

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sheucier Alves de Medeiros

Geometria Tropical e Patchwork

Juiz de Fora

2024

**Sheucíer Alves de Medeiros**

**Geometria Tropical e Patchwork**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pela autora

Medeiros, Sheucier Alves de.

Geometria Tropical e Patchwork / Sheucier Alves de Medeiros. – 2024.  
85 f. : il.

Orientadora: Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Geometria Tropical. 2. Dualidade. 3. Patchwork. 4. Teorema de  
Kapranov. I. Andrea Ribeiro, Flaviana; II. Darc Antonia Santos da Cruz,  
Joana, III. Título.

**Sheucíer Alves de Medeiros**

**Geometria Tropical e Patchwork**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 01 de março de 2024.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Flaviana Andréa Ribeiro** - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Joana Darc Antonia Santos da Cruz** - Coorientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. André Luís Contiero**

Universidade Federal de Minas Gerais

**Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Beatriz Casulari da Motta Ribeiro**

Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **Flaviana Andrea Ribeiro, Professor(a)**, em 10/05/2024, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Joana Darc Antonia Santos da Cruz, Professor(a)**, em 09/07/2024, às 23:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Beatriz Casulari da Motta Ribeiro, Professor(a)**, em 16/07/2024, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **André Luís Contiero, Usuário Externo**, em 19/07/2024, às 19:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1718592** e o código CRC **B58BE719**.

---

Dedico este trabalho ao meu Amor

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha mãe Hérica por tudo que ela já fez por mim e por minha vida acadêmica. Obrigada por sempre acreditar no meu potencial mais do que eu mesma, por reforçar em toda oportunidade o quanto tem orgulho de mim e por sempre me lembrar que eu posso e que eu consigo ir mais longe. Também preciso agradecer à minha avó Dorinha, minha segunda mãe, que me criou, que me viu passar por todas as dificuldades acadêmicas e que, mesmo sem entender bem na maioria das vezes, sempre esteve lá me apoiando e acreditando que eu conseguiria. Minhas mães, vocês são o meu maior orgulho e inspiração.

Para minha orientadora, Flaviana, não existem palavras para expressar toda minha gratidão. Ela foi a pessoa que me acolheu desde o princípio da graduação e que me acompanhou em todos os passos da minha vida acadêmica, me ajudando sempre a tomar as melhores decisões. Foi ela quem me apresentou ao maravilhoso mundo da Geometria Tropical e quem topou embarcar nessa aventura comigo, duas vezes! Flaviana, que eu sou sua fã como aluna você já sabe, mas quero que saiba que pessoalmente falando, sou ainda mais. Você é uma mulher incrível, com um coração imenso e que me inspira muito a querer ser uma pessoa melhor, em todos os sentidos. Obrigada por tanto!

Não poderia deixar de agradecer também à minha coorientadora Joana, por todo apoio, por compartilhar conosco seu conhecimento e por trazer um pouco de calma para as nossas reuniões agitadas. E, claro, agradecer infinitamente à minha amiga, irmã, gêmea e futura colega de casa, Larissa, por toda força e apoio que me deu durante a graduação e o mestrado. Amiga, você sabe que sem você eu não estaria onde estou, não sabe? Obrigada por tanto e saiba que Larishell é pra sempre.

Heitor, sinto que te agradecer é a coisa que eu mais quero e que mais preciso fazer. E são tantos os motivos pelos quais sinto gratidão que não caberiam nem em todas as páginas dessa Dissertação. Você me pediu um poema e eu achei que esse fosse o lugar certo, porque durante todo esse trabalho você sempre esteve por perto. E não foi só me dando confiança e apoio emocional, você nunca me deixou sozinha no meu mundo tropical. Eu sou grata por todas as vezes que você me ouviu quando eu não podia falar com mais ninguém, e por todas as vezes que estava cheio de problemas, mas me ajudou a resolver os meus também. E tudo isso é só um milésimo do motivo, do verdadeiro porquê, que me faz te admirar, te amar e dedicar todo esse trabalho à você.

Por fim, agradeço aos professores e amigos que passaram pela minha trajetória, à OBMEP por todas as oportunidades, à CAPES pelo apoio financeiro, à UFJF pelo ensino gratuito e de qualidade e à todos os funcionários que fizeram possível a minha formação.

“L’algèbre n’est qu’une géométrie écrite, la géométrie n’est qu’une algèbre figurée.” (Sophie Germain)

## RESUMO

A primeira parte deste trabalho é dedicada ao estudo das curvas tropicais planas, definidas como a projeção em  $\mathbb{R}^2$  dos pontos não diferenciáveis dos gráficos de funções lineares por partes cujos coeficientes são números reais. Neste contexto, uma ferramenta muito útil para o estudo de curvas tropicais é a subdivisão dual, que possibilita dotar a curva de uma estrutura combinatória. Nesta parte, o principal resultado é o Teorema da Dualidade. Na segunda parte, estudamos curvas tropicais como limites de amebas e uma técnica conhecida como *Patchwork*, usada para construir curvas algébricas reais por meio de curvas tropicais. Essa técnica permite responder, em alguns casos particulares, ao 16º Problema de Hilbert que, em linhas gerais, propõe a construção de uma lista de possíveis arranjos de curvas algébricas reais de um dado grau.

Palavras-chave: Geometria Tropical. Dualidade. Patchwork. 16º Problema de Hilbert.

## ABSTRACT

The first part of this work is dedicated to the study of flat tropical curves, defined as graphs of piecewise linear functions whose coefficients are real numbers. In such a context, a very useful tool for studying tropical curves is the dual subdivision, which makes it possible to provide the curve with a combinatorial structure. In this part, the main result is the Duality Theorem. In the second part, we study tropical curves as amoeba limits and a technique known as Patchworking, used to construct real algebraic curves through tropical curves. This technique allows us to respond, in some particular cases, to Hilbert's 16th Problem which, in general terms, proposes the construction of a list of possible arrangements of real algebraic curves of a given degree.

Keywords: Tropical Geometry. Duality. Patchworking. Hilbert's 16th Problem.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ÁLGEBRA TROPICAL . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1	O SEMICORPO TROPICAL . . . . .	11
2.2	POLINÔMIOS TROPICAIS E HIPERSUPERFÍCIES . . . . .	12
2.3	ESTRUTURA POLIÉDRICA DAS HIPERSUPERFÍCIES . . . . .	16
<b>2.3.1</b>	<b>Poliedros e Hipersuperfícies . . . . .</b>	<b>16</b>
2.4	SUBDIVISÃO DUAL . . . . .	23
<b>3</b>	<b>CURVAS TROPICAIS COMO LIMITE DE AMEBAS . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	AMEBAS DE CURVAS COMPLEXAS . . . . .	33
3.2	SÉRIES DE PUISEUX E O TEOREMA DE KAPRANOV . . . . .	40
<b>4</b>	<b>PATCHWORK . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1	PATCHWORK DE UMA RETA TROPICAL . . . . .	47
<b>4.1.1</b>	<b>PATCHWORK DE CURVAS TROPICAIS NÃO-SINGULARES . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>5</b>	<b>PATCHWORK DE CURVAS TROPICAIS E O 16º PROBLEMA DE HILBERT . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1	PLANO PROJETIVO REAL E CURVAS PROJETIVAS . . . . .	72
5.2	O 16º PROBLEMA DE HILBERT . . . . .	74
<b>5.2.1</b>	<b>Componentes conexas de uma curva plana . . . . .</b>	<b>74</b>
5.3	PROIBIÇÕES . . . . .	76
<b>5.3.1</b>	<b>Arranjos possíveis para curvas de até grau 5 . . . . .</b>	<b>78</b>
5.4	PATCHWORK NO 16º PROBLEMA DE HILBERT . . . . .	81
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>85</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentaremos um estudo sobre *Geometria Tropical*, uma área de pesquisa cujas definições básicas foram consolidadas em meados de 1990 e que tem ligações com muitos ramos da matemática, como por exemplo, geometria algébrica, geometria simplética, análise complexa, sistemas dinâmicos, lógica e combinatória. Suas raízes remontam pelo menos ao trabalho de G. Bergman (1) em conjuntos de limites logarítmicos do início da década de 70, mas a sua atual ascensão deve-se principalmente a M. Kapranov, M. Kontsevich, G. Mikhalkin, O. Viro e B. Sturmfels.

A geometria tropical é uma geometria sobre a álgebra tropical, obtida considerando-se o conjunto  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  munido de duas operações tropicais: a adição, que consiste em tomar o máximo e a multiplicação, que é soma usual. Originalmente, usava-se o nome mais intuitivo *álgebra max-plus*, mas pesquisadores da ciência da computação da Universidade de Paris VII cunharam o adjetivo “tropical” em homenagem ao brasileiro Imre Simon, um cientista também da computação que foi um dos pioneiros a escrever sobre a área.

É comum nos perguntarmos porque é interessante trabalhar com a álgebra tropical ao invés da álgebra clássica. A resposta principal é a união de dois fatos importantes: no mundo tropical os objetos são sempre lineares por partes e o mundo clássico pode ser degenerado até o mundo tropical. Isto significa que podemos ver os objetos tropicais como limites de objetos clássicos e que podemos obter enunciados no mundo tropical similares aos do mundo clássico, o que é interessante pois objetos lineares por partes são mais simples de se estudar. Porém, para trabalhar no mundo tropical, precisamos entendê-lo mais a fundo, o que por sua vez, não é um trabalho tão simples.

No Capítulo 2 dessa Dissertação, vamos começar o estudo da geometria tropical usando muito dos argumentos algébricos. Com ferramentas da geometria poliédrica, vamos definir os polinômios tropicais e as hipersuperfícies definidas por eles. A partir disso, nosso objetivo será mostrar que uma hipersuperfície definida por um polinômio tropical  $f$  traz consigo uma estrutura poliédrica que subdivide o  $\mathbb{R}^n$  e que é dual à uma subdivisão do polígono de Newton definido pelo polinômio tropical  $f$ . Esse resultado é conhecido como Teorema da Dualidade e nos fornece ferramentas capazes de simplificar muito os objetos tropicais, em particular, as curvas tropicais, cujo estudo será aprofundado nos próximos capítulos.

Como dissemos anteriormente, objetos tropicais podem ser vistos como limite de objetos clássicos. No Capítulo 3, apresentaremos a definição de um objeto clássico muito importante neste trabalho, as amebas de curvas algébricas planas complexas. Em seguida, mostraremos que as curvas planas tropicais podem ser vistas como limite de amebas e, dessa forma, veremos que podemos construir a geometria tropical a partir da geometria

clássica. O resultado estrela deste capítulo é o Teorema de Kapranov, que é crucial para o desenvolvimento das ideias do capítulo seguinte.

O título desse trabalho, Geometria Tropical e *Patchwork*, já nos prepara para uma divisão do mesmo em duas partes. Já falamos muito de geometria tropical até aqui, então nos Capítulos 4 e 5 vamos nos dedicar ao *patchwork* e à motivação para o estudo do mesmo. O *Patchwork* Combinatório foi uma técnica desenvolvida por Oleg Viro na década de 1970 para construção de curvas algébricas planas com topologia controlada. Hoje, sabemos que essa técnica nos fornece um método puramente combinatório de construção de curvas algébricas reais a partir de curvas tropicais. Como estamos falando de topologia de curvas, nesses capítulos os argumentos usados para desenvolver e estudar o método de *patchwork* são menos algébricos e mais topológicos.

Utilizando conhecimentos apresentados nos capítulos anteriores, iniciaremos o Capítulo 4 mostrando como realizar o *patchwork* de uma reta tropical atribuindo pares de sinais para os arcos de uma ameiba que converge para ela. Em seguida, definiremos as curvas tropicais não-singulares com conjuntos de arestas finitas torcidas e generalizaremos o *patchwork* da reta para essas curvas, o que só será possível graças ao Teorema da Dualidade.

No último capítulo, apresentaremos nossa motivação para o estudo do *patchwork*: o 16º Problema de Hilbert. Ele trata da topologia de curvas e superfícies e pode ser enunciado como: “Dado um inteiro positivo  $m$ , estabeleça a lista dos arranjos realizáveis por curvas projetivas reais planas de grau  $m$ ”. Para tratar este problema, olharemos para o *patchwork* tropical como um quebra-cabeças com muitas simetrias cujas peças são codificadas por pares de sinais. Desse modo, para cada par de sinal atribuído a um arco de uma ameiba que converge para uma curva tropical de grau  $m$ , somos capazes de construir uma topologia realizada por uma curva algébrica projetiva real de grau  $m$ . Ou seja, o *patchwork* nos permite encontrar arranjos que são realizáveis por curvas algébricas projetivas reais e nos permite resolver alguns casos particulares do 16º Problema de Hilbert. Terminaremos este trabalho construindo por meio do *patchwork* a M-sêxtica de Gudkov, que realiza um arranjo conjecturado ser impossível por Hilbert na época em que ele enunciou o problema.

As principais referências usadas na pesquisa desta Dissertação foram os trabalhos de Erwan Brugallé, Grigory Mikhalkin, Johannes Rau, Andreas Gathmann, Kristin Shaw e Ilia Itenberg, encontrados em (2), (3), (5) e (11).

## 2 ÁLGEBRA TROPICAL

Neste capítulo, estudaremos algumas noções básicas de geometria poliédrica que serão utilizadas para definir conceitos e demonstrar importantes resultados da geometria tropical. O nosso principal objetivo aqui é estudar as hipersuperfícies tropicais (em especial, as curvas tropicais) e suas subdivisões duais. Mais especificamente, uma hipersuperfície tropical  $V(f)$  traz consigo um polígono de Newton  $NP(f)$  dotado de uma subdivisão, que é dual à subdivisão do  $\mathbb{R}^n$  definida por  $V(f)$ . O principal resultado deste capítulo é o Teorema da Dualidade e a principal referência para ele é livro do Mikhalkin (3).

### 2.1 O SEMICORPO TROPICAL

Na álgebra tropical definimos sobre  $\mathbb{R}$  as operações de adição e multiplicação tropicais (denotadas por “+” e “ $\times$ ”, respectivamente) da seguinte maneira:

$$“a + b” = \max\{a, b\} \quad \text{e} \quad “a \times b” = a + b.$$

Podemos verificar que estas operações são comutativas e que a multiplicação tropical é distributiva em relação à adição tropical. Porém, diferentemente da sua correspondente clássica, a adição tropical não possui elemento neutro em  $\mathbb{R}$ . De fato, não existe  $e \in \mathbb{R}$  tal que “ $a + e$ ” =  $\max\{a, e\} = a$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , pois neste caso teríamos  $e < a$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o que é um absurdo, pois  $\mathbb{R}$  é ilimitado inferiormente. No entanto, podemos estender naturalmente as duas operações tropicais para o conjunto  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , onde  $\forall a \in \mathbb{T}$ ,

$$“a + (-\infty)” = \max\{a, -\infty\} = a \quad \text{e} \quad “a \times (-\infty)” = a + (-\infty) = -\infty.$$

Dessa forma, a adição tropical em  $\mathbb{T}$  passa a ter  $-\infty$  como elemento neutro. Já o elemento neutro da multiplicação tropical em  $\mathbb{T}$  é o zero de  $\mathbb{R}$ , isto é, “ $a \times 0$ ” =  $a + 0 = a$ , para todo  $a \in \mathbb{T}$ .

Outra diferença entre a adição clássica e a tropical é que um elemento de  $\mathbb{T}$  não possui simétrico para a operação “+”, ou seja, a “subtração tropical” não está definida. De fato, o simétrico de  $a \in \mathbb{T}$  seria  $(-a) \in \mathbb{T}$  tal que “ $a + (-a)$ ” =  $\max\{a, (-a)\} = -\infty$ , o que só acontece se  $a$  e  $(-a)$  forem iguais a  $-\infty$ . Na verdade, a adição tropical é idempotente, ou seja, “ $a + a$ ” =  $\max\{a, a\} = a$ ,  $a \in \mathbb{T}$ .

A menos deste último fato, o conjunto  $\mathbb{T}$  munido das operações “+” e “ $\times$ ” satisfaz todas as demais propriedades de um corpo. Por isso, chamamos  $(\mathbb{T}, “+”, “\times”)$  de semicorpo tropical.

**Observação 2.1.1.** Omitiremos o símbolo “ $\times$ ” na multiplicação tropical e escreveremos apenas “ $ab$ ” para representar “ $a \times b$ ”. Escreveremos “ $x^j$ ” para representar a multiplicação

tropical de  $x$  por ele mesmo  $j$  vezes e, como a multiplicação tropical é a soma usual, temos “ $x^j$ ” =  $jx$ .

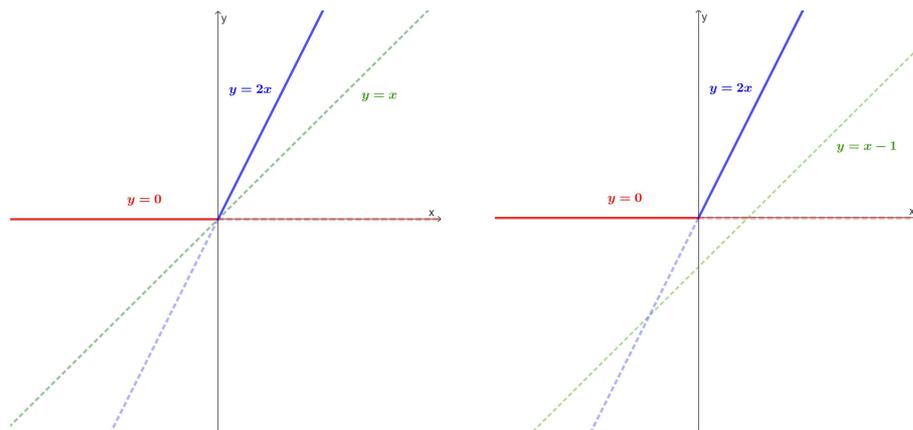
## 2.2 POLINÔMIOS TROPICAIS E HIPERSUPERFÍCIES

Como na álgebra clássica, definimos um polinômio tropical em  $n$  variáveis como sendo uma expressão da forma “ $\sum_{j \in A} a_j x^j$ ”, onde  $A \subseteq \mathbb{N}^n$  é finito e  $a_j \in \mathbb{T}$ , para todo  $j \in A$ . Reformulando a expressão “ $\sum_{j \in A} a_j x^j$ ” em termos das operações canônicas, um polinômio tropical também pode ser visto como uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}$  definida por

$$f(x) = \left\langle \sum_{j \in A} a_j x^j \right\rangle = \max_{j \in A} \{a_j + jx\},$$

onde  $jx = \langle j, x \rangle = j_1 x_1 + \dots + j_n x_n$ , ou seja, um polinômio tropical é uma função convexa afim por partes. Vale a pena observar que diferentes polinômios tropicais podem determinar a mesma função. Por exemplo,  $f_1(x) = \langle 0 + x + x^2 \rangle$  e  $f_2(x) = \langle 0 + (-1)x + x^2 \rangle$  definem a mesma função em  $\mathbb{R}$ .

Figura 1 – Gráficos das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , respectivamente



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Definição 2.2.1.** O grau de um polinômio tropical “ $\sum_{j \in A} a_j x^j$ ”;  $j = (j_1, \dots, j_n) \in A \subset \mathbb{Z}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  é definido como o máximo das somas  $j_1 + \dots + j_n$  referentes aos coeficientes  $a_j \neq -\infty$ .

Os objetos básicos da geometria algébrica são os conjuntos formados pelos zeros de polinômios,  $V(F) = \{z \in K^n; F(z) = 0\}$ , para algum  $F \in K[z_1, \dots, z_n]$ . Aqui, as particularidades da geometria tropical começam. Como o zero tropical é  $-\infty$  e nenhuma função definida por um polinômio tropical assume o valor  $-\infty$ , precisamos de uma definição alternativa para os “zeros” de um polinômio tropical.

**Definição 2.2.2.** *Seja  $f$  um polinômio tropical em  $n$  variáveis. Definimos a hipersuperfície  $V(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  como sendo o conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  onde a função  $f$  é não diferenciável (considerando a derivada convencional).*

Neste texto, vamos nos restringir à geometria tropical em  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{T} \setminus -\infty)^n$  ao invés de  $\mathbb{T}^n$ . Em termos clássicos, isso corresponde à variedades em  $(K^*)^n$  ao invés de  $K^n$ . Por isso, em alguns momentos trabalharemos com polinômios de Laurent, isto é, consideraremos expoentes negativos.

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $f = \sum_{j \in A} a_j x^j$  um polinômio tropical. A hipersuperfície  $V(f)$  é igual ao conjunto de pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  onde  $f(x)$  é atingido em pelo menos dois monômios, ou seja,*

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists i, j \in A, \text{ com } i \neq j, \text{ tais que } f(x) = "a_i x^i" = "a_j x^j"\}.$$

*Demonstração.* Se  $f(x)$  é atingido em apenas um monômio, então  $f$  é localmente afim e portanto diferenciável, ou seja,  $x \notin V(f)$ . Agora, se  $f(x)$  é atingido nos monômios " $a_i x^i$ " e " $a_j x^j$ ", com  $i \neq j$ , então  $f(x) = a_i + ix = a_j + jx$ . Se  $f$  fosse diferenciável em  $x$ , teríamos  $i = d_x f = j$ , o que é um absurdo. Portanto, se  $f(x)$  é atingido em pelo menos dois monômios, então  $x \in V(f)$ . ■

**Definição 2.2.3.** *Quando  $n = 2$ , chamamos  $V(f)$  de **curva tropical** e quando temos  $f(x, y) = "ax + by + c"$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , chamamos  $V(f)$  de **reta tropical**. Assim como no mundo clássico, curvas tropicais definidas por polinômios tropicais de graus 2, 3, 4, etc., são chamadas, respectivamente, de cônicas tropicais, cúbicas tropicais, quárticas tropicais, etc.*

**Exemplo 2.2.1.** *Seja  $f(x, y) = "ax + by + c" = \max\{a + x, b + y, c\}$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Temos que  $V(f)$  é formada pelos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem:*

- (a)  $a + x = b + y$  e  $a + x \geq c$  que resulta em  $y = x + a - b$  e  $x \geq c - a$ . Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(x, x + a - b) \mid x \geq (c - a)\}}$$

fazem parte da curva tropical  $V(f)$ .

- (b)  $a + x = c$  e  $c \geq b + y$  que resulta em  $x = c - a$  e  $y \leq c - b$ . Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(c - a, y) \mid y \leq (c - b)\}}$$

fazem parte da curva tropical  $V(f)$ .

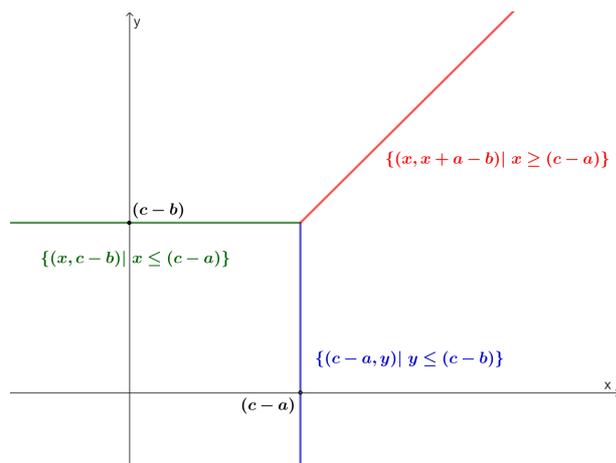
(c)  $b + y = c$  e  $c \geq a + x$  que resulta em  $y = c - b$  e  $x \leq c - a$ . Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(x, c - b) \mid x \leq (c - a)\}}$$

fazem parte da curva tropical  $V(f)$ .

A união das semirretas dos itens (a), (b) e (c) forma a reta tropical  $V(f)$ , representada na Figura 2.

Figura 2 – Reta tropical  $V(f)$  definida por  
 $f(x, y) = "ax + by + c"$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

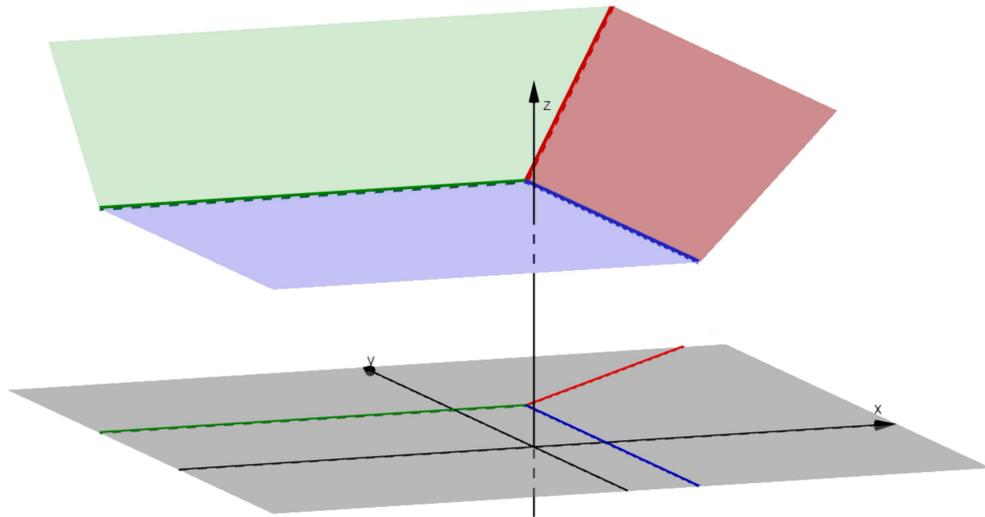
Observe que o gráfico da função definida por  $f(x, y) = "ax + by + c"$  é a região do plano  $z = a + x$  que está acima dos planos  $z = b + y$  e  $z = c$ , união com a região do plano  $z = b + y$  que está acima dos planos  $z = a + x$  e  $z = c$ , união com a região do plano  $z = c$  que está acima dos planos  $z = a + x$  e  $z = b + y$ . A reta tropical  $V(f)$  é a projeção em  $\mathbb{R}^2$  das semi-retas obtidas como interseções das superfícies planas que compõem o gráfico de  $f$ , como podemos ver na Figura 3.

**Exemplo 2.2.2.** De forma análoga ao exemplo anterior, obtemos o gráfico da cônica tropical

$$g(x, y) = "(-1)x^2 + (-1)y^2 + 1xy + x + y + 0" = \max\{-1 + 2x, -1 + 2y, 1 + x + y, x, y, 0\}$$

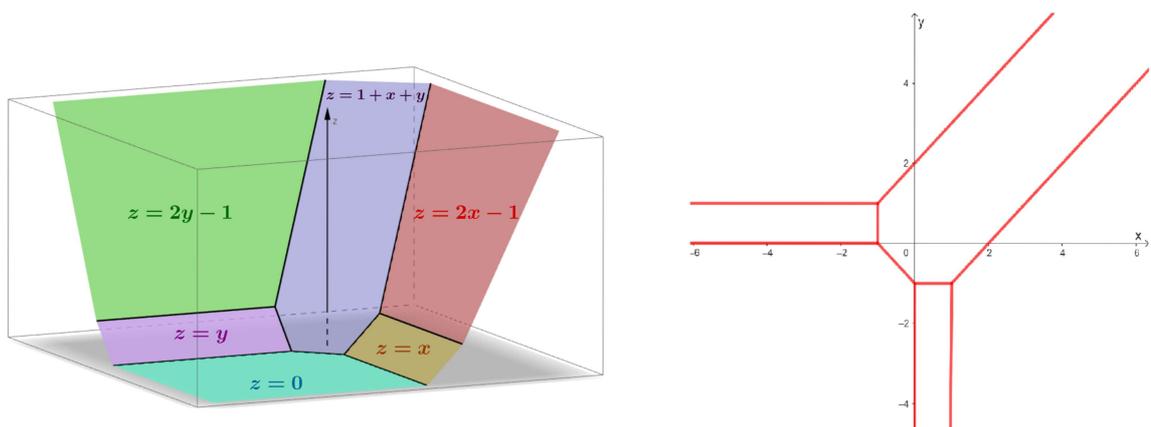
e a curva tropical  $V(g)$  definida por ela. Observe a Figura 4.

Figura 3 – Gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^3$  e a reta tropical  $V(f)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 4 – Gráfico de  $g$  em  $\mathbb{R}^3$  e a curva tropical  $V(g)$  em  $\mathbb{R}^2$



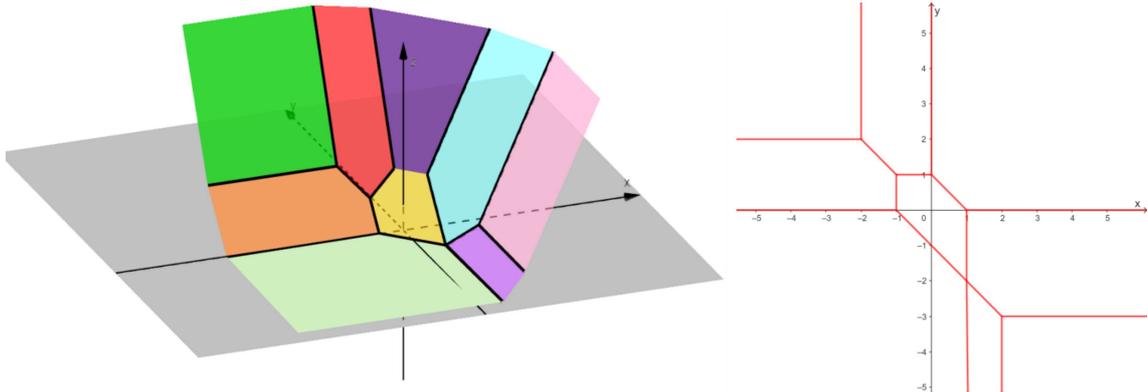
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Exemplo 2.2.3.** Na Figura 5, podemos ver o gráfico da quártica tropical

$$h(x, y) = "0 + (-1)x + (-3)x^2 + y + 1xy + x^2y + (-2)y^2 + xy^2 + x^2y^2"$$

e a curva tropical  $V(h)$ .

Figura 5 – Gráfico de  $h$  em  $\mathbb{R}^3$  e a curva tropical  $V(h)$  em  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

## 2.3 ESTRUTURA POLIÉDRICA DAS HIPERSUPERFÍCIES

Nessa seção, veremos que as hipersuperfícies tropicais são objetos da *geometria poliédrica* que será descrita a seguir. Porém, mesmo que seus cálculos sejam mais simples do que no caso clássico, para polinômios mais complicados, pode ser uma tarefa muito tediosa trabalhar com uma hipersuperfície tropical. Nesse contexto, uma ferramenta útil é a chamada subdivisão dual. É a subdivisão dual do polítopo de Newton de  $f$  que dá uma estrutura combinatória a  $V(f)$ .

