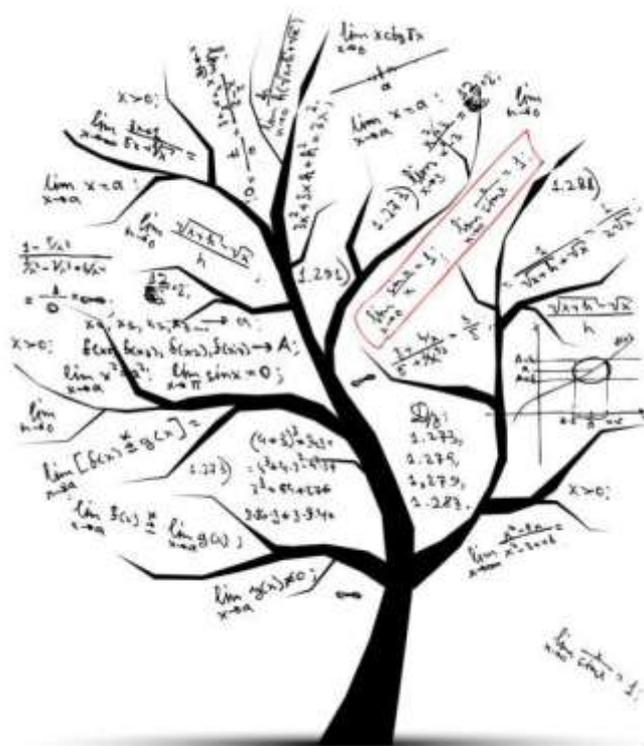


**INVESTIGANDO  
PROBLEMAS DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA  
LIGADOS A IDEIAS  
DE CÁLCULO**



Marco Aurélio dos Santos Silva

Marco Antônio Escher

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

Caro(a) professor(a), apresentaremos adiante problemas-exemplos como forma de correlacionar “as duas faces da Matemática”.

Porém, entendendo a pluralidade de uma sala de aula, considere como ideias de forma que auxiliem na sua percepção uma vez que o papel do docente é a uma importante peça deste quebra-cabeça, capaz de orquestrar da melhor forma o processo de ensino e aprendizagem de acordo com a realidade de sua sala de aula.

Assim, no primeiro problema-exemplo, procuramos detalhar como uma sugestão de solução, apenas como modelo. Deixando os demais, para serem moldados no melhor formato a ser aplicado em suas aulas.

# Apresentação

Com abelhas ou sem abelhas,  
os problemas mais  
interessantes da  
Matemática têm, para o  
pesquisador, a doçura do mel

Ary Quintela



Num cenário de distanciamento entre duas das faces da Matemática: A Matemática da Educação Básica (aqui também chamada de Matemática Escolar) e o Cálculo Diferencial e Integral, contribuiu por resultar neste Produto Educacional que foi organizado a partir da dissertação intitulada **O uso da resolução de problemas para relacionar conteúdo de Cálculo à matemática da Educação Básica** elaborada por Marco Aurélio dos Santos Silva sob a orientação do professor doutor Marco Antônio Escher.

Ao longo dele serão apresentados alguns problemas de forma a possibilitar a presença de ideias e conceitos da disciplina de Cálculo em aulas de Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Evidenciando assim a necessidade de as aulas de Cálculo na Licenciatura em Matemática serem abordadas de forma mais próxima da prática do docente de matemática que está em formação.

Então, julgamos o material não apenas para se aplicar aos professores da Matemática Escolar, mas também, aos professores que lecionam a disciplina de Cálculo em licenciatura em Matemática, como propostas de garantirem uma correlação, e, não a independização entre as duas faces.

Ao longo da dissertação é discutido a dissonância entre o conteúdo lecionado por professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com o apresentado nas aulas de Cálculo.

E, como forma de apresentar propostas para resolver tal problema, nada melhor do que sugerir um outro problema (ou, problemas), afinal, Problema e Matemática têm uma ligação intrínseca. Assim, apresentaremos ao longo deste produto alguns exemplos de problemas que possam servir de “pontes” entre estas duas faces.

Analisando livros de Cálculo, é notório problemas que façam contextualização com as mais diversas áreas onde é trabalhado, incluindo os que são da natureza de um docente da educação básica.

Sendo assim, a dificuldade não está associada aos livros didáticos de Cálculo por não apresentarem conteúdos ligados à licenciatura, mas sim, em não haver a percepção da relação entre as “duas faces da Matemática” ao longo do estudo e aplicação na sala de aula.

E, outra situação se acentua aqui, como usar destes problemas?

Quanto à metodologia de Resolução de Problemas, a pesquisadora Onuchic (1999, p. 206), indica três modos diferentes de abordar a resolução de problemas, porém sobrepostos na prática: “ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas”. No primeiro caso, o professor ressalta os modelos de resolução com base em Polya ou variações deles. No segundo modo, a atenção do professor está voltada para a maneira como a Matemática é ensinada e como ela pode ser usada. Por último, no ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, estes são vistos como ponto de partida para o ensino dessa disciplina. Assim, parte-se de um problema com vista à construção de conceitos e ao ensino de diversos conteúdos, incluindo até procedimentos.

