

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Thiago Moralles de Abreu

Efeitos Não-Comutativos em Modelos Cosmológicos Bianchi I

Juiz de Fora

2025

Thiago Morales de Abreu

Efeitos Não-Comutativos em Modelos Cosmológicos Bianchi I

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Abreu, Thiago Moralles de.

Efeitos Não-Comutativos em Modelos Cosmológicos Bianchi I / Thiago Moralles de Abreu. – 2025.

151 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Cosmologia. 2. Bianchi I. 3. Não-Comutatividade. 4. Formalismo Simplético. 5. Relatividade Geral. I. Oliveira Neto, Gil de, orient. II. Título.

Thiago Morales de Abreu

Efeitos Não-Comutativos em Modelos Cosmológicos Bianchi I

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 30 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Clifford Neves Pinto

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 24/07/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 31/07/2025, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto, Professor(a)**, em 31/07/2025, às 11:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sergio Vitorino de Borba Gonçalves, Usuário Externo**, em 31/07/2025, às 11:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Membro**, em 31/07/2025, às 14:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clifford Neves Pinto, Usuário Externo**, em 31/07/2025, às 15:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Membro**, em 01/08/2025, às 10:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2515704** e o código CRC **CCBDA95A**.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto, pela orientação competente, atenta e sempre presente ao longo de todo o doutorado, com quem tive a oportunidade de aprender imensamente.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, pelo apoio contínuo em todas as etapas, incluindo auxílio para participação em eventos e concessão de diárias. Em especial, ao coordenador Prof. Dr. Maikel Yusat Ballester Furonos, pela disponibilidade e solicitude.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, por viabilizar minha formação enquanto servidor, com a concessão de bolsa Proquali por cerca de três anos e o afastamento integral por dois anos para a realização do doutorado. Em especial, ao meu então chefe imediato, Sérgio Crisóstomo dos Reis, pela autorização da licença.

À CAPES, pelo apoio decisivo durante a última fase do doutorado, por meio da concessão de um ano de bolsa.

Aos professores Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes e ao amigo Dr. Simpliciano Castardelli dos Reis, pelas colaborações.

Aos professores Dr. Maikel Yusat Ballester Furonos e Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes, pelas contribuições valiosas durante a pré-defesa.

Aos professores Dr. Clifford Neves Pinto, Dr. Sergio Vitorino Borba Gonçalves, Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes, Dr. Tibério de Paula Netto e Dr. Ilya Lvovich Shapiro, pelas contribuições valiosas na banca examinadora, que enriqueceram o trabalho e apontaram caminhos para investigações futuras.

Aos colegas físicos da UFJF e de outras instituições, pelo convívio e apoio ao longo do percurso.

À minha esposa, Ágnes de Souza Nascimento, por todo o amor e apoio emocional.

A Deus, por tudo.

RESUMO

Esta tese investiga os efeitos da não-comutatividade em modelos cosmológicos do tipo Bianchi I, com ênfase em suas implicações na dinâmica de expansão e isotropização do universo. O estudo insere-se no contexto de extensões da Relatividade Geral, com o objetivo de explorar fenômenos associados ao universo primordial e atual. A abordagem emprega a formulação hamiltoniana ADM (Arnowitt-Deser-Misner) para o setor geométrico e o formalismo de Schutz para o setor de matéria, introduzindo a não-comutatividade pela deformação da álgebra dos parênteses de Poisson ou por meio do formalismo simplético de Faddeev-Jackiw generalizado. Foram analisados dois modelos principais do tipo Bianchi I: o modelo com fluido perfeito de radiação, relevante para o universo primordial, e o modelo com gás relativístico reduzido, representando uma fase intermediária entre radiação e poeira. A partir das soluções numéricas, foram comparadas as versões comutativas e não-comutativas, e realizadas estimativas de parâmetros não-comutativos baseadas em dados observacionais. Os resultados indicam que a não-comutatividade pode influenciar a dinâmica do universo primordial, afetando a velocidade de expansão e tempo de isotropização, e deixar resquícios em parâmetros cosmológicos do universo atual.

Palavras-chave: Cosmologia. Bianchi I. Não-Comutatividade. Formalismo Simplético. Relatividade Geral.

ABSTRACT

This dissertation investigates the effects of noncommutativity in Bianchi I-type cosmological models, with an emphasis on their implications for the dynamics of expansion and isotropization of the universe. The study is set within the context of extensions to General Relativity, aiming to explore phenomena associated with both the primordial and present-day universe. The approach employs the ADM (Arnowitt-Deser-Misner) Hamiltonian formulation for the geometric sector and the Schutz formalism for the matter sector, introducing noncommutativity either through a deformation of the Poisson bracket algebra or via the generalized Faddeev–Jackiw symplectic formalism. Two main Bianchi I-type models were analyzed: the model with a radiation fluid, relevant to the primordial universe, and the model with a reduced relativistic gas, representing an intermediate phase between radiation and dust. Numerical solutions were used to compare commutative and noncommutative versions, and estimates of noncommutative parameters were derived based on observational data. The results indicate that noncommutativity can influence the dynamics of the primordial universe, affecting the expansion rate and isotropization time, and leaving imprints on cosmological parameters of the present-day universe.

Keywords: Cosmology. Bianchi I. Noncommutativity. Symplectic Formalism. General Relativity.

SUMÁRIO

	Convenções e Notações	8
1	Introdução	10
2	Elementos de Relatividade Geral e modelos de universo	12
2.1	Conceitos fundamentais da Relatividade Geral	13
2.2	A construção do modelo homogêneo e isotrópico do universo	16
2.3	Os parâmetros cosmológicos e o modelo Λ CDM	23
3	Elementos do Formalismo ADM	27
3.1	Geometria de foliações e decomposição $3 + 1$	28
3.2	Curvatura espaço-temporal na geometria de foliações	32
3.3	Ação de Einstein-Hilbert na forma $3+1$	33
3.4	Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral	35
4	Elementos do Formalismo de Schutz	41
4.1	Dinâmica euleriana de fluidos	41
4.2	Formalismo de Seliger-Whitham	42
4.3	Formalismo de Schutz	45
4.4	Tempo emergente da dinâmica interna do fluido perfeito	52
5	Elementos de não-comutatividade em Física	56
5.1	Breve Introdução à Não-Comutatividade	56
5.2	Deslocamento de Bopp	59
5.3	Formalismo de Faddeev–Jackiw	59
5.4	Formalismo simplético generalizado	61
6	Modelos de universo homogêneos e anisotrópicos	63
6.1	Introdução aos modelos cosmológicos homogêneos e anisotrópicos	63
6.2	Apresentação dos Modelos de Bianchi	63
6.3	Estrutura e Dinâmica do Modelo Bianchi I	65
7	Modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito de radiação	69
7.1	O modelo Bianchi I comutativo para um fluido perfeito genérico	70
7.2	O modelo Bianchi I não-comutativo para um fluido perfeito genérico . .	73
7.3	O modelo Bianchi I não-comutativo para um fluido perfeito de radiação	77
7.4	Estimativas para o valor do parâmetro não-comutativo	90
7.5	O modelo Bianchi I não-comutativo para diferentes fluidos	92
7.6	Considerações finais sobre o modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito de radiação	93
8	Modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido	95
8.1	Introdução ao gás relativístico reduzido	95
8.2	Modelo comutativo de Bianchi I com gás relativístico reduzido	97

8.3	O formalismo de Faddeev-Jackiw aplicado ao modelo Bianchi I com gás relativístico reduzido	99
8.4	Modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido	103
8.5	Equações de evolução para o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido	106
8.6	A evolução do universo no modelo não-comutativo	108
8.7	Estimativa dos valores dos parâmetros não-comutativos	129
8.8	Considerações finais sobre o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido	130
9	Conclusão	132
	Referências	134

Convenções e Notações

Nesta tese, adotam-se as seguintes convenções:

- A métrica do espaço-tempo tem assinatura $(-+++)$, conforme usual em Cosmologia.
- Índices espaço-temporais são representados por letras gregas $(\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots)$, variando de 0 a 3.
- Índices puramente espaciais são representados por letras latinas $(i, j, k, \dots)$, variando de 1 a 3.
- Adota-se a convenção de soma de Einstein para índices repetidos, salvo indicação em contrário.
- O símbolo $:=$ será utilizado para indicar definições, ou seja, notações introduzidas por convenção.
- A métrica do espaço-tempo é denotada por $g_{\mu\nu}$, enquanto a métrica espacial induzida sobre as hipersuperfícies é representada por h_{ij} .
- As derivadas parciais de um campo A são representadas por $\partial_\mu A$ ou, de forma abreviada, por uma vírgula subscrita na forma $A_{,\nu}$.
- As derivadas covariantes são indicadas por $\nabla_\mu A$, ou, alternativamente, por um ponto-e-vírgula subscrito na forma $A_{;\nu}$.
- Os símbolos de Christoffel são denotados por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.
- O tempo coordenado é denotado por t e o tempo próprio por τ , relacionados pela função lapso $N(t) = d\tau/dt$.
- Adota-se o sistema de unidades naturais, com $c = \hbar = 1$, salvo indicação em contrário.
- Em seções com análise cosmológica, toma-se $8\pi G = 1$ para simplificar as equações de campo de Einstein.
- Será adotada a abreviação Eq. para *Equação* e Eqs. para *Equações*.
- Será adotada a abreviação cf. para *conferir*.

Produção Científica Vinculada à Tese

Esta tese incorpora, discute e expande resultados previamente apresentados nos seguintes artigos científicos e apresentações em eventos científicos:

1. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *A noncommutative Bianchi I model with radiation*. International Journal of Modern Physics D, v. 33, n. 12, p. 2450112, 2024.

Os resultados deste artigo são discutidos e aprofundados no Capítulo 7.

2. ABREU, T. M.; OLIVEIRA-NETO, G.; MENDES, A. C. R.; REIS, S. C. *Noncommutative effects in Bianchi I cosmology with reduced relativistic gas*. arXiv:2505.07066 [gr-qc], 2025.

Este artigo serve de base para o desenvolvimento apresentado no Capítulo 8.

3. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *Exploring Noncommutative Effects on Expansive Bianchi-I Cosmological Models*. In: Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, 2024, Rio de Janeiro. Apresentação de pôster. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

4. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *Noncommutativity Effects in Bianchi-I Cosmological Models*. In: V Encontro de Primavera da SBF (EPSBF), 2024, Belo Horizonte. Apresentação oral. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

5. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *Exploring Noncommutative Effects on Expansive Bianchi-I Cosmological Models*. In: XI Encontro Mineiro de Física, 2024, Lavras. Apresentação de pôster. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

6. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *Expansão e Isotropização no Modelo Bianchi-I Não-Comutativo*. In: X Workshop da Pós-Graduação em Física da UFJF, 2024, Juiz de Fora. Apresentação oral. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

7. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *A Bianchi-I Model with Non-Commutativity*. In: III Encontro de Primavera da SBF, 2023, Niterói. Apresentação de pôster. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

8. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *Formalismo de Schutz: uma descrição euleriana relativística para fluidos perfeitos*. In: IX Workshop da Pós-Graduação em Física da UFJF, 2023, Juiz de Fora. Apresentação oral. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

9. OLIVEIRA-NETO, G.; ABREU, T. M. *A Bianchi-I Model with Non-Commutativity*. In: IX Workshop da Pós-Graduação em Física da UFJF, 2023, Juiz de Fora. Apresentação de pôster. (Apresentação feita pelo autor da tese.)