### 2.3.1 Poliedros e Hipersuperfícies

Uma função  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  da forma:  $k(x) = a + jx$ , para algum  $j \in \mathbb{Z}^n$  e  $a \in \mathbb{R}$  (onde  $jx$  denota o produto escalar canônico de  $\mathbb{R}^n$ ), é chamada uma função *inteira afim* (ou um *monômio tropical*). Para cada função inteira afim  $k$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , o *semi-espaço aberto*, o *semi-espaço fechado* e o *hiperplano* associados a  $k$ , são, respectivamente, os conjuntos:

$$H_k^> = \{x \in V; k(x) > 0\}, \quad H_k^+ = \{x \in V; k(x) \geq 0\} \quad \text{e} \quad H_k = \{x \in V; k(x) = 0\}.$$

Para simplificar as notações, definimos:  $H_k^< = H_{-k}^>$  e  $H_k^- = H_{-k}^+$ .

**Definição 2.3.1.** Um subconjunto  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  é chamado **poliedro racional** se é a interseção de um número finito de semi-espaços fechados. Se  $k$  é uma função inteira afim tal que  $\sigma \subset H_k^+$  ou  $\sigma \subset H_k^-$ , dizemos que  $\tau = \sigma \cap H_k$  é uma *face* do poliedro racional  $\sigma$ . A *fronteira relativa* de um poliedro  $\sigma$ , denotada por  $\partial\sigma$ , é a união de todas as faces próprias de  $\sigma$ . O conjunto  $\text{int}(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma$  é chamado de *interior relativo* de  $\sigma$ .

**Observação 2.3.1.** Note que para  $k \equiv 0$  temos  $H_k^+ = H_k = \mathbb{R}^n$  e  $\sigma \cap \mathbb{R}^n = \sigma$ , ou seja,  $\sigma$  é uma face dele mesmo.

Durante o texto, omitiremos a palavra “relativo” quando nos referirmos à fronteira e ao interior relativos de  $\sigma$ .

**Definição 2.3.2.** Denotamos por  $L(\sigma)$  o subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^n$  gerado por  $\sigma$ , ou seja,  $L(\sigma)$  é o espaço vetorial gerado por todas as diferenças  $x - y$ ;  $x, y \in \sigma$ . Definimos a dimensão de  $\sigma$  por  $\dim(\sigma) := \dim(L(\sigma))$ .

**Exemplo 2.3.1.** Considere o poliedro  $\sigma = H_{k_1}^+ \cap H_{k_2}^+ \cap H_{k_3}^+ \cap H_{k_4}^+ \subset \mathbb{R}^2$ , representado na Figura 6, onde

$$k_1(x, y) = -1 + (-1, 1)(x, y) = y - x - 1$$

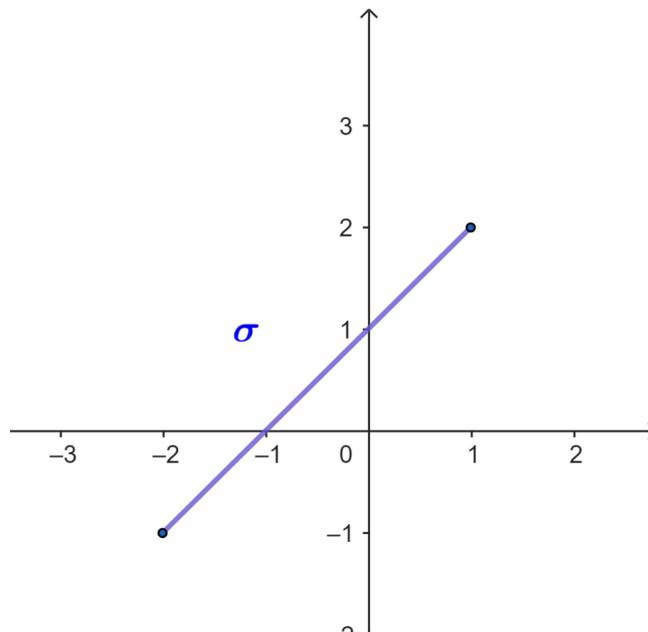
$$k_2(x, y) = 1 + (1, -1)(x, y) = 1 - y + x$$

$$k_3(x, y) = 3 + (1, 1)(x, y) = y + x + 3$$

$$k_4(x, y) = -3 + (-1, -1)(x, y) = 3 - x - y.$$

Então,  $\sigma$  é um conjunto limitado com fronteira igual a  $\partial\sigma = \{(-2, -1), (1, 2)\}$ . As faces próprias de  $\sigma$  são  $\sigma \cap H_{k_3} = \{(-2, -1)\}$  e  $\sigma \cap H_{k_4} = \{(1, 2)\}$  e  $\dim(\sigma) = 1$ , já que  $L(\sigma)$  é gerado pelo vetor  $(1, 1)$ .

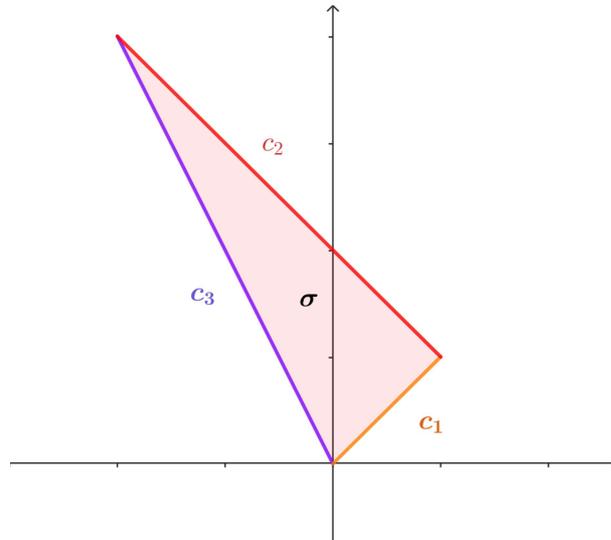
Figura 6 – Poliedro unidimensional



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Exemplo 2.3.2.** Na figura 7 está representado o poliedro racional  $\sigma = H_{k_1}^+ \cap H_{k_2}^+ \cap H_{k_3}^+$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $k_1(x, y) = 0 + (-1, 1)(x, y) = y - x$ ,  $k_2(x, y) = 2 + (-1, -1)(x, y) = 2 - x - y$  e  $k_3(x, y) = (2, 1)(x, y) = y + 2x$ . Observe que  $\sigma$  é um poliedro limitado e  $\partial\sigma = c_1 \cup c_2 \cup c_3$ . Além disso,  $\dim(\sigma) = 2$  já que os vetores  $(-2, 4)$  e  $(1, 1)$  estão em  $L(\sigma)$  e são linearmente independentes.

Figura 7 – Poliedro limitado



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Lema 2.3.1.** A soma de Minkowski de dois poliedros  $\sigma, \sigma' \subset \mathbb{R}^n$ , isto é,

$$\sigma + \sigma' = \{x + y; x \in \sigma, y \in \sigma'\},$$

é um poliedro.

*Demonstração.* Ver (4), Teorema 1.30. ■

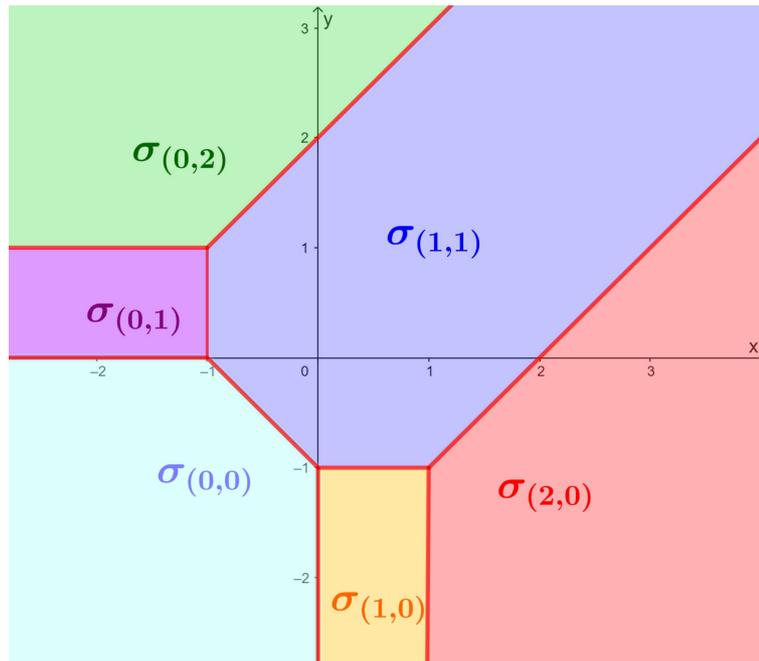
**Definição 2.3.3.** Seja  $f(x) = \sum_{j \in A} a_j x^j$  um polinômio tropical em  $n$  variáveis. Para cada  $j \in A$ , definimos o conjunto  $\sigma_j$  dos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  onde o máximo de  $f$  é atingido no monômio “ $a_j x^j$ ”, ou equivalentemente, onde  $f(x) = a_j + jx$ , isto é,

$$\sigma_j = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = a_j x^j\} = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx \geq a_i + ix, \forall i \in A\}.$$

Segue da definição que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j$ .

**Exemplo 2.3.3.** Na Figura 8 podemos ver os conjuntos  $\sigma_{(i,j)}$  definidos a partir do polinômio tropical  $g(x, y) = (-1)x^2 + (-1)y^2 + 1xy + x + y + 0$  do Exemplo 2.2.2.

Figura 8 – Subdivisão do  $\mathbb{R}^2$  dada pela curva tropical  $V(g)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $f(x) = \sum_{j \in A} a_j x^j$  um polinômio tropical em  $n$  variáveis.*

(i) *Para cada  $j \in A$ ,*

$$\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+,$$

*onde  $k_{ji}(x) = (a_j - a_i) + (j - i)x$ . Ou seja, para todo  $j \in A$ ,  $\sigma_j$  é um poliedro racional do  $\mathbb{R}^n$ .*

(ii) *Dados  $j, l \in A$ , com  $l \neq j$ ,  $\sigma_j \cap \sigma_l$  é vazio ou uma face comum de  $\sigma_j$  e  $\sigma_l$ .*

(iii) *Para cada  $j \in A$ ,  $\dim(\sigma_j) < n$  se, e somente se,  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \in A$ , com  $i \neq j$ .*

(iv) *As faces próprias de  $\sigma_j$  são interseções de  $\sigma_j$  com uma quantidade finita de  $\sigma_i$ 's.*

*Demonstração.*

(i) *Para a demonstração do primeiro item, basta observarmos que:*

$$\begin{aligned} x \in \sigma_j &\Leftrightarrow f(x) = a_j + jx \Leftrightarrow a_j + jx \geq a_i + ix, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow (a_j - a_i) + (j - i)x \geq 0, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow x \in H_{k_{ji}}^+, \forall i \in A \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+. \end{aligned}$$

Logo,  $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$ . Como  $A$  é finito, temos que  $\sigma_j$  é a interseção de um número finito de semi-espacos fechados, portanto,  $\sigma_j$  é um poliedro racional do  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Para a demonstração do segundo item, dados  $j, l \in A$ ,  $j \neq l$ , considere o conjunto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx = a_l + lx \geq a_i + ix, \forall i \in A\}.$$

Observe que  $H_{k_{jl}} = H_{k_{lj}} = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx = a_l + lx\}$  e, portanto, segue da definição de  $F$  que,  $F = \sigma_j \cap H_{k_{jl}} = \sigma_l \cap H_{k_{lj}} = \sigma_j \cap \sigma_l$ . Como  $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$ , temos, em particular,  $\sigma_j \subseteq H_{k_{jl}}^+$ , donde segue que  $\sigma_j \cap H_{k_{jl}}$  é uma face de  $\sigma_j$ . Logo, ou  $F = \emptyset$  ou  $F$  é uma face comum de  $\sigma_j$  e  $\sigma_l$ .

(iii) Pelo item (i) temos, para cada  $j \in A$ ,  $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$ , onde

$$H_{k_{ji}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; k_{ji}(x) = (a_j - a_i) + (j - i)x \geq 0\}.$$

Suponhamos  $\sigma_j \not\subseteq H_{k_{ji}}$ , para todo  $i \in A - \{j\}$ . Então, para cada  $i \in A$ ,  $i \neq j$ , existe  $x_i \in \sigma_j$  tal que  $x_i \notin H_{k_{ji}}$  (como  $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$ ,  $x_i \in H_{k_{ji}}^>$ , para todo  $i \neq j$ ). Sejam  $m$  o número de elementos do conjunto  $A - \{j\}$  e  $x$  a seguinte soma convexa dos  $x_i$ 's,

$$x = \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i.$$

Como  $\sigma_j$  é convexo (interseção de conjuntos convexos é convexa e semi-espacos fechados, abertos e hiperplanos são subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ ),  $x \in \sigma_j$ . Além disso,

$$k_{jl}(x) = (a_j - a_l) + (j - l) \left( \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i \right) = \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} [(a_j - a_l) + (j - l)x_i] > 0,$$

pois  $x_l \in H_{k_{jl}}^>$  e  $x_i \in \sigma_j \subset H_{k_{jl}}^+$ , para todo  $l \neq j$ . Logo,

$$x \in \bigcap_{i \in A - \{j\}} H_{k_{ji}}^> \subset \sigma_j \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in A - \{j\}} H_{k_{ji}}^> \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n,$$

o que implica  $\dim(\sigma_j) = n$ . Assim, se  $\dim(\sigma_j) < n$ ,  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \neq j$ . Reciprocamente, suponhamos  $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \neq j$ . Como,

$$L(\sigma_j) \subset L(H_{k_{ji}}) = \langle x - y; x, y \in H_{k_{ji}} \rangle = \{x \in \mathbb{R}^n; (j - i)x = 0\},$$

segue que  $\dim(L(H_{k_{ji}})) = n - 1$  e, portanto,  $\dim(\sigma_j) \leq n - 1 < n$ .

(iv) Sejam  $H_k^+$  um semi-espaco fechado contendo  $\sigma_j$  e  $\tau = \sigma_j \cap H_k$  uma face própria de  $\sigma_j$ , isto é,  $\sigma_j \cap H_k \neq \emptyset$  e  $\sigma_j \cap H_k \neq \sigma_j$ .

Afirmamos que  $\tau \subset \partial\sigma_j$ . De fato, se  $H_k \cap \text{int}(\sigma_j) \neq \emptyset$  ambas as inclusões  $\sigma_j \subset H_k^+$  e  $\sigma_j \subset H_k^-$  seriam impossíveis, pois nenhum dos dois semi-espacos fechados contém uma vizinhança de  $x \in H_k \cap \text{int}(\sigma_j)$ .

Agora, sabendo que  $\tau$  é convexo ( $\sigma_j$  e  $H_k$  são convexos) e que  $\tau \subset \partial\sigma_j \subset \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$ , vamos mostrar que  $\tau \subset H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \in A$ . Suponhamos  $\tau \not\subset H_{k_{ji}}$ , para todo  $i \in A$ ,  $i \neq j$ . Então, para cada  $i \in A$ ,  $i \neq j$ , existe  $x_i \in \tau$  tal que  $x_i \notin H_{k_{ji}}$  (logo,  $x_i \in H_{k_{ji}}^>$ , para todo  $i \neq j$ ). Sejam  $m$  o número de elementos do conjunto  $A - \{j\}$  e

$$x = \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i.$$

Analogamente à demonstração do item (iii), mostramos que  $x \in \tau$  (que é convexo) e  $x \in \bigcap_{i \neq j} H_{k_{ji}}^>$  que é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Assim,

$$x \in \left( \bigcap_{i \neq j} H_{k_{ji}}^> \right) \cap \sigma_j \Rightarrow x \in \text{int}(\sigma_j).$$

Absurdo, pois  $\tau \subset \partial\sigma_j$ , ou seja,  $\tau \cap \text{int}(\sigma_j) = \emptyset$ . Logo,  $\tau \subset H_{k_{ji}}$ , para algum  $i \in A$ ,  $i \neq j$  e

$$\tau = \sigma_j \cap H_k \subset H_{k_{ji}} \Rightarrow \tau = \sigma_j \cap H_k \cap H_{k_{ji}} = \sigma_j \cap \sigma_i \cap H_k,$$

sendo a última igualdade obtida do item (ii). Isso mostra que  $\tau$  é uma face de  $\sigma_j \cap \sigma_i$ . Se  $\tau = \sigma_j \cap \sigma_i$ , nada mais temos a fazer. Caso contrário,  $\tau$  será uma face própria de  $\sigma_j \cap H_{k_{ji}} = (\bigcap_{l \neq j} H_{k_{jl}}^+) \cap H_{k_{ji}}$ , para algum  $l \neq j$ . Repetindo o argumento para  $\tau$  como face de  $(\bigcap_{l \neq j} H_{k_{jl}}^+) \cap H_{k_{ji}}$ , concluiremos que  $\tau \subset H_{k_{jl}}$ , para algum  $l \neq j$ . Caso contrário, produziríamos  $x \in \tau$  tal que  $x \in (\bigcap_{l \neq i, j} H_{k_{jl}}^>) \cap \sigma_j$ , isto é,  $x \in \text{int}(\sigma_j)$ , o que é um absurdo, pois faces de poliedros estão na fronteira dos poliedros. Como  $\sigma_j$  é interseção de um número finito de semi-espacos fechados, o processo é finito e termina quando  $\tau$  é uma interseção de  $\sigma_j$  com uma quantidade finita de  $\sigma_i$ 's. ■

**Observação 2.3.2.** Segue dos itens (ii) e (iii) do Teorema 2.3.2 que se  $\dim(\sigma_j) < n$ , então  $\sigma_j = \sigma_j \cap H_{k_{ji}} = \sigma_j \cap \sigma_i$ , para algum  $i \neq j$ , ou seja,  $\sigma_j \subset \sigma_i$ , para algum  $i \neq j$ . Logo, os  $\sigma_j$ 's de dimensão máxima  $n$  cobrem  $\mathbb{R}^n$ .

Além disso, segue da definição de  $V(f)$  como lugar dos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $f(x) = "a_j x^j" = "a_i x^i"$ , com  $i \neq j$ , que

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus V(f) \Leftrightarrow x \in \text{int}(\sigma_j), \text{ para algum } \sigma_j \text{ e } \dim(\sigma_j) = n \Leftrightarrow j = d_x f \text{ para algum } j \in A.$$

**Definição 2.3.4.** Uma coleção  $\mathcal{P} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  de poliedros racionais de  $\mathbb{R}^n$  é chamada de complexo poliédrico se para cada  $\sigma_i \in \mathcal{P}$  todas as faces de  $\sigma_i$  também estão contidas em  $\mathcal{P}$  e se cada interseção  $\sigma_i \cap \sigma_j$  ou é vazia, ou produz uma face em comum entre  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ . Chamamos

de células os elementos  $\sigma_i$  de  $\mathcal{P}$  e de suporte de  $\mathcal{P}$  (denotado por  $|\mathcal{P}|$ ) a união das células de  $\mathcal{P}$ . Se  $|\mathcal{P}|$  é igual a um poliedro  $\sigma$  (por exemplo,  $\mathbb{R}^n$ ), dizemos que  $\mathcal{P}$  é uma subdivisão poliédrica de  $\sigma$  (ou de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente). As células de  $\mathcal{P}$  com dimensão  $n$ ,  $1$  e  $0$  são chamadas de *facetas*, *arestas* e *vértices*, respectivamente. Uma aresta que contém apenas um vértice é chamada de *raio*.

Segue do Teorema 2.3.2 que dado um polinômio tropical  $f(x) = \sum_{j \in A} a_j x^j$ , a coleção

$$\mathcal{S}(f) := \{\text{faces } \tau \text{ de } \sigma_j; j \in A\}$$

é um complexo poliédrico com suporte igual ao  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.3.5.** *Seja  $f = \sum_{j \in A} a_j x^j$  um polinômio tropical. O conjunto*

$$A^{red} := \{j \in A; \dim(\sigma_j) = n\} = \{d_x f; x \in \mathbb{R}^n \setminus V(f)\}$$

*é chamado de suporte reduzido de  $f$ . O polinômio*

$$f^{red} := \sum_{j \in A^{red}} a_j x^j$$

*é chamado de representação reduzida de  $f$ .*

**Lema 2.3.3.** *Seja  $f$  um polinômio tropical. Como funções em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $f \equiv f^{red}$ . Além disso, dois polinômios tropicais descrevem a mesma função se, e somente se, suas representações reduzidas coincidem. Em particular, a subdivisão  $\mathcal{S}(f)$  é independente da representação de  $f$ .*

*Demonstração.* Pela Observação 2.3.2, todo ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  está contido em algum  $\sigma_j$  com  $\dim(\sigma_j) = n$ , então

$$f(x) = a_j x^j = f^{red}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, para cada  $j \in A^{red}$ ,

$$f(x) = a_j + jx = a_j + (d_x f)x \Rightarrow a_j = f(x) - (d_x f)x,$$

o que implica que o coeficiente de " $x^j$ " fica unicamente determinado pelo valor de  $f$  em  $x$ . Logo, a representação reduzida de  $f$  (que depende de  $A^{red}$  e dos  $a_j; j \in A^{red}$ ) fica unicamente determinada pela função  $f$ . Assim, se dois polinômios descrevem a mesma função, eles possuem o mesmo suporte reduzido (pela segunda descrição de  $A^{red}$ ) e a segunda afirmação segue. Finalmente,  $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f^{red})$  (pela primeira descrição de  $A^{red}$ ) e segue que  $\mathcal{S}(f)$  é completamente determinado pela função  $f$  e independe de sua representação. ■

## 2.4 SUBDIVISÃO DUAL

Na seção anterior vimos que uma hipersuperfície tropical traz consigo uma estrutura poliédrica que subdivide o  $\mathbb{R}^n$ . Agora, veremos que um polinômio tropical também define uma subdivisão do polígono de Newton de  $f$ , que definiremos a seguir, dual à estrutura poliédrica.

Dado  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$  definimos a envoltória convexa de  $X$ , denotada por  $\text{Conv}(X)$ , como sendo o menor subconjunto convexo do  $\mathbb{R}^n$  contendo  $X$ , isto é,

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i; 0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

Dado um polinômio tropical em  $n$  variáveis,  $f = \sum_{j \in A} a_j x^j$ , chamamos de *polígono de Newton de  $f$* ,  $NP(f)$ , a envoltória convexa de todos os expoentes  $j$  tais que  $a_j \neq -\infty$ , ou seja,

$$NP(f) = \text{Conv}\{j \in A \subset \mathbb{Z}^n; a_j \neq -\infty\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Definição 2.4.1.** *As faces inferiores de um poliedro  $\sigma$  são aquelas que também são faces do poliedro  $\sigma + \rho$ , onde  $\rho := \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $\{0\} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .*

**Definição 2.4.2.** *Sejam “ $\sum_{j \in A} a_j x^j$ ” um polinômio tropical e  $\tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A})$ , onde*

$$\tilde{A} := \{(j, -a_j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} : j \in A \subset \mathbb{Z}^n \text{ e } a_j \neq -\infty\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

*A projeção das faces inferiores de  $\tilde{P}$  em  $\mathbb{R}^n$  produz uma subdivisão  $SD(f)$  do  $NP(f)$ , que chamamos de subdivisão dual de  $f$ .*

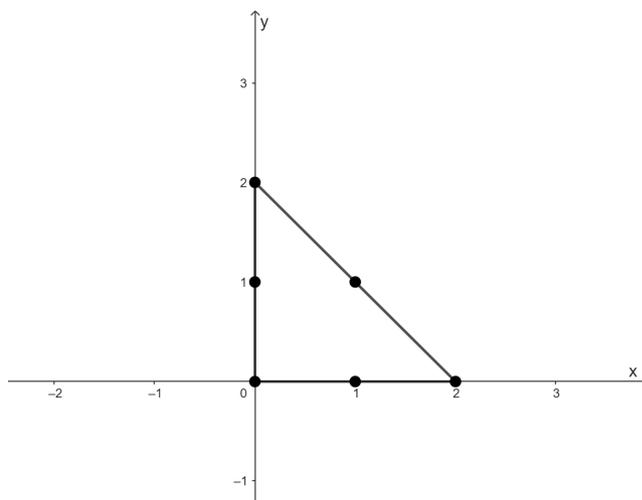
**Exemplo 2.4.1.** Para o polinômio tropical  $g(x, y) = “(-1)x^2 + (-1)y^2 + 1xy + x + y + 0”$ , o polígono de Newton  $NP(g)$  é a envoltória convexa do conjunto de pontos:

$$\{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\},$$

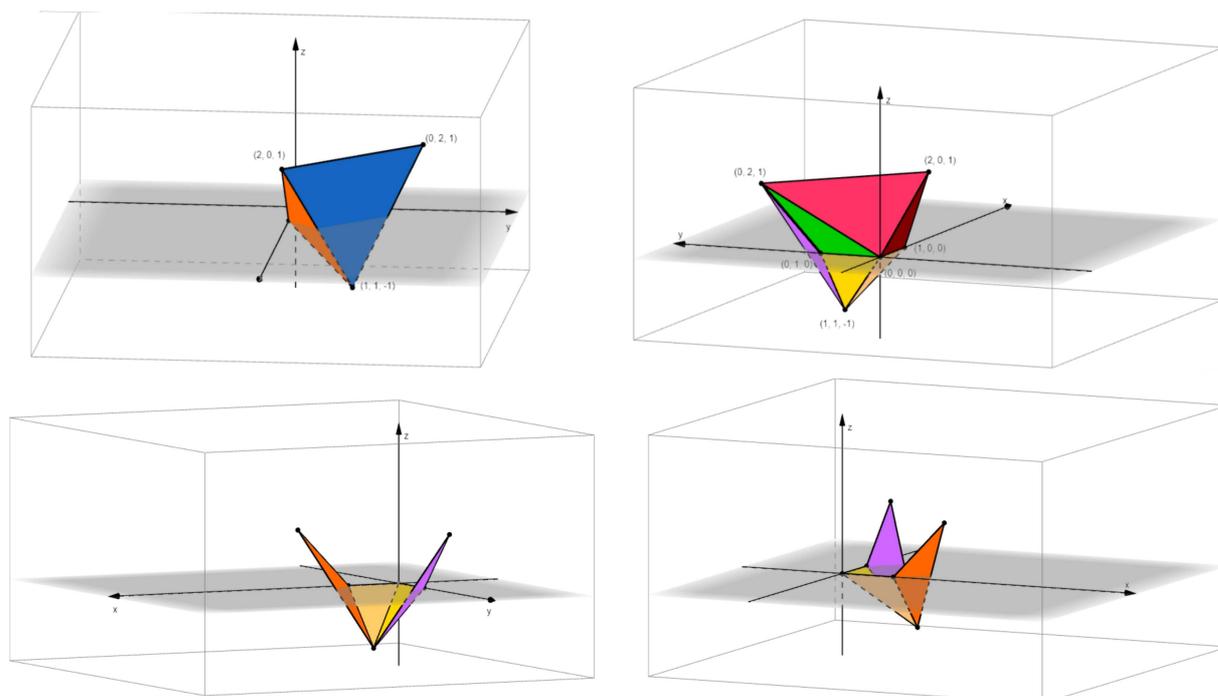
que está representada na Figura 9, e o conjunto  $\tilde{A}$  é dado por:

$$\tilde{A} = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)\}.$$

A envoltória convexa de  $\tilde{A}$  está representada nas imagens de cima da Figura 10, por dois ângulos diferentes. Nas imagens de baixo da mesma figura, deixamos apenas as faces inferiores da envoltória convexa de  $\tilde{A}$ . Na Figura 11 temos  $SD(g)$ , a projeção dessas faces em  $\mathbb{R}^2$ . Note que, de fato,  $SD(g)$  forma uma subdivisão de  $NP(g)$ .

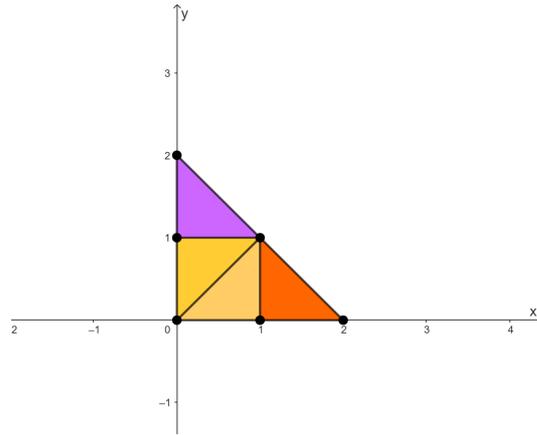
Figura 9 – Polígono de Newton de  $g(x, y)$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 10 –  $\tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A})$  e faces inferiores de  $\tilde{P}$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 11 – Subdivisão dual  $SD(g)$  de  $NP(g)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Nos resultados a seguir, vamos considerar  $f = \sum_{j \in A} a_j x^j$  um polinômio tropical,  $\sigma_j = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx \geq a_i + ix, \forall i \in A\}$  e  $\mathcal{S}(f) = \{\text{faces } \tau \text{ de } \sigma_j; j \in A\}$ .

**Lema 2.4.1.** *Para cada célula  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ , seja  $A_\sigma := \{j \in A : \sigma \subseteq \sigma_j\}$ . Então,*

$$\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j.$$

*Demonstração.* Como  $\sigma \subseteq \sigma_j$  para todo  $j \in A_\sigma$ , é claro que  $\sigma \subseteq \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$ . Por outro lado, se  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ , então é uma face de  $\sigma_j$  para algum  $j$ . Pelo Teorema 2.3.2,  $\sigma = \bigcap_{j \in A'} \sigma_j$  para algum  $A' \subseteq A$ . Como  $\sigma \subseteq \sigma_j$  para todo  $j \in A'$ , temos

$$\sigma \subseteq \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j \subseteq \bigcap_{j \in A'} \sigma_j = \sigma.$$

■

**Proposição 2.4.2.** *Para um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , seja  $A_x := \{j \in A; x \in \sigma_j\}$ . Então,*

$$x \in \text{int}(\sigma) \Leftrightarrow A_x = A_\sigma,$$

onde  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $x \in \text{int}(\sigma)$ . Em particular,  $x \in \sigma$ . Então, para todo  $j \in A_\sigma$ , temos

$$\sigma \subseteq \sigma_j \Rightarrow x \in \sigma_j \Rightarrow j \in A_x \Rightarrow A_\sigma \subseteq A_x.$$

Suponha que  $A_\sigma \neq A_x$ , ou seja, existe  $j \in A_x$  tal que  $x \in \sigma_j$ , mas  $\sigma \not\subseteq \sigma_j$ . Como  $\sigma \not\subseteq \sigma_j$ ,  $\sigma$  não é uma face de  $\sigma_j$  e, obviamente, não é  $\sigma_j$ . Então, como  $x \in \sigma \cap \sigma_j$ , segue que

$\sigma \cap \sigma_j$  é uma face própria comum de  $\sigma$  e  $\sigma_j$ . Logo,  $\sigma \cap \sigma_j \subseteq \partial\sigma$ , o que é uma contradição, pois  $x \in \sigma \cap \sigma_j$  e  $x \in \text{int}(\sigma)$ . Portanto,  $A_\sigma = A_x$ .