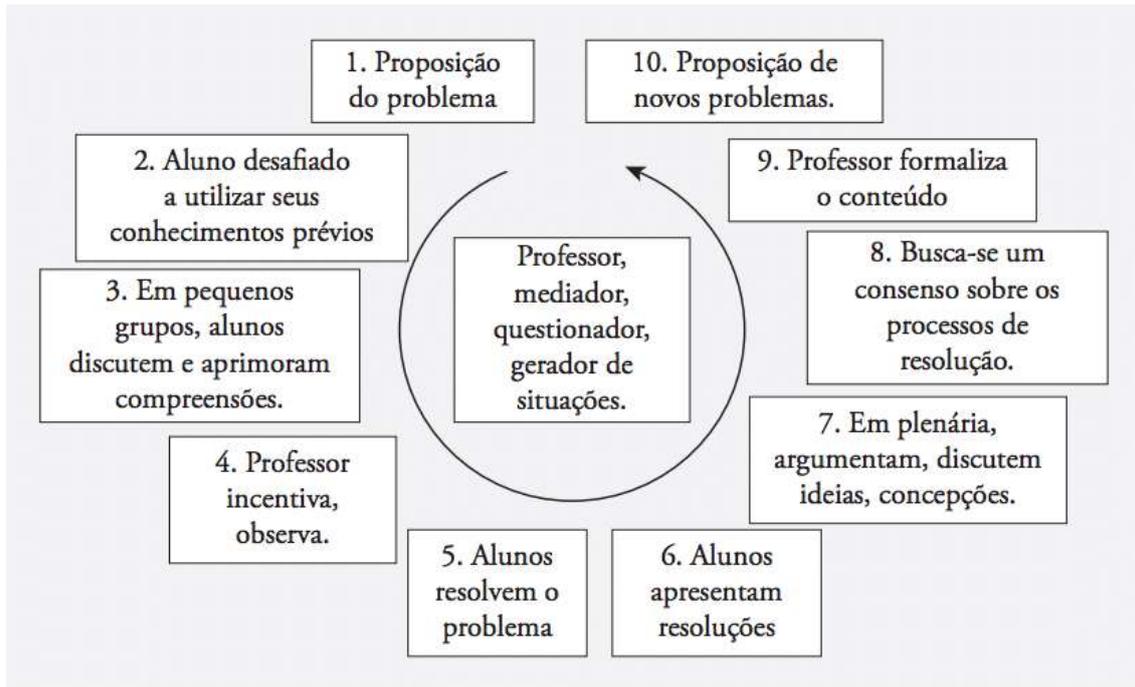
Acreditamos muito no formato de ensinar Matemática através da resolução de problemas, uma vez que “ensinar por meio de problemas” compreende entender o processo do começo ao fim (Vogardo, 2014, p.51). Reconhecemos que não seja uma tarefa fácil, mas, por meio dela, é possível trazer aos alunos a ideia de capacidade de fazer matemática, proporcionando entusiasmo e confiança.

Um mesmo problema, pode ser trabalhado de formas diferentes. Pode ser aplicado depois de uma explicação do conteúdo, apenas como forma de verificar a

aprendizagem, ou, pode, como propomos, ser apresentado de início de forma a explorar os conhecimentos prévios dos alunos e, a partir daí, proporcionar o ensino e aprendizagem.

Quanto à resolução de problemas existem etapas a serem seguidas.

Figura 1. Esquema das 10 etapas para o desenvolvimento da Metodologia de Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2021)

Segundo Allevato e Onuchic (2021), onde cabe ao professor o seu papel de mediador, questionador e gerador de situações, o problema é proposto (etapa 1), os alunos são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios (etapa 2), permite-se a discussão em pequenos grupos de alunos (etapa 3), o professor incentiva (etapa 4), os problemas são resolvidos (etapa 5), os alunos apresentam a resolução (etapa 6), passa-se à uma discussão sobre as resoluções (etapa 7) a fim de entrar em um consenso (etapa 8), chegando à formalização do conteúdo (etapa 9) para que os alunos possam partir para a resolução de novos problemas relacionados (etapa 10).

## Problema da área do Círculo



O estudo sobre a área do círculo está presente em livros didáticos do Ensino Fundamental.

A seguir será apresentado um exemplo de como é apresentada a fórmula da área de um círculo em um livro didático.

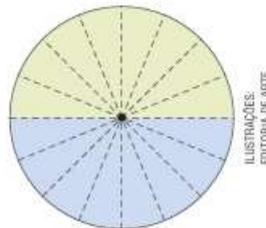
Figura 14. Demonstração da fórmula da área do círculo

Ensino  
Fundamental

### Área de regiões circulares

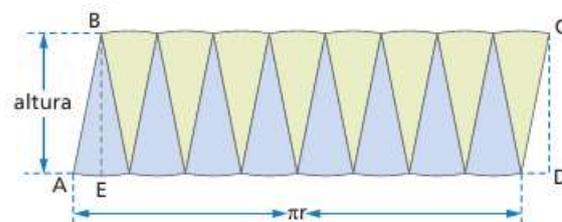
Para determinar a expressão para o cálculo da área do círculo, vamos utilizar a ideia de aproximação por áreas conhecidas. Observe.

Em uma cartolina desenhamos um círculo dividindo-o em 16 partes iguais. Depois recortamos, separando cada pedaço.



ILUSTRAÇÕES:  
EDITORIA DE ARTE

Juntamos as partes recortadas, encaixando-as, conforme a figura a seguir:



#### SAIBA QUE

Quanto maior a quantidade de partes em que dividimos o círculo, mais próxima de um retângulo fica a figura formada.

A superfície do círculo foi reorganizada, e sua área se aproxima da área de uma figura que conhecemos: o retângulo.

Assim, podemos calcular a área do círculo, multiplicando a medida da base pela medida da altura. Observando a imagem acima, percebemos que a medida da base é a metade da medida do comprimento da circunferência, e a medida da altura é equivalente à medida do raio da circunferência. Temos:

$$A = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir.

