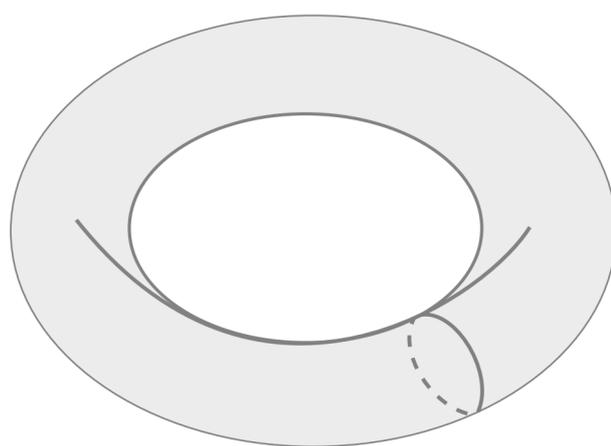
O Teorema de Classificação enuncia que toda superfície compacta é homeomorfa a uma soma conexa de  $n$  toros ou  $m$  planos projetivos, sua descrição está em (17) página 469

Assim, através do gênero e da orientabilidade, classificação completa de superfícies fechadas:

**Teorema 2.4.14.** ((4), p. 4) *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies compactas e orientáveis.  $S_1$  e  $S_2$  são homeomórficas se, e somente se, ambas são simplesmente conexas e, tem o mesmo gênero.*

**Exemplo 2.4.15.** As duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  possuem gênero 1. Pelo Teorema 2.4.14 são homeomórficas.

Figura 2.17 - Superfícies Homeomórficas



$S_1$



Fonte: Elaborado pela autora (

### 3 EMPARELHAMENTO DE ARESTAS

Neste capítulo abordaremos o conceito de emparelhamento de arestas regulares, baseado na topologia quociente (17). Os conceitos são baseados no trabalho de *Mendes e Romero* em (16).

#### 3.1 EMPARELHAMENTO DE ARESTAS DE POLÍGONO

Nesta seção será abordada a construção de uma superfície a partir da identificação (em pares) das arestas de um polígono regular. Esta identificação é realizada por uma aplicação quociente.

**Definição 3.1.1.** Seja  $M_g$  uma superfície fechada com gênero  $g$  e um polígono  $\mathcal{P}_n$  com  $n$  lados. Um **emparelhamento de arestas** sobre  $\mathcal{P}_n$  é uma aplicação  $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ , que

- (i) leva pares de arestas  $(a_i, a_j)$  do bordo de  $\mathcal{P}_n$ , em pares de arestas da superfície  $M_g$ ;
- (ii) leva  $v$  vértices do bordo de  $\mathcal{P}_n$  sobre um ponto  $v_j$  da superfície  $M_g$ .

**Exemplo 3.1.2.** A Figura 3.1 apresenta a superfície fechada  $\mathbb{T}^2$  com um emparelhamento, nela é mostrado a identificação  $\sim$  do intervalo  $I = [0, 1]$  tal que  $X = I \times I$  e seja  $R$  a relação  $(x, 0) \sim (x, 1), \forall x \in I$  e  $(0, y) \sim (1, y), \forall y \in I$ . O resultado  $X/R$  é homeomorfo ao toro, denotado por  $\mathbb{T}^2$ .

(a) Esfera ( $\mathbb{S}^2$ ), onde  $R$  é dado por

$$(0, y) \sim (1 - x, 1) \text{ e } (x, 0) \sim (1, 1 - y)$$

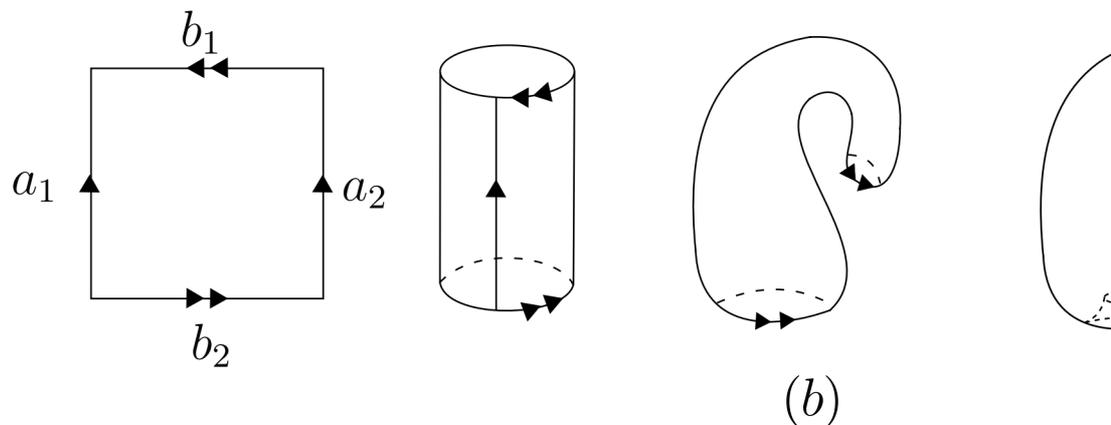
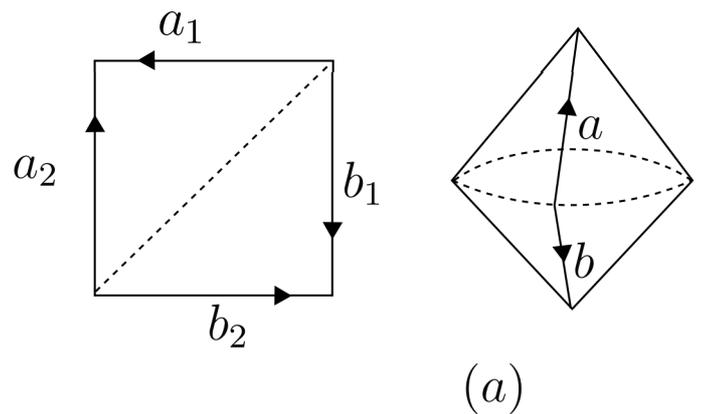
(b) Garrafa de Klein ( $\mathbb{K}^2$ ), no qual  $R$  é definido por

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1), \text{ e } (0, y) \sim (1, 1 - y)$$

(c) Plano projetivo ( $\mathbb{P}^2$ ), em que  $R$  é determinado por

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ e } (0, y) \sim (1, 1 - y)$$

Figura 3.2 - Emparelhamento da esfera (a), garrafa de



**Observação 3.1.4.** Uma representação simbólica é adotada onde os lados a serem identificados serão “coladas” no polígono utilizado. Os lados a serem identificados possuem os mesmos índices (no caso dos Exemplos 3.1.2 e 3.1.3, com os índices  $a$ ,  $b$  e  $c$ ), e as identificações devem ser executadas de maneira que os lados identificados tenham a mesma orientação. Em virtude disso, como trabalharemos apenas com superfícies orientadas, os lados a serem identificados devem possuir direções opostas.

**Exemplo 3.1.5.** A Figura 3.3 evidencia que uma mesma superfície pode ser gerada por diferentes polígonos. Através de um  $\mathcal{P}_6$ , ao identificar as arestas conforme indicado é possível gerar um toro. A relação entre este exemplo e o Exemplo 3.1.2

Figura 3.3 - Emparelhamento de arestas de

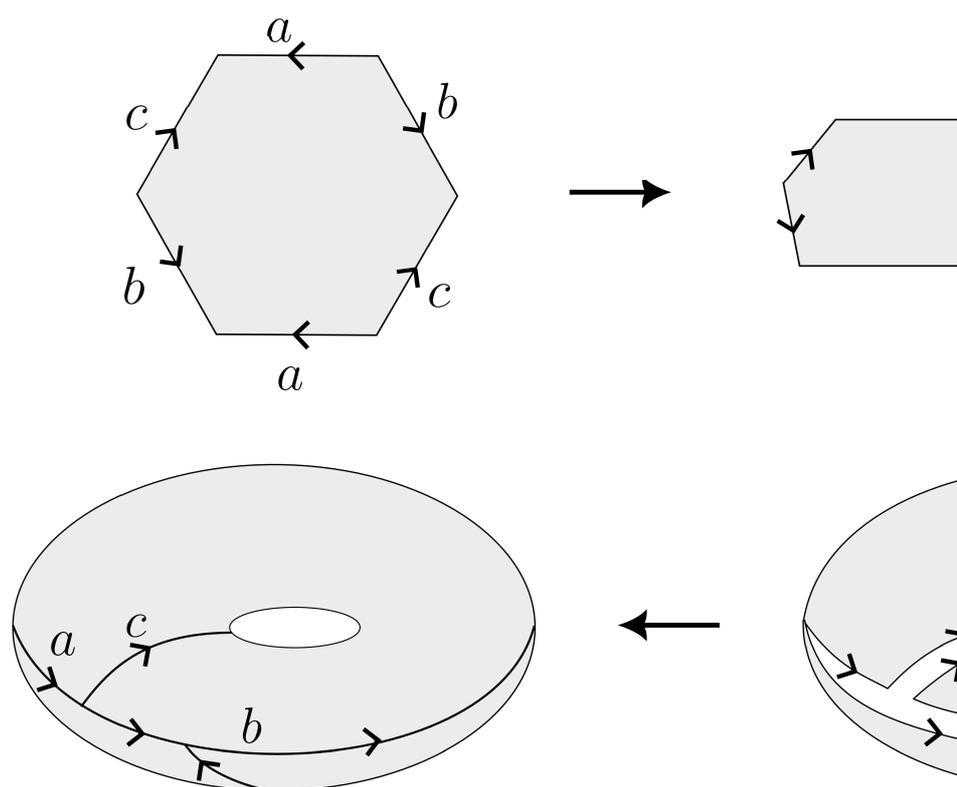
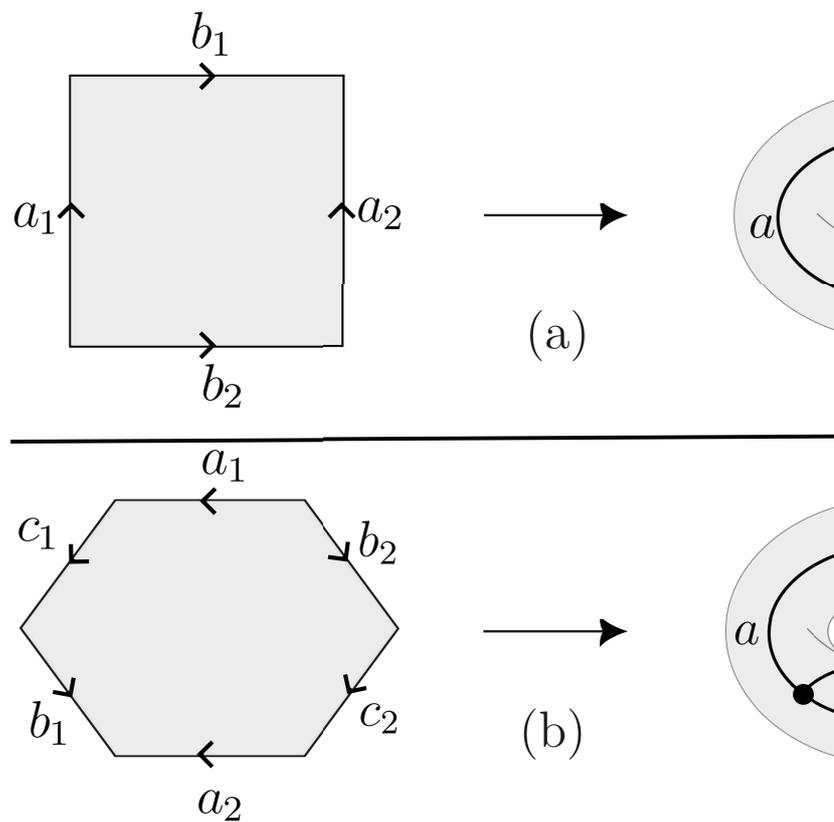


Figura 3.4 - Curvas formadas sobre a



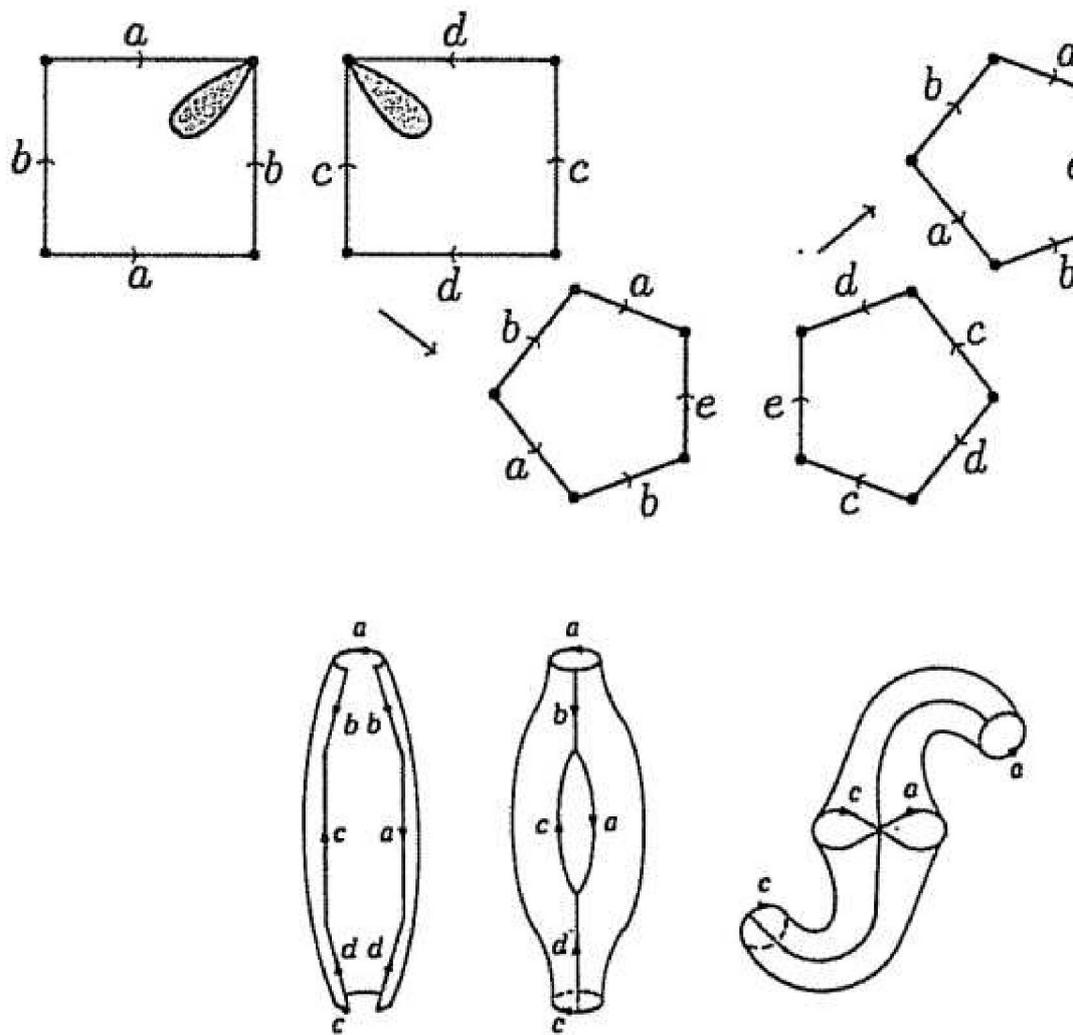
Fonte: Elaborado pela autora (

emparelhamento de polígonos para este caso. Neste tra polígonos com número par de lados.

Na Seção 2.4 do Capítulo 2 é definida a soma cone é dado como exemplo que a soma de dois toros resulta em o que ocorre ao polígono de emparelhamento  $\mathcal{P}_4$  do toro. Ao retirar os discos sobre as superfícies em que são ger polígono um laço sobre um dos vértices. Em seguida, e nova aresta  $e$  em cada um dos polígonos  $e$ , logo após, o arestas gerando um polígono com 8 lados. Com isso, aplicação quociente definida de  $\mathcal{P}_8$  em  $M_2$ . Do mesmo

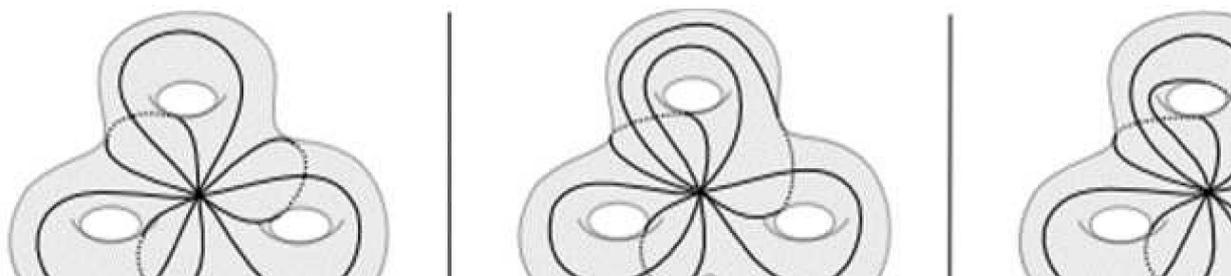
detalhado em (16), há outros. Tais emparelhamentos se

Figura 3.5 - Soma conexa do diagrama planar



Fonte: Retirada de (10), p.

Figura 3.6 - Emparelhamentos do tritoro



## 3.2 GRAFOS DE EMPARELHAMENTOS

No Capítulo 2 a teoria de grafos foi brevemente apresentada. Apresentamos os grafos de emparelhamento de arestas, que ocorrem sobre o bordo de alguma superfície  $M_g$ . A Definição 3.2.1 estabelece que, para uma determinada superfície

**Definição 3.2.1.** Seja  $G$  um grafo conexo e  $l : G \rightarrow M_g$  uma aplicação contínua cuja imagem é  $l(G)$ . Dizemos que  $\mathcal{G}$  é um **grafo de emparelhamento** se o complemento  $M_g \setminus \mathcal{G}$  é uma região simplesmente conexa.

O grafo de emparelhamento  $\mathcal{G}$  sobre a superfície  $M_g$  pode ser descrito como o bordo de um polígono regular  $\mathcal{P}_n$  mapeado por uma aplicação contínua.

**Definição 3.2.2.** Seja  $\mathcal{G}$  um grafo sobre a superfície  $M_g$ . Dizemos que o grafo  $\mathcal{G}$  é dito **grafo de emparelhamento de arestas** se existe uma aplicação quociente  $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow M_g$ , onde  $\mathcal{G}$  é a imagem do bordo de  $\mathcal{P}_n$ .

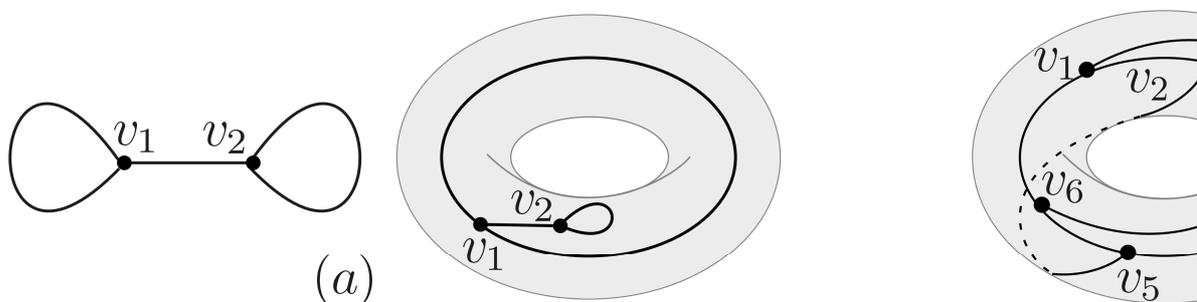
Segue da definição acima que as arestas e vértices são gerados na seção anterior como o conjunto dos arcos de curvas  $v_j$  ( $j = 1, \dots, V$ ) gerados sobre a superfície, correspondendo as arestas e aos vértices do grafo  $\mathcal{G}$ , com  $A$  arestas e  $V$  vértices.

A Definição 3.2.2 especifica como verificar se um grafo sobre algum polígono, enquanto a Definição 3.2.1 estabelece como verificar quando um grafo qualquer é de emparelhamento.

**Exemplo 3.2.3.** A Figura 3.7 (b) ilustra um grafo  $\mathcal{G}$  sobre a superfície  $M_g$ .

**Exemplo 3.2.4.** Os grafos da Figura 3.8 mergulhados em uma superfície de gênero 1, pois cada um deles é composto por mais de um ciclo. Em (a) o grafo mergulhado divide  $M_1$  em duas regiões: uma interna e uma externa. Já em (b),  $M_1$  foi dividido em três faces simplesmente conexas.