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\sigma \in \mathcal{S}(f)$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $A_x = A_\sigma$ . Escreva  $A_x = \{j_1, \dots, j_m\} = A_\sigma$  com  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq 1$ . Assim, temos que

$$x \in \bigcap_{i=1}^m \sigma_{j_i} = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j = \sigma.$$

Suponhamos que  $x \in \partial\sigma$ . Então,  $x$  pertence a uma face própria de  $\sigma$ , ou seja,  $x \in \sigma \cap \sigma_{j_l}$ , para algum  $l$  tal que  $l \neq 1, \dots, m$ . Mas, isso implica que  $j_l \in A_x$ , o que é uma contradição. Portanto,  $x \in \text{int}(\sigma)$ .  $\blacksquare$

**Teorema 2.4.3 (Teorema da Subdivisão Dual).** *Dado um polinômio tropical em  $n$  variáveis,  $f = \sum_{j \in A} a_j x^j$ , as subdivisões  $\mathcal{S}(f)$  do  $\mathbb{R}^n$  e  $SD(f)$  de  $NP(f)$  são duais no seguinte sentido: existe uma bijeção de células, invertendo inclusão, dada por*

$$\begin{aligned} D : \mathcal{S}(f) &\longrightarrow SD(f) \\ \sigma &\longmapsto D_\sigma := \text{Conv}(A_\sigma), \end{aligned}$$

tal que  $\dim \sigma + \dim D_\sigma = n$  e  $L(\sigma)^\perp = L(D_\sigma)$ . Além disso,  $SD(f)$  não depende da representação de  $f$  e o conjunto de vértices de  $SD(f)$  é igual ao suporte reduzido de  $f$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos verificar que  $D_\sigma$  é de fato uma célula de  $SD(f)$ . Dado  $x \in \text{int}(\sigma)$ , considere a forma linear  $(x, -1)$  sobre  $\tilde{P} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada vértice  $(j, -a_j)$  de  $\tilde{P}$ , temos  $(x, -1)(j, -a_j) = a_j + jx$ . Nosso objetivo é mostrar que os pontos de  $\tilde{P}$  nos quais  $(x, -1)$  atinge o valor máximo são exatamente os pontos da envoltória convexa de  $\tilde{A}_\sigma$  (onde  $\tilde{A}_\sigma := \{(j, -a_j) \in \tilde{A}; j \in A_\sigma\}$ ) e que  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P}$ .

Seja  $A' = \{j \in A; a_j \neq -\infty\}$ . Como  $A'$  possui um número finito de elementos, podemos escrever  $A' = \{j_1, \dots, j_m, j_{m+1}, \dots, j_k\}$  e  $A_\sigma = \{j_1, \dots, j_m\}$ . Assim,

$$\sigma \in \mathcal{S}(f) \Rightarrow \sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j = \bigcap_{i=1}^m \sigma_{j_i}.$$

Logo,  $x \in \sigma_{j_i}$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , ou seja,

$$f(x) = N = a_{j_1} + j_1 x = \dots = a_{j_m} + j_m x > a_j + jx, \quad \forall j \in A' \setminus A_\sigma.$$

Essa desigualdade é estrita, pois se existisse  $l \neq j_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , tal que

$$a_{j_1} + j_1 x = \dots = a_{j_m} + j_m x = a_l + lx,$$

teríamos  $A_x = \{j_1, \dots, j_m, l\} \neq A_\sigma$  e  $x$  não estaria em  $\text{int}(\sigma)$ .

Portanto,  $(x, -1)(j, -a_j) = N$  para todo  $(j, -a_j) \in \tilde{A}_\sigma$ . Como  $\tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A})$ , isto é,

$$\tilde{P} = \left\{ \sum_{i=1}^k b_i(j_i, -a_{j_i}); 0 \leq b_i \leq 1, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k b_i = 1 \right\},$$

para um ponto  $z \in \tilde{P}$ , temos que

$$\begin{aligned} (x, -1)z &= (x, -1)(b_1j_1 + \dots + b_kj_k, -b_1a_{j_1} - \dots - b_ka_{j_k}) \\ &= b_1j_1x + \dots + b_kj_kx + b_1a_{j_1} + \dots + b_ka_{j_k} \\ &= b_1 \underbrace{(a_{j_1} + j_1x)}_N + \dots + b_m \underbrace{(a_{j_m} + j_mx)}_N + b_{m+1} \underbrace{(a_{j_{m+1}} + j_{m+1}x)}_{M_1} + \dots + b_k \underbrace{(a_{j_k} + j_kx)}_{M_k} \\ &= (b_1 + \dots + b_m)N + b_{m+1}M_1 + \dots + b_kM_k. \end{aligned}$$

Suponha que  $(x, -1)z > N$ . Então,

$$\begin{aligned} (b_1 + \dots + b_m)N + b_{m+1}M_1 + \dots + b_kM_k &> N \\ \Rightarrow b_{m+1}M_1 + \dots + b_kM_k &> [1 - (b_1 + \dots + b_m)]N \\ \Rightarrow b_{m+1}M_1 + \dots + b_kM_k &> b_{m+1}N + \dots + b_kN. \end{aligned}$$

Como  $M_i < N$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , a desigualdade acima é impossível. Logo, para todo  $z \in \tilde{P}$  temos  $(x, -1)z \leq N$ . Além disso, note que a igualdade será verdadeira apenas quando  $b_{m+1} = \dots = b_k = 0$ , ou seja, quando tivermos  $b_1 + \dots + b_m = 1$ . Mas, isso implica que  $z \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ . Portanto,  $(x, -1)$  atinge o máximo em  $\tilde{P}$  exatamente nos pontos da envoltória convexa de  $\tilde{A}_\sigma$  e esse valor máximo é  $N$ .

Agora, vamos mostrar que  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P}$ . Seja  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\alpha(a, b) = (x, -1)(a, b) - N = xa - b - N.$$

O hiperplano gerado por  $\alpha$  é  $H_\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha(a, b) = 0\}$  e um dos semi-espacos fechados gerado por  $\alpha$  é  $H_\alpha^- = \{(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha(a, b) \leq 0\}$ .

Para qualquer  $(a, b) \in \tilde{P}$ , temos

$$\alpha|_{\tilde{P}}(a, b) = \underbrace{(x, -1)(a, b)}_{\leq N} - N \leq 0 \Rightarrow \tilde{P} \subset H_\alpha^- \quad \text{e}$$

$$\alpha|_{\tilde{P}}(a, b) = 0 \Leftrightarrow (x, -1)(a, b) = N \Leftrightarrow (a, b) \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma).$$

Logo,  $H_\alpha \cap \tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ . Portanto,  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face de  $\tilde{P}$ .

O poliedro  $\tilde{P} + \rho$  é o conjunto

$$\left\{ (b_1j_1 + \dots + b_kj_k, -b_1a_{j_1} - \dots - b_ka_{j_k} + \lambda); 0 \leq b_i \leq 1, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k b_i = 1; \lambda \geq 0 \right\}.$$

Para qualquer  $(a, b + \lambda) \in \tilde{P} + \rho$ , temos:

$$\alpha|_{\tilde{P}+\rho}(a, b + \lambda) = (x, -1)(a, b + \lambda) - N = \underbrace{(x, -1)(a, b)}_{\leq N} - \lambda - N \leq 0 \Rightarrow (\tilde{P} + \rho) \subset H_\alpha^- \quad \text{e}$$

$$\alpha|_{\tilde{P}+\rho}(a, b + \lambda) = 0 \Leftrightarrow (x, -1)(a, b) = N \text{ e } \lambda = 0 \Leftrightarrow (a, b) \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma).$$

Portanto,  $H_\alpha \cap (\tilde{P} + \rho) = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ . Logo,  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face de  $\tilde{P} + \rho$ .

Como  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face comum de  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P} + \rho$ , segue da definição, que  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  é uma face inferior de  $\tilde{P}$ . Como a projeção de  $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$  em  $\mathbb{R}^n$  é exatamente  $D_\sigma$ , temos que  $D_\sigma$  é, de fato, uma célula de  $SD(f)$ .

Segue que a função  $D$  está bem definida. Veremos a seguir que  $D$  é uma bijeção. Para isso, mostraremos que a inversa de  $D$  é dada por

$$\begin{aligned} D^{-1} : SD(f) &\longrightarrow \mathcal{S}(f) \\ C &\longmapsto \bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j. \end{aligned}$$

De fato,

$$D(D^{-1}(C)) = D\left(\bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j\right) = \text{Conv}(C \cap A) = C,$$

pois, como  $C \in SD(f)$ , segue que  $C = \text{Conv}(A_\sigma)$  para algum  $\sigma$  e nesse caso  $A_\sigma = C \cap A$ . Além disso,

$$D^{-1}(D(\sigma)) = D^{-1}(\text{Conv}(A_\sigma)) = \bigcap_{j \in \text{Conv}(A_\sigma) \cap A} \sigma_j = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j = \sigma.$$

É simples verificar que essa bijeção inverte inclusão, pois se  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}(f)$  e  $\sigma_1 \subset \sigma_2$ , então,  $A_{\sigma_2} \subset A_{\sigma_1}$ . Logo,  $\text{Conv}(A_{\sigma_2}) \subset \text{Conv}(A_{\sigma_1})$  e  $D_{\sigma_2} \subset D_{\sigma_1}$ . Por outro lado, se  $C_1, C_2 \in SD(f)$  e  $C_1 \subset C_2$  então,

$$D^{-1}(C_2) = \bigcap_{j \in C_2 \cap A} \sigma_j \subset \bigcap_{j \in C_1 \cap A} \sigma_j = D^{-1}(C_1).$$

Para mostrarmos ortogonalidade e dimensões de  $L(\sigma)$  e  $L(D_\sigma)$ , escrevemos  $\sigma$  na forma:

$$\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j, \text{ com } A_\sigma = \{i_1, \dots, i_s\}.$$

Sabemos que:

$$D_\sigma = \text{Conv}(A_\sigma) = \left\{ \sum_{k=1}^s \alpha_k i_k, \alpha_k \in [0, 1] \text{ e } \sum_{k=1}^s \alpha_k = 1 \right\},$$

$$\begin{aligned}
L(\sigma) &= \langle x - y; x, y \in \sigma \rangle, \\
L(D_\sigma) &= \langle m - n; m, n \in D_\sigma \rangle \text{ e} \\
L(A_\sigma) &= \langle j - i; j, i \in A_\sigma \rangle.
\end{aligned}$$

Para todo  $i \in A_\sigma$ ,  $i = 1 \cdot i \in \text{Conv}(A_\sigma)$ . Então,  $A_\sigma \subseteq D_\sigma$  e  $L(A_\sigma) \subseteq L(D_\sigma)$ . Reciprocamente, se  $m \in D_\sigma$  temos:

$$\begin{aligned}
m &= a_1 i_1 + \cdots + a_s i_s; 0 \leq a_k \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, s\} \text{ e } \sum_{k=1}^s a_k = 1 \\
\Rightarrow m &= (1 - a_1 - \cdots - a_s) i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_s i_s \\
\Rightarrow m &= i_1 + a_2(i_2 - i_1) + \cdots + a_s(i_s - i_1).
\end{aligned}$$

Logo,  $\forall m, n \in D_\sigma$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
m - n &= i_1 + a_2(i_2 - i_1) + \cdots + a_s(i_s - i_1) - (i_1 + b_2(i_2 - i_1) + \cdots + b_s(i_s - i_1)) \\
&= (a_2 - b_2)(i_2 - i_1) + \cdots + (a_s - b_s)(i_s - i_1),
\end{aligned}$$

onde  $0 \leq a_k, b_k \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\sum_{k=1}^s b_k = 1$  e  $\sum_{k=1}^s a_k = 1$ . Assim,  $L(D_\sigma) \subseteq L(A_\sigma)$  e, portanto,  $L(D_\sigma) = L(A_\sigma)$ .

Para todo  $i, j \in A_\sigma$  e para todo  $x, y \in \sigma$ , temos:

$$\left. \begin{aligned}
(j - i)(x) &= a_i - a_j \\
(j - i)(y) &= a_i - a_j
\end{aligned} \right\} \Rightarrow (j - i)(x - y) = 0.$$

Então, todo vetor de  $L(\sigma)$  é ortogonal a todo vetor de  $L(A_\sigma) = L(D_\sigma)$ . Logo,  $L(\sigma) \subseteq L(D_\sigma)^\perp$  (e  $L(D_\sigma) \subseteq L(\sigma)^\perp$ ).

Para a inclusão contrária, citamos a Proposição 1.67 em (4).

Para mostrar que  $\dim(L(\sigma)) + \dim(L(D_\sigma)) = n$ , usamos que

$$\dim(L(D_\sigma)) + \dim(L(D_\sigma^\perp)) = n \text{ e que } L(\sigma) = L(D_\sigma)^\perp.$$

Por fim, vamos mostrar que o conjunto de vértices de  $SD(f)$  é igual a  $A^{red}$ . De fato:

$$j \in A^{red} \Leftrightarrow \dim(\sigma_j) = n \Leftrightarrow A_{\sigma_j} = \{j\} \Leftrightarrow \tilde{A}_{\sigma_j} = \{(j, -a_j)\} \Leftrightarrow \text{Conv}(\tilde{A}_{\sigma_j}) = \{(j, -a_j)\},$$

e, como  $\text{Conv}(\tilde{A}_{\sigma_j})$  é uma face inferior,  $\text{Conv}(\tilde{A}_{\sigma_j}) = \{(j, -a_j)\}$  se, e somente se, a projeção em  $\mathbb{R}^n$  de  $\text{Conv}(\tilde{A}_{\sigma_j})$  é igual a  $j$ . Como  $j \in A$  e  $j$  é uma célula de  $SD(f)$ , temos que  $j$  é um vértice de  $SD(f)$ . Logo,  $SD(f)$  depende apenas da função  $f$ . ■

**Exemplo 2.4.2.** Considere o polinômio

$$g(x, y) = "(-1)x^2 + (-1)y^2 + 1xy + x + y + 0".$$

A subdivisão associada a  $g$  é:

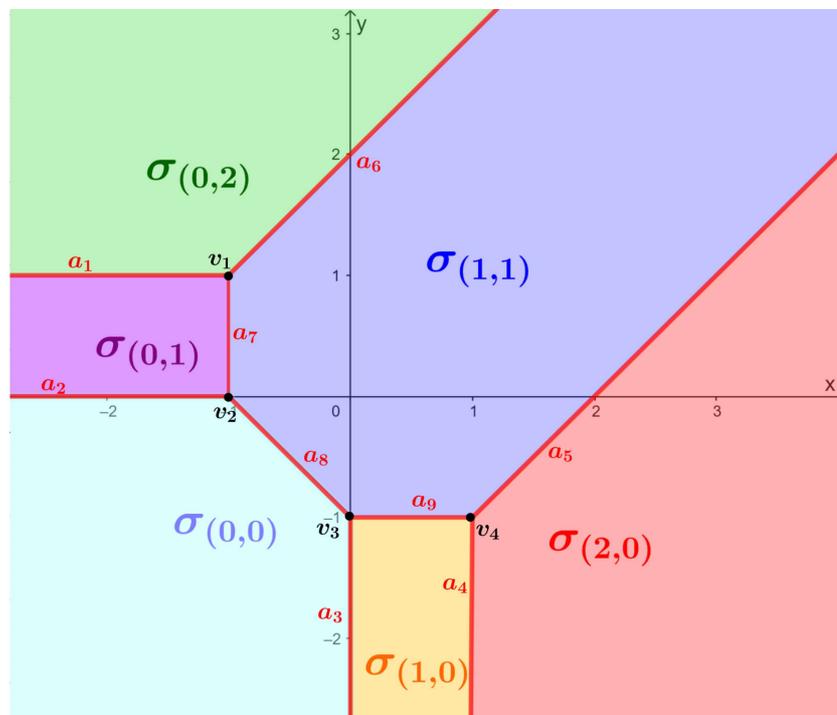
$$\mathcal{S}(g) = \{\text{faces de } \sigma_{(i,j)}, \text{ com } (i, j) \in \{(0, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (1, 1)\}\}.$$

As faces dos  $\sigma_{(i,j)}$ 's são os próprios  $\sigma_{(i,j)}$ 's e as interseções próprias e não vazias entre eles são:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_{(0,2)} \cap \sigma_{(0,1)}; & a_6 &= \sigma_{(1,1)} \cap \sigma_{(0,2)}; & v_2 &= \sigma_{(0,1)} \cap \sigma_{(0,0)} \cap \sigma_{(1,1)}; \\ a_2 &= \sigma_{(0,1)} \cap \sigma_{(0,0)}; & a_7 &= \sigma_{(0,1)} \cap \sigma_{(1,1)}; & & \\ a_3 &= \sigma_{(0,0)} \cap \sigma_{(1,0)}; & a_8 &= \sigma_{(0,0)} \cap \sigma_{(1,1)}; & v_3 &= \sigma_{(0,0)} \cap \sigma_{(1,0)} \cap \sigma_{(1,1)}; \\ a_4 &= \sigma_{(1,0)} \cap \sigma_{(2,0)}; & a_9 &= \sigma_{(1,0)} \cap \sigma_{(1,1)}; & & \\ a_5 &= \sigma_{(2,0)} \cap \sigma_{(1,1)}; & v_1 &= \sigma_{(0,2)} \cap \sigma_{(0,1)} \cap \sigma_{(1,1)}; & v_4 &= \sigma_{(1,0)} \cap \sigma_{(2,0)} \cap \sigma_{(1,1)}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, as células  $\sigma$  de  $\mathcal{S}(g)$  são as arestas da curva tropical  $V(g)$  definida por  $g$ , os vértices de  $V(g)$  e as regiões do  $\mathbb{R}^2$  definidas por  $V(g)$ , conforme a Figura 12.

Figura 12 – Conjunto  $\mathcal{S}(g)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para cada célula  $\sigma_{(i,j)}$  de  $\mathcal{S}(g)$ , o conjunto  $A_{\sigma_{(i,j)}}$  é formado apenas pelo ponto  $\{(i, j)\}$ . De fato,  $\sigma_{(i,j)}$  é uma face de dimensão 2 e não está contida em nenhuma outra célula de  $\mathcal{S}(g)$  a não ser ela mesma. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{\sigma_{(0,2)}} &= \{(0, 2)\}; & A_{\sigma_{(0,0)}} &= \{(0, 0)\}; & A_{\sigma_{(2,0)}} &= \{(2, 0)\}; \\ A_{\sigma_{(0,1)}} &= \{(0, 1)\}; & A_{\sigma_{(1,0)}} &= \{(1, 0)\}; & A_{\sigma_{(1,1)}} &= \{(1, 1)\}. \end{aligned}$$

E, como mostrado no Teorema da Dualidade, cada  $\sigma_{(i,j)}$  de  $\mathcal{S}(g)$  é dual a um vértice,  $\text{Conv}(\{(i, j)\}) = \{(i, j)\}$ , da subdivisão dual  $SD(g)$ .

Para cada aresta  $a_i$  de  $\mathcal{S}(g)$ , o conjunto  $A_{a_i}$  é formado por dois pontos correspondentes às duas regiões que esta aresta pertence:

$$\begin{aligned} A_{a_1} &= \{(0, 2), (0, 1)\}; & A_{a_4} &= \{(1, 0), (2, 0)\}; & A_{a_7} &= \{(1, 1), (0, 1)\}; \\ A_{a_2} &= \{(0, 1), (0, 0)\}; & A_{a_5} &= \{(2, 0), (1, 1)\}; & A_{a_8} &= \{(1, 1), (0, 0)\}; \\ A_{a_3} &= \{(0, 0), (1, 0)\}; & A_{a_6} &= \{(1, 1), (0, 2)\}; & A_{a_9} &= \{(1, 1), (1, 0)\}. \end{aligned}$$

Como a envoltória convexa de dois pontos é o segmento de reta que liga estes dois pontos, temos que cada aresta da curva tropical  $V(g)$  é dual à uma aresta da subdivisão dual  $SD(g)$ .

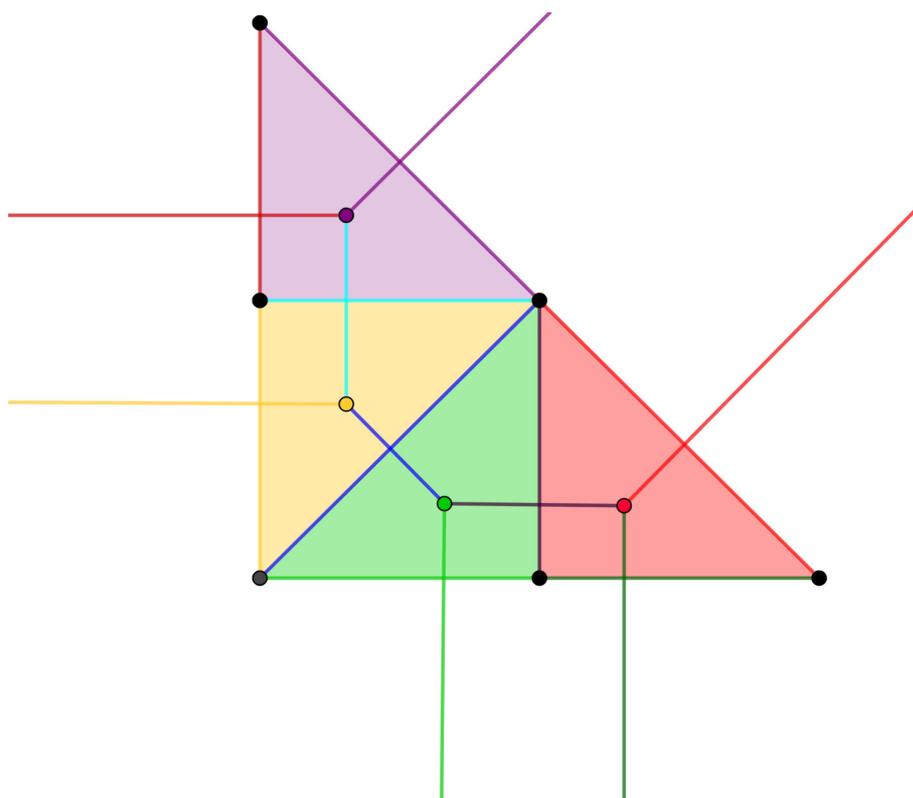
Por fim, para um vértice  $v_i$  da curva tropical  $V(g)$ , o conjunto  $A_{v_i}$  é formado por três pontos, correspondentes às três regiões nas quais este vértice está contido:

$$\begin{aligned} A_{v_1} &= \{(0, 2), (0, 1), (1, 1)\}; & A_{v_3} &= \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}; \\ A_{v_2} &= \{(0, 1), (0, 0), (1, 1)\}; & A_{v_4} &= \{(1, 0), (2, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

A envoltória convexa de três pontos é um triângulo. Então, cada vértice da curva tropical  $V(g)$  é dual à um triângulo na subdivisão dual  $SD(g)$ .

Na Figura 13, podemos ver geometricamente a dualidade entre  $\mathcal{S}(g)$  e  $SD(g)$ . Note que, cada vértice de  $V(g)$  está associado à um triângulo de  $SD(g)$  (vértices e triângulos de mesma cor são correspondentes), cada aresta de  $V(g)$  está associada à uma aresta de  $SD(g)$  e este par é perpendicular (arestas de mesma cor são correspondentes) e cada região definida por  $V(g)$  está associada à um vértice de  $SD(g)$  (regiões em branco e vértices em preto).

Figura 13 – Curva  $V(g)$  e sua subdivisão dual  $SD(g)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

### 3 CURVAS TROPICAIS COMO LIMITE DE AMEBAS

Neste capítulo apresentaremos curvas tropicais como limites de amebas de curvas complexas e veremos que podemos construir a geometria tropical a partir da geometria clássica. O principal resultado deste capítulo, que conecta essas duas geometrias, é o Teorema de Kapranov. As principais referências deste capítulo são (5), (6) e (7), e a referência para a demonstração do Teorema de Kapranov pode ser encontrada em (9).

#### 3.1 AMEBAS DE CURVAS COMPLEXAS

Podemos construir a geometria tropical a partir da geometria algébrica clássica (complexa) usando as amebas de variedades algébricas. Para isso, vamos restringir uma curva algébrica plana complexa  $C$ , definida como o conjunto de zeros de um polinômio  $f(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ , ao conjunto aberto  $(\mathbb{C}^*)^2$  do plano (afim ou projetivo) e depois levá-la para o plano real pela aplicação:

$$\begin{aligned} \text{Log}: (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = (z_1, z_2) &\longmapsto (X, Y) := (\ln |z_1|, \ln |z_2|). \end{aligned}$$

**Definição 3.1.1.** Chamamos de ameba de uma curva algébrica plana complexa  $C$  o subconjunto  $A_C = \text{Log}(C \cap (\mathbb{C}^*)^2) \subset \mathbb{R}^2$ .

Como veremos no próximo exemplo, as amebas de curvas complexas são subconjuntos bidimensionais do  $\mathbb{R}^2$ , uma vez que curvas complexas têm dimensão real dois.

**Exemplo 3.1.1.** Considere a reta complexa  $C$  definida pela equação  $z_1 + z_2 = 1$ . Note que  $(z_1, z_2) \in C$  se, e somente se,  $|z_1| \neq 0$  ou  $|z_2| \neq 0$  satisfazem:

$$|z_1| + |z_2| \geq 1, \quad 1 + |z_1| \geq |z_2|, \quad 1 + |z_2| \geq |z_1|.$$

De fato, se  $(z_1, z_2) \in C$ , temos que:

- (i)  $1 = z_1 + z_2 = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Rightarrow |z_1| + |z_2| \geq 1$ ;
- (ii)  $1 - z_1 = z_2 \Rightarrow |1 - z_1| = |z_2| \Rightarrow 1 + |z_1| \geq |z_2|$ ;
- (iii)  $1 - z_2 = z_1 \Rightarrow |1 - z_2| = |z_1| \Rightarrow 1 + |z_2| \geq |z_1|$ .

Por outro lado, é possível mostrar que se  $u, v$  são reais positivos tais que  $u + v \geq 1$ ,  $u + 1 \geq v$  e  $1 + v \geq u$ , então existem  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tais que  $|z_1| = u$ ,  $|z_2| = v$  e  $z_1 + z_2 = 1$  (ver, por

exemplo, (8), Proposição 2.1). Assim, a ameba da reta complexa  $z_1 + z_2 = 1$  é a imagem do domínio

$$D := \{(|z_1|, |z_2|) \in [0, \infty)^2; |z_1| + |z_2| \geq 1, 1 + |z_1| \geq |z_2|, 1 + |z_2| \geq |z_1|\}$$

pela aplicação  $(|z_1|, |z_2|) \mapsto (\ln |z_1|, \ln |z_2|)$ .

Observe que se  $X = \ln |z_1|$  e  $Y = \ln |z_2|$ , então

$$|z_1| + |z_2| \geq 1 \Rightarrow e^X + e^Y \geq 1 \Rightarrow Y \geq \ln(1 - e^X);$$

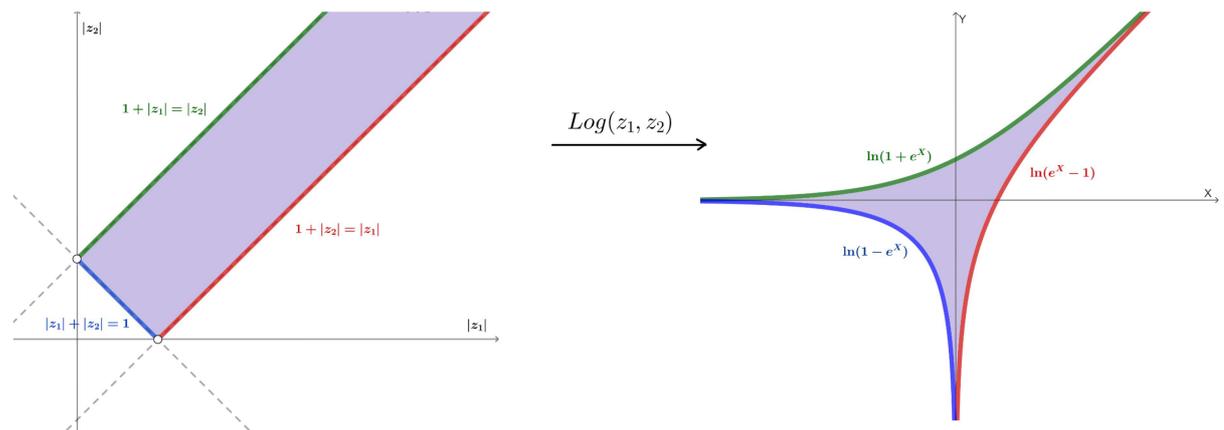
$$1 + |z_1| \geq |z_2| \Rightarrow 1 + e^X \geq e^Y \Rightarrow Y \leq \ln(1 + e^X);$$

$$1 + |z_2| \geq |z_1| \Rightarrow 1 + e^Y \geq e^X \Rightarrow Y \geq \ln(e^X - 1).$$

Logo, como mostra a Figura 14, as equações dos arcos que limitam a ameba são:

$$Y = \ln(1 - e^X), Y = \ln(1 + e^X) \text{ e } Y = \ln(e^X - 1).$$

Figura 14 – Ameba  $A_C$  da reta  $C : z_1 + z_2 = 1$



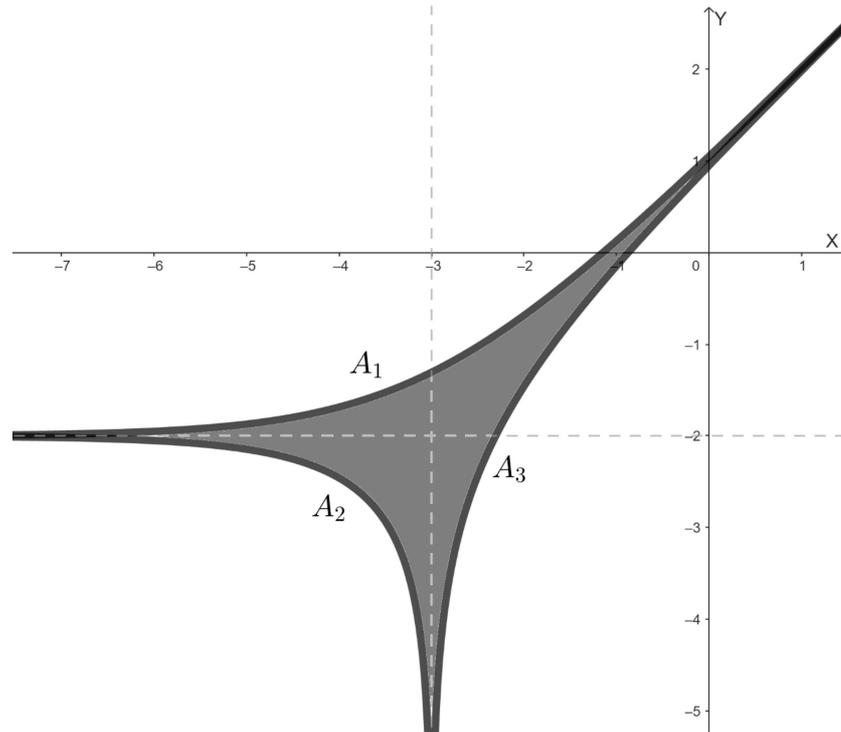
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Definição 3.1.2.** Quando dois arcos da ameba  $A_C = \text{Log}(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ , isto é, duas curvas na fronteira do conjunto  $A_C$ , tem uma reta  $l$  de equação  $aX + bY + c = 0$  como assíntota, dizemos que o vetor  $(b, -a)$  é uma direção assintótica desses arcos. Chamamos de tentáculos as partes da ameba que se estendem para o infinito nas direções assintóticas.