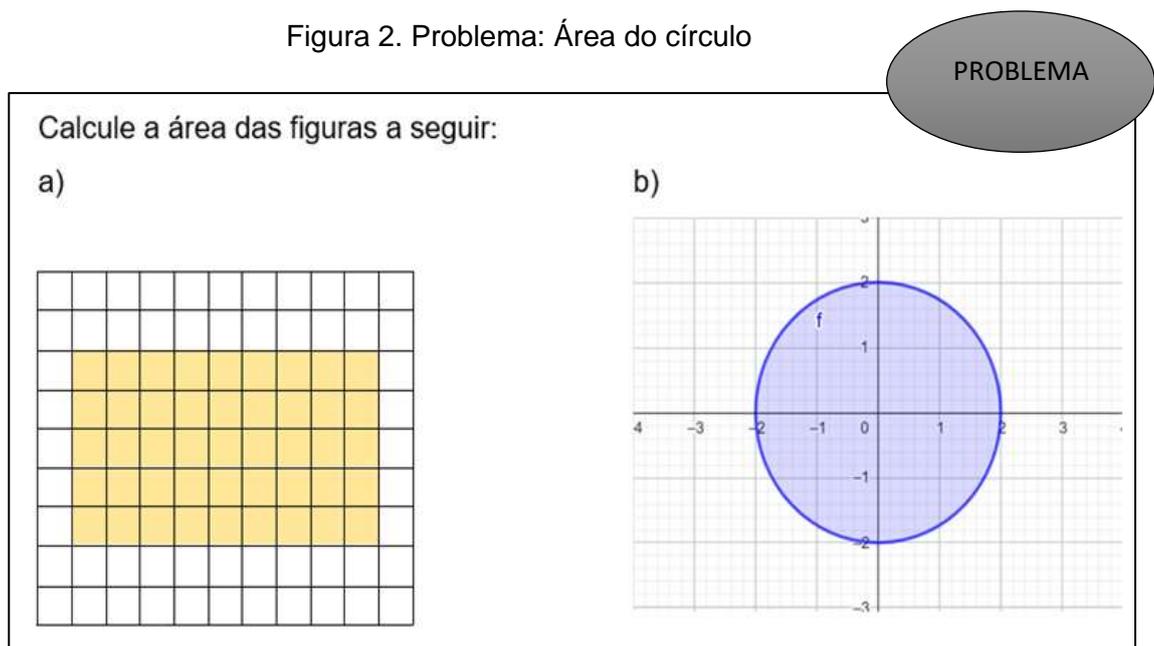
Pode-se observar que o livro já traz uma explicação demonstrando a fórmula para o aluno e, após esta etapa, já o direciona para exercícios. Ou seja, mantém a clássica proposta de “Ensino para a Resolução de Problema”. Veja na Figura 14, logo após, dá-se continuidade com “Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir” (Giovane Jr e Castrucci, 2018, p.235).

Segundo Vogardo (2014, p.51), o professor que ensina para resolver problemas está preocupado apenas em fazer com que os alunos tenham a habilidade de transferir aquilo que eles já aprenderam num contexto de um problema para outro.

Esta análise não tem por foco julgar o livro não está de acordo, mas, sim, mostrar que nada impede que o professor, no planejamento de suas aulas, use do recurso do livro de forma diferenciada. O professor pode organizar de forma que o ensino ocorra por meio da resolução de problemas, não fazendo o aluno apenas “decorar” uma fórmula, mas sim compreendê-la.

Uma proposta seria a seguinte:

Figura 2. Problema: Área do círculo



Fonte: Próprio autor

Note que apresentando esta atividade inicialmente será capaz de fazer o aluno a tentar relacionar os seus conhecimentos prévios de área para encontrar a área do círculo.

Inicialmente, acredita-se que ele conseguirá resolver facilmente a primeira área usando do papel quadriculado e, procurar usar a mesma ideia para o círculo,

percebendo-se assim, a dificuldade. O aluno deixa de ser um agente passivo no ensino e aprendizagem e passa a desempenhar o seu papel de protagonista.

Percebe-se que com uma alteração no mecanismo é possível desenvolver um outro olhar, através de questionamento, construção de argumentos, tornando os alunos “sujeitos” do seu aprendizado., o que implica em fazer relações entre temas e conteúdos abordados em sala de aula, pensando de forma integrada.

Um professor de matemática que já tenha lecionado no Ensino Fundamental observa uma grande abstração por parte dos alunos em comparação com o cálculo de área dos polígonos de forma geral.

No retângulo, por exemplo, é possível verificar divisões em quadradinhos de uma unidade e contar o total, o que corresponde à sua área, chegando à fórmula:  $A_r = b \cdot h$ , ou seja, a área de um retângulo é igual à base vezes altura. E, desta demonstração, chega-se ao cálculo dos demais quadriláteros. Bem como do próprio triângulo, uma vez que este é a metade de um triângulo. Estas habilidades estão presentes normalmente nos livros de 7º ano.

Em um problema como o proposto é possível proporcionar ao aluno a aplicação do que ele traz consigo para a sala de aula (conhecimentos sobre áreas de polígonos estudado) e, a partir dele, repensar com resolver o problema do cálculo da área do círculo.

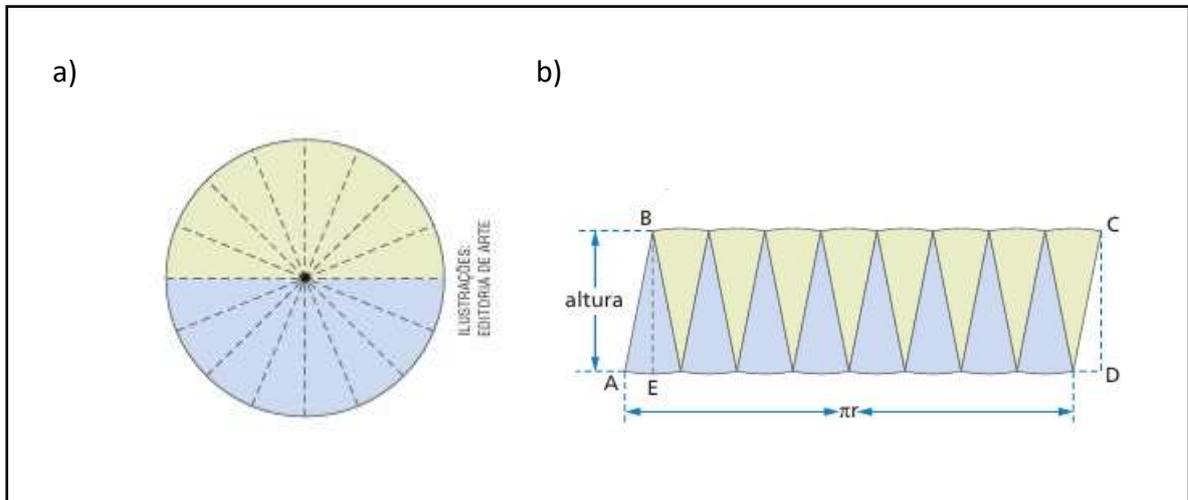
Segundo Allevato e Onuchic (2021) observando-se as etapas da resolução de um problema, onde, cabe ao professor o seu papel de mediador, questionador e gerador de situações, o problema é proposto (etapa 1), os alunos são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios (etapa 2), permite-se a discussão em pequenos grupos de alunos (etapa 3), o professor incentiva (etapa 4), os problemas são resolvidos (etapa 5), os alunos apresentam a resolução (etapa 6), passa-se à uma discussão sobre as resoluções (etapa 7) a fim de entrar em um consenso (etapa 8), chegando à formalização do conteúdo (etapa 9) para que os alunos possam partir para a resolução de novos problemas relacionados (etapa 10).