Figura 3.8 - Mergulho de um grafo que não é de emparelhamento

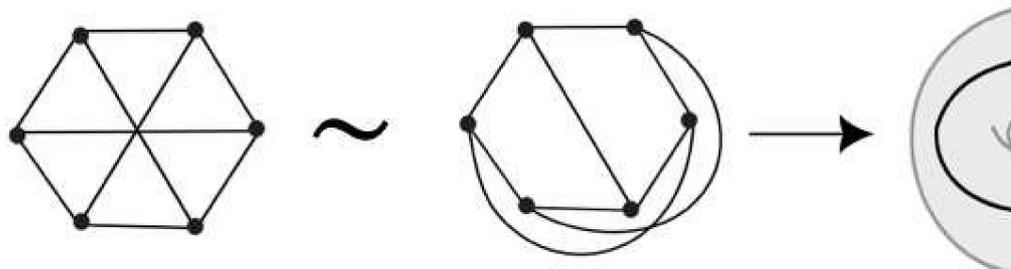


Fonte: Adaptado de (16).

**Exemplo 3.2.5.** A forma com o qual o grafo é mergulhado depende se o grafo é ou não de emparelhamento. A Figura 3.9 exibe (algumas das) maneiras (necessariamente únicas) de se mergulhar sobre o toro um grafo com um vértice e duas arestas. Note que em (a) o grafo não é de emparelhamento e seu complemento são duas regiões simplesmente conexas. Isso ocorre em (b) e (c), em ambos os casos o complemento do grafo é simplesmente conexa e a outra não. Isso significa que não é possível mergulhar que leva o bordo de um polígono regular sobre a superfície de gênero 1 nessas situações. Por outro lado, o grafo é de emparelhamento se o grafo é de emparelhamento se em (d), visto antes no Exemplo 3.1.2.

Figura 3.9 - Mergulho de um grafo sobre o toro

Figura 3.10 - Grafo mergulhado sobre



Fonte: Adaptado de (16).

**Exemplo 3.2.7.** A Figura 3.11 ilustra seis exemplos de sobre o bitoro e três sobre o tritoro. Analisando o com que todos são constituídos por uma região simplesmente número de arestas de um polígono de emparelhamento é o polígono utilizado para os emparelhamentos foram: Enquanto para o tritoro, em (d), (e) e (f) foi emparelha

Figura 3.11 - Exemplos de grafos de em

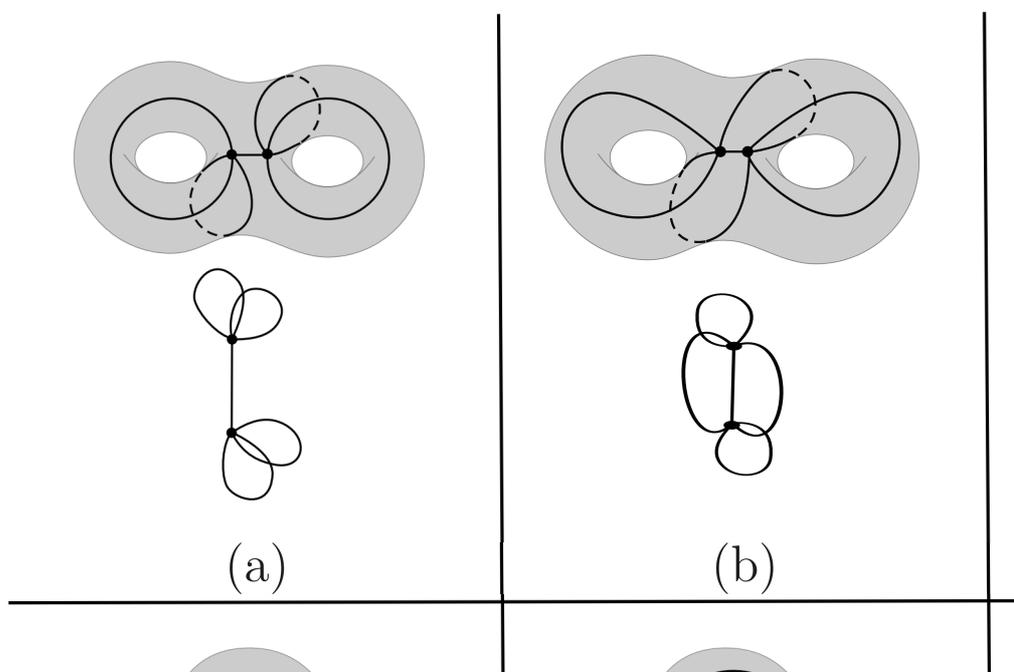
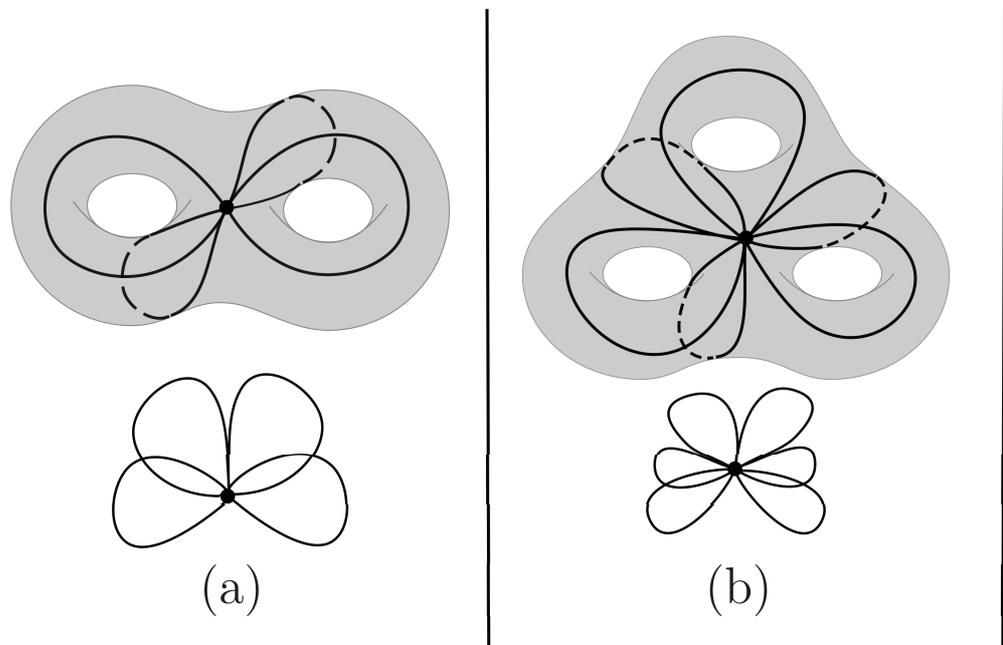


Figura 3.12 - Exemplos de grafos de emparelhamento



Fonte: Adaptado de (16).

**Observação 3.2.9.** O grau do vértice de um grafo de emparelhamento é sempre par ou igual a 3. Isso se dá pelo fato de que um grafo de grau ímpar não é suficiente para obter o seu complemento como região simplesmente conexa. Como exemplo, o círculo decompõe a esfera em uma esfera e um cilindro, onde ambos não são regiões simplesmente conexas.

**Proposição 3.2.10.** *Seja  $\mathcal{G}(V, A)$  um grafo de emparelhamento em uma superfície de gênero  $g$ . Então,  $V - A = 1 - 2g$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\mathcal{G}$  é um grafo de emparelhamento e o complemento de  $M_g \setminus \mathcal{G}$  é uma região simplesmente conexa. De acordo com os lemas 2.3.6 e 2.4.13 temos a seguinte igualdade

ponto de  $M$ . Este aspecto é garantido pelo Corolário 3.2.11, onde  $n = 4g$ .

**Corolário 3.2.12.** *O grafo de emparelhamento  $\mathcal{G}$  é uma árvore.*

*Demonstração.* Primeiramente, queremos mostrar que se  $\mathcal{G}$  é uma árvore, então a superfície  $M_g$  é homeomorfa a esfera. Uma árvore significa que não admite ciclos, então pela Definição 3.2.9,

$$\beta(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G}) = 0 \Rightarrow \chi(\mathcal{G}) = 1$$

Pela Proposição 3.2.10, obtemos:

$$V - A = 1 - 2g \Rightarrow \chi(\mathcal{G}) = 1 - 2g \Rightarrow 2g = 0$$

Logo,  $M_g = \mathbb{S}^2$ .

Agora, queremos mostrar que se  $M_g = \mathbb{S}^2$ , então  $\mathcal{G}$  é uma árvore. Como  $M_g$  é homeomorfo a esfera, então não há buracos, isto é,  $g = 0$ .

$$V - A = 1 - 2g \Rightarrow V - A = 1$$

Assim,

$$\beta(\mathcal{G}) = 1 - V - A = 0.$$

Portanto,  $\mathcal{G}$  é uma árvore.

**Proposição 3.2.13.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grafo de emparelhamento de uma superfície  $M_g$ . Se o grafo  $\mathcal{G}$  possui vértices  $V_i$  com grau  $K_i$ , então*

$$2A = \sum_{i=1}^r K_i \cdot V_i \quad e \quad \sum_{i=1}^r (K_i - 2)V_i = 4g$$

A Proposição 3.2.13, posteriormente, se torna um teste para verificar se um grafo  $k$ -regular é de emparelhamento, em

**Proposição 3.2.14.** *Se  $M_g \setminus \mathcal{G}$  tem  $F$  regiões simplesmente conexas (sem buracos ou disco), então  $\chi(G) = 2 - 2g - F$ .*

*Demonstração.* A característica de Euler da superfície  $M_g$  é dada por

$$\chi(M_g) = V - A + F = \chi(G) + F$$

quando tem todas as regiões  $F$  de  $M_g \setminus G$  simplesmente conexas. Portanto, a característica de Euler também é dada por

$$\chi(M_g) = 2 - 2g$$

Portanto, pelas duas igualdades, concluímos que  $\chi(G) = 2 - 2g - F$ .

Um caso especial dos grafos de emparelhamento são os grafos de emparelhamento regulares. Eles possuem importantes propriedades. A Figura 3.11 (a), (b) e (c) mostram grafos de emparelhamentos  $k$ -regulares sobre o bitoro, no qual  $k=5$ , enquanto em (c) o valor para  $k$  é 4. Já nos itens (d) e (e) são mostrados grafos de emparelhamentos 7-regulares sobre o tritoro. Em [16] são discutidas algumas propriedades importantes sobre tais grafos e que são também discutidas no Capítulo 4.

**Definição 3.2.15.** Um polígono regular  $\mathcal{P}$  será dito um  $k$ -regular se existir um par  $(M_g, \mathcal{G})$ , onde  $\mathcal{G}$  é um grafo de emparelhamento sobre uma superfície  $M_g$ .

**Proposição 3.2.16.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grafo de emparelhamento regular sobre uma superfície  $M_g$ . Então, o número de regiões simplesmente conexas de  $M_g \setminus \mathcal{G}$  é dado por*

$g$	$V$	$A$	$k$	$n$
1	1	2	4	4
	2	3	3	6
2	1	4	8	8
	2	5	5	10
	3	6	4	12
	6	9	3	18
3	1	6	12	12
	2	7	7	14
	5	10	4	20
	10	15	3	30

Tabela 1 – Tabela com valores de  $g$ ,

*Demonstração.* Tem-se que  $\mathcal{G}$  é um grafo de emparelhamento

(i) como  $n = 2A$ , pela Proposição 3.2.16, segue que

$$n = \frac{k(4g - 2)}{k - 2};$$

(ii) ainda,  $2A = k \cdot V$ , substituindo  $V$ , obtido na Prop

$$2A = k \cdot \frac{2(2g - 1)}{k - 2}$$

$$4g = \frac{2A(k - 2)}{k} + 2$$

$$g = \frac{1}{2k} [(k - 2)A +$$

Para  $k \geq 3$ , temos

$$2A \geq 3V \Rightarrow A \geq \frac{3}{2}V$$

Como  $A$  é um número natural, concluímos que  $A \geq 2$ .

### 3.3 DIAGRAMAS DE EMPARELHAMENTOS

Na Seção 3.1, no emparelhamento de arestas de  $\mathcal{P}$ , as arestas  $a_i$  e  $a_j$  são identificadas. Para indicar as arestas emparelhadas, usamos o símbolo  $\{a_i, a_j\}$ .

**Definição 3.3.1.** (Diagrama de emparelhamento, (14)) Um diagrama de emparelhamento de arestas do polígono regular  $\mathcal{P}$ . Um conjunto  $\mathcal{G}$  de arestas associado a  $\mathcal{G}(V, A)$  (ou a  $\mathcal{G}$ ) é o conjunto de segmentos de reta que conecta um par de arestas no bordo de  $\mathcal{P}$ . A aplicação quociente  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow M_g$ .

**Exemplo 3.3.2.** A Figura 3.13 ilustra os quatro possíveis emparelhamentos de arestas de um octógono (7). O emparelhamento em (a) resulta no bitoro exibido na Figura 3.14. As arestas identificadas possuem direções opostas e estão conectadas por um segmento de reta.

Figura 3.13 - Quatro emparelhamentos distintos de arestas de um octógono

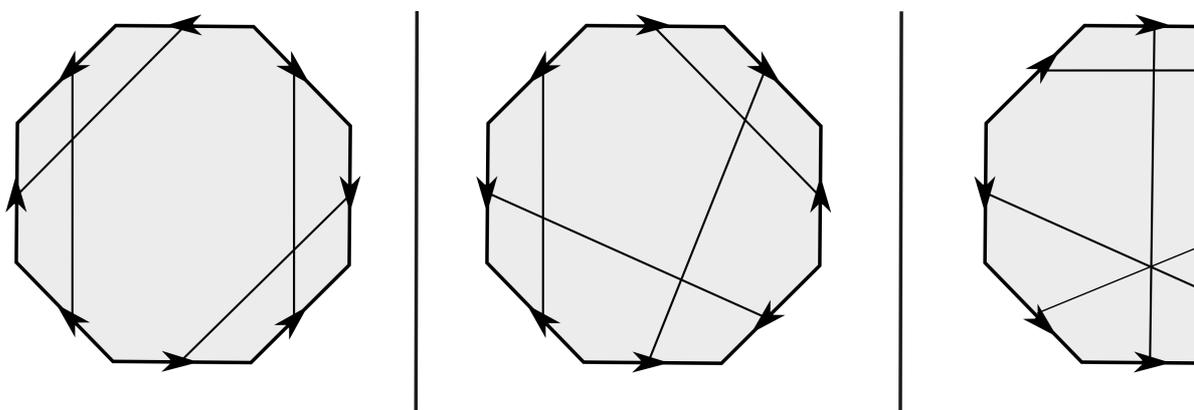
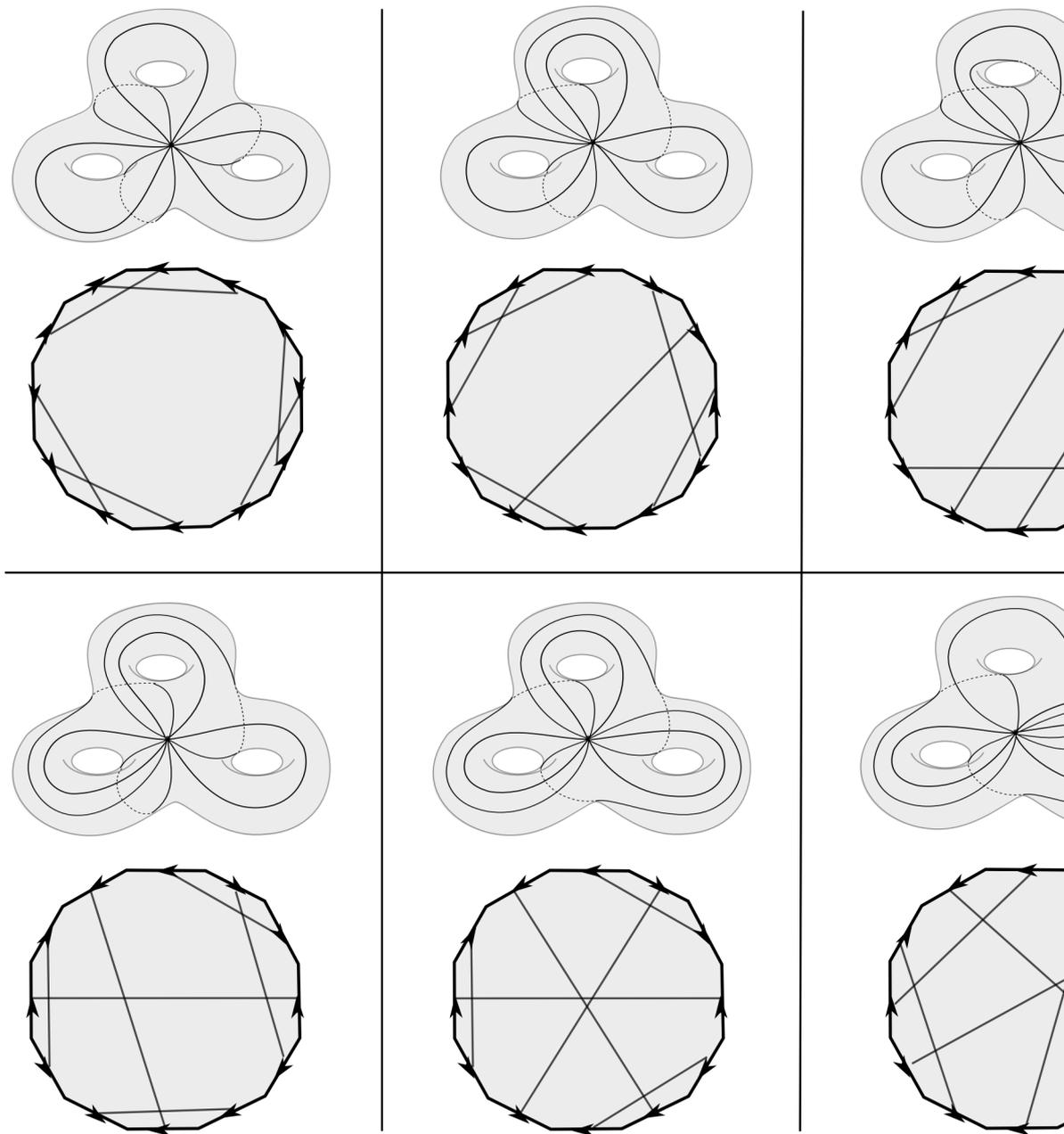


Figura 3.14 - Emparelhamentos do tritô



Fonte: Adaptado de (16), p.

Figura 3.15 - Maneiras equivalentes de se repr

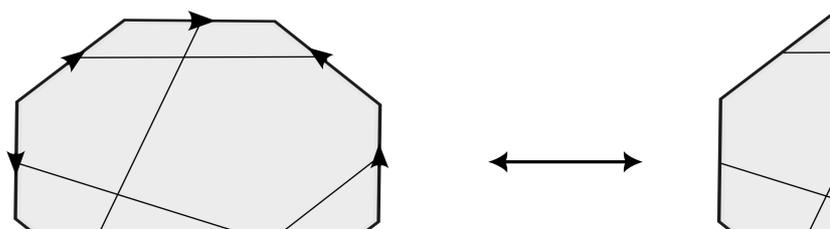
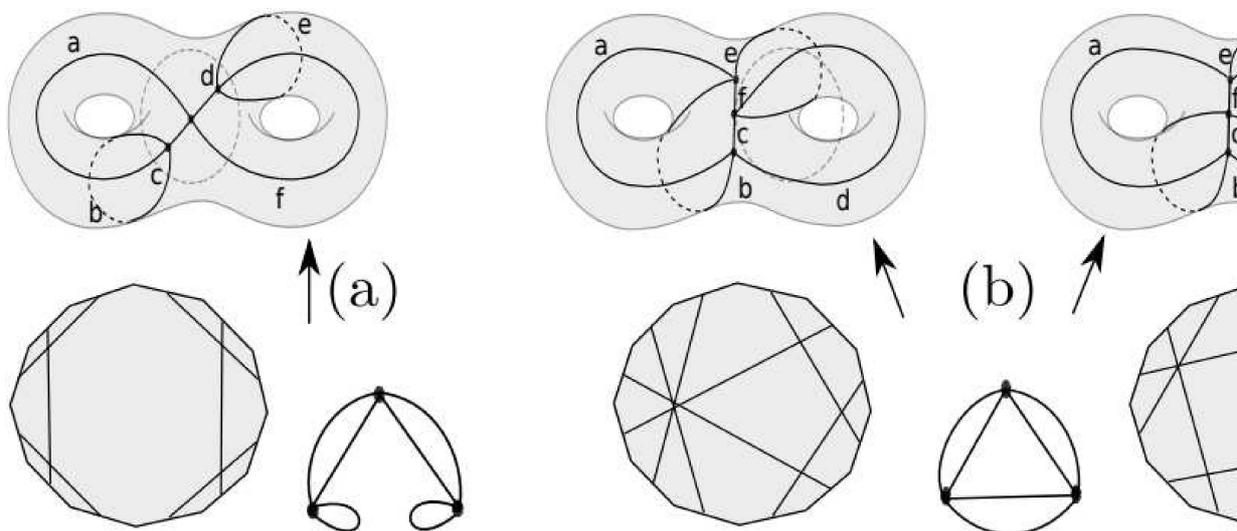
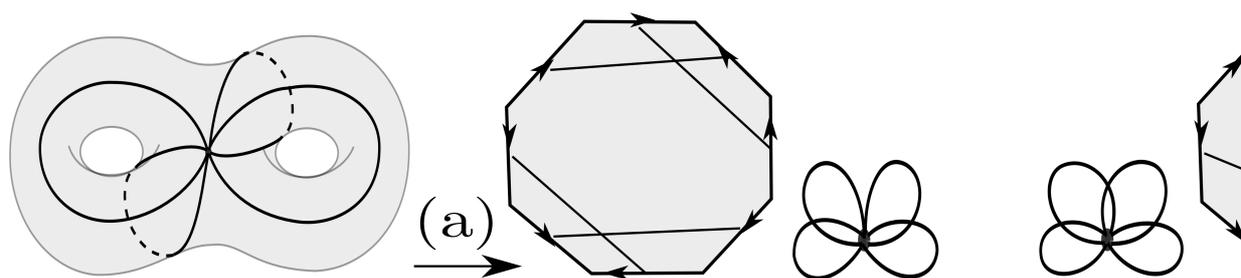


Figura 3.16 - Exemplos de diagramas de emparelho



Fonte: Retirado de (14), p.