**Exemplo 3.1.2.** De forma análoga ao Exemplo 3.1.1, obtemos a ameba da reta

$$L = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; e^3 z_1 + e^2 z_2 = 1\},$$

que pode ser observada na Figura 15.

Figura 15 – Ameba da reta  $L : e^3 z_1 + e^2 z_2 = 1$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

O formato dos gráficos dos exemplos anteriores é o que justifica o nome de *amebas*. Esse formato pode ser explicado analisando, por exemplo, a equação da reta  $C$  no Exemplo 3.1.1. Lá, o ponto  $(z_1, z_2) = (0, 1) \in C$  e, como

$$\lim_{|z_1| \rightarrow 0} \ln |z_1| = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|z_1| \rightarrow 0} \ln |z_2| = \ln |1| = 0,$$

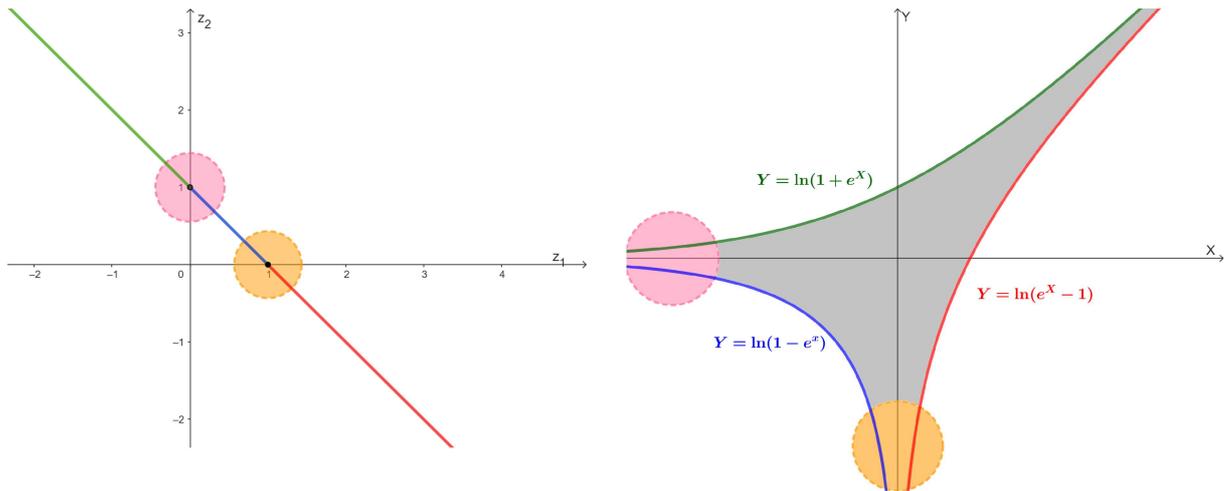
temos que  $X \rightarrow -\infty$  e  $Y \rightarrow 0$  quando  $|z_1| \rightarrow 0$ , ou seja, uma vizinhança do ponto  $(0, 1) \in C$  é levada no tentáculo da ameba que aponta para esquerda e  $y = 0$  é uma assíntota dos arcos  $Y = \ln(1 + e^X)$  e  $Y = \ln(1 - e^X)$ .

Analogamente, para uma vizinhança do ponto  $(z_1, z_2) = (1, 0) \in C$  temos:

$$\lim_{|z_2| \rightarrow 0} \ln |z_1| = \ln |1| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|z_2| \rightarrow 0} \ln |z_2| = -\infty,$$

o que implica em  $X \rightarrow 0$  e  $Y \rightarrow -\infty$  quando  $|z_2| \rightarrow 0$ , ou seja, uma vizinhança do ponto  $(1, 0) \in C$  é levada no tentáculo da ameba que aponta para baixo e  $X = 0$  é uma assíntota dos arcos  $Y = \ln(e^X - 1)$  e  $Y = \ln(1 - e^X)$ .

Figura 16 – Tentáculos da ameiba de uma reta tropical



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para pontos do tipo  $(z_1, 1 - z_1)$  com  $|z_1| \rightarrow \infty$ , temos que:

$$\lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \ln |z_1| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \ln |1 - z_1| = \infty,$$

o que implica em  $X \rightarrow \infty$  e  $Y \rightarrow \infty$ , ou seja, pontos de uma vizinhança de  $(z_1, 1 - z_1)$  com  $|z_1| \rightarrow \infty$  são levados no tentáculo superior direito e  $X = Y$  é uma assíntota dos arcos  $Y = \ln(e^X - 1)$  e  $Y = \ln(1 + e^X)$ . Em resumo, os tentáculos da ameiba de uma reta aparecem como imagens de uma vizinhança de três tipos de pontos: ponto no eixo  $z_2$  (tentáculo apontando para a esquerda), ponto no eixo  $z_1$  (tentáculo apontando para baixo) e ponto no infinito da reta (tentáculo apontando para a direção  $(1, 1)$ ).

**Exemplo 3.1.3.** No Exemplo 3.1.2, os arcos  $A_1$  e  $A_2$  têm a reta  $Y = -2$  como assíntota e direção assintótica  $(1, 0)$ , os arcos  $A_2$  e  $A_3$  têm a reta  $X = -3$  como assíntota e direção assintótica  $(0, -1)$  e os arcos  $A_1$  e  $A_3$  têm direção assintótica  $(1, 1)$ .

Para transformar as ameibas em objetos combinatórios, vamos reduzir à zero a “largura” delas, ou seja, diminuir a distância entre as fronteiras de  $C$ . Para isso, ao invés da aplicação Log consideramos a aplicação:

$$\begin{aligned} \text{Log}_t: (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (X, Y) := (-\log_t |z_1|, -\log_t |z_2|) = \left( -\frac{\ln |z_1|}{\ln t}, -\frac{\ln |z_2|}{\ln t} \right), \end{aligned}$$

para  $t \in \mathbb{R}$  pequeno e positivo. Vamos então tomar o limite das ameibas  $\text{Log}_t(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$  quando  $t$  tende a zero.

**Exemplo 3.1.4.** No Exemplo 3.1.1, a ameba  $\text{Log}_t(C \cap (\mathbb{C}^*)^2)$  será limitada pelos arcos  $Y = -\log_t(1 + t^{-X})$  para  $X \in \mathbb{R}$ ,  $Y = -\log_t(t^{-X} - 1)$  para  $X > 0$  e  $Y = -\log_t(1 - t^{-X})$  para  $X < 0$ . Vamos analisar a convergência do arco  $Y = -\log_t(1 + t^{-X})$  quando  $t$  tende a zero por valores positivos.

Se  $X > 0$ :

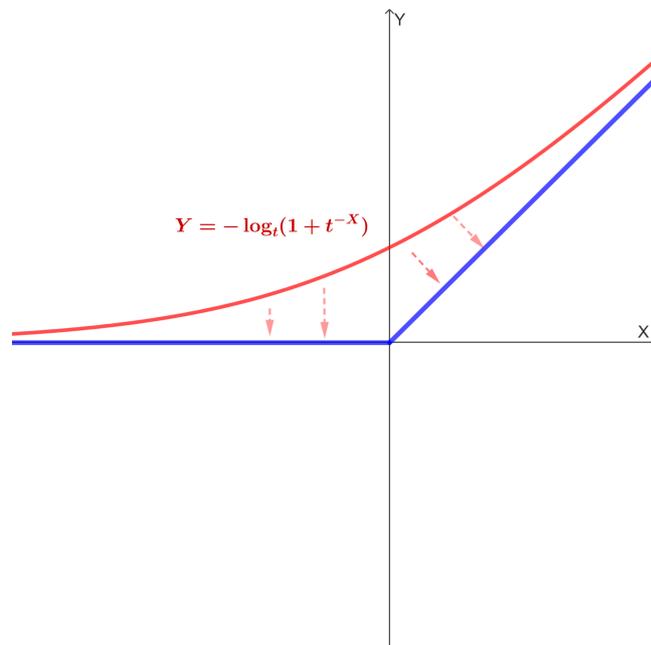
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\ln(1 + t^{-X})}{\ln t} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\left( \frac{1}{1 + t^{-X}} \right) (-X t^{-X-1})}{\frac{1}{t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{X t^{-X}}{1 + t^{-X}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{-X^2 t^{-X-1}}{-X t^{-X-1}} \right) = X. \end{aligned}$$

Se  $X < 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\ln(1 + t^{-X})}{\ln t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\ln(t^{-X}(t^X + 1))}{\ln t} \right) = X + \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{\ln(t^X + 1)}{\ln t} \right)}_{=-X} = 0.$$

Ou seja, quando  $t \rightarrow 0^+$ , o arco  $Y = -\log_t(1 + t^{-X})$  converge para  $Y = 0$  se  $X < 0$  e para  $Y = X$  se  $X > 0$ . Veja a Figura 17.

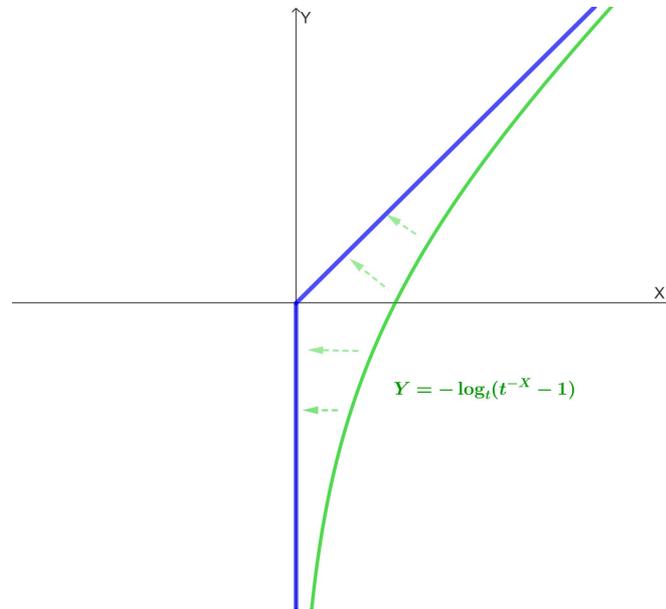
Figura 17 – Convergência do arco  $Y = -\log_t(1 + t^{-X})$  quando  $t \rightarrow 0^+$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para analisar a convergência do arco  $Y = -\log_t(t^{-X} - 1)$ , note que ele também pode ser escrito como  $X = -\log_t(t^{-Y} + 1)$ . Assim, um cálculo análogo ao anterior nos leva a concluir que, quando  $t$  tende a zero, este arco converge para  $X = 0$  se  $Y < 0$  e para  $X = Y$  se  $Y > 0$ . Veja a Figura 18.

Figura 18 – Convergência do arco  
 $Y = -\log_t(t^{-X} - 1)$  quando  $t \rightarrow 0$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Já o arco  $Y = -\log_t(1 - t^{-X})$  para  $X < 0$ , pode ser escrito como:

$$Y = -\log_t(1 - t^{-X}) = -\frac{\ln(1 - t^{-X})}{\ln t} = X - \frac{\ln(t^X - 1)}{\ln t},$$

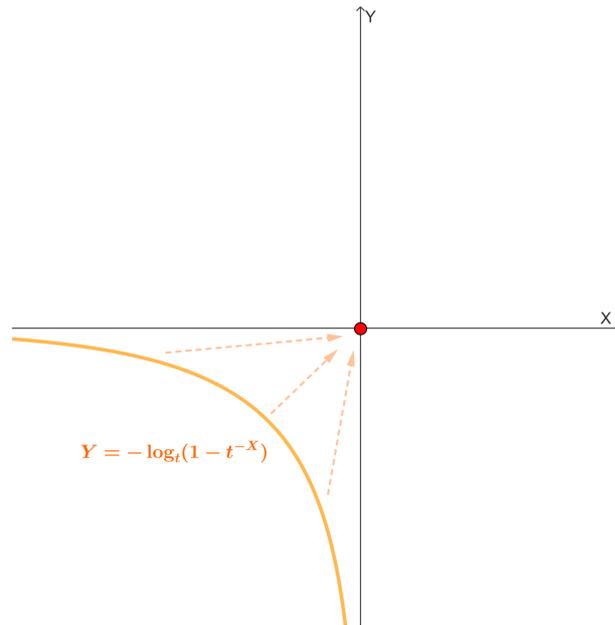
e também como:

$$X = -\log_t(1 - t^{-Y}) = -\frac{\ln(1 - t^{-Y})}{\ln t} = Y - \frac{\ln(t^Y - 1)}{\ln t}.$$

Neste arco sempre temos  $X < 0$  e  $Y < 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$ ,  $-\frac{\ln(t^X - 1)}{\ln t} \rightarrow -X$  e  $-\frac{\ln(t^Y - 1)}{\ln t} \rightarrow -Y$ . Portanto, o arco converge para o ponto  $(0, 0)$ , quando  $t \rightarrow 0^+$  (veja a Figura 19).

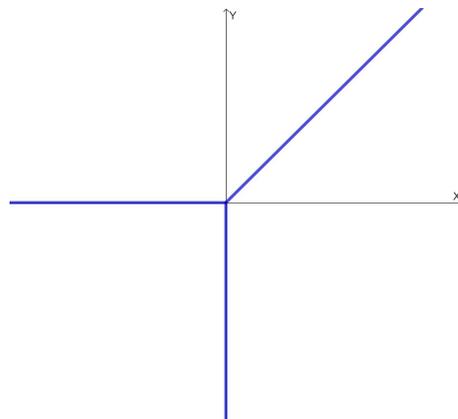
Assim, a ameiba da curva  $C$  do Exemplo 3.1.1 converge para o gráfico da Figura 20, que é a curva tropical determinada por  $C$ .

Figura 19 – Convergência do arco  
 $Y = -\log_t(1 - t^{-X})$  quando  $t \rightarrow \infty$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 20 – Curva tropical determinada  
 por  $C$ .

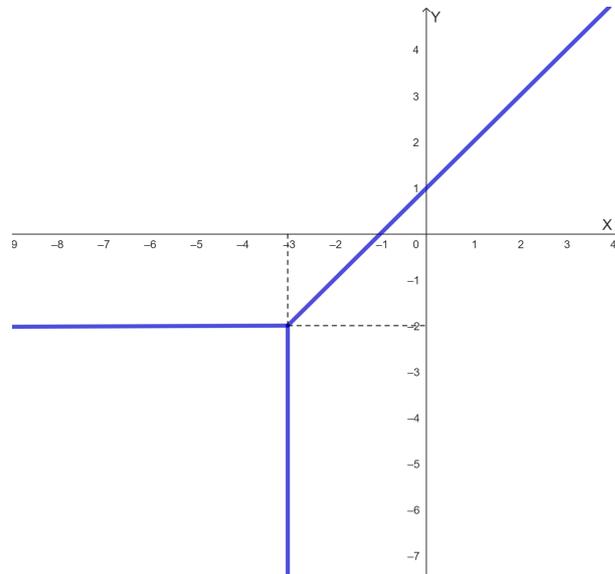


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Aplicando  $\text{Log}_t$  na reta  $L$  do Exemplo 3.1.2 e fazendo  $t \rightarrow 0$ , não só reduzimos a largura da ameba  $A_L$  a zero mas também transladamos seu “vértice” para a origem, ou seja, obtemos a mesma curva tropical do Exemplo 3.1.1. Para evitar isso, consideramos a família de retas  $C_t = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; t^{-3}z_1 + t^{-2}z_2 = 1\}$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , pequeno e positivo. As curvas da família  $C_t$  passam pelos pontos  $(0, t^2)$  e  $(t^3, 0)$  para todo  $t$ , então todas as

amebas  $\text{Log}_t(C_t \cap (\mathbb{C}^{*2}))$  possuem seus tentáculos horizontal e vertical em  $X = -3$  e  $Y = -2$ , respectivamente, ou seja, possuem vértice em  $(-3, -2)$ . A diferença das curvas da família  $C_t$  para a curva do exemplo 3.1.2, é que, agora, se tomarmos o limite quando  $t \rightarrow 0$ , estaremos reduzindo a largura de  $C_t$  a zero, mas mantendo o “vértice” em  $(-3, -2)$ . A curva tropical determinada pela família  $C_t$  está representada na Figura 21.

Figura 21 – Curva tropical correspondente às amebas da família  $C_t = \{z; t^3 z_1 + t^2 z_2 = 1\}$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Como no caso da reta tropical, veremos que uma curva tropical plana pode ser vista como subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  obtido como limite das amebas  $\text{Log}_t(C_t \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ , onde  $C_t$  é uma família adequada de curvas algébricas planas. Formalizaremos essa ideia na próxima seção.

### 3.2 SÉRIES DE PUISEUX E O TEOREMA DE KAPRANOV

Para mostrar que toda curva tropical é igual ao limite das amebas de uma família  $C_t$  de curvas algébricas planas, vamos precisar trabalhar com o corpo de séries de Puiseux generalizado.

#### Definição 3.2.1.

(a) Usamos o símbolo  $\alpha_n \nearrow \infty$  para representar a sequência de números reais  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  estritamente crescente e ilimitada.

(b) Definimos o conjunto

$$\mathbb{M} =: \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha_n \nearrow \infty\} \cup \{B \mid B \subset \mathbb{R} \text{ e } B \text{ tem finitos elementos}\},$$

ou seja,  $\mathbb{M}$  é a união do conjunto de todas as seqüências de números reais estritamente crescentes e ilimitadas com o conjunto de todas as seqüências finitas.

(c) Dado  $A \in \mathbb{M}$  e  $a_\alpha \in \mathbb{C}^*$ , para cada  $\alpha \in A$ , escreveremos  $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha t^\alpha$  para denotar a função

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha \longmapsto \begin{cases} a_\alpha, & \text{se } \alpha \in A, \\ 0, & \text{se } \alpha \notin A. \end{cases}$$

O conjunto  $\mathbb{K}$  de todas as funções deste tipo é chamado de conjunto das séries de Puiseux generalizado, isto é:

$$\mathbb{K} = \left\{ \sum_{\alpha \in A} a_\alpha t^\alpha \mid A \in \mathbb{M} \right\}.$$

**Definição 3.2.2.** Para  $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha t^\alpha$  e  $g = \sum_{\beta \in B} b_\beta t^\beta$ , definimos

$$f + g = \sum_{\gamma \in A \cup B} (a_\gamma + b_\gamma) t^\gamma, \text{ onde } a_\gamma = 0 \text{ se } \gamma \notin A \text{ e } b_\gamma = 0 \text{ se } \gamma \notin B \text{ e}$$

$$f \cdot g = \sum_{\gamma \in A * B} \left( \sum_{\alpha \in A, \beta \in B: \alpha + \beta = \gamma} a_\alpha \cdot b_\beta \right) t^\gamma,$$

onde  $A * B = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$ .

**Teorema 3.2.1.** O conjunto  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  é um corpo algebricamente fechado.

*Demonstração.* Ver Teorema 6 em (6). ■

**Definição 3.2.3.** Aplicações  $v: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , com  $K$  um corpo qualquer, satisfazendo

$$(i) \ v(a) = \infty \text{ se, e somente se, } a = 0;$$

$$(ii) \ v(ab) = v(a) + v(b);$$

$$(iii) \ v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\},$$

são chamadas valorizações em  $K$ .

Seja  $\mathbb{K}$  o corpo das séries de Puiseux generalizado. A função

$$v: \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto v(f) := \min\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) \neq 0\},$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$ ;
- (ii)  $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ .

Definimos  $v(0) = \infty$ . Logo,  $v$  é uma valorização em  $\mathbb{K}^*$ .

**Observação 3.2.1.** Nos expoentes das séries de Puiseux generalizadas usamos números reais quaisquer, para que a valorização seja uma função sobrejetiva.

**Definição 3.2.4.** *Definimos:*

$$\begin{aligned} \text{Val}: (\mathbb{K}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (x_1, x_2) := (-v(z_1), -v(z_2)). \end{aligned}$$

**Definição 3.2.5.** *Dado  $F(z_1, z_2) \in \mathbb{K}[z_1, z_2]$ , considere o conjunto*

$$Z_F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{K}^2; F(z_1, z_2) = 0\}.$$

*Chamamos  $\text{Val}(Z_F)$  de ameba não arquimediana de  $Z_F$ .*

**Teorema 3.2.2 (Teorema de Kapranov).** *Seja  $\mathbb{K}$  o corpo das séries de Puiseux generalizado. Considere o polinômio*

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(i,j) \in I} c_{i,j} z_1^i z_2^j \in \mathbb{K}[z_1, z_2],$$

*tal que  $c_{i,j} \in \mathbb{K}^*$  e  $I \subset \mathbb{Z}^2$  é finito e não vazio. Então, a ameba não arquimediana de  $Z_F$ ,  $\text{Val}(Z_F)$ , coincide com a curva tropical  $V(F_{\text{trop}}) \subseteq \mathbb{K}^2$  definida pelo polinômio*

$$F_{\text{trop}}(x_1, x_2) = \text{“} \sum_{(i,j) \in I} -v(c_{i,j}) x_1^i x_2^j \text{”}.$$

*Demonstração.* Seja  $z \in \mathbb{K}^2$  tal que  $\sum_{w \in I} c_w z^w = 0$ , onde  $w = (i, j) \in I$ . Escolha  $w_0 \in I$  tal que:

$$v(c_{w_0} z^{w_0}) = \min_{w \in I} \{v(c_w z^w)\} = \min_{w \in I} \{v(c_w) + wv(z)\},$$

onde  $v(z) = v(z_1, z_2) = (v(z_1), v(z_2))$  e  $wv(z) = (i, j)(v(z_1), v(z_2)) = iv(z_1) + jv(z_2)$ .

Note que

$$c_{w_0} z^{w_0} = - \sum_{w \in I \setminus \{w_0\}} c_w z^w.$$

Logo,

$$v(c_{w_0} z^{w_0}) = v \left( - \sum_{w \in I \setminus \{w_0\}} c_w z^w \right) \geq \min_{w \in I \setminus \{w_0\}} \{v(c_w z^w)\}.$$

Mas, pela escolha de  $w_0$ , temos que  $v(c_{w_0}z^{w_0}) \leq \min_{w \in I \setminus \{w_0\}} \{v(c_w z^w)\}$  e, portanto,

$$v(c_{w_0}z^{w_0}) = \min_{w \in I \setminus \{w_0\}} \{v(c_w z^w)\}.$$

Assim, existe pelo menos um  $w_1 \in I \setminus \{w_0\}$  tal que  $v(c_{w_0}z^{w_0}) = v(c_{w_1}z^{w_1})$ . Assim, existe  $r \geq 1$  tal que

$$v(c_{w_0}z^{w_0}) = \dots = v(c_{w_r}z^{w_r}) < v(c_w z^w), \forall w \in I \setminus \{w_0, \dots, w_r\}, \text{ ou ainda,}$$

$$v(c_{w_0}) + w_0 v(z) = \dots = v(c_{w_r}) + w_r v(z) < v(c_w) + w v(z), \forall w \in I \setminus \{w_0, \dots, w_r\}.$$

Logo,

$$-v(c_{w_0}) + w_0(-v(z)) = \dots = -v(c_{w_r}) + w_r(-v(z)) > -v(c_w) + w(-v(z)),$$

para todo  $w \in I \setminus \{w_0, \dots, w_r\}$ . Pela Proposição 2.2.1, temos

$$-v(z) = (-v(z_1), -v(z_2)) = (x_1, x_2) \in V(F_{trop}) \Rightarrow \text{Val}(Z_F) \subseteq V(F_{trop}).$$

Para a inclusão contrária, como  $I$  é finito, escrevemos  $I = \{w_1, \dots, w_k\}$ . Seja  $x = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$  satisfazendo

$$\rho := -v(c_{w_1}) + w_1 x = \dots = -v(c_{w_r}) + w_r x > -v(c_w) + w x, \quad (3.1)$$

para algum  $r \geq 2$  e todo  $w \in I \setminus \{w_1, \dots, w_r\}$  (ou seja,  $x \in V(F_{trop})$ ).

Sejam  $m_1, \dots, m_d$  todos os valores distintos assumidos por  $i_1, \dots, i_k$ , lembrando que  $w_1 = (i_1, j_1), \dots, w_k = (i_k, j_k)$ . Note que, a menos de uma reordenação, existem  $t_1, t_2, \dots, t_p, \dots, t_l \in \{1, \dots, k\}$  tais que

$$1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{p-1} < t_p = r < \dots < t_{l-1} < t_l = d \leq k \text{ e}$$

$$i_1 = i_2 = \dots = i_{t_1} = m_1$$

$$i_{t_1+1} = i_{t_1+2} = \dots = i_{t_2} = m_2$$

$$\vdots$$

$$i_{t_{p-2}+1} = i_{t_{p-2}+2} = \dots = i_{t_{p-1}} = m_{p-1}$$

$$i_{t_{p-1}+1} = i_{t_{p-1}+2} = \dots = i_r = m_p$$

$$i_{t_p+1} = i_{t_p+2} = \dots = i_{t_{p+1}} = m_{p+1}$$

$$\vdots$$

$$i_{t_{l-1}+1} = i_{t_{l-1}+2} = \dots = i_d = m_d.$$

Escolha  $z_2^0 \in \mathbb{K}^*$  tal que  $-v(z_2^0) = s_2$ . Sejam  $b_{m_1}, \dots, b_{m_d}$  os coeficientes de  $z_1^{m_1}, \dots, z_1^{m_d}$ , respectivamente, no polinômio

$$\varphi(z_1) = F(z_1, z_2^0) = b_{m_1} z_1^{m_1} + \dots + b_{m_p} z_1^{m_p} + \dots + b_{m_d} z_1^{m_d} \in \mathbb{K}[z_1].$$

Por exemplo, o  $b_{m_1}$  é igual à soma:

$$b_{m_1} = c_{w_1} (z_2^0)^{j_1} + \dots + c_{w_{t_1}} (z_2^0)^{j_{t_1}}.$$

Note que:

$$\begin{aligned} v(c_{w_1} (z_2^0)^{j_1}) &= v(c_{w_1}) + j_1 v(z_2^0) = -(-v(c_{w_1}) + j_1(-v(z_2^0))) \\ &= -(-v(c_{w_1}) + j_1 s_2 + m_1 s_1) + m_1 s_1 \\ &= -(-v(c_{w_1}) + w_1 x) + m_1 s_1 = -\rho + m_1 s_1. \end{aligned}$$

Analogamente, verificamos que todas as parcelas de  $b_{m_1}$  possuem a mesma valorização, então  $v(b_{m_1}) = m_1 s_1 - \rho$ .

Da mesma forma que fizemos para  $b_{m_1}$ , verificamos que  $-v(b_{m_i}) = \rho - m_i s_1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , ou ainda,

$$m_i s_1 - v(b_{m_i}) = \rho, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.2)$$

Além disso, usando a equação 3.1 verificamos que  $-v(b_{m_i}) < \rho - m_i s_1$ , para qualquer  $b_{m_i}$  com  $i \in \{p+1, \dots, d\}$ .

Assim, no polígono de Newton de  $\varphi$  gerado pelos pontos  $(i, -v(b_i))$ , os monômios de graus  $m_1, \dots, m_p$  formam uma aresta de inclinação  $s_1$  (veja equação (3.2)). Portanto, existe uma raiz  $z_1^0$  de  $\varphi$  tal que  $v(z_1^0) = -s_1$ . Mais detalhes sobre o polígono de Newton de  $\varphi$  e sua relação com as raízes de  $\varphi$  pode ser encontrados em (10), Corolário 1.2.

$$\text{Logo, } x = (s_1, s_2) = (-v(z_1^0), -v(z_2^0)) = \text{Val}(z_1^0, z_2^0) \in \text{Val}(Z_F) \Rightarrow V(F_{trop}) \subseteq \text{Val}(Z_F). \quad \blacksquare$$

**Observação 3.2.2.** A escolha de um corpo  $\mathbb{K}$  onde a função valorização é sobrejetiva em  $\mathbb{R}$ , faz com que a ameoba não arquimediana  $\text{Val}(Z_F)$  coincida com a curva tropical  $V(F_{trop})$  sem que seja necessário trabalhar com o fecho topológico do corpo, assim temos uma classe maior de variedades tropicais, por exemplo os pontos com coordenadas irracionais.

A seguir temos um exemplo do Teorema de Kapranov, onde veremos que, de fato, a ameoba não arquimediana de uma reta algébrica real é igual a uma reta tropical.

**Exemplo 3.2.1.** Considere a curva  $C \subset \mathbb{K}^2$  dada pela equação  $t^{-3}z_1 + t^{-2}z_2 = 1$ . Se  $(z_1, z_2) \in C \cap (\mathbb{K}^*)^2$ , então

$$\text{Val}(z_1, z_2) = \text{Val}(z_1, (1 - t^{-3}z_1)t^2) = \text{Val}(z_1, t^2 - t^{-1}z_1),$$

que pode ter três resultados diferentes:

- Se  $v(z_1) > 3$ , então  $v(z_2) = v(t^2 - t^{-1}z_1) = v(t^2 - t^q)$ , onde  $q > 2$ , ou seja,  $v(z_2) = 2$ . Assim, sendo

$$(x_1, x_2) = \text{Val}(z_1, z_2) = (-v(z_1), -v(z_2)),$$

temos  $x_1 < -3$  e  $x_2 = -2$ , que é exatamente a aresta horizontal da curva tropical da Figura 21.

- Se  $v(z_2) > 2$ , então  $v(z_1) = v(t^3 - tz_2) = 3$ . Assim:

$$(x_1, x_2) = \text{Val}(z_1, z_2) = (-v(z_1), -v(z_2)) \Rightarrow x_1 = -3 \text{ e } x_2 < -2,$$

que é a aresta vertical da curva tropical da Figura 21.

- Se  $v(z_1) \leq 3$ , então  $v(t^{-1}z_1) \leq 2$ . Logo,

$$v(z_2) = v(t^2 - t^{-1}z_1) = v(z_1) - 1 \leq 2 \text{ e}$$

$$(x_1, x_2) = \text{Val}(z_1, z_2) = (-v(z_1), -v(z_2)) = (-v(z_1), -v(z_1) + 1),$$

que é  $x_2 = x_1 + 1$ , com  $x_1 \geq -3$ , ou seja, é a aresta superior direita da curva tropical da Figura 21.

Assim, vimos que a imagem da curva  $C$  pela aplicação  $\text{Val}$  é exatamente a curva tropical da Figura 21.