1 Introdução

A presente tese investiga os efeitos da inclusão da não-comutatividade em modelos cosmológicos do tipo Bianchi I, examinando suas possíveis implicações na dinâmica de expansão e isotropização do universo. O trabalho insere-se no contexto da pesquisa por extensões da Relatividade Geral (RG), que buscam esclarecer tanto fenômenos em escalas próximas às da gravidade quântica no universo primordial quanto compreender a atual fase de expansão acelerada, por meio de formulações alternativas ao modelo padrão Λ CDM. A escolha pelo modelo Bianchi I justifica-se pela capacidade de explorar o fenômeno de isotropização em um universo com geometria plana.

A incorporação da não-comutatividade, entendida como deformações no espaço de fase da teoria usual, constitui uma maneira matemática robusta para descrever fenômenos de natureza essencialmente quântica. Não obstante, conduzimos todo o estudo dentro do escopo clássico da RG, visto que não-comutatividades dessa natureza podem, teoricamente, persistir com a expansão do universo e deixar resquícios em parâmetros cosmológicos.

Para o estudo em grande escala do universo, adotamos a abordagem da formulação hamiltoniana ADM (Arnowitt-Deser-Misner) para o setor geométrico e, quando conveniente, a suplementamos com sua correspondente versão para matéria, dada pelo formalismo de Schutz. A introdução das não-comutatividades se deu ora através da deformação da álgebra dos parênteses de Poisson ora por meio de um formalismo simplético de Faddeev-Jackiw generalizado. Desse modo, após a inclusão de deformações no espaço de fase da teoria, investigou-se as equações de evolução e os possíveis impactos dinâmicos decorrentes. Em todas as situações, foram obtidas soluções numéricas, que foram comparadas com suas correspondentes versões comutativas, e realizadas estimativas de parâmetros não-comutativos a partir de dados de cosmologia observacional.

O trabalho aborda dois cenários principais com maior profundidade: o modelo com fluido perfeito de radiação e o modelo com gás relativístico reduzido. O primeiro é útil para o estudo da dinâmica primordial do universo, fase em que a radiação era a forma dominante de matéria. O segundo consiste em uma solução intermediária entre os fluidos de radiação e poeira, sendo adequado tanto para modelar regimes de transição entre essas fases quanto para descrever matéria escura morna no universo tardio. Em cada estudo, empregamos abordagens distintas para tratar as não-comutatividades.

A estrutura da tese é organizada da seguinte forma: inicialmente, o Capítulo 2 apresenta uma revisão dos conceitos fundamentais da Relatividade Geral e sua aplicação à cosmologia. O Capítulo 3 expõe o formalismo ADM, essencial para a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral. O Capítulo 4 introduz o formalismo de Schutz e seu papel no acoplamento da matéria. O Capítulo 5 aborda os fundamentos da não-comutatividade em física e sua formulação matemática. O Capítulo 6 discute os modelos

cosmológicos homogêneos e anisotrópicos, com ênfase nos modelos de Bianchi. O Capítulo 7 desenvolve e analisa o modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito, enquanto o Capítulo 8 investiga o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido. Por fim, o Capítulo 9 apresenta as conclusões gerais e perspectivas futuras, discutindo as implicações dos resultados obtidos e possíveis desdobramentos para pesquisas futuras.

2 Elementos de Relatividade Geral e modelos de universo

*A estrutura moldada em curvas,
abre caminhos para as coisas,
que movem-se nos arcos da trama,
deformando as antigas formas,
em todo o lugar e para sempre
tudo se espalha com ímpeto.*

A *Relatividade Geral* é a teoria padrão atualmente aceita pela comunidade científica para descrever a gravitação, assim como a estrutura do espaço e do tempo. Introduzida por Albert Einstein em uma série de palestras em 1915 e detalhada em um artigo de 1916 [1], a teoria foi extensivamente estudada, tendo suas previsões confirmadas por inúmeros experimentos e observações astrofísicas. Entre os exemplos notáveis estão: a explicação da precessão anômala do periélio de Mercúrio [2]; a confirmação da deflexão da luz ao passar por corpos massivos, observada pela primeira vez no eclipse solar de 1919 [3]; o desvio para o vermelho gravitacional da luz, confirmado inicialmente no experimento de Pound-Rebka em 1959 [4, 5]; a descoberta de buracos negros, com destaque para o Cygnus X-1 detectado em 1965 [6, 7]; o fenômeno das lentes gravitacionais, verificado pela primeira vez em 1979 [8, 9]; a precisão dos sistemas de navegação por satélite, como o GPS, que incorporam correções dessa teoria [10]; a confirmação dos efeitos de precessão geodésica (efeito de Sitter) e arraste de referenciais inerciais (efeito Lense-Thirring) pela sonda GP-B em 2011 [11]; a detecção de ondas gravitacionais pelo observatório LIGO em 2015 [12] e em conjunto com o Virgo em 2017 [13]; e a obtenção da primeira imagem do horizonte de eventos de um buraco negro em 2019 pela colaboração EHT [14].

A teoria da *Relatividade Restrita* introduziu uma mudança de paradigma na ciência, ao integrar espaço e tempo em uma única estrutura conhecida como espaço-tempo, por meio das transformações de Lorentz [15]. A Relatividade Geral, por sua vez, foi além e redefiniu a gravidade como uma manifestação da curvatura dessa nova estrutura. Apesar dessa inovação, a Relatividade Geral converge para teorias anteriores em seus limites de validade, em conformidade com o *princípio da correspondência*, que exige que novas teorias reproduzam os resultados das antigas dentro de seus domínios de aplicabilidade [16]. Assim, em condições de ausência de gravitação, ela resulta na Relatividade Especial, enquanto em campos gravitacionais fracos e baixas velocidades comparadas à luz, ela equivale à teoria gravitacional newtoniana.

A seguir, será realizada uma apresentação dos conceitos fundamentais da Relatividade Geral, seu uso na construção do modelo homogêneo e isotrópico do universo, bem como uma breve introdução ao modelo Λ CDM, atualmente aceito como a melhor descrição

do universo na Cosmologia.

2.1 Conceitos fundamentais da Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral faz uso de alguns conceitos já introduzidos pela Relatividade Restrita, entre eles a noção de espaço-tempo. O *espaço-tempo* é descrito matematicamente como um *continuum* quadridimensional composto por eventos. Cada *evento* é caracterizado por quatro coordenadas, sendo três espaciais e uma temporal, isto é, um evento é dado por um ponto $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ no espaço-tempo. Dessa forma, o espaço-tempo é descrito como uma variedade (em inglês, *manifold*) quadridimensional pseudoriemanniana, ou seja, um espaço topológico de quatro dimensões que localmente se assemelha a um espaço pseudoeuclidiano, mas que pode apresentar uma estrutura mais complexa globalmente. O termo *pseudo* indica que essa estrutura difere do comportamento euclidiano ou riemanniano tradicional, permitindo diferentes sinais nas componentes espaciais e temporal, o que possibilita a descrição de fenômenos físicos em que a causalidade e a geometria do espaço-tempo estão intrinsecamente relacionadas.

As coordenadas do evento em si não têm significado físico intrínseco, visto que dependem do sistema de referência utilizado para medir os eventos e das propriedades do próprio espaço-tempo. O mesmo também é verdade, em geral, para os intervalos de espaço e de tempo entre dois eventos. Não obstante, para dois eventos x^α e $x^\alpha + dx^\alpha$ infinitesimalmente próximos, é possível construir uma quantidade absoluta (invariante), que independe do observador. Essa quantidade é chamada de *intervalo de espaço-tempo*, e consiste em um elemento de linha de um espaço quadridimensional. Sua expressão é dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ é chamado de *métrica*. A métrica é um tensor de segunda ordem, simétrico em seus índices e, em geral, dependente das coordenadas. É ela que possibilita medir a estrutura intrínseca do espaço-tempo. Em alguns casos, de forma imprecisa, a própria expressão de ds^2 é chamada por alguns autores de métrica, embora, a rigor, métrica seja o campo tensorial associado com a fórmula para o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos infinitesimalmente próximos.

A métrica, além de definir como são medidas as distâncias e os intervalos de tempo no espaço-tempo, é também a entidade que descreve o comportamento do campo gravitacional. Na Relatividade Especial, onde o campo gravitacional é negligenciado, o espaço-tempo é plano. Isto significa que ele é descrito por uma métrica que mantém a mesma forma em todos os lugares e direções, ou seja, não possui curvatura intrínseca. Assim, o intervalo de espaço-tempo se escreve como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é um tensor constante conhecido como *métrica de Minkowski*. Este tensor é simétrico e, em coordenadas cartesianas, pode ser representado por uma matriz diagonal com elementos $(-1, +1, +1, +1)$, ou de forma alternativa, $(+1, -1, -1, -1)$. A escolha dos sinais, conhecida como *assinatura*, é uma convenção que varia conforme o sistema de notação. Neste trabalho, adotaremos a primeira opção, amplamente utilizada em Cosmologia.

Na Relatividade Geral, a métrica do espaço-tempo pode desviar-se da forma plana, e esse desvio é responsável pelos efeitos gravitacionais. Essas variações na métrica correspondem à curvatura do espaço-tempo, que descreve como as distâncias e os intervalos de tempo são alterados em diferentes regiões do universo. Assim, nessa teoria, a gravidade não é mais entendida como uma força que atua à distância, mas sim como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Neste caso, as trajetórias de partículas livres — sujeitas apenas à gravidade — são dadas por *geodésicas*, isto é, curvas que extremizam o intervalo de espaço-tempo, análogas às linhas retas no espaço euclidiano. A equação de trajetória para uma partícula livre é conhecida como *equação da geodésica*, e pode ser vista como uma descrição do movimento inercial no espaço-tempo curvo:

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0, \quad (2.3)$$

onde $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ é o vetor tangente à trajetória, e $\nabla_\nu U^\mu = \partial_\nu U^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\lambda$ representa a derivada covariante. Explicitamente, essa equação equivale a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (2.4)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula, e os $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são quantidades dependentes da métrica, chamadas de *símbolos de Christoffel*, e definidas como:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu := \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (2.5)$$

A curvatura intrínseca do espaço-tempo é quantificada por meio do *tensor de Riemann*, que mede a variação de vetores transportados paralelamente ao longo de curvas fechadas. Ele é definido como:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\epsilon - \Gamma_{\nu\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\epsilon. \quad (2.6)$$

A reflexão sobre o *princípio de equivalência*, que afirma que todos os corpos são igualmente influenciados pela gravidade e seguem o mesmo movimento de queda livre, permitiu a Einstein atribuir o fenômeno gravitacional à própria estrutura do espaço-tempo. Ele observou que os efeitos locais da gravidade são indistinguíveis dos efeitos de uma aceleração uniforme. A partir dessa observação, propôs que a gravidade não é uma força atrativa entre objetos, mas sim uma manifestação da geometria do espaço-tempo. Objetos em queda livre seguem geodésicas, que são as trajetórias naturais em uma geometria curva,

fazendo com que sua dinâmica seja um efeito puramente inercial dentro dessa geometria. Dessa forma, Einstein formalizou a equivalência entre a massa inercial (resistência à aceleração) e a massa gravitacional (fonte de gravidade), uma equivalência empiricamente notada por Newton, mas não explicada até então.

