UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O uso da resolução de problemas relacionando conteúdos de Cálculo às práticas em Matemática da Educação Básica

Marco Aurélio dos Santos Silva

Juiz de Fora -MG
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Marco Aurélio dos Santos Silva

O uso da resolução de problemas relacionando conteúdos de Cálculo às práticas em Matemática da Educação Básica

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Escher

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Juiz de Fora -MG
2024

Silva, Marco Aurélio dos Santos.

"O uso da Resolução de Problemas relacionando conteúdos de Cálculo às práticas em matemática da Educação Básica / Marco Aurélio dos Santos Silva. -- 2024.

94 p.

Orientador: Marco Antônio Escher

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Matemática Básica. 2. Ensino de Cálculo. 3. Resolução de Problemas. 4. Educação Matemática. I. Escher, Marco Antônio, orient. II. Título.

Marco Aurélio dos Santos Silva

O uso da resolução de problemas relacionando conteúdos de Cálculo às práticas em Matemática da Educação Básica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Aprovada em 18 de dezembro de 2025.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marco Antônio Escher
Orientador UFJF

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
Convidado interno UFJF

Prof. Dra. Lígia Arantes Sad
Convidada externa IFES

Juiz de Fora, 18 de dezembro de 2025.

Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Escher**, **Professor(a)**, em 13/02/2025, às 18:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ligia Arantes Sad**, **Usuário Externo**, em 14/02/2025, às 10:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchiades da Silva**, **Professor(a)**, em 14/02/2025, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2155316** e o código CRC **583FF573**.

Dedico estes escritos à minha família, à minha esposa Rubia, que sempre me apoiou e, principalmente, aos meus filhos, Melissa e Murilo.

AGRADECIMENTOS

“Se cheguei até aqui, foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.” Foi muito difícil todos estes anos, muitos obstáculos, muitas mudanças e, ainda, tudo somado a uma vida corrida de um homem que se divide entre professor (chegando a mais de cinquenta horas-aula semanais), marido, pai, filho, irmão e amigo. Não foi fácil! Mas a educação nos alicerça a querer buscar cada vez mais.

Por isso, agradeço a todos que me deram incentivo.

Primeiramente, quero agradecer a Deus, que sempre se faz presente na minha vida, amparando-me nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram.

À minha esposa, Rubia, que sempre compreendeu e esteve ao meu lado nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, Melissa e Murilo, por sempre me presentearem com um sorriso, dando-me força quando, muitas vezes, estava esgotado. Vocês são muito especiais para mim!

Agradeço ainda à banca examinadora que com toda a sua experiência e dedicação teve uma contribuição valorosa para este trabalho.

E agradeço ao meu orientador, Prof. Marco Antônio Escher, aquele que sempre esteve ali, pronto para me auxiliar e sempre me incentivando durante todos os momentos difíceis que passei. Tornou-se um grande exemplo para mim, foi um “gigante”.

RESUMO

Diante da percepção do distanciamento do ensino do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura em Matemática em relação à prática do professor de Matemática da Educação Básica, esta pesquisa busca tecer um cenário investigativo quanto à complexa dissonância entre “o que aprender” e “para que aprender”, de forma a repensar a disciplina no âmbito da licenciatura, tendo como principal objetivo analisar a relação entre o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral e a Matemática da Educação Básica. Essa investigação foi motivada pela seguinte questão norteadora: “Como relacionar conteúdos comumente trabalhados na disciplina de Cálculo à Matemática Básica por meio da Resolução de Problemas?”. Para responder a essa questão, foi realizada uma pesquisa qualitativa com a perspectiva de escutar professores de Matemática. Para isso, além das referências bibliográficas, aplicou-se um questionário gerado pelo Google Forms, tendo como universo professores de Matemática do município de Muriaé (MG) e região, bem como de Itaperuna e proximidades, num total de cinquenta e seis consultados. Pôde-se perceber que há concordância quanto à importância do estudo do Cálculo na licenciatura, mas também uma grande crítica quanto à necessidade de repensá-lo, de forma a torná-lo mais próximo da realidade da sala de aula nas escolas. A dissertação apresenta como proposta o uso da metodologia de Resolução de Problemas, em seu viés voltado para a aprendizagem através da resolução de problemas, o que resultou em um Produto Educacional que se preocupou em enfatizar problemas que deveriam ser mais explorados no estudo do Cálculo e que estão em harmonia com o conteúdo da Matemática da Educação Básica. Conclui-se que há uma necessidade de mudar o formato das aulas, uma vez que o ensino e a aprendizagem da Matemática ainda se mantêm enraizados na apresentação de fatos e exposição de resultados, em vez de abordagens problematizadas, o que incapacita o aluno de produzir sentido para os conhecimentos matemáticos.

Palavra-chave: Matemática Básica; Ensino de Cálculo; Resolução de Problemas, Educação Matemática.

ABSTRACT

Faced with the perception of the distance between the teaching of Differential and Integral Calculus and the practice of Mathematics teachers in Basic Education, this research seeks to weave an investigative scenario regarding the complex dissonance between "what to learn" and "what to learn it for", in order to rethink the discipline within the scope of the degree, with the main objective of analyzing the relationship between the content of Differential and Integral Calculus and the Mathematics of Basic Education. This investigation was motivated by the following guiding question: "How can content commonly taught in Calculus be related to basic mathematics through problem solving?". To answer this question, a qualitative study was carried out with the perspective of listening to math teachers. To do this, in addition to the bibliographical references, a questionnaire generated by Google Forms was applied to a total of fifty-six math teachers from the municipality of Muriaé (MG) and the surrounding region, as well as from Itaperuna and the surrounding area. It was clear that there is agreement on the importance of studying Calculus in undergraduate courses, but also a great deal of criticism about the need to rethink it, in order to bring it closer to the reality of the classroom in schools. The dissertation proposes the use of the Problem Solving methodology, in its bias towards learning through problem solving, which resulted in an Educational Product that was concerned with emphasizing problems that should be explored more in the study of Calculus and that are in harmony with the content of Mathematics in Basic Education. The conclusion is that there is a need to change the format of classes, since the teaching and learning of mathematics is still rooted in the presentation of facts and the exposition of results, rather than problematized approaches, which prevents students from making sense of mathematical knowledge.

Keyword: Basic Mathematics; Teaching Calculus; Problem Solving; Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando um professor recém-formado entra numa sala de aula pela primeira vez e se depara com todos aqueles alunos, curiosos por saber qual é a sua disciplina, qual a sua metodologia, enfim, conhecê-lo, sempre é uma experiência que fica marcada para a sua vida. É o momento em que ele tem a oportunidade de "testar" tudo aquilo que aprendeu ao longo da sua licenciatura.

Porém, é também o momento em que se verifica que não existe um molde único para se dar aula. A sala de aula é um ambiente extremamente desafiador, o que exige uma característica dinâmica do professor. São momentos de interrogações, medos, incertezas, enfim, ser professor é viver cada dia preparado para resolver os mais variados problemas. Segundo Rubem Alves, "ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais" (ALVES, 2005, p. 4).

Graduei-me em Licenciatura em Física inicialmente e, em seguida, em Matemática, na Faculdade Santa Marcelina Muriaé. Juntamente com a Licenciatura em Matemática, fiz uma especialização em Educação Matemática na mesma instituição.

Porém, era funcionário público na área administrativa e, como ocupava um cargo efetivo, continuei até surgir uma oportunidade de ser professor. Como resido em uma cidade do interior de Minas Gerais, havia um grande número de professores atuando na área naquela época, e não era garantido que eu conseguiria uma escola com facilidade para lecionar. Assim, como já havia prestado concurso público para o cargo de professor de Matemática na rede estadual, sendo aprovado, aguardava minha vaga. Nesse período, como já possuía um cargo administrativo efetivo, esperei minha convocação. Agora, era uma questão de tempo.

Nesse ínterim, recebi um convite para lecionar na mesma instituição na qual me formei. Ora, estar junto aos meus professores, os quais sempre admirei, era algo muito honroso para mim. Quando a diretora me informou que eu iria lecionar Cálculo Diferencial e Integral, tive uma das maiores alegrias da minha vida. Era a disciplina que mais gostava, não sei se pelo professor ou pelo próprio cálculo. Acredito que seja a junção desses dois fatores, especialmente o professor.

Esse professor de Cálculo era um senhor de fala baixa, de poucas palavras, mas que conseguia ter um respeito imenso por todos os seus alunos. Respeito e admiração. “Sagradas”, as aulas eram sempre às quintas e sextas-feiras, quando ninguém deixava de estar presente. Ele tinha um caderno com as anotações de suas aulas, um material que já demonstrava traços de anos de uso como ferramenta.

Ao lembrar-me dele e ao assumir as aulas, questionei-me como conseguiria me assemelhar àquela figura a quem tantos admiravam e que agora eu substituía. Sabia que não seria fácil. Então, minha primeira ação foi recorrer àquele material que ele sempre usara ao longo dos anos. Como minhas anotações enquanto aluno não eram muito organizadas, recorri a uma colega que tinha tudo minuciosamente anotado. Considerei, no primeiro ano, seguir “à risca” todo aquele formato padrão com o qual havia aprendido.

Contudo, ao me preparar para as aulas, pesquisas em livros diferentes me despertaram um interesse maior, levando-me a buscar renovações. Inicialmente, julgo ter ficado com receio e até mesmo medo. Ora, como eu, um recém-formado, poderia querer organizar um material diferente do de um professor que tinha anos de experiência e era aposentado de uma universidade federal?

Lecionava para as licenciaturas em Matemática, Física e Química, em turmas conjuntas, e eu sempre me questionava o motivo de não pesquisar sobre aplicações voltadas para esses cursos. Confesso que não tinha a visão e a preocupação quanto ao pensamento da licenciatura, ou seja, o de formar profissionais que iriam atuar na Educação Básica. Inicialmente, pensava apenas em práticas ligadas aos cursos. Não foi algo que consegui rapidamente, mas sempre tive esse olhar. Cabe relembrar que, nessa época, ainda não lecionava na Educação Básica e possuía apenas uma visão teórica enquanto professor de Matemática.

Além das licenciaturas, fui convidado para lecionar no curso de Engenharia de Produção. Novamente, surgiu mais uma área para começar a estudar e buscar formas de agregar aplicações ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, observava nos alunos uma grande lacuna de conhecimento matemático do Ensino Médio. Era uma oportunidade para repensar não apenas a prática profissional do curso, mas também as demandas necessárias para que eles conseguissem (ou pelo menos tivessem maior facilidade em) obter êxito nos estudos da disciplina.

Nessas buscas por repensar a minha prática enquanto professor, fui levado a participar, como ouvinte, do Encontro de Ensino e Pesquisa em Educação

Matemática, organizado pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), em 2017. Por meio desse evento, pude ampliar minhas pesquisas e encontrei o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Sendo assim, este trabalho surge de uma inquietação enquanto professor de Cálculo, disciplina que ministrei por mais de dez anos no ensino superior. Ao ingressar na Educação Básica, sempre observei o distanciamento/desmerecimento dos professores de Matemática nas escolas em que lecionei.

As inquietações surgidas na disciplina de Cálculo no ensino superior, hoje, me acompanham como professor de Matemática na escola básica. Dessa forma, buscando entrelaçar o ensino superior e a Educação Básica, o objetivo deste trabalho é investigar o quanto o ensino de Cálculo se faz necessário na formação do professor que lecionará matemática e se os conteúdos da Matemática dos ensinos fundamental e médio têm alguma relação/ligação com o Cálculo aprendido na graduação.

Num primeiro momento, pode-se citar algumas análises, como a de Barufi (2012, p. 5), que afirma que “para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático desenvolvido anteriormente, na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo”.

Ainda, Barufi (2012, p. 69) destaca

> Para a maioria dos alunos a Matemática da Escola no Ensino Médio pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece se constituir em grande dificuldade (Barufi, 2012, p. 69).

Essas inquietações e questionamentos serão discutidos nesta dissertação.

No segundo capítulo, apresentamos a revisão da literatura, expondo as referências bibliográficas publicadas sobre o assunto abordado neste trabalho.

Já no terceiro, expomos os procedimentos metodológicos como uma ferramenta fundamental, destacando a importância de uma pesquisa qualitativa para a Educação Matemática sob os olhares de D’Ambrosio (2006), Garnica (2004), Bogdan e Biklen (1994). Quanto aos sujeitos da nossa pesquisa, consideramos os professores de Matemática da Educação Básica, analisando o Cálculo Diferencial e Integral tanto em sua formação quanto em sua aplicabilidade para as aulas no ensino fundamental e médio. Utilizamos um questionário como forma de coletar dados para, a partir de uma interpretação dentro do meio qualitativo, compreender as respostas encontradas.

No capítulo quatro, será feita uma análise de literaturas voltadas para o ensino e aprendizagem de Cálculo, destacando-se Baldino (1991), Bicudo (1991), Moreira e Ferreira (2013), Fiorentini e Oliveira (2013), Valente (2013), Fiorentini (2005), Lins (2006, *apud* Linardi, 2016) , Biembengut e Hein (1995), Reis (2001), Silva (2009), Igliori (2009), Souza e Santos (2021), Franch (1995), Viola dos Santos (2012) e Gereti e Savioli (2021), a fim de conhecer pesquisas que debatem a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e a Matemática Básica. Inicialmente, serão analisadas algumas concepções sobre o ensino da Matemática como forma de orientar o professor quanto ao seu papel na Educação Matemática. Serão apresentadas, ainda, análises de fragmentos de entrevistas com professores formadores de Cálculo e com uma professora da Matemática escolar.

O quinto capítulo é voltado para uma revisão sobre Resolução de Problemas (RP), baseada em Newell (1972, apud Firmino e Brotto, 2008), Chi e Glaser (1983), Serrazina (2017), Dante (2000), Onuchic e Allevato (2004), Ravagnani e Marques (2017), Stanic e Kilpatrick (1989), Branca (1997), Polya (1994) e Onuchic (2021). Destacam-se três diferentes abordagens: (1) Ensinar sobre a RP; (2) Ensinar para resolver problemas; e (3) Ensinar por meio da RP, sendo esta última a escolhida para este trabalho.

No sexto capítulo, será apresentada a interpretação do questionário, no qual será observada a demanda por problemas que permitam estabelecer uma relação entre as matemáticas analisadas.

No sétimo capítulo, será proposta uma busca por atividades trabalhadas por professores que se relacionam com o conhecimento, por meio da metodologia de Resolução de Problemas.

E, finalmente, na conclusão, consideramos que a dissertação busca responder à pergunta de pesquisa, evidenciando a necessidade de mudança no formato das aulas, capacitando o aluno a produzir sentido para os conhecimentos matemáticos. Sugere-se, ainda, como ação importante, a formação continuada para os professores.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A consulta foi realizada em três veículos de publicações da Educação Matemática: a *Zetetiké*, o Bolema e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

A *Zetetiké* é uma publicação institucional da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (em parceria editorial com a UFF), tendo como objetivo contribuir, de um lado, para o desenvolvimento da pesquisa na área da Educação Matemática e, de outro, para a formação de pesquisadores dessa área, por meio do intercâmbio e da divulgação de pesquisas e estudos realizados por educadores matemáticos vinculados a instituições brasileiras ou estrangeiras.

Durante a pesquisa na *Zetetiké*, ao buscar pelos termos “Matemática Básica. Ensino de Cálculo. Resolução de Problemas”, não foi encontrado nenhum item. Dessa forma, considerou-se modificar a estratégia de busca para obter resultados. Os termos foram combinados dois a dois como forma de ampliar os resultados. Assim, na procura por “Ensino de Cálculo. Resolução de Problemas”, apareceram três itens; porém, ao analisá-los por meio da leitura de seus resumos, verificou-se que não apresentavam propostas afins com este trabalho. Ao procurar por “Matemática Básica. Ensino de Cálculo”, também não foram encontrados resultados.

Passando para o Bolema – Boletim de Educação Matemática –, uma das mais antigas e importantes publicações na área da Educação Matemática no Brasil (com a primeira publicação em 1985), inicialmente vinculado a um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, de Rio Claro. A primeira busca pelos termos “Matemática Básica. Ensino de Cálculo. Resolução de Problemas” resultou em 88 itens. Como no veículo anterior não houve resultado, optei por analisar todos os itens por meio da leitura do resumo dos títulos que pareciam estar associados à ideia do trabalho. Os resultados serão detalhados a seguir em uma tabela-resumo.

Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), desenvolvida pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) com a finalidade de organizar o registro e a publicação de teses e dissertações eletrônicas pelo país, a pesquisa com os três termos resultou em 100 (cem) itens. Através da leitura dos títulos e resumos, chegou-se a uma filtragem de cinco trabalhos que mais se relacionam à pesquisa. Estes também serão apresentados na tabela-resumo a seguir.

Tabela 1: Organização de bibliografias

Fonte	BDTD	Bolema
Total de Obras Encontradas	100	88
Pesquisas afins com a proposta do trabalho	VOGADO (2014) RODRIGUES (2019) PARANHOS (2009) SILVA (2024) ANJOS (2023)	FIORETINI e OLIVEIRA (2013) MOREIRA e VIANA (2016) SOUZA, FATORI, BURIASCO (2005)

Fonte: Autor (2024).

Visando mostrar os objetivos dos oito trabalhos selecionados e relacioná-los à presente pesquisa, apresentamos alguns comentários sobre cada estudo. Para uma melhor organização, discutiremos os textos presentes no Bolema.

Fiorentini e Oliveira (2013, p. 981-1005), por meio do artigo “O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?”, trazem uma discussão sobre o papel da matemática na formação do futuro professor no curso de Licenciatura em Matemática. Para isso, baseiam-se em dois alicerces: um sendo “De que matemática estamos falando quando dizemos que o professor precisa saber bem matemática para ensiná-la?” e o outro, “Que práticas formativas podem contribuir para que o futuro professor possa se apropriar dessa matemática fundamental para seu trabalho profissional?”.

Já Moreira e Viana (2016), em “Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos”, apresentam a análise de entrevistas realizadas com dezoito educadores matemáticos que lecionam a disciplina de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática. Mesmo não sendo a disciplina de Cálculo, consideramos que o artigo pode contribuir para a pesquisa, uma vez que seu principal propósito é analisar a matemática aprendida na graduação em relação à matemática ensinada nas escolas.

Na última das três pesquisas no Bolema, Souza, Fatori e Buriasco (2005), em “Como Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática Lidam com Alguns Conceitos

Básicos de Cálculo I", fazem um estudo com o objetivo de avaliar como os alunos lidam com conceitos matemáticos básicos.

Passando para as pesquisas do BDTD, Vogado (2014), através de sua tese, "O ensino e aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas", leva-nos a refletir sobre as metodologias utilizadas para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Já Anjos (2023), em sua dissertação, "O quiz interativo digital na identificação de dificuldades de aprendizagem do Cálculo I", traz em discussão reflexões sobre as dificuldades de aprendizagem, entendendo que não se deva ficar preso apenas na aplicação de regras, mas que também se privilegie a interpretação, a representação e a aplicação dos conceitos nucleares do Cálculo.

Paranhos (2009), em sua pesquisa de mestrado, "Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral", busca apresentar ideias fundamentais da disciplina e suas aplicações na resolução de problemas.

Outras obras já conhecidas também foram relevantes neste trabalho, podendo-se citar:

Viola dos Santos (2012), através de sua tese de doutorado na UNESP, com o título "Legitimidades possíveis para a formação matemática de professores de matemática (Ou: Assim falaram Zaratustras: uma tese para todos e para ninguém)", com o objetivo de buscar produzir possíveis legitimidades para a formação matemática de professores de Matemática, em cursos de Licenciatura em Matemática. Ao longo de seu trabalho, apresenta entrevistas com professores como Lourdes Onuchic, Ole Skovmose, Romulo Lins, Plínio Cavalcanti Moreira, entre outros, a fim de entender as visões sobre o ensino da Matemática ligada ao futuro professor e à Licenciatura.

O trabalho de Reis (2001) foi outro muito importante como alicerce desta pesquisa. Trata-se da tese de doutorado da Unicamp, intitulada "A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos", numa proposta de análise em manuais didáticos e de entrevistas semiestruturadas com professores-pesquisadores que se destacam como autores de livros didáticos, como os professores Roberto Ribeiro Baldino, Geraldo Severo de Souza Ávila, Djairo Guedes de Figueiredo e Elons Lages Lima.

Outro trabalho que também muito auxiliou foi o artigo "Legitimidades para a disciplina de Cálculo na Licenciatura em Matemática", publicado na Revista

Perspectivas da Educação Matemática, da UFMS, das autoras Gereti e Savioli (2021, p. 1-28), onde procuram discutir e problematizar o Cálculo na Licenciatura em Matemática. Para isso, entrevistam professores para entender o que pensam sobre a disciplina lecionada na licenciatura.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa está fundamentada na abordagem qualitativa e alicerçada na análise do Cálculo no currículo da Licenciatura em Matemática, com o objetivo de verificar se a disciplina realmente contribui para a prática do professor de Matemática formado.

É fato que, ao longo do dia a dia de um acadêmico, o termo “pesquisa” está tão presente que tal familiaridade muitas vezes impede uma busca mais aprofundada pelos significados da palavra, bem como por uma análise mais detalhada. Isso pode levar ao distanciamento da sua real essência.

Por isso, neste primeiro momento, será realizada uma pesquisa sobre a própria Pesquisa. Ou seja, será feita uma análise mais aprofundada do termo, de forma a perceber que o “pesquisado” se torna tão próximo do pesquisador que há o risco de este inserir suas concepções e sua visão particular, deixando de ter um olhar mais amplo e crítico. Esse fato pode comprometer seu trabalho.