Figura 3.17 - Dois diagramas não equivalentes ass

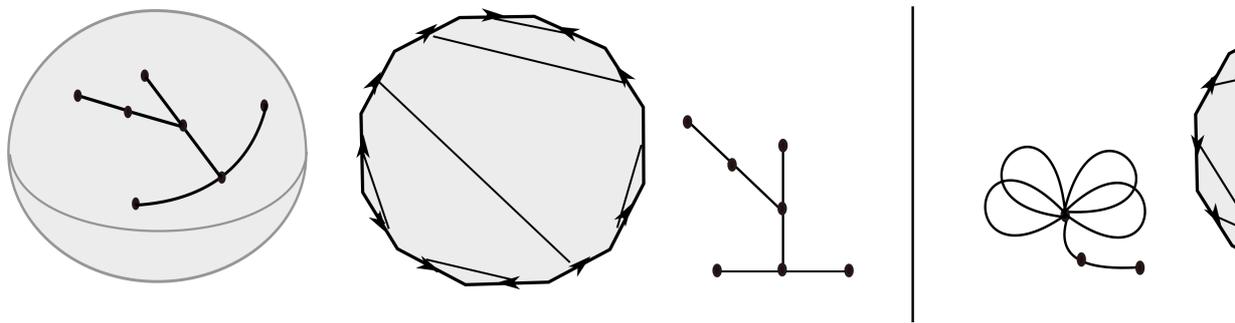


Fonte: Adaptado de (16), p.

**Proposição 3.3.7.** (16) *Todo polígono regular  $\mathcal{P}_n$ , com  $A > 1$ , é um polígono de emparelhamento para algum par  $(g, n)$ . Se  $\mathcal{G}$  tem  $A$  arestas e  $V = A + 1 - 2g$  vértices.*

no grafo uma espécie de galho de árvore, que está (ver à direita na Figura 3.18).

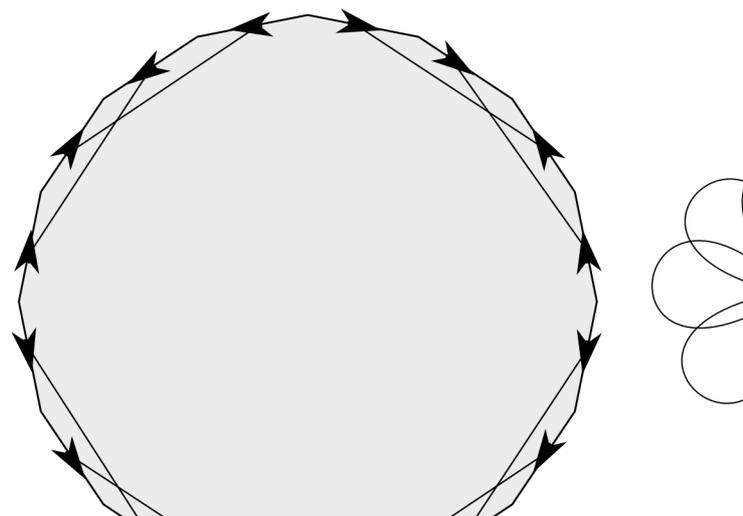
Figura 3.18 - Exemplo de como um polígono qualq



Fonte: Retirado de (16), p.

**Exemplo 3.3.8.** Pelo Corolário 3.2.11, para  $g = 4$ , o grafo sobre a superfície  $M_4$  é composto por 8 laços. A Figura 3.19 mostra o emparelhamento do polígono de 16 lados que resulta no

Figura 3.19 - Emparelhamento canônico



## 4 EXTENSÃO DE GRAFOS DE EMPARELHAMENTO

Em (16), os conceitos de extensão e contração de grafos. *Mendes e Romero* demonstraram que os grafos de emparelhamento podem ser obtidos por meio da extensão de grafos canônicos. Além disso, acrescentou, em (14), a troca de arestas de grafos sobre arestas, uma ferramenta que contribui na determinação de novos grafos de emparelhamento. Como em (14) e (16), neste capítulo serão apresentadas as propriedades de suas propriedades.

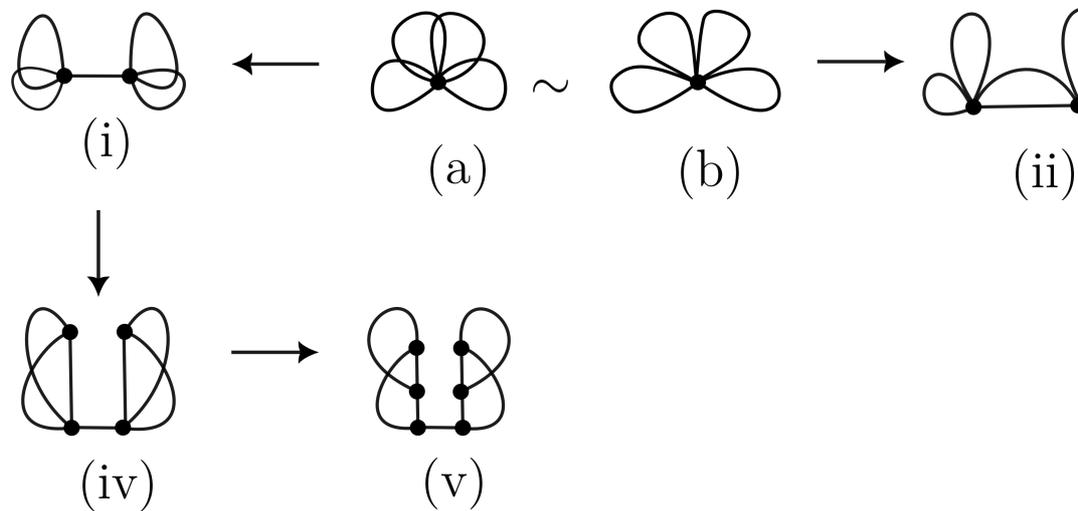
### 4.1 EXTENSÃO DE GRAFOS

Em termos gerais, uma extensão diz respeito à inclusão de um elemento em sua dimensão linear ou espacial numa direção. A Definição 4.1.1 apresenta uma maneira de obter um grafo de extensão. Quando isso acontece, dizemos que  $\mathcal{G}_1$  é uma extensão do grafo  $\mathcal{G}$ .

**Definição 4.1.1.** Uma aresta  $uv \in \mathcal{G}_1$  é dita uma extensão de um vértice  $w$  se um “alongamento” de  $w$  obtem-se os vértices  $u, v \in \mathcal{G}_1$  e  $w$  que que  $\mathcal{G}_1$  é uma **extensão** do grafo  $\mathcal{G}$  ou que  $\mathcal{G}$  é um subgrafo de  $\mathcal{G}_1$  (ver Figura 4.1).

**Exemplo 4.1.2.** A Figura 4.1 ilustra duas extensões de um vértice no grafo  $\mathcal{G}$  em (b), obtém-se a aresta  $c$  nos grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ .

Figura 4.2 - Extensões do grafo



Fonte: Reproduzido de (16), p. 1

Tem-se que a característica de Euler e o número de

$$\mathcal{X}(I_4) = 1 - 4 = -3.$$

$$\beta(I_4) = 1 - \mathcal{X}(I_4) = 1 + 3 = 4.$$

Note que o grafo (i), obtido pela extensão do grafo (a) é igual a:

$$\beta(i) = 1 - \mathcal{X}(G_1) = 1 - (2 - 5) = 4.$$

Analogamente, para o grafo (iii), tem-se:

$$\beta(iii) = 1 - (3 - 6) = 4.$$

Segue igualmente para os demais grafos decorrentes de extensão, a característica de Euler e o número de ciclos livres são p

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2.13 o número de ciclos livres é uma função dos vértices e arestas. Procedendo como na demonstração anterior,  $\beta(\mathcal{G}_1)$  é obtido através da extensão (ou contração) de  $\mathcal{G}$ .

$$\beta(\mathcal{G}_1) = 1 - V_1 + A_1 = 1 - (V + M) + (A + M)$$

Portanto, o número de ciclos livres não é alterado após a extensão ou contração do grafo.

**Corolário 4.1.7.** ((16), p. 4) *Todo grafo conexo com  $\beta$  ciclos livres contém um grafo  $I_\beta$ . Consequentemente, toda árvore pode ser obtida por contração de um grafo  $I_\beta$ .*

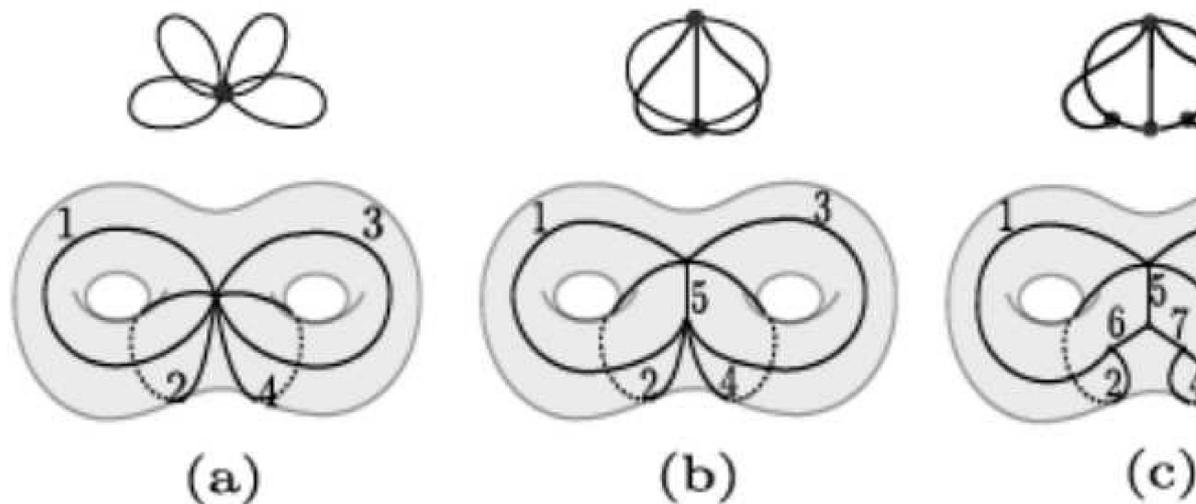
*Demonstração.* Seja  $\mathcal{G}$  um grafo conexo com  $\beta$  ciclos livres. Para quaisquer dois vértices em  $\mathcal{G}$  existe um caminho entre eles. Assim, dado um ciclo livre em  $\mathcal{G}$ , o caminho que os conecta em um único vértice. Pelo Corolário 4.1.7, o número de ciclos livres não é alterado. Portanto,  $\mathcal{G}$  pode ser contraído em um grafo  $I_\beta$ .

## 4.2 EXTENSÃO DE GRAFOS SOBRE $M_g$

Todas as extensões de grafos feitas na seção anterior foram sobre  $M_g$ . Em vista disso, é esperado se perguntar: as extensões ou contrações de um grafo de emparelhamento podem ser também um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ ? Desde que a extensão ou contração seja feita sobre a superfície  $M_g$ , o objetivo da presente seção, mostrar que: se  $\mathcal{G}$  é um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$  e  $\mathcal{G}_1$  um grafo obtido pela extensão ou contração de  $\mathcal{G}$ , então  $\mathcal{G}_1$  também é um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ .

**Definição 4.2.1.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ .*

Figura 4.3 - Grafos estendidos sobre



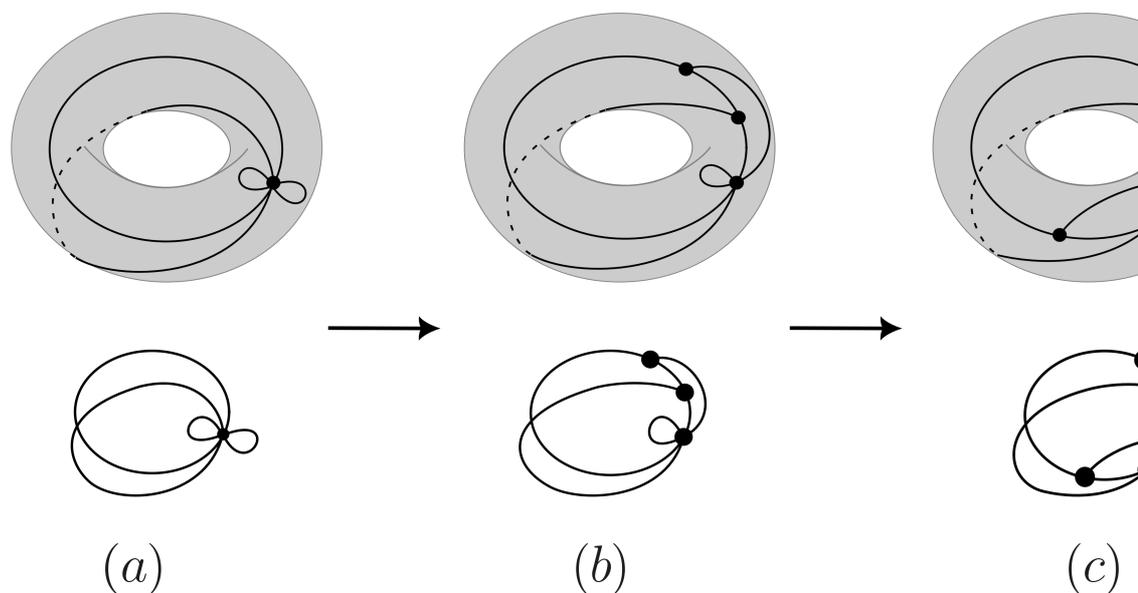
Fonte: Retirado de (19), p.

**Exemplo 4.2.4.** A Figura 4.4 ilustra um exemplo de superfície. Em (b), é dado o grafo  $I_2$  mergulhado sobre a superfície. Em (c), ocorre a extensão de  $I_2$  sobre  $M_1$ . Além disso, a figura mostra detalhes localmente próximos aos vértices, para assim, evidenciar a extensão do grafo mergulhado sobre a superfície na extensão de  $M_1$ . Como por 1 continua conectada a aresta 4, o mesmo ocorre com os vértices que foram estendidos no polígono são aqueles incidentes a aresta 4, gerando as novas arestas 5 e 6. O mesmo se dá na extensão de  $M_1$  e 2 permanecem conectadas, assim como 3 e 4. Dessa forma, os vértices que são incidentes pelas arestas 2 e 3, e, 1 e 4. Este grafo sobre a superfície mantém-se na condição de ser simplesmente

Figura 4.4 - Polígono após a ex

a Figura 4.5 evidencia a extensão do grafo  $I_4$ , cujo o complemento é simplesmente conexo, resultando em grafos que não são simplesmente conexos. O complemento de cada extensão também é composto por três componentes conexas. O grafo (d) da Figura 4.5 já foi discutido no Exemplo 4.2.5. O número de componentes conexas ao mergulhá-lo sobre o plano é três.

Figura 4.5 - Exemplos de extensões de grafos



Fonte: Reproduzido de (14), p. 10.

**Observação 4.2.6.** A razão pela qual um grafo permanece simplesmente conexo durante as extensões, consiste no fato de que o número de componentes conexas não é alterado no decorrer das extensões. A Figura 4.6 ilustra as extensões de  $I_4$  realizadas na Figura 4.5 em uma visão local (ou visão local), as extensões podem ser efetuadas sem que haja variação do raio. Em cada um dos enfoques representados, as arestas, onde cada região foi nomeada com

**Proposição 4.2.7.** ((16), p.5) *A extensão e contração não altera o número de componentes conexas do complemento*

*Demonstração.* Ao estender um vértice de um grafo sobre uma unidade o número de vértices e uma unidade o número de arestas, como visto na Observação 4.1.3. Este processo altera somente o número de componentes simplesmente conexas do complemento do grafo, sem alterar o número de componentes simplesmente conexas, como visto na Observação 4.2.6. A evidência da alteração sobre o polígono, em que cada nova aresta aumenta duas unidades de arestas no polígono original, mostra que cada componente simplesmente conexa.

**Lema 4.2.8.** ((16), p. 8) *Seja  $\mathcal{G}$  um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ . Se  $\mathcal{G}_1$  é uma extensão ou contração sobre  $M_g$  do grafo  $\mathcal{G}$ , então  $\mathcal{G}_1$  também é um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ .*

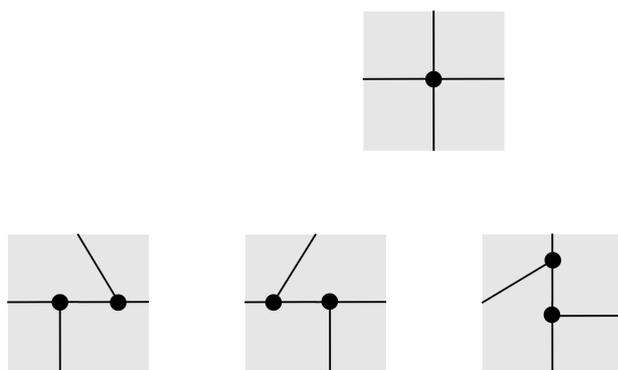
*Demonstração.* Se  $\mathcal{G}$  é um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ , o número de componentes simplesmente conexas é igual a 1, isto é,  $F = 1$ . Pela Proposição 4.2.7 o número de componentes simplesmente conexas de  $\mathcal{G}_1$  é igual a 1. Portanto,  $\mathcal{G}_1$  é um grafo de emparelhamento sobre  $M_g$ .

**Exemplo 4.2.9.** A figura 4.7 ilustra o mergulho das superfícies (ver a Figura 4.1) sobre o Toro. Em (b) é exibido um grafo de emparelhamento sobre  $M_{-1}$ , onde a extensão obtida em (a) a partir de (b) não é um grafo de emparelhamento, enquanto o grafo em (c) não o é. Para não entrar em conflito com a Proposição 4.2.7, a extensão deve ser feita na superfície e não no espaço, como

**Exemplo 4.2.10.** A Figura 4.8 exibe todas as possibilidades de grau 4, resultando em dois vértices com  $k = 3$ . Já as possibilidades de extensão de um vértice de grau 8, desc

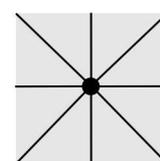
- Em (a) são exibidas oito extensões ao alongar o vértice com duas arestas incidente sobre ele, em que são gerados dois vértices com grau 4 e 6.
- O vértice em (b) é estendido com duas arestas incidentes, gerando dois vértices com grau 4 e 6.
- Em (c) o vértice é estendido com três arestas incidentes, gerando dois vértices com grau 5 cada um.

Figura 4.8 - Possibilidades de extensão de um vértice de grau 4



Fonte: Elaborado pela autora (2019)

Figura 4.9 - Possibilidades de extensão de um vértice de grau 8



**Teorema 4.2.11.** ((16), p. 9) *Todo grafo de emparelhamento pode ser obtido por extensão do grafo canônico de emparelhamento.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{G}$  um grafo de emparelhamento sobre  $V$ . Pelo 3.2.10, temos:

$$V - A = 1 - 2g$$

Daí,

$$2g = 1 - V + A = \beta(\mathcal{G})$$

Dessa forma, como  $\mathcal{G}$  dispõe de  $2g$  ciclos livres, pelo Corolário 4.2.12, podemos obter  $\mathcal{G}$  em um  $I_{2g}$ . Portanto, ao realizar o caminho inverso, obtemos  $\mathcal{G}$  a partir de um  $I_{2g}$ .