A presença de corpos no universo deforma a geometria do espaço-tempo, que, em sua forma não deformada, seria plana. Essa deformação é responsável pela dinâmica observada nos movimentos de corpos materiais e raios de luz. Corpos mais massivos causam uma curvatura maior na geometria do espaço-tempo em comparação com corpos menos massivos. Dessa forma, a presença de matéria e energia altera a geometria do espaço-tempo, e essa geometria alterada, por sua vez, influencia a movimentação da matéria e da energia. Nas palavras de J. A. Wheeler, “O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar.” [17]. É dele também o uso do termo *geometrodinâmica* para descrever a abordagem teórica de tratamento da gravidade como uma manifestação da curvatura dinâmica do espaço-tempo [18].

A interação entre a geometria do espaço-tempo e a presença de matéria é formalmente descrita pelas *equações de campo de Einstein*. Estas equações relacionam a curvatura do espaço-tempo, quantificada pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, com o conteúdo físico, representado pelo tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$, que incorpora a densidade de energia, os fluxos de energia e momentum, além das pressões e tensões associadas à matéria, radiação ou outros campos. As equações são expressas como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz no vácuo¹. Em razão da simetria da métrica $g_{\mu\nu}$, as equações de Einstein se reduzem a um sistema de dez equações diferenciais parciais não lineares, de segunda ordem, para os componentes da métrica.

O *tensor de Einstein*, $G_{\mu\nu}$, é um tensor simétrico que descreve a curvatura do espaço-tempo. Ele é definido a partir de contrações do tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ como:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.8)$$

onde $R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\lambda\nu}$ é o tensor de Ricci e $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura.

Por outro lado, o *tensor energia-momentum* $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico que descreve a distribuição e o movimento de matéria e energia no espaço-tempo. Suas componentes incluem: T_{00} , que representa a densidade de energia; T_{0i} e T_{i0} associados ao fluxo de momentum na direção i ; e T_{ij} , que descreve o fluxo da componente i do momentum linear através de uma superfície perpendicular à direção j . Para $i = j$, as componentes

¹ A partir deste ponto, adotamos unidades naturais, com $c = 1$, salvo indicação em contrário.

T_{ii} correspondem às pressões nas respectivas direções espaciais, enquanto para $i \neq j$, as componentes T_{ij} estão relacionadas às tensões cisalhantes.

As equações de campo de Einstein são formuladas usando tensores de segunda ordem que são simétricos em seus índices, o que reduz o número de equações independentes de dezesseis para dez. Além disso, o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ satisfaz uma condição de conservação, derivada das *identidades de Bianchi* aplicadas ao tensor de curvatura:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

condição que garante a consistência interna das equações de campo de Einstein com a lei de conservação do tensor energia-momentum, que é dada por:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

e expressa a conservação local de energia e momentum no espaço-tempo. Portanto, a configuração geométrica do espaço-tempo deve respeitar a conservação de energia e momentum, enquanto a distribuição de matéria e energia deve ser consistente com a curvatura do espaço-tempo.

. . .

Uma vez apresentados os fundamentos da Relatividade Geral, pode-se agora partir para a aplicação desses princípios ao estudo do universo como um todo. A teoria da Relatividade Geral fornece uma base teórica para a construção de modelos que descrevem a estrutura e evolução do cosmos em grande escala. Nas próximas seções, serão discutidos como os pressupostos de homogeneidade e isotropia, presentes no princípio cosmológico, orientam a elaboração de modelos cosmológicos, culminando no modelo padrão Λ CDM. Optamos por adotar a abordagem da formulação hamiltoniana na dedução das equações que governam a dinâmica do universo.

2.2 A construção do modelo homogêneo e isotrópico do universo

A interação gravitacional domina em grande escala e atua sobre todos os corpos. Portanto, é de se esperar o emprego de uma teoria de gravidade para a construção de uma descrição do universo como um todo. É por isso que se emprega a Relatividade Geral na construção da Cosmologia. Para implementar essa abordagem, porém, são adotadas pressuposições que simplificam as equações de campo de Einstein, permitindo a criação de modelos cosmológicos.

Uma dessas suposições, frequentemente utilizada para descrever o universo atual, é o *princípio cosmológico* [19].² Este princípio amplia o conceito copernicano de não

² Inicialmente chamado de princípio estendido da relatividade [20], foi posteriormente renomeado como princípio cosmológico [21], denominação que perdura até hoje [22].

geocentricidade, estabelecendo a ausência de qualquer posição especialmente privilegiada no universo [23]. O princípio cosmológico então postula que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, ou seja, apresenta a mesma estrutura e distribuição de matéria independentemente da direção ou posição observada, salvo irregularidades locais [24]. Matematicamente, isso implica que o espaço-tempo pode ser dividido em hipersuperfícies esfericamente simétricas em torno de qualquer ponto, proporcionando uma descrição simplificada da estrutura universal [25].

Assume-se a existência de um tempo cósmico t , onde o princípio cosmológico é válido em cada hipersuperfície de $t = \text{constante}$ [26]. Se não há pontos privilegiados em cada hipersuperfície, diz-se que a variedade é homogênea. Uma variedade sem direções privilegiadas em torno de qualquer ponto é chamada isotrópica, apresentando simetria esférica em torno desse ponto. Uma variedade globalmente isotrópica é necessariamente homogênea [27]. Assim, o universo descrito pelo princípio cosmológico é homogêneo e isotrópico.

A homogeneidade do universo é de fato observada em escalas cosmológicas de grande magnitude, tipicamente da ordem de 10^9 anos-luz [28], o que é suficiente para incluir múltiplos aglomerados de galáxias e exceder a escala de superaglomerados, que é aproximadamente 3×10^8 anos-luz [29]. Diversas observações astrofísicas corroboram a isotropia universal em grande escala, incluindo estudos da radiação difusa de raios X [30], de raios cósmicos de alta energia em radiogaláxias [31], de quasares [32] e medições por meio de supernovas Tipo Ia [33]. Porém, a evidência mais substancial advém do estudo da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB, *cosmic microwave background*), uma radiação térmica que permeia o universo [34] a uma temperatura média de cerca de 2,7255 K [35]. As medições do satélite *Planck* confirmam uma forte isotropia em grande escala, com precisão da ordem de 10^{-5} [36]. Adicionalmente, os levantamentos de contagem de galáxias [37] e a validação da linearidade da Lei de Hubble-Lemaître para o universo local [38] também fornecem suporte à isotropia do universo.

Ao se considerar que o universo é dinâmico, além de homogêneo e isotrópico, o elemento de linha da relatividade pode ser descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)³, dada por:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(t)^2 d\sigma_k^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma_k^2, \quad (2.11)$$

onde $N(t) = d\tau/dt$ é a função *lapso*, que determina a taxa de contagem pela qual a coordenada t mede o tempo próprio τ , e $a(t)$ é o *fator de escala*, que descreve como as distâncias espaciais entre pontos comóveis variam ao longo do tempo. Por sua vez, $d\sigma_k^2$ é

³ A denominação Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) incorpora as contribuições fundamentais de A. Friedmann [26, 39] e G. Lemaître [40, 41] na descrição da dinâmica de um universo expansivo, juntamente com as contribuições de H. P. Robertson [42–44] e A. G. Walker [45] na formulação de um espaço homogêneo e isotrópico.

o elemento de linha espacial de um espaço tridimensional de curvatura constante, expresso como:

$$d\sigma_k^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.12)$$

onde k é o parâmetro de curvatura constante, que pode assumir os valores: 0 (espaço plano), +1 (espaço esférico) e -1 (espaço hiperbólico)⁴.

A aplicação das equações de campo de Einstein ao universo como um todo exige não apenas a modelagem da estrutura geométrica do espaço, baseada no postulado do princípio cosmológico, que resulta na métrica FLRW, mas também a consideração detalhada do conteúdo de matéria-energia presente no universo. Baseando-se no fato de que a velocidade relativa da matéria dentro de vizinhanças astronômicas, como grupos de galáxias, é pequena [47–49], H. K. H. Weyl [50] teorizou uma descrição dinâmica associada ao movimento difuso das galáxias, conhecida como *postulado de Weyl* [51]. Este postulado introduz a ideia de um substrato ou fluido cósmico permeando o universo, dentro do qual as galáxias se movem como partículas fundamentais. Conforme enunciado por Pathria [52], este postulado afirma que “as partículas do substrato estão, no espaço-tempo do cosmos, em um feixe de geodésicas que divergem de um ponto no passado.” Como consequência, há apenas uma geodésica passando por cada ponto do espaço-tempo, e, dessa forma, a matéria em qualquer ponto possui uma velocidade única, podendo ser descrita como um *fluido perfeito* [53].⁵

As equações de campo de Einstein podem ser obtidas a partir da aplicação do *princípio variacional de Hamilton* à ação que descreve o campo gravitacional. Este princípio determina que as equações de movimento de um sistema físico são encontradas ao se buscar o caminho para o qual a variação da ação é nula [54, 55]. Isto é, dada uma ação funcional da métrica, $S[g_{\mu\nu}]$, busca-se a condição $\delta S = 0$, onde:

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

em que $\delta S/\delta g_{\mu\nu}$ é chamado de derivada funcional de S em relação a $g_{\mu\nu}$.

A ação que descreve o campo gravitacional é chamada de *ação de Einstein-Hilbert* [56] e é expressa como:

$$S_G[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.14)$$

onde κ é a constante de acoplamento, determinada como $\kappa = 8\pi G/c^4$ pelo princípio da correspondência, e $g = \det(g_{\mu\nu})$ denota o determinante do tensor métrico.

⁴ A dedução desse elemento de linha espacial, que envolve a consideração das isometrias (transformações que preservam a forma da métrica) e dos vetores de Killing associados (campos vetoriais que geram essas simetrias), é longa e está além do escopo desta tese, razão pela qual será omitida. Para uma apresentação formal, ver Weinberg [46].

⁵ A descrição da matéria como fluido perfeito será discutida em maior detalhe no Capítulo 4, no contexto do formalismo variacional de Schutz.

Para o caso de um universo homogêneo e isotrópico, o procedimento tradicional consiste em se calcular a derivada funcional da ação de Einstein-Hilbert, dada pela Eq. (2.14), em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e, em seguida, substituir a métrica FLRW, Eq. (2.11), no resultado. Porém, neste trabalho, seguimos o caminho inverso: utilizamos a métrica homogênea e isotrópica para calcular o determinante g e o escalar de Ricci R , os quais são então substituídos na ação de Einstein-Hilbert, e só depois variamos a ação para obter as equações de movimento [57].

