UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A álgebra escolar nos Elementos de Álgebra de Cristiano Ottoni (segunda metade do século XIX)

Vítor da Silva Botelho

Juiz de Fora
2024

Vítor da Silva Botelho

A álgebra escolar nos Elementos de Álgebra de Cristiano Ottoni (segunda metade do século XIX)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Dr. José Manuel Leonardo de Matos

Juiz de Fora
2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Botelho, Vítor da Silva.

A álgebra escolar nos Elementos de Álgebra de Cristiano Ottoni (segunda metade do século XIX) / Vítor da Silva Botelho. -- 2024.

65 p.

Orientador: José Manuel Leonardo de Matos

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de

Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Álgebra. 2. Compêndios. 3. História Cultural. I. de Matos, José Manuel Leonardo, orient. II. Título.

Vítor da Silva Botelho

A Álgebra escolar nos Elementos de Álgebra de Cristiano Ottoni (segunda metade do século XIX)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 12 de agosto de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Manuel Leonardo de Matos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira - Membro interno
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente - Membro externo
Universidade Federal de São Paulo

Juiz de Fora, 07/08/2024.

Documento assinado eletronicamente por **José Manuel Leonardo de Matos**, **Professor(a)**, em 07/09/2024, às 11:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Araujo de Oliveira**, **Professor(a)**, em 23/10/2024, às 17:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **WAGNER RODRIGUES VALENTE**, **Usuário Externo**, em 18/01/2025, às 11:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Dedico este trabalho à minha mãe Márcia, ao meu pai Manoel e à minha irmã Vitória. Minhas inspirações de todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ter me guiado e protegido ao longo desta jornada.

Em segundo lugar, agradeço imensamente ao meu orientador, José Manuel Leonardo de Matos, por sua orientação, paciência e dedicação. Seus conselhos e ensinamentos foram essenciais para a realização deste trabalho e serão levados por mim durante toda a minha vida. E na mesma medida agradeço a banca composta pelo professor Dr. Wagner Rodrigues Valente e professora Drª. Maria Cristina Araujo de Oliveira.

Agradeço a toda a minha família, em especial à minha mãe, Márcia, por todo o amor, apoio incondicional e incentivo constante. Sua dedicação à profissão docente, manifestada no amor e carinho ao próximo, é a minha maior fonte de inspiração. Obrigado por me ensinar tanto. Ao meu pai, Manoel, agradeço por seu carinho e apoio incondicional, que foram fundamentais em toda a minha trajetória.

À minha irmã, Vitória, agradeço por ser minha companheira de vida e de profissão, e por todos os momentos de alegria e apoio em momentos difíceis.

Às minhas avós, Maria do Carmo e Maria Viveiros (in memoriam), por todo o amor e carinho que só uma avó é capaz de transmitir. Obrigado também à minha tia, Beth, por estar sempre presente desde meus primeiros passos.

Ao meu tio e padrinho, Pedro, e sua esposa, Aline, agradeço pelos conselhos, exemplos e ensinamentos que tanto me ajudaram a crescer.

À minha tia, Cristiane, e à princesa Maitê, agradeço por todo o carinho, companhia de sempre, momentos alegres e aprendizados.

Ao meu primo, Fernando, pela amizade, conselhos e apoio constante.

À minha namorada, Mariana Coelho, pelo amor, paciência e apoio incondicional ao longo de todo este processo. Sua presença foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Às minhas afilhadas, Pietra Lorite e Larissa Carvalho, pelo carinho e alegria que trazem à minha vida.

Aos meus primos, Lucas Carvalho, Diogo Vasconcelos e Clara Vasconcelos, pela amizade e por todos momentos bons e descontraídos que vivemos

Às minhas madrinhas, Ana Botelho e Claudia Carvalho, pelo amor, apoio e orientação ao longo da minha vida.

Aos meus colegas de mestrado, Letícia Genevain, Daniel de Paula e Cleiton Campos, pela parceria, amizade e apoio durante todo o curso. Tudo o que estudamos juntos, os conselhos que trocamos e as boas risadas que demos serão sempre lembrados.

Aos meus colegas de graduação, Sidnei Fernandes, Cristiano Vaz, Robson Rodrigues, Jorge Rosa, Matheus Cardoso, pela amizade, companheirismo e por estarem juntos no início dessa jornada acadêmica, onde as incertezas eram grandes, mas os momentos felizes também.

Aos meus amigos de longa data, Gabriel Camara e Rodrigo Farnum, pela amizade duradoura e pelo apoio constante em todas as fases da minha vida.

Agradeço também às instituições em que trabalhei, Centro de Ensino Augusto Couto e Escola Municipal Ilza Junger, que foram fundamentais para o meu desenvolvimento profissional.

Às diretoras Ana Couto e Daniele dos Santos, por acreditarem em meu potencial e me proporcionarem oportunidades de crescimento. Suas orientações e apoio foram inestimáveis.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu mais sincero agradecimento.

“O fato é que a leitura das diferentes temporalidades que fazem que o presente seja o que é, herança e ruptura, invenção e inércia ao mesmo tempo, continua sendo a tarefa singular dos historiadores e sua responsabilidade principal com seus contemporâneos” (CHARTIER, 2009, p. 68).

RESUMO

O presente texto aponta resultados de uma pesquisa realizada no âmbito da História da Educação Matemática, amparada pelo referencial da história cultural bem como pelos estudos que versam sobre os saberes específicos para a profissão de ensino. Tais estudos são abordados com o objetivo de estabelecer levantamentos acerca da álgebra escolar que se faz presente no compêndio *Elementos de Álgebra* de Ottoni. Além disso, discute-se a reforma Couto Ferraz, contemporânea ao lançamento dos compêndios de Ottoni, juntamente com a biografia do autor, tendo em vista apresentar o contexto histórico e social em que a obra está inserida. No que se refere à análise realizada, são discutidos conteúdos matemáticos e as opções didáticas dos livros, como, por exemplo, os exercícios, procedimentos de síntese como a “regra geral”, definições, entre outros. Os capítulos considerados são: “Operações com polinômios e problemas do 1° grau”, “Teoria elementar do maior divisor comum”, “O impasse na resolução de problemas com números negativos”, “Problemas impossíveis e indeterminados”, “Resolução de problemas do segundo grau” e “Aplicações da álgebra”. O que ampara as escolhas desses temas é que, nesses espaços, foram encontradas discussões detalhadas e, por muitas vezes, distintas das postas nos livros contemporâneos, fazendo-os capazes de fomentar elaborações de conjecturas no âmbito da História da Educação Matemática acerca dos questionamentos: De quais alternativas didáticas a obra lança mão para apresentar o conteúdo algébrico? Que característica da disciplina Álgebra escolar está presente na obra compilada por Ottoni? Responder tais questionamentos remete ao objetivo de pesquisa, que é descrever a organização da Álgebra escolar no livro *Elementos de Álgebra.* Diante deste levantamento são tratados aspectos similares e rupturas existentes entre as obras compiladas por Ottoni, para assim tratar do ensino de Álgebra no marco temporal compreendido entre 1852 e 1893 período que compreende a primeira e a última edição encontradas para desenvolvimento da presente análise.

Palavras-chave: Álgebra, Compêndios, Saberes, História Cultural

ABSTRACT

This text presents the results of a study conducted in the field of History of Mathematics Education, supported by the framework of cultural history as well as by studies that address specific knowledge for the teaching profession. These studies are approached with the aim of establishing surveys about the school algebra that is present in Ottoni's Elements of Algebra compendium. In addition, the Couto Ferraz reform, contemporary to the launch of Ottoni's compendiums, is discussed, together with the author's biography, with a view to presenting the historical and social context in which the work is inserted. Regarding the analysis carried out, mathematical contents and the didactic options of the books are discussed, such as, for example, the exercises, synthesis procedures such as the “general rule”, definitions, among others. The chapters considered are: “Operations with polynomials and first-degree problems”, “Elementary theory of the greatest common divisor”, “The impasse in solving problems with negative numbers”, “Impossible and indeterminate problems”, “Solving second-degree problems” and “Applications of algebra”. What supports the choices of these themes is that, in these spaces, detailed discussions were found, often different from those presented in contemporary books, making them capable of fostering the elaboration of conjectures in the context of the History of Mathematics Education regarding the following questions: What didactic alternatives does the work use to present the algebraic content? What characteristic of the subject School Algebra is present in the work compiled by Ottoni? Answering these questions refers to the objective of the research, which is to describe the organization of School Algebra in the book Elements of Algebra. In view of this survey, similar aspects and ruptures existing between the works compiled by Ottoni are addressed, in order to deal with the teaching of Algebra in the time frame between 1852 and 1893, the period that includes the first and last edition found for the development of the present analysis.

Keywords: Algebra, Compendiums, Knowledge, Cultural History

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GHEMAT	Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática
HC	História Cultural
HEM	História da Educação Matemática

Sumário

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O livro *Elementos de Álgebra*, de Cristiano Ottoni, inicialmente publicado no Brasil em 1852, é uma obra de destaque nas literaturas da História da Educação Matemática (HEM). A presente pesquisa consiste em uma análise detalhada da referida obra, que constitui referência para a matemática escolar brasileira.

Ottoni gozava de consideração geral e todos os seus livros "foram bem aceitos e adotados em quase todos os estabelecimentos de instrução secundária e superior" (Ottoni, 2014, p. 75). Esta obra, em particular (Figura 1), foi lançada em 1852 e reeditada por diversas vezes nos quase 40 anos seguintes, tendo sido referência para os cursos secundários e preparatórios durante boa parte da segunda metade do século XIX (VALENTE, 2007, p. 147).

Figura 1: Primeira edição do livro de Ottoni presente na biblioteca de obras raras da UFRJ

Fonte: Foto feita pelo autor

A princípio, sob o olhar do historiador, o compêndio de Ottoni apresenta o conteúdo de forma acessível, propondo soluções com clareza. A obra se utiliza da formalização matemática e conta com exemplos numéricos na apresentação dos conteúdos. Este olhar inicial guiou um primeiro questionamento: de quais alternativas didáticas a obra lança mão para apresentar o conteúdo algébrico?

Diante da expressividade da obra compilada por Ottoni à época, esta pesquisa busca trazer elementos, mediante os princípios do referencial teórico-metodológico da história cultural, que nos aproximem de respostas para um segundo questionamento**:** quais características da Álgebra escolar estão presentes na obra compilada por Ottoni?

No que diz respeito às atuais tendências metodológicas de escrita da História da Educação, destaca-se o uso do livro didático como uma importante fonte de pesquisa, (Choppin, 2002). Em virtude da relevância dessas fontes de pesquisa somadas ao interesse por uma investigação aprofundada acerca da Álgebra escolar brasileira, entendemos que, para a produção da presente historiografia, do âmbito da HEM, foram percorridos indícios de como se organiza a obra *Elementos de Álgebra,* no que se refere aos conteúdos, à forma de apresentá-los e à sequenciação didática na qual a álgebra está exposta.

A presente pesquisa, portanto, traz uma reflexão fundamental acerca não só dos livros de Álgebra de Ottoni, mas também da relação entre os conteúdos, a forma de apresentá-los e os saberes que à época foram privilegiados na constituição da Álgebra escolar nesses compêndios. Diante disso, tal trabalho pode substanciar trabalhos históricos que se aproximem do marco temporal e da temática desenvolvida, além de pesquisas do âmbito da Educação Matemática que tenham como proposta compreender questões atuais, levando em consideração aspectos históricos da constituição da matemática escolar.

Em suma, este trabalho pretende contribuir para o estudo do desenvolvimento da álgebra escolar no Brasil durante a segunda metade do século XIX através da obra *Elementos de Álgebra*, de Cristiano Ottoni, aprovada para o Colégio Pedro II no Rio de Janeiro, que era a escola de referência para os restantes estabelecimentos escolares brasileiros da época.

Foram colocadas duas questões específicas:

1) De que alternativas didáticas a obra lança mão para apresentar o conteúdo algébrico?

2) Que características da disciplina álgebra escolar estão presentes na obra compilada por Ottoni?

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos, sendo o primeiro estas considerações preliminares, e o último as considerações finais. O segundo capítulo apresenta os percursos metodológicos adotados na pesquisa e debate dois referenciais teórico-metodológicos tidos como vetores, são eles: a História Cultural e os saberes *a* e *para* ensinar. Tal capítulo está dividido em duas seções, uma para tratar de cada tema dos referenciais supracitados.

O terceiro capítulo versa sobre a biografia de Cristiano Benedito Ottoni e trata das variadas vivências do professor e autor, que possui carreira vasta em segmentos como política e engenharia civil. Além disso há uma discussão acerca do contexto político e social em que sua obra fora publicada e, em seguida, reverberada pela reforma Couto Ferraz.

O quarto capítulo apresenta a estrutura do compêndio *Elementos de Álgebra*, que consiste em tratar dos conteúdos trabalhados e das formas como se estabelecem essas abordagens. É realizada, nessa seção, uma espécie de introdução a conceitos que foram aprofundados no capítulo seguinte.

O quinto capítulo apresenta detalhes acerca da análise aprofundada de aspectos didáticos, metodológicos e dos conteúdos matemáticos que foram privilegiados nessa obra. São apresentados nessa seção os resultados obtidos acerca das questões levantadas anteriormente.

2. FERRAMENTAL TEÓRICO METODOLÓGICO

As inquietações que originam a produção da presente pesquisa são oriundas das diversas formas de contato que tive com a Educação Matemática, na faculdade, por exemplo, , através de projetos nos quais desempenhei investigações acerca do processo de ensino e aprendizagem e da troca que mantenho com pesquisadores-professores e pesquisadores em formação.

De forma mais específica, atualmente considero a história da educação como o lugar de onde falo, uma vez que tenho minha atenção direcionada a esse campo devido a diversos fatores, como o foco de minhas leituras, as reuniões de orientação e a minha participação no grupo de pesquisa GHEMAT.