**Corolário 4.2.12.** ((16), p. 9) *Todos os grafos de emparelhamento podem ser obtidos por alguma extensão do grafo  $I_{2g}$ .*

**Teorema 4.2.13.** ((16), p.5) *Todo grafo conexo mergulhado em um grafo de emparelhamento com  $2g$  ciclos livres, pode ser contraído no grafo do tipo  $I_{2g}$ .*

**Exemplo 4.2.14.** (Extensões de grafos de emparelhamento) Como ponto de partida um grafo de emparelhamento canônico, uma sequência de extensões de grafos de emparelhamento de  $I_{2g}$  para  $\mathcal{G}$ . Nessas extensões, obtém-se únicos cinco grafos trivalentes determinados em (9).

**Exemplo 4.2.15.** Pela Proposição 3.2.16, para  $k = 3$  emparelhamento com 6 vértices e 9 arestas e, conseqüentemente o polígono de emparelhamento terá 18 lados. A Figura 4.11 mostra emparelhamentos trivalentes não isomorfos da Figura 4.10 e respectivos diagramas.

Figura 4.11 - Diagramas e grafos de emparelhamento

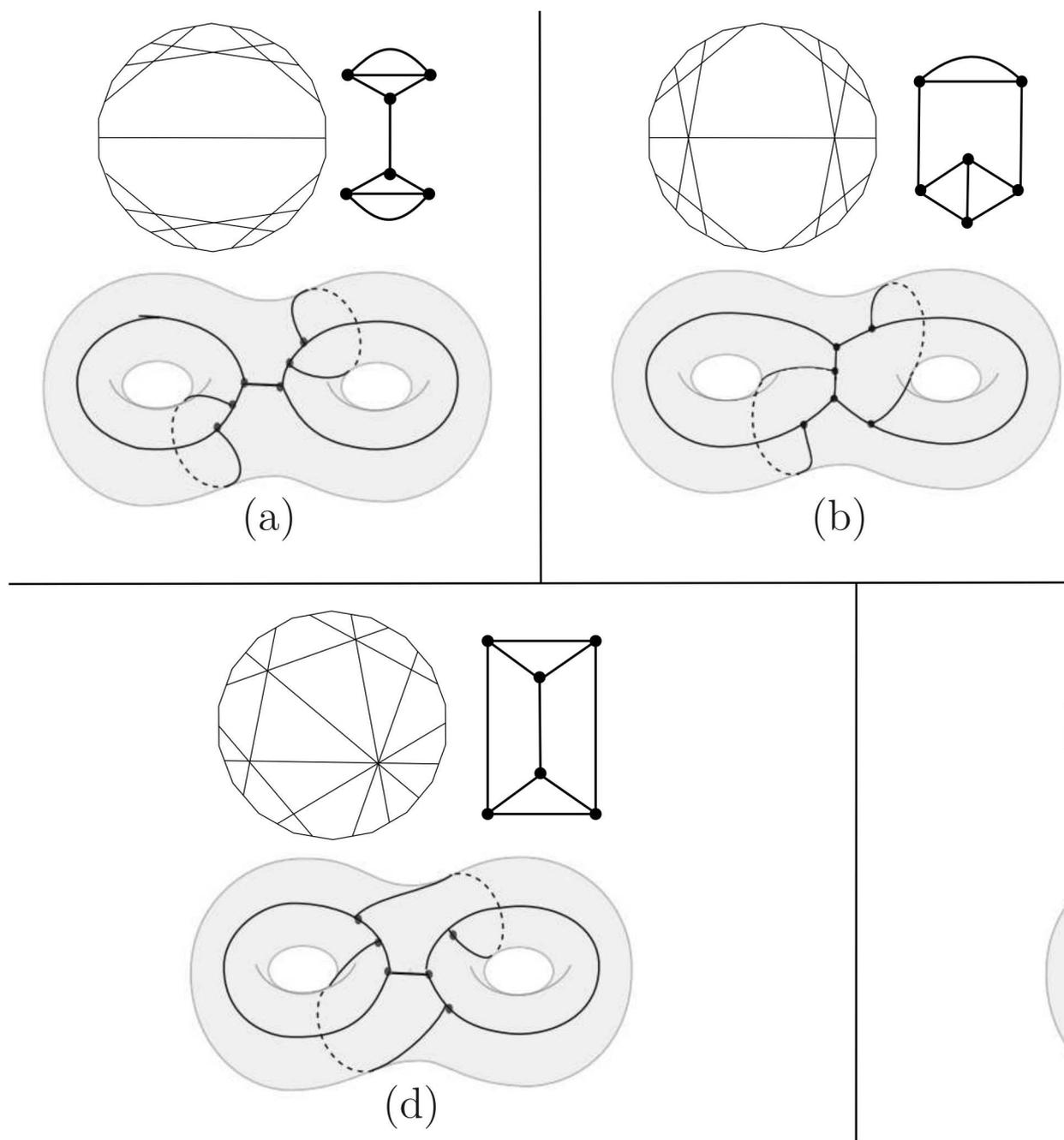
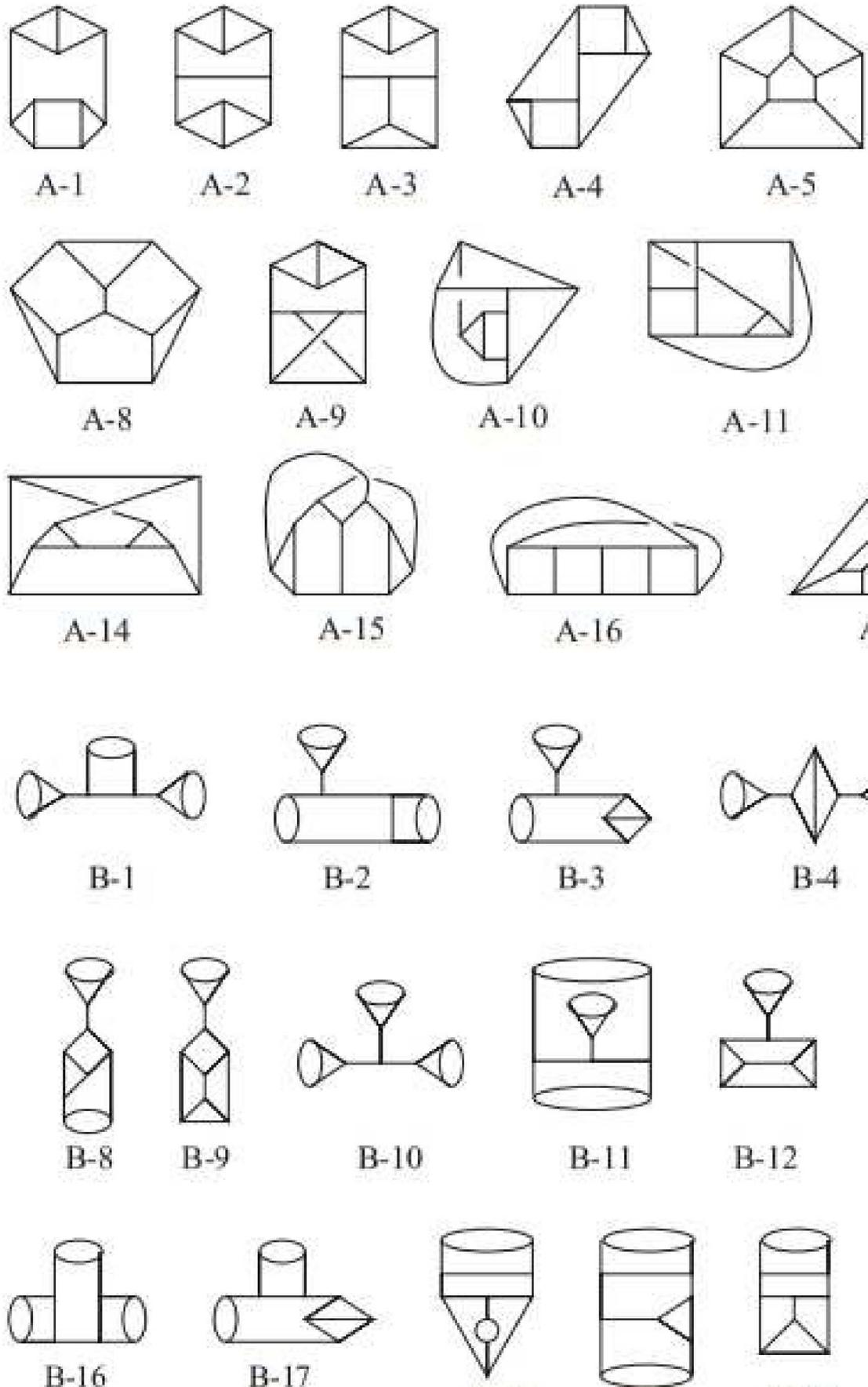
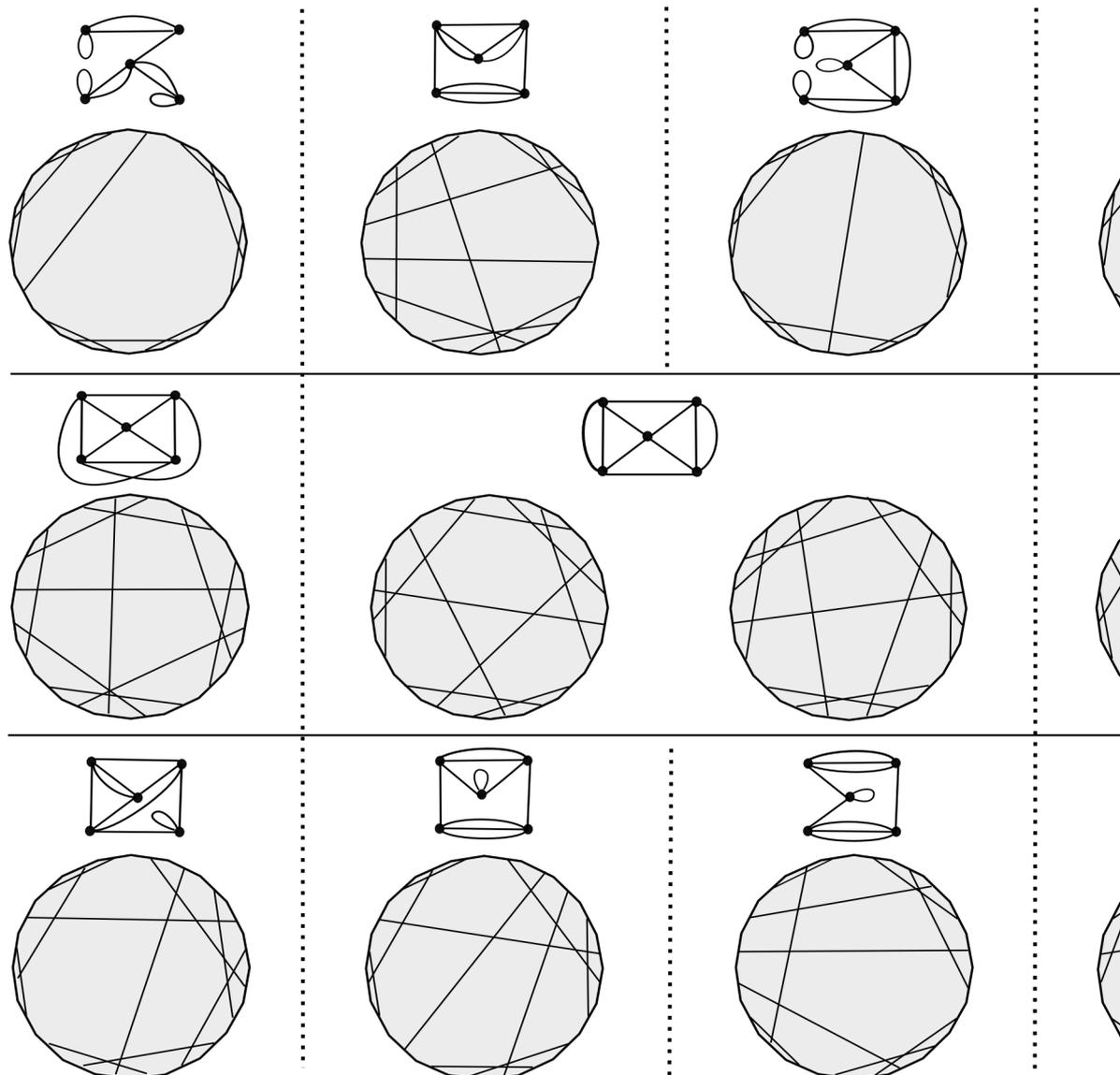


Figura 4.12 - Grafos de emparelhamento tr



**Exemplo 4.2.17.** A Figura 4.13 exibe algumas extensões 4-regulares não isomórficos do Tritoro com seus respectivos grafos de emparelhamento. Como no Exemplo 4.2.16, um grafo pode estar associado a mais de uma forma em que o grafo é mergulhado sobre a superfície relevante.

Figura 4.13 - Diagramas e grafos de emparelhamento



Fonte: Retirado de (16), p.

Figura 4.14 - Contração dos grafos de emparelhamento

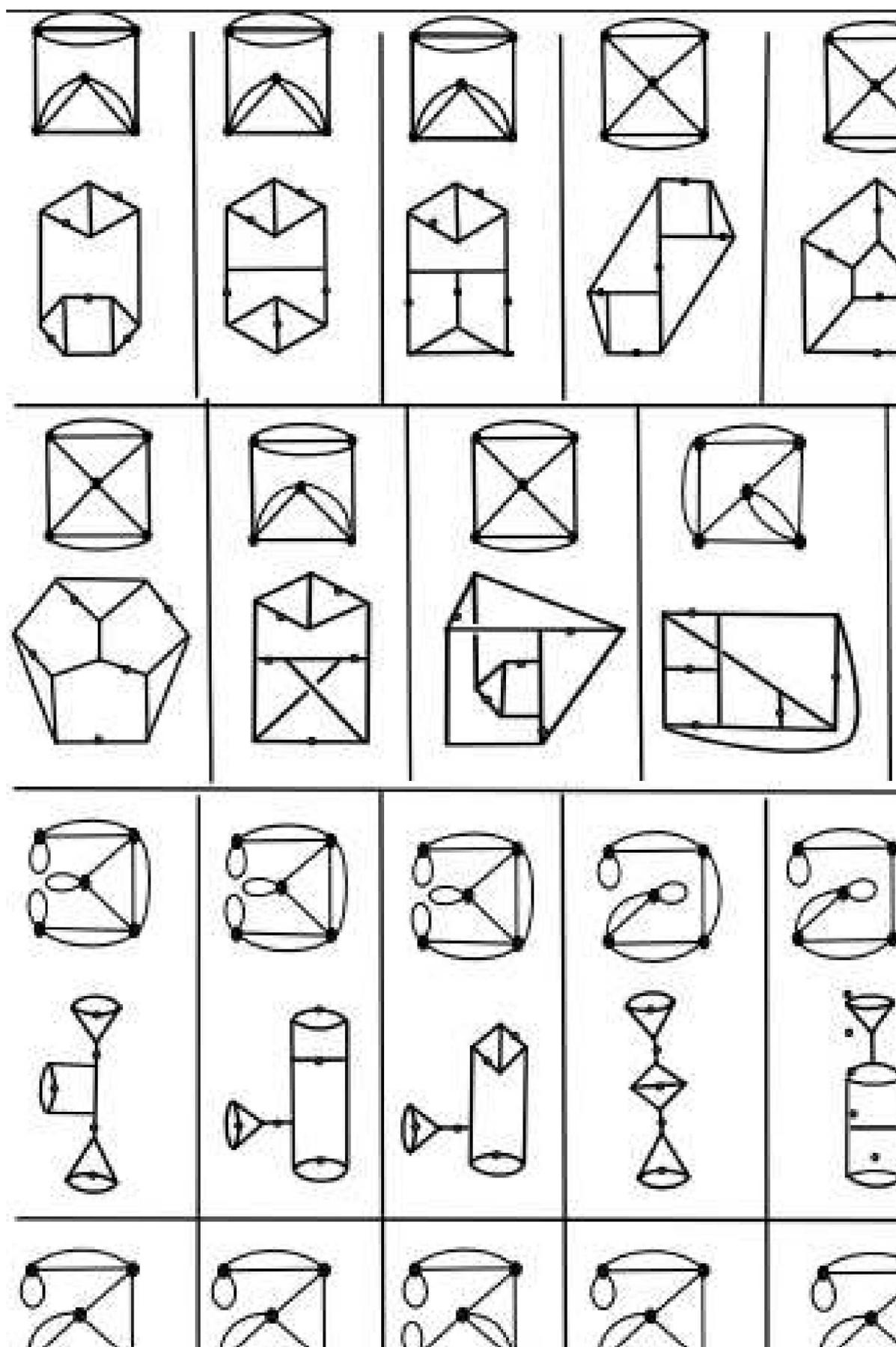
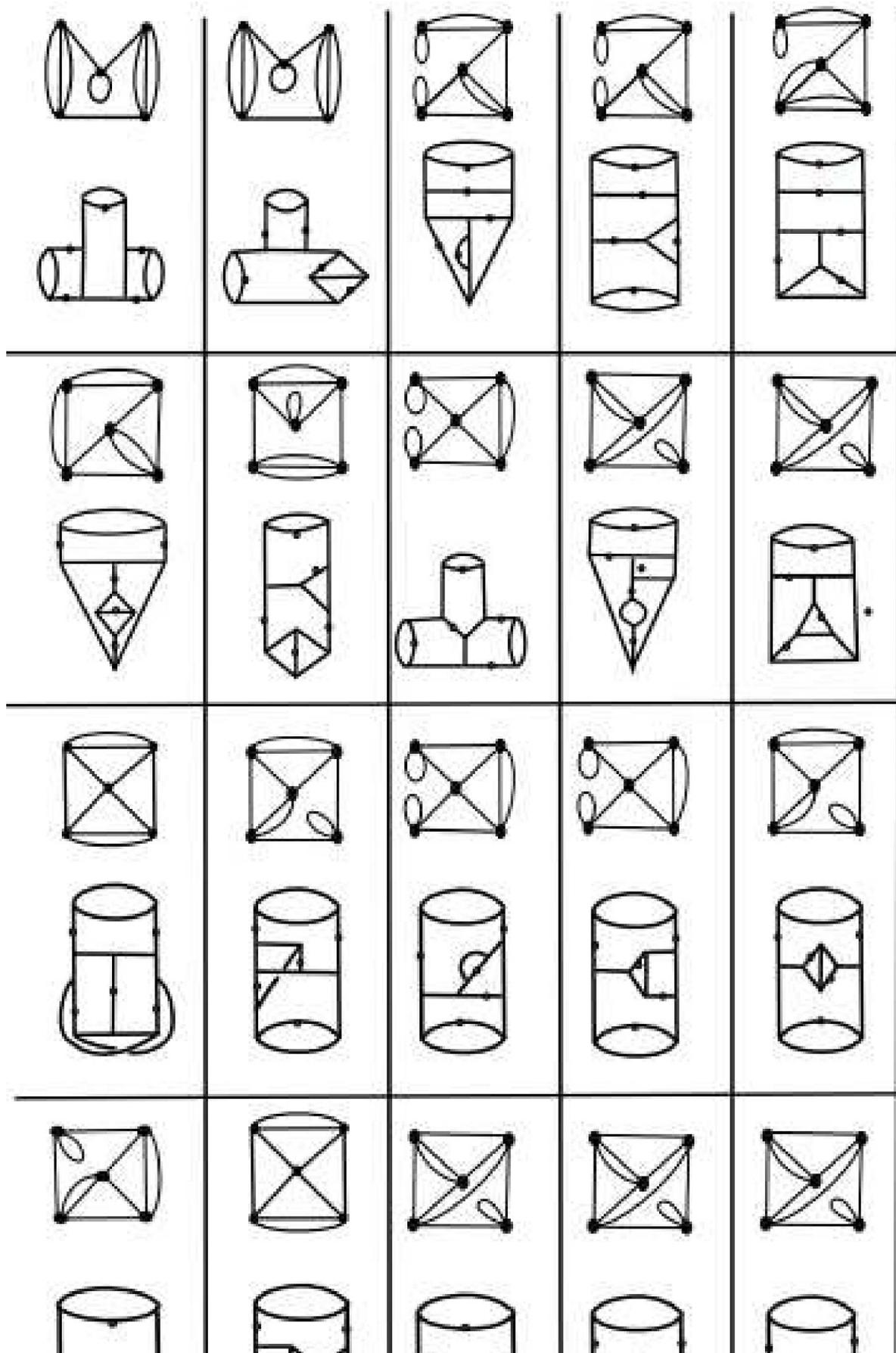