No caso FLRW, a aplicação direta da simetria da métrica na ação antes de derivar as equações de movimento é justificada, pois a simetria isotrópica e homogênea faz com que a ação dependa apenas do tempo, simplificando as integrações e variações sem comprometer a generalidade das equações de movimento. Este método realiza uma *redução dimensional* da ação, que passa a ser chamada de *ação reduzida*. No entanto, tal abordagem não é aplicável em casos gerais, sendo válida apenas sob determinadas condições.⁶

Dando seguimento ao procedimento, tem-se que o escalar de Ricci é dado por:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{\dot{N} \dot{a}}{N^3 a} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (2.15)$$

enquanto o determinante da métrica é expresso como:

$$g = - \frac{N^2(t) a^6(t) r^4 \sin^2 \theta}{1 - k r^2}, \quad (2.16)$$

levando à seguinte ação gravitacional reduzida:

$$S_G[a, N] = - \frac{3\phi_0}{8\pi G} \int dt \left(\frac{a\dot{a}^2}{N} - k a N \right), \quad (2.17)$$

em unidades naturais onde $c = 1$. A constante $\phi_0 := \int dr d\theta d\varphi r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - k r^2}$ é calculada sobre uma região compacta do espaço tridimensional. Para simplificar os cálculos, vamos assumir $\phi_0 = 1$. Com isso, a lagrangiana gravitacional reduzida é dada por:

$$\mathcal{L}_G = - \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{a\dot{a}^2}{N} - k a N \right). \quad (2.18)$$

Em posse da lagrangiana reduzida, faremos uso da abordagem canônica, que é um método em teoria de campos que reformula a dinâmica do sistema utilizando variáveis canônicas, como as coordenadas q^i e os momenta p_i , com $i = 1, \dots, N$, que formam o espaço de fase (p_i, q^i) . No nosso caso, vamos considerar as funções temporais $a(t)$ e $N(t)$ da ação e seus respectivos momenta canonicamente conjugados p_a e p_N como as variáveis canônicas da teoria. Os momenta são definidos como:

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{a}} = - \frac{3}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N}, \quad p_N := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (2.19)$$

⁶ As condições para que esse procedimento possa ser aplicado são elencadas no princípio da criticalidade simétrica introduzido por R. S. Palais [58] em 1979 e são extensamente discutidas no contexto da relatividade geral em [59].

onde o momentum p_N é identicamente nulo. Esta nulidade representa um *vínculo primário* nas variáveis canônicas, indicando a liberdade na escolha do parâmetro $N(t)$. Em sistemas dinâmicos, um vínculo é uma restrição adicional que limita o espaço de fase. Na teoria canônica, um vínculo primário é aquele que aparece diretamente na definição de um momentum canônico [60–63].

Agora, usando a primeira expressão em Eq. (2.19), podemos reescrever a lagrangiana gravitacional, Eq. (2.18), em termos das variáveis canônicas, do que resulta:

$$\mathcal{L}_G = - \left(\frac{2\pi G}{3} \frac{N p_a^2}{a} - \frac{3}{8\pi G} N a \right), \quad (2.20)$$

a partir da qual podemos determinar a hamiltoniana gravitacional através da transformação de Legendre,

$$H_G(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L_G(q^i, p_i), \quad (2.21)$$

que para as variáveis canônicas do nosso problema, e usando Eq. (2.19), torna-se:

$$H_G(a, N, p_a, p_N) = -\frac{2\pi G}{3} \frac{N p_a^2}{a} - \frac{3}{8\pi G} k a N. \quad (2.22)$$

Para encontrar a hamiltoniana total, devemos somar à hamiltoniana gravitacional, Eq. (2.22), a hamiltoniana de matéria H_M e uma contribuição do vínculo primário p_N , isto é,

$$H = H_G + H_M + \lambda p_N, \quad (2.23)$$

onde $\lambda(t)$ é uma função arbitrária.

Na formulação hamiltoniana, as equações de movimento para as variáveis canônicas são derivadas a partir da hamiltoniana total H utilizando os parênteses de Poisson ou as equações de Hamilton. Assim, para uma variável canônica q^i e seu momentum conjugado p_i , as equações de movimento são dadas por [64]:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (2.24)$$

onde $\{A, B\}$ denota os parênteses de Poisson para duas funções A e B no espaço de fase, definidos como:

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i}. \quad (2.25)$$

Aplicando esses conceitos, as equações de movimento são obtidas através da hamiltoniana total e se escrevem como:

$$\dot{a} = \{a, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{N p_a}{a}, \quad (2.26)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, H\} = -\frac{\partial H}{\partial a} = -\frac{2\pi G}{3} \frac{N p_a^2}{a^2} + \frac{3}{8\pi G} N k - \frac{\partial H_M}{\partial a}, \quad (2.27)$$

$$\dot{N} = \{N, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_N} = \lambda, \quad (2.28)$$

$$\dot{p}_N = \{p_N, H\} = -\frac{\partial H}{\partial N} = \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3}{8\pi G} ka - \frac{\partial H_M}{\partial N}. \quad (2.29)$$

Podemos notar que, enquanto Eq. (2.26) é idêntica à definição Eq. (2.19) do momentum p_a , a Eq. (2.27) fornece uma equação de evolução de segunda ordem para a . A Eq. (2.28) indica a arbitrariedade da função lapso $N(t)$ devido à arbitrariedade da função $\lambda(t)$. Finalmente, a Eq. (2.29) implica um vínculo secundário, expresso por $\dot{p}_N = 0$, que é válido em todos os tempos.

Na teoria canônica, um vínculo secundário resulta da evolução temporal dos vínculos primários, frequentemente através da aplicação das equações de movimento. Neste caso, o vínculo secundário surge da evolução temporal do vínculo primário $p_N = 0$. Portanto, o vínculo secundário é dado por:

$$-\frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{3}{8\pi G} ka + \frac{\partial H_M}{\partial N} = 0, \quad (2.30)$$

e impõe uma restrição adicional nas variáveis dinâmicas do sistema, garantindo que a evolução temporal seja consistente com as equações de movimento e o vínculo primário.

Na teoria canônica, a igualdade $p_N = 0$ é dita ser uma igualdade *fraca*, sendo denotada por $p_N \approx 0$, pois é satisfeita apenas na superfície de vínculo (*on-shell*), que é o subconjunto do espaço de fase onde todos os vínculos são satisfeitos. As variações dessas funções, como $\dot{p}_N = 0$, podem não ser zero quando consideradas fora da superfície de vínculo (*off-shell*), refletindo as restrições dinâmicas adicionais impostas pelos vínculos secundários. Uma igualdade *forte*, por sua vez, é aquela que é válida em todo o espaço de fase do sistema.

Dando prosseguimento ao estudo das equações de movimento, podemos isolar p_a a partir de Eq. (2.26) e substituir na equação de vínculo, Eq. (2.30), obtendo-se a famosa equação de Friedmann, dada por:

$$\frac{1}{N^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \frac{\partial H_M}{\partial N} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.31)$$

que descreve a dinâmica de evolução do fator de escala $a(t)$ do universo em termos da densidade de energia (como será esclarecido adiante) e da curvatura espacial k .

Agora, se tomarmos a derivada temporal da Eq. (2.26) e fizermos uso novamente da equação Eq. (2.26) para eliminar $\dot{a}$ da equação resultante, encontramos:

$$\dot{p}_a = -\frac{3a}{4\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{N} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{N^2} \right) - \frac{4\pi G}{3} \frac{Np_a^2}{a^2}, \quad (2.32)$$

que, substituído à equação Eq. (2.27) e levando em conta o valor de $\partial H_M / \partial N$ da equação Eq. (2.30), resulta na *equação de Raychaudhuri* [65] (ou *equação de aceleração*), dada por:

$$\frac{1}{aN} \left(\frac{\ddot{a}}{N} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{N^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{1}{a^3} \frac{\partial H_M}{\partial N} - \frac{1}{Na^2} \frac{\partial H_M}{\partial a} \right), \quad (2.33)$$

Para o cômputo de H_M , deve-se notar que a dependência com N advirá apenas do fator $\sqrt{-g}$, que na métrica FLRW é proporcional a N , como se pode ver da Eq. (2.16). Consequentemente, H_M será proporcional a N . Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial H_M}{\partial N} = \frac{1}{N} H_M = E, \quad (2.34)$$

onde E é a energia da distribuição de matéria medida no tempo próprio. Para entender como essa energia se distribui espacialmente, considera-se o volume espacial como $V = a^3$. A partir disso, é possível definir quantidades que são independentes do ajuste de escala de a ou de mudanças na coordenada temporal. Assim, temos a *densidade de energia*, dada por:

$$\rho := \frac{E}{V} = \frac{H_M}{Na^3} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial H_M}{\partial N}, \quad (2.35)$$

e a *pressão*, expressa como:

$$p := -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{1}{3Na^2} \frac{\partial H_M}{\partial a}, \quad (2.36)$$

Essas novas definições permitem reescrever as equações de Friedmann, Eq. (2.31), e de Raychaudhuri, Eq. (2.33), em uma forma mais conveniente, dadas por:

$$\frac{1}{N^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{aN} \left(\frac{\ddot{a}}{N} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{N^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.38)$$

Note que, ao diferenciar a equação de Friedmann, Eq. (2.37), em relação ao tempo e substituir o resultado na equação de Raychaudhuri, Eq. (2.38), obtém-se a *equação de continuidade*, dada por:

$$\frac{\dot{\rho}}{N} + 3 \frac{\dot{a}}{Na} (\rho + p) = 0, \quad (2.39)$$

onde se manteve explícita a dependência em relação ao tempo coordenado ajustado por N . Dentro da cosmologia FLRW, o caso $N = 1$ corresponde àquele em que o tempo coordenado t mede diretamente o tempo próprio de observadores comóveis, isto é, observadores que se movem com a evolução do universo.

A equação de Friedmann fornece a evolução do universo (expansão ou contração) para uma dada configuração de densidade de energia, expressa pelo termo ρ , e de curvatura, denotada pela constante k . A equação de Raychaudhuri, por sua vez, descreve o perfil de aceleração da evolução, sendo dependente da densidade de energia, mas não da curvatura.

A densidade de energia ρ pode incluir diversos tipos de fluido com suas respectivas densidades, sejam eles matéria (ρ_m), radiação (ρ_r), energia escura (ρ_Λ), dentre outras formas de energia que componham o balanço de matéria e energia do modelo estudado.

O problema principal da cosmologia homogênea e isotrópica, então, consiste em determinar a dinâmica do fator de escala $a(t)$ para os componentes materiais. Isso se dá

por meio da especificação dos componentes de fluido presentes na densidade de energia ρ e da relação da forma $p = p(\rho)$, conhecida como equação de estado, para a especificação da pressão. No caso de um fluido perfeito, a equação de estado satisfaz a relação

$$p = \omega \rho, \quad (2.40)$$

onde ω é uma constante característica do fluido considerado. Por exemplo, para matéria, $\omega = 0$; para radiação, $\omega = 1/3$; e para energia escura, $\omega = -1$.

2.3 Os parâmetros cosmológicos e o modelo Λ CDM

Em cosmologia, dois parâmetros são fundamentais para descrever a dinâmica do universo [66], os quais, tal como a densidade de energia e a pressão, são também independentes de ajuste de escala. São eles, o *parâmetro de Hubble*,

$$H := \frac{a'}{a} = \frac{1}{N} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (2.41)$$

e o *parâmetro de desaceleração*,

$$q := -\frac{aa''}{a'^2} = -\frac{1}{N} \frac{a}{\dot{a}^2} \left(\ddot{a} - \dot{a} \frac{\dot{N}}{N} \right), \quad (2.42)$$

onde a linha (') denota derivação em relação ao tempo próprio τ e o ponto (·) denota derivação em relação ao tempo t .