**Lema 3.2.3.** *Toda curva tropical plana é limite de amebas de curvas planas complexas.*

*Demonstração.* Dada a curva tropical definida por

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_1^i y^j,$$

onde  $A \subset \mathbb{Z}^2$  é finito, considere um polinômio

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(i,j) \in A} \gamma_{ij} t^{-a_{ij}} z_1^i z_2^j \in \mathbb{K}^*[z_1, z_2],$$

onde,  $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}^*$  são quaisquer e a variedade

$$V_{\mathbb{K}} = Z(F) = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{K}^*)^2; F(z_1, z_2) = 0\}.$$

Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{K}$ , podemos escrever

$$z_1 = \sum_{\beta \in B} b_\beta t^\beta = b_{v(z_1)} t^{v(z_1)} \left( 1 + \sum_{\beta \in B \setminus \{v(z_1)\}} \frac{b_\beta}{b_{v(z_1)}} t^{\beta - v(z_1)} \right) e$$

$$z_2 = \sum_{\gamma \in C} c_\gamma t^\gamma = c_{v(z_2)} t^{v(z_2)} \left( 1 + \sum_{\gamma \in C \setminus \{v(z_2)\}} \frac{c_\gamma}{c_{v(z_2)}} t^{\gamma - v(z_2)} \right).$$

Considerando  $z_1$  e  $z_2$  como funções convergentes numa vizinhança de  $t = 0$ , então quando  $t \rightarrow 0$

$$\left( \sum_{\beta \in B \setminus \{v(z_1)\}} \frac{b_\beta}{b_{v(z_1)}} t^{\beta - v(z_1)} \right) \rightarrow 0 \quad e \quad \left( \sum_{\gamma \in C \setminus \{v(z_2)\}} \frac{c_\gamma}{c_{v(z_2)}} t^{\gamma - v(z_2)} \right) \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \log_t |z_1| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \log_t |b_{v(z_1)} t^{v(z_1)}| = \lim_{t \rightarrow 0^+} (v(z_1) + \log_t |b_{v(z_1)}|) = v(z_1) \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log_t |z_2| = v(z_2).$$

Donde segue,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}_t(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow 0} (-\log_t |z_1|, -\log_t |z_2|) = (-v(z_1), -v(z_2)) = \text{Val}(z_1, z_2).$$

Ou seja, o limite anterior nos diz que interpretando o polinômio  $F(z_1, z_2) \in \mathbb{K}^*[z_1, z_2]$  como uma família de polinômios,

$$f_t(z_1 z_2) = \sum_{(i,j) \in A} \gamma_{ij} t^{-a_{ij}} z_1^i z_2^j \in \mathbb{R}^*[z_1, z_2],$$

para  $t \in \mathbb{R}^+$  pequeno, a família de curvas  $C_t = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; f_t(z_1, z_2) = 0\}$  é tal que as amebas  $\mathcal{A}_t = \text{Log}_t(C_t)$  convergem para  $\text{Val}(Z(F))$ , que pelo Teorema de Kapranov, é igual à curva tropical definida pelo polinômio

$$f(x_1, x_2) = \text{“} \sum_{(i,j) \in A} -v(\gamma_{ij} t^{-a_{ij}}) x^i y^j \text{”} = \text{“} \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x^i y^j \text{”}.$$

■

## 4 PATCHWORK

O *patchwork* consiste em uma forma moderna de construção de curvas algébricas planas reais com topologia controlada. Essa técnica foi desenvolvida por Oleg Viro no final da década de 1970 e, embora na época a geometria tropical ainda não existisse e a técnica tenha sido enunciada em uma linguagem diferente, hoje sabemos que ela nos fornece um método puramente combinatório de construção de curvas algébricas reais a partir de curvas tropicais.

Neste capítulo, mostraremos inicialmente como realizar o *patchwork* de uma reta tropical. Depois, iremos generalizar a técnica de *patchwork* para curvas tropicais não-singulares de grau maior que um. A principal referência deste capítulo pode ser encontrada em (11).

### 4.1 PATCHWORK DE UMA RETA TROPICAL

Antes de descrever o método de *patchwork* de uma reta tropical, precisamos observar algumas propriedades das amebas que convergem para ela.

**Definição 4.1.1.** *Uma curva algébrica real em  $(\mathbb{C}^*)^2$  é uma curva, com valores em  $\mathbb{C}^2$ , definida por um polinômio com coeficientes reais. Dada uma curva algébrica real  $\mathcal{C}$ , chamamos de  $\mathbb{R}\mathcal{C} := \mathcal{C} \cap (\mathbb{R}^*)^2$  o conjunto dos pontos reais de  $\mathcal{C}$ .*

Seja  $\mathcal{L} : az + bw + c = 0$  uma reta algébrica real em  $(\mathbb{C}^*)^2$ . O conjunto dos pontos reais de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathbb{R}\mathcal{L}$ , é a reta  $ax + by + c = 0$  em  $(\mathbb{R}^*)^2$ . Como  $abc \neq 0$ , a reta  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  passa por exatamente três quadrantes, que são determinados pelos sinais de  $a, b$  e  $c$ . De fato, temos que  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  corta os eixos  $x$  e  $y$  nos pontos  $-c/a$  e  $-c/b$ , respectivamente, e:

- (1) se  $ac > 0$  e  $bc > 0$ , temos  $-c/a < 0$  e  $-c/b < 0$ . Logo,  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  passa pelo 2°, 3° e 4° quadrantes;
- (2) se  $ac > 0$  e  $bc < 0$ , temos  $-c/a < 0$  e  $-c/b > 0$ . Logo,  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  passa pelo 1°, 2° e 3° quadrantes;
- (3) se  $ac < 0$  e  $bc < 0$ , temos  $-c/a > 0$  e  $-c/b > 0$ . Logo,  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  passa pelos 1°, 2° e 4° quadrantes;
- (4) se  $ac < 0$  e  $bc > 0$ , temos  $-c/a > 0$  e  $-c/b < 0$ . Logo,  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  passa pelos 1°, 3° e 4° quadrantes.

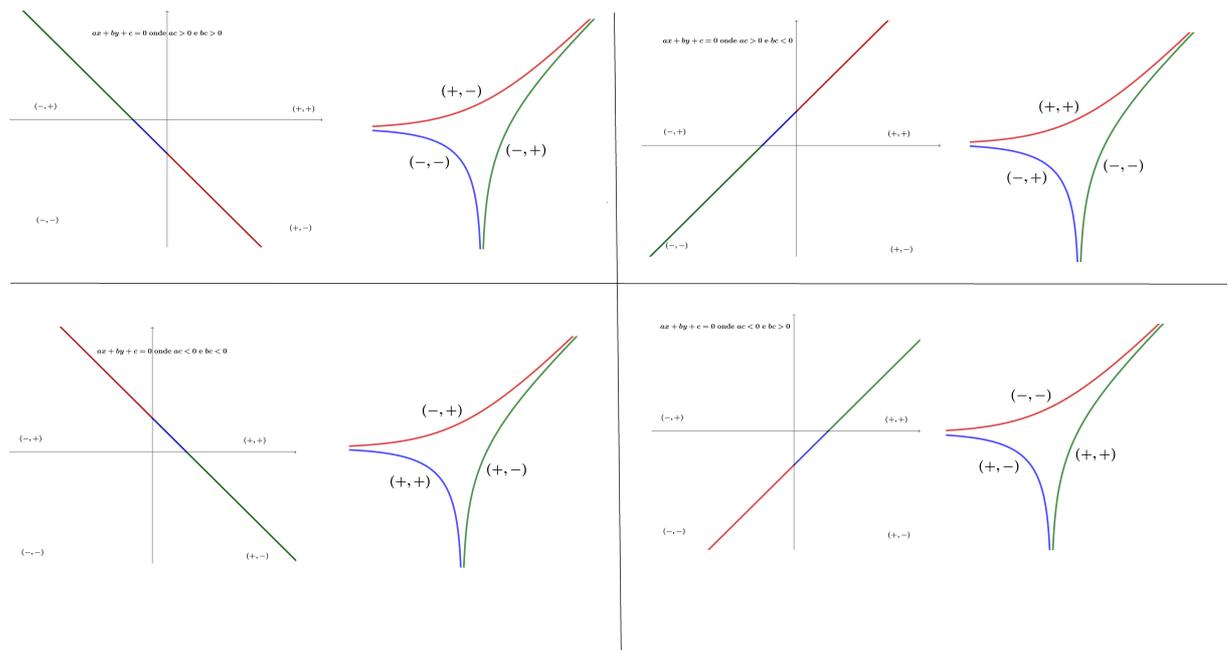
Seja  $\mathcal{A}(\mathbb{R}\mathcal{L})$  a ameba de  $\mathbb{R}\mathcal{L}$ , considerando  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ , ou seja,

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}\mathcal{L}) = \text{Log}(\mathbb{R}\mathcal{L}) = \left( \ln |x|, \ln \left| -\left( \frac{ax + c}{b} \right) \right| \right).$$

Então,  $\mathcal{A}(\mathbb{R}\mathcal{L})$  possui três arcos, cada um deles obtido calculando a função Log nas duas semirretas e no segmento de reta de  $\mathbb{R}\mathcal{L}$ , contidos em cada um dos quadrantes do  $\mathbb{R}^2$  que contém  $\mathbb{R}\mathcal{L}$ .

Vamos nomear cada arco de  $\mathcal{A}(\mathbb{R}\mathcal{L})$  pelo par de sinais do quadrante correspondente à semirreta (ou segmento de reta) que deu origem a ele. Podemos fazer isso de quatro maneiras diferentes, dependendo dos sinais de  $a, b$  e  $c$ . Observe a Figura 22.

Figura 22 – Amebas com arcos nomeados pelos sinais correspondentes



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Na Figura 22 podemos perceber que, se dois arcos  $A_1$  e  $A_2$  de  $\mathcal{A}(\mathbb{R}\mathcal{L})$  possuem uma direção assintótica  $(u, v)$  em comum, então os pares de sinais de  $A_1$  e  $A_2$  (que vamos escrever como  $(\varepsilon_1(A_1), \varepsilon_2(A_1))$  e  $(\varepsilon_1(A_2), \varepsilon_2(A_2))$ , respectivamente) diferem um do outro por um fator  $(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v))$ , onde  $\varepsilon(x)$  é a notação usada para “sinal de  $x$ ”. Isto é:

$$(\varepsilon_1(A_1), \varepsilon_2(A_1))(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v)) = (\varepsilon_1(A_2), \varepsilon_2(A_2)).$$

Por exemplo, na primeira ameba, os arcos  $(+, -)$  e  $(-, +)$  possuem a direção assintótica  $(1, 1)$  em comum e diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^1), \varepsilon((-1)^1)) = (-, -)$ , pois

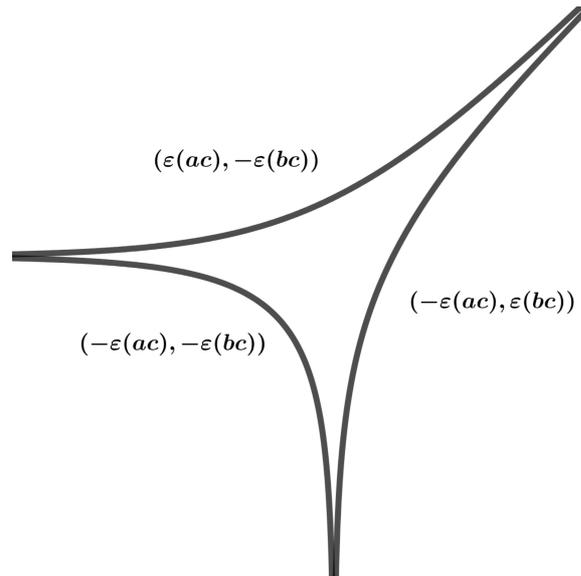
$$(+, -)(-, -) = (-, +).$$

Os arcos  $(+, -)$  e  $(-, -)$  possuem a direção assintótica  $(1, 0)$  em comum e diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^1), \varepsilon((-1)^0)) = (-, +)$ , pois

$$(+, -)(-, +) = (-, -).$$

Resumindo, em cada caso, podemos nomear os arcos da ameba de  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  como mostra a Figura 23.

Figura 23 – Distribuição de sinais nos arcos da ameba da reta  $ax + by + c = 0$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Dada uma reta algébrica real, já sabemos como determinar os arcos de sua ameba e qual par de sinais cada arco deve ter. Tentaremos fazer o processo inverso, isto é, de posse da ameba de uma reta algébrica real e dos pares de sinais de cada arco, vamos tentar obter (a menos de isotopia) a reta algébrica real que a originou.

**Definição 4.1.2.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado e fechado. Uma isotopia de  $X$  em  $Y$  é uma função contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$ , tal que para todo  $t \in I$ ,  $H_t(x) = H(x, t)$  é um homeomorfismo de  $X$  em  $Y$ . Neste caso, dizemos também que  $X$  e  $Y$  são isotópicos ou que estão numa mesma classe de isotopia.*

**Exemplo 4.1.1.** Como fizemos no Exemplo 3.1.4, para  $t \in \mathbb{R}^+$  pequeno, considere a ameba formada pela união dos arcos  $A_1 : Y = -\log_t(t^{-X} + 1)$ ,  $A_2 : Y = -\log_t(t^{-X} - 1)$  e  $A_3 : Y = -\log_t(1 - t^{-X})$ , com pares de sinais  $(+, -)$ ,  $(-, +)$  e  $(-, -)$ , respectivamente. Lembremos que para obter a ameba de uma reta real, aplicamos a função logaritmo no

módulo das coordenadas dos pontos da reta. Como queremos realizar o processo inverso, vamos aplicar a função exponencial nas coordenadas dos pontos da ameba. Assim:

(i) Para o arco  $(+, -)$ , temos:

$$(X, Y) \mapsto (e^X, -e^Y) = (e^X, -e^{-\log_t(t^{-X}+1)}) = (x, y) \Rightarrow y = -e^{\log_t(t^{-\ln x}+1)}.$$

(ii) Para o arco  $(-, +)$ , temos:

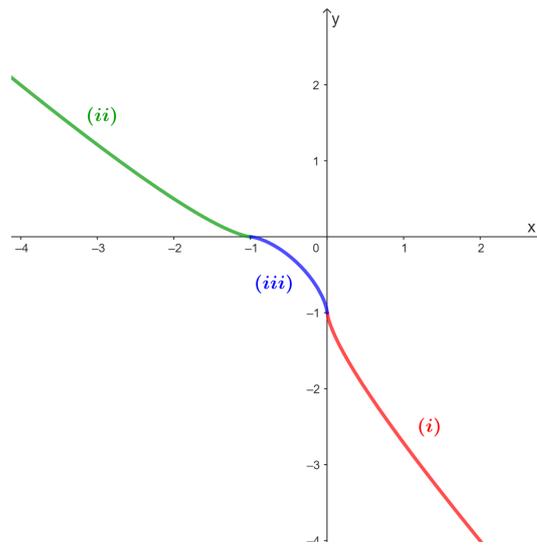
$$(X, Y) \mapsto (-e^X, e^Y) = (-e^X, e^{-\log_t(t^{-X}-1)}) = (x, y) \Rightarrow y = e^{-\log_t(t^{-\ln(-x)}-1)}.$$

(iii) Para o arco  $(-, -)$ , temos:

$$(X, Y) \mapsto (-e^X, -e^Y) = (-e^X, -e^{-\log_t(1-t^{-X})}) = (x, y) \Rightarrow y = -e^{-\log_t(1-t^{-\ln(-x)})}.$$

A união dos gráficos das funções de (i), (ii) e (iii) para  $t$  pequeno fixado pode ser vista na Figura 24.

Figura 24 – Gráfico isotópico à uma reta algébrica real obtido com *patchwork* para  $t$  pequeno



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

A função da Figura 24 não é uma reta, mas é uma curva isotópica à reta algébrica real  $x + y + 1 = 0$ , cuja ameba e os sinais de seus arcos são os que tínhamos inicialmente.

O exemplo anterior é uma motivação para a descrição do método de *patchwork* de uma reta tropical, que segue o mesmo raciocínio para obter uma curva isotrópica à uma reta algébrica real a partir de uma reta tropical.

Seja  $\Gamma$  uma reta tropical. O Teorema de Kapranov garante que existem amebas  $\mathcal{A}_t$ , com  $t \in \mathbb{R}^+$  e  $t$  pequeno, que convergem para  $\Gamma$  quando  $t$  tende para zero. O *patchwork* da reta tropical  $\Gamma$  consiste em seguir os seguintes passos:

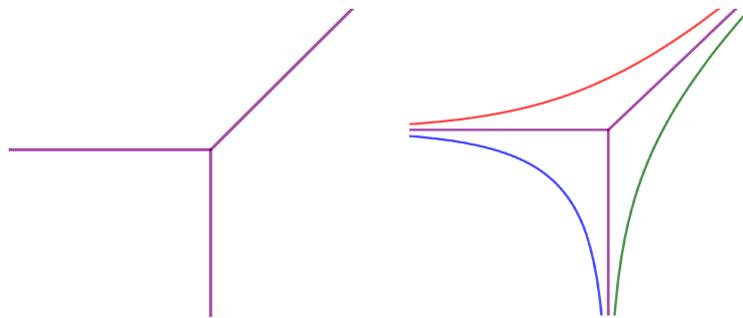
- (1) Fixe  $t \in \mathbb{R}^+$  pequeno. Como já sabemos, a ameba  $\mathcal{A}_t$  possui três arcos. Escolha um arco de  $\mathcal{A}_t$  e nomeie-o com um par de sinais (qualquer);
- (2) Nomeie os outros dois arcos seguindo a regra: “dois arcos com direção assintótica  $(u, v)$  em comum diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v))$ ”;
- (3) Para cada arco  $A_i \subset \mathcal{A}_t$  nomeado por  $(\varepsilon_1(A_i), \varepsilon_2(A_i))$ , desenhe sua imagem sob o mapa

$$(x, y) \mapsto (\varepsilon_1(A_i)e^x, \varepsilon_2(A_i)e^y)$$

em  $(\mathbb{R}^*)^2$ .

O interessante do *patchwork* é que ele pode ser realizado a partir de uma reta tropical qualquer. Além disso, a topologia da curva construída não depende da equação explícita que define a reta tropical e nem das equações das amebas que convergem para ela. De fato, como visto no Capítulo anterior, uma ameba que converge para uma reta tropical possui três arcos e estes arcos estão dispostos como na Figura 25.

Figura 25 – Reta tropical e arcos de uma ameba que converge para ela



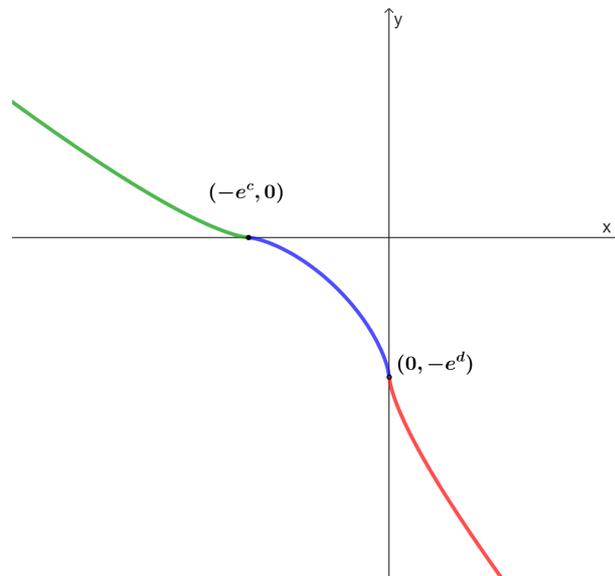
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Seguindo o segundo passo do *patchwork* de uma reta tropical, podemos nomear o arco vermelho com o par de sinais  $(+, -)$  e os outros já ficam determinados pela regra (2), sendo o verde  $(-, +)$  e o azul  $(-, -)$ . Para o último passo, estamos interessados apenas no tipo de isotopia da curva, não nos interessa saber exatamente qual o formato da curva obtida ao tomar a imagem de cada arco pelo mapa  $(x, y) \mapsto (\varepsilon_1(A_i)e^x, \varepsilon_2(A_i)e^y)$ , mas sim como as imagens dos arcos se conectam e em qual quadrante do plano  $x$  e  $y$  elas estão. A curva imagem

de cada arco estará no quadrante correspondente ao par de sinais recebido por cada arco. Além disso, note que os arcos azul e verde possuem uma assíntota em comum de coordenada  $x$  constante. Isso significa que esses arcos se encontram no infinito da reta  $x = c$  e, portanto, após a aplicação do mapa exponencial eles vão se encontrar no ponto  $(-e^c, e^{-\infty}) = (-e^c, 0)$ . De forma análoga, vemos que os arcos vermelho e azul vão se encontrar, depois da aplicação do mapa exponencial, no ponto  $(0, -e^d)$ , onde  $d$  é uma constante. Em relação às imagens pelo mapa exponencial dos arcos vermelho e verde, cuja direção assintótica é  $(1, 1)$ , veremos mais adiante que elas se encontrarão apenas quando compactificarmos o  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, quando estivermos trabalhando em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Com essas observações, podemos fazer um esboço de como ficará a curva resultante após o *patchwork*. Observe a Figura 26.

Figura 26 – Resultado do *patchwork* sem possuir a equação da curva tropical



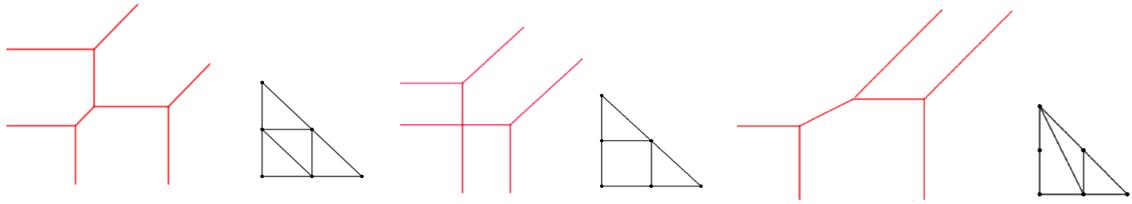
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

#### 4.1.1 PATCHWORK DE CURVAS TROPICAIS NÃO-SINGULARES

**Definição 4.1.3.** Dizemos que uma curva tropical em  $\mathbb{R}^2$  é não-singular se sua subdivisão dual é formada apenas por triângulos de área  $1/2$ .

**Exemplo 4.1.2.** A primeira curva tropical da Figura 27 é não-singular, pois sua subdivisão dual é formada por quatro triângulos de área  $1/2$ . As outras duas curvas tropicais da Figura 27 são singulares, pois a primeira possui um polígono que não é um triângulo em sua subdivisão dual e a segunda possui um triângulo de área 1 em sua subdivisão dual.

Figura 27 – Exemplos de curvas tropicais singulares e não-singulares



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Proposição 4.1.1.** *Uma curva tropical em  $\mathbb{R}^2$  definida por um polinômio tropical  $f$  é não-singular se, e somente se, tem exatamente  $2 \cdot \text{Área}(NP(f))$  vértices.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que a curva tropical  $C$  definida por  $f$  é não-singular. Então, sua subdivisão dual  $SD(f)$  é formada apenas por triângulos de área  $1/2$ . Se  $SD(f)$  possui  $k$  triângulos, pelo Teorema da Subdivisão Dual,  $C$  possui  $k$  vértices. Assim, podemos escrever a área total de  $NP(f)$  como

$$2 \cdot \text{Área}(NP(f)) = 2 \cdot \frac{1}{2} k = k,$$

ou seja,  $C$  possui  $2 \cdot \text{Área}(NP(f))$  vértices.

( $\Leftarrow$ ) Agora, suponha que  $C$  possui  $k = 2 \cdot \text{Área}(NP(f))$  vértices. Então, pelo Teorema da Subdivisão Dual,  $SD(f)$  é formada por  $k$  polígonos,  $P_1, \dots, P_k$ , de vértices inteiros. Podemos escrever:

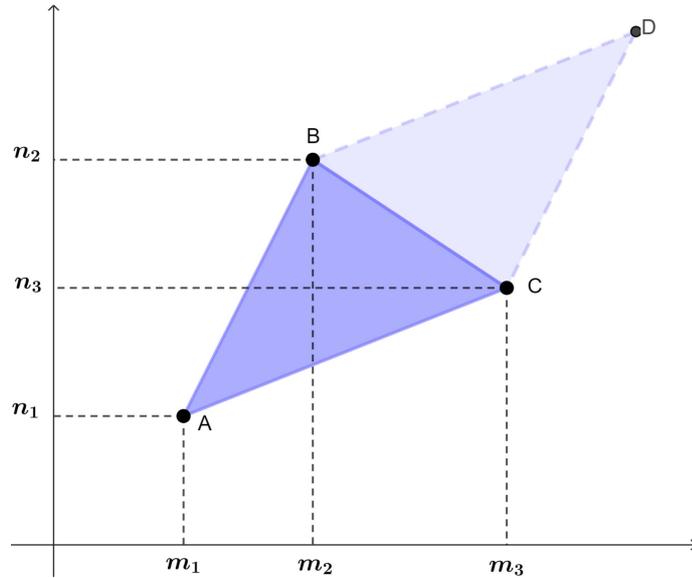
$$k = 2(\text{Área}(P_1) + \dots + \text{Área}(P_k)).$$

Como cada  $P_i$  é um polígono de vértices inteiros, a menor área que cada um deles pode atingir é  $1/2$ , o que acontece apenas quando temos um triângulo de base 1 e altura 1. Se  $\text{Área}(P_i) > 1/2$  para algum  $i$  entre 1 e  $k$ , então  $2(\text{Área}(P_1) + \dots + \text{Área}(P_k)) > k$ . Portanto, cada  $P_i$  é um triângulo de área  $1/2$  e  $C$  é não-singular. ■

**Proposição 4.1.2.** *Todo triângulo  $T$  com vértices em  $\mathbb{Z}^2$  e área  $1/2$  pode ser levado, via composição de uma translação com um elemento de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , no triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A = (m_1, n_1)$ ,  $B = (m_2, n_2)$  e  $C = (m_3, n_3)$  os vértices em  $\mathbb{Z}^2$  de um triângulo  $T$  de área  $1/2$ . Considere o paralelogramo  $P$ ,  $ABCD$ , tal que  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$  (Figura 28).

Figura 28 – Triângulo  $ABC$  de área  $1/2$  e paralelogramo  $ABCD$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Como  $T$  tem área  $1/2$ , temos que o paralelogramo  $P$  tem área 1. Assim:

$$1 = A_P^2 = \|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AC}\|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2$$

$$= [(m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2][(m_3 - m_1)^2 + (n_3 - n_1)^2] - [(m_2 - m_1)(m_3 - m_1) + (n_2 - n_1)(n_3 - n_1)]^2.$$

Usando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (x - m_1, y - n_1)$ , podemos supor  $A = (0, 0)$ . Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que  $B = (m_2, n_2)$ ,  $C = (m_3, n_3)$  com  $1 = (m_2 n_3 - n_2 m_3)^2$ , ou seja,  $|m_2 n_3 - n_2 m_3| = 1$ .

Considere a transformação linear  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida pela matriz

$$S = \begin{pmatrix} -n_2 & m_2 \\ -n_3 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$S(m_2, n_2) = \begin{pmatrix} -n_2 & m_2 \\ -n_3 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_2 m_2 + m_2 n_2 \\ -n_3 m_2 + m_3 n_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{se } m_2 n_3 - n_2 m_3 = -1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{se } m_2 n_3 - n_2 m_3 = 1, \end{cases}$$

e,

$$\begin{aligned}
 S(m_3, n_3) &= \begin{pmatrix} -n_2 & m_2 \\ -n_3 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_2 m_3 + m_2 n_3 \\ -n_3 m_3 + m_3 n_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } m_2 n_3 - n_2 m_3 = 1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{se } m_2 n_3 - n_2 m_3 = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Caso 1: Se  $m_2 n_3 - n_2 m_3 = 1$ , temos  $S(m_2, n_2) = (0, -1)$  e  $S(m_3, n_3) = (1, 0)$ , veja a Figura 29(a). Seja  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, isto é,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 & m_2 \\ -n_3 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_3 & -m_3 \\ -n_2 & m_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

é tal que  $(R \circ S)(m_3, n_3) = (0, 1)$  e  $(R \circ S)(m_2, n_2) = (1, 0)$ . Observe a Figura 29(b).

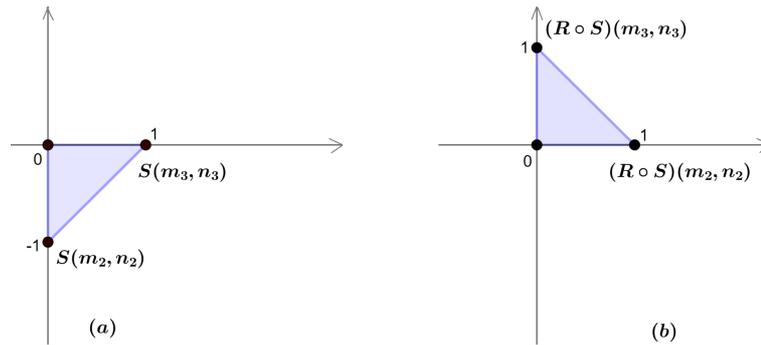
Caso 2: Se  $m_2 n_3 - n_2 m_3 = -1$ , temos  $S(m_2, n_2) = (0, 1)$  e  $S(m_3, n_3) = (-1, 0)$ . Observe a Figura 30(a). Seja  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação de  $270^\circ$  no sentido anti-horário, isto é,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

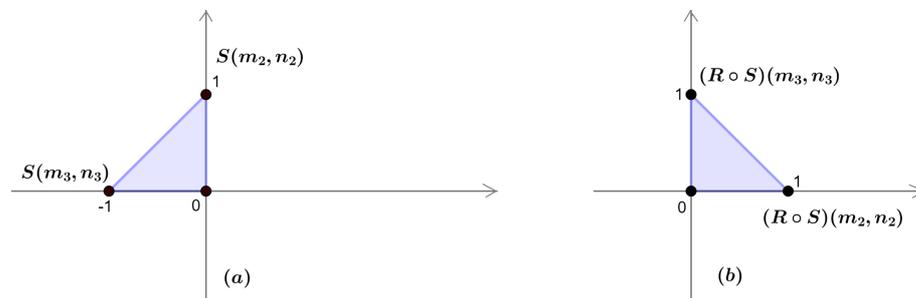
Então,

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 & m_2 \\ -n_3 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3 & m_3 \\ n_2 & -m_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

é tal que  $(R \circ S)(m_3, n_3) = (0, 1)$  e  $(R \circ S)(m_2, n_2) = (1, 0)$ , figura 30(b).

Figura 29 – Rotação do triângulo para  $m_2n_3 - n_2m_3 = 1$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 30 – Rotação do triângulo para  $m_2n_3 - n_2m_3 = -1$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

■

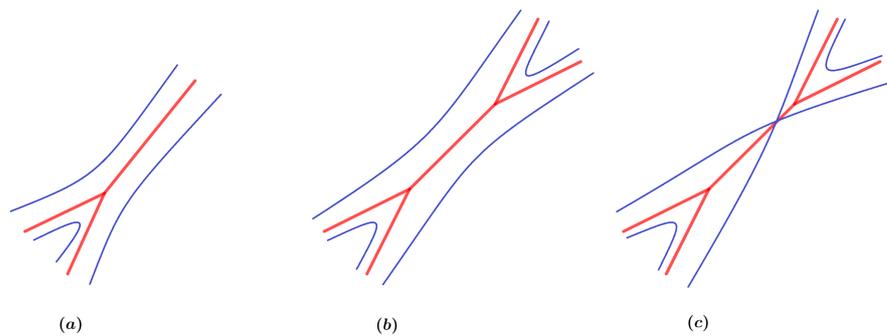
Considere uma curva tropical  $C$  em  $(\mathbb{C}^*)^2$  cujo polígono de Newton é um triângulo de área  $1/2$ . Pela Proposição 4.1.2, vimos que este triângulo pode ser levado no triângulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,1)$  que é que é o polígono de Newton dual de uma reta tropical. Então, em coordenadas adequadas, a curva tropical  $C$  é uma reta tropical.