Figura 4.15 - Contração dos grafos de emparelhamento



trivalente é composto por 14 vértice e 21 arestas, e ainda, formado por 42 lados. A Figura 4.17 ilustra o mergulho

Figura 4.16 - Extensões de um grafo de emparelhamento

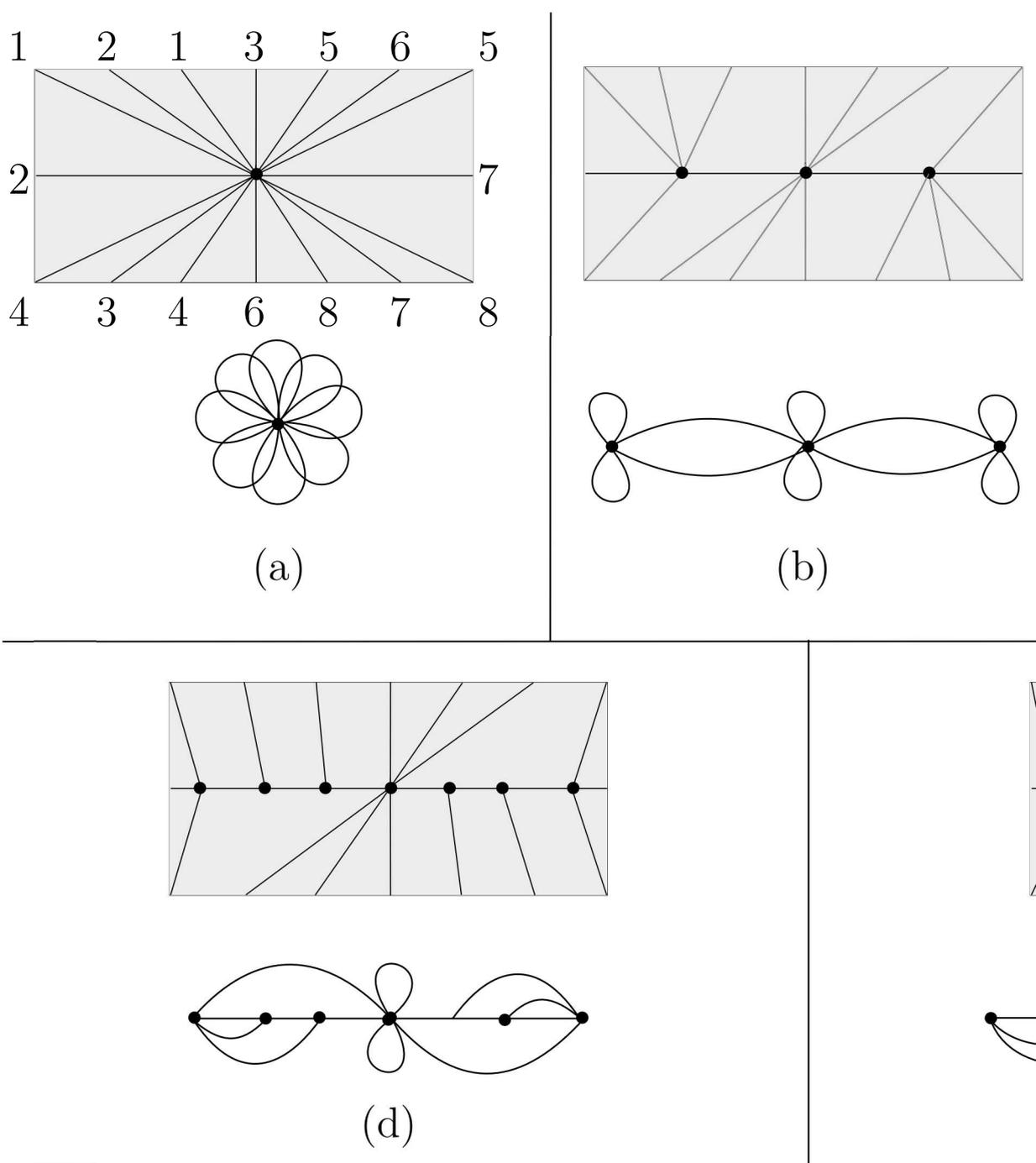
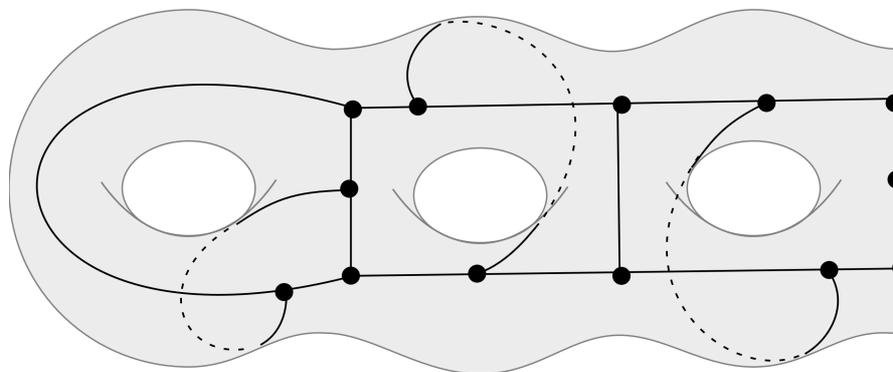
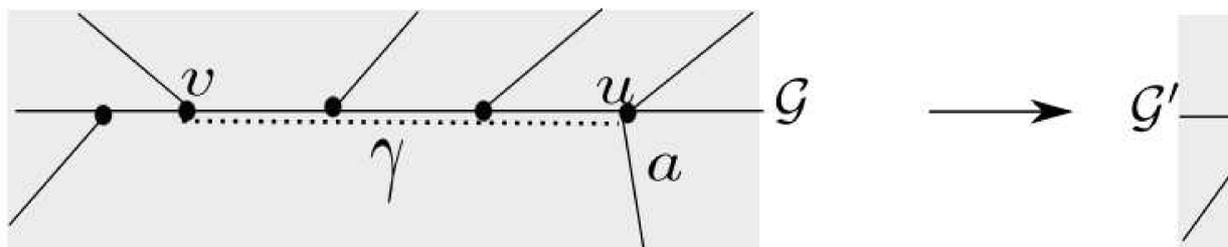


Figura 4.17 - Grafo de emparelhamento trivial



Fonte: Elaborado pela autora ( )

Figura 4.18 - Visualização local da troca

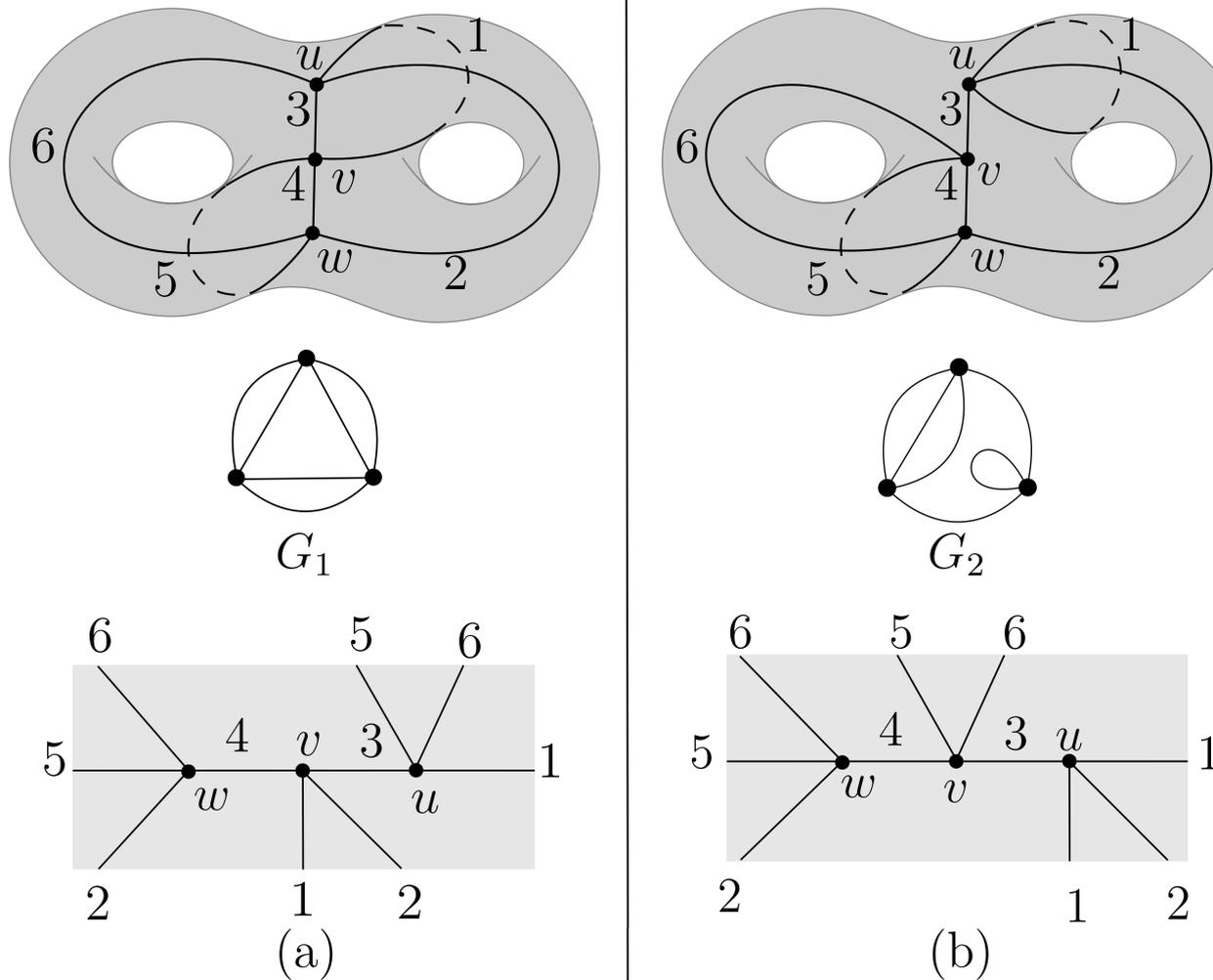


Fonte: Retirado de (14), p.

**Definição 4.2.19.** O grafo  $\mathcal{G}'$  é obtido pela *troca de arestas* do grafo  $\mathcal{G}$  sobre a superfície  $M_g$ , se ao efetuar a troca da aresta  $a$  para o vértice  $v$ , não houver interceptação de  $a$  com nenhuma aresta do grafo.

**Exemplo 4.2.20.** A Figura 4.19 ilustra a troca de arestas em três casos distintos. Em (a), (b) e (c) são mergulhados, respectivamente, sobre o bitoro. A parte inferior da figura exibe a visão

Figura 4.19 - Exemplo de troca d

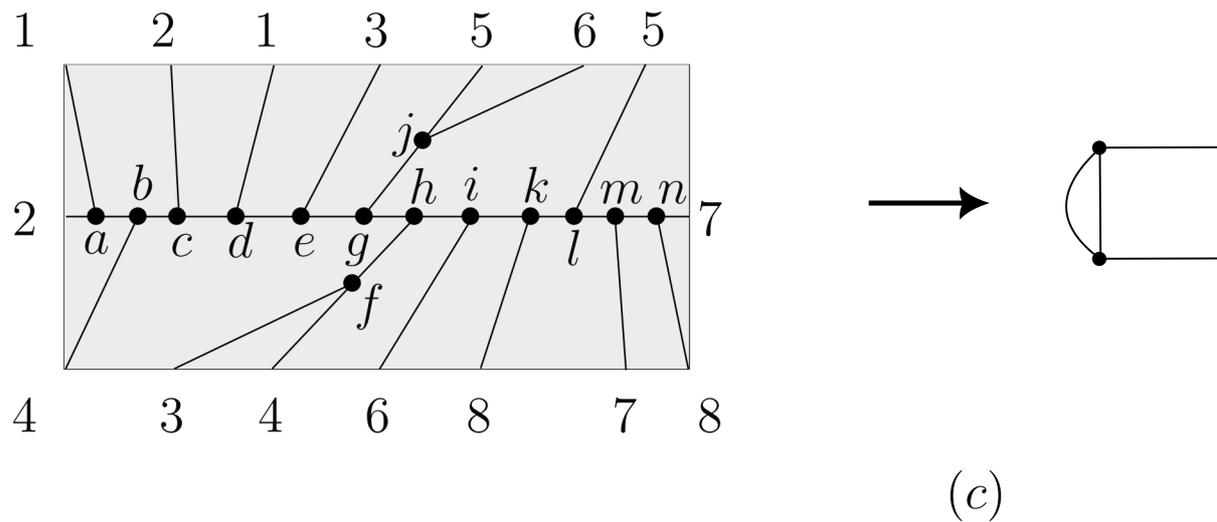
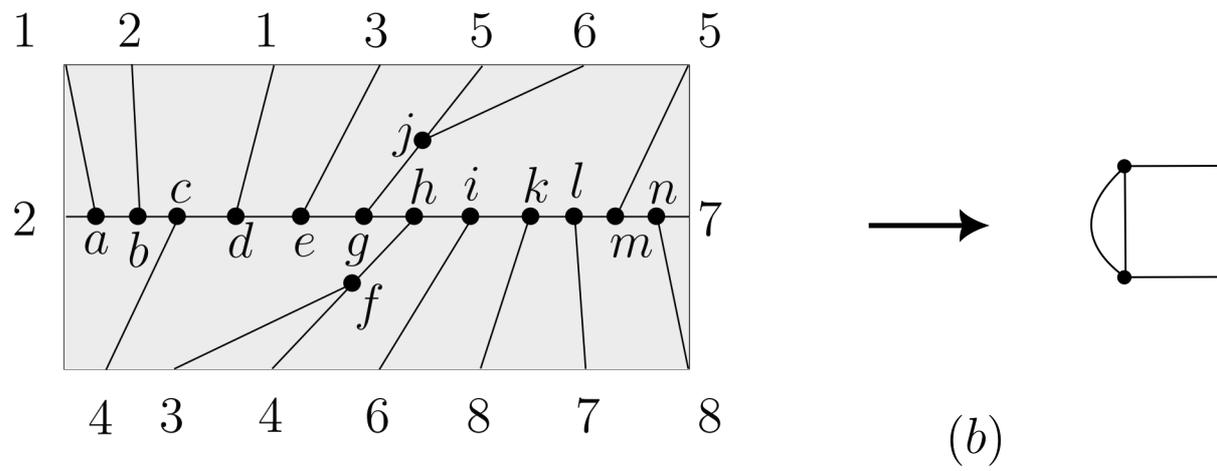
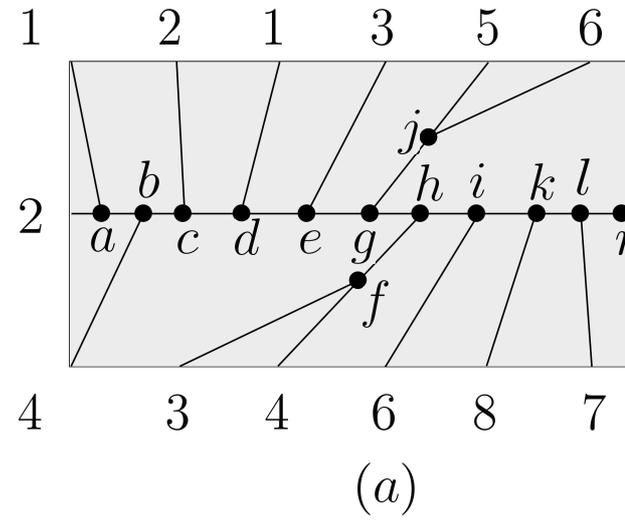


Fonte: Elaborado pela autora (

Perceba que a troca de aresta é uma extensão alongamento e contração de um vértice. Dessa forma, o m alterado, dado que o acréscimo de suas unidades serão i isso, a Proposição 4.2.21 é uma consequência direta da I

**Proposição 4.2.21.** ((14), p. 8) *Todo grafo obtido por de empacelamento  $\mathcal{C}$  sobre a superfície  $M_g$  é também*

Figura 4.20 - Exemplo de troca d



## 5 CIRURGIAS DE EMPARELHAMENTO D

No Capítulo 4 foi abordado como determinar  $n$  através de extensões ou contração de um grafo de em capítulo, será discutido como a partir de grafos de emparelha construir novos grafos de emparelha. Este processo de cirurgia de emparelha de arestas, introduzido em (5) apresentaram dois tipos de cirurgia. Enquanto em (14) modalidade cirúrgica. Sendo assim, o objetivo deste capítulo de cirurgia e demonstrar alguns resultados importantes t

### 5.1 SOMA CONEXA DE EMPARELHAMENTO

Nesta seção utilizaremos dois emparelhamentos a esfera para a construção de novas superfícies e, com emparelha.

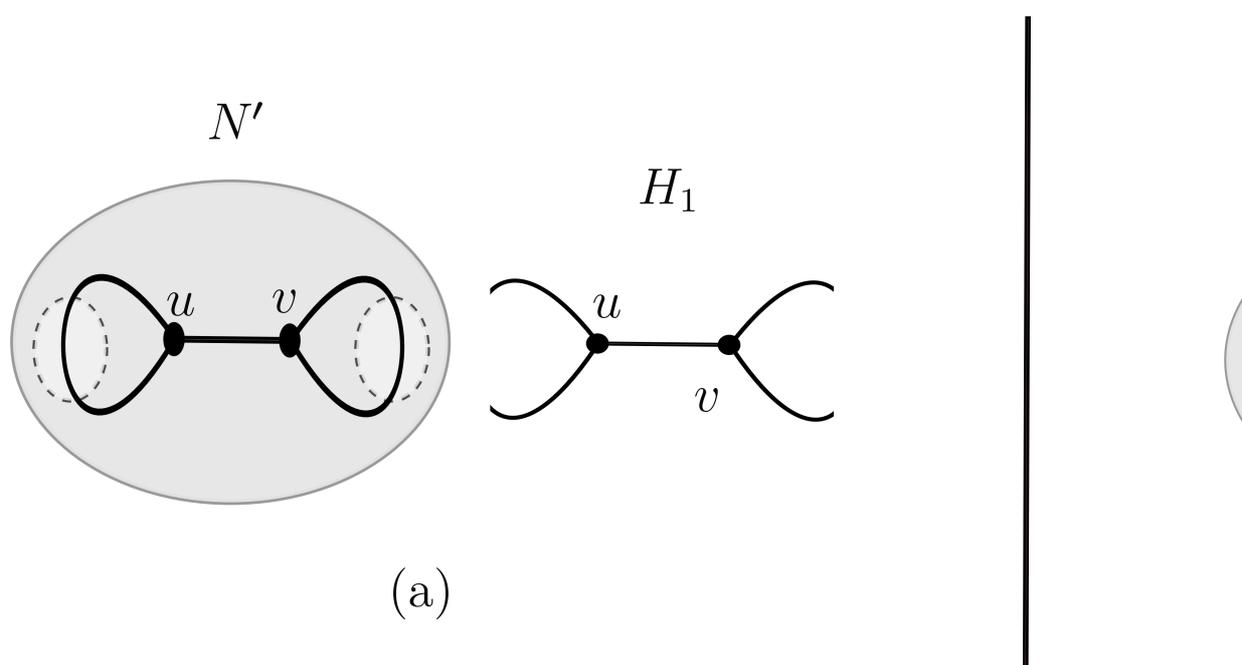
O processo que descreveremos logo a diante será chamado *de arestas* que engloba, simultaneamente, a soma com os respectivos grafos associados. Com o propósito de os passo de 1 a 3 delineiam o procedimento a ser seguido

#### **1º Passo:**

Sejam  $N$  uma superfície homeomorfa a esfera e  $H$  em  $N$ , em que  $H$  tenha dois vértices  $u$  e  $v$  e três arestas obtém-se uma nova superfície com dois bordos, denotada

**Observação 5.1.3.** Ao retirar os discos da superfície  $N$  tendo a aparência de haver uma entrada e uma saída em  $\beta$ .