Michel De Certeau defende que o que liga as ideias aos lugares é a prática pesquisadora do historiador. Com isso, ele destaca que toda produção histórica depende da filosofia utilizada no trabalho e que é impossível desvinculá-la da subjetividade inerente ao trabalho do autor. Com isso, ele rompe com uma ideia tradicional vigente em práticas historiográficas clássicas, que buscavam reconstituir a história sobre a verdade do que havia acontecido, ou seja, buscava-se traduzir a história em “fatos” históricos. Nas palavras do próprio Certeau, podemos compreender melhor seu posicionamento sobre a escrita da história:

> Encarar a história como uma operação será tentar, de maneira necessariamente limitada, compreendê-la como a relação entre um *lugar* (um recrutamento, um meio, uma profissão, etc.), *procedimentos* de análise (uma disciplina) e a construção de um *texto* (uma literatura). É admitir que ela faz parte da "realidade" da qual trata, e que essa realidade pode ser apropriada "enquanto atividade humana", "enquanto prática" (CERTEAU, 1982, p. 65).

Ainda nessa perspectiva problematizadora acerca de práticas de pesquisa histórica, temos também que destacar a importância da busca por indícios, que podem ser observados através das fontes. O autor que muito contribuiu para a formalização dessa metodologia foi Carlo Ginzburg, historiador italiano conhecido por ser um dos percussores da micro-história, gênero que contribuiu com sua obra *O queijo e os vermes* (1976).

Em consonância com essa evolução da análise dos detalhes como perspectiva científica, surgem diversas maneiras de tornar os resultados advindos da busca de indícios verdadeiramente significativos. Na HEM, tal prática se concretiza através de técnicas minuciosas de controle das fontes, como, por exemplo, a interpretação crítica, a intuição, o faro de historiador e as categorizações das referências.

2.1. A HISTÓRIA CULTURAL

Uma parte importante na constituição do presente trabalho é a História Cultural (HC), disciplina redescoberta a partir dos anos de 1970, devido ao que se chama de virada cultural, quando as disciplinas passaram a contribuir mais umas com as outras. Um bom exemplo disso é a aproximação dos historiadores com os antropólogos, os sociólogos, etc. Essa nova categoria disciplinar é amplamente discutida em literaturas como as de Roger Chartier (2009, 2016), Peter Burke (2008) e Lynn Hunt (1989).

A leitura cultural de obras deve estar embasada também nas formas que se dão a ler, a ouvir ou a ver os textos, posto que isso também é importante na construção do seu sentido.

> Apoiada na tradição bibliográfica, a “sociologia dos textos” coloca a tônica sobre a materialidade do texto e a historicidade do leitor com uma dupla intenção. Trata-se, por um lado, de identificar os efeitos produzidos sobre o estatuto, a classificação e a percepção de uma obra por meio da sua forma manuscrita ou impressa (CHARTIER, 2016. p. 27).

A HC não é monopólio de historiadores, ela é multidisciplinar, bem como interdisciplinar; em outras palavras, começa em diferentes lugares, diferentes departamentos na universidade — além de ser praticada fora da academia (Burke, 2008, p. 122). Isso é o que permite que historiadores da educação matemática realizem pesquisas mesmo sem possuir um diploma de historiador.

Nesse contexto, a HC se aproxima de diversas disciplinas, principalmente da antropologia, posto que os fatos históricos podem ser construídos no acompanhamento e nas entrevistas, e não somente no trabalho com as fontes. Em Burke (2008), temos as referências a Clifford Geertz, Victor Turner e Mary Douglas entre os antropólogos utilizados por historiadores culturais. Além disso, a HC se aproxima da história das artes, vejamos exemplos de Huizinga e Burckhardt, referidos em Burke (2008), e de Morelli em Ginzburg (1989).

O livro de Roger Chartier, *A história ou leitura do tempo* (Chartier, 2009), é uma importante referência em HC, pois debate um tema fundamental para pesquisadores desse campo: as variáveis envolvidas na prática.

Em sua obra, Chartier estabelece relações de proximidade e de diferença a respeito da história e da memória e da história e da ficção. Esse debate é importante, pois tanto a memória quanto a ficção remetem ao passado, bem como à história. Para tratar das relações entre história e memória, o autor lança mão da obra de Paul Ricoeur (2000), *A memória, a história, o esquecimento*. Em sua obra, Ricoeur destaca que o lugar onde são encontradas é a principal diferença entre memória e história. A memória encontra-se no discurso e é inseparável da testemunha, já a história não se caracteriza por ser a recordação de alguém, ela não se baseia na confiança outorgada ao testemunho, mas, sim, na natureza dos documentos que foram lançados ao status de fonte de pesquisa. O que faz com que a memória não possa ser vista como verdade histórica consiste no fato de que ela se encontra nas estruturas narrativas, nas figuras retóricas, nas imagens e nas metáforas, e isso faz com que ela seja questionada e suspeitada, uma vez que há uma distância entre o passado e essas formas de representação.

A virada cultural é marcada pela obra de Lynn Hunt (1989), *The new cultural history,* que apresenta a origem e os traços metodológicos desse novo modelo de pesquisa histórica. Chartier (2009) aponta que, para compreender essas novas características, é importante ter em vista as múltiplas acepções do termo "cultura". A noção de cultura em que essa perspectiva metodológica da história cultural se insere é da antropologia simbólica, em particular a de Clifford Geertz: "a totalidade das linguagens e das ações simbólicas próprias de uma comunidade constitui sua cultura" (CHARTIER, 2009, p. 35). Chartier complementa: "conforme suas diferentes heranças e tradições, a história cultural privilegiou objetos, âmbitos e métodos diversos. Enumerá-los é uma tarefa impossível." (idem).

Outra questão que mobiliza debates no que tange à HC é a relação entre cultura popular e cultura erudita, também denominada cultura letrada. Essas duas categorias de cultura são motivo de interesse de diversos grupos de historiadores. A questão central nesses debates encontra-se, por exemplo, no fato de que "a força dos modelos culturais dominantes não anula o espaço próprio da sua recepção" (CHARTIER, 2009. p. 44). Isso quer dizer que os documentos, a imposição de disciplinas, as novas regras de conduta etc. estão sempre de acordo com tradições assentadas na sociedade em questão.

Essas questões referentes às representações e às apropriações das culturas eruditas e populares nos levam até um novo desafio lançado à HC, o de relacionar os discursos e as práticas. Frente a essa perspectiva, é necessário entender que o objeto fundamental da história reside em compreender como os autores sociais dão sentidos às suas práticas e aos seus discursos. “A partir dessa observação, deve-se compreender a releitura, pelos historiadores, [...], a importância de um conceito como o de representação que veio designar, praticamente por si mesmo, a nova história cultural” (CHARTIER, 2009. p. 49).

O conceito de representação é importante para a HC, pois permite ao historiador compreender de forma aprofundada a dinâmica de grupos sociais, cujas lutas são entendidas como processo de construção do mundo social, que é constituído através do exercício da autoridade por meio de discursos, práticas, ritos, signos etc.

O uso do referencial teórico metodológico da HC permite ao historiador entender que não basta aceitar as fontes como prontas; elas devem ser interpretadas através de seus traços e indícios. Além disso, é fundamental o entendimento de que os discursos e práticas podem enfatizar ou deixar de lado situações ocorridas no período histórico estudado.

Para pesquisadores que utilizam a HC, as fontes, bem como em outras modalidades metodológicas de historiografia, são de fundamental importância. Porém, as condições que fizeram essas fontes circularem e a maneira como foram publicadas também são fatores importantes.

> [...] pelos preceitos da História Cultural, que busca compreender as perspectivas e lógicas de ação de atores individuais e coletivos, as apropriações variadas dos discursos, as práticas na sua variação e singularidade, os suportes materiais pelos quais circulam as ideias, a autoria e as intencionalidades com que foram produzidos os documentos no passado, sua circulação e seus usos (BÚRIGO, 2017. p. 56).

Por fim, cabe enfatizar que, na leitura desse referencial teórico, nos deparamos com uma ampla diversidade de abordagens de estudos histórico-culturais, não cabendo dessa forma uma definição direta para o termo HC. O que se sabe, porém, é que tal conceito deve mobilizar construção de hipóteses, análises específicas e regras de controle de fontes.

2.2. OS SABERES “A” E “PARA” ENSINAR, A ORIGEM DESSAS ABORDAGENS

Para iniciar o debate acerca dos saberes que caracterizam a expertise docente, vale destacar que seguiremos algumas importantes literaturas (HOFSTETTER, 2009; BORÉR, 2017; VALENTE, 2018). Tais obras são fundamentais para estabelecer uma ampla problematização a respeito dos saberes “a” ensinar e os saberes “para” ensinar dos compêndios analisados, a partir de uma perspectiva europeia do séc. XX, mais especificamente da Suíça, que traz questões que relacionam esses saberes com as profissões de ensino e de formação.

Diante disso, quando esses saberes são caracterizados, compreendemos as habilidades necessárias para prática da profissão de ensino e de formação. Isso torna possível a diferenciação entre dois tipos constitutivos de saberes, os saberes “a” ensinar, que são os objetos de trabalho – no caso do professor de matemática, esses são os conteúdos –, e os saberes “para” ensinar que se caracterizam como ferramentas de trabalho, como a didática, as metodologias etc. Esses saberes são objetos fundamentais na atuação do professor e possuem lugar central na atividade de formar.

Devido à modernização das escolas, emerge também um amplo esforço no sentido da teorização da prática pedagógica e didática. Tal crescimento coincide não acidentalmente com o desenvolvimento das ciências sociais, campo que se relaciona diretamente com o estudo das problemáticas educativas, constituindo assim os saberes de formação.

O lugar onde os saberes para ensinar se encontram mais caracterizados é no ensino primário, onde, segundo Hofstetter (2009), professores contribuem para sua constituição através de debates, de revistas pedagógicas, de congressos e associações. No ensino secundário, esses saberes se caracterizam por meio de mais desdobramentos, haja vista que nesse segmento os professores têm suas atenções voltadas também aos saberes acadêmicos.

Nessa perspectiva histórica, os saberes para ensinar são tratados em diversas literaturas como fundamentais em todos os níveis de ensino. “Observamos que no próprio seio do mundo universitário, conhecimentos e competências pedagógicas são indispensáveis aos professores-pesquisadores que ali ensinam” (HOFSTETTER 2009, p. 148).

O que se constata é que os saberes tanto *a* quanto *para* ensinar estiveram em evolução na Suíça Romanda do século XX. Vale destacar que no ensino secundário esse debate se demonstrou mais latente. Os saberes para ensinar ganharam legitimidade e, com isso, os saberes de formação angariaram mais ramificações, como, por exemplo, a psicologia e a didática. Esses novos contornos dão esperança de estabelecimento de uma educação com cada vez mais qualidade, uma vez que as práticas metodológicas passam a ser questionadas e, por consequência, são aprimoradas.

Compreender a dinâmica dos saberes ao longo do tempo permite compreender as diretrizes curriculares a partir do contexto histórico sob a ótica da formação de professores. Além disso, quaisquer intervenções feitas nas salas de aula contemporâneas nascem do intuito de caracterizar novos saberes, tal afirmação corrobora a importância dessa vertente de pesquisa, que ainda deve ser explorada, no sentido de compreender melhor o presente e o passado, posto que o primeiro é um legado do segundo.

2.2.1. A pesquisa com livros didáticos sob a perspectiva dos saberes

Os estudos acerca dos saberes específicos para a profissão de ensino foram sistematizados pela Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra, na Suíça. Tais estudos buscam compreender como se articulam dois tipos de saberes, como já mencionado, os *saberes a ensinar* que se referem aos conteúdos dos diversos campos científicos, e os *saberes para ensinar*, que caracterizam a expertise profissional do professor.

Apropriando-se dos estudos supracitados, é possível delinear duas novas categorizações que permitem analisar melhor o campo de estudo dos saberes em matemática, elas são a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. "O uso como hipótese teórica de trabalho das categorias matemática a ensinar e matemática para ensinar faz avançar a compreensão dos movimentos de constituição dos saberes profissionais dos professores, dos saberes profissionais" (VALENTE, 2018, p. 197).

Diante desse contexto, um dos fatores almejados na realização desta pesquisa é descrever a organização da Álgebra escolar nos livros *Elementos de Álgebra,* por meio do levantamento dos conteúdos e da organização destes na obra. Isso consiste em analisar a maneira como conteúdos, definições e exercícios são apresentados no compêndio.

Tal desafio permite, porém, a esta pesquisa contribuir para análise de materiais didáticos sob a perspectiva dos saberes neles presentes. “Essa noção considera os conteúdos e a adequação deles aos alunos em cada série – nível de escolaridade, os métodos para aprendizagem, os materiais indicados, entre outros aspectos” (OLIVEIRA, 2019. p. 1).

As análises de manuais pedagógicos sob a perspectiva dos saberes vêm ganhando espaço nas pesquisas que tratam da HEM, mais especificamente nas pesquisas do GHEMAT Brasil, grupo de pesquisas que, há algum tempo, vem adotando as literaturas que versam sobre os saberes que caracterizam a expertise docente como referencial teórico-metodológico. Diante disso, o que se observa a partir das pesquisas que se aportam desse referencial é que é possível analisar a presença, de forma mais direta, desses saberes em livros didáticos destinados ao professor e em prescrições oficiais destinadas à orientação do trabalho docente. Os trabalhos de Araújo (2018) e Valente (2018) são exemplos de pesquisas que se debruçaram sobre tais fontes de pesquisa no intuito de caracterizar esses saberes objetivados nelas contidas.