Em uma curva tropical não-singular  $C_1$ , cada polígono da subdivisão dual é um triângulo de área  $1/2$ . Isso significa que, em coordenadas adequadas, cada conjunto formado por um vértice de  $C_1$  e pelas três arestas conectadas a ele é, localmente, uma reta tropical. Usaremos este fato para generalizar a técnica do *patchwork* de uma reta tropical para curvas tropicais não-singulares.

Seja  $C$  uma curva tropical não-singular em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(C_t)_{t \in \mathbb{R}}$  uma família de curvas algébricas reais cujas amebas convergem para  $C$  no sentido do Teorema de Kapranov. Então, para  $t$  suficientemente pequeno, temos:

- para qualquer vértice  $a$  de  $C$ , em uma vizinhança pequena  $U_a$  de  $a$ , a ameba  $\mathcal{A}_t(\mathbb{R}C_t) \cap U_a$  é formada por três arcos, como está representado na Figura 31a, correspondentes a três arcos em  $\mathbb{R}C_t$ ;
- para cada aresta limitada  $e$  de  $C$ , em uma vizinhança pequena  $U_e$  de  $e$ , a ameba  $\mathcal{A}_t(\mathbb{R}C_t) \cap U_e$  é formada por quatro arcos, correspondentes a quatro arcos em  $\mathbb{R}C_t$ . As possíveis posições dos arcos em relação à aresta estão representadas nas Figuras 31b e 31c. Além disso, se  $e$  tem vetor diretor inteiro  $(u, v)$ , então os dois arcos de  $\mathcal{A}_t(\mathbb{R}C_t) \cap U_e$  que convergem para  $e$  correspondem ao arcos de  $\mathbb{R}C_t$  contidos em quadrantes de  $\mathbb{R}^2$  cujos pares de sinais correspondentes diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v))$ .

Figura 31 –  $\mathcal{A}_t(\mathbb{R}C_t)$  para  $t$  pequeno



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

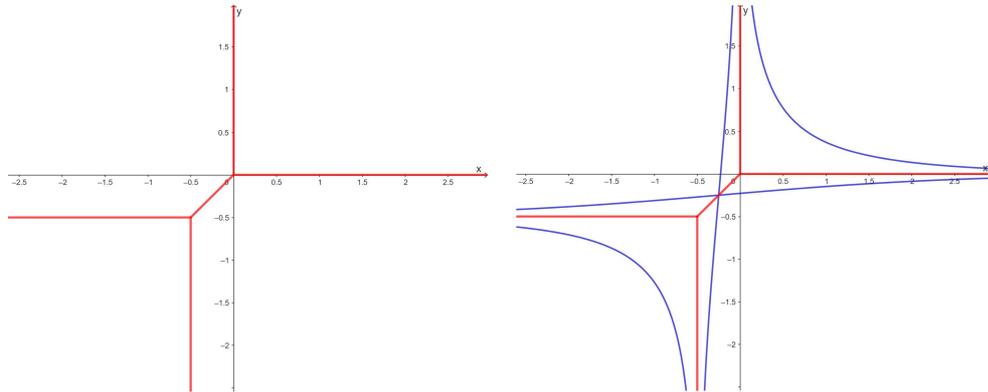
**Definição 4.1.4.** *Seja  $e$  uma aresta finita de  $C$ . Se em uma ameba que converge para  $C$  os arcos que convergem para  $e$  se cruzam como na Figura 31c, dizemos que  $e$  é uma aresta torcida ou marcada.*

**Exemplo 4.1.3.** Considere a curva tropical  $C$  definida pelo polinômio

$$f(x, y) = "xy + x + y + \left(-\frac{1}{2}\right)".$$

Pelo Lema 3.2.3, as amebas das curvas planas  $C_t$  definidas pelos polinômios  $f_t(x, y) = xy - x - y + t^{1/2}$  convergem para  $C$  quando  $t$  vai para zero. Na Figura 32 representamos esta ameba para  $t = 1/2$ . Note que dois arcos da ameba se cruzam sobre a aresta finita de  $C$ , assim como na Figura 31c. Então, esta aresta finita é torcida.

Figura 32 – Curva tropical  $C$  e ameiba da curva  $xy - x - y + t^{1/2}$  para  $t = 1/2$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Nem toda aresta finita de uma curva tropical  $C$  pode ser uma aresta torcida. No entanto, as possíveis distribuições de arestas torcidas são fáceis de descrever.

**Definição 4.1.5.** Dizemos que um subconjunto  $T$  do conjunto de arestas limitadas de uma curva tropical  $C$  admite torção quando, para qualquer ciclo  $\gamma$  de  $C$ , isto é, um conjunto de arestas que formam um caminho fechado, se  $e_1, \dots, e_k$  são as arestas em  $\gamma \cap T$  e se  $(u_i, v_i)$  é um vetor diretor inteiro primitivo ( $\text{mdc}(u_i, v_i) = 1$ ) de  $e_i$ , então

$$\sum_{i=1}^k (u_i, v_i) = 0 \pmod{2}.$$

A seguir apresentamos uma reformulação do Teorema de Kapranov para curvas tropicais com conjunto de arestas que admitem torção. Uma ideia da demonstração será dada no final desse capítulo.

**Teorema 4.1.3.** Sejam uma curva tropical  $C$  não-singular em  $\mathbb{R}^2$  e  $T$  um conjunto de arestas de  $C$  que admite torção. Então, existe uma família de curvas algébricas reais não-singulares  $(C_t)_{t \in \mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{C}^*)^2$  que converge para  $C$ , tal que o conjunto de arestas torcidas correspondente é  $T$ .

**Observação 4.1.1.** Se  $T$  é o conjunto vazio, então, por vacuidade,  $T$  admite torção.

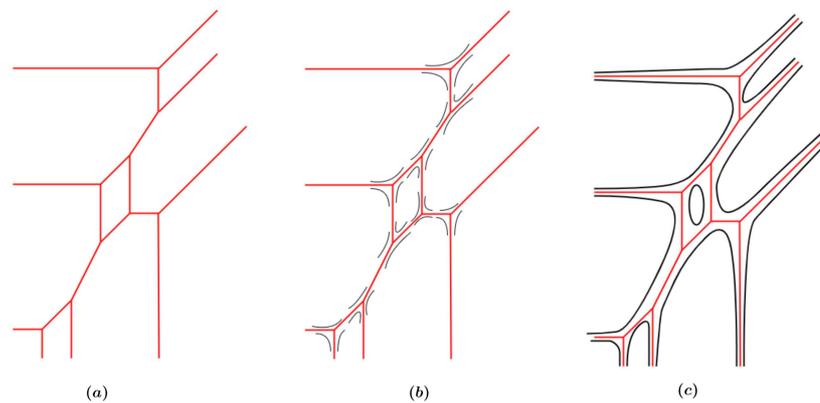
**Observação 4.1.2.** Se  $C$  é uma árvore, isto é, existe apenas um caminho entre cada par de vértices, então qualquer conjunto de arestas limitadas admite torção.

A seguir, apresentamos a ideia do *patchwork* de uma curva tropical não-singular  $C \subset \mathbb{R}^2$  com um conjunto  $T$  de arestas finitas que admite torção.

- Na vizinhança de cada vértice de  $C$ , desenhamos três arcos como os da Figura 31a;
- Na vizinhança de cada aresta limitada  $e$ , adjacente aos vértices  $v$  e  $v'$ , conectamos os arcos correspondente a  $v$  aos arcos correspondentes a  $v'$  da seguinte forma: se  $e \notin T$ , apenas conectamos esses arcos como na Figura 31b; se  $e \in T$ , então conectamos esses arcos como na Figura 31c. Denotamos por  $\mathcal{P}$  a curva obtida após conectarmos os arcos em todas as arestas limitadas de  $C$ ;
- Escolhemos arbitrariamente uma componente de  $\mathcal{P}$  e um par de sinais para ela;
- Associamos pares de sinais às demais componentes de  $\mathcal{P}$  usando a seguinte regra: “Dada uma aresta com vetor diretor inteiro primitivo  $(u, v)$ , o par de sinais das duas componentes de  $\mathcal{P}$  correspondentes à  $e$  diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v))$ ”;
- Aplicamos o mapa exponencial  $(x, y) \mapsto (\varepsilon_1(A_i)e^x, \varepsilon_2(A_i)e^y)$  a cada componente  $A_i$  de  $\mathcal{P}$ , onde  $(\varepsilon_1(A_i), \varepsilon_2(A_i))$  é o par de sinais associados a  $A_i$ . A união das imagens de todas as componentes de  $\mathcal{P}$  é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 4.1.4.** Na Figura 33(a) podemos ver uma curva tropical  $\Gamma$  não-singular de grau 3 com  $T = \emptyset$ . Para cada vértice desta curva vamos desenhar três arcos, como mostra a Figura 33(b). Como não temos nenhuma aresta limitada que seja torcida, vamos conectar os arcos como na Figura 31(b). Assim, obtemos uma ameba que converge para  $\Gamma$ , como pode ser visto na Figura 33(c).

Figura 33 – Dois primeiros passos do *patchwork* aplicado a uma cúbica tropical

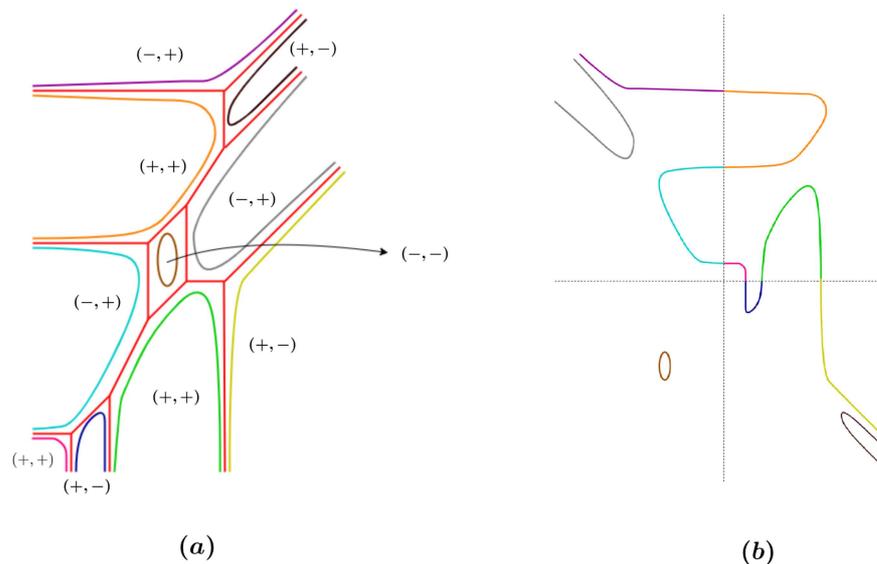


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Agora, escolhemos um arco da ameba e atribuímos a ele um par de sinais qualquer. Por exemplo, podemos escolher o arco de cor roxa da Figura 34(a) e atribuir a ele o par de sinais  $(-, +)$ . Assim, pela regra “se uma aresta  $e$  tem vetor diretor inteiro primitivo  $(u, v)$ , o par de sinais das duas componentes conectadas de  $\mathcal{P}$  correspondentes à  $e$  diferem por um fator  $(\varepsilon((-1)^u), \varepsilon((-1)^v))$ ”, conseguimos atribuir sinais a todos os outros arcos da ameba, como mostra a Figura 34(a).

O último passo do *patchwork* é aplicar a função exponencial  $(x, y) \mapsto (\varepsilon_1(A_i)e^x, \varepsilon_2(A_i)e^y)$  a cada arco  $A_i$  de  $\mathcal{P}$ . Não sabemos exatamente como será o traço das imagens de cada arco, pois não temos a equação de nenhum deles. Mas, sabemos que cada arco dará origem a um subconjunto da curva que estará no quadrante correspondente ao par de sinais atribuído a ele. Além disso, como estamos trabalhando com curvas tropicais não-singulares, na vizinhança de cada vértice a curva tropical é uma reta, em coordenadas adequadas. Vimos no caso do *patchwork* da reta tropical que quando os arcos da ameba têm assíntota comum em  $y$  constante, depois do *patchwork* eles se conectam sobre o eixo  $y$ ; quando os arcos possuem assíntota comum em  $x$  constante, depois do *patchwork* eles se conectam sobre o eixo  $x$ ; e quando a assíntota em comum é  $x = y$ , ou uma translação desta, depois do *patchwork* eles se encontram em um ponto no infinito do plano projetivo, como veremos no próximo capítulo. Assim, no *patchwork* da curva tropical  $\Gamma$ , “copiamos” cada arco da ameba no quadrante correspondente ao seu par de sinais seguindo as observações anteriores. A Figura 34(b) mostra o tipo de isotopia da curva real obtida pelo *patchwork* em  $\mathbb{R}^2$ .

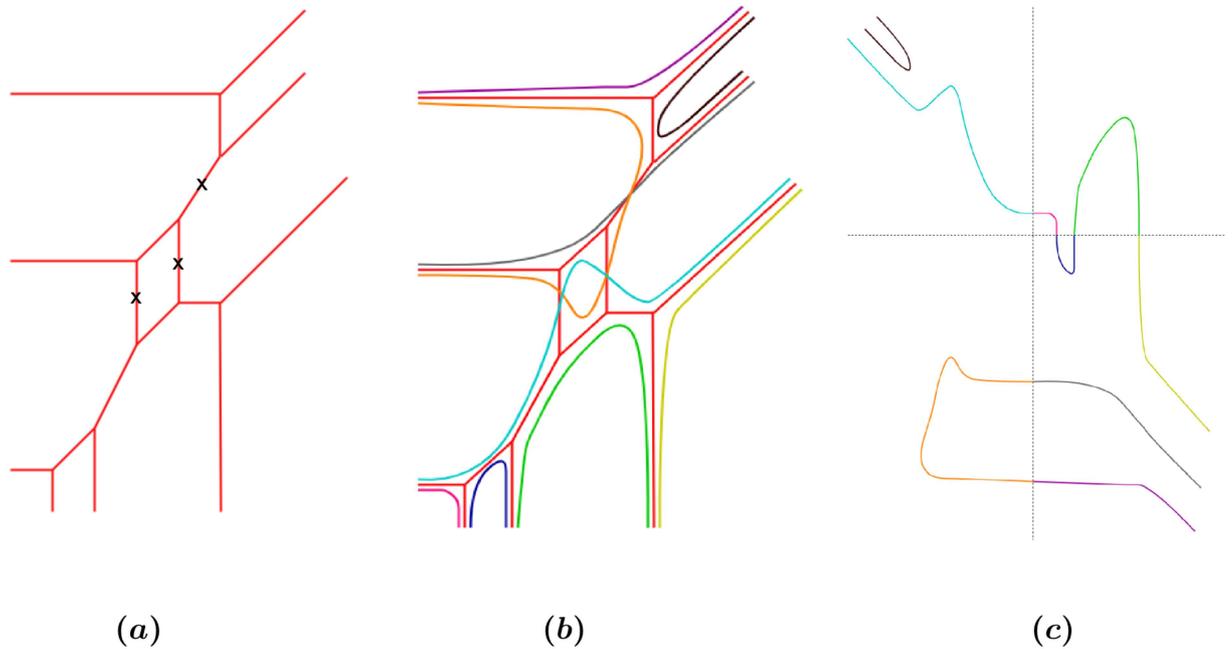
Figura 34 – *Patchwork* cúbica tropical e tipo de isotopia da curva real obtida



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Exemplo 4.1.5.** Na Figura 35(a) temos uma cúbica tropical não-singular  $\Gamma_1$ , a mesma do Exemplo 4.1.4, com um conjunto  $T$  de arestas torcidas marcadas com um “x”. A ameba que converge para  $\Gamma_1$  é obtida como no Exemplo 4.1.4, porém, os arcos das arestas marcadas serão conectados como na Figura 31(c). De modo análogo ao já feito, atribuímos um par de sinais para um arco qualquer e os pares de sinais dos demais arcos ficam determinados. Na Figura 35(c) vemos a curva obtida pelo *patchwork* quando atribuímos ao arco roxo o par de sinais  $(+, -)$ .

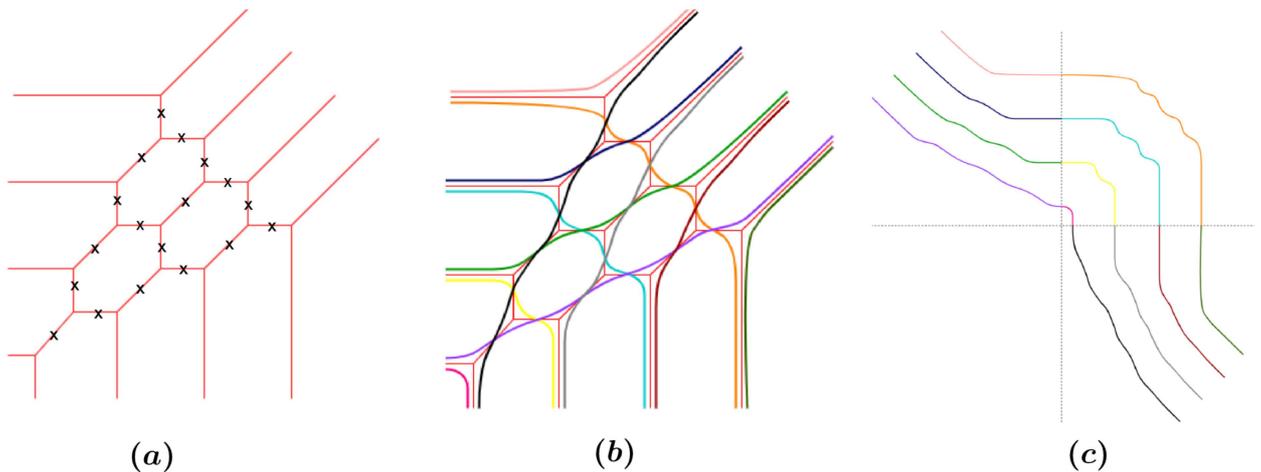
Figura 35 – *Patchwork* cúbica tropical com três arestas marcadas e tipo de isotopia da curva real obtida



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Exemplo 4.1.6.** Na Figura 36(a) temos uma curva tropical  $\Gamma_2$ , não-singular e de grau 4, com  $T$  igual ao conjunto das arestas marcadas com um “x”. Na Figura 36(b) temos uma ameba que converge para  $\Gamma_2$  e na Figura 36(c) vemos a curva real obtida pelo *patchwork* quando atribuímos ao arco preto o par de sinais  $(+, -)$ .

Figura 36 – *Patchwork* curva tropical de grau 4 com dezoito arestas marcadas e tipo de isotopia da curva real obtida



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

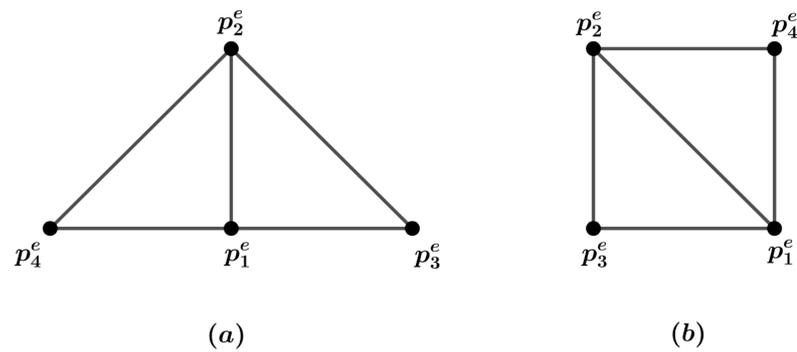
Agora daremos uma ideia da prova do Teorema 4.1.3.

*Demonstração.* (Teorema 4.1.3) Vamos mostrar como encontrar explicitamente as equações das curvas da família  $(C_t)_{t \in \mathbb{R}}$  dada no Teorema 4.1.3.

Considere uma curva tropical  $C$ , não-singular e definida pelo polinômio tropical  $f(x, y) = \text{“} \sum_{i=1}^d a_i x^{m_i} y^{n_i} \text{”}$ . Considere também a família  $(C_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  de polinômios reais  $f_t(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^d \gamma_{m_i, n_i} t^{-a_i} z_1^{m_i} z_2^{n_i}$ , com  $\gamma_{m_i, n_i} \in \mathbb{R}^*$ . Para cada escolha de  $\gamma_{m_i, n_i}$ , a família resultante vai convergir para  $C$  no sentido do Lema 3.2.3. O conjunto de arestas torcidas, por sua vez, depende apenas dos sinais de  $\gamma_{m_i, n_i}$ , como vamos mostrar abaixo.

Para cada aresta limitada  $e$  de  $C$ , denote por  $p_1^e$  e  $p_2^e$  os dois vértices do segmento  $\Delta_e \in SD(f)$ , dual a  $e$ . Pelo Teorema da Subdivisão Dual, temos que o segmento  $\Delta_e$  é adjacente a exatamente dois triângulos da subdivisão dual, pois  $e$  é limitada por dois vértices em  $C$ . Sejam  $p_3^e$  e  $p_4^e$  os vértices não iguais a  $p_1^e$  e  $p_2^e$  dos dois triângulos adjacentes a  $\Delta_e$ . Como a curva é não-singular, os polígonos da subdivisão dual de  $f$ ,  $SD(f)$ , são triângulos de área  $1/2$  com vértices inteiros. Portanto, as coordenadas de  $p_3^e$  e  $p_4^e$  podem coincidir módulo 2 ou diferir módulo 2, pois esses triângulos terão sempre base e altura iguais a 1. Observe a Figura 37.

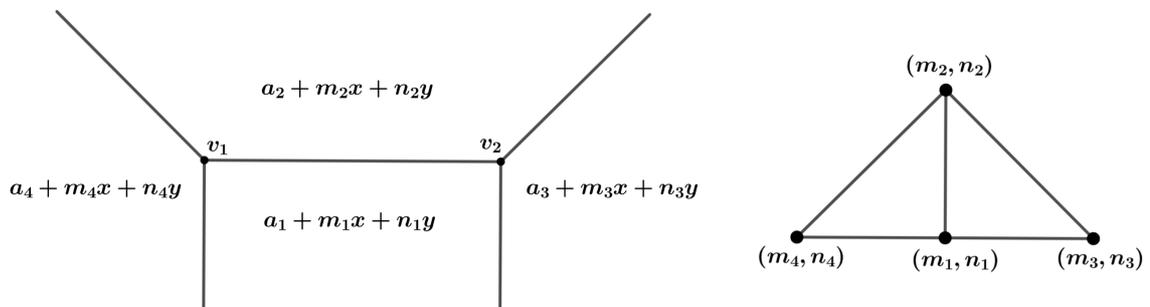
Figura 37 – Triângulos em que as coordenadas dos pontos  $p_3^e$  e  $p_4^e$  coincidem módulo 2 e diferem módulo 2, respectivamente.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Sejam  $(m_i, n_i)$  as coordenadas de  $p_i^e$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Primeiramente, vamos analisar o caso em que as coordenadas de  $p_3^e$  e  $p_4^e$  coincidem módulo 2 (Figura 37(a)). Pelo Teorema da Subdivisão Dual sabemos que, para cada vértice  $(m_i, n_i) \in SD(f)$ , a região do  $\mathbb{R}^2$  dual a ele é definida pelos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem a equação  $a_i + m_i x + n_i y = 0$ . Em uma vizinhança da aresta  $e$  a curva  $C$  delimita quatro regiões em  $\mathbb{R}^2$ , como mostra a Figura 38.

Figura 38 – Vizinhança de  $e$  para  $p_3^e \equiv p_4^e \pmod{2}$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Então, na vizinhança do vértice  $v_2 \in C$ , a curva tropical é definida pelo polinômio

$$r_1(x, y) = "a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + a_3 x^{m_3} y^{n_3}."$$

Pelo Lema 3.2.3, as ameabas das curvas  $C_t$  definidas pelos polinômios

$$r_{1_t}(x, y) = \gamma_{p_1^e} t^{-a_1} x^{m_1} y^{n_1} + \gamma_{p_2^e} t^{-a_2} x^{m_2} y^{n_2} + \gamma_{p_3^e} t^{-a_3} x^{m_3} y^{n_3}$$

convergem para  $r_1(x, y)$  quando  $t$  vai para zero, quaisquer que sejam  $\gamma_{p_i^e} \in \mathbb{R}^*$ .

Como o triângulo de vértices  $(m_1, n_1)$ ,  $(m_2, n_2)$  e  $(m_3, n_3)$  tem área  $1/2$ , pela Proposição 4.1.2, podemos supor que  $(m_1, n_1) = (0, 0)$ ,  $(m_2, n_2) = (0, 1)$  e  $(m_3, n_3) = (1, 0)$ . Assim, em coordenadas adequadas, as curvas  $C_t$  são retas definidas pelos polinômios

$$r_{1t}(x, y) = \gamma_{p_1^e} t^{-a_1} + \gamma_{p_2^e} t^{-a_2} y + \gamma_{p_3^e} t^{-a_3} x$$

cujas amebas convergem para  $r_1(x, y)$ . A ameba de  $r_{1t}$ , para  $t$  fixado, possui três arcos, cada um contido em uma região. Já vimos que podemos nomear esses arcos com pares de sinais que dependem apenas dos sinais de  $\gamma_{p_1^e}$ ,  $\gamma_{p_2^e}$  e  $\gamma_{p_3^e}$ , uma vez que  $t^{-a_i} > 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Denotando por  $\varepsilon(\gamma)$  o sinal de  $\gamma$ , temos, conforme a Figura 23:

- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_1^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(1, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_1^e}), \varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 1)$  tem sinal  $(\varepsilon(\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_1^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ .

Seguimos o mesmo raciocínio para uma vizinhança de  $v_1$ . Após uma translação seguida de uma rotação, podemos supor que  $(m_1, n_1) = (0, 0)$ ,  $(m_2, n_2) = (0, 1)$  e  $(m_4, n_4) = (1, 0)$ . Assim, as amebas das retas

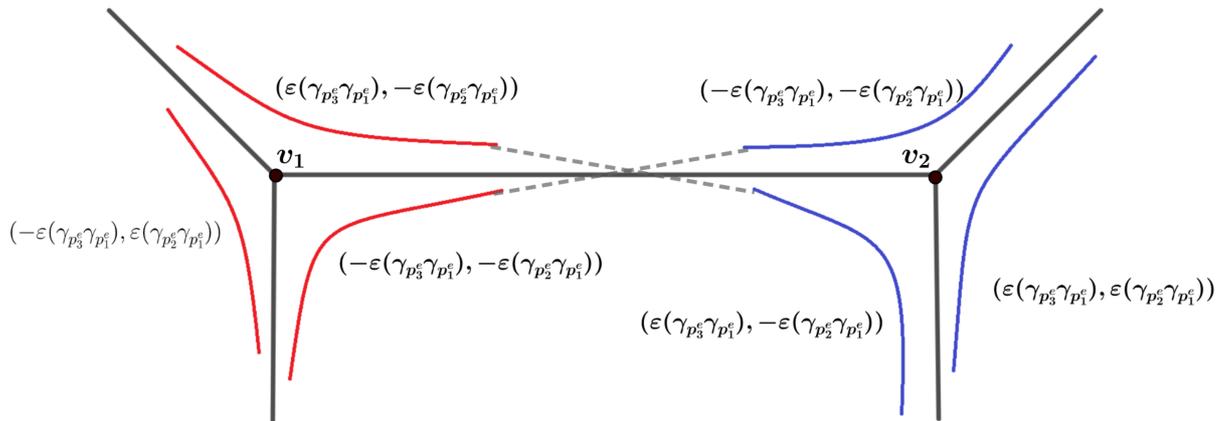
$$r_{2t}(x, y) = \gamma_{p_1^e} t^{-a_1} + \gamma_{p_2^e} t^{-a_2} y + \gamma_{p_4^e} t^{-a_4} x$$

convergem para  $r_2(x, y) = "a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + a_4 x^{m_4} y^{n_4}"$ .

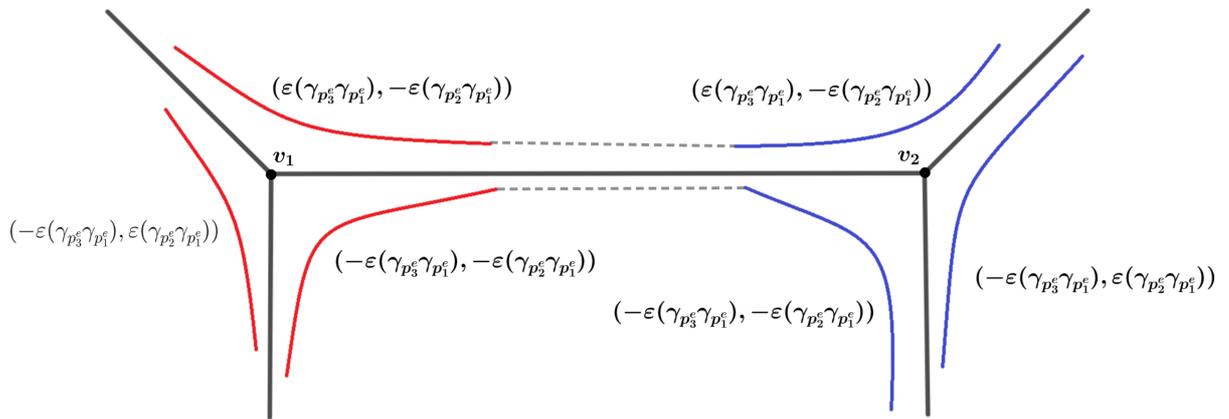
Assim, temos que:

- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_4^e} \gamma_{p_1^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(1, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_4^e} \gamma_{p_1^e}), \varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 1)$  tem sinal  $(\varepsilon(\gamma_{p_4^e} \gamma_{p_1^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_1^e}))$ .

Note que, se  $\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} < 0$ , então  $\varepsilon(\gamma_{p_4^e} \gamma_{p_1^e}) = -\varepsilon(\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_1^e})$  e os pares de sinais nas amebas que convergem para  $r_1$  e  $r_2$  ficarão dispostos como na Figura 39. Por outro lado, se  $\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} > 0$ , então  $\varepsilon(\gamma_{p_4^e} \gamma_{p_1^e}) = \varepsilon(\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_1^e})$  e os pares de sinais nas amebas que convergem para  $r_1$  e  $r_2$  ficarão dispostos como na Figura 40.

Figura 39 –  $\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} < 0$ .