Nesta situação, na fase 9, o professor pode propor a mesma ideia utilizada na área do retângulo, porém, agora, ao invés de subdividir em quadrados, conforme a figura, apresentar divisões em setores.

Uma primeira ideia poderia ser o uso de um círculo impresso e, com a ajuda de um transferidor e uma régua, dividi-lo em setores, ou, até mesmo, cortar o círculo e

dobrar sempre em diâmetros (conforme a figura 3.a). Em seguida, pedir que seja amontado estas “fatias” conforme a figura 3.b.

Figura 3. Demonstração da área do círculo



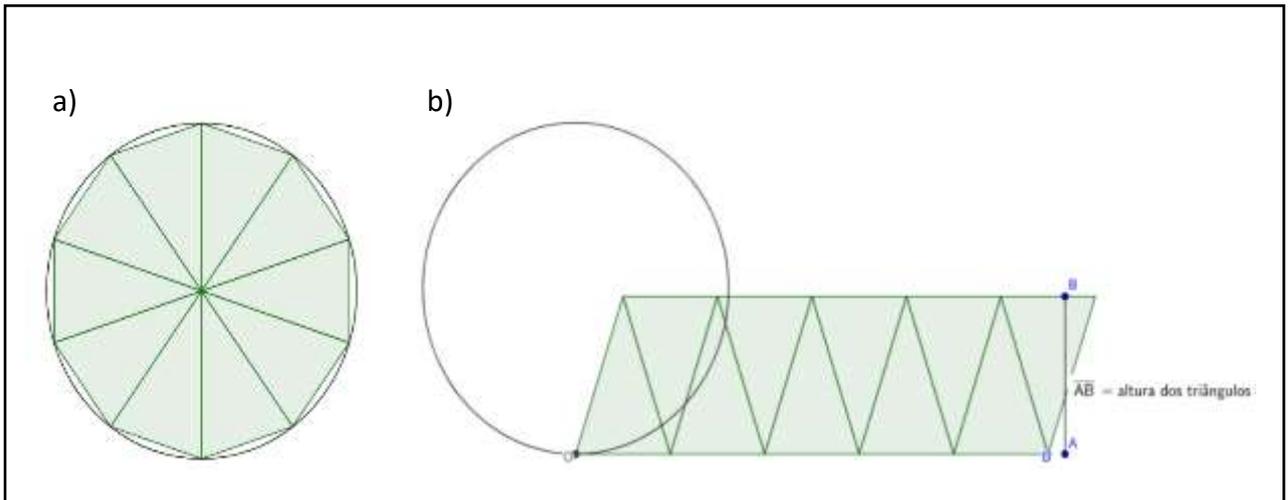
Fonte: Giovani Júnior, 2018, p. 235

Nesta proposta, será capaz dos alunos perceberem uma aproximação da área do círculo com a área de um retângulo, aquela área que já é mais natural para a compreensão do aluno, ou seja, procurar sempre considerar o que ele tem a contribuir para a resolução do problema dado.

Outro recurso interessante, é o GeoGebra<sup>1</sup>. Veja a atividade, onde se utiliza um círculo de raio igual a duas unidades e, sendo inscrito um decágono, que é dividido em 10 triângulos, conforme a figura 4.a.

<sup>1</sup> GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor.

Figura 4. Demonstração da área do círculo com um decágono inscrito

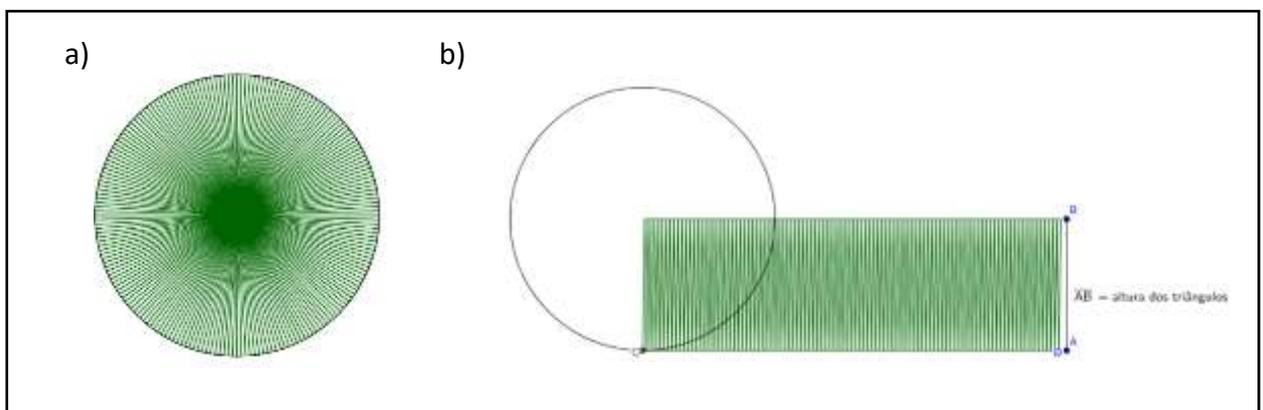


Fonte: GeoGebra

Porém, ao observar os triângulos (Figura 4.b) observa-se que a área ainda não corresponde à do círculo, uma vez que os segmentos do círculo (partes em branco na figura 4.a) não estão sendo calculados.