Adiante conheceremos mais sobre quem foi Ottoni e compreender o que havia em sua obra, quais eram os elementos de destaque e qual álgebra era ensinada à época por meio desse instrumento.

3. CRISTIANO BENEDITO OTTONI

Cristiano Benedito Ottoni, professor-autor brasileiro nascido em 1811 no município mineiro de Vila Príncipe, atualmente denominado como cidade de Serro – MG, teve uma carreira vasta e faleceu em 18 de maio de 1896. Segundo sua *Autobiografia* (2014), ele foi capitão-tenente da Marinha, professor de matemática, engenheiro, diretor da Estrada de Ferro Dom Pedro II, senador do Império, e, depois da proclamação da República, foi investido do mandato de senador da República (Ottoni, 2014). No que tange a sua carreira científica, Ottoni foi um expoente professor-autor que em 1834 ingressou como professor substituto na Academia Militar, na qual permaneceu por 21 anos.

Figura 2: Cristiano Benedito Ottoni

Fonte: Wikipédia

A obra de Cristiano Ottoni foi utilizada no Colégio Pedro II no período compreendido entre 1856 e 1870 (BELTRAME, 2000). Ottoni, em território nacional, pode ser considerado pioneiro na produção de livros didáticos. Antes o que se tinha eram as apropriações de obras estrangeiras – principalmente francesas –, o que pode justificar o enorme sucesso de sua obra, que definiu a álgebra escolar ensinada naquele período nos colégios e liceus do Brasil (Valente, 2007) e serviu como referência para autores nacionais produzirem suas obras.

A *Autobiografia* de Ottoni (2014) é repleta de acontecimentos da sua vida. Além de realizar as atividades supracitadas, quando havia se casado recentemente com sua esposa Virginia, Ottoni passa a se dedicar ao trabalho como professor e a ambicionar uma reputação científica, segundo suas próprias palavras:

> A paz doméstica, o bem-estar privado bastavam-me ao coração: mas cuidava também seriamente de meus deveres oficiais. Regendo a minha cadeira do 1º ano da Academia de Marinha, ambicionei fundar alguma reputação científica. (OTTONI, 2014, p. 74)

Em suas palavras, Ottoni ressalta que sua ambição não era de obter vantagens pecuniárias, no entanto são inegáveis o sucesso e a ressonância de suas obras nos estabelecimentos de ensino brasileiros.

> Formulando os novos compêndios, estava eu longe da ideia de colher deles vantagens pecuniárias: assinalo este ponto por um sentimento que as almas nobres hão de compreender. Não cria mesmo que a extração chegasse a dar-me lucros, como deu: por isso, nada quis despender com a publicação dos primeiros mil exemplares (só da Aritmética) e aceitei para isso a proposta da Casa Laemmert, que se apropriou da maior parte dos lucros da edição: pagou-se da impressão pela venda, e do resto deu-me metade do produto líquido. As edições seguintes deram-me excelente remuneração (OTTONI, 2014, p. 74).

Por fim podemos mencionar que o destaque principal na vida de Ottoni se deve a suas contribuições políticas e construções enquanto atuava como engenheiro, conclusão obtida com base no foco de sua *Autobiografia* (2014) a esses feitos. No entanto, é inegável o sucesso de sua obra *Elementos de Álgebra* e o legado desse trabalho para a consolidação da disciplina escolar matemática.

O trabalho de compilação no qual Ottoni se empenhou, no que se refere a temas relacionados ao que concebemos como matemática, não se limitou à álgebra; o autor foi responsável pela publicação de outros diversos manuais nessa área, como por exemplo *Elementos de Geometria e trigonometria Rectilínea* (1857), *Elementos de Arithmética* (1855).

3.1. A REFORMA COUTO FERRAZ E A RESSONÂNCIA DA OBRA DE OTTONI

A reforma Couto Ferraz, que ocorre no ano de 1854 no Rio de Janeiro, impulsionou o movimento de reformas nas instituições de ensino brasileiras. Tal reforma fora representada pelo governo do Império como DECRETO N.º 1331 A – de 17 de fevereiro de 1854.

> A reforma Couto Ferraz, entre outras coisas, cria a Inspetoria Geral da Instrução Primária e Secundária do Município Neutro da Côrte, órgão ligado ao Ministério do Império e destinado a fiscalizar e orientar o ensino primário e secundário, público e particular; estabelece normas para o exercício da liberdade de ensino; reformaram os estudos do Colégio Pedro II e cria na Côrte os Exames Gerais de Preparatórios que se realizariam tomando como base os compêndios e programas adotados no Pedro II (BELTRAME, p. 30, 2000).

É observado tal reforma apresenta no artigo 56, os estímulos aos professores que compuserem ou traduzirem obras para uso nas escolas, depois de serem adotados pelos governos.

> Em 24 de janeiro de 1856, um decreto fixaria os programas e os compêndios que se adotariam nos dois cursos de estudo do Colégio Pedro II. Na falta de obras nacionais, muitos dos compêndios adotados eram franceses; na matemática entretanto, foram adotados os do brasileiro Cristiano Benedito Ottoni (BELTRAME, p. 33, 2000).

Zotti (2005) reforçou um aspecto a ser considerado, uma implicação da reforma Couto Ferraz. Segundo a autora, os estudos no CPII foram divididos em duas classes, eram estas: Os “estudos de primeira classe” possuíam duração de 4 anos, caráter mais científico e eram destinados àqueles que seguiriam para as escolas profissionalizantes. A segunda classe eram os “estudos de segunda classe”, com duração de 3 anos e que habilitavam o estudante ao diploma de bacharel em Letras e possibilitavam o ingresso imediato ao ensino superior.

> Esta divisão em cursos distintos, com funções igualmente distintas, caracteriza a formação diferenciada das classes sociais: a formação do trabalhador, como reflexo das novas necessidades do país diante da tendência de uma sociedade urbano-agrícola-comercial; a formação da elite, visando ao ingresso nos cursos superiores, representa a continuidade da formação clássico-humanista, historicamente patrimônio cultural desta classe (ZOTTI, 2005, p. 37).

Com efeito, a reforma impõe um ponto de inflexão, visto que impõe modificações substanciais no sistema de ensino brasileiro, fazendo com que, por exemplo, compêndios brasileiros, estejam presentes nas instituições públicas de ensino da época, o que explica um pouco o sucesso das obras de Ottoni aqui no Brasil.

4. O COMPÊNDIO *ELEMENTOS DE ÁLGEBRA*

Na sua *Autobiografia* (2014), Ottoni explicita as razões que o levaram a elaborar os seus livros:

> De tudo o que eu conhecia da bibliografia matemática, o que mais me satisfazia era a Aritmética e Álgebra de Bourdon, e a Geometria de Vincent: eram as três matérias que eu ensinava. Compilando-os e modificando a exposição e os métodos no sentido de minhas observações no tirocínio do magistério, empreendi escrever novos compêndios para o meu 1º ano, e neles trabalhei desde 1849 até 1853 ou 1854 (OTTONI, 2014, p. 74).

Serão, pois, aqueles dois matemáticos franceses, Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854) e Alexandre Vincent (1797-1868), que mais terão influenciado a sua escrita. No entanto, na introdução dos *Elementos de Álgebra*, Ottoni menciona que o livro se contrapõe à obra com o mesmo título de Etiène Bézout (1730-1783), e nesse sentido efetuei um levantamento da obra deste autor francês com a intenção de a ele dedicar um capítulo específico. No final, devido à falta de indícios do uso dos trabalhos deste matemático no Brasil, constatei que as propostas de Bézout só muito remotamente terão contribuído para o seu livro, e assim remeti para anexo o trabalho realizado (ANEXO A). Segundo Ottoni (OTTONI, 2014), terá sido Bourdon a sua inspiração mais forte e fica o entendimento de que a afirmação colocada na introdução pode fazer referência a uma opinião de Bourdoun comentando textos de Bézout. Enquadrada no contexto francês, acabou sendo aproveitada por Ottoni como justificação do seu livro original. De fato, a obra que possui ampla aceitação foi a obra de Ottoni, que é uma compilação feita a partir dos trabalhos de Bourdon.

Antes de adentrarmos a discussão e apresentação dos assuntos que constituem a obra estudada, se faz necessário apresentar ao leitor quais edições foram consultadas no decorrer da presente pesquisa, pois o livro teve uma circulação de aproximadamente 40 anos, e é essa longevidade que justifica sua importância. Do mapeamento realizado a partir das edições da obra *Elementos de Álgebra*, contatou-se que o compêndio foi publicado até, ao menos, o ano de 1893, época em que fora publicada sua 8.ª edição. A seguir, estão apresentadas as edições encontradas e utilizadas.

Tabela 1 – Edições utilizadas como fontes na presente pesquisa

Edição	*Ano de publicação*
1ª	1852
2ª	1856
4ª	1879
8ª	1893

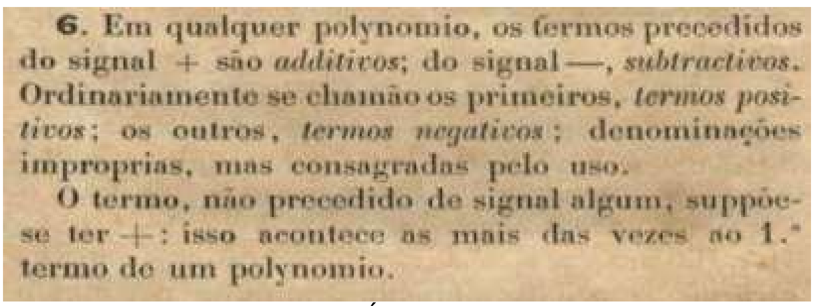
Fonte: Autor próprio

Sendo assim, essa dissertação também tem como propósito mapear a organização da Álgebra nesse livro a partir do levantamento de aspectos que se destacam na obra. Vale ressaltar que a edição priorizada na presente análise é a primeira, no entanto a 2ª, 4ª e 8ª edições foram visitadas no decorrer do trabalho para tratar das permanências e rupturas que se deram na Álgebra que era veiculada nesses compêndios.

O livro compilado por Cristiano Benedito Ottoni é estruturado em 6 capítulos, são estes: “Operações Algébricas”, “Problemas do primeiro grau”, “Problemas indeterminados”, “Resolução de problemas e equações do segundo grau”, “Potências e raízes de todos os graus” e “Aplicações dos princípios da álgebra às progressões e logaritmos”. Tais capítulos estruturam-se entre duas e quatro seções, dentro das quais havia partes numeradas contínuas que iam do início até o último capítulo, começando no subtópico 1, no capítulo 1, e indo até o 183, no capítulo 6.

O primeiro capítulo da obra é a base para o que mais adiante será aprofundado. A abordagem enfatiza as definições de monômios, polinômios e valor numérico de uma expressão. Neste início, o compêndio apresenta explicação detalhada de alguns dos termos base, e como exemplo disso podemos destacar o seguinte tópico do compêndio.

Figura 3: Termos relacionados com polinômios


6. Em qualquer polynomio, os termos precedidos do signal + são *additivos*; do signal —, *subtractivos*. Ordinariamente se chamão os primeiros, *termos positivos*; os outros, *termos negativos*; denominações improprias, mas consagradas pelo uso.

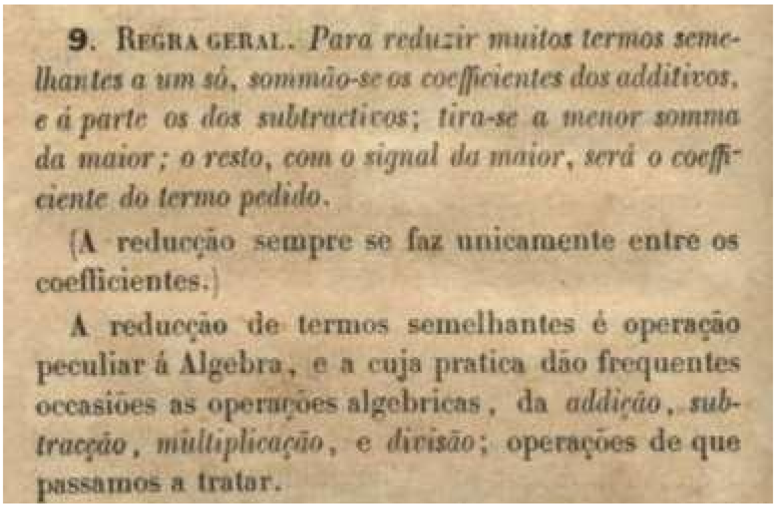
O termo, não precedido de signal algum, suppõe-se ter +: isso acontece as mais das vezes ao 1.º termo de um polynomio.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 6)

Nesse movimento de explicar detalhadamente os conteúdos, o compêndio apresenta o que é o grau de um monômio. No entanto, não trata da análise do grau de polinômios. Tendo em vista que este é um tema abordado atualmente, deixar de lado esse debate pode causar estranheza ao leitor acostumado com os livros didáticos contemporâneos.

Todo esse percurso de explicações aprofundadas se encontra sintetizado na "regra geral", um recurso característico da obra, responsável por sistematizar o que foi debatido e apresentar técnicas algébricas de resolução de problemas. A Figura 4 apresenta uma Regra Geral que generaliza os procedimentos para efetuar a soma de polinômios:

Figura 4: Regra geral soma de polinômios



9. Regra geral. *Para reduzir muitos termos semelhantes a um só, sommão-se os coefficientes dos additivos, e á parte os dos subtractivos; tira-se a menor somma da maior; o resto, com o signal da maior, será o coefficiente do termo pedido.*

(A reducção sempre se faz unicamente entre os coefficientes.)