O parâmetro de Hubble, quando avaliado no tempo presente t_0 , é chamado de *constante de Hubble* e denotado por H_0 . Esta constante está presente na *Lei de Hubble-Lemaître*, que descreve a dinâmica da velocidade de recessão v de galáxias em função de sua distância r como uma relação linear [40, 67], na forma:

$$v = H_0 r. \quad (2.43)$$

Além disso, a constante de Hubble também é utilizada para definir a *densidade crítica*, ρ_c , que representa a densidade de energia necessária para que o universo, descrito pelo modelo FLRW, seja plano. Ela é definida como:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.44)$$

onde $\rho = \rho_c$ corresponde a um universo espacialmente plano ($k = 0$), $\rho > \rho_c$ a um universo fechado ($k > 0$) e $\rho < \rho_c$ a um universo aberto ($k < 0$).

A densidade total de energia do universo pode ser decomposta em diferentes componentes, conforme os constituintes físicos predominantes. Denota-se por ρ_m a densidade de energia associada à matéria (incluindo tanto matéria bariônica quanto escura); por ρ_r , a densidade associada à radiação (como fótons e neutrinos relativísticos); e por ρ_Λ , a densidade correspondente à constante cosmológica, interpretada como energia escura.

Com base na densidade crítica e nas densidades de energia desses diversos componentes, definem-se os *parâmetros de densidade* Ω_m , Ω_r , Ω_Λ e Ω_k , que representam frações adimensionais associadas, respectivamente, à matéria, radiação, energia escura e curvatura espacial. Suas expressões são dadas por:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H_0^2}, \quad (2.45)$$

onde Ω_k serve como medida adimensional da contribuição da curvatura espacial para a dinâmica do universo, estabelecida por analogia com os parâmetros de densidade física, muito embora não exista densidade de energia associada à curvatura.

É comum considerar a densidade de energia total ρ como a soma das densidades de energia dos diferentes componentes do conteúdo cósmico, de modo que:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda. \quad (2.46)$$

Assim, levando em conta que a densidade de matéria decresce com o aumento do volume na forma a^{-3} , a densidade de radiação decai com o aumento do volume na forma a^{-4} devido ao efeito adicional de redshift dos fótons, e que a densidade de energia escura permanece constante, isto é,

$$\rho_m \propto a^{-3}, \quad \rho_r \propto a^{-4}, \quad \rho_\Lambda \propto a^0, \quad (2.47)$$

podemos reescrever a equação de Friedmann, Eq. (2.37), na forma:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2} \right], \quad (2.48)$$

com os parâmetros de densidade avaliados no tempo presente.

A análise do parâmetro de desaceleração no tempo presente t_0 fornece uma indicação da *mudança* na taxa de expansão atual, mais especificamente a desaceleração ou aceleração da expansão. Observações de supernovas Tipo Ia realizadas por dois grupos independentes [68, 69] mostraram que $q_0 < 0$, indicando que o universo está em um estado de expansão acelerada.

Para descrever corretamente o universo como um todo, é necessário especificar as diversas frações de energia e matéria que contribuem para a composição total do cosmos. Essas quantidades devem estar em acordo com as mais precisas observações cosmográficas. Neste sentido, o modelo amplamente adotado por sua consistência com grande parte dos dados observacionais é o chamado modelo Λ CDM (Lambda-Cold Dark Matter) [70], que descreve o universo no tempo presente, embora enfrente atualmente algumas tensões observacionais [71, 72]. Este modelo inclui no balanço de matéria e energia do universo os seguintes componentes e suas frações aproximadas:

- **Energia escura (Λ):** De natureza desconhecida e descrita por uma *constante cosmológica* Λ [73–76]. É responsável pela aceleração da expansão do universo e representa aproximadamente 69% do conteúdo de energia do universo.

- **Matéria escura fria (CDM):** Matéria não interagente eletromagneticamente e detectável apenas por seus efeitos gravitacionais. Possui pressão desprezível e velocidade não-relativística, sendo essencial para explicar a formação de estruturas no universo [77, 78]. Este componente compreende cerca de 26% do universo.
- **Bárions:** Matéria que interage com a radiação eletromagnética e constitui as partículas que formam os átomos que compõem a matéria ordinária visível. Responde por aproximadamente 5% do conteúdo energético do universo.
- **Radiação:** Energia radiativa, composta principalmente por fótons e neutrinos, dominante no universo primordial [79–82], mas atualmente negligenciável. Ela é detectada como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas que permeia o universo.

Deve-se mencionar que a *curvatura espacial*, embora não seja propriamente uma forma de energia ou matéria, deve constar para a composição do balanço de energia. Contudo, as observações indicam um valor de curvatura espacial próximo de zero, sugerindo que o universo é espacialmente plano [83–88].

Abaixo segue uma tabela com os valores precisos dos parâmetros de densidade e da constante de Hubble para o tempo presente, conforme determinados pela missão Planck 2018 [89], que no momento oferece os dados mais precisos disponíveis até hoje.

Tabela 1 – Alguns parâmetros cosmológicos da missão Planck 2018.

Parâmetro Cosmológico	Valor
Parâmetro de Hubble atual (H_0)	$67.4 \pm 0.5 \text{ km/s/Mpc}$
Parâmetro de densidade de matéria bariônica ($\Omega_{b,0}h^2$)	0.0224 ± 0.0001
Parâmetro de densidade de matéria escura ($\Omega_{c,0}h^2$)	0.120 ± 0.001
Parâmetro de densidade de matéria (bariônica e escura) ($\Omega_{m,0}$)	0.315 ± 0.007
Parâmetro de densidade de energia escura ($\Omega_{\Lambda,0}$)	0.685 ± 0.007
Parâmetro de densidade de radiação ($\Omega_{r,0}$)	$\approx 10^{-4}$

Aqui $h = 0.674$ é o parâmetro adimensional do Hubble, do que resulta $\Omega_{b,0} = 0.0493$ e $\Omega_{c,0} = 0.2642$.

O modelo Λ CDM concorda de forma abrangente com diversas observações cosmológicas. Entre elas estão as pequenas anisotropias da radiação cósmica de fundo, a distribuição em grande escala das galáxias, a expansão acelerada do universo revelada pelas supernovas do tipo Ia, e as abundâncias de elementos leves previstas pela nucleossíntese primordial.

Além disso, é possível utilizar o parâmetro de Hubble para estimar a idade do universo ao inserir os valores dos parâmetros de densidade no modelo Λ CDM e o valor medido da constante de Hubble. Para tanto, considera-se que:

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{aH(a)} da = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{1}{a\sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2}}} da, \quad (2.49)$$

onde se usou que $a_0 = 1$ no tempo presente e se utilizou a equação de Friedmann escrita em termos dos parâmetros de densidade, Eq. (2.48). De acordo com os dados da missão Planck 2018 [89], essa idade é estimada em $(13,787 \pm 0,020)$ bilhões de anos.

. . .

Neste capítulo, discutimos brevemente como a Relatividade Geral descreve a gravitação por meio da relação entre a geometria do espaço-tempo e distribuição de matéria e energia. Vimos como a teoria ao ser aplicada em grande escala e suplementada por princípios simplificadores, como o princípio cosmológico, fornece a estrutura para a construção de modelos cosmológicos robustos, como os modelos homogêneos e isotrópicos, culminando modelo Λ CDM. No próximo capítulo, apresentaremos o formalismo ADM, que reformula a Relatividade Geral em uma linguagem hamiltoniana. Essa abordagem é importante tanto para a análise de sistemas dinâmicos, como buracos negros e o universo em larga escala, quanto para a quantização da gravidade.

3 Elementos do Formalismo ADM

*Cada folha do espaço guarda um
instante,
e a evolução do cosmos desdobra
novas camadas do tempo.*

O formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner) é uma formulação hamiltoniana da Relatividade Geral, apresentada pelos físicos R. L. Arnowitt (A), S. Deser (D) e C. W. Misner (M). Esse formalismo foi apresentado em uma série de treze artigos publicados entre 1959 e 1961, e posteriormente condensado em um artigo de revisão de 1962 [90–103].

A proposta do formalismo ADM envolve realizar uma decomposição do *espaço-tempo* em direções tipo-tempo e tipo-espaço, chamada de *decomposição 3+1*. Nesta abordagem, o espaço-tempo é dividido em fatias tridimensionais (hipersuperfícies¹) ao longo de uma coordenada temporal, permitindo que as equações dinâmicas sejam reescritas de forma a separar explicitamente as componentes temporais e espaciais. Supondo que o espaço-tempo seja foliado² em uma família de hipersuperfícies tridimensionais do tipo-espaço Σ_t parametrizadas por valores fixos da coordenada temporal t , aplica-se a prescrição canônica para sistemas vinculados. O formalismo ADM é amplamente utilizado na *quantização canônica da gravidade* [57, 104] e na *relatividade numérica* [105–107].

Para obter uma formulação hamiltoniana de uma teoria, é necessário determinar o hamiltoniano correspondente. A Relatividade Geral pressupõe o *princípio da covariância geral* [108], segundo o qual as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de coordenadas. Isso garante a invariância das leis físicas sob difeomorfismos gerais, que são transformações suaves e invertíveis que mapeiam uma variedade diferenciável em si mesma. No contexto da teoria, esses difeomorfismos representam mudanças de coordenadas que preservam a forma das equações da teoria na variedade (espaço-tempo). Devido a essa invariância, a teoria possui simetrias que se manifestam como vínculos nas equações de movimento [109], impedindo a obtenção de uma relação direta e única entre as velocidades generalizadas e os momenta conjugados. Devido a isso, surgiram formulações consistentes para a gravidade, como a teoria de sistemas vinculados de Dirac e a teoria ADM, sendo esta última amplamente utilizada na quantização do campo gravitacional por sua simplicidade e intuição geométrica.

¹ Uma *hipersuperfície* é uma variedade n -dimensional com $n > 2$, isto é, uma generalização da superfície bidimensional.

² A ideia de *foliado*, como o próprio nome indica, é ser composto de *folhas*. As *folhas* em questão são hipersuperfícies tridimensionais com $t = \text{constante}$, de modo que o espaço-tempo seja composto por um amontoado de folhas (camadas) sobrepostas.

Um desdobramento dessa abordagem é o programa de quantização canônica de Wheeler-DeWitt (WDW) [110–112], que utiliza o formalismo ADM para encontrar uma função de onda Ψ do universo. Nesse caso, é necessário resolver uma equação funcional complexa, a equação de Wheeler-DeWitt [113], que envolve questões de ordenamento de operadores quânticos e dificuldades conceituais relacionadas ao papel do tempo na gravidade quântica.

3.1 Geometria de foliações e decomposição $3 + 1$

A proposta da decomposição $3+1$ usada no formalismo ADM é, levando em conta o princípio da covariância geral, separar a métrica do espaço-tempo em componentes que contenham a informação dinâmica essencial e componentes que caracterizem o sistema de coordenadas, através de uma escolha adequada de variáveis. Nessa formulação, é assumido que o espaço-tempo é uma variedade $\mathcal{M}$ globalmente foliada por hipersuperfícies tridimensionais espaciais parametrizadas por um tempo coordenado t e dotada de uma evolução temporal bem definida. O espaço-tempo é dito ser globalmente hiperbólico, com topologia $\mathcal{M} \approx \Sigma \times \mathbb{R}$, sendo a notação $\approx$ indicativa de difeomorfismo entre variedades. Isso significa que o espaço-tempo tem a topologia de um produto cartesiano $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ representa a topologia (arbitrária) das hipersuperfícies do tipo-espaço e $\mathbb{R}$ a linha do tempo. Isto é, cada ponto em $\mathcal{M}$ pode ser identificado por um par (x, t) , onde $x \in \Sigma$ é um ponto na hipersuperfície espacial e $t \in \mathbb{R}$ é o tempo. Apesar do sucesso do formalismo, a forma como a topologia do espaço-tempo é decomposta limita sua aplicação a espaços-tempos mais exóticos, com topologias mais complexas ou propriedades globais não triviais.