Dessa forma, faz-se necessário, periodicamente, buscar novas fontes e diferentes perspectivas, sem se limitar, mas analisando, de forma crítica, as mais variadas concepções sobre a pesquisa. Desse modo, apresentaremos diferentes abordagens dentro da Educação Matemática sobre o tema.

Assim, iniciamos com D’Ambrósio (2006), que afirma que o uso e o abuso da palavra pesquisa nas sociedades modernas merecem uma reflexão sobre o próprio conceito de pesquisa: “Mas, o que realmente é pesquisa?”.

Iniciando com uma consulta ao Dicionário Houaiss (recurso *online*), numa visão mais geral e isolada, pesquisa é definida como “o conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário, artístico etc.; é a investigação, a indagação minuciosa, isto é, o exame de laboratório”.

No artigo Pesquisa em Educação Matemática, Bicudo (1999) diz que pesquisar é ter uma interrogação e caminhar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e retornando ao ponto inicial para novas análises, a fim de aprofundar ainda mais o entendimento. Ainda no mesmo artigo, Bicudo (1999) traz a origem do termo *perquirere*, do latim, que significa procurar com cuidado por toda parte, inquirir, informar-se bem.

Para aprofundar ainda mais a discussão sobre o conceito de "pesquisa" e aproximá-lo da realidade deste estudo, será inserido mais um tópico: "Como a pesquisa pode auxiliar o professor em sua sala de aula?". Acredita-se que o grande objetivo de uma pesquisa é, de fato, trazer resultados aplicáveis ao cotidiano do docente. Afinal, uma pesquisa em educação que não gera resultados para o professor não atinge seus objetivos.

Há uma grande discussão sobre pesquisas em educação que não caminham junto com a sala de aula. Outra preocupação que o pesquisador deve ter refere-se à metodologia e à forma de usá-la, garantindo que o rigor metodológico não se sobreponha à realidade docente. Cabe aqui não escolher entre um e outro, mas utilizá-los em consonância, pois, afinal, o professor é pesquisador e o pesquisador é professor.

As pesquisas são geralmente classificadas em duas ramificações: pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. A primeira baseia-se em métodos estatísticos para analisar dados coletados, incluindo entrevistas. A segunda busca compreender e interpretar os dados e o discurso.

Este trabalho considera a pesquisa qualitativa como mais estratégica para atingir seus objetivos, uma vez que, para D'Ambrosio (2006), essa abordagem é a mais adequada para pesquisas em educação. Garnica (2004, p. 86) complementa que a pesquisa qualitativa tem como características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (Garnica, 2004, p. 86).

Tais características não são únicas, uma vez que o entendimento sobre pesquisa qualitativa ainda está em desenvolvimento, pois sua natureza busca um conhecimento dentro de uma concepção dinâmica e passível de mudança.

Outro equívoco é tentar diferenciar as pesquisas apenas pelo dado quantitativo, inferindo que a abordagem qualitativa o ignora. Bogdan e Biklen (1994, p. 195) esclarecem que:

> Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam. [...] Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos por seu valor facial (Bogdan e Biklen,1994, p. 195).

Ou seja, dados quantitativos podem ser utilizados na pesquisa qualitativa. Chega a ser interessante pensar que um professor de Matemática opte por esse tipo de pesquisa, uma vez que a abordagem quantitativa está mais próxima de sua realidade e convivência.

3.1 CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO

Segundo Paulo Freire, a escolha da pergunta da pesquisa já é, em si, um ato embebido de subjetividade. Quando dentro de uma instituição de Ensino Superior, é comum ouvir relatos de professores que lecionam a disciplina de Cálculo, afirmando que os insucessos de ensino e aprendizagem se devem às lacunas trazidas da matemática básica.

> As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros. (Barreto, 1995, p. 4)

E, muitas vezes, essa acaba sendo uma defesa, uma justificativa e, ao mesmo tempo, uma prova de que não há nada a ser feito no âmbito de um curso superior.

De repente, então, se pudesse falar com veemência: o problema dos insucessos no ensino e aprendizagem de Cálculo não se deve à matemática superior, e sim à matemática básica. Bom, não é tão simples. De fato, cabe ao professor não se satisfazer com uma transferência de responsabilidades ou culpas. Ora, ele está diante de uma situação: o aluno agora está em um curso superior.

Quando analisamos a escola, vemos outros relatos: a matemática superior não apresenta envolvimento com a matemática escolar. E aí? Seria uma defesa também?

O trabalho não tem o interesse de criar um tribunal para averiguar se há culpado ou culpados. Mas, em vez de criar muros entre as matemáticas (a superior e a escolar), necessita-se criar pontes que possam fluir entre uma e outra.

Outra situação a se pensar é que todo professor da matemática escolar também foi aluno de um curso de Licenciatura em Matemática. Assim, fica indiscutível que entre os agentes das duas matemáticas há uma ligação forte.

Assim, como analisar um currículo se estamos diante de uma grande variedade de disciplinas? Desse modo, foi escolhido o Cálculo Diferencial e Integral como proposta de investigação.

"Se você não sabe onde quer ir, qualquer caminho serve."[1] Sabemos qual caminho trilhar: a investigação sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a matemática escolar. A forma será por meio da compreensão das percepções de ambos os agentes. No caso do professor de Cálculo, considero a minha própria visão, uma vez que já tive essa prática, mas evidencio pesquisas bibliográficas para complementar. Quanto aos professores da educação básica, julgamos necessário ouvir mais relatos em busca de compreender suas necessidades. Não se trata de graduar quem deva ser mais importante a ser analisado neste cenário, mas de reconhecer a escassez de relatos desses professores.

3.2. DELINEANDO A PESQUISA

As inquietações geradas enquanto professor de Cálculo Diferencial e Integral e, depois, enquanto professor da Educação Básica, levam este trabalho a ter uma direção, tendo como objetivo principal:

- Analisar relações entre o conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral com a matemática da Educação Básica.

Porém, neste cenário tão amplo e, ao mesmo tempo, tão desafiador, configuram-se outros objetivos que não podem ser desconsiderados, mas que, neste trabalho, são julgados como secundários. São eles:

- Identificar qual a matemática que o professor da Educação Básica deve entender;
- Verificar as concepções de professores formadores (do Ensino Superior) quanto ao ensino e aprendizagem de Cálculo;
- Verificar a visão dos professores de Matemática da Educação Básica sobre o Cálculo em sua prática;

[1] Frase do livro "Alice no País das Maravilhas", do autor, também matemático, Lewis Carroll.

- Estudar propostas, por meio da Resolução de Problemas, para tornar o Cálculo mais próximo das necessidades de um professor da Educação Básica.

E, na proposta de se perpassar por todos os objetivos, frutos de motivações, é necessário estar sustentado por uma forma que os reúna, sintetizando tudo em uma pergunta, que sempre norteará este trabalho:

Como relacionar conteúdos comumente trabalhados na disciplina de Cálculo à matemática básica por meio da Resolução de Problemas?

3.3. COLETA DE DADOS

Para este trabalho, organizou-se a coleta de dados por meio de dois mecanismos: um, a revisão bibliográfica e outro, um questionário, ambos voltados para a busca de entender a visão de professores da Matemática Básica quanto aos conteúdos estudados e os conteúdos lecionados no ensino fundamental e médio.

Quanto à pesquisa bibliográfica, esta se baseia na consulta a artigos e teses de pesquisadores que se inclinaram para uma preocupação comum ou semelhante à aqui abordada.

O questionário foi organizado por meio de recursos virtuais, utilizando o *Google Forms* (ver Apêndice). Ele foi direcionado, por meio de um link, para grupos de redes sociais de professores de municípios da Zona da Mata Mineira. No entanto, devido à aproximação geográfica e ao grande número de professores dessa região mineira que trabalham em Itaperuna e municípios próximos, no estado do Rio de Janeiro, houve uma participação significativa de docentes desse outro estado.

Segundo Parasuraman (1991, p.32), um questionário é tão somente um conjunto de questões feito para gerar os dados necessários para se atingir os objetivos do projeto. O mesmo autor considera o questionário uma importante ferramenta de pesquisa, dizendo ainda que não se trata de uma construção fácil e reconhecendo que não há uma metodologia padrão para sua elaboração.

O questionário foi organizado em seções com objetivos específicos. Iniciou-se com a introdução, na qual se apresentava a proposta de investigação sobre a contribuição da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para a prática do professor de Matemática da Educação Básica. Além disso, esclareceu-se que a identidade dos colaboradores seria mantida em sigilo.

Na segunda parte, foi consultada a formação acadêmica, de forma a verificar se o participante possuía graduação em Licenciatura em Matemática, em outros cursos que habilitassem a lecionar matemática, se tinha especialização, mestrado ou doutorado.

Em seguida, passou-se ao questionamento sobre a experiência profissional, procurando descobrir há quanto tempo leciona no Ensino Fundamental e/ou Médio, se atua em rede pública e/ou privada e, ainda, se já teve alguma experiência com o Ensino Superior.

Na seção seguinte, buscou-se identificar a relação entre a disciplina de Cálculo e o professor consultado, investigando se ele teve essa disciplina em sua formação, se considera seu estudo importante para sua prática e pedindo que relatasse algum conteúdo que acredita ter relação. Além disso, solicitou-se uma mensuração do quanto considera importante o estudo do Cálculo, deixando um espaço para que apresentasse sua visão e percepções.

A última seção abordou a metodologia da Resolução de Problemas, questionando se era conhecida e se os professores acreditavam que problemas que trabalhassem determinados conteúdos da Educação Básica com vistas aos conceitos do Cálculo poderiam estabelecer essa relação com sua prática e, ainda, justificar o estudo do Cálculo durante a formação do professor.

4. ANÁLISE DE LITERATURAS VOLTADAS PARA O CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL E A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, será apresentada uma revisão bibliográfica a fim de conhecer pesquisas que debatem sobre a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e a Matemática Básica[2]. Inicialmente, serão analisadas algumas concepções sobre o ensino da Matemática, como forma de orientar o professor quanto ao seu papel na Educação Matemática. Em seguida, será discutido qual a matemática que o professor do ensino básico deve conhecer. Dando continuidade, será feita uma análise do CDI, verificando se ele faz parte dessa matemática importante na formação do professor. Finaliza-se com um estudo sobre as visões de professores formadores de CDI e de professores de Matemática Básica.

4.1 CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA

Embora, muitas vezes, o “ensino de Matemática” e a “educação Matemática” pareçam ser sinônimos tão naturais, “há quem diga que esta é uma questão geral demais para ser interessante e que, ao abordá-la, estaríamos no máximo esclarecendo algumas confusões semânticas” (Baldino, 1991, p. 51).

Numa preocupação mais profunda sobre tal semântica e a fim de chegar a uma conclusão que melhor atenda ao emprego das expressões, recorre-se a uma observação de Baldino (1991, p. 52), em que falar de ensino “dispensa o orador de considerar explicitamente a aprendizagem”.

> O problema que o Ensino da Matemática se põe é, então, o de como apresentar uma teoria que é essencialmente axiomática, de maneira a mais possível amena, agradável, elegante, sem deixar de ser correta. [...] A Educação Matemática não recusa a preocupação com essas questões, mas reformula suas relações de modo a atribuir-lhes outros significados. (Baldino, 1991, p. 58).

Outra importante análise feita pelo mesmo autor é acerca da ligação de ideias, quando apresenta que o ensino está ligado à didática, instrução, transmissão, apresentação; ao passo que falar em educação lembra pedagogia, aprendizagem,

---

[2] A “Matemática Básica” se refere ao longo do trabalho à matemática estudada no Ensino Fundamental e Médio (Educação Básica). Em certos momentos também é apresentado como sinônimo com a “Matemática Escolar”.

motivação, desejo. Ainda, pode-se notar dois eixos bem diferentes: enquanto um preocupa-se com o sujeito, o outro, por sua vez, preocupa-se com o sujeito no seu contexto social.

Numa outra reflexão, tendo como foco o fracasso do Movimento da Matemática Moderna, Bicudo (1991) afirma que foi nesse momento que ocorreu o grande marco diferenciador destes dois termos: Ensino da Matemática e Educação Matemática. Segundo o autor, “o ensino da Matemática, em sua tônica em como ensinar determinado tópico, como desenvolver determinada habilidade, relacionada a algum pedaço específico dessa disciplina, é parte da Educação Matemática, mas está longe de ser o todo” (Bicudo, 1991, p. 33).

Ainda segundo Bicudo (1991, p. 33), conceituar educação “implica um estudo, o mais completo possível, do significado do Homem e do de sociedade, e à Educação Matemática deve corresponder a reflexão de em que medida pode a Matemática concorrer para que o homem e a sociedade satisfaçam seu destino”. Complementa que:

> Parece-me razoável afirmar, também, que sustentando a diferença entre a Educação Matemática e o Ensino de Matemática está o modo pelo qual se olha esta ciência. A visão dos que praticam apenas o Ensino da Matemática é local e não vai à procura do que seria a essência da mesma. A Educação Matemática deve ter uma visão mais ampla possível da Matemática e buscar o que lhe está no âmago, o que a distingue de tudo o mais. (Bicudo, 1991, p. 34)

Esta visão da Educação Matemática é imprescindível para atender às constantes mudanças do mundo, nas quais a educação também está inserida. Nesse cenário dinâmico, a sala de aula requer um constante estudo. No Brasil, percebe-se que as modificações ao longo dos anos, sofridas pela sociedade, pela família e pela escola, exigem mudanças no papel do educador. Novos desafios surgem. Neste contexto de transformação, um objetivo é mantido: compete ao professor contribuir para garantir aos seus alunos a construção do conhecimento.

Ao observar a educação tradicional, é notório perceber as mudanças na função do professor. Antes, ele era o detentor do conhecimento; atualmente, seu papel é orientar e conduzir seus alunos na busca desse conhecimento, tendo a função de mediador no processo de aprendizagem.

Porém, muitos “matemáticos” ainda estão adormecidos diante de um ensino baseado em conceitos teóricos e abstratos, distanciando-se das realidades vividas pelos alunos.

> Há uma necessidade de os novos professores compreenderem a Matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas. (D'Ambrósio, 1993, p. 35)

Assim, não será apenas uma formação teórica que irá garantir ao professor êxito no ensino e na aprendizagem. Basta entrar numa escola e vários problemas serão observados: salas de aula superlotadas, falta de material, alunos desmotivados e cansados, situações sociais diferentes e até mesmo alunos de faixas etárias diferentes em uma mesma turma. Estas são algumas das realidades que se notam na vida profissional de um professor. Mas é preciso também ver sob outro ângulo: tais problemas não são apenas da natureza dos professores, mas também são comuns para os alunos. Sendo assim, o processo de ensino e aprendizagem não depende apenas do professor ou do aluno, e sim de todos.

4.2 A MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR E NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Conforme visto anteriormente sobre o papel atual do professor frente ao processo de ensino e aprendizagem, recaem aqui alguns questionamentos sobre como a matemática deve se configurar para o professor desta disciplina na Educação Básica. Assim, torna-se imprescindível repensar em suas mais variadas vertentes adaptadas às diferentes realidades.

Moreira e Ferreira (2013, p. 988-1005), numa publicação na revista BOLEMA, através do artigo intitulado "O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática", indagam que a preparação para o trabalho de professor de matemática na escola foi concebida em termos de uma soma de conhecimento da matéria com conhecimento acerca do ensino, visto como transmissão de conhecimentos a outros. Resumia-se na seguinte fórmula: Licenciatura = Bacharelado + Didática.

Segundo os autores, com a consolidação nacional e internacional da Educação Matemática como campo de conhecimento, o Brasil veio, nos dias de hoje, ampliar a compreensão a respeito dos saberes da profissão docente e, na mesma medida, dos saberes potencialmente relevantes para a formação na licenciatura. Durante a leitura de uma literatura de pesquisa especializada na formação de professores de matemática, novas inspirações começaram a aparecer, tais como: é preciso que o professor tenha uma visão conectada da matemática escolar, em oposição a uma visão segundo a qual a matemática se reduz a uma coleção de fórmulas e procedimentos. Porém, os autores deixam claro que o argumento como o apresentado não é uma resposta, mas leva a novas perguntas como: “O que o professor de matemática precisa saber a mais do que vai ensinar na escola?”.

É preciso, antes, pensar o papel social da licenciatura na formação do professor. Para Fiorentini e Oliveira (2013), é preciso ter uma visão de que a licenciatura é um curso profissionalizante, tanto quanto a medicina, engenharia, odontologia etc.

Ainda sobre a pergunta anterior, Valente (2013) ressalta que não se pretende advogar que os cursos de licenciatura em matemática realizem revisões da matemática elementar e muito menos que isso seja tarefa da História da Educação Matemática, mas considera que o ofício de professor “implica na condução da disciplina escolar Matemática, forma organizadora da matemática escolar historicamente constituída” (Valente, 2013, p. 951). É necessária uma reflexão pedagógica do docente sobre o processo de constituição histórica da matemática escolar.

De acordo com Valente (2013, p. 951):

> [...] se, de fato, é importante, para a formação do professor de matemática ter conhecimento das contribuições, ao longo do tempo, de como cientistas, estudiosos e matemáticos desenvolveram e sistematizaram função como conteúdo matemático, fundamental para o professor em formação, também é a ciência de como a matemática que ele irá ensinar em sua profissão organizou-se/reorganizou-se levando em conta a forma escolar mutante desse conceito em diferentes épocas escolares (Valente, 2013, p. 951).

Fiorentini (2005, p. 105) apresenta uma visão conceitual de alguns termos, segundo uma compreensão, onde a Didática é um campo disciplinar que busca explorar as relações professor-aluno-conteúdo; quanto à Pedagogia, como um campo que se preocupa com o sentido formativo ou educativo do que ensinamos e aprendemos.

Outra concepção do autor pode ser vista como a seguir:

> O conhecimento matemático pode ser focalizado a partir de três diferentes perspectivas: da prática científica ou acadêmica; da prática escolar; e das práticas cotidianas não-formais. Todas essas perspectivas interessam à formação do professor, pois a matemática escolar se constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas. Interessa ao professor, principalmente, porque a matemática escolar – que é objeto-foco da atividade do professor no Ensino Básico – é um conhecimento que é, ao mesmo tempo, mobilizado e transcriado ou produzido nas relações que se estabelecem no seio escolar. (Fiorentini, 2005, p.108)

Percebe-se a preocupação com um saber matemático que esteja em consonância com as necessidades da escola. Cabe aqui entender que a formação de um professor vai além do que tradicionalmente se considera como requisitos: conhecer o conteúdo e a prática pedagógica. Sendo necessária, conforme introduz Shulman (1986, apud Fiorentini, 2005, p. 109), um terceiro eixo, o conhecimento do conteúdo no ensino.

Sendo assim, é um importante terreno comum para o saber matemático e os saberes didático-pedagógicos.

Fiorentini (2005, p. 110) ainda traz uma indagação: “Que Matemática o professor deve saber, para ensiná-la de maneira significativa aos jovens e crianças da escola básica?”, apresentando ainda uma conclusão enfática de que saber Matemática para ser um matemático não é a mesma coisa que saber Matemática para ser um professor de Matemática, e, ainda, que, para ser um professor de Matemática, é necessário, sobretudo, conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da Matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático. Desta forma, a visão sobre o professor de Matemática é muito mais do que se considera, como aquele que seja capaz de “repassar o que aprendeu”. Nesta demanda em entender qual seria a Matemática do professor de Matemática, LINS (2006, p. 2, *apud.* Linardi, 2016, p. 8) caracterizou os modos de produção de significados dos matemáticos que se iniciam na primeira metade do século XIX e se consolidam com a iniciativa de Bourbaki (por volta de 1930), que ele chamou de “matemática do matemático”.

> Poderia parecer estranho caracterizar qualquer “matemática” em termos de processo de produção de significados, e não em termos de, digamos, conteúdo (por exemplo, definições e teoremas) e métodos para o estabelecimento de verdades. Meu ponto aqui é que, enquanto para o matemático – ou talvez mais precisamente para o filósofo da matemática – isso é um problema de capturar a “essência” de alguma coisa já em seu lugar e bem estabelecida como parte – talvez central – de uma prática social, para o professor de matemática, tal abordagem é insuficiente, porque não importa quanto o professor queira que seus(suas) alunos(as) pensem de um dado modo ou entendam uma afirmação de um dado modo, ele simplesmente não pode antecipar o que os alunos farão disso. Minha caracterização da matemática do professor de matemática, então, não é principalmente dirigida ao que o professor pensa sobre ou da matemática, mas preferivelmente a que tipos de coisa o professor pode “ver” enquanto ela (ele) lê estudantes engajados em uma atividade matemática, e isto ocorrerá enquanto a produção de significados está acontecendo na maioria do tempo em situações de interação. (Lins, 2006, p. 2, apud. Linardi, 2016, p. 8)

Ainda para Lins (2004), a matemática do matemático é internacionalista e simbólica. Simbólica porque seus objetivos são conhecidos apenas nas suas propriedades, e internacionalista, pois pode definir qualquer coisa e desenvolver uma teoria para qualquer coisa sem ter relação alguma com o mundo físico. “Juntas, estas duas características [...] dão conta de muito do que se quer dizer quando se diz, ainda que informalmente, que a matemática do matemático é ‘teórica’ ou ‘abstrata’ (...)” (Lins, 2004, p. 96).

Diante dos conceitos apresentados, vale aqui uma reflexão sobre a formação do professor de Matemática: de uma forma tradicional, observa-se a matemática do matemático como referência para o planejamento dos cursos.

Na tese de doutorado de Viola dos Santos (2012), através de entrevistas com educadores matemáticos e matemáticos, apresentam-se considerações importantes sobre uma compreensão das possibilidades de uma formação matemática na licenciatura em Matemática. Vale ressaltar que não há uma consideração tida como “verdadeira”, mas propostas de (re)análises na formação inicial de professores de Matemática.