A reducção de termos semelhantes é operação peculiar á Algebra, e a cuja pratica dão frequentes occasiões as operações algebricas, da *addição*, *subtracção*, *multiplicação*, e *divisão*; operações de que passamos a tratar.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 8)

Esta imagem é o primeiro tópico intitulado "regra geral" do compêndio – apenas no capítulo 1 temos 4 tópicos "regra geral". Nele é tratada a união de polinômios que possuem parte literal semelhante. De maneira direta, o texto é capaz de exemplificar todas as possibilidades com que o leitor pode se deparar quando trabalha com adição ou subtração de polinômios.

Figura 5: Algoritmo soma de polinômios

Exemplo. Sommar os polynomios

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 4ab + 2b^2 \\ + 5a^2 + 2ab - b^2 \\ + 3ab - 2b^2 - 3c^2: \\ \hline \end{array}$$

Somma, já reduzida $\quad 8a^2 + ab - b^2 - 3c^2$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 10)

O exemplo da Figura 6 reforça a regra apresentada, em polinômios com parte literal semelhantes, somam-se os coeficientes; em caso de sinais diferentes, subtraem-se, mantendo o sinal do monômio que for maior. Atualmente poderíamos aprimorar essa síntese mencionando que mantém-se o sinal do coeficiente que possuir maior módulo. Ainda no que tange essa parte introdutória, o compêndio trata da multiplicação algébrica, finalizando o primeiro capítulo com a divisão algébrica.

O segundo capítulo inicia com o debate acerca das noções preliminares sobre as equações, logo nas primeiras palavras desta seção encontram-se os dizeres: “Não considera a Álgebra ordinariamente, senão os problemas cujo enunciado traduzido nos symbolos algébricos se acham representados por equações” (OTTONI, p. 34, 1852). Antes de adentrar, no subtópico Equações e Problemas do primeiro grau com uma incógnita, a obra situa o leitor acerca de algumas definições das equações, por exemplo dos membros, do grau de uma equação e sobre as transformações. “Convém muitas vezes passar um termo de um para outro membro; para o que basta lhe mudar o sinal” (OTTONI, p. 34, 1852).

O compêndio faz algumas discussões sobre resultados notáveis na resolução de equações. A partir dessa contextualização inicial acerca das operações com polinômios, o autor parte para a aplicação dessas resoluções por meio de problemas do primeiro grau com uma incógnita. As técnicas resolutivas, que se encontram formalizadas na regra geral (Figura 6), precedem os problemas aplicados. O que se observa é uma atenção às técnicas, que, por sua vez, apresentam-se minunciosamente explicadas.

Figura 6: Regra para resolução de equações

38. Regra geral para resolver uma equação do 1.° grão, numerica, ou litteral. 1.° *Expellem-se os denominadores, se os ha* (n.° 36). 2.° *Collocão-se no* 1.° *membro todos os termos em que entra a incognita, e no* 2.° *os termos conhecidos* (n.° 35). 3.° *Reduzem-se os termos semelhantes; e se a equação é litteral, põe-se em evidencia o factor* x, *commum aos termos do* 1.° *membro.* 4.° *Dividem-se ambos os membros pelo numero, ou pelo monomio, ou polynomio, que multiplica* x.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1893, p. 39)

Após essa iniciação na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, o assunto em questão trata dos problemas com duas ou mais incógnitas. No texto que aparece logo após o título do capítulo, o autor menciona os sistemas de equações, denominação com que educadores contemporâneos estão familiarizados. Nessa etapa, o método exemplificado é o que conhecemos hoje por *método da substituição*. Porém, a regra geral que aparece antes dessa etapa é a que trata da resolução de equações do primeiro grau, o que nos leva a crer que Ottoni pode ter se referido a este tema para introduzir a resolução de sistemas do primeiro grau.

Em prosseguimento ao capítulo 2, o livro aborda os problemas com mais de duas incógnitas, suscitando a combinação de equações, eliminando sempre a mesma vaiável para encontrar valores de interesse. Adiante são tratados formalmente os métodos da adição ou subtração, substituição e comparação. Para possivelmente situar o usuário da obra, são apresentados nessa etapa seis problemas com resolução discutida, e mais cinco que ficam apenas com solução como exercício.

No decorrer desta fase, são apresentados exemplos e deixados exercícios, e isso se estende até a parte do capítulo 2 denominada "Soluções negativas dos problemas. Theoria das quantidades negativas" (encontra-se discutida na seção 5.3) e "Discussão dos problemas e equações do 1° grau", parte do livro destinada a debater as soluções obtidas nas equações quando negativas, indeterminadas ou impossíveis de serem resolvidas.

O capítulo 3, intitulado "Problemas indeterminados" trata dos problemas que possuem variadas soluções. Inicialmente é feita uma discussão sobre todo o problema que possui maior número de incógnitas do que de equações e que o autor denomina indeterminado. Findando a parte introdutória, Ottoni menciona que neste terceiro capítulo serão resolvidos problemas indeterminados do 1° grau "em números inteiros", e somente serão incluídas no texto questões que apresentem mais uma incógnita do que o número de equações.

Figura 7: 1° problema da seção problemas indeterminados

75. 1.° Problema. *Pagar 159 francos, tendo sómente moedas de 8 e outras de 13 francos.*

Seja x o numero de moedas de 8 francos, y o de 13. Será a equação do problema

$$8x+13y=159,$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1893, p. 84)

Tal capítulo se encerra no tópico "Problemas indeterminados a três ou mais incógnitas". Neste caso, as situações-problema possuem duas equações e três incógnitas, e a dinâmica de resolução é representada a partir de exemplos de uma regra geral que detalha os todos os procedimentos. (Figura 8)

Figura 8: Regra geral para resolução de sistemas de equações

Regra geral. *Combine-se uma das equações com cada uma das outras, eliminando sempre a mesma incognita: resultará um systema de menos uma equação e menos uma incognita do que o proposto. Pratique-se com este o mesmo que com o 1.° systema e continue-se do mesmo modo até chegar a uma equação e uma incognita. Achado o valor desta, determinão-se os das outras por substituições successivas, em ordem inversa á das eliminações.* De modo que a 1.ª incognita eliminada, é a que em ultimo lugar se determina.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 48)

A estrutura dessa seção consiste em tratar os problemas de duas incógnitas e mais de duas incógnitas de forma contextualizada, ou seja, apresentada por meio de problemas. Essa etapa é breve, não conta com regra geral nem exercícios para os usuários realizarem.

O capítulo 4 trata da resolução de problemas e equações do segundo grau e se inicia com uma contextualização acerca da interpretação destes resultados e com a apresentação de algumas particularidades inerentes à resolução desses problemas.

Após estes temas, o compêndio apresenta no capítulo 4 uma discussão acerca da extração da raiz quadrada de um monômio seguida por técnicas de operações com radicais que se iniciam com a soma, subtração e seguem para a multiplicação. Este primeiro tópico se encerra tratando da divisão de radicais, a técnica apresentada é a que conhecemos atualmente como racionalização. Chama atenção nesta etapa o fato de serem apenas tratados de radicais de índice dois. Mesmo não mencionado, a abordagem permite operações com uso da técnica em casos que os radicais possuem índices maiores que dois, tendo em vista a menção da técnica do produto da soma pela diferença, no entanto não se fala no que concebemos atualmente como fator racionalizante, técnica onde encontra-se um fator que, ao multiplicarmos pelo radical que se encontra no denominador da fração, conseguimos eliminá-lo, gerando assim um resultado simplificado.

Adiante, no segundo tópico do capítulo 4, o livro avança para a discussão dos resultados das equações e problemas do segundo grau com uma incógnita. De forma preliminar, trata-se das equações completas e incompletas e técnicas de resolução em cada caso, além de problemas contextualizados, cuja resolução se dá por meio de equações do segundo grau.

São apresentadas também diversas fórmulas de resolução de uma equação do segundo grau na seção denominada “Discussão geral da equação do segundo grau”. O capítulo encerra apresentando as desigualdades do segundo grau e as equações do segundo grau com duas ou mais incógnitas.

O capítulo 5, penúltimo do livro, trata das potências e raízes de todos os graus. Os tópicos que o compõem são, Binômio de Newton, Raízes de números, Potências e raízes algébricas e Método dos coeficientes indeterminados.

Incialmente são apresentados alguns produtos notáveis, como $(x+a)^2, (x+a)^3, (x+a)^4, (x+a)^5$. Tais resultados são discutidos e apresentados. O texto prossegue com uma discussão acerca da identificação de padrões e indica uma fórmula para determinar os coeficientes e a parte literal de forma generalizadora, ou seja, por meio de uma potência de $(x+a)^n$.

Figura 9: Generalização das potências de binômios

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + Ma^2x^{m-2} + Na^3x^{m-3} + Pa^4x^{m-4} + \dots\dots\dots + a^m.$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1893, p. 137)

Nesse contexto, é apresentada a teoria das combinações, à luz da discussão engendrada pelo binômio de Newton. Para debater o assunto, o livro apresenta exercícios exemplo, característica predominante em todos os capítulos da obra. Após essa etapa, discute-se a extração de raízes de números. Também são tratadas a determinação exata e aproximada de raízes de grau *n*. Tal discussão não é feita no capítulo 4, quando trata da extração das raízes de polinômios, momento no qual são apresentadas somente as raízes quadradas.

O capítulo 5 ainda conta com uma seção denominada cálculo de radicais, onde são trazidas novamente à tona as raízes monômios e polinômios. A diferença, portanto, é que, diferentemente do capítulo 4, agora a obra não se refere a calcular as raízes, mas sim a realizar operações. Significa uma apresentação do que hoje conhecemos como propriedades das operações com radicais.

O compêndio se encerra no capítulo 6, denominado “Aplicação dos princípios d’álgebra às progressões e logaritmos”, no qual o autor menciona que este capítulo “completa os conhecimentos de Álgebra, absolutamente indispensáveis ao estudo da trigonometria e da aplicação da álgebra a geometria” (OTTONI, 1852, p. 169).

O que se pode destacar deste capítulo é sua estrutura. De início são tratadas as progressões aritméticas e geométricas. Na resolução de problemas envolvendo progressões geométricas, surge a demanda de utilizar ferramentas como logaritmos e exponenciais. Nesse momento uma seção do livro é destinada a tratar da *“Theoria das exponencias e dos logaritmos”*. Ao fim da discussão destes resultados, são apresentados diversos exercícios. Parte significativa destes é sobre juros simples e compostos e crescimento populacional.

Juntamente com o índice que se encontra ao final do livro, tem-se uma seção denominada, errata onde se encontram correções de alguns erros que estavam no livro.

No decorrer desta pesquisa serão examinados alguns capítulos e seções apresentadas anteriormente, dando atenção a aspectos metodológicos e aos conteúdos apresentados, aprofundando análise sobre a forma de discutir as definições dos problemas, exemplos e dos conteúdos, para isso, serão colocados em foco aspectos que diferenciam a obra, como a discussão da *Theoria das quantidades negativas* e as operações com polinômios. Taia levantamentos serão realizados de acordo com os objetivos desta pesquisa que é descrever a organização da Álgebra escolar no livro *Elementos de Álgebra.*

5. APONTAMENTOS ACERCA DA OBRA ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

No decorrer das próximas etapas do texto, serão analisados os capítulos do compêndio de Ottoni. O que se propõe é que seja realizada uma análise minuciosa e detalhada de aspectos didáticos e dos conteúdos matemáticos que foram privilegiados nessa obra.

5.1. INTRODUÇÃO E AS OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E PROBLEMAS DO 1° GRAU

Antes de nos debruçarmos sobre o capítulo que versa sobre os problemas e polinômios do 1° grau, vale contextualizar a proposta do compêndio por meio de uma afirmação posta na introdução do livro, que é a menção existente no compêndio de Ottoni referente à aproximação entre a Aritmética e a Álgebra.

> Os signaes, que na Álgebra emprega, são os dez mencionados na Arithmética. O seu uso não só abrevia, mas generaliza os raciocínios; operando sobre números representados por signaes genéricos sente-se melhor que uma propriedade pertença a todos os números (OTTONI, 1879. pp. 5-6).

Sob a perspectiva histórica, Ponte e Guimarães afirmam que esse é um ponto diferenciador da obra, mencionando que Bourdon foi pioneiro nessa abordagem que aproxima a Álgebra e a Aritmética.

> Assim, houve uma evolução do que era tratado no âmbito de cada uma das duas disciplinas (aritmética e álgebra) [...]. Essa abordagem foi introduzida no Brasil por Cristiano Benedito Ottoni (1811-1896) em livros que foram utilizados a partir de 1855 (PONTE; GUIMARÃES, 2014, p. 464-465).

No capítulo 22 do Handbook supracitado, há uma discussão acerca do impacto dessa abordagem na evolução de cada uma dessas disciplinas (aritmética e álgebra). No texto, os autores reiteram que há, nesse momento, uma evolução na maneira como certos tópicos de geometria e aritmética foram abordados a partir do uso da álgebra. Além disso, é possível observar na introdução algumas definições para as palavras teorema e problema, como segue (Figura 10):

Figura 10: Introdução Elementos de Álgebra

Ha duas especies de questões, mui distinctas, a saber:

O theorema, que tem por objecto demonstrar certas propriedades, de que gozão numeros conhecidos:

O problema, cujo fim é determinar o valor de certos numeros, por meio de outros, dados, com os quaes conservão aquelles relações definidas pelo enunciado da questão.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1893, p. 1)

Ainda na parte introdutória, o autor apresenta os sinais empregados na álgebra e referência a sua obra de aritmética, afirmando que estes são os mesmo que lá estão dispostos e denota que seu uso não só abrevia, mas generaliza os raciocínios.