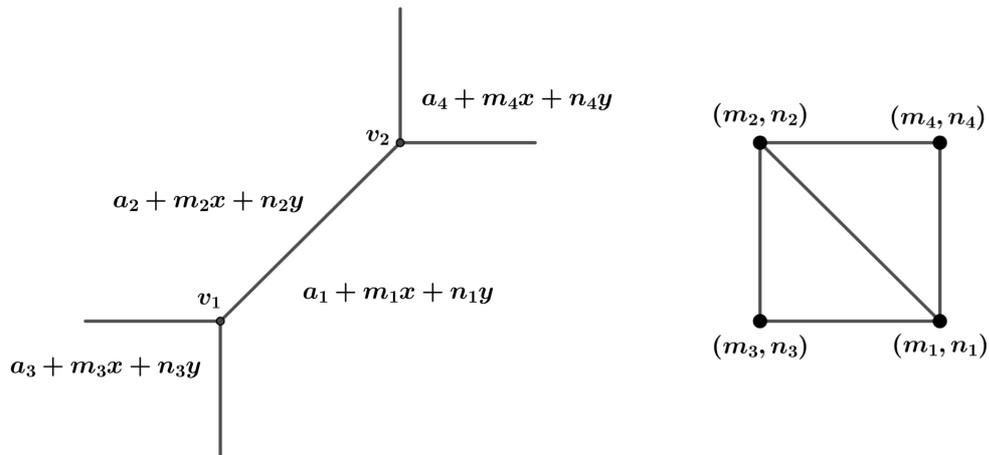
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 40 –  $\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} > 0$ .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Podemos ver na Figura 39 que, para conectar arcos com o mesmo par de sinais, precisamos “cruzar” a aresta finita  $e$ . Já na Figura 40, vemos que conseguimos conectar arcos com mesmo par de sinais sem “cruzar”  $e$ . Portanto, a aresta  $e$  vai ser torcida se, e somente se,  $\gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} < 0$ .

Agora vamos analisar o caso onde  $e$  é uma aresta limitada de  $C$  tal que  $p_3^e$  e  $p_4^e$  não coincidem módulo 2. Analogamente ao caso anterior, temos que numa vizinhança de  $e$  a curva  $C$  delimita quatro regiões em  $\mathbb{R}^2$ , como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Vizinhança de  $e$  para  $p_3^e \not\equiv p_4^e \pmod{2}$ .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Se olharmos para uma vizinhança do vértice  $v_1 \in C$  e seguirmos o mesmo raciocínio do vértice  $v_2$  do caso anterior, vemos que as amebas das retas

$$R_{1_t}(x, y) = \gamma_{p_1^e} t^{-a_1} x + \gamma_{p_2^e} t^{-a_2} y + \gamma_{p_3^e} t^{-a_3}$$

convergem para  $r_1(x, y) = "a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + a_3 x^{m_3} y^{n_3}"$ .

Assim,

- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 0) = (m_3, n_3)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_3^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(1, 0) = (m_1, n_1)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_3^e}), \varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 1) = (m_2, n_2)$  tem sinal  $(\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_3^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e}))$ .

Neste caso há uma diferença ao olharmos para uma vizinhança de  $v_2$ . Aqui, a transformação sobre o triângulo da subdivisão dual leva  $(m_4, n_4)$  em  $(0, 0)$ ,  $(m_2, n_2)$  em  $(1, 0)$  e  $(m_1, n_1)$  em  $(0, 1)$ . Assim, as amebas das retas

$$r_{2_t}(x, y) = \gamma_{p_1^e} t^{-a_1} y + \gamma_{p_2^e} t^{-a_2} x + \gamma_{p_4^e} t^{-a_4}$$

convergem para  $r_2(x, y) = "a_1 x^{m_1} x^y n_1 + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + a_4 x^{m_4} y^{n_4}"$ .

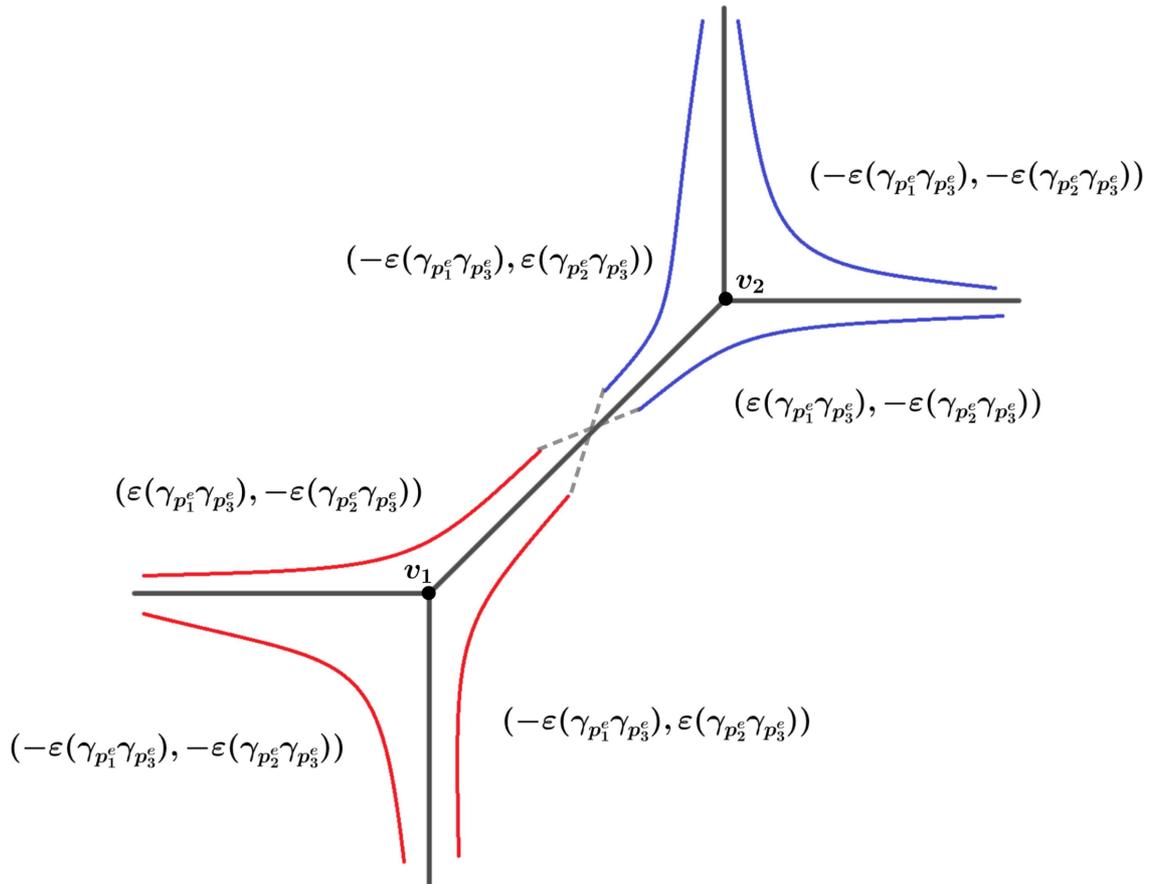
Portanto,

- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_4^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_4^e}))$ ;
- o arco contido na região dual ao vértice  $(1, 0)$  tem sinal  $(-\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_4^e}), \varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_4^e}))$ ;

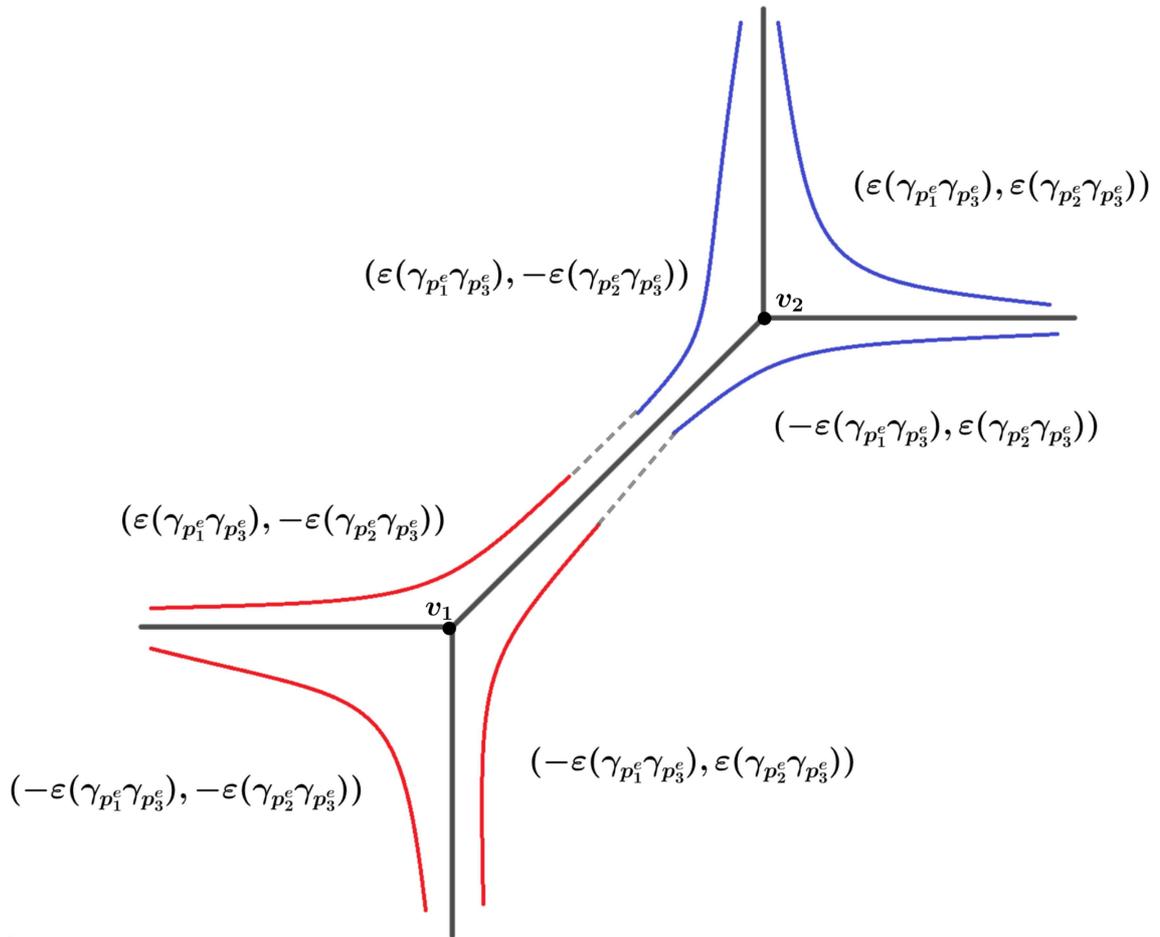
- o arco contido na região dual ao vértice  $(0, 1)$  tem sinal  $(\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_4^e}), -\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_4^e}))$ .

Note que, se  $\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} > 0$ , então  $\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_3^e}) = \varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_4^e})$  e  $\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e}) = \varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_4^e})$ . Assim, os pares de sinais dos arcos das ameabas que convergem para  $r_1$  e  $r_2$  ficarão dispostos como na Figura 42. Por outro lado, se  $\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} < 0$ , então  $\varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_3^e}) \neq \varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_4^e})$  e  $\varepsilon(\gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e}) \neq \varepsilon(\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_4^e})$ . Assim, os pares de sinais dos arcos das ameabas que convergem para  $r_1$  e  $r_2$  ficarão dispostos como na Figura 43.

Figura 42 –  $\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} > 0$ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 43 –  $\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} < 0$ .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Podemos ver na Figura 42 que, para conectar arcos com o mesmo par de sinais, precisamos “cruzar” a aresta  $e$ . Já na Figura 43, vemos que conseguimos conectar arcos com mesmo par de sinais sem “cruzar”  $e$ . Portanto, a aresta  $e$  vai ser torcida se, e somente se,  $\gamma_{p_1^e} \gamma_{p_2^e} \gamma_{p_3^e} \gamma_{p_4^e} > 0$ .

■

Na demonstração do Teorema 4.1.3, mostramos mais do que a existência de uma família de curvas algébricas reais que converge para  $C$  com conjunto de arestas torcidas correspondente  $T$ , mostramos também quais as condições sobre os  $\gamma_{ij}$ 's para que as arestas sejam torcidas ou não.

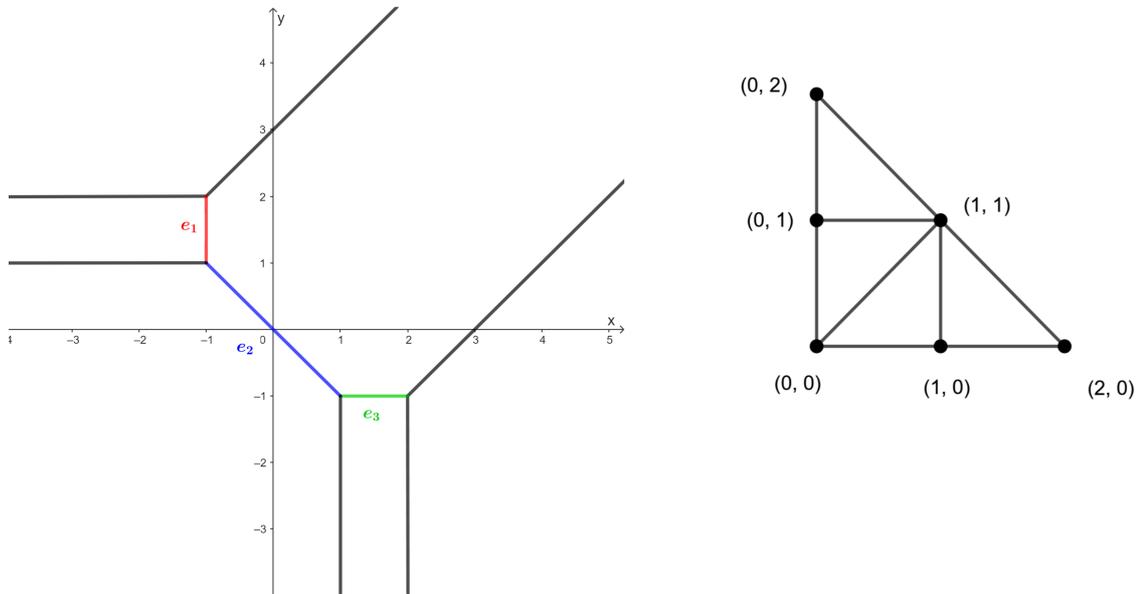
Veremos no exemplo a seguir como escolher os  $\gamma_{ij}$ 's de uma família de curvas convergindo para uma curva tropical com arestas marcadas, conforme Teorema 4.1.3.

**Exemplo 4.1.7.** Considere a curva tropical  $V(f)$  definida pelo polinômio

$$f(x, y) = "3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2"$$

e sua subdivisão dual,  $SD(f)$ , representadas na Figura 44.

Figura 44 –  $V(f)$  e  $SD(f)$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

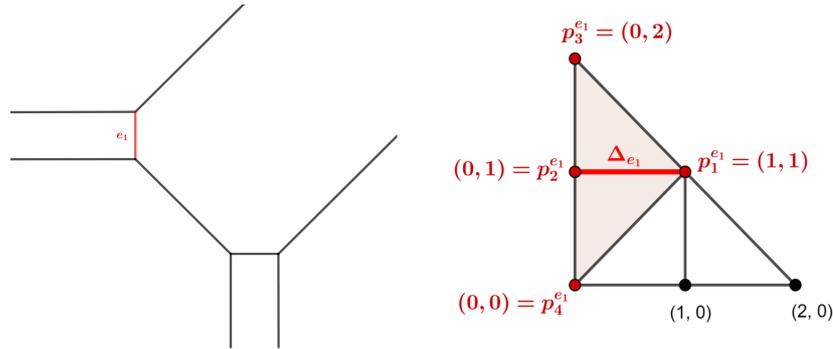
Pelo Lema 3.2.3, temos que as amebas da família de polinômios

$$f_t(z_1, z_2) = \gamma_{0,0}t^{-3} + \gamma_{1,0}t^{-2}z_1 + \gamma_{0,1}t^{-2}z_2 + \gamma_{1,1}t^{-3}z_1z_2 + \gamma_{0,2}z_2^2 + \gamma_{2,0}z_1^2$$

convergem para  $V(f)$  quando  $t \rightarrow 0$ .

Como  $V(f)$  é uma árvore, qualquer conjunto  $T$  de arestas limitadas de  $V(f)$  admite torção. Neste exemplo, escolheremos valores para os  $\gamma_{i,j}$ 's, de modo que  $T = \{e_1, e_2, e_3\}$  seja o conjunto de arestas torcidas.

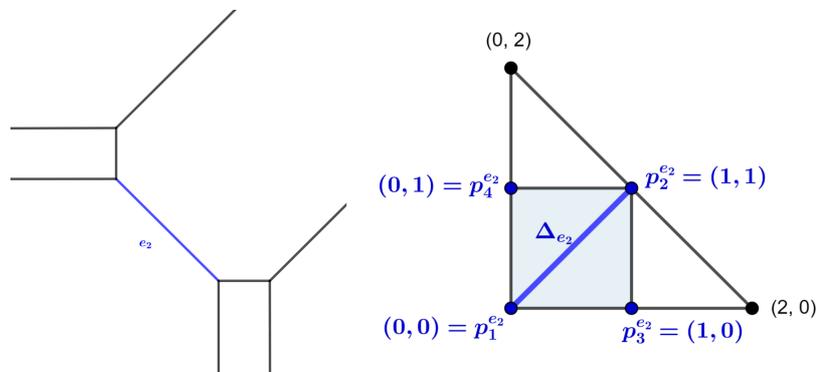
Vamos começar olhando para a aresta limitada  $e_1$ . Na Figura 45, destacamos a aresta  $e_1$  e o segmento  $\Delta_{e_1}$  dual a ela em  $SD(f)$ . Seguindo os passos da demonstração anterior, vamos chamar os vértices do segmento  $\Delta_{e_1}$  de  $p_1^{e_1}$  e de  $p_2^{e_1}$ , como mostra a Figura 45. O segmento  $\Delta_{e_1}$  é adjacente à exatamente dois triângulos da subdivisão dual, o de vértices  $(0,2)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ , e o de vértices  $(0,1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ . Chamamos de  $p_3^{e_1}$  e  $p_4^{e_1}$  os vértices desse triângulo que não são iguais a  $p_1^{e_1}$  e  $p_2^{e_1}$ .

Figura 45 – Aresta  $e_1$  em  $V(f)$  e  $\Delta_{e_1}$  em  $SD(f)$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

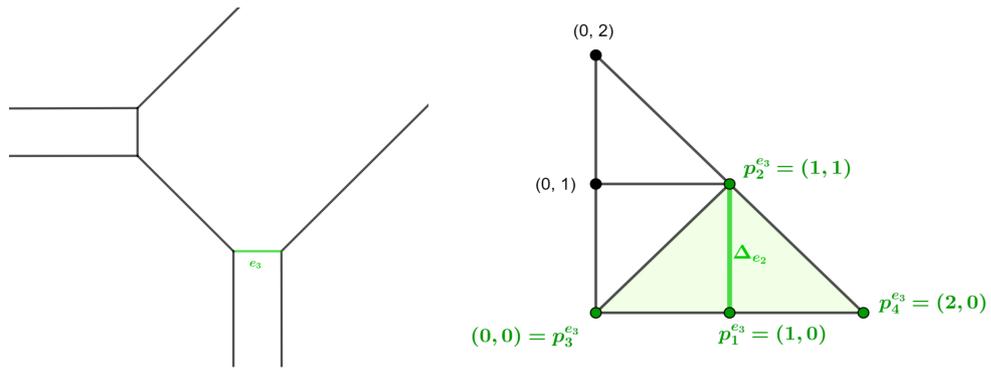
Como as coordenadas de  $p_3^{e_1} = (0, 2)$  e  $p_4^{e_1} = (0, 0)$  coincidem módulo 2,  $e_1$  vai ser uma aresta torcida se, e somente se,  $\gamma_{p_3^{e_1}} \gamma_{p_4^{e_1}} = \gamma_{0,2} \gamma_{0,0} < 0$ . Então, tomemos  $\gamma_{0,2} = 1$  e  $\gamma_{0,0} = -1$ .

Agora, vamos olhar para a aresta  $e_2$  de  $V(f)$  e para a aresta  $\Delta_{e_2}$  dual a ela em  $SD(f)$ . Os vértices  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$  de  $SD(f)$  serão chamados, respectivamente de  $p_1^{e_2}$  e  $p_2^{e_2}$ . Os vértices  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  serão  $p_3^{e_2}$  e  $p_4^{e_2}$ . Observe a Figura 46. Note que  $p_3^{e_2}$  e  $p_4^{e_2}$  diferem módulo 2, logo,  $e_2$  é torcida se, e somente se,  $\gamma_{p_1^{e_2}} \gamma_{p_2^{e_2}} \gamma_{p_3^{e_2}} \gamma_{p_4^{e_2}} = \gamma_{0,0} \gamma_{1,1} \gamma_{1,0} \gamma_{0,1} > 0$ . Temos que  $\gamma_{0,0} = -1$ , então, para que  $e_2$  seja torcida, precisamos ter  $\gamma_{1,1} \gamma_{1,0} \gamma_{0,1} < 0$ . Escolha  $\gamma_{1,1} = -1$  e  $\gamma_{1,0} = \gamma_{0,1} = 1$ .

Figura 46 – Aresta  $e_2$  em  $V(f)$  e  $\Delta_{e_2}$  em  $SD(f)$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Por fim, vamos olhar para a aresta  $e_3$  de  $V(f)$  e para a aresta  $\Delta_{e_3}$  dual a ela em  $SD(f)$ . Os vértices  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$  de  $SD(f)$  serão chamados, respectivamente de  $p_1^{e_3}$  e  $p_2^{e_3}$ . Os vértices  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$  serão  $p_3^{e_3}$  e  $p_4^{e_3}$ . Observe a Figura 47. Note que  $p_3^{e_3}$  e  $p_4^{e_3}$  são iguais módulo 2. Portanto,  $e_3$  é torcida se, e somente se,  $\gamma_{p_1^{e_3}} \gamma_{p_2^{e_3}} = \gamma_{0,0} \gamma_{2,0} < 0$ . Novamente, já temos que  $\gamma_{0,0} = -1$ , então, para que  $e_3$  seja torcida, precisamos ter  $\gamma_{2,0} > 0$ . Escolha  $\gamma_{2,0} = 1$ .

Figura 47 – Aresta  $e_3$  em  $V(f)$  e  $\Delta_{e_3}$  em  $SD(f)$ 

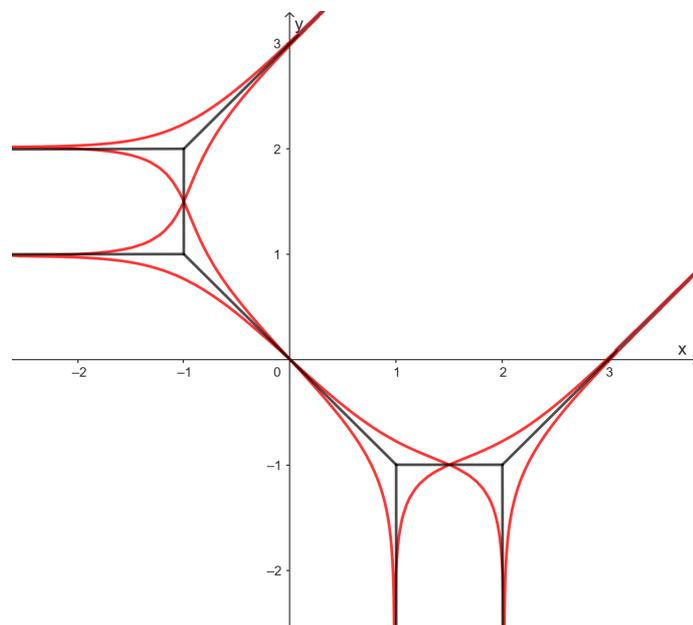
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Assim, as amebas de

$$f_t(z_1, z_2) = -t^{-3} + t^{-2}z_1 + t^{-2}z_2 - t^{-3}z_1z_2 + z_2^2 + z_1^2$$

convergem para  $V(f)$ , com conjunto de arestas torcidas  $T = \{e_1, e_2, e_3\}$ , quando  $t \rightarrow 0$ .

De fato, a Figura 48 mostra uma ameba de  $f_t(z_1, z_2)$  para  $t$  pequeno, onde podemos ver claramente que as arestas  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  são torcidas.

Figura 48 – Ameba de  $f_t(z_1, z_2)$  para  $t$  pequeno

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

## 5 PATCHWORK DE CURVAS TROPICAIS E O 16º PROBLEMA DE HILBERT

Neste capítulo vamos trabalhar na compactificação do plano real, isto é, no plano projetivo real. As principais referências podem ser encontradas em (12) e (13).

### 5.1 PLANO PROJETIVO REAL E CURVAS PROJETIVAS

O plano projetivo real, denotado por  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , pode ser definido como sendo o conjunto de retas no  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem. Mais especificamente,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ , onde

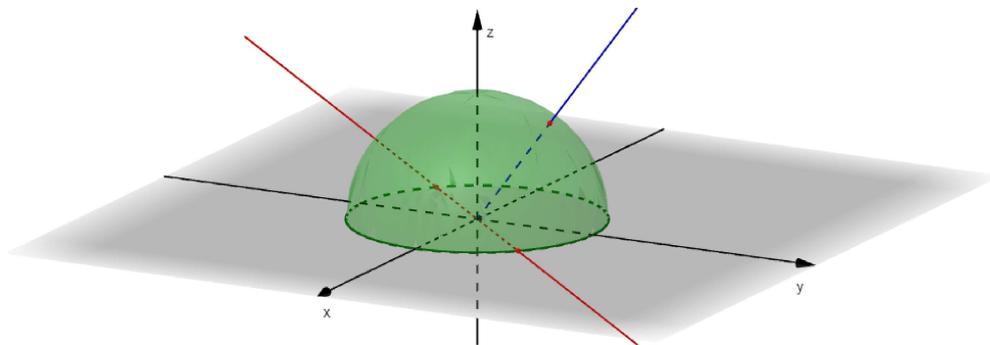
$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda(x', y', z'), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

O ponto de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  definido pelo ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , será denotado por  $(x : y : z)$ .

Assim,  $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

As retas de  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem e não contidas no plano  $z = 0$  estão em bijeção com o conjunto dos pontos da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , com  $z > 0$ , e as retas no plano  $z = 0$  passando pela origem interceptam a esfera em exatamente dois pontos diametralmente opostos. Assim, podemos identificar o plano projetivo real com o disco unitário no plano  $z = 0$ , onde os pontos no interior estão em bijeção com plano afim  $\mathbb{R}^2$  e a fronteira, com os pontos diametralmente opostos identificados, é o conjunto de pontos no infinito.

Figura 49 – Representação hemisférica de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Dizemos que um polinômio  $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$  é *homogêneo de grau m* se

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m F(x, y, z), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

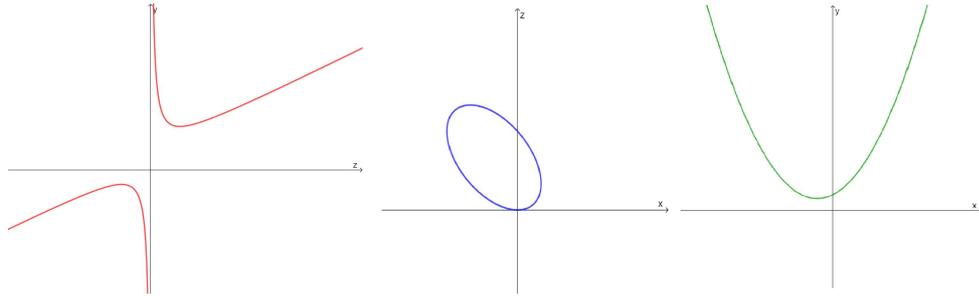
**Definição 5.1.1.** *Uma curva real projetiva plana  $C$ , de grau  $m$ , é definida como sendo o conjunto de pontos de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  que são zeros de um polinômio homogêneo com coeficientes reais*

de grau  $m$ , isto é,  $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ ,

$$C = Z(F) := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; F(x, y, z) = 0\}.$$

**Exemplo 5.1.1.** Considere a curva projetiva  $C$  definida por  $P(x, y, z) = x^2 + xz - 2yz + z^2$ . Na Figura 50 representamos as interseções de  $C$  com os planos  $x = 1$ ,  $y = 1$  e  $z = 1$ , dadas respectivamente por  $P(1, y, z) = z^2 - 2yz + z + 1$ ,  $P(x, 1, z) = x^2 + xz - 2z + z^2$  e  $P(x, y, 1) = x^2 + x - 2y + 1$ .

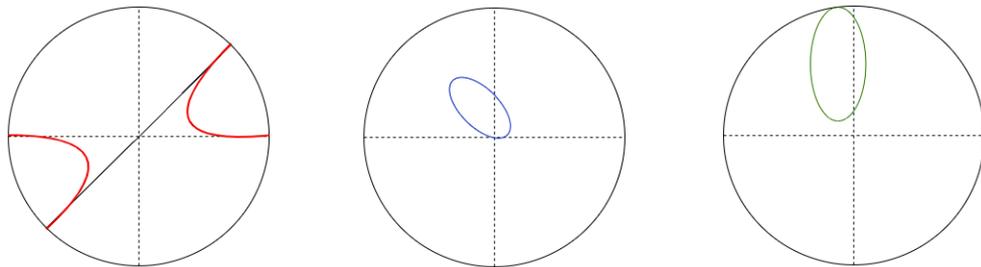
Figura 50 –  $P(1, y, z) = 0$ ,  $P(x, 1, z) = 0$  e  $P(x, y, 1) = 0$ , respectivamente



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Utilizando as representações hemisféricas do  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  nos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , respectivamente, obtemos três desenhos da curva projetiva  $C$  como na Figura 51.

Figura 51 – Traços de  $C$  em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  com relação a  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , respectivamente



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Note que, nessa representação, o traço da curva é o mesmo quando identificamos os pontos antipodais da fronteira.

**Teorema 5.1.1 (Teorema de Bezout).** *Sejam  $C_1 = Z(F)$  e  $C_2 = Z(G)$  duas curvas reais projetivas planas de graus  $m$  e  $n$ , respectivamente, sem fator em comum. Então, o número de pontos na interseção  $C_1 \cap C_2$  é no máximo  $mn$ .*

*Demonstração.* Ver (12), página 57. ■

**Definição 5.1.2.** Um ponto  $p \in C = Z(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  é chamado um ponto singular de  $C$  se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0.$$

*Curvas reais projetivas planas sem pontos singulares são chamadas curvas não singulares.*

**Definição 5.1.3.** Um subconjunto  $C_1$  de uma curva real plana projetiva  $C$  é chamada uma componente conexa se dois pontos quaisquer de  $C_1$  podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em  $C_1$ .