O autor apresenta em sua pesquisa, por meio de entrevistas, textualizações e textos teórico-analíticos. Dentre eles, estão: O professor da educação básica precisa fazer um curso em que ele desenvolva uma autonomia intelectual (Textualização da entrevista com Henrique Lazari); um curso de licenciatura em Matemática teria as disciplinas de Matemática (Cálculo, Álgebra, entre outras), partindo sempre de problemas, fazendo relações com a matemática escolar (Textualização da entrevista com Dona Lourdes); A prática profissional do professor deveria ser o centro de gravidade dos cursos de licenciatura. Nestes, é preciso fazer escolhas (Textualização da entrevista com Plínio Cavalcanti Moreira); A experiência como oportunidade de formação (Texto teórico-analítico); para uma outra Formação Matemática na licenciatura; Sobre a Matemática do Professor de Matemática e a Matemática do Matemático (Texto teórico-analítico).

4.3. UMA ANÁLISE INICIAL DA REALIDADE DO ENSINO DO CÁLCULO

Segundo Biembengut e Hein (1995), “o Cálculo, que possivelmente surgiu da tentativa dos nossos grandes mestres em desvendar a relação ‘Homem versus Universo’, contribui hoje significativamente para toda a área do saber.”

De forma breve sobre as principais contribuições ao Cálculo, pode-se pensar num início com o grego Zenão (450 a.C.), com seus paradoxos voltados para a interpretação da matemática grega. Arquimedes (287-212 a.C.), com o problema da reta tangente à espiral, buscando métodos gerais de traçado de tangentes a curvas. Pode-se citar ainda Fermat (1601-1665), tendo como louros de reconhecimento Laplace (1749-1827), como “o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial e Integral”.

De forma mais destacada, com a contribuição de Newton (1642-1677) e Leibniz (1646-1716), Boyler (1994, p. 295) afirma que:

> Leibniz por volta de 1676 tinha chegado à mesma conclusão a que Newton chegara vários anos antes – que ele possuía um método que era realmente importante por causa de sua generalidade. Quer uma função fosse racional ou irracional, algébrica ou transcendente (palavra que Leibniz inventou), suas operações de achar somas e diferenças podiam ser sempre aplicadas (Boyler,1994, p. 295).

No ensino superior, é notável a visão “monstruosa” que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral gera entre os alunos. Embora seja de grande relevância, ela adquire, para os alunos, uma face abstrata e complexa. A disciplina passa a ser vista apenas como um conteúdo que foi unicamente um obstáculo na sua formação, traduzindo-se em reprovações e levando até mesmo a desistências.

De acordo com Reis (2001, pp. 39-40):

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (Reis, 2001, página 39-40).

Silva (2009) aponta que as dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral são traduzidas pelos altos índices de reprovação, retenção e evasão. Segundo ele, esse problema tem levado a constantes pesquisas e discussões em busca de amenizar tais efeitos.

> No que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isso se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática (Igliori, 2009, p. 13).

O presente trabalho busca aqui citar pesquisas que demonstram o ensino do Cálculo Diferencial e Integral como um problema em cena, sobre o qual é necessário analisar e levantar propostas e ideias com o objetivo de (re)ver formatos que busquem auxiliar em melhores resultados.

Assim, sendo o cenário de uma sala de aula tão amplo e complexo ao mesmo tempo, consideramos que julgar algo como gerador do problema seria estar indo de encontro com todas as diferentes realidades vividas pelo professor. Sendo assim, focaremos em analisar situações que são julgadas como problemas pelos olhares de outros pesquisadores.

Há relatos de quem menciona que os insucessos do Cálculo estão ligados à matemática básica, pois:

> Ao concluir o ensino médio, um percentual de alunos, procuram pela continuidade de seus estudos. O problema é que nem sempre ele está apto para isso. Do ponto de vista formal, até que sim, pois estará com posse de um certificado/diploma que ateste a conclusão da educação básica. Por outro lado, do ponto de vista prático, diversos alunos não conseguem progredir justamente por não terem conhecimentos matemáticos considerados basais para o desenvolvimento de conceitos mais complexos. (Souza; Santos, 2021, p. 143).

Considerando a disciplina lecionada em outras áreas, onde é/deveria ser vista como uma importante ferramenta para estudo e aplicação na formação dos alunos de um curso superior, observam-se também os mesmos resultados negativos.

> Acreditamos que isto ocorra pelo simples fato de que as disciplinas da área da matemática, na maior parte dos cursos de uma universidade, são de responsabilidade do Departamento de Matemática. Como consequência, o professor de Matemática, na maioria das vezes, não tem conhecimento substancial a respeito de outra área na qual atua, o que, teoricamente, deva ser natural. (Bienbengut; Hein, 1995, p. 38)

Trabalhar o Cálculo em outra área de formação também é um grande desafio. O professor busca despertar o interesse pela sua matéria, mas, devido às dificuldades de conhecimento dessa área, procura manter aulas padronizadas, mais próximas das que leciona na área de exatas. Muitas vezes, procura demonstrar, como forma de diferenciação, apenas exemplos resolvidos por ele, tornando o aluno um mero ouvinte no processo.

> Ao ingressarem no curso superior, os estudantes trazem suas expectativas: Aqueles que no Ensino Médio logravam sempre boas avaliações em matemática, levam para a universidade a esperança de que o curso de Cálculo não deva representar obstáculos para o seu aprendizado. Entretanto, ao se depararem com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, acrescidas de novas ideias impactantes como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade etc., quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais. (Silva, 2011, p. 67)

Os professores de Cálculo sempre esperam que os alunos, ao longo do ensino básico, tenham adquirido conhecimentos que lhes permitam acompanhar as aulas, compreendendo as explicações e sendo capazes de construir o seu próprio saber matemático. Por outro lado, pode-se analisar os professores do ensino médio, que esperam que, com a matéria ensinada, seus alunos estejam aptos a ir mais além, podendo compreender a Matemática no ensino superior, sem grandes obstáculos. Em suma, fica claro o interesse de que o estudo no ensino médio seja capaz de garantir um 'bom' curso de Cálculo em ensinos mais avançados.

Nesse mesmo contexto, Ponte (1994 apud Redling, 2011, p. 19) também argumenta que:

> O insucesso relacionado ao processo de ensino-aprendizagem da matemática para os professores em muito se deve à má preparação dos alunos desde o início da Educação Básica, aos currículos demasiadamente longos e à necessidade do seu cumprimento, obrigando-os a deixarem para trás os alunos mais “lentos”. Para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina resulta da dificuldade de compreensão dos seus conceitos e no fato de os professores não a explicarem muito bem, nem a tornarem interessante (Ponte, 1994 *apud* Redling, 2011, p. 19).

Segundo Fonseca Bom (2003), as dificuldades que surgem na transição do estudo da matemática na educação básica para o estudo superior constituem um sério problema de pesquisa. O autor se reporta à teoria antropológica do didático de Chevallard, que estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber. Fundamentando-se nessa teoria, postula que as organizações matemáticas que se estudam no ensino médio “são pontuais, rígidas e pouco articuladas entre si e, além disso, existem múltiplas descontinuidades entre a matemática ‘mostrativa’ da educação básica e a matemática ‘demonstrativa’ da universidade”. O autor fundamenta essa conclusão na análise de dados colhidos numa ampla amostra de estudantes, em que identificou respostas como as dadas nos livros didáticos, o que explicita que a relação pessoal dos alunos com as organizações matemáticas escolares está essencialmente determinada pela relação institucional.

Percebe-se que o estudo realizado na educação básica está assentado num contrato didático baseado em organizações matemáticas pontuais, com procedimentos predominantemente algorítmicos, muito mais voltados aos processos do que propriamente aos objetos matemáticos. O professor, ao desenvolver ‘bem’ os procedimentos, acredita estar desempenhando a contento sua função e que seus alunos estão suficientemente preparados para iniciar um curso universitário em que haja estudos matemáticos.

Ao passo que o professor que ensina Cálculo,

> De modo geral, as aulas são expositivas. O centro do processo ensino-aprendizagem está no professor, que deve transmitir os conhecimentos matemáticos ao aluno. Os conteúdos são apresentados prontos, de forma inquestionável e pouco têm a ver com situações da realidade. São apresentadas definições, enunciados teoremas que a seguir são demonstrados. Seguem técnicas de cálculo e exercícios. (Franchi, 1995, p. p. 39 - 43)

Mas a mesma autora não generaliza, e diz ainda haver trabalhos inovadores em relação ao ensino de Cálculo, embora sejam mínimos.

Ainda, julga que, por ter uma grande quantidade de matéria a ser exposta, torna a aula num ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar. Observa-se aqui um comportamento passivo por parte do aluno, que se restringe a algumas perguntas durante a explicação e a resolver uma lista de exercícios. Desta forma, a aula não será um meio propício para aprendizagem, fazendo com que ele tenha que recorrer a um estudo extraclasse, utilizando-se da lista de exercícios do professor e dos livros didáticos.

> Os livros apresentam os conteúdos da mesma forma que o professor apresenta em aula, conservando a mesma estrutura desde as primeiras publicações. As listas de exercício geralmente exigem do aluno apenas a repetição de técnicas apresentadas, de acordo com exercícios resolvidos como exemplo. (Franchi,1995, p. 63)

Ou seja, a compreensão do Cálculo cada vez mais se distancia do aluno.

> Diante disso, ressaltamos a importância de um ensino de Cálculo I focado não somente na aplicação de regras para os diversos cálculos, o que, tradicionalmente, não traz grandes dificuldades para os alunos na realização de tais cálculos, mas que também privilegie a interpretação, a representação e a aplicação dos seus conceitos nucleares. (ANJOS, 2023, p. 98).

Percebe-se, ao longo das publicações citadas, comentários sobre insucessos do Cálculo relacionados às lacunas de ensino e aprendizagem de matemática básica, mas também problemas relacionados ao próprio Cálculo no âmbito de um curso de graduação. Sendo assim, não há uma preocupação em dizer "este é o problema", pois uma conclusão dessa natureza seria muito equivocada, uma vez que o ambiente a ser analisado é amplo e dinâmico. O que se busca neste trabalho é apresentar evidências e, a partir delas, procurar estudá-las. E, nesta proposta, nada melhor do que poder ouvir como forma de uma melhor compreensão. A seguir, serão analisadas outras pesquisas voltadas para a visão de professores de Matemática da Educação Básica, assim como para os professores de Matemática formadores (do Ensino Superior).

4.4 VISÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA FORMADORES QUANTO AO CÁLCULO NA LICENCIATURA DE MATEMÁTICA

Os professores de Matemática da educação básica são formados, normalmente, a partir de um Curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, foram alunos de professores de Matemática do Ensino Superior. Cabe aqui uma análise, conforme relatado antes, na qual, de um lado, os professores de Cálculo julgam os casos de insucesso relacionados aos professores do ensino médio, que, por sua vez, se defendem repassando a responsabilidade aos do Ensino Fundamental. Ora, as justificativas vão se tornando uma bola de neve. É preciso uma maior reflexão.

Para Diogo (2015, p. 53):

> Em meio a essa turbulência, encontramos a Formação matemática do professor de Matemática, que, além de todas essas dificuldades e impasses que sofre por ser um curso de Licenciatura, está envolvida também por dificuldades próprias relativas ao conteúdo matemático e à prática docente que o futuro professor de matemática deverá desenvolver como professor no dia a dia da escola (Diogo, 2015, p. 53).

Não é proposta deste trabalho acreditar ser possível encontrar o ideal, o que vai resolver o problema do ensino do Cálculo, mas sim, fazer estudos na busca de propostas que auxiliem a resolver os problemas já descritos. Para isso, acreditamos ser indispensável analisar a visão de dois personagens:

- O professor de matemática formador
- O professor de matemática da educação básica

Para isso, serão explorados os trabalhos de Viola dos Santos (2012) e de Gereti e Savioli (2021), nos quais ambos apresentaram entrevistas dos personagens observando suas considerações quanto à importância do Cálculo na formação do professor de matemática:

4.4.1 Contribuições do trabalho de Viola dos Santos (2012) quanto a visão de professores formadores

Nesta seção, serão apresentados alguns olhares de Professores de Matemática Formadores sobre a importância do Cálculo na formação do professor que atuará na Educação Básica.

Viola dos Santos (2012), em sua tese de doutorado, *"Legitimidades possíveis para a formação matemática de professores de matemática (Ou: Assim falaram Zaratustras: uma tese para todos e para ninguém)"*, procura produzir possíveis legitimidades para a formação matemática do professor de matemática em cursos de Licenciatura, utilizando entrevistas com educadores matemáticos e matemáticos. Para este trabalho, consideramos uma delas como mais adequada à proposta desta pesquisa, pelo fato de estar ligada à disciplina de Cálculo e, ainda, envolver uma das autoras que julgamos como referência para nossas pesquisas bibliográficas sobre o tema de Resolução de Problemas.

No texto 2 (p. 28), intitulado *"Um curso de Licenciatura em Matemática teria as disciplinas de Matemática (Cálculo, Álgebra, entre outras), partindo sempre de problemas, fazendo relações com a matemática escolar"*, são apresentadas as visões da professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic[3], chamada pelo autor simplesmente de Dona Lourdes.

Quando o autor a questiona: "A primeira pergunta, Dona Lourdes, é que em muitos artigos e livros temos que o professor de matemática deve ter uma formação sólida em matemática. Como a senhora caracterizaria essa formação sólida? Ou seja, o que é para a senhora ter uma formação sólida em matemática?", a professora faz as seguintes considerações:

> [...] Quando eu falo de um conhecimento sólido, não estou dizendo que ele precise dominar Geometria Diferencial ou Álgebra Multilinear, mas seria bom <u>se ele aprendesse um "pouquinho" de Cálculo Diferencial Integral,</u> porque, na

[3] Este texto foi elaborado a partir de uma entrevista realizada com Dona Lourdes. Lourdes de la Rosa Onuchic possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (1954), mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos USP (1971) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP (1978). Nos últimos anos tem se dedicado ao trabalho de pesquisa em Educação Matemática atuando no programa de Pos Graduação de Educação Matemática da Unesp de Rio Claro. Grande parte de seus trabalhos são na de Resolução de Problemas. É líder do GETERP (Grupo de Estudos e Trabalhos em Resolução de Problemas). Faz parte do Grupo de Trabalho do Ensino Superior da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

> hora em que se está falando dos números, especialmente na hora de falar sobre os racionais, em que momento o professor foi levado a perceber a diferença entre frações e razões? (Santos, 2012, pp. 29 – grifo nosso)

Pode-se verificar um posicionamento a favor da disciplina a ser estudada em um curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, a professora ainda indaga a necessidade de uma "formação sólida em matemática, trabalhando matematicamente".

Outro questionamento é feito: "Dona Lourdes, que matemática os professores de matemática da educação básica precisam saber?". Um trecho da resposta obtida é o que se segue:

> Eles precisam saber muito bem a matemática que eles vão ensinar. E como é que eles devem saber isso? Esse como é na Licenciatura. Agora, dizer que eles não precisam nada do que aprenderam de novo de matemática avançada, é estúpido. [...]
> A Licenciatura deveria fazer, na formação inicial dos professores uma coisa que é diferente do que se faz no bacharelado. Ela teria que fazer ligação de cada disciplina da graduação com aquilo que o futuro professor vai ensinar na escola básica. A Licenciatura precisa dar capacidade de pensar e chegar a entender o que você não havia entendido antes. (Santos, 2012, pp. 33; grifos nosso)

Novamente, fortalece-se o papel do Cálculo na licenciatura, deixando clara a necessidade de uma visão mais próxima da futura realidade do professor da Educação Básica. Isso demonstra que a disciplina deve ser trabalhada em um formato diferente do bacharelado e sempre em sintonia com a prática do futuro docente.

Viola dos Santos continua e a indaga novamente, agora quanto à composição do currículo na Licenciatura em Matemática:

"*Dona Lourdes, na licenciatura em Matemática, os licenciandos cursam disciplinas como Cálculo Diferencial Integral, Geometria, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Análise Real, entre outras, para terem uma formação matemática. Quais são as justificativas para esses cursos comporem a grade curricular do futuro professor de matemática que atuará na Educação Básica?"*

A resposta apresentada pela entrevistada remete novamente à necessidade de um olhar diferenciado do professor formador que leciona o Cálculo na Licenciatura, objetivando sempre que "o professor fosse um educador capaz de fazer a ligação de sua disciplina com ideias existentes na Educação Básica."

4.4.2 Contribuições do trabalho de Gereti e Savioli (2021) quanto a visão de professores formadores

Gereti e Savioli (2021), através do artigo “Legitimidades para a disciplina de Cálculo na Licenciatura em Matemática”, objetivando a problematização do Cálculo na Licenciatura em Matemática, procuram também entrevistar professores em busca de compreender como eles pensam uma disciplina de Cálculo adequada à Licenciatura em Matemática, considerando suas experiências como pesquisadores ou como professores formadores e da Educação Básica. Os professores entrevistados responderam à pergunta: “Como deveria ser uma disciplina de Cálculo adequada à Licenciatura em Matemática?”.

Apresentaremos as três entrevistas, porém, fora da ordem em que foram descritas ao longo do artigo, numa preocupação de melhor organizá-las neste trabalho.

A segunda textualização do artigo (e primeira aqui no trabalho) é da professora Tânia Cabral[4], que é professora da Pontifícia Universidade Católica (PUC). Ela informa que leciona Cálculo Diferencial e Integral para as Engenharias da instituição e que tanto licenciados quanto bacharéis em Matemática estudam junto aos futuros engenheiros. Ressalta o fato de que o número pequeno de alunos na licenciatura inviabiliza a existência de uma aula exclusiva e separada. Ainda assim, deixa claro que “acredito que disciplinas de Cálculo deveriam ser destinadas para os cursos específicos em razão das aplicações” (Gereti e Savioli, 2021, p. 11). Dessa forma, mesmo com a maior parte dos alunos sendo de outra área, ela sempre busca estabelecer relações com as demandas da formação dos professores de Matemática (alunos da licenciatura).

Outro ponto em destaque dentro da entrevista se deve às percepções da professora Tânia Cabral quanto ao ensino do Cálculo, onde observa “o fato de que os alunos têm entrado na universidade, cada vez mais, com problemas com a Matemática Básica” (Gereti e Savioli, 2021, p. 11). Porém, não fica apenas nesta observação, trazendo outra problematização muito interessante, conforme o trecho a seguir:

[4] formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, com mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista de Rio Claro e doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo.

> O professor da universidade culpa o professor do Ensino Básico, o professor do Ensino Médio culpa o professor do Ensino Fundamental, esse culpa os professores dos primeiros anos. É uma bola de neve e a gente sabe disso, então não dá para estar na sala de aula e ignorar esses problemas, como professora tenho que tratá-los. (Gereti; Savioli, 2021, p. 10)

A entrevistada traz uma observação muito interessante, uma vez que os insucessos quanto ao Cálculo sempre são justificados pela situação dos alunos que chegam do Ensino Médio “despreparados”, mostrando que a preocupação é sempre justificar, culpando o professor do segmento anterior, gerando “a bola de neve”. Mas como desfazer (ou impedir a formação) dessa bola de neve? Esta entrevista vem acrescentar ao que se busca ser um dos pilares dos objetivos deste trabalho.

Ainda, segundo Gereti e Savioli (2021), numa terceira entrevista do artigo (e segunda aqui neste trabalho), é apresentada a entrevista do professor Plínio Cavalcanti Moreira, professor de Matemática da UFMG. O professor inicia dizendo que, a partir de meados de 1980, pedia que fosse designado para lecionar disciplinas da Licenciatura em Matemática. Porém, conforme declara, começa “a perceber a falta de sintonia entre a minha relação com a matemática acadêmica e a relação que meus alunos tinham com essa mesma matemática.” Reconhecendo ainda que:

> <u>Meus alunos da Licenciatura tinham um objetivo do tipo “estou me formando para dar aula na escola”, e a minha visão era a de ensinar Matemática essencialmente como um matemático.</u> (Gereti; Savioli, 2021, p. 18; grifo nosso)

Levanta-se aqui uma preocupação quanto a qual Matemática deve ser ensinada em um curso de formação de professores. No entanto, como a própria forma de lecionar passa a ser fortemente ligada a padrões e permanece em um formato tradicional, o professor confessa que, mesmo percebendo a necessidade de mudança, teve dificuldades para alterar os formatos de suas aulas, evidenciando, assim, a diferença entre a necessidade da matemática de um professor e a de um matemático. Fato este que contribuiu para as percepções que ele tem hoje. Nessas observações, pensou em uma maneira mais “legítima” (no modo dele de ver, claro) de desenvolver a formação do professor da Educação Básica, passando a se dedicar a estudar e ler tudo relacionado à formação matemática para a Licenciatura, de forma a ter uma visão mais fundamentada.

Mas, quanto à pergunta impulsionadora da entrevista, responde:

> Então, a pergunta que você acabou me colocando foi: como acho que deveriam ser planejadas e executadas as disciplinas (porque na verdade são várias) que tratam do Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura? A minha resposta é a seguinte: <u>acho que essas disciplinas não deveriam constar como obrigatórias em um currículo de Licenciatura em Matemática</u>. <u>Não é uma questão de simplesmente adequá-las</u> à Licenciatura, desenvolvê-las de um modo diferente do que se faz nos cursos de Engenharia, Computação ou qualquer outro. Não se trata de adaptar ou adequar os programas dessas disciplinas para a formação do professor da Educação Básica, acho simplesmente que não devem ser obrigatórias para o curso de Licenciatura. (Gereti; Savioli, 2021, p. 19; grifo nosso)

Esse professor defende a não obrigatoriedade da disciplina no curso de Licenciatura em Matemática, nem mesmo ressaltando uma opinião mais favorável no caso de ser mais aplicada à prática da educação básica. Deixa claro que a considera como uma proposta complementar ao curso, mas não obrigatória. Defende seu ponto de vista substanciando-se em duas razões que ele defende: uma, segundo sua visão, é que não há um estudo científico que ele conheça que mostre que disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral contribuem para a prática do professor da Educação Básica; e a segunda razão é a questão da falta de justificativa para a obrigatoriedade dessas disciplinas no currículo.