Figura 5.1 - Diagramas e grafos de emparelhamento



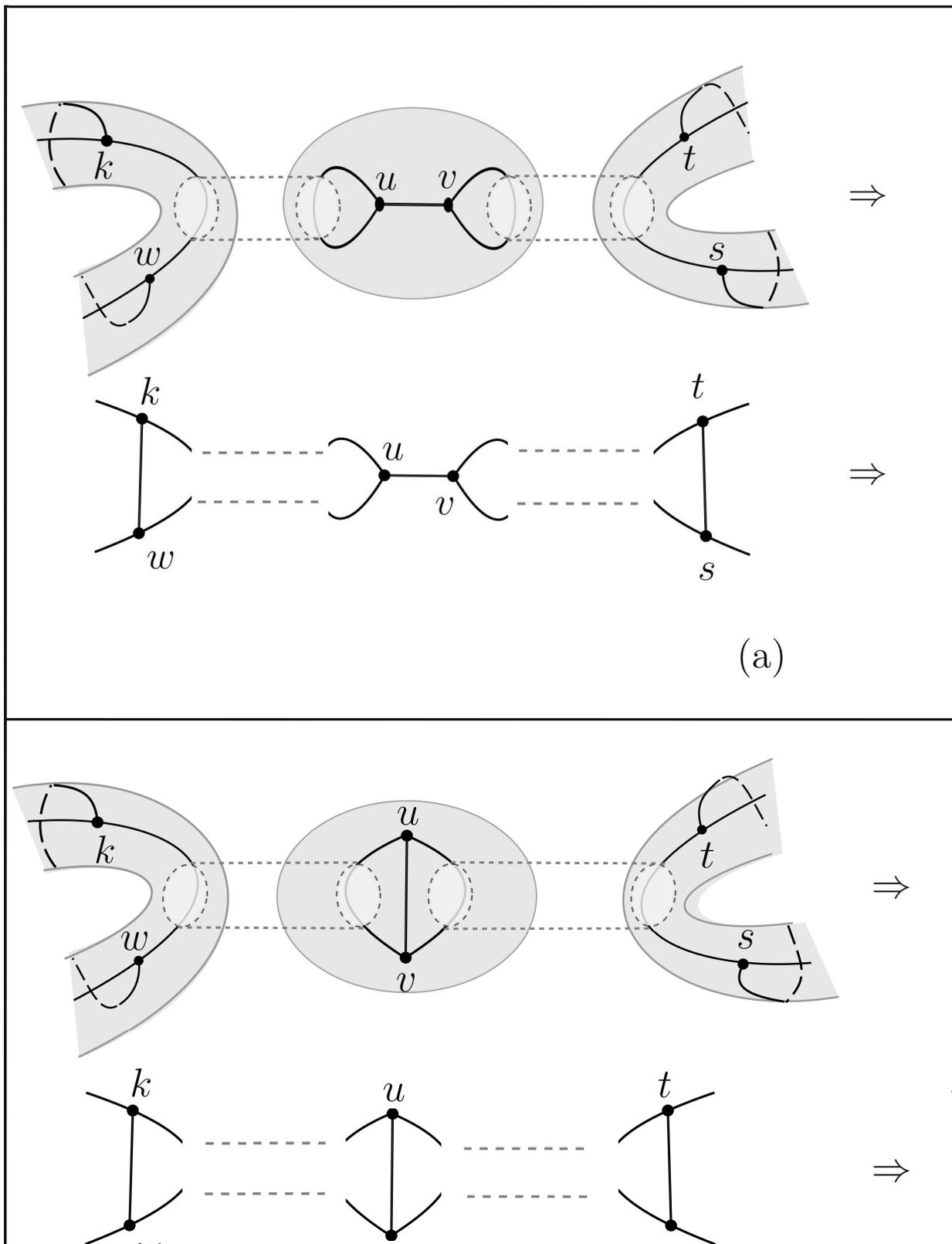
Fonte: Adaptado de (16).

### 2º Passo:

Sejam  $\phi_1 : \mathcal{P}_n \rightarrow M_{g_1}$  e  $\phi_2 : \mathcal{P}_m \rightarrow M_{g_2}$  emparelhamentos e  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  grafos de emparelhamento associados a  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente. Sejam  $\beta_1$  e  $\beta_2$  bordos de  $M_{g_i}$  ( $i = 1, 2$ ), de forma que esteja centrado sobre um dos pontos  $u_i$ . Então, obtém-se uma nova superfície com um bordo, denotada por  $N$ , obtido de  $\mathcal{G}_i$  pela retirada dos arcos (Figura 5.2).

2. conectam-se  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, aos grafos

Figura 5.3 - Soma conexa simultânea entre superfícies



$S_1$  : ocorre quando o grafo  $H_1$  é mergulhado em  $N$ .

$S_2$  : ocorre quando o grafo  $H_2$  é mergulhado sobre a  $S$ .

**Observação 5.1.5.** Nas duas cirurgias  $S_1$  e  $S_2$ , os dois grafos  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) estão centralizados cada um sobre um dos laços de  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Observe que a mesma superfície  $M_{g_i}$  ( $i = 1, 2$ ) é utilizada nos dois tipos cirúrgicos. No entanto, os grafos  $H_i$  e as superfícies são distintos devido o grafo mergulhado em  $M_{g_i}$ . Nas superfícies resultantes da construção realizada, a Definição 5.1.6 é específica para descrever as superfícies construídas.

**Definição 5.1.6.** Sejam  $\phi_1 : \mathcal{P}_n \rightarrow M_{g_1}$  e  $\phi_2 : \mathcal{P}_m \rightarrow M_{g_2}$  dois mergulhos com os respectivos grafos  $\mathcal{G}_1(V_1, A_1)$  e  $\mathcal{G}_2(V_2, A_2)$ . Denotamos as cirurgias realizadas nos polígonos, superfícies e grafos, respectivamente por:

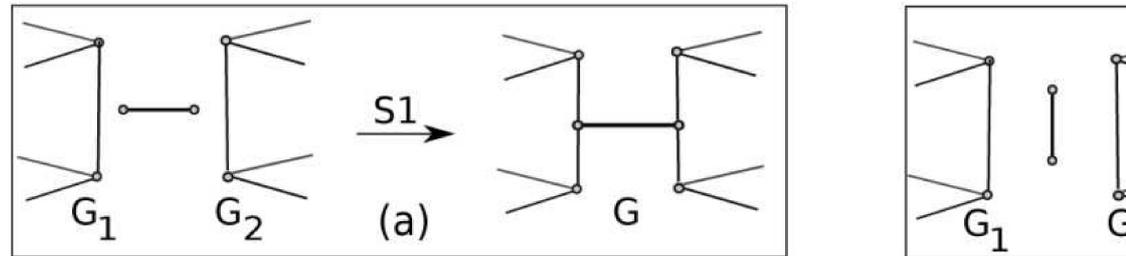
1.  $\mathcal{P}_n \uplus_{S_i} \mathcal{P}_m$ .
2.  $M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}$ .
3.  $\mathcal{G}_1(V_1, A_1) \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2(V_2, A_2)$  ou  $\mathcal{G}_1 \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2$ .

As cirurgias serão chamadas **soma conexa de superfícies** e denotadas por:

$$\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2 = (\mathcal{P}_n \uplus_{S_i} \mathcal{P}_m, M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2})$$

**Definição 5.1.7.** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos conexos com

Figura 5.4 - Soma conexa de  $g$



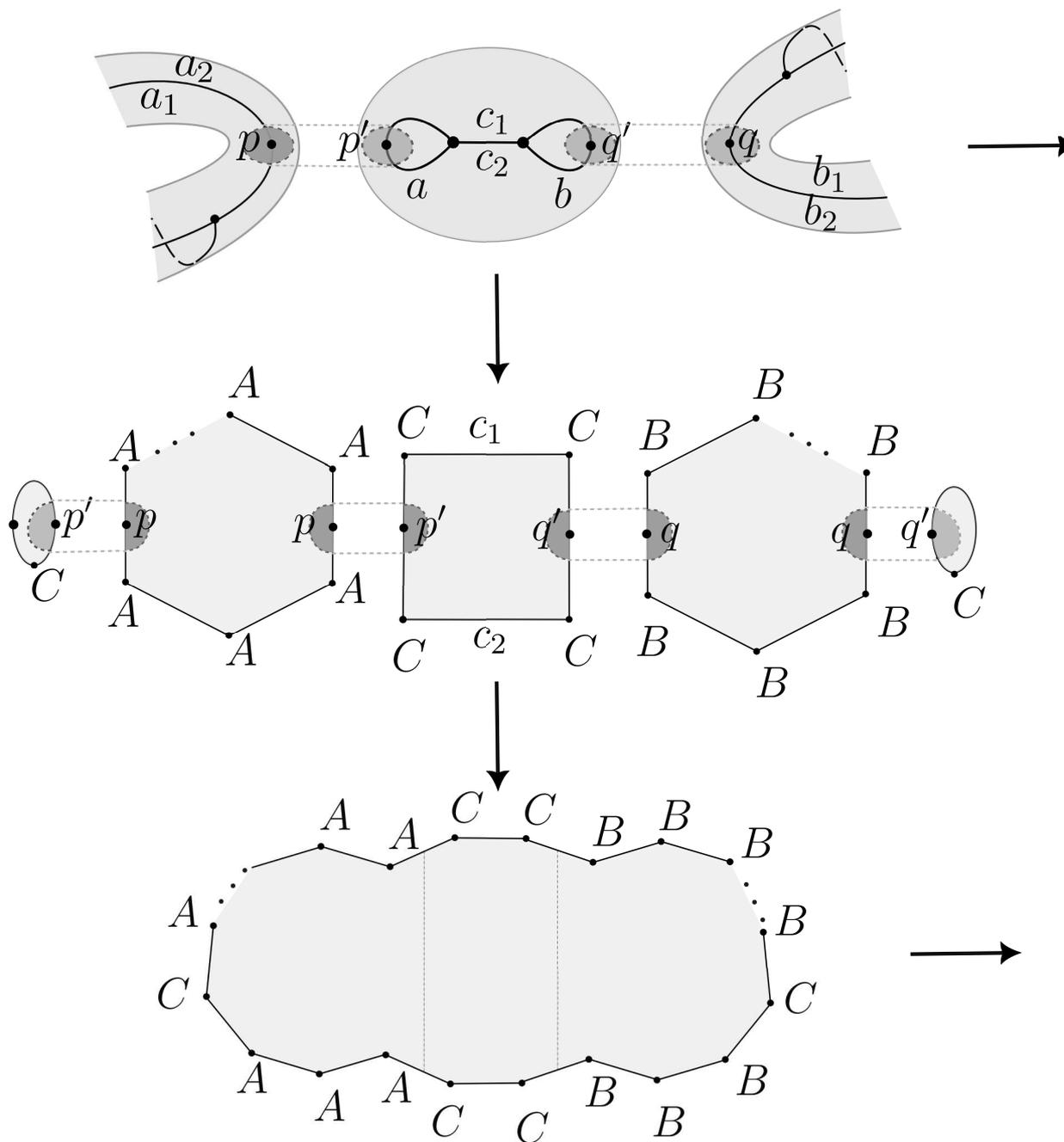
Fonte: Retirado de (5), p 6

Esboçamos na Figura 5.3 a superfície e o grafo  $G$  para  $i = 1, 2$ . Vejamos agora nos Exemplos 5.1.9 e 5.1.10 o processo de emparelhamento para  $S_i$ .

**Exemplo 5.1.9.** (Cirurgia  $S_1$  nos polígonos de emparelhamento). Considere o processo de cirurgia realizado no polígono. Considere dois emparelhamentos associados aos respectivos grafos  $G_1$  e  $G_2$  de  $\mathcal{P}_n$  e  $B$  os vértices de  $\mathcal{P}_m$ .

- Seja  $p$  um ponto sobre  $\mathcal{G}_1$  e seja  $D_1$  o disco retido centrado em  $p$ . Dessa forma, como  $M_{g_1}$  é um emparelhamento que pertence a duas arestas do polígono  $\mathcal{P}_n$ , sejam elas  $a_1$  e  $a_2$ . Então  $D_1$  está adjunto à aresta  $a_1$  e a outra metade à aresta  $a_2$ .
- O mesmo é válido para  $M_{g_2}$ , onde o disco  $D_2$  está centrado em  $q \in \mathcal{G}_2$ .
- Agora, note que o grafo  $H_1$  com vértices  $u$  e  $v$ ,

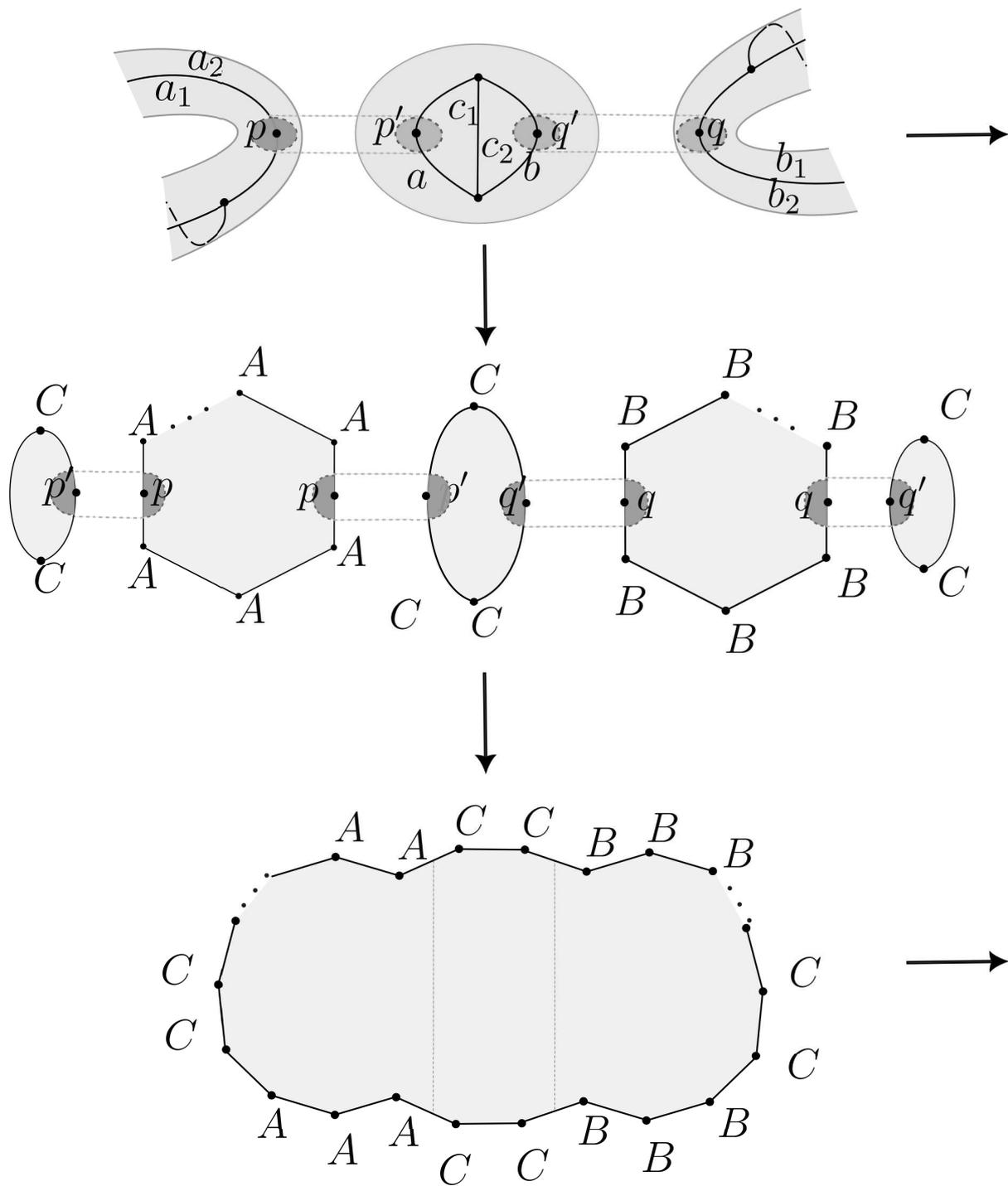
Figura 5.5 - Cirurgia  $S_1$  nos polígonos de



Fonte: Elaborado pela autora (

Mediante os Exemplos 5.1.9 e 5.1.10, verificamos o  
 mento de arestas permanece sendo uma única região sim

Figura 5.6 - Cirurgia  $S_2$  nos polígonos de



Fonte: Elaborado pela autora (

(i) O gênero da superfície  $M$  é dado por  $g = g_1 + g_2$

$H'_i$ , isto é,

$$\begin{aligned} V(G) &= V_1 + V_2 + V(H'_i) \\ &= 4g_1 - 2 + 4g_2 - 2 \\ &= 4(g_1 + g_2) - 4 \end{aligned}$$

- (iii) O número de arestas  $A$  de  $G$  é dado por  $6(g_1 + g_2) - 3$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  são as respectivas arestas de  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . Assim, pela Proposição 5.1.13,  $A_j = 6g_j - 3$ ,  $j = 1, 2$ . Por outro lado, o número de arestas de  $\mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{G}_2$  e  $H'_i$ , ou seja,

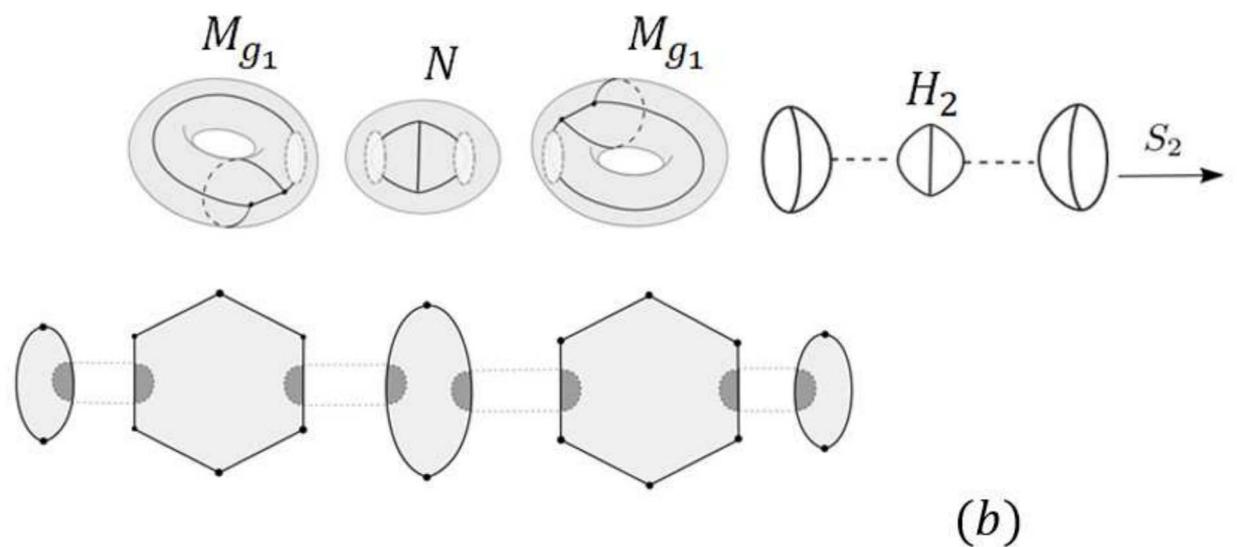
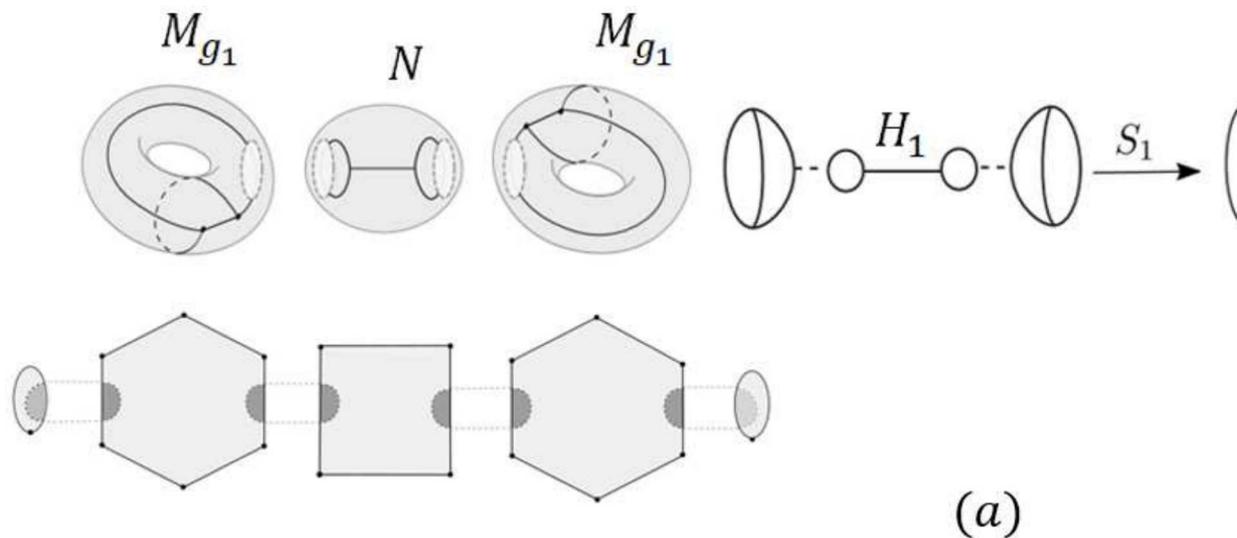
$$\begin{aligned} A(G) &= A_1 + A_2 + A(H'_i) \\ &= 6g_1 - 3 + 6g_2 - 3 \\ &= 6(g_1 + g_2) - 6 \end{aligned}$$

O Exemplo 5.1.13 apresenta a construção de dois grafos trivalentes. O grafo trivalente mergulhado sobre  $M_2$  é obtido a partir da soma conexa de duas superfícies de gênero 1 e 2, onde as arestas trivalentes são as arestas trivalentes. De acordo com isso, o Lema 5.1.14 é um caso particular deste exemplo. A Figura 5.7 ilustra o emparelhamento de arestas: a soma conexa das superfícies de gênero 1 e 2.