Redirecionando o presente debate aos polinômios, o livro encerra o capítulo inicial, mencionando o que é o grau de um polinômio e exemplificando as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

5.2. TEORIA ELEMENTAR DO MAIOR DIVISOR COMUM

A imagem da forma que é usual nos compêndios de aritmética, após o detalhamento das operações básicas, será discutido o Maior Divisor Comum de monômios e polinômios, por meio de frações algébricas. Vale destacar, antes de apresentar a análise desse capítulo, que até então o conteúdo da primeira edição é o mesmo da segunda. Isso muda nesta seção, para exemplificar esta modificação serão apresentadas duas figuras do início desta etapa que bem representam essa diferença. (Figuras 11 e 12)

Figura 11: Maior Divisor Comum Maior Divisor Comum em frações Algébricas I

31. As fracções algebricas devem ser tomadas na mesma accepção que as fracções arithmeticas, a saber: imagina-se dividida uma unidade em tantas partes, quantas são as unidades do denominador, e tomão-se dessas partes tantas, quantas unidades formão o numerador; podendo aliás, um e outro, ser representados por monomios ou polynomios.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 28)

Figura 12: Maior Divisor Comum em frações Algébricas II

31. Chamão-se *fracções algebricas* as expressões, como

$$\frac{3a}{2b}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{a^2-b^2}{2a+b}, \quad \text{etc.}$$

que indicão a divisão de quantidades algebricas, seja ou não o quociente exacto ou de fórma inteira.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1856, p. 30)

Essa diferença na abordagem pode indicar uma preocupação em deixar a forma matemática de representar os resultados mais presentes, tendo em vista que na primeira edição os mesmos conteúdos são tratados, só que apresentados de forma dissertativa, e não usando a linguagem algébrica de forma direta. Nesse sentido, a discussão a seguir leva em consideração conteúdos apresentados na segunda edição.

Nessa primeira etapa o compêndio destaca que as regras para a simplificação de monômios e polinômios são as mesmas utilizadas na aritmética, e que não é necessário que sejam apresentadas, uma veze que já estão apresentadas em outro livro, com isso são expostas técnicas utilizando exemplos. Após alguns exemplos, é exposto que a técnica oriunda da Aritmética não serve para todos os problemas: “Comtudo a applicação algébrica deste processo dependendo de attenções especiaes, e offerecendo alguns embaraços não são conhecidos na Arithmetica, exige uma nova exposição de teoria” (OTTONI, 1856, p. 32).

Adiante é iniciada uma nova seção denominada Maior Divisor Comum, na qual trata-se de forma de obtenção do maior divisor comum de dois polinômios. Na presente etapa, a discussão dos dois livros se assemelha, no entanto, são discutidos os resultados da segunda edição, tendo em vista a maior quantidade de representações algébricas dos resultados. (Figura 13).

Figura 13: Maior Divisor Comum

36. Podemos actualmente desenvolver o processo do maior divisor commum algebrico, e sejão os dous polynomios.

1.°. . $48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^5b^3x^2$

2.°. . $48a^3bx^8 - 88a^4bx^7 - 64a^5bx^6 - 8a^6bx^5$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1856, p. 34)

Após apresentar essas expressões, o autor observa que a primeira expressão é divisível por $12a^2b^3x^2$ e a segunda, por $8a^3bx^5$, tendo estes dois monômios o fator comum $4a^2bx^2$. Será este um divisor comum aos dois polinômios. Resta, no entanto, achar o maior divisor comum, e o procedimento é este: Primeiro dividir o primeiro polinômio por $12a^2b^3x^2$ e o segundo por $8a^3bx^5$.

Figura 14: Maior divisor comum II

Dividindo pois o 1.° polynomio por $12a^2b^3x^2$, e o 2.° por $8a^3bx^5$, os dous quocientes sómente conterão os factores communs polynomios; estes quocientes são

1.°. . $4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^3$

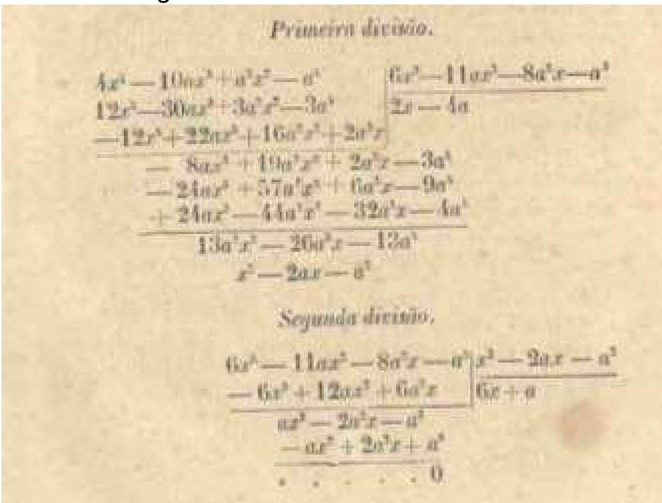
2.°. . $6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3$

os quaes não tem divisor commum monomio.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1856, p. 34)

Caso o primeiro polinômio seja divisível pelo segundo, o quociente será o valor pedido (o maior divisor comum dentre os polinômios). No entanto, essa divisão não pode ser realizada de forma direta, afinal os coeficientes do primeiro e do segundo polinômio são primos entre si. Diante disso, o autor propõe que se multiplique por 3 o primeiro polinômio e se realize a divisão.

Figura 15: Maior divisor comum II



Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1856, p. 36)

Como a primeira divisão não fora exata, é necessário dividir o divisor da primeira operação pelo resto obtido, como na segunda o resto foi zero, conclui-se que o maior divisor comum é o último divisor $x^2 - 2ax - a^2$. Caso não fosse obtido o resto zero, o procedimento se repetiria dividindo o divisor pelo resto obtido.

Figura 16: Regra geral maior divisor comum

REGRA GERAL. *Examina-se se algum monomio é divisor commum de ambos os polynomios, e por elle se dividem.*

Applica-se aos polynomios resultantes a regra do maior divisor commum numerico.

Em cada divisão parcial começa-se sempre por dividir cada polynomio por qualquer divisor monomio, que não o seja do outro polynomio.

Quando o 1.° termo do dividendo não é divisivel pelo 1.° do divisor, multiplica-se o dividendo pelo factor que fôr necessario, comtanto que não seja tambem factor do divisor.

Obtida uma divisão exacta, o ultimo divisor multiplicado pelo divisor commum monomio supprimido no começo da operação é o MAIOR DIVISOR COMMUM PEDIDO.

Para exercicio proporemos como segundo exemplo os polynomios

$$x^4 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4$$
$$3x^3 - 7ax^2 + 3a^2x - 2a^3$$

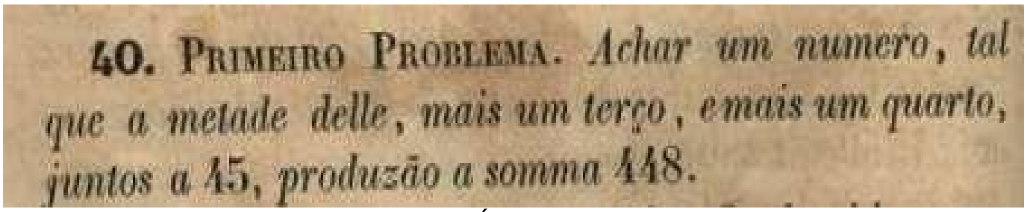
Fonte: *Elementos de Álgebra* – 2ª edição (1856, p. 37)

Ao terminar sua explicação com o exemplo supracitado, Ottoni apresenta uma regra geral que formaliza o que foi discutido anteriormente. Ao final da apresentação teórica, o autor deixa um exemplo e sugere que ele pode ser utilizado como exercício. No entanto, não deixa resposta para conferência de quem for realizar essa proposta.

A existência da regra geral é um elemento de destaque da obra de Ottoni, ao fim de suas explicações há uma formalização dos conceitos abordados, o que fornece indícios de que haja, por parte do autor, uma preocupação com a compreensão do usuário e faz com que denote nessas etapas uma espécie de sistematização didática.

O capítulo 2 da obra de Ottoni trata das equações e dos problemas do primeiro grau. Nessa etapa, o compêndio apresenta as equações a partir da abordagem matemática e, após essa formalização, apresenta exemplos de problemas do primeiro grau.

Figura 17: Problemas do 1° grau Ottoni



40. Primeiro Problema. *Achar um numero, tal que a metade delle, mais um terço, e mais um quarto, juntos a 45, produzão a somma 448.*

Fonte**:** *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 40)

Para a resolução desse problema (da Figura 17), o autor contextualiza a linguagem matemática adotada. Ottoni tem a característica de ser breve em suas apresentações e em apenas meia página resolve o problema 1, utilizando-se da simbologia matemática. Ottoni apresenta seis problemas e, ao final exercícios, que em suas palavras: “Sirvão ara exercício os seguintes problemas, de que damos somente o enunciado das condições e resultado” (OTTONI, 1852. p. 54). Do sétimo ao décimo primeiro problema, Ottoni propõe apenas deixando a solução para que os alunos pratiquem.

5.3. O IMPASSE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM NÚMEROS NEGATIVOS

O problema das soluções negativas de problemas do 1° grau é debatido por pesquisadores do âmbito da História da Educação Matemática. Por exemplo, Coelho, Ulhoa e Aguiar (2018) mencionam em sua obra *A história da álgebra e o pensamento* *algébrico: correlações com o ensino* que falta uma noção de "operacionalidade" acerca desses números.

> Não que os números negativos não tivessem alguma interpretação quando escritos separadamente (como indicando uma dívida), mas o que faltava era uma noção de operacionalidade entre eles, ao contrário do que ocorria quando se pensava no universo dos números positivos. Por exemplo, o que significava o produto de dois números negativos? Cabe ressaltar que, muito provavelmente não por acaso, essa é uma dificuldade que os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental ainda têm. Interessante notar, a propósito, a contribuição dos matemáticos indianos no que diz respeito a essa questão. Se, por um lado, o sistema posicional decimal indiano (que utilizamos até hoje) chegou à Europa no século XII, por intermédio do matemático Fibonacci, via influência árabe, o mesmo não se pode dizer do entendimento que os indianos tinham dos números negativos e do zero. [...] Podemos dizer que a estranheza com números negativos e com o zero ainda iria perdurar por um longo tempo, dividindo opiniões, e isso só seria resolvido quando a matemática já estivesse madura para uma formalização dos conjuntos numéricos e de suas operações (COELHO, ULHOA E AGUIAR, 2018, p. 179).

Essa perspectiva pode justificar o enfoque que Ottoni dá a essas soluções. O autor discute por mais de nove páginas esses resultados na seção denominada "Soluções negativas dos problemas. Theoria das quantidades negativas." (Capítulo 2). Na introdução desse conteúdo, Ottoni fala que à primeira vista tais resultados podem causar certo embaraço, como segue.

> A resolução dos problemas, pelas regras d'Algebra, apresenta algumas vezes circumstancias singulares, que á primeira vista causão embaraço; mas, bem interpretadas dão a conhecer novas propriedades que amplião e generalisão a lingua algebrica (OTTONI, 1879, p. 56).

Uma característica da obra compilada por Ottoni (1852) é recorrer à resolução de exercícios para abordar o conteúdo, no caso das soluções negativas. Ele menciona que apresentará dois problemas "muito simples" que, segundo ele, darão luz à interpretação das soluções negativas.

A primeira questão proposta é a seguinte: Ache um número que, somado ao número *b*, produza uma soma igual ao número *a*. Ottoni, como na maioria dos exercícios de seu compêndio, discute o problema. Ele diz que o número pedido será evidentemente $b + x = a$ e manipula algebricamente a equação para afirmar que $x =$

$a - b$ e dizer que é essa expressão ou fórmula que dará o valor de x, para cada caso particular da questão proposta.

Em uma segunda etapa de resolução, Ottoni testa a equação proposta. Sendo $a = 46,\ b = 27$, nesse caso $x = 27 - 46 = -19$. Ele dá outro exemplo em que $a = 25\ e\ b = 38$, nesse caso $x = 25 - 38 = -13$.

Na discussão dos resultados encontrados, Ottoni menciona:

> A questão proposta é no caso presente: Achar o número que sommado a 38 produz 25. É claro que nenhum numero póde satisfazer a tal condição: o problema, qual se propõe, é impossível. Entretanto, mudando na equação x em -x, será para este caso particular $38 - -x = 25$, donde se deduz $x = 13$ (OTTONI, 1879, p.57).

O fato de ser tratado no texto que “nenhum número pode satisfazer tal condição” denota a falta de compreensão dos números negativos à época. Mesmo que sejam apresentadas no decorrer do compêndio regras de soma, subtração, multiplicação e divisão de sinais, elas parecem ser vistas de forma dissociada do número negativo em si. Tal evidência pode ser um indício de onde residem os entraves na discussão das soluções negativas.

O segundo problema proposto parte de uma problematização mais concreta, ou seja, de uma questão que apresenta situação da vida cotidiana, movimento de contextualização que é ocasionalmente feito no compêndio. A atividade retrata o seguinte acontecimento: “em quantos anos a idade do filho será a quarta parte da idade do pai?” Na solução, é denominado como *x* o número de anos que o problema pede. Assim, a idade do pai, no fim de uma determinada quantidade de tempo, será $a + x$ e a do filho, $b + x$. Com isso, ele define a equação $b + x = \frac{a+x}{4}$ e dela obtém novas equações por meio de manipulações algébricas, como seguem: $4b + 4x = a + x$, $3x = a - 4b$ e por fim $x = \frac{a-4b}{3}$.

Depois desse primeiro tratamento dado ao problema, dois resultados são supostos, o primeiro com $a = 45$ e $b = 9$, nesse caso os valores atendem perfeitamente a equação, resultando em $x = 6$, ou seja, sendo atualmente a idade do filho e do pai 9 e 54 anos respectivamente, em 6 anos essas idades serão 15 e 60. Sendo 15 a quarta parte de 60, esse problema possui $a = 45$ e $b = 9$ como resolução. Nos dois outros valores propostos como “possíveis” resultados para o problema, que são $a = 45\ e\ b = 15$, nesse caso, seguindo a equação supracitada, obteríamos $x = \frac{45-60}{3} = 15 - 20 = -5$. E aí vem o problema, o resultado negativo em um problema que não é facilmente aceitável, ao menos não de forma direta, o resultado menor que zero.