Mas, fazendo um polígono de 200 lados inscrito, e, dividindo-o em 200 triângulos, observa-se que a base deles passa a ser tão pequena que quase coincidem com a própria circunferência preenchendo ainda mais a figura. Assim, organizando os triângulos, obtém-se um retângulo. Desta forma, as áreas de ambas as figuras se aproximam cada mais.

Figura 5. Demonstração da área do círculo com um polígono inscrito de 200 lados



Fonte: GeoGebra

E, como se conhece a área do retângulo, tira-se o seguinte:

- A base do retângulo é formada pela metade das bases dos triângulos, logo,  $b = \frac{C}{2}$ .
- A altura do retângulo é formada pelo próprio raio do círculo.
- Lembrando que a circunferência é dada por  $C = 2\pi r$ .

Assim,

$$A_{\text{Círculo}} = A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

Vale frisar que esta não é a única demonstração, porém, é a mais presente nos livros didáticos



Observe a relação desta ideia com a *Soma de Riemann estudadas no Cálculo*

Neste problema, entra uma boa relação com o Cálculo, onde, no polígono  $P_n$  inscrito, quando mais aumentar os seus lados, chamando aqui de  $n$ , ou seja, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , o polígono  $P_n$  torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro  $p_n$  aproxima-se do comprimento da circunferência  $2\pi r$  e a altura  $h_n$  aproxima-se do raio  $r$ .

Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

A seguir, na Figura 19, observa-se a página de um livro de Cálculo e é notório a relação destas duas ideias, provando assim, que, existem problemas que se interagem nos diferentes níveis.

Fica assim evidenciado a necessidade de durante a formação do professor de matemático ele estar diante das mesmas propostas de protagonismo, de forma a possibilitá-lo fazer a transição de destes conteúdos e aplica-los em suas aulas.

Figura 6. Demonstração da área do círculo em um livro de Cálculo

Cálculo

## 6.7 Área

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de  $n$  lados, que denotamos por  $P_n$  (Figura 6.2(a)).

Seja  $A_n$  a área do polígono  $P_n$ . Então,  $A_n = n \cdot A_{T_n}$ , onde  $A_{T_n}$  é a área do triângulo de base  $l_n$  e altura  $h_n$  (Figura 6.2(b)).

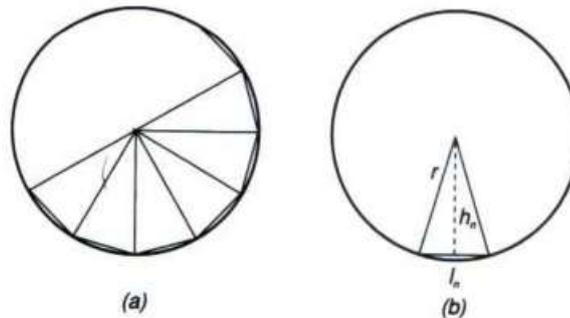


Figura 6.2

Como  $A_{T_n} = \frac{l_n \cdot h_n}{2}$  e o perímetro do polígono  $P_n$  é dado por  $p_n = n l_n$ , vem:

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n \cdot h_n}{2}$$

Fazendo  $n$  crescer cada vez mais, isto é,  $n \rightarrow +\infty$ , o polígono  $P_n$  torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro  $p_n$  aproxima-se do comprimento da circunferência  $2\pi r$  e a altura  $h_n$  aproxima-se do raio  $r$ .

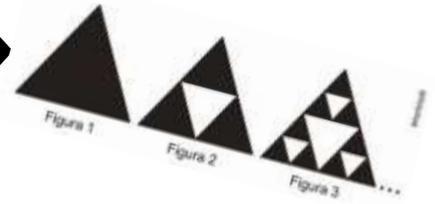
Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

Fonte: FLEMMING, D.M. e GONÇALVES, M.B, 2006, p. 256

Para definir a área de uma figura plana qualquer, o procedimento é de forma análoga, onde se aproximam a figuras de polígonos que possam ser calculados pelos métodos da geometria elementar. E, a soma destas áreas, normalmente retângulos, é a chamada *soma de Riemann*.

## Problema da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita



Um outro exemplo, agora mais relacionado ao Ensino Médio, se deve às Progressões Geométricas, sabe-se, que é possível efetuar a soma de seus termos, sendo ela finita. Mas e se ela for infinita? Este seria um outro problema a ser proposto.

PROBLEMA

Figura 7. Problema da Soma de Progressões Geométricas infinitas

*Quanto às séries apresentadas a seguir, seria possível obter a soma de seus termos?*

**a)**  $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$

**b)**  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots)$

Fonte: Próprio autor

Ao analisar a primeira série, observa-se que temos uma Progressão Geométrica, de razão  $q = 2$  e infinita. Fazendo a soma dos termos:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \dots$$

Verifica-se que ela tende ao infinito, e o total também.

Já, quanto à letra b, observa-se o seguinte:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \dots$$

Assim,

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0,984375$$

Pode-se observar que, quando mais termos são somados nesta PG, mais o valor se aproxima de 1.

Nos livros do Ensino Médio, demonstra-se a fórmula de uma PG finita, chegando a

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Onde

$a_1$  é o 1º termo da PG

$q$  é a razão

$n$  é a quantidade de termos da PG

Porém, quando se trata de uma PG infinita, o  $n$  tende a infinito. E, observando este comportamento para  $-1 < q < 1$ , verifica-se que  $q$  tende a zero.