Em outras reflexões, o professor ainda afirma que “existe uma desvalorização social grande da profissão de professor de Matemática da escola. O egresso do Ensino Médio já pensa duas vezes antes de entrar para um curso de Licenciatura, porque será mal remunerado e terá condições de trabalho difíceis”. Ele acredita que estudar Cálculo entra em grande distonia, uma vez que o seu ensino e aprendizado já geram tantos problemas, o que o faz defender ainda mais a não obrigatoriedade da disciplina.

Reflete sobre a constituição do Cálculo no currículo como algo mais ligado à tradição: “se você propõe um currículo com Cálculo, não tem que explicar nada, até as diretrizes dizem que tem que ter Cálculo no currículo da Licenciatura, sem apresentar nenhuma razão para isso, sem se dar a esse trabalho”. Na entrevista, ele traz ainda uma posição muito interessante:

> O que o educador matemático sabe também é matemática, mas não é matemática reconhecida pelos matemáticos. É claro que aí está uma disputa social, questão de prestígio social das diferentes comunidades científicas. É “quase” natural a gente entender que alguém, que sabe muita matemática avançada, considere isso uma coisa muito importante para o professor de Matemática da Educação Básica. (Gereti; Savioli, 2021, p. 20; grifo nosso)

Esclarecendo que todos embarcam nesta ideia, de que “a matemática importante (para qualquer coisa) é a que os matemáticos acham importante. Afinal, os matemáticos são os que sabem matemática.” (Gereti; Savioli, 2021, p. 20) Ainda, segundo o entrevistado, as ideias sobre a matemática escolar vão cada vez mais encontrando obstáculos. Considera a matemática escolar como aquela que permite (ou deveria permitir) o aprendizado do aluno da Educação Básica, sendo muito diferente da Matemática Acadêmica, onde o Cálculo está inserido. Logo, defende a posição de que não há diferenciação entre as matemáticas, e questiona: “Separadas as matemáticas acadêmica e escolar, posso argumentar assim. Quando misturamos, vira uma coisa só, entende?” (Gereti; Savioli, 2021, p. 21). Fortalecendo ainda mais a sua visão de que não há uma devida preocupação com uma matemática que realmente trará significados para o professor da educação básica. Deixa claro também que não se trata de uma oposição entre as duas matemáticas, mas de uma necessidade de distingui-las. Ele complementa que, se houver algo na “matemática acadêmica” que seja necessário à prática docente, que isso seja considerado. Ao longo da entrevista com o professor Plínio Cavalcanti, fica evidente a sua preocupação com o tradicionalismo que impera muitas das vezes nos currículos, onde, por falta de parâmetros ideais, se mantém algo para não causar uma revolução de questionamentos.

4.4.3 Contribuições do trabalho de Gereti e Savioli (2021) quanto a visão de professores da Educação Básica

As autoras apresentam uma professora de Matemática da Educação Básica do estado do Paraná. Porém, por escolha da entrevistada, optou-se pelo sigilo do nome, passando a receber o codinome Sônia. A professora Sônia tem mais de trinta anos de experiência, é graduada em Ciências com habilitação em Matemática, possui especialização em Fundamentos da Matemática e em Educação Especial. Relatam ainda serem ex-alunas e colegas de profissão, justificando a escolha por ser considerada exigente e uma ótima educadora.

A professora Sônia informa ter feito Cálculo duas vezes, sendo que, na primeira, desistiu desmotivada pela professora que lecionava, uma vez que não considerava que tivesse didática e considerava tudo muito abstrato e “sem saber para o que serviam" (Gereti; Savioli, 2021, p. 6) todos aqueles conceitos estudados. Informa ainda que:

> Na época em que estudei, parecia ter status o professor com maior número de reprovação ou desistência dos alunos em suas aulas, era como se o conhecimento fosse para poucos. Na segunda vez que fiz a disciplina de Cálculo foi com outro professor, cuja metodologia era outra e a relação professor-aluno também. Ele era mais próximo dos alunos, isso ajudou bastante. (Gereti; Savioli, 2021, p. 6; grifo nosso)

A professora Sônia traz à discussão uma situação já mencionada por vários outros autores, quanto à desistência, evasão escolar e reprovação geradas pelos reflexos negativos do ensino do Cálculo. Ainda, menciona a distância do conteúdo em relação à sua realidade de formação.

> Lembro-me dos conteúdos, mas não com uma finalidade. Para quê? É aquilo que os alunos perguntam hoje: "para que que eu vou aprender isso?". Nos era ensinado, aprendíamos, fazíamos listas de exercícios para as provas, mas não havia uma relação com a prática, os professores não faziam uma articulação com os conteúdos da escola. Antigamente não se explicava para se aplicar e sim para aprender a fazer. (Gereti; Savioli, 2021, p.7 - grifo nosso)

A professora ainda confessa que "não era aquilo que eu tinha aprendido na graduação que eu tinha que fazer quando comecei a dar aula", afirmando ainda não saber aplicar nenhum dos conceitos como limite, derivada e integral às suas aulas na Educação Básica. Deixando claro que só usou esses conceitos na graduação. Desabafa, ainda, sobre as dificuldades de se trabalhar os conteúdos em uma sala de aula, seja pela indisciplina dos alunos, seja pela falta de interesse e comprometimento. O que se deve evidenciar é que, em momento nenhum, ela aponta que o CDI devesse ser retirado do currículo da licenciatura, mas, sim, procurá-lo aproximar das práticas do professor, de forma a permitir "que os novos professores possam sair capacitados para encarar uma sala de aula, o que não é nada fácil."

4.4.4. Concluindo a análise dos trabalhos de Gereti e Savioli (2021) e de Viola dos Santos (2012)

Num fechamento quanto às análises das entrevistas, não é fácil concluir que um professor tenha maior razão do que o outro, ou que um esteja certo e o outro errado; não seria justo. Verificamos que se referem a situações e experiências diferentes.

A professora Sônia, que trabalhou por tantos anos na Educação Básica, defende o ensino de um Cálculo que não fique preso às técnicas de derivação e integração, mas que se relacione com a prática docente, capacitando o professor de Matemática para a Educação Básica.

Já a professora Tânia, numa perspectiva diferente, defende o Cálculo que atende às perspectivas da instituição particular em que trabalha, como juntar alunos da licenciatura em Matemática com engenheiros, numa visão de que o Cálculo mais adequado seja o que trabalha problemas e projetos para que todos os alunos se envolvam.

O professor Plínio defende a necessidade de diferenciar a formação para o professor de Matemática e o matemático, defendendo a não obrigatoriedade do Cálculo na Licenciatura, uma vez que ele não consegue ver qual a justificativa para que a disciplina faça parte do currículo da licenciatura.

Por sua vez, a professora Onuchic defende o Cálculo, comungando da necessidade de ser abordado mais próximo da prática do docente. Este trabalho compactua dessa mesma ideia.

E, neste contexto, surgem novas perguntas, tais como: Como aproximar o Cálculo da prática do professor de Matemática?

E, novamente apoiando-se nas ideias defendidas pela professora Onuchic, consideramos que a Resolução de Problemas seja o caminho pelo qual se precisa seguir.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

“Com abelhas ou sem abelhas, os problemas mais interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel.” Essa frase, do matemático brasileiro Ary Quintela, retrata a grande relação entre a Matemática e o Problema. Relações tão próximas que, em muitos casos, acabam se tornando sinônimos e, em outros, num formato em que o problema é o campo para a formação da Matemática e vice-versa. Dentre esses olhares, ao longo do capítulo, será abordado um estudo baseado na literatura da Educação Matemática.

5.1 MAS AFINAL, O QUE É UM PROBLEMA MATEMÁTICO?

Newell (1972, p. 78) indaga que “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém, desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação”. Ainda, segundo Chi e Glaser (1983), “o problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta, utilizando para tal alguma estratégia em particular”.

Segundo Serrazina (2017, p. 37):

> [...] problema é uma situação para a qual se procura uma solução, não existindo à partida de um procedimento que conduza a essa solução, havendo uma fronteira tênue entre problema e tarefa de investigação. Assim, constituem características de um bom problema: (i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; (ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível (Serrazina, 2017, p. 37).

A concepção sobre o que é um problema matemático acaba, muitas das vezes, sendo bem difícil, uma vez que, nos termos do ensino de Matemática, temos ela aplicada em diferentes modelos e formas.

Intuitivamente, o problema matemático pode ser tido como algo capaz de provocar a descoberta pela informação matemática desconhecida até então, bem como a demonstração de um resultado matemático dado.

Como forma de procurar evoluir a concepção acerca do significado, é possível trazer uma clara e precisa abordagem de Dante (2000, p. 18) sobre problema matemático, definindo-o como “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”.

A palavra "problema" vem do grego e tem como significado algo que projeta mais adiante, algo que se joga para frente. Sendo assim, pela etimologia, pode-se observar que resolver problema é uma ação que permite ao homem ir mais adiante, procurar mais além, permitir o seu desenvolvimento, ou seja, se reconstruir.

Onuchic e Allevato (2004, p. 221) afirmam que problema:

> é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em saber. [...] O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (Onuchic e Allevato, 2004, p. 221).

Assim, o problema pode ser facilmente visível como o caminho traçado entre o que se conhece e o que se desconhece.

O problema traz toda uma proposta de se estudar, pesquisar, aprofundar e investigar, ou seja, tem um importante potencial de desafiar o aluno, de induzi-lo à busca da solução, tornando-o um agente ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Ao analisar os diferentes contextos em que o problema pode ser exposto, pode-se observar que, na sala de aula, o professor de matemática o usa constantemente sem muito cuidado em relação ao seu conceito, planejando desde uma designação para algo difícil até algo específico da matemática; nos livros didáticos, apresenta-o como exercícios destinados à fixação de conteúdo, dos quais o professor utiliza como forma de comprovação das habilidades necessárias a serem cumpridas.

O que ocorre nas típicas aulas de Matemática, na maioria das vezes, é:

> [...] uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que julga importante. O aluno, por sua vez, copia para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição da aplicação de um modelo de matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problema reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D’Ambrosio, 1989, p. 15)

É preciso deixar clara uma diferença entre exercício e problema. Segundo Matos e Serrazina (1996), uma situação é ou não é um problema, dependendo da reação de quem recebeu a proposta. Novamente, destacamos que a consideração de problema não se reduz ao âmbito da tarefa, mas contempla também a atividade – estabelecida pelos que nela estão envolvidos.

Uma atividade proposta pode ser um problema e um exercício ao mesmo tempo, ou apenas um deles. Como assim? Exemplificando um caso de uma atividade de potenciação, para um aluno do Ensino Fundamental ela poderá ser um problema, ao passo que, para um aluno do Ensino Médio, ela será apenas um exercício. Ora, como já abordado, o problema deve trazer a pesquisa, a busca pelo conhecimento; para um aluno que está aprendendo sobre este conteúdo, a atividade terá o caráter de problema, porém, para um aluno que já tem conhecimento formado desse conteúdo, ela não passará de um simples exercício, pois não será capaz de gerar, de provocar uma busca.

Tal fato pode ser bem ilustrado através do ditado popular que assim diz: “o que para alguns é um problema, para outros é um exercício e, para alguns, uma distração”.

Corroborando com esta visão, Ravagnani e Marques (2017, p. 50) explanam que:

> [...] não tratamos a resolução de problema como mera aplicação dos conceitos previamente abordados, no qual o aluno lê o enunciado, identifica a questão e aplica uma fórmula, mas, sim, como um veículo para o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos (Ravagnani e Marques, 2017, p. 50).

Ainda complementa Gonçalves (2006, p. 3):

> Segundo alguns educadores e psicólogos, para que uma situação seja problema para um indivíduo, ele deve satisfazer a três critérios: ACEITAÇÃO OU ENVOLVIMENTO: o indivíduo sente desejo de resolver o problema; ele se envolve com o problema por uma motivação interna ou externa; BLOQUEIO: A solução não é imediata; com os modelos que ele tem, a solução não aparece; EXPLORAÇÃO: Existe um envolvimento pessoal que o leva a explorar o problema; faz tentativa deliberada a fim de achar a solução (Gonçalves, 2006, p. 3).

Ou seja, exercício envolve aplicação do conhecimento teórico, enquanto o problema necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa. Diferenças traçadas, cabe agora a busca da definição ideal. Não cabe aqui criticar o uso das mais variadas formas do termo, ou até mesmo o de considerá-lo como impróprio e indevido em determinados momentos, mas sim, frisar seu caráter de possibilitar uma análise de forma a ampliar o conhecimento sobre ele, uma vez que a proposta da situação-problema seja esta: fazer refletir.

5.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO A LITERATURA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Resolução de Problemas é caracterizada nos currículos escolares sob diversas abordagens ou temas. Sendo assim, será apresentada aqui uma revisão literária, onde serão expostos os olhares de diversos autores da literatura matemática.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), a Resolução de Problemas é caracterizada em três temas: (1) Resolução de Problemas como contexto; (2) Resolução de Problemas como instrumento; (3) Resolução de Problemas como arte.

Analisando mais precisamente, observa-se que a “resolução de problemas como contexto” subentende os problemas como “meios para atingir fins” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 8). Os autores apontam cinco subtemas: (a) resolução de problemas como justificação, onde a resolução de problemas é justificada para o ensino da Matemática; (b) resolução de problemas como motivação: os problemas assumem um caráter impulsionador, estimulando o ensino da Matemática; (c) resolução de problemas como recreação: os problemas assumem um papel de divertir o aluno com a Matemática aprendida; (d) resolução de problemas como veículo: apresenta-se como um meio através do qual o conceito ou procedimento será aprendido; (e) resolução de problemas como prática, a qual, conforme dito, tem sido a mais frequente nas salas de aula, pois assume um papel de reforçar procedimentos e conceitos.

Na “resolução de problemas como instrumento”, os problemas são vistos como competências “a serem ensinadas no currículo escolar” (Stanic; Kilpatrick, 1989, p. 9); já, na “resolução de problemas como arte”, os alunos devem aprender a resolver problemas, onde a Matemática sintetiza-se no saber-fazer, sendo o tema, segundo os pesquisadores, o mais difícil de ser implantado na sala de aula.

Este último se formata muito nos trabalhos de Polya (1994), muito presentes em livros didáticos, onde sintetizam em passos ditos necessários para a resolução de problemas, como se observa a seguir:

Figura 1 - Esquema das etapas de Resolução de Problemas proposto por Polya

Fonte: Souza (2018).

Dando sequência a outros olhares de pesquisadores sobre a resolução de problemas, Mendonça (1999, p. 16) a caracteriza de três formas: (1) como “objetivo”, quando “se ensina matemática para resolver problemas”, incidindo na exposição da teoria para, depois, propor problemas que serão resolvidos pela aplicação da teoria ou dos procedimentos já explicados; (2) como “processo”, quando interessa o trabalho com as estratégias de solução, significando ter o foco nos processos heurísticos, trabalhando prioritariamente as estratégias de solução, de modo que os alunos tenham domínio dos processos ou procedimentos necessários para resolver um problema em Matemática; e (3) como “ponto de partida”, considerado, assim, um “recurso pedagógico, apresentado no início do processo de aprendizagem”, interessando também ao processo.

Mendonça (1999) não apenas destaca os modos pelos quais a resolução de problemas pode ser entendida, mas salienta a necessidade, com a qual concordamos, de avançar além da resolução de problemas para a formulação de problemas, tendo como foco, na atividade, o perguntar, o problematizar e o formular—aspectos que, conforme veremos na próxima seção, convergem com a exploração-investigação matemática.

Onuchic (1999, p. 206) indica três modos diferentes de abordar a resolução de problemas, porém sobrepostos na prática: “ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas”. Segundo a autora, no primeiro caso, o professor ressalta os modelos de resolução com base em Polya ou variações deles. No segundo modo, a atenção do professor está voltada para a maneira como a Matemática é ensinada e como ela pode ser usada. Por último, no ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, estes são vistos como ponto de partida para o ensino dessa disciplina. Assim, parte-se de um problema com vista à construção de conceitos e ao ensino de diversos conteúdos, incluindo até procedimentos.

De modo análogo, Branca (1997, p. 4) apresenta três interpretações mais comuns para a resolução de problemas: (1) como uma “meta”: razão principal para estudar Matemática: “aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática” (Branca, 1997, p. 5); (2) como um “processo”: para a aplicação de conhecimentos adquiridos previamente a situações novas e desconhecidas: “o que é considerado importante nesta interpretação são os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas” (Branca, 1997, p. 5); (3) como uma “habilidade básica”. Levando em conta diversas considerações sobre o que sejam habilidades básicas, Branca (1997, p. 10) afirma que “considerar a resolução de problemas como uma habilidade básica pode nos ajudar a organizar as especificações para o dia a dia de nosso ensino de habilidades, conceitos e resolução de problemas”.

Em outras palavras, Diniz (2001) esclarece que a resolução de problemas entendida como uma “meta” implica que, após o terreno preparado, o aluno pode resolver problemas; como um “processo”, os enfoques são dados aos procedimentos ou passos para chegar à resposta: “o ensino centra-se em ensinar a resolver problemas, o que, como consequência, resultaria em aprender matemática” (Diniz, 2001, p. 88); e a resolução de problemas como “habilidade básica” “deve ser entendida como uma competência mínima para que o indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho” (Diniz, 2001, p. 88).

Em síntese, pelos autores que aqui trouxemos, podemos perceber que problema e resolução de problemas são inerentes ao sujeito que se envolve e aos objetivos de quem os propõe. O problema não necessariamente é sinônimo de desafio, bem como este não reside exclusivamente na tarefa.

5.3 A HEURÍSTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A heurística consiste em um conhecimento prático que vem da experiência cotidiana continuada, sem uma comprovação científica. Trata-se de um método de inspeção que se constrói ao longo de anos de prática.

Segundo Chaves (2003, p. 12):

> As heurísticas ou algoritmos heurísticos foram desenvolvidos com a finalidade de se resolver problemas de elevado nível de complexidade em tempo computacional razoável. Ao se pensar em um problema altamente combinatório, uma opção seria analisar todas as combinações possíveis para conhecer a melhor. Se o problema possui um universo de dados pequeno, realmente esta é a maneira correta de se buscar a melhor solução, mas os problemas reais, normalmente, possuem um número de combinações muito extenso, o que torna inviável a análise de todas as combinações, uma vez que o tempo computacional exigido fica impraticável. As heurísticas procuram encontrar soluções próximas da otimalidade em um tempo computacional razoável, sem, no entanto, conseguir definir se esta é a solução ótima, nem quão próxima ela está da solução ótima. (CHAVES, 2003, p. 12)

A heurística tem sua origem na Grécia e, conforme pode-se observar, possui relação de significado com termos como “encontrar e descobrir”. Em uma melhor compreensão, pode-se concluir que a heurística se refere à descoberta. Para Newell, Shaw & Simon (apud Firmino; Brotto, 2008, p. 3):

> As heurísticas […] constituem-se como regras baseadas na experiência e no planejamento, substituindo as anteriores baseadas na procura algorítmica que chega às soluções corretas depois de ter combinado o problema com todas as soluções possíveis (Newell, Shaw e Simon *apud* Firmino; Brotto, 2008, p. 3).

Assim, como forma de melhor concluir a definição do termo heurística em resolução de problemas, reproduziremos a definição do *Novo Dicionário Aurélio* (2000, recurso on-line), que o define como “métodos e regras que conduzem à descoberta, inovação e resolução de problemas”.

Ainda, segundo o *Dicionário Houaiss* (2001, recurso *online*), o termo heurística é utilizado em vários contextos:

> “Contexto Científico: a ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos”; “Contexto de Problematização: ‘a arte de inventar, de fazer descobertas’ ou ‘método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema’ ”; e “Contexto Pedagógico: método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar” *(Houaiss*, 2001).

Cabe, então, notar o quanto esse termo será importante ao longo deste trabalho, pois atende a todos os pilares da pesquisa, seja o de avaliar a importância da resolução de problemas na evolução da Matemática, seja o de ressaltar sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

A ação “resolver problemas” pertence à história dos homens. Segundo Redling (2011), os problemas matemáticos têm ocupado um lugar central na Matemática desde a Antiguidade.

Sendo assim, será realizada uma investigação sobre tal ação, por meio de: (1) René Descartes e seus métodos de resolução de problemas; (2) o modelo 4-Stage Model, de Graham Wallas e a escola gestaltista; (3) Skinner e a escola behaviorista; (4) George Polya e a heurística de resolução de problemas.

René Descartes (1596-1650) apresentava uma preocupação com métodos de resolução, numa tentativa de transformar qualquer problema em um problema matemático. Com sua principal obra, O Discurso do Método (1637), Descartes estabelece os princípios de sua filosofia e, ainda, propõe uma combinação entre a álgebra, a lógica e a geometria. Quando publica A Geometria como um apêndice do Discurso do Método, em 1637, estabelece um método capaz de resolver todos os problemas em Geometria.

Nesta obra, segundo Vaz (2005, p. 6):

> Descartes estabelece um método que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria. O método pode ser resumidamente dividido em três partes, a saber: nomear, equacionar, construir. Nomear: consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os seguimentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema. Equacionar: estabelecer uma equação envolvendo estas variáveis. Construir: construir as soluções geometricamente, fazendo usos de régua e compasso (Vaz, 2005, p. 6).