**Exemplo 5.1.13.** (Cirurgia sobre um grafo trivalente mergulhado sobre  $M_2$ ). A Figura 5.7 ilustra as cirurgias  $S_1$  e  $S_2$  em (a) e (b), respectivamente. Os grafos de emparelhamento são trivalentes.

**Lema 5.1.14.** ((5), p. 8) Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são emparelhamentos de arestas trivalentes de superfícies de gênero  $g_1$  e  $g_2$ , então a soma conexa  $\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2$ ,  $i = 1, 2$ , é um emparelhamento de arestas trivalentes de uma superfície de gênero  $g_1 + g_2$ .

Figura 5.7 - Diagramas e grafos de emparelhamento



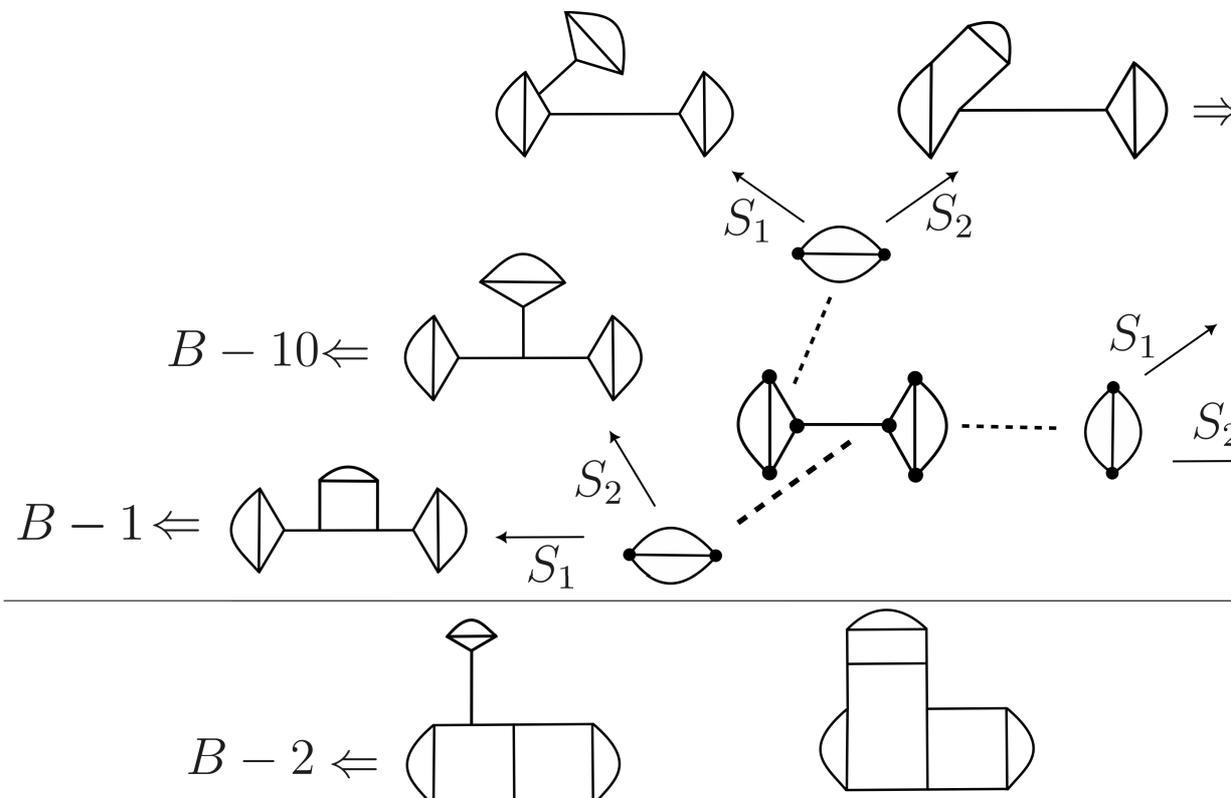
Fonte: Adaptado de (14).

isto é, o resultado final será o mesmo independente da a  
 mais uma cirurgia no Exemplo 5.1.13, notamos na Figura  
 para  $S_1$ . Isso também é válido em (b), havendo três opções  
 serão obtidos mais grafos a partir de uma mesma ciru  
 5.1.15 mostra este fato

Figura 4.11 (a) um grafo de  $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_2} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$ . Ainda, dois grafos de  $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$  são isomorfos a dois grafos de  $\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} (\mathcal{G}(2, 3) \oplus_{S_1} \mathcal{G}(2, 3))$ . Portanto, dos 12 grafos obtidos pelas cirurgias  $S_1$  e  $S_2$  9

**Exemplo 5.1.16.** A Figura 5.8 ilustra os 9 grafos de Proposição 5.1.15. Realizar a cirurgia entre três grafos com um grafo  $\mathcal{G}(2, 3)$  e os dois grafos mergulhados na Figura 5.7. Esta é a maneira pela qual os 9 grafos da Proposição 5.1.15 são obtidos. Note que alguns dos grafos resultantes são grafos de  $\mathcal{G}(2, 3)$  Tritoro, exibidos na Figura 4.12. A seguir detalharemos a obtenção de cada um dos grafos especificando a cirurgia, a aresta no qual foi realizada a cirurgia. A Figura 4.12.

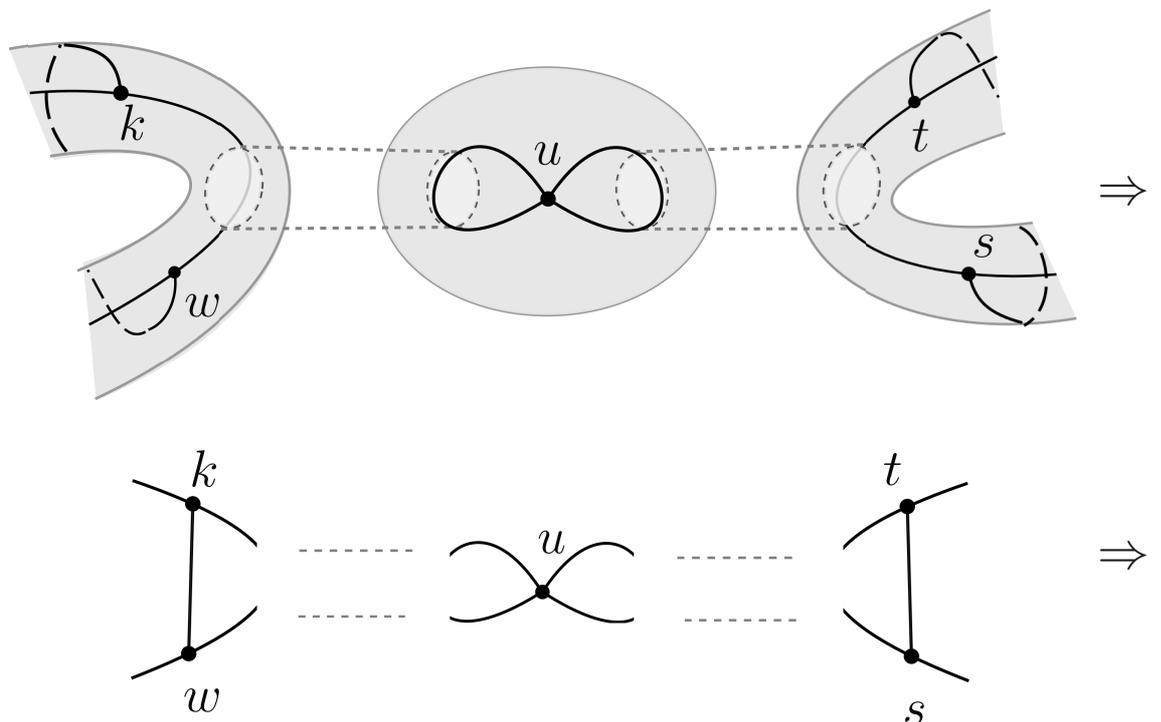
Figura 5.8 - Cirurgias  $S_1$  e  $S_2$  em grafos



Nesse sentido, considere  $\phi_1 : \mathcal{P}_n \rightarrow M_{g_1}$  e  $\phi_2 : \mathcal{P}_n \rightarrow M_{g_2}$  as arestas associados, respectivamente, aos grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . Se  $N$  é a esfera e  $H_3$  um grafo mergulhado em  $N$ . Assim como o caso da cirurgia  $S_3$  ocorre quando o grafo  $H_3$  possui um único vértice, a soma das cirurgias  $S_1$  e  $S_2$  é realizada a soma conexa entre  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$  que também é executado a soma dos grafos. Do mesmo modo, a soma  $M'_{g_1} \oplus_{S_3} M'_{g_2}$ , em que cada  $M'_{g_i}$  ( $i = 1, 2$ ) é obtido ao retirar  $D$  de forma que  $D$  esteja centrado sobre uma das arestas  $k$  e  $w$  entre os grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , resultando no grafo denotado por  $\mathcal{G}$ .

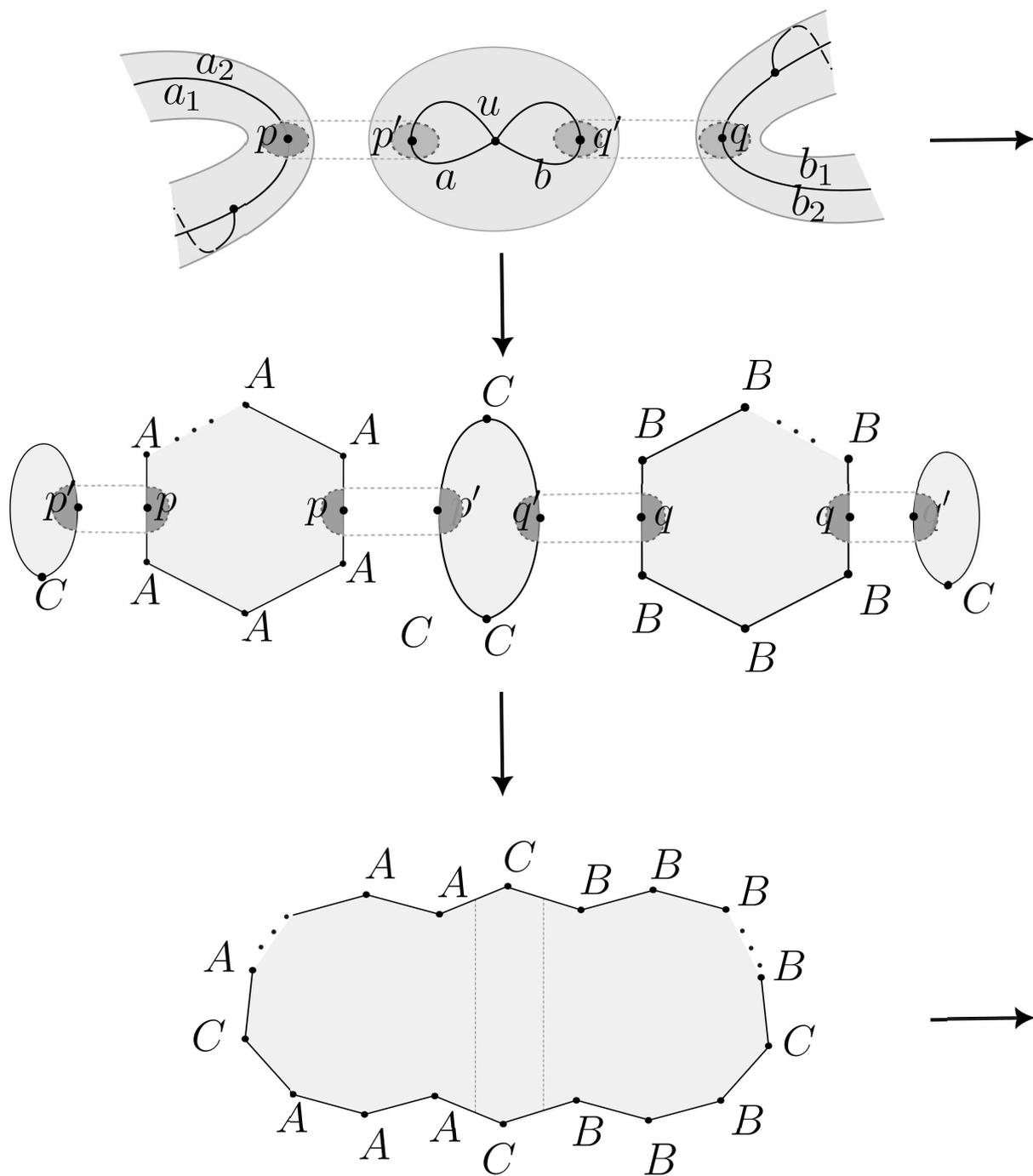
**Observação 5.1.17.** A notação estabelecida na Definição 5.1.17 para  $i = 3$ .

Figura 5.9 -  $S_3$ : Soma conexa simultânea entre  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$ .



pedaços marcados pelos discos, adquire-se o polígono resultante por  $\mathcal{P}_n \uplus_{S_3} \mathcal{P}_m$ .

Figura 5.10 - Cirurgia  $S_3$  nos polígonos de



Fonte: Elaborado pela autora (

**Definição 5.1.21.** Um grafo trivalente composto por dois desses vértices é dito **grafo gerador**.

**Exemplo 5.1.22.** Os grafos de emparelhamento ilustrados são soma conexa de  $S_1$  e  $S_2$  entre dois grafos geradores. Além disso, os grafos resultantes da cirurgia entre três grafos geradores,  $B - 5$ ,  $B - 10$ ,  $B - 11$  e  $B - 14$ .

**Lema 5.1.23.** *Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são emparelhamentos de arestas sobre  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$  respectivamente, e  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  são grafos de emparelhamento sobre  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$  respectivamente, então  $\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2$  é um emparelhamento de arestas sobre  $M_{g_1 \#_{S_i} g_2}$  para  $i = 1, 2$  e  $3$ , é um emparelhamento de arestas.*

*Demonstração.* Sejam  $\phi_1 : \mathcal{P}_n \rightarrow M_{g_1}$  e  $\phi_2 : \mathcal{P}_m \rightarrow M_{g_2}$  e  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . Pela Definição 5.1.6 tem-se que

$$\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2 = (\mathcal{P}_n \uplus_{S_i} \mathcal{P}_m, M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}, \mathcal{G}_1 \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2)$$

Queremos obter  $M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2} \setminus \mathcal{G}_1 \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2$  uma região simples. Pela Definição 5.1.11,  $\mathcal{G}_1 \oplus_{S_i} \mathcal{G}_2$  é grafo de emparelhamento sobre  $M_{g_1 \#_{S_i} g_2}$ . Pela Definição 5.1.12,  $M_{g_1 \#_{S_i} g_2} = M_{g_1} \#_{S_i} M_{g_2}$  ( $i = 1, 2$ ). Do mesmo modo,  $\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2$  é grafo de emparelhamento sobre  $M'_{g_1 \#_{S_i} g_2}$  e, pela Observação 5.1.10,  $M_{g_1 \#_{S_i} g_2} = M'_{g_1 \#_{S_i} g_2}$ . Portanto, podemos afirmar que  $\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ ,

Usando o método de indução finita, pelo Lema 5.1.23, os grafos resultantes da soma conexa finita de emparelhamentos são grafos de emparelhamento de arestas.

**Teorema 5.1.24.** ((5), p. 8) *Seja  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  um conjunto finito de emparelhamentos de arestas sobre grafos geradores  $M_{g_1}, M_{g_2}, \dots, M_{g_n}$  e  $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n\}$  um conjunto finito de grafos de emparelhamento sobre  $M_{g_1}, M_{g_2}, \dots, M_{g_n}$  respectivamente, então  $\phi_1 \oplus_{S_i} \phi_2 \oplus_{S_j} \phi_3 \oplus_{S_k} \phi_4 \oplus_{S_l} \phi_5 \oplus_{S_m} \phi_6 \oplus_{S_n} \phi_n$  é um emparelhamento de arestas sobre  $M_{g_1 \#_{S_i} g_2 \#_{S_j} g_3 \#_{S_k} g_4 \#_{S_l} g_5 \#_{S_m} g_6 \#_{S_n} g_n}$  para  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ .*

$B - 4$  e  $B - 10$  (Figura 4.11 (a)) preservam essa característica de ciclos com duas e quatro arestas e, o único grafo que a cirurgia é o grafo  $B - 14$  (Figura 4.11 (b)). Dito isso, compartilham essa característica, alterando somente a quantidade  $q$ . Tanto  $G$  quanto  $B - 10$  possuem a mesma quantidade de arestas e vértices (medida que  $B - 4$  possui 2 ciclos com duas arestas e 4 vértices, enquanto que  $G$ ).

**Definição 5.1.26.** As famílias de grafos trivalentes ilustradas na Figura 5.11 serão denotadas por:

- a)  $A_q$  é do tipo "árvore de cone", com  $q$  ciclos com duas arestas.
- b)  $B_q$  é um grafo do tipo "fita de triângulos", contém  $2q - 2$  ciclos com três arestas.
- c)  $C_q$  é um grafo do tipo "fita de quadrados", possui  $2q - 2$  ciclos com quatro arestas.



Figura 5.11 - Famílias  $A_k$ ,  $B_k$  e  $C_k$  de grafos trivalentes.

A Proposição 5.1.28 apresenta um importante resultado sobre a família  $C_q$  em relação às tesselações  $\{12g - 6, 3\}$ . Em que tais tesselações correspondem a um empacotamento de esferas resultando em códigos ótimos de comprimento mínimo (6).

**Proposição 5.1.28.** *((5), p. 9) As famílias de grafos  $A_q$  e  $B_q$  são geradas por um emparelhamento com tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ , para  $g = q$ .*

*Demonstração.* As famílias  $A_q$  e  $B_q$  podem ser construídas a partir de uma soma conexa de  $q$  grafos geradores. Enquanto a família  $C_q$  é realizada a soma conexa de  $q$  grafos geradores, a família  $D_q$  é realizada a partir de uma cirurgia  $S_2$  aplicando a soma conexa de  $q$  grafos geradores. Enquanto as famílias  $A_q$  e  $B_q$  são tais famílias estão associadas a algum emparelhamento com tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ , as famílias  $C_q$  e  $D_q$  são construídas a partir de 2 grafos geradores, o número de arestas de  $C_q$  é  $12g - 6$ .

Através do Teorema 5.1.25 e da Proposição 5.1.28, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 5.1.29.** *((5), p. 10) Todo grafo resultante da família  $C_q$  é um grafo trivalente de algum emparelhamento de arestas com tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ .*

No término do Capítulo 4, a troca de arestas e a extensão de grafos, no qual abordamos até o momento que as operações de troca de arestas e extensão de grafos contribuem de maneira a determinar possíveis grafos de interesse. As operações de troca de arestas e extensão de grafos colaboram para a construção de famílias de grafos conforme o gênero  $g$  da superfície aumenta demandando-se a obtenção dos grafos de interesse. Dessa forma, com base

efetuar primeiramente a troca de arestas e logo após, as duas técnicas intercaladas.

**Exemplo 5.1.31.** No Exemplo 4.2.18 é exibido uma maneira de emparelhamento trivalentes sobre o 4-toro por meio de um lado, Figura 5.12 ilustra como obter o mesmo grafo através de bitoros gerados por emparelhamentos trivalentes.