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$



## Observe as ideias de Limite e Infinito estuda em Cálculo

Novamente conceitos de Cálculo são abordados de formas empíricas. Aparece nos próprios livros do Ensino Médio a anotação de limite. Conforme a figura a seguir:

Figura 8. Fragmento de livro do Ensino Médio apresentando ideias de Cálculo

### ► Soma dos termos de uma P.G. infinita

Seja  $(a_n)$  uma sequência dada pelo termo geral:  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ , para  $n \in \mathbb{N}^*$ . Vamos atribuir valores para  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) para caracterizar essa sequência:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1\,000} = 0,001$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$$

⋮        ⋮        ⋮

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{10^{10}} = 0,0000000001$$

⋮        ⋮        ⋮

Trata-se da P.G.  $(0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots)$  de razão  $q = \frac{1}{10}$ . É fácil perceber que, à medida que o valor do expoente  $n$  aumenta, o valor do termo  $a_n$  fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de  $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ , quando  $n$  tende ao infinito (isto é, quando  $n$  se torna "arbitrariamente grande"), vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ ).

## Problema da fração geratriz de uma dízima periódica

2,333...

Podemos ainda, estender o problema anterior para a análise da obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica, uma vez que tem o comportamento de uma PG infinita.

$$2,88888 \dots = 2 + \boxed{0,88888 \dots} \quad (2)$$

Observando a dízima periódica em destaque

$$0,88888 \dots = 0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008 + 0,00008 + \dots$$

Verifica-se que é uma PG, com o primeiro termo igual a 0,8 e razão  $q = \frac{1}{10}$ , logo, a soma poderá ser dada pela (Eq.1):

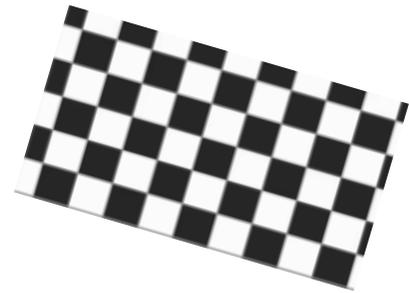
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{0,8}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{9} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), obtém-se:

$$2,88888 \dots = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

Logo, é possível chegar à fração geratriz da dízima periódica.

**Problema de Otimização:  
Maximizando uma área  
retangular com o uso de uma  
cerca**



*Problema:*

*Um fazendeiro tem 1000 m de tela e quer cercar um campo retangular com esta tela. Quais são as dimensões do campo com maior área?*

Este é um problema inicial que pode mostrar diversas construções retangulares, com base e alturas diferentes, mas, sempre com o mesmo perímetro, embora com áreas diferentes.

Um aluno a procura da solução teria inúmeras possibilidades de construções.

Para facilitar, propomos aqui organizar algumas dimensões de retângulos e calcular as áreas respectivas.

Figura 9. Cálculos de áreas de retângulos

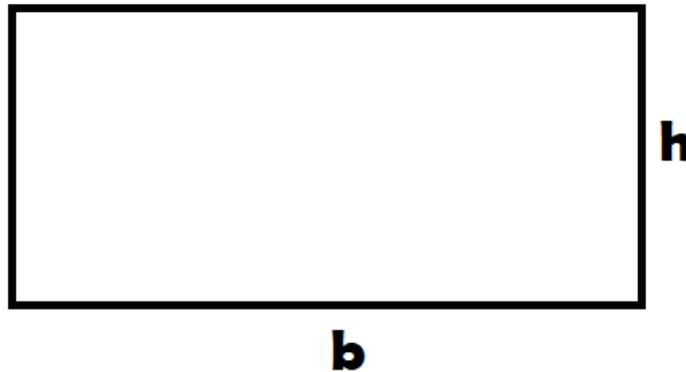
<b>Base (m)</b>	<b>Altura (m)</b>	<b>Perímetro (m)</b>	<b>Área (m<sup>2</sup>)</b>
490	10	1000	4900
450	50	1000	22500
420	80	1000	33600
410	90	1000	36900
400	100	1000	40000
350	150	1000	52500
300	200	1000	60000
250	250	1000	62500

Fonte: Próprio autor

Porém, uma outra análise poderia ser dada da seguinte forma.

Considerando o retângulo

Figura 6. Esquema de um retângulo



Fonte: Próprio autor

Como o seu perímetro é

$$P = 2b + 2h \quad (4)$$

E, a área igual a

$$A = b \cdot h \quad (5)$$

Como o perímetro é igual a 1000 metros, temos:

$$1000 = 2b + 2h$$

Assim,

$$b + h = 500$$

Obtendo-se

$$h = 500 - b \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), fica

$$A = b(500 - b) \quad (7)$$

$$A = -b^2 + 500b \quad (8)$$

O objetivo do problema é garantir uma maior área demarcada, como (8) trata-se de uma função quadrática, iremos encontrar as suas raízes, fazendo  $A = 0$ .

$$-b^2 + 500b = 0$$

Temos uma equação quadrática incompleta e, independentes das diferentes formas de resolução, optamos pela seguinte:

$$b(-b + 500) = 0$$

Onde

$$b = 0 \quad \text{ou} \quad -b + 500 = 0$$

$$b = 500$$

Assim, observa-se uma parábola de concavidade para baixo e passando nos pontos (0,0) e (500,0) que são as raízes dela. Como queremos a maior área, teremos que investigar o vértice dessa parábola, onde têm-se o ponto de máximo. Como neste tipo de equação, sabemos que a abcissa do vértice igual à média das raízes, então, teremos o 250.

E, para encontrar o valor da ordenada, que corresponde à nossa área procurada, obteremos

$$A(b) = -b^2 + 500b$$

$$A(250) = -250^2 + 500(250)$$

$$A(250) = 62500$$

Esta é a área máxima possível.

Agora, como sabemos que a deve ser igual a 250 m, basta encontrar a altura  $h$ .

Como:

$$b + h = 500$$

$$250 + h = 500$$

$$h = 500 - 250$$

$$h = 250 \text{ m}$$

Percebe-se que teremos um quadrado, pois tanto a base quanto a altura são iguais a 250 m, que é a resposta do problema.