## 5.2 O 16º PROBLEMA DE HILBERT

No ano de 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris, David Hilbert apresentou uma lista de 23 grandes temas de pesquisa em Matemática para o novo século. O décimo sexto problema, que trata da topologia de curvas e superfícies, permanece ainda hoje não totalmente resolvido. A primeira parte deste problema pode ser enunciada como:

*“Dado um inteiro positivo  $m$ , estabelecer a lista dos arranjos realizáveis por curvas projetivas reais planas de grau  $m$ .”*

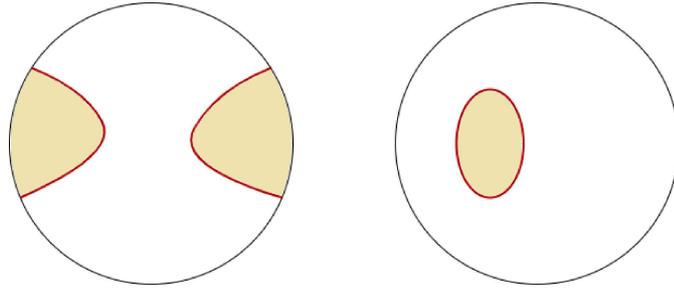
Chamamos de arranjo de uma curva projetiva plana a posição relativa de suas componentes conexas no plano. Ou seja, no estudo do 16º Problema de Hilbert não estamos interessados na posição exata da curva no plano, mas sim no seu traço.

### 5.2.1 Componentes conexas de uma curva plana

A partir de agora, quando dissermos “curva” estaremos sempre nos referindo a uma curva real projetiva plana não-singular. Inicialmente, vamos assumir os seguintes fatos sobre os tipos de componentes conexas que uma curva plana pode ter.

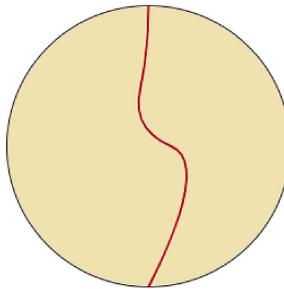
Uma curva simples (sem auto-interseção) e fechada no plano projetivo real pode ser de dois tipos: ou é uma *pseudo-reta*, que é uma deformação contínua de uma reta projetiva, e, portanto, seu complementar no plano projetivo é homeomorfo a um plano afim; ou é uma *oval*, ou seja, seu complementar no plano projetivo consiste de duas “componentes”, o interior, que é homeomorfo a um disco, e seu exterior, que é homeomorfo a uma faixa de Möbius.

Figura 52 – Exemplos de ovais: interior em bege, exterior em branco.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 53 – Exemplo de pseudo-reta



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Duas pseudo-retas em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sempre se interceptam (portanto, a união delas é uma curva singular), então, ao considerarmos curvas não-singulares, concluímos que estas curvas possuem no máximo uma componente do tipo pseudo-reta.

**Proposição 5.2.1.** *Curvas de grau par são formadas apenas por ovais e em curvas de grau ímpar exatamente uma de suas componentes é uma pseudo-reta.*

*Demonstração.* Ver (13), página 15, Proposição 4 e Proposição 5. ■

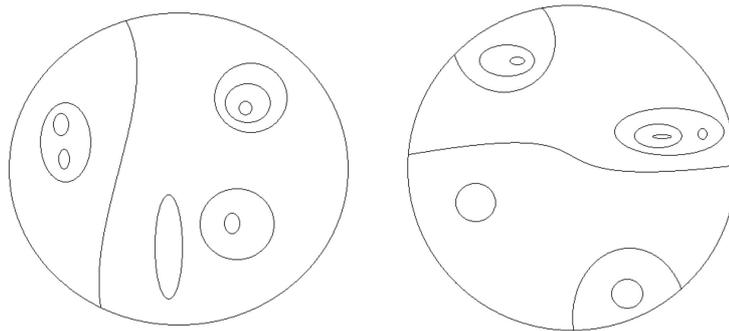
Assim, podemos concluir que uma curva projetiva é união de ovais ou união de ovais com uma pseudo-reta. O 16º Problema de Hilbert propõe um estudo das posições relativas entre essas ovais para curvas de grau  $m$ .

Vamos fixar uma notação para a posição relativa das ovais na representação do arranjo de uma curva:

- $\langle 0 \rangle$  denota a curva vazia;
- $\langle 1 \rangle$  denota 1 oval e  $\langle l \rangle$  denota a união disjunta de  $l$  ovais;
- $\langle J \rangle$  denota uma pseudo-reta;
- O arranjo formado por 1 oval com um arranjo  $A$  no seu lado de dentro é denotado por  $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$ ;
- Duas ovais encaixadas formam um *ninho de profundidade 2*, que é denotado por  $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ;
- O arranjo formado pela união de dois arranjos  $\langle A \rangle$  e  $\langle B \rangle$  tais que nenhuma oval de um contenha uma oval de outro, será denotado por  $\langle A \sqcup B \rangle$ ;
- Se  $\langle A \rangle$  denota um arranjo, o arranjo formado por  $A \sqcup A \sqcup \dots \sqcup A$ , onde  $A$  ocorre  $n$  vezes, é denotado por  $n \langle A \rangle$ .

**Exemplo 5.2.1.** Na Figura 54 temos representações dos arranjos  $\langle 1 \langle 2 \rangle \sqcup J \sqcup 1 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \sqcup 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$  e  $\langle 2 \langle 1 \langle 1 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle \sqcup J \sqcup 1$ , respectivamente.

Figura 54 – Exemplos de arranjos



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

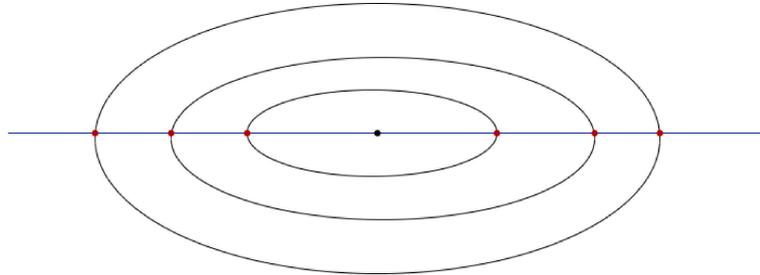
### 5.3 PROIBIÇÕES

Para limitar os casos de estudo no 16º Problema de Hilbert, é preciso excluir configurações de curvas que são impossíveis de serem realizadas. Até grau 5, basta usarmos o Teorema de Bezout, mas para curvas de grau maior ou igual a 6 é preciso considerações topológicas mais elaboradas.

Considere uma curva  $C$  com  $k$  ovais encaixadas. Uma reta passando por um ponto no interior de todas essas ovais intersecta  $C$  em pelo menos  $2k$  pontos. Assim, pelo Teorema de Bezout, o grau de  $C$  tem que ser maior ou igual a  $2k$ .

**Exemplo 5.3.1.** Seja  $C$  uma curva com um ninho de profundidade 3 em seu arranjo. Então, ao traçarmos uma reta  $L$  por um ponto no interior de todas as ovas desse ninho,  $L$  vai intersectar  $C$  em exatamente 6 pontos. Portanto, por Bezout,  $C$  tem grau maior ou igual a 6.

Figura 55 – Reta passando por um ponto no interior de um ninho de profundidade 3



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

**Proposição 5.3.1.** Por  $\frac{m(m+3)}{2}$  pontos no plano em posição geral, passa uma única curva de grau  $m$ .

*Demonstração.* Ver (13), página 7, Proposição 2. ■

**Teorema 5.3.2 (Desigualdade de Harnack).** Uma curva projetiva plana real de grau  $m$  tem no máximo

$$H_m = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$$

componentes conexas.

*Demonstração.* Seja  $C$  uma curva de grau  $m$ . Suponhamos que  $C$  possui  $H_m + 1$  componentes conexas, dentre as quais, ao menos  $H_m$  são ovas. Vamos mostrar que existe uma curva de grau  $m - 2$  cuja interseção com  $C$  contradiz o Teorema de Bezout. Pela Proposição 5.3.1, uma curva de grau  $m - 2$  é determinada por

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2}$$

pontos, de tal modo que, se escolhermos um ponto no interior de cada oval, temos ainda a possibilidade de escolher

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1 = m - 3$$

pontos pelos quais tal curva pode passar. Escolhemos esses  $m - 3$  pontos na componente conexa sobrando e contamos os pontos de interseção dessa curva com  $C$ . Obtemos no mínimo

$$2H_m + (m - 3) = (m - 1)(m - 2) + 2 + (m - 3) = m(m - 2) + 1$$

pontos, o que contradiz o Teorema de Bezout. Logo,  $C$  tem no máximo  $H_m$  componentes conexas. ■

### 5.3.1 Arranjos possíveis para curvas de até grau 5

Usando a Desigualdade de Harnack, podemos listar todos os arranjos que são possíveis de serem realizados para curvas de grau  $m = 1$  até  $m = 5$ :

- $m = 1 \Rightarrow H_m = 1$ , ou seja,  $C$  tem no máximo uma componente conexa. Como  $m$  é ímpar, pela Proposição 5.2.1,  $C$  necessariamente tem uma pseudo-reta, então o único arranjo possível para  $C$  é  $\langle J \rangle$ ;
- $m = 2 \Rightarrow H_m = 1$ . Como  $m$  é par, pela Proposição 5.2.1,  $C$  não possui pseudo-retas, e portanto seus únicos arranjos possíveis são  $\langle 0 \rangle$  e  $\langle 1 \rangle$ ;
- $m = 3 \Rightarrow H_m = 2$ . Então,  $C$  possui necessariamente uma pseudo-reta e os possíveis arranjos são  $\langle J \rangle$  e  $\langle J \sqcup 1 \rangle$ ;
- $m = 4 \Rightarrow H_m = 4$ . Sabemos que  $C$  não possui pseudo-retas, então  $C$  é o conjunto vazio ou é formada apenas por ovais. Sabemos que o ninho de maior profundidade que  $C$  pode ter em seu arranjo é o ninho de profundidade 2, pois se tivéssemos 3 ou 4 ovais encaixadas, a curva  $C$  teria que ter grau 6 ou 8, respectivamente. Pelo mesmo motivo não podemos ter uma oval com duas ou três ovais disjuntas dentro. Portanto, os possíveis arranjos são:  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$ ,  $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ,  $\langle 3 \rangle$ ,  $\langle 4 \rangle$ ;
- $m = 5 \Rightarrow H_m = 7$ . Nesse caso,  $C$  possui uma pseudo-reta, não pode possuir um ninho de profundidade maior do que 2 e nem uma oval com duas ou mais ovais disjuntas dentro. Portanto, os possíveis arranjos são:  $\langle J \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 1 \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 2 \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 3 \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 4 \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 5 \rangle$ ,  $\langle J \sqcup 6 \rangle$ .

Note que para curvas de grau 6 temos  $H_m = 11$ , o que faz a lista dos arranjos possíveis para esse grau ser muito grande. Portanto, vamos restringir nosso estudo às  $M$ -sêxticas: curvas de grau 6 que possuem o número máximo de componentes conexas, ou seja, curvas de grau 6 com exatamente 11 componentes conexas. Porém, aplicando as mesmas proibições que fizemos para curvas de grau até 5, não vamos conseguir descartar muitos arranjos irrealizáveis para  $M$ -sêxticas. Um resultado importante que nos ajuda a reduzir significativamente essa lista é o Teorema de Rokhlin.

**Definição 5.3.1.** Dizemos que uma oval é par (respectivamente ímpar) quando está contida numa coleção par (respectivamente ímpar) de outras ovais.

**Teorema 5.3.3 (Teorema de Rokhlin).** *Seja  $C$  uma  $M$ -curva real projetiva plana de grau par  $m = 2k$ . Então*

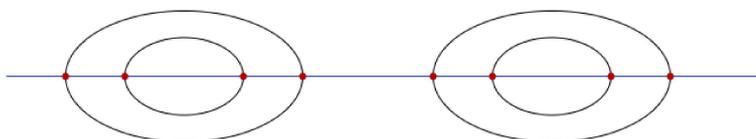
$$P - I \equiv k^2 \pmod{8},$$

onde  $P$  (respectivamente  $I$ ) é o número de ovais pares (respectivamente ímpares) de  $C$ .

*Demonstração.* Ver (14). ■

No caso de uma curva  $C$  de grau 6, temos 11 ovais e  $3^2 = 9 = 1 \pmod{8}$ . Então, pelo Teorema de Rokhlin, podemos ter  $P - I = 1, 9$  ou  $-7$ . Não podemos ter dois ninhos não encaixados, pois se tivéssemos, poderíamos escolher um ponto no interior de cada ninho e uma reta passando por eles intersectaria  $C$  em no máximo 6 pontos (Bézout), o que não acontece, como podemos ver na Figura 56.

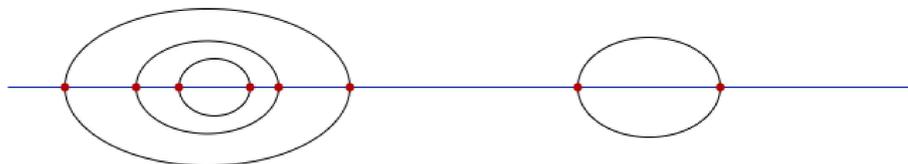
Figura 56 – Interseção de  $C$  com uma reta passando por dois ninhos



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Também não podemos ter ninhos com profundidade maior do que 2. É claro que um ninho de profundidade maior ou igual a 4 é impossível, pois qualquer reta passando num ponto do seu interior intersecta  $C$  em 8 pontos ou mais. Para um ninho de profundidade 3 podemos escolher um ponto em seu interior e outro ponto no interior de outra oval qualquer do arranjo. Uma reta passando por esses dois pontos também intersectaria  $C$  em 8 pontos ou mais. Observe a Figura 57.

Figura 57 – Interseção de  $C$  com uma reta passando por um ninho de profundidade 3 e por outra oval



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

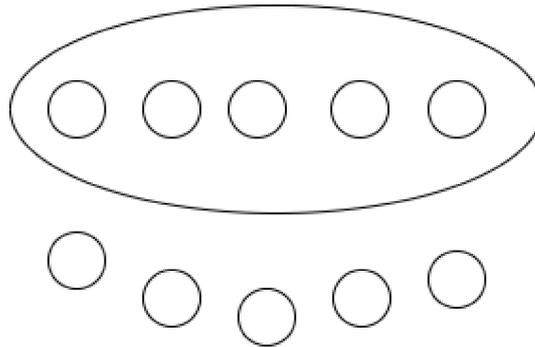
Essas observações nos levam a concluir que as ovais pares da  $M$ -sêxtica serão somente as ovais que não estão contidas em nenhuma outra oval, pois caso contrário teríamos um

ninho com profundidade maior do que dois. E as ovas ímpares estão todas contidas em uma única oval, pois caso contrário, teríamos dois ninhos não encaixados.

Assim, como  $P + I = 11$ :

- Para  $P - I = 1$  temos  $P = 6$  e  $I = 5$ . Isso nos dá um único arranjo possível:  $\langle 1\langle 5 \rangle \sqcup 5 \rangle$ . Observe a Figura 58.

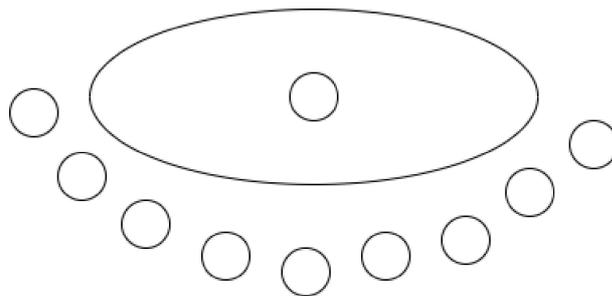
Figura 58 – Único arranjo realizável de uma M-sêxtica com para  $P - I = 1$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

- Para  $P - I = 9$ , temos  $P = 10$  e  $I = 1$ . O único arranjo possível é:  $\langle 1\langle 1 \rangle \sqcup 9 \rangle$ . Observe a Figura 59.

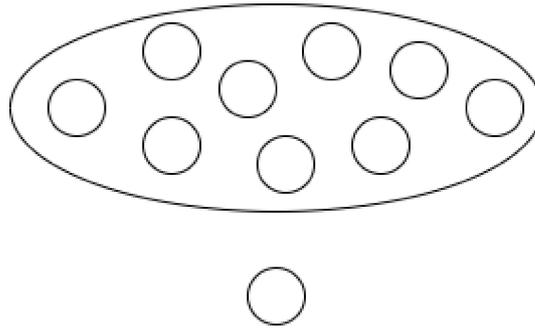
Figura 59 – Único arranjo realizável de uma M-sêxtica com para  $P - I = 9$



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

- Para  $P - I = -7$  temos  $P = 2$  e  $I = 9$ . O único arranjo realizável é:  $\langle 1\langle 9 \rangle 1 \rangle$ . Observe a Figura 60.

Figura 60 – Único arranjo realizável de uma M-sêxtica com para  $P - I = -7$



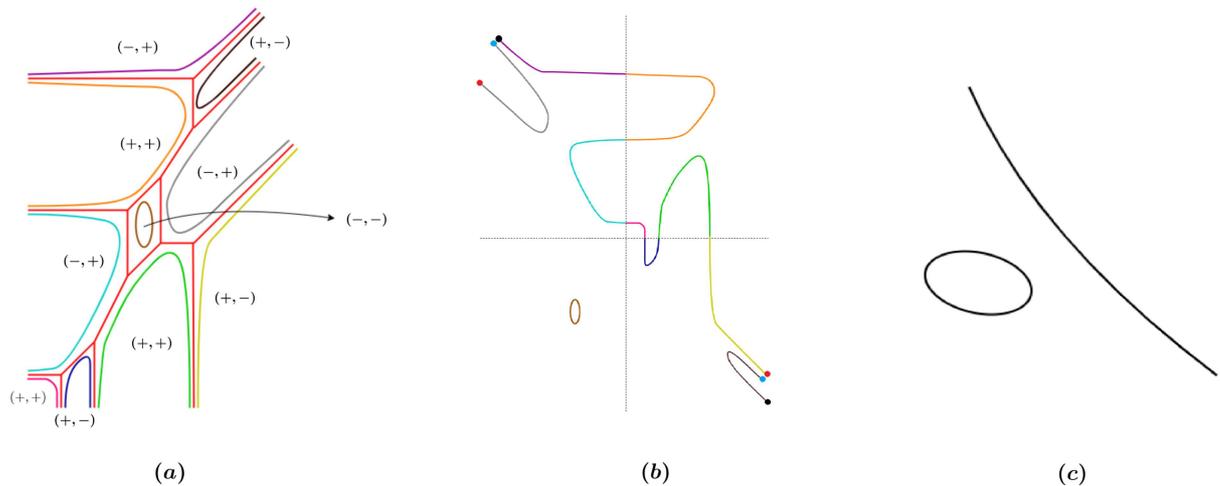
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

#### 5.4 PATCHWORK NO 16º PROBLEMA DE HILBERT

As proibições nos ajudam a reduzir a lista dos arranjos possíveis de serem realizados, mas ainda precisamos mostrar que existem curvas que realizam os arranjos que não conseguimos proibir, para que eles sejam, de fato, realizáveis. O método do *patchwork* é uma maneira de fazer isso.

Por exemplo, no Exemplo 4.1.4 do capítulo anterior, fizemos o *patchwork* de uma cúbica tropical e obtivemos uma curva real, como podemos ver nas Figuras 61(a) e 61(b). O tipo de isotopia da curva obtida em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  está representado na Figura 61(c). De fato, os arcos roxo e preto possuem direção assintótica  $(1, 1)$  em comum na ameba da curva tropical, o que significa que quando olharmos para a curva real obtida pelo *patchwork*, na representação hemisférica do  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , os pontos marcados com a cor preta na Figura 61(b) serão pontos antipodais e, portanto, identificados. Da mesma maneira, os arcos preto e cinza também possuem direção assintótica  $(1, 1)$  em comum na ameba da curva tropical, assim como os arcos cinza e amarelo. Dessa forma, identificaremos os pontos em azul e os pontos em vermelho. Assim, em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  o tipo de isotopia da curva real será uma pseudo-reta e uma oval. Isso significa que  $\langle J \sqcup 1 \rangle$  é um arranjo realizável para uma curva de grau 3, uma vez que começamos com uma curva tropical de grau 3.

Figura 61 – Curva real obtida pelo *patchwork* de uma cúbica tropical e tipo de isotopia dessa curva real em  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ .

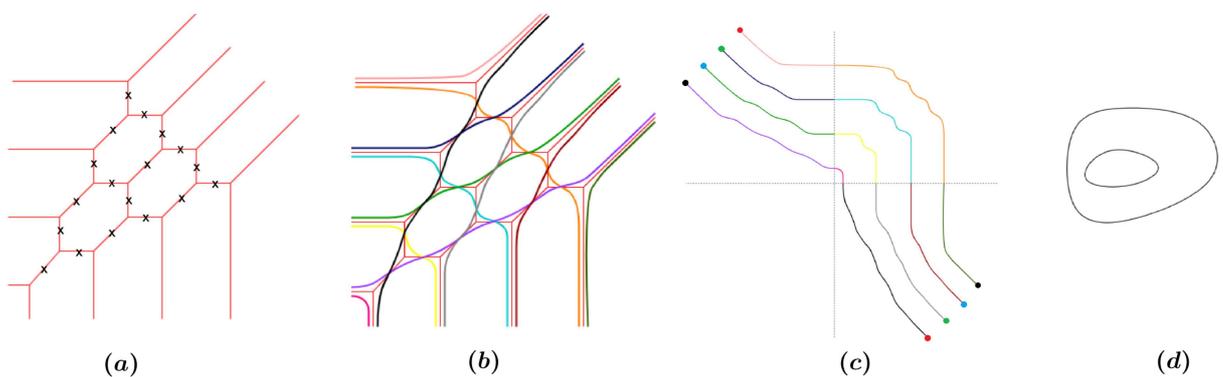


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Observe que a curva obtida após o *patchwork* no Exemplo 4.1.5 possui a mesma representação em  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  que a curva do Exemplo 4.1.4, ou seja, também possui o arranjo  $\langle J \sqcup 1 \rangle$ .

Na quártica tropical do Exemplo 4.1.6, obtemos após o *patchwork* uma curva real cujo tipo de isotopia realiza o arranjo  $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ . Observe a Figura 62(d). De fato, observando os arcos com direção assintótica  $(1, 1)$  em comum na Figura 62(b) e identificando os pontos de mesma cor da Figura 62(c), obtemos como arranjo um ninho de profundidade 2. Ou seja,  $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$  é um arranjo realizável para uma curva de grau 4.

Figura 62 – *Patchwork* curva tropical de grau 4 com dezoito arestas marcadas e curva projetiva isotópica

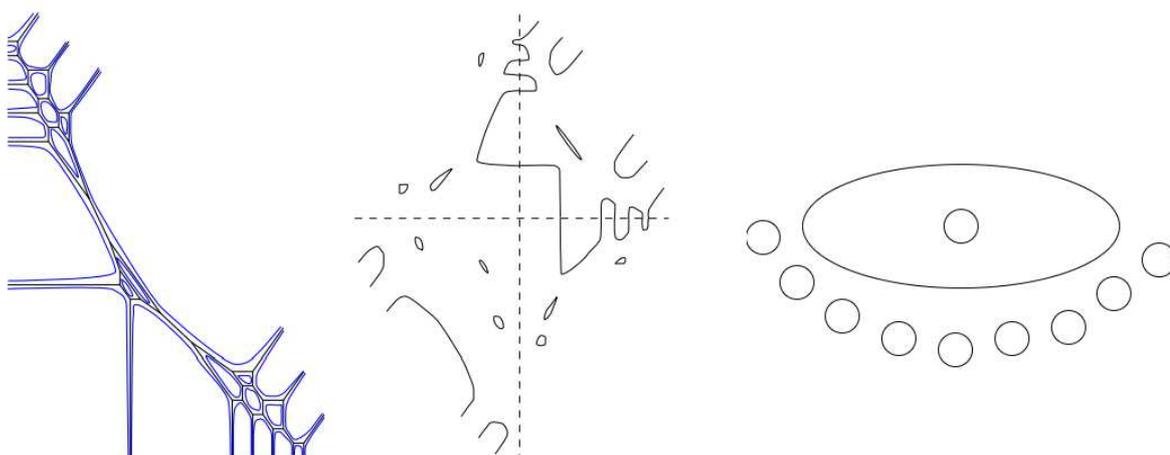


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para os graus  $m = 1$  até  $m = 5$  não é muito difícil encontrar curvas que realizam os arranjos que listamos serem possíveis e, na época de Hilbert, essas curvas já eram conhecidas. Porém, naquela época as proibições do Teorema de Rokhlin eram desconhecidas e Hilbert pretendia provar que os dois únicos arranjos possíveis para as M-sêxticas eram  $\langle 1\langle 9 \rangle \sqcup 1 \rangle$  e  $\langle 1\langle 1 \rangle \sqcup 9 \rangle$ , conhecidas como M-sêxtica de Hilbert e M-sêxtica de Harnack, respectivamente.

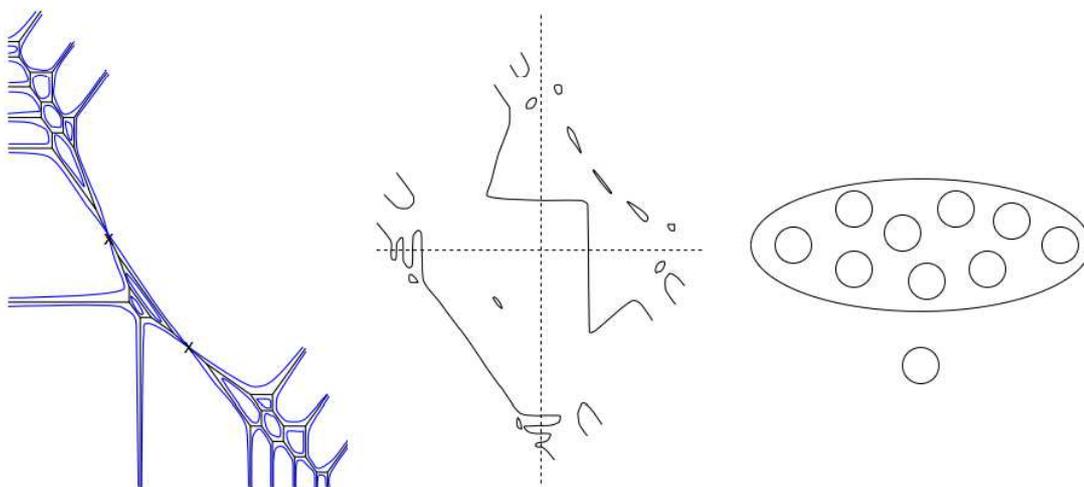
Em 1954, Gudkov provou na sua dissertação de candidato a Ph.D. a afirmação de Hilbert: a curva  $\langle 1\langle 5 \rangle \sqcup 5 \rangle$  não é realizável. Porém, 15 anos mais tarde, na preparação para publicação, Gudkov invalidou sua prova e construiu a curva que realizava esse arranjo. Abaixo, vemos que podemos obter os três arranjos realizáveis de M-sêxticas fazendo o *patchwork* de uma mesma curva tropical de grau 6, mudando apenas o conjunto de arestas torcidas.

Figura 63 – M-sêxtica de Harnack



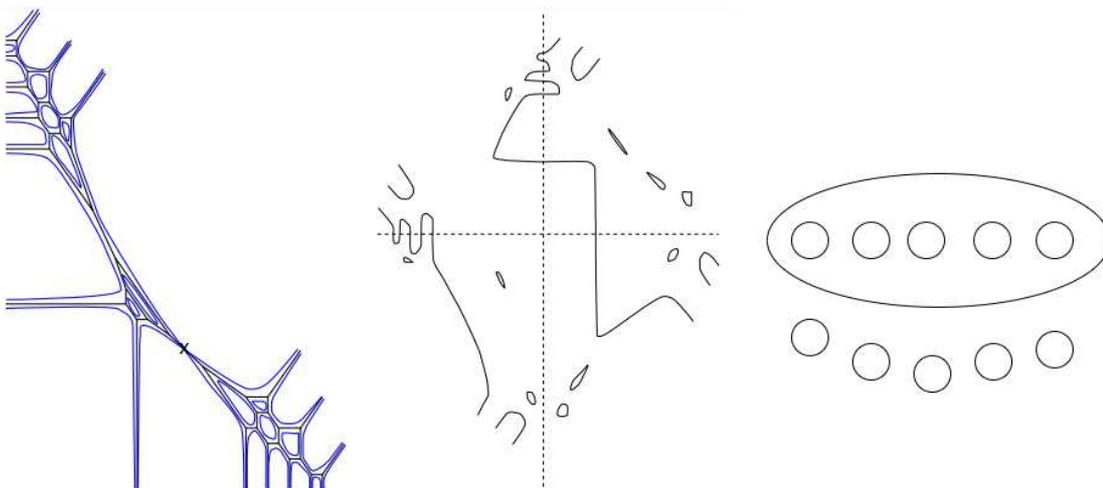
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 64 – M-sêxtica de Hilbert



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 65 – M-sêxtica de Gudkov



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

## REFERÊNCIAS

- 1 BERGMAN, George M; **The logarithmic limit-set of an algebraic variety**. Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), 459–469.
- 2 BRUGALLÉ, Erwan; SHAW, Kristin. **A bit of tropical geometry**. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1311.2360.pdf>.
- 3 MIKHALKIN, Grigory; RAU, Johannes. **Tropical Geometry**. 2018. Disponível em: <https://www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/downloads/main.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2024.
- 4 BRUNS, Winfried; GUBELADZE, Joseph. **Polytopes, Rings, and K-Theory**. Springer Monographs in Mathematics, Springer New York, 2009.
- 5 GATHMANN, Andreas. **Tropical Algebraic Geometry**. 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0601322.pdf>.
- 6 MARKWIG, Thomas. **A field of generalised puiseux series for tropical geometry**. 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0709.3784.pdf>.
- 7 MIKHALKIN, Grigory. **Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces**. 2003. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0205011.pdf>.
- 8 DJUKANOVIĆ, Martin. **Amoebas and Coamoebas in Dimension 2**. 2012. Dissertação de Mestrado - Universiteit Leiden. Disponível em: <https://algant.eu/documents/theses/djukanovic.pdf>.
- 9 SHUSTIN, Eugenii. **Patchworking singular algebraic curves, non-archimedean amoebas and enumerative geometry**. 2005. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0211278.pdf>.
- 10 CASSELMAN, Bill. **Newton polygons**. 2018. Disponível em: <https://personal.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/Newton.pdf>.
- 11 BRUGALLÉ, Erwan; ITENBERG, Ilia; MIKHALKIN, Grigory; SHAW, Kristin. **Brief introduction to tropical geometry**. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1502.05950.pdf>.
- 12 FULTON, William. **Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry**. Addison-Wesley, 1969.
- 13 PUIGNAU, Nicolas; QUOOS, Luciane. **A descoberta do 16º problema de Hilbert**. Disponível em: <https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/NE-1.03.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- 14 VIRO, Oleg. **Real Algebraic Varieties With Prescribed Topology**. Livro em preparação. Disponível em: [www.pdmi.ras.ru/~olegviro/es](http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/es). Acesso em 24 jan. 2024.