Já no modelo 4-Stage Model, de Graham Wallas e da escola gestaltista, esta última é uma doutrina da Psicologia baseada na ideia da compreensão da totalidade para que haja a percepção das partes.

Dentro dessa doutrina, encontram-se estudos voltados à resolução de problemas. Em 1926, Graham Wallas, psicólogo inglês da London School of Economics, desenvolveu a teoria Arte do Pensamento, que definiu, pela primeira vez, o processo criativo em quatro estágios:

(a) Saturação: momento para entender e conhecer o problema e sua demanda. O problema é trabalhado de todas as formas possíveis.

(b) Incubação: momento de parar de pensar conscientemente sobre o problema, abrindo a mente para diferentes ideias, mesmo que inusitadas. O problema é tirado do consciente e fica no subconsciente. Ou seja, você "dorme" sobre ele.

(c) Inspiração: é o momento ápice, em que a ideia se torna singular, ou seja, a ideia é iluminada em sua mente. Cabe aqui o simbolismo da lâmpada que se acende, é o momento Eureka!

(d) Verificação: é a etapa da experimentação, em que se avalia, constrói e implanta a ideia de forma a certificar se é útil e se responde à necessidade do problema.

Pereira (2001, p. 10) observa que:

> A visão Gestaltista de Wallas fornece uma visão interessante da solução de um problema e representa um passo importante como contraposição às ideias de Descartes. No entanto, por apelar a noções vaga ligada ao funcionamento da 'mente', ela acaba não tendo grande valia como uma estratégia de resolução de problemas (Pereira,2001, p. 10).

Ao se observar B. F. Skinner (1904-1990) e a escola behaviorista, verifica-se uma mudança radical em relação às ideias de Descartes e Wallas no campo da resolução de problemas. Segundo Skinner, emitir uma resposta solução não é resolver um problema, e o aparecimento de uma solução não garante que a resolução do problema tenha ocorrido. Para o psicólogo, as noções de mente e mentalismo são inúteis. Pereira (2001, p. 10) ressalta que "apesar da relevância das ideias de Skinner para, digamos, treinamentos de ratos e pombos, elas se revelaram, no mínimo, insuficientes para o ensino em níveis mais elevados".

E, finalmente, quanto a George Polya e à heurística de resolução de problemas, afirma-se que o homem está imerso em diferentes situações-problema no seu cotidiano e, mesmo assim, observam-se grandes dificuldades. Segundo Polya (1994, p. 65):

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas (Polya,1994, p. 65).

Para Polya (1994), a resolução de problemas se concentra em quatro etapas: (1) Compreensão do Problema; (2) Estabelecimento do Plano; (3) Execução do Plano; (4) Retrospecto.

Quanto à “compreensão do problema”, não há como achar a solução de um problema sem entendê-lo. É essencial, inicialmente, compreendê-lo para identificar suas partes, suas incógnitas e suas informações. Num primeiro momento, podemos, após a compreensão, construir suposições, sejam elas corretas ou não. Mesmo no caso de estarem formuladas incorretamente, ainda poderão auxiliar no estudo. Quanto maior for a imersão no problema, maiores serão as chances de resolvê-lo, pois, para se chegar ao seu êxito, será necessário extrair a maior quantidade possível de informações.

Já no “estabelecimento do plano”, busca-se traçar uma trilha através da elaboração de um plano para a resolução do problema. Ao estar diante de um problema, uma das primeiras tentativas interessantes para a busca de sua resolução é procurar relacioná-lo a outro problema já conhecido.

Quanto à “execução do plano”, após a compreensão do problema e da elaboração do plano de resolução, chega-se à etapa da execução. Cabe verificar se cada trecho desse caminho está sendo executado corretamente, pois, caso contrário, se o erro for detectado apenas no final, tempo e esforço serão desperdiçados, podendo resultar em desinteresse pela continuação. Polya (1994) cita que é mais provável buscar a solução de um problema mais complexo do que de um mais fácil, uma vez que, para o primeiro, há a necessidade de responder a uma maior quantidade de perguntas e, para o último, basta responder a uma única questão. Além disso, a execução do plano de um problema mais complexo exige maior envolvimento e empenho, sendo necessário estar mais atento à sua realização.

E, finalmente, no “retrospecto”, ao se chegar à solução do problema, é preciso verificá-la e ter certeza de que o resultado realmente está correto. Se for um resultado numérico, pode-se buscar comparações ou estimativas. Para soluções literais, uma verificação bem simples é a análise da dimensão do valor resultante. Ainda, pode-se verificar por meio de outros caminhos que cheguem à mesma solução. Após resolver um problema, cabe revisar o seu resultado ou o método de resolução utilizado. Um provérbio caberia bem nesta etapa: “Não pensa bem quem não repensa”.

5.4 O MODELO METODOLÓGICO DE ROMBERG-ONUCHIC: A ESCOLHA PARA ESTE TRABALHO

Em 1992, Thomas A. Romberg publicou o artigo intitulado Perspectives on Scholarship and Research Methods, o qual foi traduzido por Onuchic e Boero (2007), passando a ter como título “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”, na revista Bolema (Boletim de Educação Matemática), do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp - Rio Claro - SP.

> Nesse artigo, o autor procura identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como têm influenciado o estudo da Matemática nas escolas. (Onuchic; Noguti, 2021, p. 7)

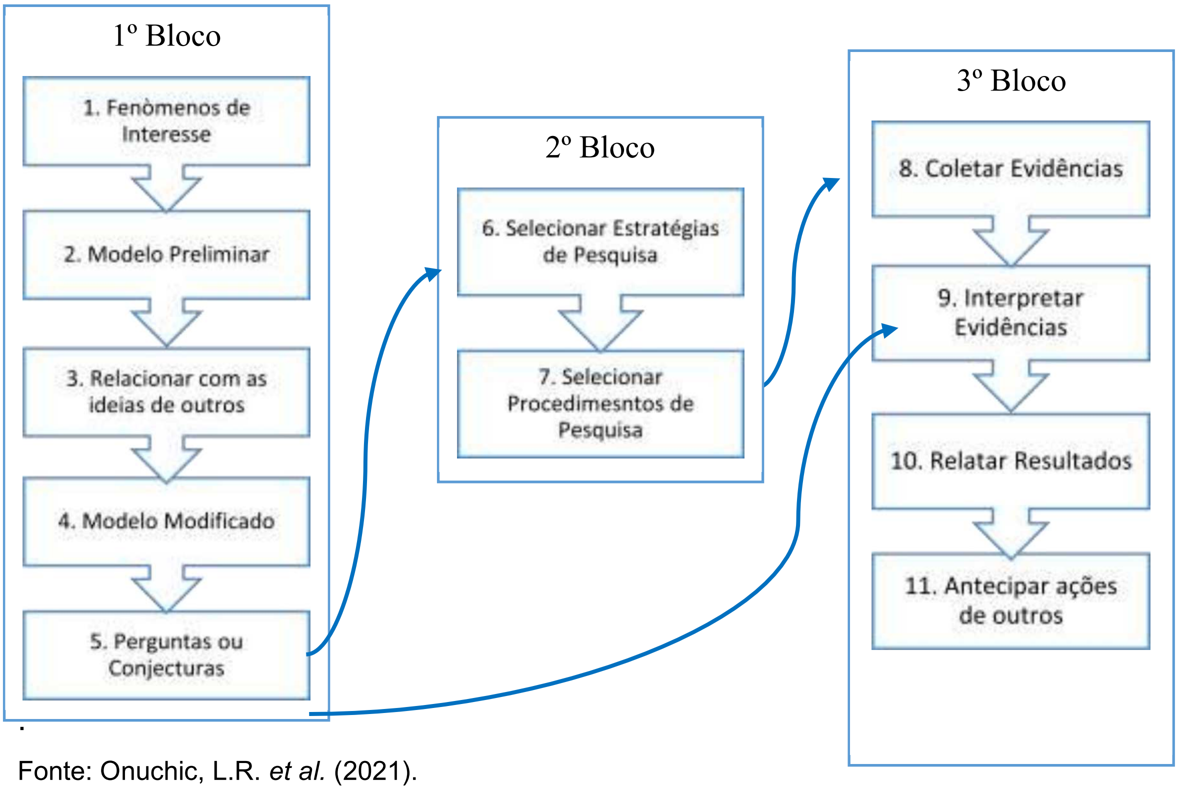
A metodologia de Romberg apresenta as atividades que um pesquisador realiza ao longo de sua pesquisa e, em um fluxograma, apresenta dez atividades distribuídas em três blocos.

Como a Resolução de Problemas é uma importante ferramenta e considerando o GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas)[5], que, após alguns anos desenvolvendo pesquisas baseadas no método citado, sugeriu algumas alterações ao seu modelo inicial, incluindo até mesmo uma nova atividade, formou-se um novo modelo, denominado pelo grupo de Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic. Esse nome foi atribuído a partir do autor inicial, Romberg, acrescido do sobrenome da professora coordenadora do grupo, Lourdes de La Rosa Onuchic.

As contribuições ao modelo inicial não se limitaram ao acréscimo de uma nova atividade (Modelo Modificado), mas também incluíram redefinições de cada uma das atividades. Segue o fluxograma deste modelo:

[5] O GTERP -Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas- desenvolve suas atividades na Unesp-Rio Claro, com encontros semanais desde 1992.

Figura 2 - Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic, L.R. *et al.* (2021).

No 1º Bloco, ocorre o momento em que o pesquisador apresenta o Fenômeno de Interesse, constituindo assim o início da pesquisa, pois é quando ele situa sua curiosidade, ou seja, define o que passa a ser o objeto de estudo. O Modelo Modificado corresponde ao momento "quando se ouve os outros", ou seja, quando se busca na literatura outros autores e pesquisadores que abordam as variáveis-chave selecionadas.

No 2º Bloco, é o momento em que o pesquisador coloca em ação o Modelo Modificado, por meio de estratégias e procedimentos de pesquisa.

No 3º Bloco, segundo Onuchic e Nogutti (2014, p. 65), “o pesquisador deverá coletar evidências e informações a partir de estratégias e procedimentos planejados no bloco anterior”.

5.5 O PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Desde os tempos primórdios vividos pelos ancestrais do homem, algo era certo para a sua sobrevivência: resolver problemas e lidar com questões do cotidiano. Observa-se, assim, a Resolução de Problemas (RP) ao longo de todo o desenvolvimento da humanidade, acompanhada da evolução matemática.

Sendo assim, ela se mostra indispensável como uma tendência metodológica da Educação Matemática, que contribui para o ensino-aprendizagem dos alunos. Compete ao professor gerar espaços de discussão, criar terrenos onde os alunos possam usar seus conhecimentos e adquirir novos conceitos com um caráter investigativo. Ensinar Matemática a partir da Resolução de Problemas é propiciar ao aluno uma construção participativa do seu conhecimento matemático.

Como afirma Polya (1994, p. 69):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (Polya,1994, p. 69).

Mas quando a Resolução Matemática passa a ser discutida para as aulas? A Resolução de Problemas somente entra em discussão mais efetiva em 1980, no livro A Resolução de Problemas na Matemática Escolar, escrito pelo “Conselho Nacional de Professores de Matemática” (*National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM), dos Estados Unidos. Esse livro possui 22 artigos, sendo o primeiro de George Polya, chamado “Sobre a resolução de problemas de matemática na high school”.

No ano de 1980, o documento Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a Década de 1980, publicado pelo NCTM, propôs que a RP fosse o foco das escolas. Segundo Ravagnani e Marques (2017), o documento tratava de uma recomendação aos professores para que propiciassem em suas aulas situações que possibilitassem processos de Resolução de Problemas como situação desencadeadora da construção de conhecimentos.

Parece, aqui, que quando se fala em recomendações para professores, trata-se da consolidação de um trabalho árduo, resultando em um produto. Porém, o que realmente estavam criando era uma semente para vários outros trabalhos – não era o fim, mas o início.

Não foi um processo muito tranquilo, visto que, segundo Schoenfeld (2008, apud Onuchic, 2021, p. 12), a expressão “[...] ‘Resolução de Problemas’ se tornou um slogan, mas sua implantação, na maioria das salas de aula americanas, foi uma farsa”. Autores americanos acrescentavam o termo “resolução de problemas” em seus livros-texto, mas, embora a maioria das edições citasse Polya, mantiveram os conteúdos com a mesma abordagem.

O NCTM veio a desencadear inspirações para a construção de novos documentos em outras nações, onde a RP, já bem estruturada como teoria, ganhou espaço nos currículos escolares. No Brasil, podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que colocavam como um dos objetivos direcionais do ensino de Matemática apostar na capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até mesmo propor novos problemas a partir deles. Em uma análise dos documentos oficiais da Educação no Brasil, percebe-se a Resolução de Problemas posta como o cerne para o ensino de Matemática.

Há de se contextualizar as transformações vividas pelo Brasil. O país deixava de ser uma sociedade de base agropecuária, em que não se necessitava de muita matemática, e passava para uma sociedade industrial, em que o conhecimento matemático se tornava necessário. Em seguida, veio a era da informação, quando mais e mais se precisava saber sobre matemática. Percebe-se ainda uma revolução dentro da escola, num cenário em que o desenvolvimento deu um salto e os professores acreditavam que tinham que preparar seus alunos, agora em maior número devido ao avanço, para o século XXI.

Para atender a essa nova demanda, foi necessário que a escola procurasse por reformas no seu ensino. Em uma delas, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento de caráter normativo que indica conhecimentos e competências essenciais para cada ano escolar, pode-se observar a valorização da RP em seus textos.

> a noção de competência é utilizada no sentido da mobilização e aplicação dos conhecimentos escolares, entendidos de forma ampla (conceitos, procedimentos, valores e atitudes). Assim, ser competente significa ser capaz de, ao se defrontar com um problema, ativar e utilizar o conhecimento construído. (Brasil, 2017, recurso on-line)

A BNCC deixa evidente, ainda, que, mais do que acumular informações, espera-se que os estudantes sejam criativos, analíticos, críticos, participativos, produtivos e responsáveis. A despeito das habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, complementa Dante (2000, p. XX), que:

> Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da Matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso são importantes. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções-problemas (Dante, 2000, p. XX).

Trabalhar nas aulas de Matemática com RP se mostra como um caminho facilitador nas relações professor-aluno e aluno-professor. Ademais, outro grande produto que pode ser observado é a capacidade de desenvolvimento e de contextualização, inserindo temas do contexto social do educando. Conforme Ravagnani e Marques (2017, p. 38):

> a utilização da Resolução de Problemas é justificada enquanto meio de transformação de conhecimentos matemáticos abstratos em conhecimentos que dialogam com as práticas sociais e que fomentam o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (Ravagnani e Marques, 2017, p. 38).

Desse modo, percebe-se o sentido no ato de ensinar e aprender a Matemática próxima do educando. Nesse contexto, Prediger, Berwanger e Mors (2009), citado por Gervázio (2019, p. 80), alertam que um dos problemas mais sérios no ensino da Matemática é que ele tem sido pensado e tratado por professores distantes da realidade do aluno. Ou seja:

> julgamos ser essencial (entre outras atitudes) disponibilizar nas aulas de Matemática metodologias de ensino que instiguem os alunos a procurarem por si só os caminhos que os guiem à absorção dos conhecimentos, aos quais se pretende ensinar. Com esse intuito, acreditamos que as aulas que focam em Problemas do cotidiano, isto é, que tem relações diretas com a realidade, faz mais sentido para os alunos e tornam-se mais atrativas (Gervázio,2019, p. 80).

Através da RP, com problemas que não visam a procedimentos mecânicos, as aulas de Matemática deixam de se preocupar unicamente com a resposta e passam a permitir o desenvolvimento do raciocínio crítico-avaliativo. Ainda, segundo Gervázio (2019, p. 80):

> carecemos de um ensino que leve em consideração as várias vertentes que englobam todo o ambiente de aprendizagem escolar (o professor, o aluno, os conteúdos, os insumos disponíveis, entre outras). Caso essas variáveis não

> sejam consideradas, a probabilidade de falha em tal processo será enorme. (Gervázio,2019, p. 80).

Acrescentando uma observação de Polya (1985, p. 21): “Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais”. Assim, a metodologia de RP mostra-se como um recurso interessante, mas não se pode deixar de reconhecer que é também uma tarefa difícil e que exige muito envolvimento. Segundo Redling (2011, p. 43), “é de fundamental importância que o professor tenha consciência de que um de seus principais deveres é o de auxiliar seus alunos, o que não é uma tarefa fácil, uma vez que exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes”.

Ainda, citando Polya (1994, p. 28):

> o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho (Polya,1994, p. 28).

Sintetizando, “o professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio aluno” (Polya, 1995, p. 1). Assim, destaca-se a importância da Resolução de Problemas. Embora suas discussões em contexto escolar sejam recentes, seu objetivo centra-se na volta da aprendizagem constituída pela resolução de problemas.

Dessa forma, destacam-se três diferentes formas de trabalho que podem ser observadas para a realização em sala de aula. Essas formas são apresentadas por vários trabalhos (Allevato, 2005; Allevato; Onuchic, 2009, 2019; Onuchic; Allevato, 2005, 2008, 2011) que buscam mostrar suas coexistências:

- Ensino sobre Resolução de Problemas;
- Ensino para a Resolução de Problemas;
- Ensino através da Resolução de Problemas.

O Ensino sobre Resolução de Problemas assume o seu papel como um novo conteúdo, estudando autores com temas relacionados à resolução de problemas e com ênfase na heurística. Polya foi um dos precursores deste tema. Configura-se como uma disciplina isolada, em que se aprende a teoria e, após isso, se aplica o que foi aprendido resolvendo problemas.

O Ensino para a Resolução de Problemas é a abordagem mais tradicional. Tem como eixo a resolução de problemas como um apêndice, um acessório, cabendo ao aluno transferir o que aprendeu em um contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ensina-se matemática para resolver problemas. São problemas que, em geral, são fechados e requerem o uso de conceitos e procedimentos anteriormente adquiridos. É o caso, por exemplo, de um professor que expõe o conceito de derivada e, ao final, apresenta problemas de aplicação desse conteúdo.

Quanto ao Ensino através da Resolução de Problemas, entende-se este como uma via para o ensino da Matemática, em um formato em que a Matemática e a resolução de problemas são simultâneas e construídas mútua e continuamente.

Nesse último caráter, o Brasil renova suas orientações curriculares (Brasil, 1997, 1998, 1999), recomendando que a resolução de problemas seja o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula.

Mas qual o porquê de tanta preocupação em introduzir uma nova metodologia nas aulas de Matemática? Acredita-se que, mesmo mostrando a RP como uma proposta mais que ideal, necessária para o processo de ensino e aprendizagem, a pergunta sempre permanecerá. Inicialmente, é necessário repensar historicamente, lembrando como foi o processo de escolarização. No primeiro momento, tinha-se a escola para um determinado grupo; estudar era para alguns. Mais adiante, por transformações na sociedade, a escola foi se tornando um ambiente cada vez mais acessível, resultando no aumento de alunos. A escola deixa de ser seletiva e passa a ser inclusiva.

Porém, o professor precisa ter um novo olhar, que acompanhe toda essa evolução, pois agora está diante de alunos com perfis diferenciados. A turma, antes homogênea, passa a ter uma característica cada vez mais heterogênea. Somado a tudo isso, ainda vêm as transformações do mundo, mais tecnológico, mais competitivo, exigindo ainda mais da escola com práticas renovadas e com maiores demandas pela educação matemática.

Resolver problemas é uma ação comum da nossa história, no cotidiano de qualquer ser humano, seja dentro da sua família, seja no seu trabalho, seja na escola. Enfim, uma das maiores certezas que o homem tem ao acordar é saber quais problemas terá ao longo do seu dia: como pagar uma determinada fatura, como organizar a sua alimentação, como chegar no horário certo na escola ou no trabalho, entre outros de maior complexidade.

Assim, deve-se familiarizar com o problema e não criar um estereótipo quanto ao termo. O problema não deve ser visto como um limitador, mas sim como um impulsionador, algo que desperta a investigação, a procura por resposta e a própria evolução.

Estar preparado para o mercado de trabalho é estar cada vez mais disposto a enfrentar problemas dos mais variados. Conhecer não é o parâmetro maior, mas sim saber como utilizá-lo, o que se consegue fazer com esse conhecimento. Conforme Vale (2015), a rápida evolução do mundo de hoje exige que todos os alunos tenham acesso a uma educação que valorize a criatividade, a inovação e a resolução de problemas.

Diante de todo o exposto, as ideias socioconstrutivistas exigem que, na sala de aula, o professor trabalhe a Matemática de forma que o aluno construa o seu conhecimento quando é colocado diante da resolução de problemas.

A escola do século XXI traça como meta preparar os alunos para uma sociedade global que se rege por comunicações de alta velocidade, com grande impacto visual e por muitas mudanças complexas, diversificadas e rápidas em todos os níveis. Assim, muitos dos trabalhos de hoje exigem de quem os executa pensar fora da caixa para permitir resolver situações a partir de diferentes ângulos e, assim, estarem aptos a construir e defender um novo modelo de pensamento. Isso significa envolver os alunos na resolução de problemas, considerando diferentes pontos de vista para explorá-los de vários modos e recorrer a múltiplas estratégias.

O trabalho desenvolvido defende a proposta do Ensino através da Resolução de Problemas, quando um problema proposto é capaz de impulsionar o interesse pelo ensino e pela aprendizagem, tornando o aluno (antes um mero agente passivo, ouvinte e anotador) um agente ativo que, através da pesquisa, consegue aprender definições ligadas ao Cálculo e resolver situações da sua área de forma eficaz.

5.6. MODELOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Numa análise maior sobre problemas, é considerável analisar algumas ideias de processos propostos.