Figura 5.12 - Grafo de emparelhamento trivalentes

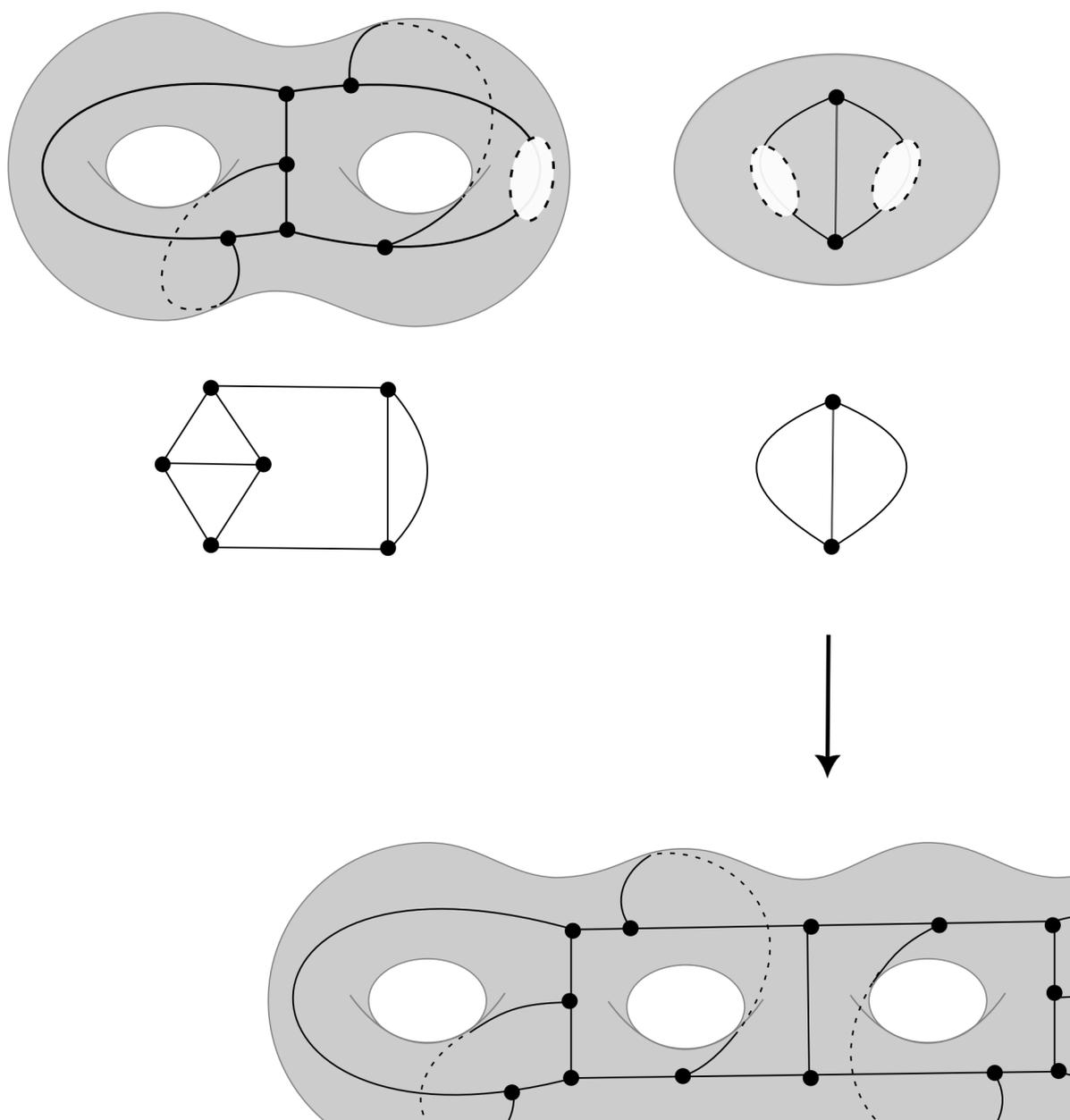
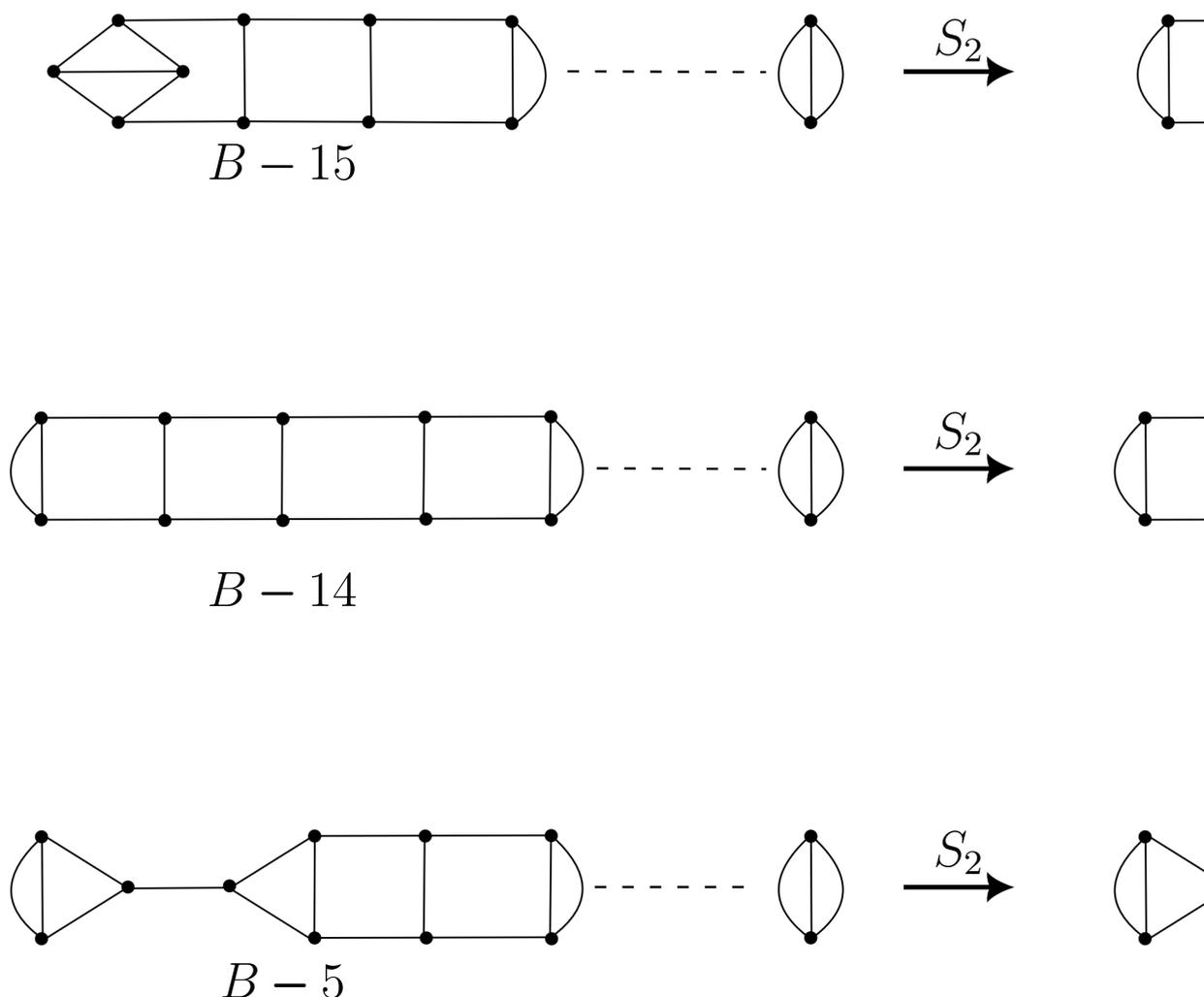


Figura 5.13 - Soma conexa de grafos de emparelhamentos grafo gerador.



Fonte: Elaborado pela autora (

Com a finalidade de obter grafos de emparelhamento de superfície  $M_g$ , recomenda-se seguir os passos abaixo:

**1º Passo:** Escolher  $g$  e  $k$ .

1.1 Se  $M_g$  pode ser obtido pela soma conexa de  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$

**6º Passo:** Determinar os diagramas de emparelhamento encontrados.

**7º Passo:** Determinar o conjunto de diagramas de emparelhamento no grafo.

**8º Passo:** Determinar as somas conexas  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ .  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  estão associados, respectivamente, a  $M_g$ ,  $M_{g_1}$  e  $M_{g_2}$ .

**9º Passo:** Determinar todos os possíveis grafos de emparelhamento e as arestas dos grafos determinados no 8º passo.

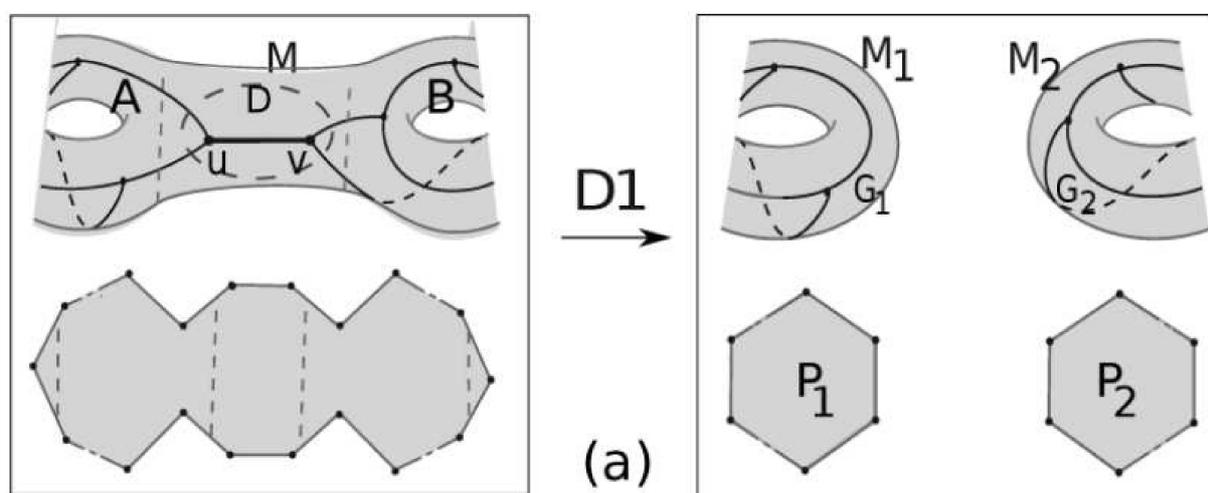
## 5.2 DECOMPOSIÇÃO DE EMPARELHAMENTO

Através das cirurgias  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  discutidas na seção anterior, criaremos novos grafos de emparelhamento por meio de emparelhamento. Criaremos uma técnica que reverte o processo da cirurgia de emparelhamento, chamada *decomposição de emparelhamento*. O interesse sobre essa técnica é fragmentar uma superfície muito grande em pequenas superfícies, onde o estudo de emparelhamento sobre essa superfície é de emparelhamento. Assim, fragmentar um grande grafo  $G$  em pequenos grafos  $G_i$ , onde cada  $G_i$  tem um emparelhamento, teríamos pela Teorema 5.1.24,  $G$  com um emparelhamento associado à algum polígono regular.

Seja  $\phi$  um emparelhamento trivalente associado a um subgrafo de  $G$  constituído por uma aresta com extremidades em  $M$  tal que  $Q \subset D$ . Se o complemento de  $Q$  em  $G$  for formado por dois grafos disjuntos,  $A$  e  $B$ , tem-se que o bordo do disco  $D$  intercepta

O processo de decomposição dá-se do seguinte modo (ver Figura 5.14) em  $M$ , denotado por  $C$ , contendo o subgrafo conexo, denotados por  $M_A$  e  $M_B$ , incluindo os subgrafos  $M_A$  e  $M_B$  em uma dessas superfícies terá um bordo. Agora, tomando  $M_A$  e  $M_B$  com um bordo de  $M_A$  e  $M_B$  será gerado, respectivamente, as superfícies indicadas por  $M_1$  e  $M_2$ . Além disso, estendendo e identificando as arestas dos subgrafos de  $A$  e  $B$  obtém-se, respectivamente, os polígonos  $P_1$  e  $P_2$  (ver Figura 5.14).

Figura 5.14 - Decomposição de emparelhamento



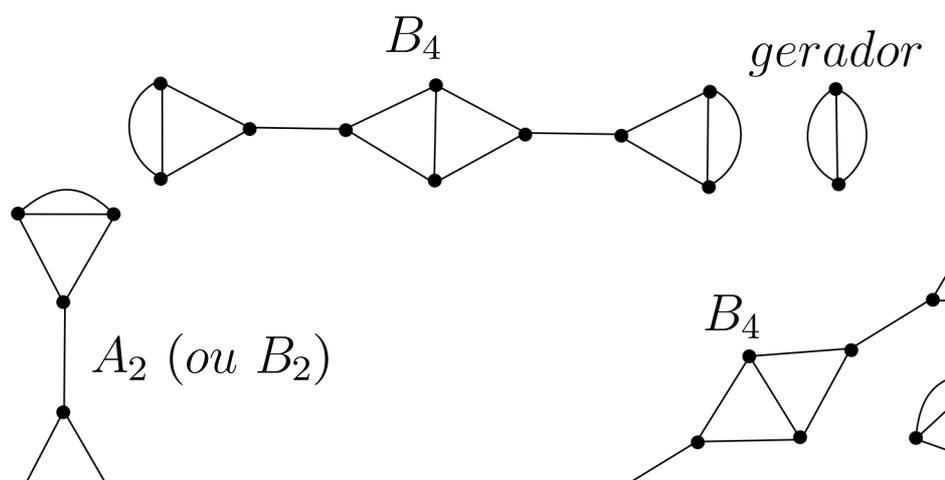
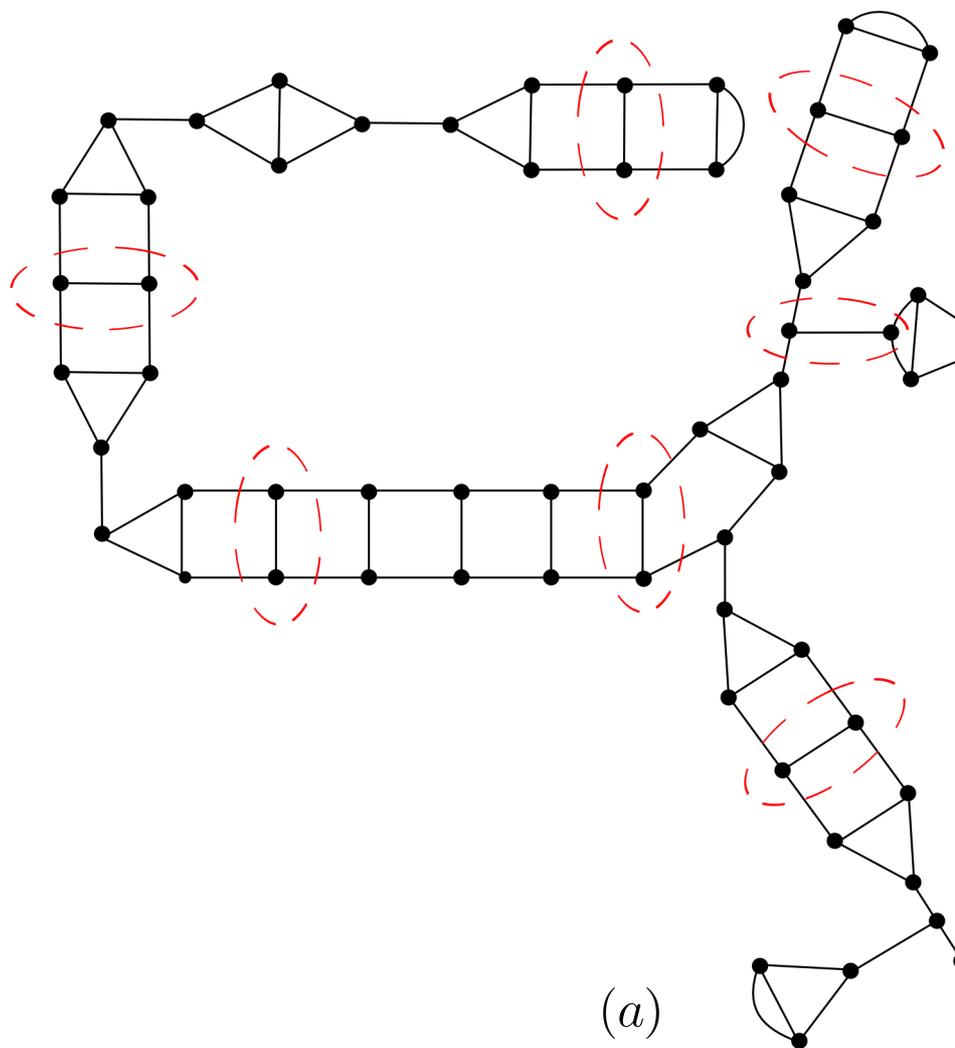
Fonte: Retirado de (5), p.

**Definição 5.2.2.** A decomposição descrita acima será um **emparelhamento** quando os polígonos  $P_1$  e  $P_2$  forem simples (ver Figura 5.14).

**Proposição 5.2.3.** *Seja  $\phi$  um emparelhamento de arestas*



Figura 5.15 - Decomposição de um grafo de emp



## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudada a construção do emparelhamento regular resultando em uma superfície fechada e orientada. A topologia quociente, mostramos a relação das aplicações aos grafos, denominados grafos de emparelhamento.

Através dos grafos grafos de emparelhamento sobre uma superfície é obtida utilizando um polígono regular. Quando um grafo qualquer é de emparelhamento. Além disso, determinam os diagramas de emparelhamento sobre o polígono o grafo pode ser mergulhado sobre a superfície.

Com o objetivo de determinar quando um grafo é extensão e contração de grafos no espaço e sobre a superfície obtido pela extensão (ou contração) de um grafo de emparelhamento também, grafo de emparelhamento. O que não é garantido no espaço. Ainda, demonstramos que todo grafo de emparelhamento  $M_g$  (onde  $g$  é o gênero) pode ser obtido por extensão do grafo  $I_{2g}$ .

Ademais, são definidos as cirurgias de emparelhamento para construir famílias de grafos de emparelhamento para qualquer  $g$  que todo grafo de emparelhamento trivalente obtido por extensão de emparelhamento também é um grafo de emparelhamento. Também construímos famílias de grafos de emparelhamento de aridade  $2g$  que tais famílias estão associadas à tesselação  $\{12g - 2\}$ .

## REFERÊNCIAS

- 1 ALBUQUERQUE, C. D. **Análise e Construção de Grafos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais.** (Engenharia Elétrica) - UNICAMP-FEEC, São Paulo, 2010.
- 2 ALVES, A. F. **Análise dos Emparelhamentos de Grafos Hiperbólicos para a Construção de Constelações Geometricamente Uniformes.** 2011. Tese (Doutorado em Engenharia) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, São Paulo, 2011.
- 3 ALVES, A. F.; LOPES, A. O.; TAVARES, G. P. & FERREIRA, B. S. **Emparelhar as arestas dos polígonos hiperbólicos e os resultados na construção de constelações de sites uniformes.** In *Anais do Congresso Nacional de Matemática (CNMAI)*, Caldas Novas, Goiás, 2010.
- 4 ELLIS-MONAGHAN, J. A.; MOFFATT, I. **Graphs, Polynomials, and Knots.** Springer Science & Business Media, 2011.
- 5 FARIA, M.B.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO, J. **Edges associated to trivalent graphs.** *Bulletin of the London Mathematical Society, New Series*, **47**(4) (2016), 1085-1095.
- 6 FARIA, M. B; PALAZZO, R. J.(2009). **Emparelhamentos de Grafos Associados da Tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ .** *Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC 2009.*
- 7 FERREIRA, B. S. **Emparelhamento de Arestas de Grafos Regulares.** 2020. *Dissertação (Magister Science)* - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2020.

- 15 MENDES DE JESUS, C. (2022). **Grafos e aplicações** da X Bienal de Matemática.
- 16 MENDES DE JESUS, C.; ROMERO, P.D. **Graphs associated a pairing of edges for Regular Polygons** *Mathematical Society, New Series*, **51**(2) (2020), 527-532.
- 17 MUNKRES, J. R. **Topology: a First Course** *John Wiley & Sons*, 1974.
- 18 NAKAMURA, G. **Generic fundamental polygon** *Kodai Mathematical Journal*, **27**(1) (2004), 88-104.
- 19 SILVA, H. C. **Extensão de grafos sobre superfícies de gênero  $g$** , *PPMAT/UFV*, Viçosa, MG, 2020.
- 20 SILVA, G. F. **Emparelhamento de arestas de polígono de gênero  $g$** , *PPMAT/UFV*, Viçosa, MG, 2011.
- 21 VOLOSHIN, V. I. **Introduction to Graph and Hypergraph Theory** *World Scientific Publisher, Inc.*, New York, 2013.
- 22 WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory** (2nd ed.) *John Wiley & Sons*, 2001.
- 23 WILSON, R. J. **Introduction to Graph Theory** (2nd ed.) *John Wiley & Sons*, 1996.