Nessa decomposição, considera-se que a variedade $\mathcal{M}$ do espaço-tempo é preenchida por uma congruência³ de curvas tipo-tempo, de modo que se possa definir em cada ponto da variedade um vetor n^μ , do tipo-tempo, tangente ao parâmetro de curva τ . Este vetor, por sua vez, é normal a uma hipersuperfície local Σ . A topologia da variedade permite que se estenda essa hipersuperfície de modo a separar a variedade em duas regiões temporais diferentes (uma correspondente ao passado e outra ao futuro), de forma que qualquer curva do tipo-tempo atravessasse a hipersuperfície, tornando-a uma superfície de Cauchy⁴. Como o parâmetro τ da congruência de curvas não é necessariamente constante ao longo da hipersuperfície, toma-se um novo parâmetro com a exigência de que seja constante sobre cada hipersuperfície, não sendo necessariamente ortogonal a elas. O novo parâmetro

³ Uma *congruência*, ou congruência de curvas, é o conjunto de curvas integrais de um campo vetorial que preenche todo o espaço de uma variedade 4-dimensional, de modo que cada ponto da variedade esteja em uma única curva.

⁴ Uma *superfície de Cauchy* é uma hipersuperfície tridimensional do tipo-espaço em uma variedade 4-dimensional onde qualquer curva causal (do tipo-tempo ou nula) necessariamente a intersecta, se estendida indefinidamente. Isso permite usá-la para especificar condições iniciais de um sistema físico, pois todas as informações necessárias para a evolução futura do sistema estão contidas nela.

t atua como tempo, descrevendo a evolução do sistema de hipersuperfície a hipersuperfície. Pode-se escolher $x^0 = t$ e representar uma hipersuperfície Σ_t por meio das seguintes equações paramétricas:

$$X^\mu = X^\mu(x^i), \quad (3.1)$$

sobre a qual é possível definir três vetores tangentes a ela, $e_i^\mu := \partial X^\mu / \partial x^i$, e um vetor normal⁵ unitário, $e_0^\mu := n^\mu$. Esses vetores formam a tétrade de vetores ortonormais e_α^μ , obedecendo à relação:

$$g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica da variedade e $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski. Como estamos adotando a assinatura $(-, +, +, +)$ para os elementos da métrica de Minkowski, um vetor unitário n^μ do tipo-tempo obedecerá à relação:

$$g_{\mu\nu} e_i^\mu n^\nu = 0, \quad (3.3)$$

que expressa a ortogonalidade entre o vetor n^μ e a hipersuperfície, bem como a relação:

$$n^2 := n^\mu n_\mu = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1, \quad (3.4)$$

para o quadrado da norma⁶.

O conjunto de todas as hipersuperfícies de tempo constante Σ_t que folheiam o espaço-tempo é descrito por:

$$X^\mu = X^\mu(x^i, t), \quad (3.5)$$

onde cada valor de $t = T$, com T constante, define uma hipersuperfície distinta Σ_T , parametrizada por $X^\mu = X^\mu(x^i, T)$.

Consideremos agora duas hipersuperfícies infinitesimalmente próximas, Σ_t e Σ_{t+dt} . A distância entre dois pontos que possuem as mesmas coordenadas espaciais x^i nessas hipersuperfícies pode ser analisada através do *vetor deformação* N^μ . Este vetor mede a taxa de variação das coordenadas X^μ em relação ao tempo t , fornecendo uma medida da separação entre as hipersuperfícies. Assim, temos:

$$N^\mu := \dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu(x^i, t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Essa expressão indica que o vetor N^μ representa a velocidade com que os pontos X^μ se movem ao longo da direção temporal. Portanto, a distância infinitesimal entre dois pontos nas hipersuperfícies pode ser expressa como $N^\mu dt$, que representa a variação nas coordenadas X^μ devido à mudança infinitesimal no tempo dt .

⁵ O qual é *tangente* à congruência de curvas do tipo-tempo.

⁶ Um vetor n^μ é dito ser: do *tipo-tempo* caso $n^2 < 0$, do *tipo-espaço* caso $n^2 > 0$ e nulo ou do *tipo-luz* caso $n^2 = 0$.

O vetor deformação, por sua vez, pode ser decomposto nas componentes normal e tangenciais à hipersuperfície, utilizando a base tétrade $\{n^\mu, e_i^\mu\}$. Para tanto, é necessário o uso de duas funções N e N^i , de forma a se escrever:

$$N^\mu = Nn^\mu + N^i e_i^\mu. \quad (3.7)$$

As funções N e N^i são chamadas, respectivamente, de função lapso (*lapse function*) e função deslocamento (*shift function*). O vetor N^μ é tangente ao parâmetro t , ou seja, às linhas temporais que ligam uma hipersuperfície a outra, e, portanto, não é necessariamente ortogonal às hipersuperfícies. Assim, para coordenadas $X^\mu = (t, x^i)$ tem-se que N^μ e e_i^μ são vetores tangentes a t e x^i , respectivamente. Com isso, podemos usar N^μ e e_i^μ para obter as projeções da 4-métrica $g_{\mu\nu}$ nas componentes puramente temporal, puramente espacial e mista.

As componentes g_{00} da métrica são obtidas pela projeção de ambas as componentes μ e ν na direção do parâmetro t , fazendo uso do vetor deformação N^μ , dado por Eq. (3.7). Logo,

$$g_{00} = g_{\mu\nu} N^\mu N^\nu = -N^2 + N^i N^j h_{ij} = -N^2 + N^i N_i. \quad (3.8)$$

As componentes g_{ij} são obtidas a partir da projeção das componentes μ da métrica nas direções i e das componentes ν nas direções j . Então,

$$g_{ij} = h_{ij}, \quad \text{com} \quad h_{ij} := g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu, \quad (3.9)$$

que define a métrica do espaço tridimensional (ou 3-métrica), h_{ij} , também chamada de métrica induzida sobre a hipersuperfície.

Por fim, as componentes g_{0i} são obtidas pela projeção das componentes μ da métrica na direção t e das componentes ν nas direções i , fazendo-se uso da Eq. (3.7). Assim,

$$g_{0i} = g_{\mu\nu} N^\mu e_i^\nu = h_{ij} N^j, \quad \text{com} \quad N_i := h_{ij} N^j. \quad (3.10)$$

Desse modo, a métrica quadridimensional do espaço-tempo pode ser reescrita em termos de N , N^i e h_{ij} , chamados de *variáveis ADM*, na forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

A métrica inversa $g^{\mu\nu}$ pode ser encontrada da relação

$$g^{\alpha\mu} g_{\nu\alpha} = \delta_\nu^\mu, \quad (3.12)$$

bastando que se resolva para cada uma das quatro combinações do par $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, i), (i, 0), (i, i)$, fazendo-se uso das componentes da métrica $g_{\mu\nu}$, dadas pelas Eqs. (3.8)–(3.10). Como resultado tem-se:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^i/N^2 \\ N^j/N^2 & h^{ij} - N^i N^j/N^2 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

em que $h^{ik}h_{kl} = \delta_l^i$ e $\delta_i^i = 3$.

A partir da definição formal para o intervalo de espaço-tempo, ds , entre dois eventos, Eq. (2.1), pode-se escrever:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j), \quad (3.14)$$

expressão que explicita as três funções fundamentais na métrica do espaço-tempo na formulação ADM: a função lapso, a função deslocamento e a métrica induzida sobre a hipersuperfície. A função lapso, $N = d\tau/dt$, mede a taxa de variação do tempo próprio τ em relação ao tempo coordenado t , indicando como o tempo flui para um observador em repouso em relação à hipersuperfície. A função deslocamento, N^i , descreve a variação de posição entre pontos com as mesmas coordenadas espaciais x^i em hipersuperfícies consecutivas Σ_t e Σ_{t+dt} . Finalmente, a métrica induzida h_{ij} é uma quantidade simétrica que caracteriza a geometria tridimensional da hipersuperfície Σ_t .

Usando a fórmula do vetor deslocamento N^μ , Eq. (3.7), decomposta na base $\{n^\mu, e_i^\mu\}$, pode-se escrever o vetor normal n^μ na base $\{N^\mu, e_i^\mu\}$, isto é, em um sistema de coordenadas (t, x^i) , como:

$$n^\mu = \frac{1}{N}(1, -N^i). \quad (3.15)$$

Para encontrar as componentes covariantes do vetor normal no sistema de coordenadas (t, x^i) basta calcular $n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu$, com o auxílio das Eqs. (3.11) e (3.15). Procedendo-se assim, obtém-se o vetor n_μ , em um sistema de coordenadas (t, x^i) , na forma:

$$n_\mu = (-N, 0). \quad (3.16)$$

Fazendo uso das Eqs. (3.15) e (3.16), é possível notar que os vetores normais n^μ e n_μ satisfazem a relação Eq. (3.4). Além disso, pode-se valer desses vetores para construir um *operador projeção*, dado por:

$$P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu + n_\nu n^\mu, \quad (3.17)$$

o qual projeta um vetor espaço-temporal x^ν sobre a hipersuperfície, na forma $X^\mu = P_\nu^\mu x^\nu$. Dessa forma, pode ser usado para projetar campos tensoriais espaço-temporais sobre a hipersuperfície.

O tensor $K_{\mu\nu}$, chamado de *curvatura extrínseca*, é uma quantidade construída a partir de operadores projeção. Esse tensor mede o modo com que o vetor normal covariante à hipersuperfície, n_μ , curva-se quando se move sobre a hipersuperfície. Sua definição é:

$$K_{\mu\nu} := -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\beta n_\alpha. \quad (3.18)$$

Esse tensor é simétrico em seus índices ($K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$) e ortogonal ao vetor normal ($K_{\mu\nu}n^\mu = K_{\mu\nu}n^\nu = 0$), sendo então um campo vetorial sobre a hipersuperfície. Suas componentes, calculadas com o auxílio das Eqs. (3.15)–(3.17), são dadas por:

$$K_{ij} = -\nabla_j n_i, \quad K_{00} = N^i N^j K_{ij}, \quad K_{0i} = N^j K_{ij}, \quad (3.19)$$

evidenciando que sua única componente independente é K_{ij} . Esta componente pode ser escrita em função das variáveis da decomposição 3+1, notando que

$$K_{ij} = -\nabla_j n_i = -\partial_i n_j + \Gamma_{ij}^\lambda n_\lambda = -N\Gamma_{ij}^0, \quad (3.20)$$

onde o cálculo de Γ_{ij}^0 fornece:

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2N^2}(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i), \quad (3.21)$$

com D_j denotando a derivada covariante intrínseca à hipersuperfície, definida para um vetor x_μ como:

$$D_\mu x_\nu := P_\nu^\beta P_\mu^\alpha \nabla_\alpha x_\beta, \quad (3.22)$$

sendo P_ν^β o operador de projeção na hipersuperfície. Essa derivada é idêntica à derivada covariante métrica associada à métrica induzida $h_{\mu\nu}$, possuindo somente componentes espaciais em coordenadas adaptadas à hipersuperfície, isto é, coordenadas (t, x^i) , onde t é constante. Assim, podemos escrever:

$$D_j X_i := \partial_j X_i - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k X_k, \quad (3.23)$$

onde ${}^{(3)}\Gamma_{ij}^k$ é a conexão intrínseca à hipersuperfície, dada por:

$${}^{(3)}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}h^{kl}(\partial_j h_{li} + \partial_i h_{lj} - \partial_l h_{ij}), \quad (3.24)$$

representando a conexão de Levi-Civita associada à métrica h_{ij} . Finalmente, o tensor de curvatura extrínseca K_{ij} é dado por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N^2}(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i). \quad (3.25)$$

A curvatura extrínseca, além de sua definição através das variáveis ADM, pode também ser entendida em termos da evolução da métrica espacial ao longo da direção normal à hipersuperfície. Especificamente, ela está relacionada à *derivada de Lie* da métrica espacial h_{ij} ao longo de todo o campo vetorial normal $\mathbf{n}$. Esta relação é expressa pela equação [114]:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{ij} = -2K_{ij}, \quad (3.26)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ denota a derivada de Lie ao longo de $\mathbf{n}$, que representa a variação da métrica conforme movimenta-se ao longo da direção normal à hipersuperfície. Esta é uma forma covariante de descrever como a métrica espacial muda com o tempo, pois não depende da escolha específica de coordenadas, mas sim da foliação do espaço-tempo.