Mas e as ideias do Cálculo?

Este problema está ligado à ideia da Derivada. Mas, seria a Derivada necessária para ser aprendida no Ensino Médio para resolver problemas como este? Não é esta a preocupação, mesmo que se observe a resolução usando apenas da matemática básica.

Mas, este problema pode ser facilmente resolvido através do uso da Derivada. Justificamos a relação aqui, não como proposta de ser apresentada aos alunos, mas, como forma de auxiliar ao professor.

Um professor de Ensino Médio, segundo dados do INEP em 2017, tinha uma média de 30,4 alunos por sala. Ou seja, não é de se estranhar realidades onde um professor tenha quase 40 alunos. Neste caso, diante de atividades apresentadas à seus alunos e sendo consultados como forma de verificar se as respostas estão ou não corretas, é comum várias consultas ao mesmo tempo e, de atividades diferentes. Vejo aqui, a aplicação da Derivada como uma forma mais fácil do professor poder verificar tais resultados.



Observe a aplicação dos vértices de uma Função Quadrática (Ensino Médio), assim como, um problema ligado à aplicações de Derivadas

**Problema de Otimização:  
Minimizando material utilizado  
na fabricação de uma  
embalagem**



O problema anterior, poderia remeter a um outro tipo de problema:

*Para se armazenar um litro de leite, com caixas no formato de um prisma, existe dimensões ideais onde se usaria uma menor quantidade de material?*

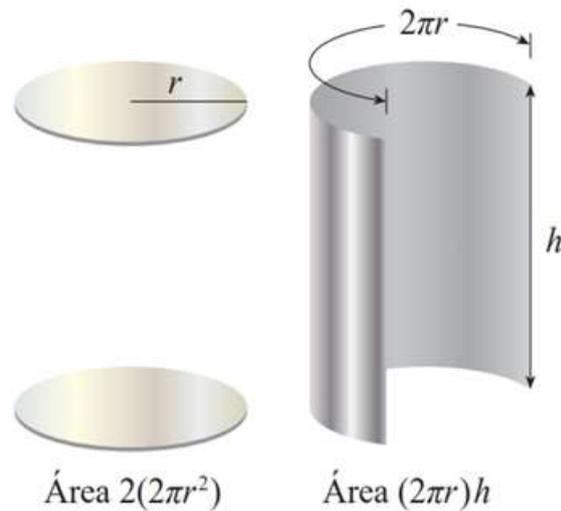
Iremos aqui, pegar um problema análogo apresentado no livro de Stewart (2022):

*Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.*

Planificando um cilindro (Fig.10) obtemos:

- Um retângulo, cuja sua base é igual a circunferência do círculo da base do cilindro;
- Dois círculos

Figura 10. Esquema de um cilindro



Fonte: Stewart, 2022, p.309

Assim, a área do cilindro é igual a:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

E, o seu volume:

$$V = \pi r^2 h$$

Como o volume a ser analisado é de  $1 L = 1000 \text{ cm}^3$ , então

$$\pi r^2 h = 1000$$

Daí

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Substituindo na expressão para  $A$ , temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

No entanto, não temos uma função polinomial do segundo grau, o que já dificulta a resolução através da matemática da Educação Básica.

Mas, tal problema não poderia eixar de ser citado, uma vez que não é impossível de ser questionado por um bom aluno dentro de suas aulas. E, mesmo não sendo um conteúdo estudado, pode mesmo assim ser apresentado e mostrado que há solução.

Assim, de

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Usando da derivada, temos:

$$A'(r) = 4\pi r + \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então, com  $A'(r) = 0$  tem-se  $\pi r^3 = 500$ , logo  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ .

Na busca pela altura, partindo de  $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ , temos:

$$h = \frac{1000}{\pi \left( \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \right)^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Desta forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser  $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  cm e a altura, igual a duas vezes o raio. Ou seja, a altura deve ser igual ao diâmetro. Geometricamente falando, que ele seja um cilindro equilátero.



Neste problema, observamos um maior grau de dificuldade. Apresentamos ele pelo fato de que, em estudos, um aluno possa a vir trazer um questionamento semelhante, sendo necessário apresentar ideias do Cálculo Diferencial e Integral para a sua resolução. E, sendo questionado, é preciso apresentar, não digo, em fazer os cálculos apresentados, mas sim em mostrar as ideias que garantem a resolução.

## Problema: Ideia do Infinito

Trazemos aqui uma abordagem tão comum no estudo do Cálculo, e, até mesmo nos Ensino Fundamental e Médio: a ideia de infinito. Porém, embora comum, é, ao mesmo tempo provocadora de espanto e admiração.

Não é raro de encontrar o infinito quando se estuda os conjuntos na Educação Básica.

Embora a ideia de infinito não seja muito estranha no cotidiano, já que, uma vez pelo menos na vida nos deparamos em algum momento com tentativas de contar as estrelas no céu ou de calcular os grãos de areia de uma praia, enfim, é comum momentos cheios de uma sensação de não possuir fim.

Nas aulas de Matemática da Educação Básica o aluno também sempre teve este termo muito presente, principalmente quando se tratava dos conjuntos numéricos. Falas como: “O conjunto dos Números Naturais começam com o zero e vai até infinito.”. Enfim, é um termo bem abordado. Mas seria o infinito algo muito grande? Interrogações como estas são necessárias de serem abordadas, é o que faremos adiante.

Voltando, é comum recordarmos de histórias com as dos pastores que guardavam para cada ovelha uma pedra em um saquinho, ou seja, criava-se uma correspondência de um para um: uma ovelha para uma pedra.

Logo, poderíamos pensar em contar (usando dos números naturais) os números pares, na mesma ideia dos pastores, teríamos também uma correspondência um para um. Algo pareceria estranho? Veja se percebe que, existira a correspondência, uma vez que o conjunto dos números pares é infinito e o dos números naturais também é. Mas, como pode dois conjuntos terem a mesma

quantidade que a do outro se, um deles (os pares) cabe dentro do outro conjunto (os naturais).