Seguem dois modelos de resolução de problemas:

i) As etapas de Polya para a resolução de um problema:

Como já foi discutido sobre as etapas de Polya e toda a sua colaboração pioneira no estudo da resolução de problemas e, como forma de mostrar a sua significância para esses primeiros passos, serão enfatizadas aqui as etapas através de uma interpretação de Souza (2018), que esquematiza as propostas para a Resolução de Problemas de uma maneira que pode ser desenvolvida na sala de aula, estando a figura do docente no centro desse ciclo, onde cabe a ele observar, mediar, incentivar e questionar. Ou seja, mostra o professor como o impulsionador do ciclo.

Observa-se a importância dos professores no processo de ensino e aprendizagem. Através de suas análises e percepções quanto às dificuldades dos alunos, são capazes de direcionar suas aulas como forma de corrigir as lacunas encontradas, estimulando o aluno, desenvolvendo e aprimorando seu conhecimento.

ii) Metodologia de Resolução de Problemas através da perspectiva de Onuchic e Allevato:

Será apresentada aqui uma metodologia descrita pelas autoras Allevato e Onuchic (2009, 2011), que apresenta dez etapas para a resolução de problemas em sala de aula: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de problemas.

Todas essas etapas podem ser sintetizadas conforme o esquema elaborado pelas autoras Allevato e Onuchic (2021).

Figura 3 - Esquema das 10 etapas para o desenvolvimento da Metodologia de Resolução de Problemas

Fonte: Allevato e Onuchic (2021).

Inicialmente, é apresentado um problema pelo professor ou este aceita um proposto pelos alunos. Esse problema inicial é chamado de problema gerador. Deve-se estar ciente de que, neste momento, o conteúdo matemático necessário para a resolução pode não ter sido trabalhado em sala de aula. Em sequência, cada aluno receberá o problema impresso e deverá fazer a leitura. Depois, deverão se agrupar e realizar novamente a leitura. Assim, virá a outra etapa, a resolução do problema, na qual os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo de forma coletiva. Neste momento, o problema gerador conduzirá à construção do conteúdo planejado.

Acompanhando os alunos para observá-los e incentivá-los, cabe ao professor mediar de forma a levá-los a pensar e trocar ideias colaborativamente dentro do grupo.

Na etapa de registro das resoluções na lousa, representantes dos grupos registram suas resoluções, estejam elas certas ou erradas, para que possam analisá-las e discuti-las. Tal discussão ocorrerá na etapa seguinte, a plenária, onde serão observadas as resoluções na lousa e o professor, atuando como guia e mediador, deverá incentivar a participação ativa e efetiva de todos os alunos.

Na busca pelo consenso, depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas, o professor tentará chegar a um consenso sobre o resultado correto.

Finalmente, na etapa de formalização e resolução do problema, o professor registra na lousa uma apresentação formal, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos.

6 INTERPRETAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

Seguindo a estrutura metodológica, foi utilizado para análise um questionário elaborado por meio do aplicativo Google Forms, com o objetivo de examinar a visão de docentes da Educação Básica sobre a abordagem de conteúdos de Cálculo em suas práticas em sala de aula.

A investigação foi organizada em quatro eixos: Formação, Experiência Profissional, Relação entre Cálculo e Professor, e Relação entre Cálculo e Resolução de Problemas.

No eixo “Formação”, o objetivo era identificar a formação acadêmica do docente consultado.

No eixo “Experiência Profissional”, verificaram-se informações como: tempo de experiência em sala de aula, se lecionava na rede particular e/ou pública e se já havia lecionado disciplinas de Matemática em cursos de nível superior.

Já no eixo “Relação entre Cálculo e Professor”, objetivou-se verificar se, na formação do docente, a ementa de seu curso incluía a disciplina de Cálculo e, ainda, sua opinião quanto à importância dessa disciplina para sua prática. Além disso, foi realizado um levantamento sobre a percepção do consultado quanto à relação dos conteúdos da disciplina com a Educação Básica, solicitando que indicasse alguns conteúdos que considerasse exemplos dessa relação. Nesse eixo, também foi disponibilizado um campo para que o docente descrevesse sua percepção sobre essa relação proposta para análise.

Por fim, no eixo “Relação entre Cálculo e Resolução de Problemas”, investigou-se o conhecimento sobre a metodologia de Resolução de Problemas e a percepção de que o uso de problemas comuns à Educação Básica ao longo do estudo do Cálculo poderia auxiliar o professor em sua prática. Neste último eixo, também foi realizado um levantamento das opiniões apresentadas.

O formulário continha um total de onze questões, sendo dez de resposta obrigatória e uma opcional, destinada a comentários sobre a relação entre o Cálculo e a prática docente na Educação Básica, uma vez que a questão anterior já havia sido respondida por meio de uma mensuração.

O questionário foi enviado por meio de um link gerado pelo próprio aplicativo, tendo como público-alvo professores de Matemática do município de Muriaé[6] e região, bem como de Itaperuna[7] e proximidades.

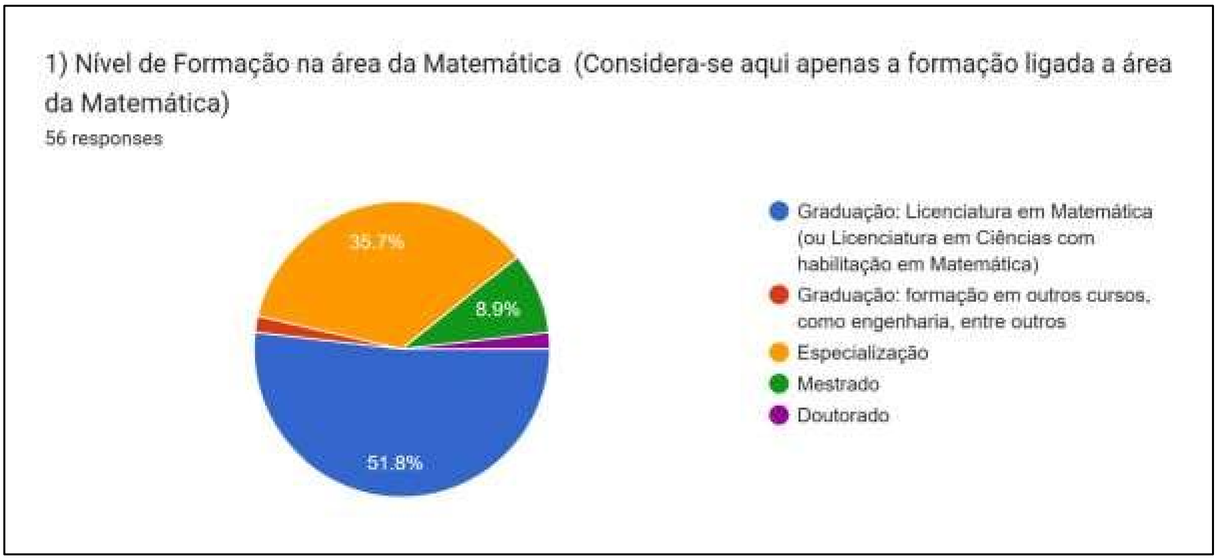
Ao todo, foram consultados cinquenta e seis professores de Matemática que lecionam no ensino fundamental e médio.

A seguir, será apresentada uma interpretação dos resultados obtidos a partir das respostas coletadas.

6.1. ANÁLISE QUANTO À FORMAÇÃO ACADÊMICA

Dos cinquenta e seis professores consultados, pelo gráfico da Figura 4, percebe-se que a maior parte dos docentes tem sua formação limitada à licenciatura. Quando analisada a pós-graduação, percebe-se que há um número expressivo com especialização ligada à área.

Figura 4 - Gráfico referente a pergunta 1 do Questionário



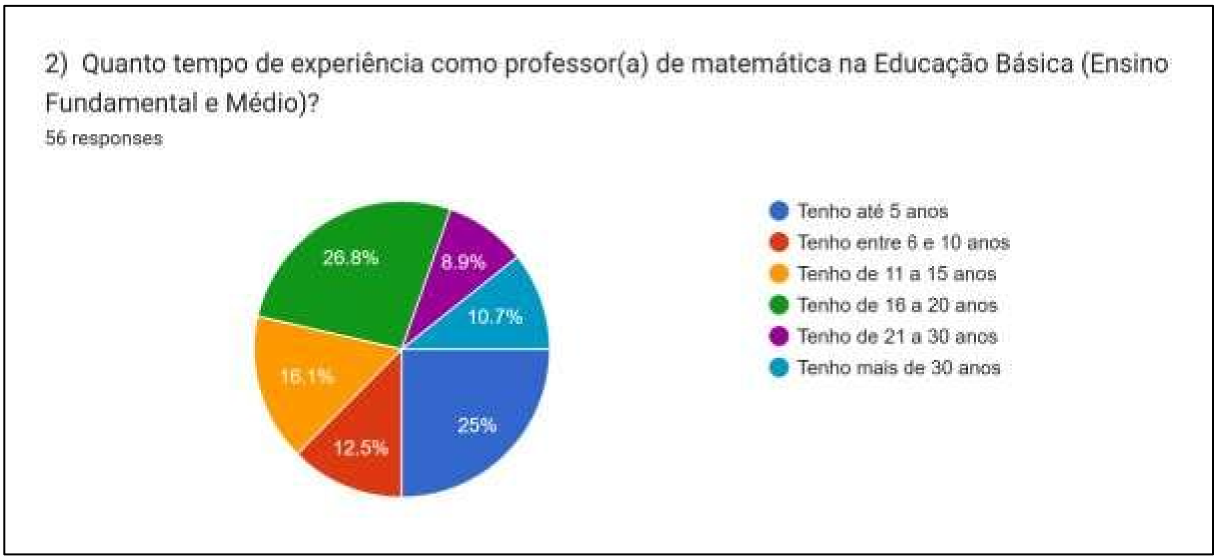
Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms.*

[6] Município da Zona da Mata Mineira com população estimada em 108 763 habitantes. Apresenta forte relação com várias cidades vizinhas.
[7] Município da Microrregião de Itaperuna e da Mesorregião do Noroeste Fluminense, no estado do Rio de Janeiro, com população de 108 300 habitantes.

6.2. ANÁLISE QUANTO À EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL

Nesta seção, composta de três perguntas, pode-se verificar que, quanto ao tempo de experiência profissional, 75% dos professores respondentes apresentam mais de cinco anos lecionando na Educação Básica. Esta pergunta teve como propósito inicial verificar se haveria alguma relação entre a perspectiva e o seu tempo (Figura 5).

Figura 5 - Gráfico referente à pergunta 2 do Questionário

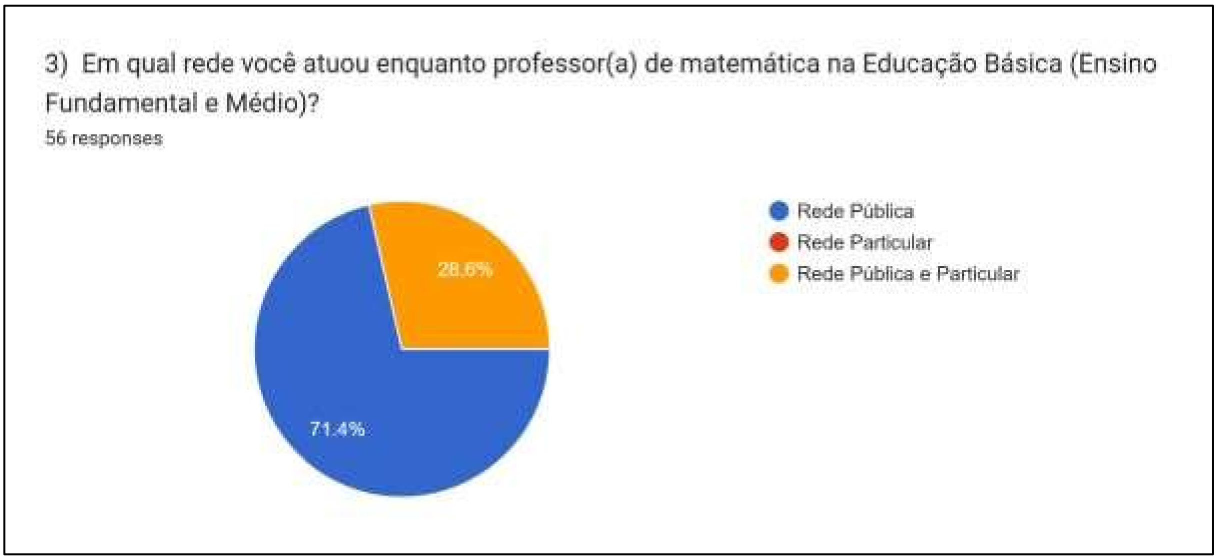


Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Quando estudado por dezenas de anos, é notória a proximidade entre as parcelas de professores de até dez anos com professores de onze a vinte anos.

Quanto à rede, verificou-se que a maioria atua em escolas públicas. E, mesmo lecionando na rede particular, ainda assim o fazem em concomitância com o público (Figura 6).

Figura 6 - Gráfico referente à pergunta 3 do Questionário



Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Na seção, ainda pode-se ver que a maior parte dos professores consultados não atuou no ensino superior (Figura 7).

Figura 7 - Gráfico referente à pergunta 4 do Questionário

Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Esta pergunta, em específico, teve como proposta verificar se os consultados tinham experiência em uma instituição de ensino superior, uma vez que isso pudesse influenciar na análise ligada ao Cálculo. Contudo, verifica-se uma fração grande de docentes sem a experiência mencionada.

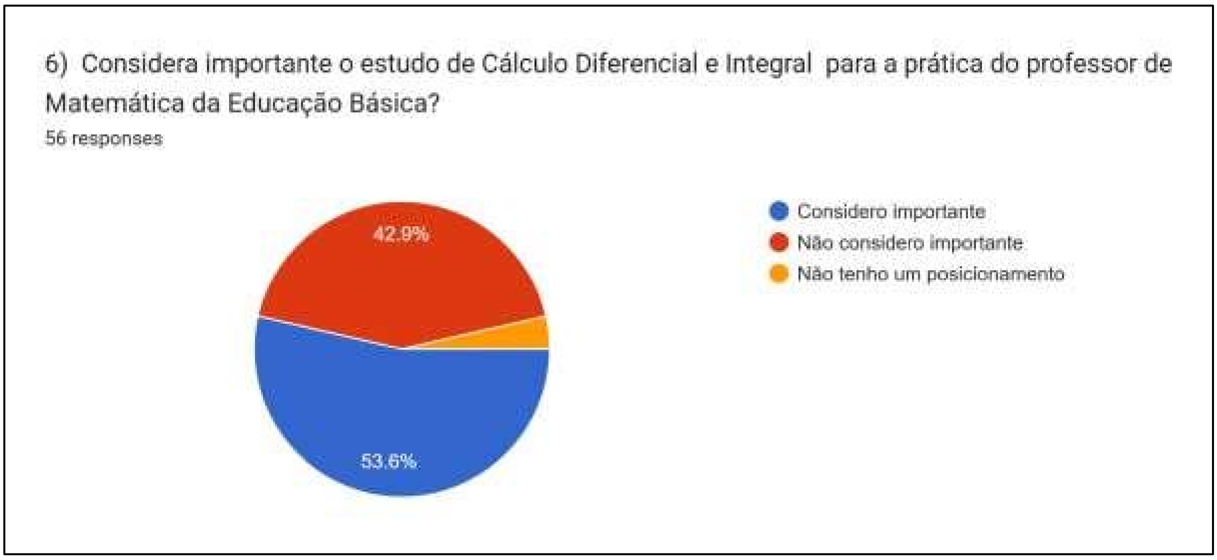
6.3. ANÁLISE QUANTO À RELAÇÃO CÁLCULO E PROFESSOR

Nesta seção, pode-se verificar, através da pergunta 5, que mais de 98% dos consultados estudaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral durante sua formação. Ou seja, o Cálculo é um conteúdo comum aos professores consultados.

Quando o questionário começa a indagar sobre a visão do professor quanto à aplicabilidade da disciplina na Educação Básica, mais da metade se posicionou como considerando importante o estudo.

Fato este que converge com os objetivos desta dissertação no que diz respeito a verificar a visão dos professores de Matemática da Educação Básica sobre o Cálculo em sua prática.

Figura 8 - Gráfico referente à pergunta 6 do Questionário



Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Esta análise quantitativa é uma importante ferramenta para verificar se os objetivos que alicerçam este trabalho realmente são fundamentados.

Dessa forma, embora apresentemos dados numéricos, isso não descaracteriza a natureza desta pesquisa, que é qualitativa, pois vamos além: queremos entender e analisar as respostas obtidas ao longo do processo, procurando fazer associações.

Seguindo, a pergunta seguinte do questionário, *“7) Saberia citar algum conteúdo que leciona em suas aulas na Educação Básica e que julga ter uma relação com o Cálculo?”*, apresentou as seguintes respostas:

> “Não sei dizer algum conteúdo que vejo relação”
> “Não”
> “Nenhum no ensino fundamental”
> “Função”
> “Não considero importante o estudo de Cálculo Diferencial e Integral para a prática do professor de Matemática da Educação Básica. Embora esses conceitos sejam fundamentais em níveis mais avançados, na educação básica, os alunos precisam se concentrar em habilidades matemáticas essenciais, como aritmética, álgebra e geometria.”
> “Leituras gráficas”
> “Não diretamente, mas o raciocínio desenvolvido no estudo de cálculo contribui para facilitar o planejamento e ministração das aulas.”
> “Desenvolvimento de raciocínio.”
> “Álgebra”
> “Análise do vértice de uma parábola”
> “Funções (afim, quadrática,...), polinômios, progressões geométricas”
> “Áreas; perímetros; volume; entre outros.”
> “Estudo de funções exponencial, linear ou quadrática (é possível ver nos gráficos)”
> “Operações com irracionais (radiciação) e função do primeiro e segundo grau”
> (RESPOSTAS OBTIDAS NO QUESTIONÁRIO, 2024)

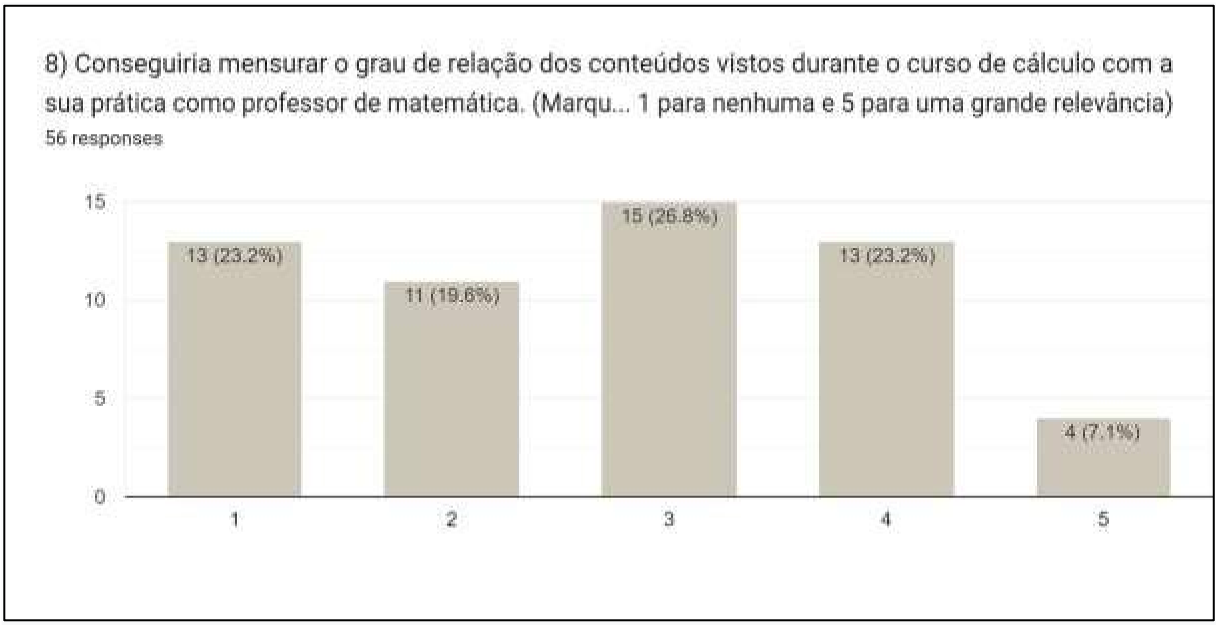
Analisando as respostas, pode-se chegar às seguintes verificações: mais de 35% dos professores respondentes disseram “Não” ou termo semelhante, constatando, assim, uma grande parcela que não percebe a aplicação do Cálculo à sua prática na Matemática escolar.

No entanto, também pode-se observar que muitos professores afirmaram não ver seus conteúdos se mostrarem ligados aos estudados e outros, ainda, não souberam dizer, ou seja, mesmo que pudesse vir a ser, não tiveram uma formação que os capacitasse para fazer a relação. Houve também outros professores que indicaram funções, gráficos, progressões geométricas, áreas, volumes, entre outros.

No entanto, pode-se perceber que as respostas obtidas não divergem das apresentadas anteriormente nas bibliografias, quando analisamos as pesquisas de Viola dos Santos (2012) e Gereti e Savioli (2021).

Na questão seguinte, resolvemos verificar o quanto eles mensuravam, numa escala de 1 a 5, a relação de conteúdos estudados em Cálculo com os da Matemática Básica. O resultado mostrou que a maior parte optou pelas posições mais baixas. Julgamos o gráfico a seguir como fundamental para entender os resultados.

Figura 9- Gráfico referente à pergunta do Questionário sobre a relação entre conteúdos de Cálculo e da matemática básica



Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

E, a fim de verificar mais informações sobre a questão anterior, a questão seguinte pediu que apresentassem comentários que julgassem importantes.