Diante disso, esta equação encerra contradição, porque reduzindo o segundo membro à forma $\frac{45}{4}+\frac{x}{4}$, ambas essas adições são menores do que as duas $15+x$; pelo que não podem as somas ser iguais. Portanto, o resultado negativo $x=-5$ indica impossibilidade, como no primeiro caso. Mudando, porém, x em $-x$, a equação se tornará em $15-x=\frac{45-x}{4}$, da qual se deduz $x=5$.

Mas não bastava essa manobra algébrica para que o problema pudesse ser solucionado e o enunciado deveria ser remodelado para o seguinte formato:

> Pois que nesta equação o intervalo de tempo x se subtrai das duas idades. Segue-se que ela exprime este problema: Sendo atualmente 45 a idade de um pai, 15 a de seu filho, pergunta-se: há quantos anos era a idade do filho a quarta parte da do pai. Enunciado que só difere do primeiro em que o intervalo decorrido se subtrai, em vez de somar-se as duas idades. Interpretação que coincide com a do resultado precedente (OTTONI, 1879, p. 59).

A forma como esse resultado é discutido demonstra que o livro não possui uma discussão detalhada acerca de soluções negativas, posto que os problemas até são tratados, mas de forma a estabelecer desfechos sem discuti-los com profundidade.

Figura 18: Theoria das quantidades negativas

Por muito obscuro que seja este raciocinio, parece que não o podem regeitar os que considerão as expressões negativas como quantidades. Todavia, é forçoso confessar que tirar de zero, 1, 2, 3, &c., são palavras que não exprimem idéa clara, nem podem levar aos espiritos a convicção dos principios enunciados.

Admittimos pois aquellas expressões, não como relações entre quantidades existentes, mas simplesmente como symbolos algebricos, resultante da convenção — applicar, *por extensão*, as regras d'Algebra ás expressões negativas.

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 65)

A autora Circe Mary Silva da Silva contextualiza o desenrolar dessas discussões no âmbito nacional e internacional. A autora menciona que os resultados negativos que permeiam o estudo da álgebra podem ser tratados como:

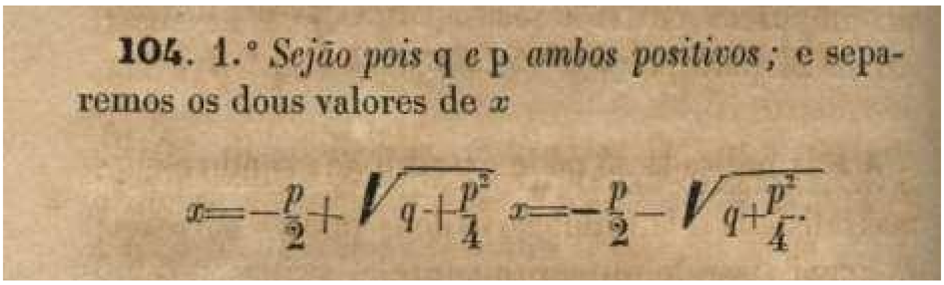
> temas espinhosos para os autores de livros didáticos e mesmo matemáticos na passagem do século XVIII para o século XIX e nos inícios do século XIX. Esses espinhos continuaram perturbando matemáticos, como Carl Friedrich Gauss, Augostin-Louis Cauchy (1879-1857), Bernard Bolzano (1781-1848), George Cantor (1845-1918) e Gottlob Frege (1848-1925) que, ao removê-los, trouxeram para a matemática novos objetos e mais beleza para os fundamentos dessa área do conhecimento (SILVA, 2011, p. 235)

Retomando a discussão em torno da seção do livro de Ottoni intitulada “Theoria das quantidades negativas”, vale ressaltar que as três obras consideradas no desenvolvimento da presente pesquisa (como mencionado, são essas a 1ª, 4ª e 8ª edições) não possuem diferença nessa etapa, todas apresentam a mesma explanação e os mesmos exemplos.

Não é restrita a esta etapa a discussão dos resultados negativos. As situações que demandam a retomada desse debate se espalham pelo compêndio. Um exemplo é a fórmula resolutiva para a equação do segundo grau, com o desafio de interpretar um número como negativo, o autor precisa apresentar várias equações que determinam as raízes, cada uma de acordo com o sinal dos coeficientes que compõem a equação.

.

Figura 19: Raiz da equação do segundo grau I



104. 1.° *Sejão pois* q *e* p *ambos positivos;* e separemos os dous valores de x

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}} \qquad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 118)

Figura 20: Raiz da equação do segundo grau II

105. 2.° *Seja ainda* q *positivo, mas* p *negativo.* A equação tomará a fórma

$$x^2-px=q\text{; donde } x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}:$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 119)

Figura 21: Raiz da equação do segundo grau III

106. 3.° *Seja agora* q *negativo e* p *positivo.* A equação será da fórma

$$x^2+px=-q\text{, donde } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 119)

Figura 22: Raiz da equação do segundo grau IV

107. 4.° *Sejão finalmente* q *e* p *ambos negativos.* Teremos a equação $x^2-px=-q$, e os dous valores

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\text{, e } x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ambos positivos.

N. B. Este ultimo caso merece particular attenção.

A equação respectiva mudando-lhe os signaes, se torna

$$px-x^2=q\text{, ou } x(p-x)=q$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – 1ª edição (1852, p. 119-120)

Nessa etapa do livro, o autor menciona uma equação geral da forma $x^2+px-q=0$, onde os resultados são representados por x' e x''. Na discussão desses resultados, Ottoni ressalta que os valores de x só serão reais, "só poderão ser avaliados exatamente ou por aproximação" (OTTONI, 8°, p.161), quando o radical das expressões supracitadas for positivo. Mesmo com diversos resultados, cada um de acordo com determinada combinação de resultados, nas edições iniciais são mencionados ainda casos particulares. "Além das hypotheses até agora feitas, a respeito dos signaes de *p* e de *q*, podem ocorrer circumstancias particulares, dependentes das grandezas representadas por essas duas letras" (OTTONI, 4°, p. 121).

Na oitava edição, é possível observar uma seção que muito se aproxima do que hoje denominamos fórmula de Bháskara. Chama atenção o fato de a fonte ser diferente da utilizada no restante do livro e nas edições anteriores. A incomodo em operar com os números negativos conduz Ottoni a não utilizar a mesma fórmula e processo resolutivo de uma equação do 2° grau, necessitando apresentar as quatro fórmulas em todas as edições, inclusive na última, onde já se tinha uma fórmula que sozinha dava conta de determinar todos os resultados independentemente do sinal dos coeficientes da equação. (Figura 23)

Figura 23: Raiz da equação do segundo grau V

Sendo ao mesmo tempo $q=0$, e $p=0$, teremos $x=0$, $x=0$.

Qualquer destes tres resultados se verifica introduzindo a hypothese respectiva na equação geral $x^2+px=q$, e resolvendo-a de novo.

Por nos parecer interessante apresentamos aqui outra marcha para discutir a equação do segundo gráo.

Seja a equação

$$mx^2+nx+p=0 \qquad (I);$$

resolvendo-a temos

$$x=-\frac{n}{2m}\pm\sqrt{\frac{n^2-4mp}{4m^2}}$$

ou

$$x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mp}}{2m} \qquad (II)$$

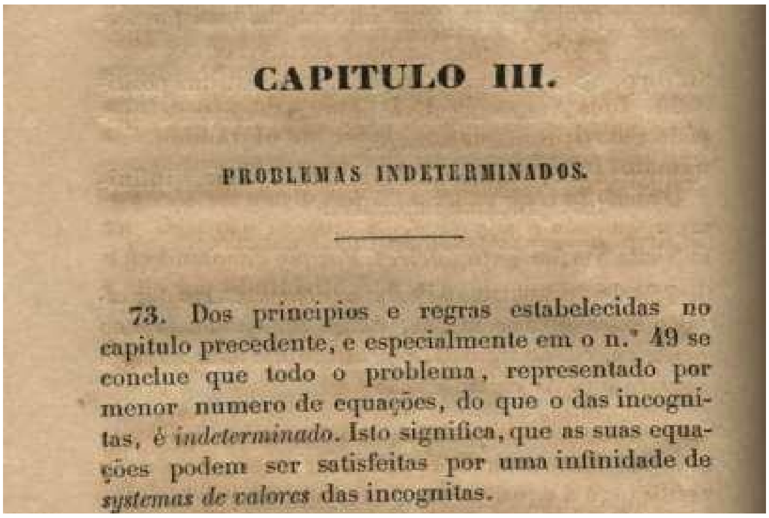
Fonte: *Elementos de Álgebra* – 8ª edição (1892, p. 65)

Observa-se nessa etapa uma preocupação com a discussão dos sinais relativos às grandezas, porém é possível aferir que nesse momento foi possível desenvolver maior generalização. Simultaneamente à apresentação desse resultado, estão os apresentados acima (nas figuras 19, 20,21 e 22) e que encontram-se em todas as edições analisadas, o que demonstra familiaridade do autor e possivelmente das pessoas que consumiam o livro com as diversas formas de se obter a raiz de uma equação do segundo grau.

5.4. PROBLEMAS IMPOSSÍVEIS E PROBLEMAS INDETERMINADOS

No compêndio *Elementos de Álgebra*, mais especificamente no capítulo 3, é discutida a natureza das soluções de problemas indeterminados. Neste capítulo, Ottoni não usa o termo “regra geral” e também não propõe exercícios, apenas expõe o conteúdo, dividindo-o em duas seções: problemas indeterminados com duas incógnitas e problemas indeterminados com três ou mais incógnitas. Ottoni não separa um capítulo para tratar dos problemas impossíveis e aborda essa temática contextualizada com os problemas de equações do primeiro grau, na seção que ele denomina “Discussão de alguns problemas”.

Figura 24: – Problemas Indeterminados 1 (Ottoni)



CAPITULO III.

PROBLEMAS INDETERMINADOS.

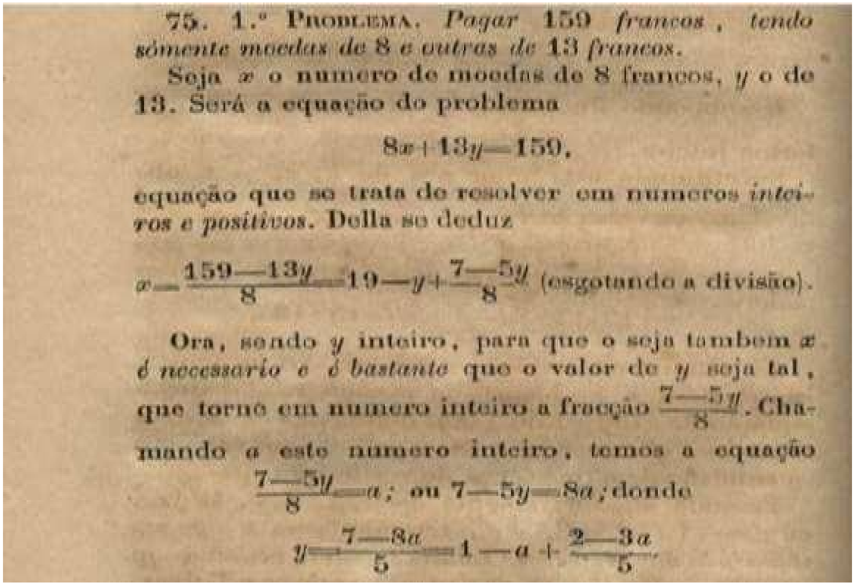
73. Dos principios e regras estabelecidas no capitulo precedente, e especialmente em o n.° 49 se conclue que todo o problema, representado por menor numero de equações, do que o das incognitas, é *indeterminado*. Isto significa, que as suas equações podem ser satisfeitas por uma infinidade de *systemas de valores* das incognitas.

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 82)

Após esta contextualização inicial, é dito que resolver em números inteiros os problemas do 1° grau é o objeto do capítulo 3, os problemas que dispostos consideram mais uma incógnita do que o número de equações caracteriza um problema indeterminado.

A princípio são mencionadas as questões de duas incógnitas, para elucidar a problematização estabelecida no compêndio, será apresentado o problema utilizado na explicação deste conteúdo.

Figura 25: Problemas Indeterminados duas incógnitas (Ottoni)



75. 1.º PROBLEMA. *Pagar 159 francos, tendo sómente moedas de 8 e outras de 13 francos.*

Seja x o numero de moedas de 8 francos, y o de 13. Será a equação do problema

$$8x+13y=159,$$

equação que se trata de resolver em numeros *inteiros e positivos*. Della se deduz

$$x=\frac{159-13y}{8}=19-y+\frac{7-5y}{8} \text{ (esgotando a divisão).}$$

Ora, sendo y inteiro, para que o seja tambem x *é necessario e é bastante* que o valor de y seja tal, que torne em numero inteiro a fracção $\frac{7-5y}{8}$. Chamando a este numero inteiro, temos a equação

$$\frac{7-5y}{8}=a; \text{ ou } 7-5y=8a; \text{ donde}$$

$$y=\frac{7-8a}{5}=1-a+\frac{2-3a}{5}.$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 82)

É interessante na interpretação deste problema conhecer as moedas disponíveis do franco, no entanto é possível analisar a linha de raciocínio do autor ao observamos o desenvolvimento algébrico e notarmos que, obtida a expressão $x = \frac{7+5y}{8}$, devemos ter *y* tal que a equação assuma um valor inteiro e, nesse sentido, diversos valores atenderiam essa restrição, portanto, o exemplo apresentado caracteriza-se como um problema indeterminado.