Uma boa proposta para entender tais interrogações seria usar de um problema famoso que ilustra esta correspondência entre infinitos os infinitos: o problema do matemático alemão David Hilbert (1862-1943), chamado “Hotel de Hilbert”.

O Hotel de Hilbert é um famoso hotel que nunca deixou um viajante sem quarto!

Problema:

Imagine que você tem um hotel um número **fixo** (finito) de quartos e que todos eles já estejam ocupados. Se um novo hóspede chegar, **não** temos como alojá-lo, pois já estão todos ocupados, certo?

Agora imagine que o número de quartos seja **infinito**.

Isso ocorre pois o hotel tem infinitos quartos e um engenhoso gerente. Todos os quartos desse hotel são iguais e só é permitido hospedar um hóspede em cada quarto. Além disso, os quartos do hotel são numerados utilizando-se números inteiros positivos (1, 2, 3, 4, ... )

Como ficaria a chegada de um novo hospede neste hotel? Uma boa alternativa para alojá-lo, seria o gerente pedir que o hóspede do quarto 1 se mude para quarto 2, que este mude para o quarto 3 e assim sucessivamente. Desse modo, o hóspede do quarto ‘k’ se mudará para o quarto ‘k+1’. Desta forma, o quarto 1 fica disponível para atender o novo hóspede, garantindo que todos estejam alojados. Observa-se aqui uma relação de correspondência um a um entre os conjuntos {1; 2; 3; ...} e {2; 3; 4; ...}

Na maioria das vezes é atribuído ao infinito uma associação a um número muito grande. No entanto as cardinalidades de conjuntos infinitos não podem ser entendidas como números.

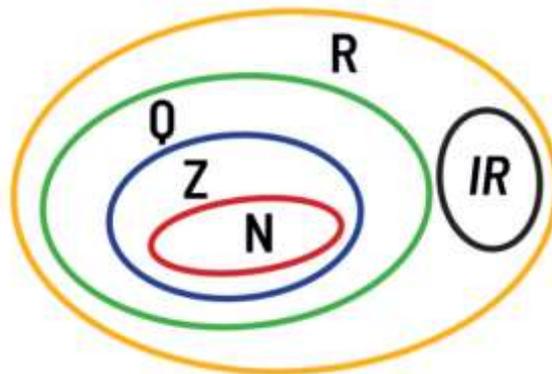
Em um artigo publicado no site “Ciências Hoje”, o matemático Victor Giraldo (UFRJ) indaga:

Infinitos são todos iguais? Ou será que alguns são maiores que outros? Até hoje, as respostas para essas perguntas – que, a princípio, soam despropositadas –impõem desafios à pesquisa em matemática. Nasceram desses questionamentos problemas ainda em solução. Pior: que não podem ser respondidos com base na lógica formal da matemática. (Ciências Hoje, 2018)

Numa análise mais cardinal pensando na correspondência um a um, notaria que o infinito dos reais é maior que o infinito dos naturais. Recorrendo à Teoria de Cantor, esta estabelece que, para qualquer conjunto infinito dado, é possível tomar outro ainda maior. Isto é, existem na verdade infinitas cardinalidades distintas de conjuntos infinitos.

Esta análise está diretamente ligada a um erro muito clássico cometido por professores de matemática, quando erroneamente fazem a seguinte representação dos conjuntos numéricos através de diagramas:

Figura 11. Diagrama de Venn errado



Fonte: Reprodução

Observa-se os seguintes erros:

- Considera-se que existem números que são reais e não são racionais e nem irracionais;
- Dá uma ideia de que os números racionais são maiores que os irracionais;

Observa-se nas aulas que os números irracionais são tratados como “casos especiais” e “raros”, muitas das vezes associado a um número reduzido de exemplares, tais como algumas raízes quadradas não exatas, o número  $\pi$ , entre outros.

No entanto, uma proposta que possa mostrar aos alunos que os números irracionais não são tão incomuns, seria fazer a seguinte proposta:

Pedir ao aluno que construa um número escolhendo aleatoriamente um a um o algarismo de sua representação decimal.

A maior probabilidade é de que o número criado não seja periódico, ou seja, que o número na verdade é irracional. Nota-se assim, que o que se considera “irregular” (os números irracionais), na verdade são bem mais regulares do que se pensa.



A abordagem da ideia de infinito pode auxiliar em muito na compreensão dos conjuntos numéricos de forma a não serem apresentados como “verdades absolutas”

O ensino e aprendizagem de Matemática, vem de uma ideia muito enraizada na apresentação de fatos e exposição de resultados, do que abordagens problematizadas.

É preciso fazer com que alunos produzam sentido para os conhecimentos matemáticos. Para isso, é preciso que seja apresentado de forma problematizadora e não como um verdade final e pronta que devemos seguir.

Caro(a) Professor(a), que este material seja uma forma de auxiliar em suas aulas. De poder repensarmos o verdadeiro papel de um professor de matemática nos diversos contextos de dificuldade que nos deparamos.

## REFERÊNCIAS

FLEMMING, D.M.;GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**: Funções, limite, derivação e integração. 6.ed. São Paulo: Person, 2006.

GIOVANNI JÚNIOR, J.R. e CASTRUCCI, B. A conquista da Matemática: 7º ano. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

IEZZI, G. et.al. **Matemática**: ciências e aplicação: Ensino Médio: volume 1. 9 ed. São Pulo: Saraiva, 2016.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. S.G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro: **Bolema**, v.25, n.41, p.73-98, dez.2011

STEWAR, J. **Cálculo**. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001.

GIRALDO, V. Ideias de infinito: na matemática e na escola. **Ciência Hoje**.jul, 2018. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/artigo/ideias-de-infinito-na-matematica-e-na-escola/> . Acessado em: 02 nov. 2024.

VOGADO, Gilberto Emanuel Reis. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas**. 2014. 167 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014