> "Infelizmente com a falta de conhecimentos básicos dos alunos, os professores na maioria das vezes não possuem motivação de tentarem aumentar o nível da dificuldade como temas que remetem ao assunto aqui em questão."
> "Embora o Cálculo seja um tema fundamental em níveis mais avançados, sua aplicação direta na educação básica é limitada. A maioria dos alunos não chega a estudar esses conceitos em profundidade. Contudo, ter uma compreensão básica do Cálculo pode ajudar na contextualização de alguns tópicos, como a Matemática Financeira e a interpretação de gráficos. No entanto, a ênfase maior deve estar em habilidades matemáticas essenciais que são mais relevantes para o dia a dia dos estudantes."
> "Nada que aprendi na faculdade tem a ver com dar aula"
> "Apesar de não ser conteúdos que iremos aplicar em sala de aula eu acho importante para explicação do todo e correlação com outras áreas de aplicação da matemática como engenharia no geral"
> "Infelizmente muitas vezes não conseguimos correlacionar todos os fundamentos dos conteúdos, como demonstrações de fórmulas, por desinteresse ou dificuldades de compreensão por uma parte significativa dos alunos; muitas vezes levando apenas à prática das aplicações de fórmulas."
> "A licenciatura deixa muito a desejar com os conteúdos que trabalhamos na sala."
> "conceitos aprendidos no curso auxiliaram na minha prática pedagógica"
> (RESPOSTAS OBTIDAS NO QUESTIONÁRIO)

Na análise das respostas, trouxe-se à discussão a desmotivação dos alunos e a percepção sobre a pouca relação com a Matemática Básica. Ainda, houve desabafos de professores que se mostraram insatisfeitos quanto à formação para atuar no seu trabalho.

Embora, também, tenha havido professores que demonstraram que o estudo do Cálculo agregou em suas práticas pedagógicas e no desenvolvimento matemático.

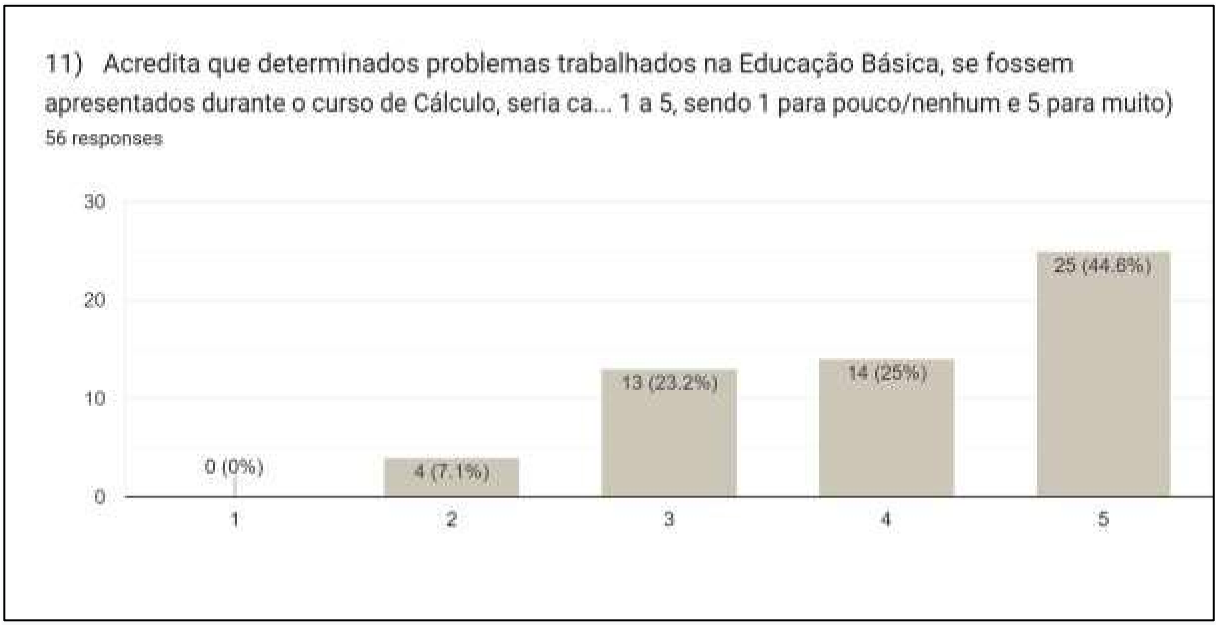
Mas algumas respostas chamaram muito a atenção, tais como: “A licenciatura deixa muito a desejar com os conteúdos que trabalhamos na sala” e “Nada que aprendi na faculdade tem a ver com dar aula”, sendo deixadas para ser tratadas mais adiante.

6.4. ANÁLISE QUANTO A RELAÇÃO CÁLCULO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando consultados sobre a Metodologia da Resolução de Problemas, 20% dos respondentes disseram não a conhecer.

Já, quando questionados se problemas trabalhados na Educação Básica, se fossem abordados durante as aulas de Cálculo, poderiam facilitar a compreensão e visão do professor sobre, até mesmo, como justificativa para o seu estudo, e, de novo, propondo que mensurassem de 1 a 5, observou-se que mais de 40% consideraram como muito relevante. Analisando mais a fundo, quase 70% consideraram muito relevante.

Figura 10 - Gráfico referente à pergunta do Questionário sobre a visão de professores quanto a problemas que relacionassem o Cálculo e a matemática básica



Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Concluindo, percebe-se uma sintonia entre a pesquisa bibliográfica e o questionário quanto ao Cálculo para o professor de Matemática da Educação Básica, podendo ser evidenciado o seguinte:

• Há uma grande distância entre o que se estuda e para o que se estuda;

• Com a formação, não conseguem ver aplicações importantes fora dos conceitos, não relacionando-as com a sua prática em sala de aula.

Mas o questionário traz uma situação interessante, no que diz respeito ao uso de problemas como forma de relacionar as matemáticas. Ora, basta voltar a analisar o gráfico (Fig. 8).

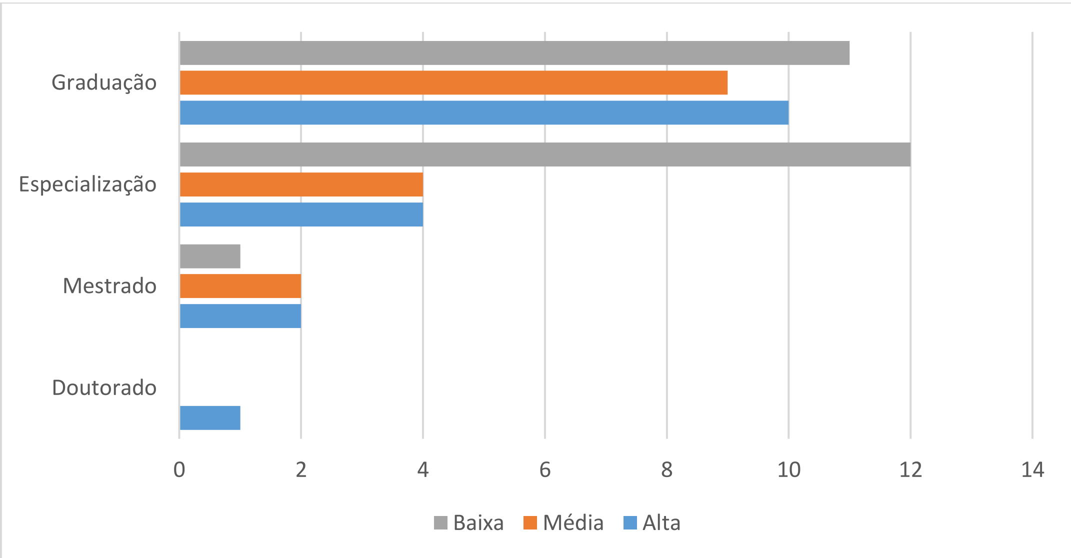
Conforme já dito, não há aqui, neste trabalho, um tribunal para julgar culpados, mas sim uma proposta de achar, neste emaranhado de situações, problemas, dificuldades e anseios, um fio que auxilie neste panorama. Por isso, acreditamos que apresentar a metodologia como Resolução de Problema pode ser uma boa proposta. Pensando tanto para professores formadores, de forma a tentarem incorporá-los em aulas de Licenciatura, quanto para professores da Educação Básica como forma de notarem percepções em conteúdos trabalhados em suas aulas.

6.5. EXPLORANDO MAIS OS DADOS DO QUESTIONÁRIO

Ainda usando os resultados do questionário, procurou-se relacionar alguns dados entre as seções. Tendo como foco as perguntas de número 8 e 11, onde os consultados foram capazes de dimensionar a sua opinião através de uma escala, procurou-se analisar outras informações, como descrito adiante.

Na pergunta de número 8, solicitava-se a mensuração de 1 a 5 da relação dos conteúdos vistos durante o curso de Cálculo com a prática do professor de Matemática. Como forma de facilitar as interpretações, consideraram-se as notas 4 e 5 como “Alta”, a nota 3 como “Média” e as notas 1 e 2 como “Baixa”, chegando-se ao seguinte gráfico (Figura 11):

Figura 11 - Gráfico relacionando a Visão por etapa acadêmica sobre a aplicabilidade do Cálculo na Educação Básica



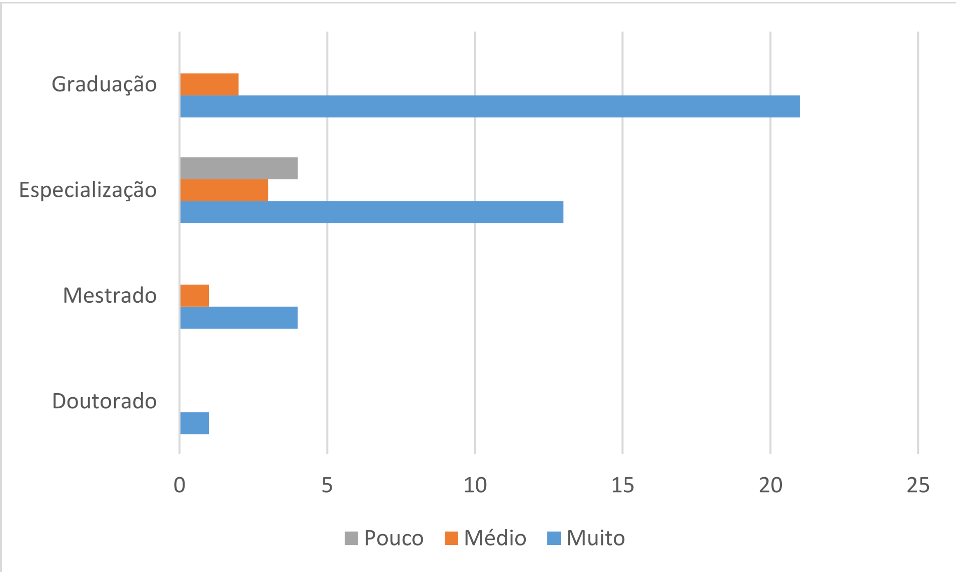
Fonte: Formulário elaborado pelo próprio autor no *Google Forms*

Percebe-se que, entre os professores com apenas graduação, há uma grande preocupação com os que consideram insatisfatória a aplicação nas suas aulas, embora ainda se perceba, de forma não muito divergente, avaliações positivas. No entanto, quando se analisa a pós-graduação, a Especialização chama a atenção, pois o número que a considera baixa é muito superior. Como o questionário não procurou investigar maiores detalhes sobre as formações, não se obtém muita informação quanto aos cursos de especialização, se são realmente voltados para o ensino e aprendizagem da Matemática (embora fosse solicitado na questão), e se as ementas contemplavam a disciplina de Cálculo.

Mas, como a Especialização é, entre os consultados, a maior porcentagem de pós-graduação, inclinamo-nos por uma maior análise dos resultados observados.

Quando, de forma análoga, comparamos os dados da questão 11, onde se questionava sobre a visão quanto ao uso de problemas durante o curso de Cálculo, de forma que o estudante perceba a sua aplicabilidade enquanto professor de Matemática da Educação Básica, depara-se com a graduação e a especialização considerando isso de muita importância.

Figura 12 - Gráfico: A visão por etapa acadêmica sobre a apresentação de Problemas que relacionam o Cálculo com a Educação Básica



Fonte: Próprio autor

Sendo assim, verifica-se uma situação: quando analisado pela formação acadêmica, os que se destacam por não verem relação entre o Cálculo e a Matemática escolar também são os que mais pedem por problemas que mostrem essa relação. Ou seja, há uma coerência dentro de uma situação-problema.

Quando direcionamos a análise das respostas no questionário, foi possível organizar e verificar o seguinte em relação à percepção do Cálculo com a prática do professor de Matemática na escola:

Figura 13 - Algumas respostas da questão 9 do Questionário

9) Comente, caso queira, a sua resposta na questão anterior.
Nada que aprendi na faculdade tem a ver com dar aula
A licenciatura deixa muito a desejar com os conteúdos que trabalhamos na sala.

Fonte: Questionário aplicado

Tais respostas endossam ainda mais a preocupação já detectada entre os consultados, firmando a ideia de que é necessário procurar traçar mecanismos capazes de solucionar.

Deparar-se com falas como as destacadas reforça muito os grandes gargalos, uma vez que a formação não capacita dentro das exigências e necessidades que serão cobradas do formado.

7. RELACIONANDO PROBLEMA DA EDUCAÇÃO BÁSICA LIGADO A IDEIAS DO CÁLCULO

Neste capítulo, será proposta uma busca por atividades trabalhadas por professores que as relacionam com o conhecimento, através da metodologia de Resolução de Problemas. Acreditamos que seja o caminho mais fácil para os professores, uma vez que resolver problemas é algo tão natural para eles.

Ou seja, não se busca procurar mecanismos de ensino e aprendizagem diferenciados, mas trabalhar os que fazem parte da prática, porém em um formato que apresente maiores resultados.

Para este trabalho, consideramos o formato de "ensinar por meio de problemas", pois compreende entender o processo do começo ao fim (Vogardo, 2014, p. 51). Reconhecemos que não seja uma tarefa fácil, mas, por meio dela, é possível trazer aos alunos a ideia de capacidade de fazer matemática, proporcionando entusiasmo e confiança.

Apresentaremos alguns problemas que já são trabalhados, relacionando-os com conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral.

I) Problema da área do Círculo

O estudo sobre a área do círculo está presente em livros didáticos do Ensino Fundamental.

a) Reestruturando o problema de um livro didático

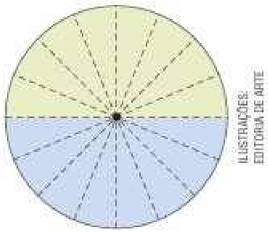
A seguir, será apresentado um exemplo de como é apresentada a fórmula da área de um círculo em um livro didático.

Figura 14 - Demonstração da fórmula da área do círculo

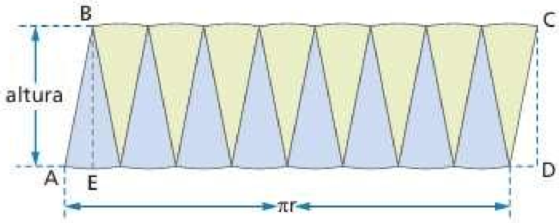
Área de regiões circulares

Para determinar a expressão para o cálculo da área do círculo, vamos utilizar a ideia de aproximação por áreas conhecidas. Observe.

Em uma cartolina desenhamos um círculo dividindo-o em 16 partes iguais. Depois recortamos, separando cada pedaço.



Juntamos as partes recortadas, encaixando-as, conforme a figura a seguir:



SAIBA QUE

Quanto maior a quantidade de partes em que dividimos o círculo, mais próxima de um retângulo fica a figura formada.

A superfície do círculo foi reorganizada, e sua área se aproxima da área de uma figura que conhecemos: o retângulo.

Assim, podemos calcular a área do círculo, multiplicando a medida da base pela medida da altura. Observando a imagem acima, percebemos que a medida da base é a metade da medida do comprimento da circunferência, e a medida da altura é equivalente à medida do raio da circunferência. Temos:

$$A = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir.

Fonte: Giovane Jr e Castrucci, (2018, p.235)

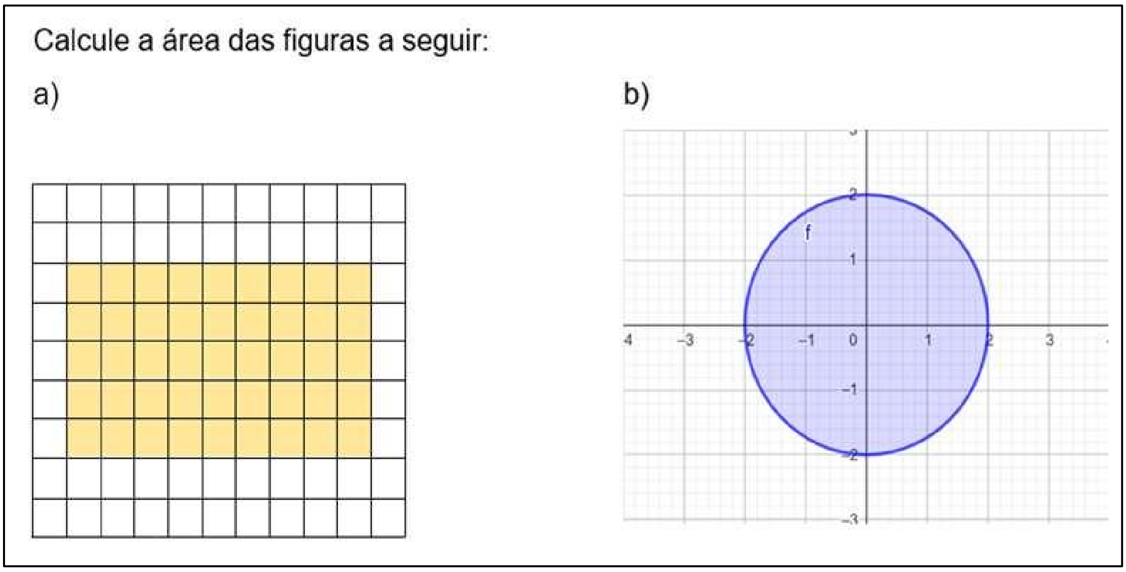
Pode-se observar que o livro já traz uma explicação demonstrando a fórmula para o aluno e, após esta etapa, já o direciona para exercícios. Ou seja, mantém a clássica proposta de “Ensino para a Resolução de Problemas”. Veja na Figura 14. Logo após, dá-se continuidade com: “Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir” (Giovane Jr. e Castrucci, 2018, p. 235).

Segundo Vogardo (2014, p. 51), o professor que ensina para resolver problemas está preocupado apenas em fazer com que os alunos tenham a habilidade de transferir aquilo que eles já aprenderam num contexto de um problema para outro.

Esta análise não tem por foco julgar que o livro não está de acordo, mas sim mostrar que nada impede que o professor, no planejamento de suas aulas, use o recurso do livro de forma diferenciada. O professor pode organizar de forma que o ensino ocorra por meio da resolução de problemas, não fazendo o aluno apenas “decorar” uma fórmula, mas sim compreendê-la.

Uma proposta seria a seguinte:

Figura 15 - Problema sugerido para a área do círculo



Fonte: Próprio autor

Note que, ao apresentar esta atividade inicialmente, será capaz de fazer com que o aluno tente relacionar seus conhecimentos prévios de área para encontrar a área do círculo.

Inicialmente, acredita-se que ele conseguirá resolver facilmente a primeira área usando o papel quadriculado e, ao tentar aplicar a mesma ideia para o círculo, perceberá a dificuldade. O aluno deixa de ser um agente passivo no ensino e aprendizagem e passa a desempenhar o seu papel de protagonista.

Percebe-se que, com uma alteração no mecanismo, é possível desenvolver um outro olhar, através de questionamento e construção de argumentos, tornando os alunos “sujeitos” do seu aprendizado, o que implica em fazer relações entre temas e conteúdos abordados em sala de aula, pensando de forma integrada.

b) Organização da resolução do problema

Um professor de matemática que já tenha lecionado no Ensino Fundamental observa uma grande abstração por parte dos alunos em comparação com o cálculo de área dos polígonos de forma geral.

No retângulo, por exemplo, é possível verificar divisões em quadradinhos de uma unidade e contar o total, o que corresponde à sua área, chegando à fórmula: $A_r = b.h$, ou seja, a área de um retângulo é igual à base vezes altura. E, desta demonstração, chega-se ao cálculo dos demais quadriláteros. Bem como do próprio triângulo, uma vez que este é a metade de um triângulo. Essas habilidades estão presentes normalmente nos livros de 7º ano.

Em um problema como o proposto, é possível proporcionar ao aluno a aplicação do que ele traz consigo para a sala de aula (conhecimentos sobre áreas de polígonos estudados) e, a partir dele, repensar como resolver o problema do cálculo da área do círculo.

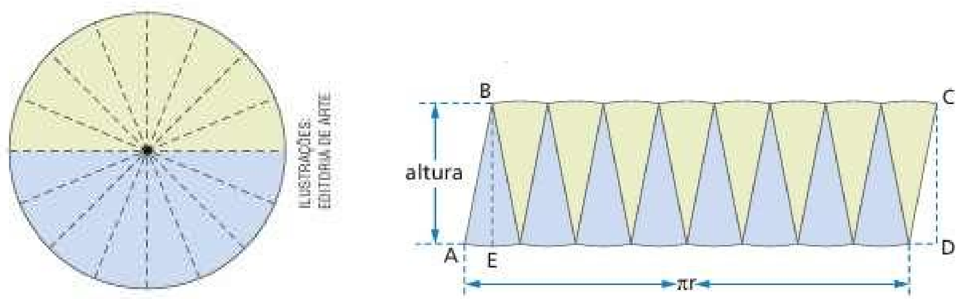
Segundo Allevato e Onuchic (2021), observando-se as etapas da resolução de um problema, cabe ao professor o seu papel de mediador, questionador e gerador de situações. O problema é proposto (etapa 1), os alunos são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios (etapa 2), permite-se a discussão em pequenos grupos de alunos (etapa 3), o professor incentiva (etapa 4), os problemas são resolvidos (etapa 5), os alunos apresentam a resolução (etapa 6), passa-se a uma discussão sobre as resoluções (etapa 7) a fim de chegar a um consenso (etapa 8), chegando à formalização do conteúdo (etapa 9), para que os alunos possam partir para a resolução de novos problemas relacionados (etapa 10).