3.2 Curvatura espaço-temporal na geometria de foliações

É possível expressar todas as componentes do tensor de curvatura do espaço-tempo em termos de quantidades definidas nas hipersuperfícies da foliação. Isso é feito através

de três equações fundamentais. A primeira, chamada de *equação de Gauss*, relaciona a curvatura espaço-temporal com todas as componentes projetadas na hipersuperfície:

$$P_\rho^\alpha P_\sigma^\beta P_\mu^\tau P_\nu^\lambda R_{\rho\sigma\tau\lambda} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu} - K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu}, \quad (3.27)$$

que em coordenadas adaptadas à hipersuperfície é escrita como:

$$R_{ijkl} = {}^{(3)}R_{ijkl} + K_{il}K_{jk} - K_{ik}K_{jl}. \quad (3.28)$$

A segunda equação, conhecida como *equação de Codazzi*, fornece a curvatura espaço-temporal com três componentes projetadas na hipersuperfície e uma componente contraída com o vetor normal unitário:

$$P_\alpha^\rho P_\beta^\sigma P_\mu^\tau n^\lambda R_{\rho\sigma\tau\lambda} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}, \quad (3.29)$$

que em coordenadas convenientes com a foliação proposta, se torna:

$$n^\mu R_{ijk\mu} = D_j K_{ik} - D_i K_{jk}. \quad (3.30)$$

A terceira equação, chamada de *equação de Ricci*, fornece o valor de R_{i0j0} , e envolve duas componentes normais e duas projetadas na hipersuperfície:

$$P_\alpha^\rho n^\sigma P_\beta^\tau n^\lambda R_{\rho\sigma\tau\lambda} = \mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} + D_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta + K_\alpha^\mu K_{\mu\beta}, \quad (3.31)$$

onde A^μ é a *aceleração* do vetor normal n^μ , que é tangente às hipersuperfícies de tempo constante, e dada por:

$$A^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu. \quad (3.32)$$

Assim, todas as componentes da curvatura do espaço-tempo podem ser obtidas a partir de quantidades definidas nas hipersuperfícies da foliação, incluindo a métrica induzida $h_{\mu\nu}$, a curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ e o vetor aceleração A^μ . A demonstração desses resultados pode ser encontrada em Padmanabhan [114] e D’Inverno [115].

3.3 Ação de Einstein-Hilbert na forma 3+1

Na abordagem do formalismo ADM, a ação é reescrita em uma forma (3+1) através do uso de funções das novas variáveis da teoria, a saber, N , N^i e h_{ij} . As equações de Einstein, então, emergem do princípio de ação ao se efetuar a variação dessas novas quantidades. Partindo da ação de Einstein-Hilbert, Eq. (2.14),

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.33)$$

vê-se que é preciso escrever g e R nas novas variáveis. Para tanto, é fácil calcular que $g := \det g_{\mu\nu} = N^2 h$, onde $h := \det h_{ij}$, de modo que $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$. O cômputo de R , por

sua vez, exige um pouco de cuidado. De início, fazendo uso da norma do vetor n^μ , dada pela Eq. (3.4), é possível notar que

$$R = -Rn_\mu n^\mu = -Rg_{\mu\nu}n^\mu n^\nu. \quad (3.34)$$

Por sua vez, fazendo uso da definição do tensor de Einstein, Eq. (2.8), é possível isolar o termo $-Rg_{\mu\nu}$, de modo que

$$-Rg_{\mu\nu} = 2(G_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}), \quad (3.35)$$

expressão que ao ser multiplicada de ambos os lados por $n^\mu n^\nu$ resulta:

$$-Rg_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 2(G_{\mu\nu} - R_{\mu\nu})n^\mu n^\nu. \quad (3.36)$$

Então, por meio da Eq. (3.34) pode-se identificar o termo à esquerda na Eq. (3.36) como R , o que possibilita reescrever a Eq. (3.36) como:

$$R = 2(G_{\mu\nu} - R_{\mu\nu})n^\mu n^\nu. \quad (3.37)$$

O termo $G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$ é obtido levando em conta a definição do tensor de Einstein, Eq. (2.8), e a equação de Gauss, Eq. (3.27), sucessivamente contraída com $g^{\alpha\mu}$ e $g^{\beta\nu}$, de modo a fornecer:

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \frac{1}{2} \left({}^{(3)}R - K_\mu^\mu K_\nu^\nu + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \right), \quad (3.38)$$

onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura do espaço tridimensional. Por sua vez, o termo $R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$ pode ser encontrado partindo da seguinte expressão, válida para todo campo vetorial n_μ ,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}n^\nu = (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)n_\mu, \quad (3.39)$$

e notando-se, a partir de Eq. (3.18) e Eq. (3.32), que

$$\nabla_\mu n_\nu = -K_{\mu\nu} - n_\mu A_\nu. \quad (3.40)$$

De modo que o termo $R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$ se torna:

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \nabla_\alpha (K n^\alpha) - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^2, \quad (3.41)$$

onde $K := K_\mu^\mu$.

Assim, usando Eq. (3.38) e Eq. (3.41) na Eq. (3.37), obtém-se que o escalar de curvatura do espaço-tempo em forma (3+1) é escrito como:

$$R = {}^{(3)}R + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 - 2\nabla_\alpha (K n^\alpha). \quad (3.42)$$

Com isso, a densidade lagrangiana para a ação de Einstein-Hilbert na forma 3+1, já em coordenadas adaptadas à foliação, é dada por:

$$\mathcal{L}_G := N\sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 - 2\nabla_\alpha (K n^\alpha) \right), \quad (3.43)$$

onde $-2\nabla_\alpha(Kn^\alpha)$ é um termo de superfície, e por isso não contribui para as equações de movimento e podemos descartá-lo, assumindo que nosso espaço-tempo não possui bordas. Contudo, em situações onde o espaço-tempo possui bordas, ou no caso de espaços-tempos assintoticamente planos, esse termo de superfície deve ser mantido. Para uma discussão sobre esse ponto, consulte Padmanabhan [114] e Pinto-Neto [116].

A quantidade $\mathcal{L}_{\text{ADM}} := N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2)$, já descartado o termo de superfície, é a densidade lagrangiana de Arnowitt-Deser-Misner. Ela é quadrática nas derivadas temporais primeiras da métrica induzida e fornece as equações dinâmicas e os vínculos ao ser devidamente variada. Assim sendo, a ação de Einstein-Hilbert na forma ADM é dada por:

$$S_{\text{ADM}} = \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x \mathcal{L}_{\text{ADM}} = \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x N\sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2 \right). \quad (3.44)$$

3.4 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

O procedimento para obtenção das equações de Einstein na forma 3+1 consiste em se variar a ação S_{ADM} , dada pela Eq. (3.44), em termos das variáveis N , N^i e h_{ij} , componentes da métrica ADM, Eq. (3.11). Para fins de simplificação, vamos considerar $2\kappa = 1$. Assim, a ação se torna:

$$S_{\text{ADM}} = \int dt d^3x N\sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2 \right). \quad (3.45)$$

Deve-se notar que a ação não possui derivadas temporais de N ou N^i , visto que os termos envolvendo K_{ij} possuem derivada temporal apenas em h_{ij} (veja Eq. (3.25)), enquanto ${}^{(3)}R$ é construído apenas em função da métrica espacial da hipersuperfície. Com isso, os momenta conjugados a N e N^i se anularão em uma identidade, e as equações $\delta S_{\text{ADM}}/\delta N = 0$ e $\delta S_{\text{ADM}}/\delta N^i = 0$ envolverão apenas derivadas temporais de primeira ordem, fazendo com que sejam *equações de vínculo*.

A derivada temporal $\dot{h}_{ij}$ aparece nas expansões de K_{ij} , K^{ij} e K . Assim, considerando a densidade lagrangiana ADM, a combinação $\mathcal{L}_K := K_{ij}K^{ij} - K^2$ desempenha o papel de termo cinético da ação, enquanto $\mathcal{L}_U := {}^{(3)}R$ é o termo potencial. A dinâmica de toda a teoria está, portanto, contida inteiramente na métrica induzida h_{ij} .

O momentum canonicamente conjugado a h_{ij} é dado por:

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ADM}}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ADM}}}{\partial K_{mn}} = \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial K_{mn}}, \quad (3.46)$$

onde a última igualdade advém do fato de $\dot{h}_{ij}$ aparecer apenas implicitamente na ação através do termo cinético. Notando que $K_{ab}K^{ab} - K^2 = (h^{ac}h^{bd} - h^{ab}h^{cd})K_{ab}K_{cd}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial K_{mn}} = N\sqrt{h} \left(h^{ac}h^{bd} - h^{ab}h^{cd} \right) \left(K_{ab} \frac{\partial K_{cd}}{\partial K_{mn}} + K_{cd} \frac{\partial K_{ab}}{\partial K_{mn}} \right). \quad (3.47)$$

Deve-se notar que $\partial K_{ab}/\partial K_{mn} = \delta_{ab}^{mn}$, onde:

$$\delta_{ab}^{mn} := \delta_{(a}^m \delta_{b)}^n = \frac{1}{2}(\delta_a^m \delta_b^n + \delta_b^m \delta_a^n), \quad (3.48)$$

do que resulta que a Eq. (3.47) se torna:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial K_{mn}} = 2N\sqrt{h}(K^{mn} - Kh^{mn}). \quad (3.49)$$

Por meio da equação que define a curvatura extrínseca em função das variáveis ADM, Eq. (3.25), vê-se que:

$$\frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{2N}\delta_{mn}^{ij}. \quad (3.50)$$

Portanto, segue de Eq. (3.49) e Eq. (3.50) em Eq. (3.46), que:

$$\pi^{ij} = -\sqrt{h}(K^{ij} - Kh^{ij}). \quad (3.51)$$

A densidade hamiltoniana $\mathcal{H}_{\text{ADM}}$ é escrita através da conhecida transformação de Legendre como:

$$\mathcal{H}_{\text{ADM}} = \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_{\text{ADM}}. \quad (3.52)$$

Desenvolvendo explicitamente $\mathcal{H}_{\text{ADM}}$, obtém-se:

$$\mathcal{H}_{\text{ADM}} = \sqrt{h} \left\{ N(K_{ij}K^{ij} - K^2 - {}^{(3)}R) - 2D_j \left[(K^{ij} - Kh^{ij})N_i \right] + 2N^i D_j (K^{ij} - Kh^{ij}) \right\}. \quad (3.53)$$

O termo de divergência total pode ser ignorado ao se integrar a densidade hamiltoniana, de modo que a hamiltoniana fica dada por:

$$H_{\text{ADM}} = \int_{\Sigma_t} \sqrt{h} d^3y \left[N \left(K_{ij}K^{ij} - K^2 - {}^{(3)}R \right) + 2N^i D_j (K_i^j - K\delta_i^j) \right]. \quad (3.54)$$

Esta expressão ainda não está devidamente correta, visto que é preciso deixar H_{ADM} escrito explicitamente em termos das variáveis canônicas N , N^i , h_{ij} e π^{ij} .