Em seguida, são mencionados os problemas indeterminados com três ou mais incógnitas. Para tratar do tema também, será discutido um exemplo exposto no compêndio.

Figura 26: Problema Indeterminado três ou mais incógnitas (Ottoni)

3.º PROBLEMA. *Tendo-se moedas de ouro do valor de 20$, 16$ e 9$ réis, quer-se prefazer a quantia de 750$ em 47 moedas dos tres valores.*

N. B. Tomando por unidade *um mil réis*, as quantias que figurão no problema ficão reduzidas a 20, 16, 9, 750, supprimidas em cada uma tres zeros. Esta simplificação occorre muitas vezes nos calculos da nossa moeda.

As equações do problema são

$$x+y+z=47$$
$$20x+16y+9z=750$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 92)

Para a resolução do problema, é sugerida uma manipulação de forma a eliminar a incógnita z, cuja operação é multiplicar a primeira equação por 9 e subtrair o resultado da segunda, assim formando a equação $11x + 7y = 327$.

Figura 27: Problema Indeterminado três ou mais incógnitas II (Ottoni)

$11x+7y=327$, da qual $y=\frac{327-11x}{7}=46-x+\frac{5-4x}{7}$:

Seja $\frac{5-4x}{7}=a$, teremos $x=\frac{5-7a}{4}=1-2a+\frac{1+a}{4}$

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 92)

A solução apresentada se assemelha à de equações com duas incógnitas, são realizadas manipulações para que seja possível discutir os resultados e concluir a possibilidade de mais soluções.

Figura 28: Problema Indeterminado três ou mais incógnitas III (Ottoni)

e fazendo as substituições em x e y, e na 1.ª equação

$$x=1-8b+2+b=3-7b$$
$$y=46-3+7b+4b-1=42+11b$$
$$z=47-3+7b-42-11b=2-4b.$$

N. B. Por ter z na 1.ª equação o coefficiente 1, o seu valor se achou logo de fórma inteira: se assim não fosse, proseguiria a transformação do valor de z, e nos de x e y se substituiria por b o seu valor, expressso na ultima indeterminada.

Examinando os tres valores das incognitas, concluimos:

1.° Sendo b positivo, para que o sejão x e z é preciso que seja $7b<3$, e $4b<2$; ou $b<\frac{3}{7}$, $b<\frac{2}{4}$: logo, devendo b ser inteiro, não póde ter valor algum positivo.

2.° sendo $b=0$; $x=3$, $y=42$, $z=2$, 1.ª solução do problema.

3.° Se fôr b negativo, serão positivos x e z, porém y unicamente no caso de ser $11b<42$, ou $b<3\frac{9}{11}$. Isto é, que são sómente admissiveis as hypotheses $b=-1,-2,-3$. Mais tres soluções.

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 93)

Os resultados apresentados e a discussão realizada evidenciam um compêndio que apresenta explicações detalhadas e é direto em suas explicações, o que remete ao legado que Ottoni menciona, em sua *Autobiografia,* ter deixado com a produção de seus livros.

5.5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

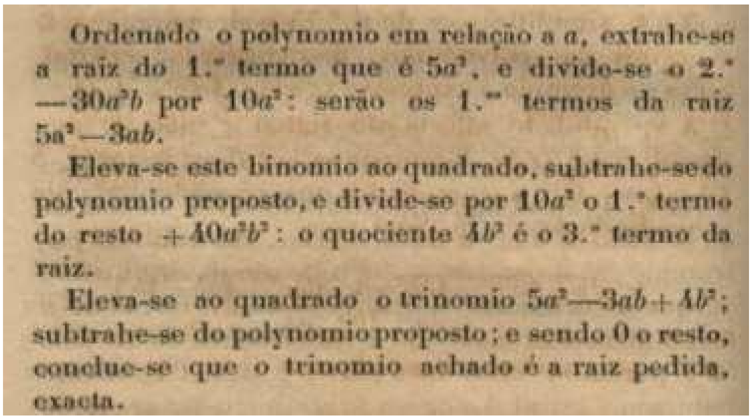
Ao tratar da Álgebra nos tempos atuais, logo pensamos nas funções e nas suas diferentes formas de representar relações numéricas por meio do uso de variáveis. Nos livros analisados, é possível observar uma aproximação entre o que atualmente concebemos como funções com os problemas indeterminados que se encontram discutidos nos compêndios em questão.

Em Ottoni, podemos observar um problema exemplo para tratar desse conteúdo. O autor apresenta a equação $x^2 = \frac{a}{b}$ e afirma que os princípios discutidos nos capítulos precedentes (operações algébricas e problemas do primeiro grau, respectivamente) não são suficientes para achar soluções de problemas dessa natureza. Ele trata também do porquê de recorrermos à álgebra para solucionar tal questão.

> Se em lugar de b e a tivéssemos na equação números particulares, a extração da raiz seguiria as regras da Aritmética: tratando-se porém de equações literais, convém antes de entrar na sua resolução estabelecer os preceitos relativos a extração da raiz quadrada das quantidades algébricas ou literais (OTTONI, 1852. p. 98).

Nessa etapa não são apresentados exemplos para discutir as proposições anteriormente citadas, e o livro segue para debater o tema "Formação do quadrado, e extração da raiz de quantidades algébricas, cálculo dos radicais do segundo grau" (OTTONI, 1852, p. 99). Nessa etapa, o autor trata inicialmente da extração de raízes de monômios. O exemplo dado é do $\sqrt{64a^6b^4}$, além de apresentar o resultado $8a^3b^2$ é calculado o seu quadrado, como uma comprovação de que o resultado obtido de fato se verifica. Outros exemplos são dados até que o autor discute a determinação da raiz quadrada de um polinômio, nesta etapa é observável clareza na exposição do compêndio adaptado por Ottoni e uma preocupação com a apresentação da forma de se obter os resultados, como representado nas imagens a seguir

Figura 29: Raiz quadrada de um polinômio I



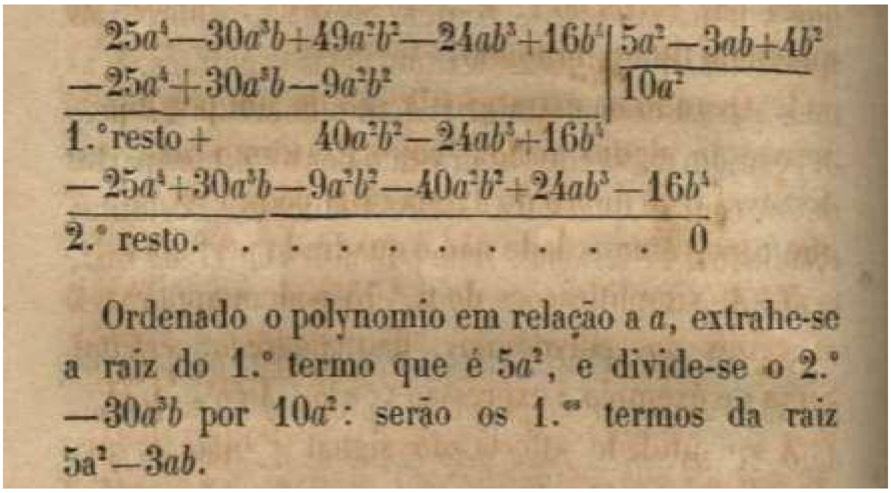
Ordenado o polynomio em relação a a, extrahe-se a raiz do 1.º termo que é $5a^2$, e divide-se o 2.º $-30a^3b$ por $10a^2$: serão os 1.os termos da raiz $5a^2-3ab$.

Eleva-se este binomio ao quadrado, subtrahe-se do polynomio proposto, e divide-se por $10a^2$ o 1.º termo do resto $+40a^2b^2$: o quociente $4b^2$ é o 3.º termo da raiz.

Eleva-se ao quadrado o trinomio $5a^2-3ab+4b^2$; subtrahe-se do polynomio proposto; e sendo 0 o resto, conclue-se que o trinomio achado é a raiz pedida, exacta.

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 104)

Figura 30: Raiz quadrada de um polinômio II



$$\begin{array}{l|l} 25a^4-30a^3b+49a^2b^2-24ab^3+16b^4 & 5a^2-3ab+4b^2 \\ -25a^4+30a^3b-9a^2b^2 & 10a^2 \\ \hline 1.^{\circ}\text{resto} + \quad 40a^2b^2-24ab^3+16b^4 & \\ -25a^4+30a^3b-9a^2b^2-40a^2b^2+24ab^3-16b^4 & \\ \hline 2.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & \end{array}$$

Ordenado o polynomio em relação a a, extrahe-se a raiz do 1.° termo que é $5a^2$, e divide-se o 2.° $-30a^3b$ por $10a^2$: serão os 1.os termos da raiz $5a^2-3ab$.

Fonte: *Elementos de Álgebra* –1ª edição (1852, p. 104)

Esta etapa se assemelha à discussão trazida na determinação do maior divisor comum de um polinômio, tendo em vista que não são resultados trabalhados no ensino secundário atual, mas que no livro recebem atenção do autor. A discussão do procedimento é breve e detalhada como apresenta a figura 19. Ao finalizar a exposição do conteúdo, são apresentadas três afirmativas: “1ª Um monômio não pode ser quadrado de um polinômio. 2ª Um binômio nunca pode ser quadrado perfeito. Um trinômio só pode ser quadrado perfeito, sendo quadrados 1° e 3° termos” (OTTONI, p. 105, 1852).

5.6. A APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA

Na obra *Elementos de Álgebra,* o capítulo VI é denominado “Aplicação dos princípios da Álgebra às progressões e logaritmos” e menciona em seu início: “Este capítulo completo os conhecimentos de Álgebra absolutamente indispensáveis ao estudo da Trigonometria e da Applicação da Álgebra à Geometria” (OTTONI, 1852, p. 169).

O destaque da obra nessa etapa é a ênfase na abordagem para a teoria dos logaritmos, que se encontra extensivamente discutida. Ottoni inicia a etapa final dos seus compêndios – parte do livro destinada a tratar das aplicações da Álgebra – tratando de progressões, como podemos ver nas imagens a seguir.

No compêndio *Elementos de Álgebra*, a teoria dos logaritmos aparece no título do capítulo e é amplamente discutida após exemplos e exposição do conteúdo de progressões por diferenças (que seriam as progressões aritméticas) e progressões por quocientes (que seriam as progressões geométricas).

Nessa etapa do texto, o autor também disponibiliza exercícios com as respostas, mas sem a resolução, e convida os usuários de sua obra a solucionarem para treinar suas habilidades nesse conteúdo. O que se observa de diferente nesta última etapa do livro *Elementos de Álgebra* é que o autor não fala mais em regra geral, isso evidencia que, nesse momento, ele fala em uma matemática aplicada que se distancia de alguma forma da característica generalizadora dos primeiros capítulos do compêndio. Tal aplicação se consolida no cálculo dos juros, mais especificamente, em exemplos que lançam mão do uso dos logaritmos e progressões.

Um exemplo de problema é o seguinte: Sabendo que a população de um determinado país cresce a cada ano um centésimo do que era no fim do precedente, pergunta-se em quantos anos se tornará dez vezes maior? Nessa resolução, o autor recorre ao uso de logaritmos e aplicação direta da propriedade, como apresentado na imagem:

Figura 31: Exercício Logaritmos

Chamando r a porcentagem do augmento annual da população, é claro que póde ter aqui applicação a formula dos juros compostos

$$C=c(1+r)^t$$

dando por valores a c e C os algarismos de população no principio e no fim do periodo, e a t o numero de annos. Assim no caso proposto $C=10c$; $r=0,01$; e substituindo

$$10c=c(1,01)$$

$$\text{donde } t=\frac{lg\,10}{lg\,1,01}=231.$$

Fonte: *Elementos de Álgebra* – Ottoni – 1ª edição (1856, p. 207)

Mesmo utilizando a fórmula para resolver o problema proposto, o autor apresenta sua solução à interpretação do problema por meio das sequências, nesse caso a partir do que consideramos nos dias atuais como progressão geométrica.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretende contribuir para o estudo do desenvolvimento da álgebra escolar no Brasil durante a segunda metade do século XIX, através da obra *Elementos de Álgebra*, de Cristiano Ottoni, aprovada para o Colégio Pedro II no Rio de Janeiro, que era a escola de referência para os estabelecimentos escolares brasileiros restantes da época.

Foram colocadas duas questões específicas:

1) De que alternativas didáticas a obra lança mão para apresentar o conteúdo algébrico?

2) Que características da disciplina álgebra escolar estão presentes na obra compilada por Ottoni?

O que parece consubstanciar a ressonância da obra *Elementos de Álgebra* pode ser a clareza, a riqueza de exemplos, os exercícios propostos e a sequenciação dos conteúdos. Existe na obra em questão um percurso até os resultados matemáticos, que pode ser compartimentado nas seguintes etapas: apresentação do conteúdo, exemplos, exercícios e sistematização do conteúdo por meio da "regra geral". Essa é uma característica da obra de Ottoni, que é assim estruturada em quase todos os capítulos, com exceção de partes introdutórias que não possuem exercícios e em seções destinadas à aplicação da álgebra, onde não há a regra geral.

Um elemento de destaque da obra é a "regra geral", que realça seu caráter de formalização, uma vez que, ao fim de suas explicações, retoma conceitos abordados. Essa opção fornece indícios de que talvez haja, por parte do autor, uma preocupação com a compreensão do usuário, que por sua vez é viabilizada, nessas etapas, por meio de uma sistematização didática.