Nesta situação, na fase 9, o professor pode propor a mesma ideia utilizada na área do retângulo, porém, agora, ao invés de subdividir em quadrados, conforme a figura, apresentar divisões em setores.

Uma primeira ideia poderia ser o uso de um círculo impresso e, com a ajuda de um transferidor e uma régua, dividí-lo em setores, ou até mesmo cortar o círculo e dobrá-lo sempre em diâmetros (conforme a figura 10.a). Em seguida, pedir que seja montado essas “fatias” conforme a figura 11.b.

Figura 16 - Demonstração da área do círculo no Geogebra

a) b)

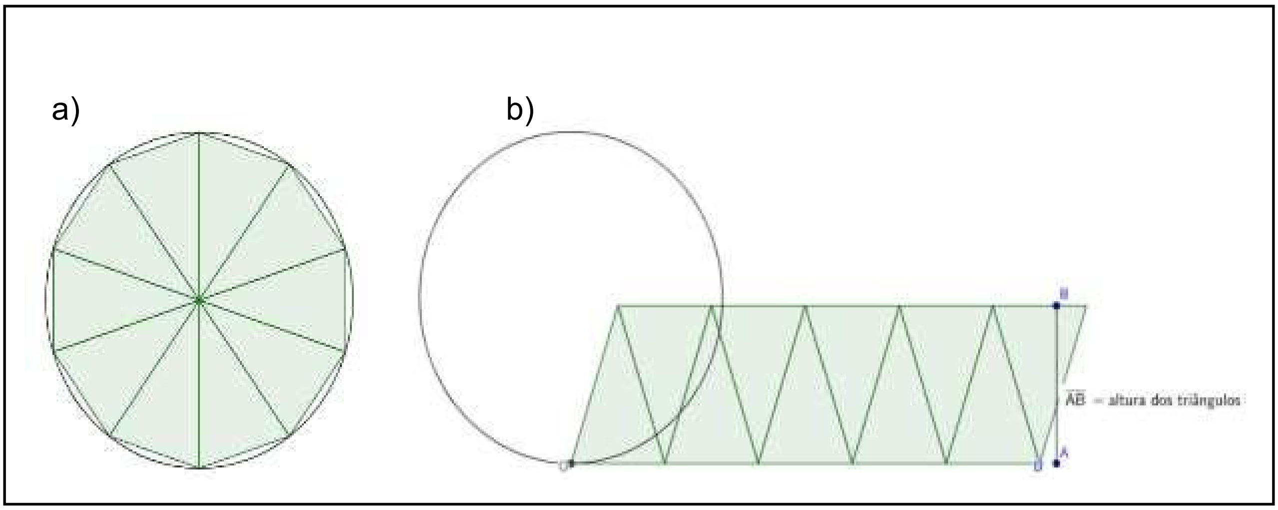


Fonte: Giovani Júnior, (2018, p. 235).

Nesta proposta, será possível os alunos perceberem uma aproximação da área do círculo com a área de um retângulo, aquela área que já é mais natural para a compreensão do aluno, ou seja, procurar sempre considerar o que ele tem a contribuir para a resolução do problema dado.

Outro recurso interessante é o GeoGebra[8]. Veja a atividade, onde se utiliza um círculo de raio igual a duas unidades e, sendo inscrito um decágono, que é dividido em 10 triângulos, conforme a figura 17.a.

Figura 17 - Demonstração da área do círculo com um decágono inscrito



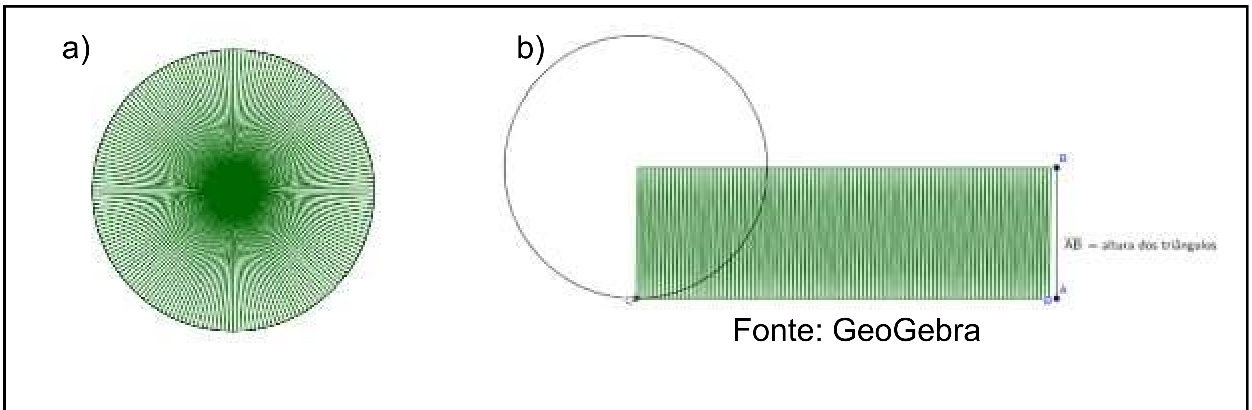
Fonte: GeoGebra

[8] GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor.

Porém, ao observar os triângulos (Figura 17.b) observa-se que a área ainda não corresponde à do círculo, uma vez que os seguimentos do círculo (partes em branco na figura 12.a) não estão sendo calculados.

Mas, fazendo um polígono de 200 lados inscrito, e, dividindo-o em 200 triângulos, observa-se que a base deles passa a ser tão pequena que quase coincidem com a própria circunferência preenchendo ainda mais a figura. Assim, organizando os triângulos, obtém-se um retângulo. Desta forma, as áreas de ambas as figuras se aproximam cada mais.

Figura 18 - Demonstração da área do círculo com um polígono inscrito de 200 lados



Fonte: GeoGebra

E, como se conhece a área do retângulo, chega-se ao seguinte:

- A base do retângulo é formada pela metade das bases dos triângulos, logo, $b = \frac{C}{2}$.
- A altura do retângulo é formada pelo próprio raio do círculo.
- Lembrando que a circunferência é dada por $C = 2\pi r$.

Assim,

$$A_{Círculo} = A_{retângulo} = b.h = \frac{C}{2}.r = \frac{2\pi r}{2}.r = \pi r^2$$

Vale frisar que esta não é a única demonstração, porém, é a mais presente nos livros didáticos

c) Relacionando o problema com o Cálculo:

Nesse problema, entra uma boa relação com o Cálculo, onde, no polígono P_n inscrito, quanto mais aumentarmos os seus lados, chamando aqui de n, ou seja, fazendo $n \to \infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento da circunferência $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r.

Temos:

$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2\pi r \, . \, r}{2} = \pi r^2$, que é a área do círculo.

A seguir, na Figura 19, observa-se a página de um livro de Cálculo, e é notória a relação dessas duas ideias, provando assim que existem problemas que se interagem nos diferentes níveis. Fica evidenciada a necessidade de, durante a formação do professor de Matemática, ele estar diante das mesmas propostas de protagonismo, de forma a possibilitá-lo fazer a transição desses conteúdos e aplicá-los em suas aulas.

Figura 19 - Demonstração da área do círculo em um livro de Cálculo

6.7 Área

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n (Figura 6.2(a)).

Seja A_n a área do polígono P_n. Então, $A_n = n \cdot A_{T_n}$, onde A_{T_n} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n (Figura 6.2(b)).

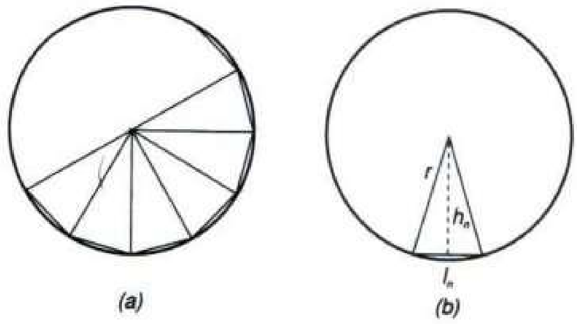


Figura 6.2

Como $A_{T_n} = \dfrac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = nl_n$, vem:

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n \cdot h_n}{2}.$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \to +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento da circunferência $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r.

Temos:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

Fonte: Flemming, D.M. E Gonçalves, M.B, (2006, p. 256).

Para definir a área de uma figura plana qualquer, o procedimento é de forma análoga, onde se aproximam as figuras de polígonos que possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar. A soma dessas áreas, normalmente retângulos, é a chamada soma de Riemann.

II) Problema da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita:

Um outro exemplo, agora mais relacionado ao Ensino Médio, se deve às Progressões Geométricas. Sabe-se que é possível efetuar a soma de seus termos, sendo ela finita. Mas e se ela for infinita? Este seria um outro problema a ser proposto.

Figura 20 - Problema da Soma de Progressões Geométricas infinitas

Quanto às séries apresentadas a seguir, seria possível obter a soma de seus termos?

a) $(\mathbf{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots})$

b) $\left(\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots}\right)$

Fonte: Próprio autor

Ao analisar a primeira série, observa-se que temos uma Progressão Geométrica, de razão $q = 2$ e infinita. Fazendo a soma dos termos:

$$\mathbf{2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots}$$

Verifica-se que ela tende ao infinito, e o total também.

Já, quanto à letra b, observa-se o seguinte:

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \ldots}$$

Assim:

$$\mathbf{\frac{1}{2} = 0,5}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0,984375}$$

Pode-se observar que, quanto mais termos são somados nesta PG, mais o valor se aproxima de 1.

Nos livros do Ensino Médio, demonstra-se a fórmula de uma PG finita, chegando a

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Onde:

a_1 é o 1º termo da PG

q é a razão

n é a quantidade de termos da PG

Porém, quando se trata de uma PG infinita, o n tende a infinito. E, observando este comportamento para $-1 < q < 1$, verifica-se que q tende a zero.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{1}$$

Novamente, conceitos de Cálculo são abordados de formas empíricas. Aparece nos próprios livros do Ensino Médio a anotação de limite.

III) Problema da fração geratriz de uma dízima periódica

Podemos ainda estender o problema anterior para a análise da obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica, uma vez que ela tem o comportamento de uma PG infinita.

$$2{,}88888\ldots = 2 + \boxed{0{,}88888\ldots} \tag{2}$$

Observando a dízima periódica em destaque

$$0{,}88888\ldots = 0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + 0{,}0008 + 0{,}00008 + \cdots.$$

Verifica-se que é uma PG, com o primeiro termo igual a 0,8 e razão $q = \frac{1}{10}$, logo, a soma poderá ser dada pela (Eq.1):

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0,8}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{9} \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), obtém-se:

$$2,88888\ldots = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

Logo, é possível chegar à fração geratriz da dízima periódica.

8. CONCLUSÃO

Esta dissertação tem de um terreno imerso em inquietações vivenciadas por professores de matemática no tocante à Educação Básica e à disciplina de Cálculo, substanciado no distanciamento entre seus conteúdos. Diante disso, apresentamos a metodologia de Resolução de Problemas como forma de auxiliar na interação entre as partes. Porém, defendemos a Resolução de Problemas no formato de “ensinar por meio de problemas”, conforme Onuchic e Allevato (2011), pois acreditamos que problematizar antes de ensinar seja uma proposta mais ideal para a sala de aula moderna. Sendo assim, a proposta cabe tanto a professores que lecionam Cálculo para licenciados em Matemática quanto para professores de matemática da Educação Básica.

A pesquisa se compromete a manter a relação com seu objetivo, a pergunta da pesquisa e as propostas apresentadas. Estaremos aqui analisando e mostrando como perceber a ligação entre o Cálculo e a matemática escolar.

No que diz respeito ao objetivo, percebemos que existem relações entre o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral com a matemática da Educação Básica. Numa busca em livros didáticos de ambas as áreas, nota-se claramente esta relação, podendo destacar, como exemplo abordado, o cálculo da área do círculo.

Quanto à questão de pesquisa, evidencia-se que a Resolução de Problemas é uma forma bem interessante de se conseguir propor tal relação. Seja por ser comum aos docentes, seja por ser capaz de fazer com que o aluno passe a construir o conhecimento matemático, muitas das vezes apenas apresentado nas salas de aula. E, nesta visão de construção do conhecimento, ser capaz de reconhecer a conexão.

Nas conclusões tiradas em relação ao questionário, foi perceptível que há uma grande barreira entre os professores do Ensino Fundamental e Médio diante da abordagem dos conceitos de Cálculo em suas aulas. Nota-se que, tanto entre os professores que apresentam apenas graduação quanto aos que possuem licenciatura, há uma situação comum e o interesse de estudar problemas que pudessem auxiliá-los.

Através de uma busca mais bibliográfica, foi possível deparar-se com situações-problemas comuns, como exemplificado anteriormente, mostrando que muitas das vezes o problema não está nos materiais didáticos utilizados, mas sim na forma como se utilizam.

O mundo está sempre em constante desenvolvimento, e a sala de aula não pode estagnar diante disso, acreditando que o mesmo padrão usado há anos deve permanecer intacto e inviolável. A sala de aula tem que acompanhar toda essa evolução. O professor não pode acreditar que a forma como ele aprendeu seja a forma como ele deve ensinar.

Assim, a Resolução de Problemas com ensino por meio de problemas torna-se uma grande ferramenta para atender a todas as expectativas, atendendo ao que a contemporaneidade exige da educação. Assim, observar-se-á um aluno protagonista, no qual ele terá um papel central e ativo no processo de ensino e aprendizagem, aliado à construção do conhecimento matemático.

Este conhecimento não deve ser limitado à ideia de verdades prontas e exposição de resultados, uma vez que esses passam a assumir o significado de uma 'verdade absoluta', reduzindo-se a mais um outro algo. Cabe aqui ao professor assumir o seu papel de incentivador e orientador. A proposta aqui busca isso: através do problema, procurar chegar ao ensino e aprendizagem, discutindo de forma problematizada. Lembrando que, para isso, não precisa recorrer a materiais didáticos específicos, mas sim usar os mesmos de maneira diferente.

Vemos que o Produto Educacional gerado a partir desta dissertação poderá contribuir para minimizar a distância entre o conteúdo da Educação Básica e os conceitos de Cálculo, acreditando que a Resolução de Problemas com ensino por meio de problemas no fazer pedagógico do docente seja de grande valia para a construção do conceito matemático.

Concluímos que é preciso que o professor sempre repense a sala de aula, uma vez que ela está em constantes mudanças, sendo sempre necessário estar disposto a novos aprendizados teóricos e práticos articulados à sua realidade vivenciada no ambiente escolar, considerando que a formação continuada seja o melhor caminho.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. A alegria de ensinar. 6.ed. Campinas: Papirus, 2005.

BALDINO, R. R. Ensino da Matemática ou Educação Matemática?. **Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 51-60, 1991.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado em Educação. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012

BICUDO, I. Educação Matemática e Ensino de Matemática**. Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 31-42, 1991.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: EditoraUNESP, 1999

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. Uma proposta para o ensino de Cálculo. **Temas & Debates**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VI, v.1, n.6, p. 44 - 59, 1995.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** - 5a. a 8a. séries: Brasília, 1998.

CATAPANI, E. C. Cálculo em Serviço: um estudo exploratório. Rio Claro: **Bolema**, v.14, n.16, 2001.

CHAVES, A. A. **Modelagem exta e heurística para resolução do problema do caixeiro viajante com coleta de prêmios**. 2003. 49 f. Monografia (Especialização) - Curso de Ciência da Computação, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2003. Disponível em: http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Orientacoes/PCVCP-Exato-VNS.pdf . Acesso em: 26 abr. 2024.

CHERMAM, A. **Sobre os ombros de gigantes**: uma história da Física. São Paulo: Companhia das Letra, 2004.

CHI, M. T. H. & GLASER, R. **A. Capacidade para a Solução de Problemas**. In STERNBERG, R.J. As Capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações. Porto Alegre: Artes Médicas, 1983.

D’AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. n2. Brasília. 1989. P. 15-19.

D’AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-Posições**, Campinas, vol. 4, n.1, p. 35-41, 1993.

D'AMBRÓSIO, B.S.; D'AMBRÓSIO, U. Formação de Professores de Matemática: professor-pesquisador. Blumenau: **Atos de Pesquisa em Educação**-PPGE/ME FURB, v1, n.1, p.75-85, jan-abr.2006.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

DESCARTES, R. A Geometria. Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001. (Tradução de Duelci Ap. de Freitas Vaz.) Publicado **Bolema**.

DUARTE, J. L. **Problemas de máximos e mínimos do ensino médio**. São José do Rio Preto: UNESP, 2014.

FIORENTI NI, D.; OLIVEIRA, A.T.C.C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? Rio Claro: **Bolema**.v.27, n.47, p.917-398,2013.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. Revista de Educação PUC-Campinas, Campinas, n. 18, p. 107-115, jun. 2005.

FIRMINO, J. E. C. BROTTO, T.C.A. Raciocínio, heurísticas e resolução de problemas: um diálogo conceitual. **Revista Mosaico Estudos em Psicologia**. 2008. V.III, n1, 1-12.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**: Funções, limite, derivação e integração. 6.ed. São Paulo: Person, 2006.

FRANCHI, R. H. O. L. **A Modelagem Matemática como Estratégia de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia**. Rio Claro: UNESP, 1993 (Dissertação, Mestrado).

FRANCHI, R. H. O. L. Cursos de Cálculo: Uma proposta alternativa. **Temas & Debates**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIE, 6 ed, p. 39 - 43, 1995.

FREIRE, P. **Paulo Freire**: entrevista. [1995]. Entrevistador: D’AMBROSIO, Ubiratan. [S.l]:[s.n],1995.Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=o8OUA7jE2UQ>. Acesso em: 22 fev. 2024.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educati va. 8. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1998.

FROTA, M. C. R. Teoria e Prática da Aprendizagem de Cálculo. Rio Claro: **Bolema**.v.20, n.28, p.21-38,2007

GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 77-98.

GARZELLA, F. C. **A disciplina de Cálculo I**: A análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. Unicamp,2013 (Tese de Doutoramento).

GERVÁZIO, S. N. **A Heurística Matemática: uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem**. Tese (Doutorado em Educação Científica Matemática e Tecnológica) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

GIOVANNI JÚNIOR, J.R. e CASTRUCCI, B. A conquista da Matemática: 7º ano. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

GLIORI, S. B. C. **Considerações sobre o ensino de Cálculo e um estudo sobre números reais**. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p.11-26.

GONÇALVES, J.L.O. Raciocínio Heurístico e a Resolução de Problemas. **Revista Unijales**, ed.1, n.1, Ano I, 2006

GROTTI, R. **O cálculo diferencial e integral para ensinar:** a matemática para a licenciatura em Matemática. Cuiabá: UFMT, 2019

IEZZI, G. et.al. **Matemática**: ciências e aplicação: Ensino Médio: volume 1. 9 ed. São Pulo: Saraiva, 2016

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 6. reimpr. São Paulo: Cortez, 1994

LINARDI, P. R. **A formação matemática do professor de Matemática: dos conteúdos aos processos de produção de significados**. SBEM. São Paulo: ENEM, 2016.

MOREIRA, P.C.; FERREIRA, A. C. O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. Rio Claro: **Bolema**, v.27, n.47, p.981-1005, dez.2013.

NEWELL, A., SIMON, H. A. (1972***). Human problem solving***. Prentice-Hall.

OLIVEIRA, V.C.A. **Uma leitura sobre formação continuada de professores de Matemática fundamentada em uma categoria de vida cotidiana.** 2011. 207 p. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

ONUCHIC, L.R.; BOERO, M.L. Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa. **Bolema**, Rio Claro, n.27. p. 93-139.2007. Traduzido do original:
ROMBERG, T.A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, d.A. Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. Cap., p.49-64.

ONUCHIC, L.R. Et al.(org). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. S.G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro: **Bolema**, v.25, n.41, p.73-98, dez. 2011.

PARASURAMAN, A. **Marketing research.**2. ed.New York:Addison WesleyPublishing Company, 1991.

PEREIRA, A. L. **Motivação para a disciplina MAT450** – Seminários de Resolução de Problemas. São Paulo, IME-USP, agosto de 2001, 17p.

PINHEIRO, L. S. e S. **A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria**. Boa Vista: UFRR, 2017

POLYA, G. **A arte de resolver problem**as. Rio de Janeiro: Interciência, 2. ed, 1994.

RAVAGNANI, J. A. D. C.; MARQUES, A.C.T.L. George Polya e ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores de Matemática. **Posgere**, v. 1, p. 30-53, 2017.

REDLING, J. P. **A metodologia de resolução de problemas**: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2011.

REIS, F. da S. **A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. 2001. 302 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas**. Rio Claro: Unesp, 2010

SERRAZINA, M. (2017). Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. In GTI (Org.). **A Prática dos professores: planificação e discussão em sala de aula** (pp. 9-31). Lisboa: APM

SILVA, B. A. **Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.13, n.3, p. 393 – 413, 2011.

STEWAR, J. **Cálculo**. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001.

VALENTE, W.R. O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática. Rio Claro: **Bolema**, v.27, n.47, p.939-953, dez.2013

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **Legitimidades possíveis para a Formação Matemática de Professores de Matemática**. 2012. 360p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012

VOGADO, G. E.R. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas**. 2014. 167 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014