Destaques também devem ser dados a um elemento presente em todas as edições, porém com pequenas modificações na oitava edição: A fórmula resolutiva da equação do segundo grau, ou melhor, as fórmulas resolutivas. Em todas as edições temos diversas fórmulas para determinar as raízes da equação do segundo grau, e isso pode ser justificado pelo fato de haver uma incomodidade de operar com os números negativos, o que conduz o autor a não utilizar a mesma fórmula e processo resolutivo de uma equação do 2° grau, necessitando apresentar as quatro fórmulas em todas as edições, inclusive na última, onde já se tinha uma fórmula que sozinha dava conta de determinar todos os resultados, independente do sinal dos coeficientes da equação.

A obra de Ottoni demonstra processos didáticos parecidos com os dos dias atuais quando apresenta exercícios, sistematizações, exemplos resolvidos, aplicações de assuntos matemáticos a problemas financeiros e de crescimento populacional, características permanentes nas obras contemporâneas.

Podemos observar, no entanto, que na obra analisada há uma disciplina em estágio ainda inicial, que busca alicerces argumentativos para justificar resultados complexos para quem estava iniciando na área. Os cuidados nas explicações presentes na seção “Theoria das quantidades negativas” dão substância a essa afirmação, onde um longo caminho é percorrido pra justificar resultados que podem não ser diretos a todos os leitores da obra. Outro elemento possível de se destacar é que faltavam ao escritor recursos didáticos para abreviar tais explicações, como uma noção mais profunda de conjuntos e de elementos de operacionalidade, pois mesmo que esses elementos sejam mencionados na obra, o autor não lança mão deles na discussão dos resultados negativos.

Acerca do contexto político em que essa obra fora dotada precisamos mencionar a reforma Couto Ferraz pode ser considerada a impulsão para o amplo uso da obra, tendo em vista as modificações no sistema de ensino, principalmente no que diz respeito a orientação de que compêndios nacionais estejam presentes nas instituições públicas de ensino da época.

A análise do livro didático fornece indícios de que a álgebra apresentada nesse compêndio possui aproximações com a ensinada nos dias atuais. Contudo os conteúdos priorizados e alguns métodos utilizados estão obsoletos nos livros didáticos contemporâneos, como, por exemplo, a extração de raiz quadrada de um polinômio e a determinação das raízes de uma equação do segundo grau utilizando variadas fórmulas. Tais métodos são apresentados na obra por meio de mecanismos complexos, que não são utilizados nos dias de hoje, devido a avanços nos procedimentos algébricos que se fazem presentes no cotidiano escolar.

REFERÊNCIAS

BELTRAME, J. **Os Programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II: 1827-1932. 2000**. 259f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2000.

BÉZOUT, E. **Elementos de Analyse**. 2. ed. Coimbra: Real Imprensa da Universidade, 1794. 326 p. Disponível em: https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/9107/item2_index.html

BURKE, P; tradução: Sérgio Goes de Paula. **O que é história cultural?** 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

CHARTIER, R. **A história ou a leitura do tempo**. Trad. Cristina Antunes. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

CHARTIER, R. **A “nova” História Cultural**. In: GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil: sob o signo da pluralidade. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 11-18.

CHOPPIN, Alain. **O historiador e o livro escolar. História da Educação**, Pelotas, v. 1, p. 5-24, abr. 2002.

COELHO, FLÁVIO ULHOA e AGUIAR, MARCIA. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados** [online]. 2018, v. 32, n. 94 [Acessado 3 Maio 2022] , pp. 171-187. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013>. ISSN 1806-9592. https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013.

SILVA, C. M. S. da. OS ESPINHOS DA ÁLGEBRA PARA LACROIX. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 1, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/3527. Acesso em: 26 jul. 2024.

GINZBURG, Carlo; tradução Federico Carotti. **Mitos, emblemas, sinais, morfologia e história: raízes de um paradigma indiciário**. Companhia das Letras, p. 143-179, 1989.

GRABINER, Judith V. **Encyclopedia.com**. Disponível em: https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/bezout-etienne. Acesso em: 25 fev. 2022.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. **Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação**. Capítulo 3. In: VALENTE, W. R.;

HOFSTETTER, R. Saberes em (trans)formação: um tema central da formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 113-172.

HUNT, Lynn. The **New Cultural History**. London: Editor, 1989. LINS, Romulo Campos. Perspectiva em Aritmética e Álgebra para o século XXI. 4. ed. Campinas - SP: Papirus, 2001. 177 p.

LUSSI BORÉR, Valérie. **Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores**. In: Hofstetter, R. e Valente, W.R. (Ed). Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores. São Paulo, 2017, p. 173-199.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de. Elementos de profissionalidade em livros de Desenho Linear do século XIX. **Zetetiké**, Campinas, v. 27, p. 1-14, maio 2019.

OTTONI, 1852. **Elementos de Álgebra**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Nicolau Alves e Henrique Laemmert.

OTTONI, 1879. **Elementos de Álgebra**. 4ª edição. Rio de Janeiro: Eduardo & Henrique Laemmert.

OTTONI, 1855. ***Elementos de Arithmetica***. 2ª edição. Rio de Janeiro: Laemmert, 1855. Disponível em: <http://eudml.org/doc/203622>.

OTTONI, 1857. ***Elementos de Geometria e trigonometria rectilinea***. 2ª edição. Rio de Janeiro: Laemmert. Disponível em: <http://eudml.org/doc/203876>.

PONTE, João Pedro da; GUIMARÃES, Henrique Manuel. Notes for a History of the Teaching of Algebra. In: KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert. **Handbook on the History of Mathematics Education**. New York: Springer, 2014. p. 1-634.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revemat**, Santa Catarina, v. 2, n. 2, p. 28-49, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Oito Temas Sobre História da Educação Matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n. 12, p. 22-50 Jan – Jun. 2013.

VALENTE. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil**. 2. ed. São Paulo: Fapesp, 2002.

ANEXO A – Bézout e sua obra Elementos de Álgebra

Bézout nasceu em França, na cidade de Nemours em 1739, segundo (Grabiner, 2022), Étienne Bezout foi o segundo filho de Pierre Bezout e Hélène-Jeanne Filz. Tanto seu pai quanto seu avô haviam ocupado o cargo de magistrado (*procureur aux baillage et juridiction)*.

> Em 1763, o due de Choiseul ofereceu a Bezout um cargo de professor e examinador em ciências matemáticas para jovens aspirantes a oficiais navais, os Gardes du Pavillon et de la Marine. [...]. Entre seus trabalhos publicados estão os cursos de palestras que ministrou para esses alunos. A orientação desses livros é prática, pois se destinavam a instruir as pessoas na matemática elementar e na mecânica necessária à navegação ou à balística. A experiência de ensinar não-matemáticos moldou o estilo dos trabalhos: Bezout tratou a geometria antes da álgebra, observando que os iniciantes ainda não estavam familiarizados o suficiente com o raciocínio matemático para entender a força das demonstrações algébricas, embora apreciassem as provas em geometria. Ele evitou os termos assustadores “axioma”, “teorema”, “escólio” e tentou evitar argumentos muito próximos e detalhados (GRABINER, 2022).

Fonte: Wikipédia

A sua obra de Bézout constituiu referência no Brasil. Bézout é reconhecido por organizar os seus compêndios numa maneira simples e clara, de maneira a discutir de forma ampla os conteúdos e apresentar ampla variedade de exemplos resolvidos em todos os capítulos de seu tomo. "Esta preocupação com a clareza e explanação dos conceitos era totalmente defendida por D'Alembert, um dos ideólogos do ensino da matemática na França do século XVIII. (ARAUJO; FONSECA, 2017, p. 213).

Os livros de Bézout são obras mais sofisticadas que as de Alpoim, Valente (2002) aponta que diferentemente do livro de Alpoim, os livros de Bézout representam uma universalização da matemática escolar ensinada na Europa. São verdadeiros tratados das matemáticas escolares elementares. Além disso, pode-se destacar como uma marca importante do livro de Bézout, em relação aos livros anteriores, o status de independência que ele confere a matemática escolar em relação às práticas militares, o que permite que diversas instituições não militares utilizem tal obra como referência.

> Enquanto em Alpoim a matemática constituía uma espécie de apêndice dos ensinamentos militares, em Bélidor e Bézout a matemática, nos cursos militares, irá ganhar independência com autonomia relativa em relação às práticas militares. Isso explicará porque Bézout, sobretudo, será um autor adotado em diversos cursos não militares e chegará até [...] o final quase do século XIX nos liceus e colégios da Europa, EUA e Brasil (VALENTE 2002, p.87).

Diante disso, tem-se uma marca do trabalho de Bézout, uma apresentação da matemática pela matemática, esse movimento sugere uma consolidação desta disciplina escolar, que à época encontrava-se dividida em álgebra, aritmética e geometria.

O compêndio de Bézout é iniciado tratando da apresentação de conceitos preliminares da álgebra, trazendo explicação e exemplos, em seguida, tal obra adentra no conteúdo do capítulo I que versa das operações com polinômios.

Bézout, na resolução dos problemas apresentados em sua obra lança mão de muitas páginas, fazendo sempre uma discussão ampla acerca dos procedimentos matemáticos ali adotados. Na seção problemas impossíveis e indeterminados Bézout inicia nomeando seu capítulo da seguinte maneira: “dos casos em que os problemas ficam indeterminados, ainda que haja número de equações, e de incógnitas” para discutir essa temática ele apresenta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 17 \\ 8x + 2y + 4z &= 20 \\ 18x + 8y + 8z &= 54 \end{aligned}$$

Fonte: *Elementos de Analyse* – 2ª edição (1794, p.70)

Bézout argumenta que o sistema apresentado seria indeterminado, pois os coeficientes da terceira equação são uma soma da segunda com o dobro da primeira. Devido a essa relação, não há uma nova condição, nesse caso existem apenas duas equações apresentando resultados significativos para efeito de cálculo, o que determina que se tem apenas duas equações e três incógnitas, o que indetermina o problema. Bézout apresenta outros exemplos nos quais isso ocorre e determina que nesses casos estaremos diante de um sistema indeterminado, ainda que haja igual número de equações e de incógnitas.

Bézout discute de maneira clara as operações com polinômios, apresentando bastante exemplos numéricos, o que fica evidenciado é que em sua obra as operações básicas da matemática, envolvendo polinômios são uma prioridade.

Dividendo - -	$aa - bb$	$a + b$	Diviſor
	$-aa - ab$	$a - b$	Quociente
Reſto - - -	$-ab - bb$		
	$+ab + bb$		
Reſto - - - - - -	0		Ten-

Fonte: *Elementos de Analyse* – 2ª edição (1794, p.24)

Exemplo II.

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - b^3 & a - b \\ \hline
-a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline
+a^2b - b^3 & \\
-a^2b + ab^2 & \\ \hline
+ab^2 - b^3 & \\
-ab^2 + b^3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

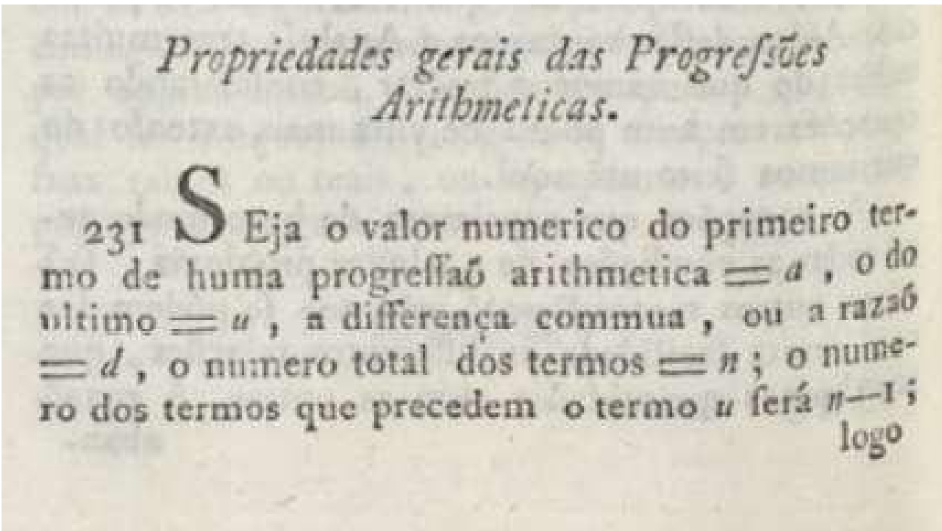
Exemplo III.

$$\begin{array}{l|l}
8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 & 4a^2 + 5ab + b^2 \\ \hline
-8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 & 2a^2 - 3ab \\ \hline
-12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 & \\
+12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Fonte: *Elementos de Analyse* –2ª edição (1794, p.25)

Na sua obra o que se tem é uma aprofundada discussão da operação com polinômios, após isso o autor trata das equações, problemas impossíveis e indeterminados, problemas do segundo grau e aplicações e só a partir daí retoma a discussão das operações com monômios e polinômios para tratar do cálculo de radicais.

Bézout trata das progressões aritméticas, em seguida entra no conteúdo das progressões geométricas e dá um exemplo de uma aplicação do conteúdo por meio de um exercício que envolve cálculo de capital com juros e para a resolução utiliza logaritmos e não retoma mais em aplicações dessa natureza.



Propriedades gerais das Progreſsões Arithmeticas.

231 SEja o valor numerico do primeiro termo de huma progreſſaõ arithmetica $= a$, o do ultimo $= u$, a differença commua, ou a razaõ $= d$, o numero total dos termos $= n$; o numero dos termos que precedem o termo u ſerá $n-1$; logo

Fonte: *Elementos de Analyse* – Bézout – 2ª edição (1794, p. 211)

Bézout trata das progressões aritméticas, em seguida entra no conteúdo das progressões geométricas e dá um exemplo de uma aplicação do conteúdo por meio de um exercício que envolve cálculo de capital com juros e para a resolução utiliza logaritmos e não retoma mais em aplicações dessa natureza.