Podemos fazer uso da relação Eq. (3.51) para encontrar o traço do momentum canônico π^{ij} , de modo que:

$$\pi := \pi_i^i = 2K\sqrt{h}. \quad (3.55)$$

E utilizando a expressão encontrada, Eq. (3.55), novamente em Eq. (3.51), encontra-se a dependência de K^{ij} com o momentum π^{ij} , que é dada por:

$$K^{ij} = -h^{-1/2} \left(\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi h^{ij} \right). \quad (3.56)$$

Com isso, os termos envolvendo a curvatura extrínseca na hamiltoniana ficam dados por:

$$K^{ij}K_{ij} = h^{-1} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{4}\pi^2 \right), \quad K^2 = h^{-1} \left(\frac{\pi^2}{4} \right). \quad (3.57)$$

Substituindo os termos da Eq. (3.57) na Eq. (3.54), encontra-se finalmente:

$$H_{\text{ADM}} = \int_{\Sigma_t} \sqrt{h} d^3y \left\{ N \left[h^{-1} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - {}^{(3)}R \right] + 2N_i D_j \left(h^{-1/2} \pi^{ij} \right) \right\}. \quad (3.58)$$

Como se verá adiante, o escalar de curvatura do espaço, ${}^{(3)}R$, possui uma dependência apenas com h_{ij} e não depende nem de N , N^i ou π^{ij} . Logo, não será considerada sua forma explícita ao se efetuar as variações em relação a essas três últimas variáveis canônicas.

Tomando-se a derivada funcional de H_{ADM} com N , obtém-se:

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N} = \sqrt{h} \left[h^{-1} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - {}^{(3)}R \right] = \sqrt{h} \left(K^{ij} K_{ij} - K^2 - {}^{(3)}R \right). \quad (3.59)$$

Podemos usar da simetria de π_{ij} para escrever que $\pi_{ij} = \pi^{kl}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk})/2$ e sabendo-se que $\pi^2 = \pi^{ij}\pi^{kl}h_{ij}h_{kl}$, podemos reescrever a Eq. (3.59) na forma:

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N} = \mathcal{H}_0, \quad (3.60)$$

onde $\mathcal{H}_0$ é a primeira função vínculo, chamada de *vínculo da hamiltoniana* ou *superhamiltoniana*, a qual é definida como:

$$\mathcal{H}_0 := G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h^{1/2} {}^{(3)}R, \quad (3.61)$$

sendo G_{ijkl} chamada de *métrica do superespaço*, dada por:

$$G_{ijkl} := \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \quad (3.62)$$

A derivada funcional de H_{ADM} com N^i resulta em:

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N^i} = 2\sqrt{h} D_j \left(h^{-1/2} \pi_i^j \right) = 2\sqrt{h} D_j \left(K_i^j - K \delta_i^j \right), \quad (3.63)$$

que pode ser posta na forma:

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N^i} = \mathcal{H}_i, \quad (3.64)$$

onde $\mathcal{H}_i$ é a segunda função vínculo, chamada de *supermomentum* ou *vínculo de difeomorfismo*, definida como:

$$\mathcal{H}_i := -2D_j \pi_i^j. \quad (3.65)$$

A derivada funcional de H_{ADM} com π^{ij} pode ser efetuada integrando o termo por partes $2\sqrt{h}N_a D_b(h^{-1/2}\pi^{ab})$, usando que $\delta\pi^{ab}/\delta\pi^{ij} = \delta_{(i}^a \delta_{j)}^b$. Assim,

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta \pi^{ij}} = 2N h^{-1/2} \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} \pi \right) + 2D_{(i} N_{j)}. \quad (3.66)$$

Para o cômputo da derivada funcional $\delta H_{\text{ADM}}/\delta h_{ij}$ será preciso explicitar as dependências em h_{ij} . A fim de facilitar o manuseio da hamiltoniana, Eq. (3.58), pode-se dividi-la em três partes e realizar os cálculos separadamente, ou seja,

$$H_{\text{ADM}} = H_1 + H_2 + H_3, \quad (3.67)$$

onde:

$$H_1 := \int d^3y N h^{-1/2} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right), \quad (3.68)$$

$$H_2 := -2 \int d^3y h^{1/2} N_a D_b (h^{-1/2} \pi^{ab}), \quad (3.69)$$

$$H_3 := - \int d^3y N h^{1/2} {}^{(3)}R. \quad (3.70)$$

Para realizar a variação em relação a h_{ij} deve-se utilizar a expressão básica da derivada funcional,

$$\frac{\delta h_{ab}(y)}{\delta h_{ij}(x)} = \delta_{(a}^i \delta_{b)}^j \delta(x, y), \quad (3.71)$$

bem como considerar as variações do determinante da métrica induzida,

$$\delta h = h h^{ij} \delta h_{ij}. \quad (3.72)$$

A variação de H_1 é feita explicitando que $\pi_{ab} = \pi^{cd} h_{ac} h_{bd}$, $\pi = \pi^{ab} h_{ab}$, e notando que π^{ij} é simétrico, de modo que se pode expressá-la como:

$$\frac{\delta H_1}{\delta h_{ij}} = -\frac{1}{2} N h^{-1/2} h^{ij} \left(\pi_{kl} \pi^{kl} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + 2 N h^{-1/2} \left(\pi^{ik} \pi_k^j - \frac{1}{2} \pi \pi^{ij} \right). \quad (3.73)$$

Para a variação de H_2 convém realizar uma integração por partes e descartar o termo de superfície. Além disso, deve-se expressar a derivada covariante induzida de forma explícita, isto é,

$$D_a N_b = h_{bc} (\partial_a N^c + \Gamma_{ad}^c N^d), \quad (3.74)$$

atentando para o fato de que

$$\delta \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} h^{ad} (D_b \delta h_{cd} + D_c \delta h_{bd} - D_d \delta h_{bc}). \quad (3.75)$$

Isto feito, o resultado é:

$$\frac{\delta H_2}{\delta h_{ij}} = 2 \pi^{k(i} D_k N^{j)} - h^{-1/2} D_k (h^{-1/2} N^k \pi^{ij}). \quad (3.76)$$

Para a variação de H_3 será preciso utilizar que ${}^{(3)}R = h^{ab} {}^{(3)}R_{ab}$. Além disso, para encontrar a variação $\delta({}^{(3)}R_{ab})$ pode-se lançar mão da definição de ${}^{(3)}R_{ab}$ em um referencial inercial local no qual $\Gamma_{ab}^c = 0$, de modo que:

$$\delta({}^{(3)}R_{ab}) = D_c \delta \Gamma_{ab}^c - D_b \delta \Gamma_{ac}^c. \quad (3.77)$$

A aplicação da expressão básica da derivada funcional, fazendo uso da Eq. (3.75), leva, após cálculos extensos mas simples, à seguinte variação:

$$\frac{\delta H_3}{\delta h_{ij}} = N h^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2} h^{ij} {}^{(3)}R \right) - h^{1/2} \left(D^i D^j N - h^{ij} D^k D_k N \right). \quad (3.78)$$

Combinando as três variações e tomando $G^{ij} := {}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2}h^{ij}{}^{(3)}R$ como a definição do tensor de Einstein tridimensional, tem-se:

$$-\dot{\pi}^{ij} = \frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta h_{ij}} = Nh^{1/2}G^{ij} - \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ij}\left(\pi_{kl}\pi^{kl} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \quad (3.79)$$

$$+ 2Nh^{-1/2}\left(\pi^{ik}\pi_k^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}\right) - h^{1/2}\left(D^i D^j N - h^{ij}D^k D_k N\right) \quad (3.80)$$

$$- h^{-1/2}D_k(h^{-1/2}N^k\pi^{ij}) + 2\pi^{k(i}D_k N^{j)}. \quad (3.81)$$

As equações oriundas das variações da hamiltoniana ADM em relação a N e N^i são equivalentes à projeção das equações de campo de Einstein nas direções normal e tangencial às hipersuperfícies de tempo constante, na forma:

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta N^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mu\nu}n^\mu P_\alpha^\nu = 0. \quad (3.83)$$

Pelo mesmo procedimento adotado até aqui, é fácil calcular a variação de H_{ADM} em relação a π^{ij} , a qual resulta:

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\delta H_{\text{ADM}}}{\delta \pi^{ij}} = 2Nh^{-1/2}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\pi\right) + 2D_{(i}N_{j)}. \quad (3.84)$$

A variação da hamiltoniana ADM em termos de todas as variáveis canônicas pode ser expressa de forma simplificada como:

$$\delta H_{\text{ADM}} = \int_{\Sigma_\tau} d^3y \left(-\dot{\pi}^{ij}\delta h_{ij} + \dot{h}_{ij}\delta \pi^{ij} + \mathcal{H}_0\delta N + \mathcal{H}_i\delta N^i \right). \quad (3.85)$$

Da definição dos momenta conjugados às variáveis canônicas, tem-se:

$$p_N := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ADM}}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (3.86)$$

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ADM}}}{\partial \dot{N}^i} = 0, \quad (3.87)$$

$$\pi^{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ADM}}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -h^{1/2}(K^{ij} - h^{ij}K). \quad (3.88)$$

Logo, segue que a densidade hamiltoniana ADM no formalismo canônico é:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{ADM}} &= p_N \dot{N} + p_i \dot{N}^i + \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_{\text{ADM}} \\ &= N\mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i. \end{aligned} \quad (3.89)$$

A hamiltoniana total H_G do sistema gravitacional é dada pela integração da densidade hamiltoniana ADM acrescida dos vínculos $p_N \approx 0$ e $p_i \approx 0$. Portanto,

$$H_G = \int d^3x \left(N\mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i + \lambda p_N + \lambda^i p_i \right), \quad (3.90)$$

onde λ e λ^i são multiplicadores de Lagrange.

. . .

Neste capítulo, apresentamos uma descrição hamiltoniana completa para o campo gravitacional através do formalismo ADM. No próximo capítulo, exploraremos o formalismo de Schutz, que estende o tratamento hamiltoniano para a dinâmica de fluidos perfeitos, possibilitando uma descrição completa do acoplamento da matéria no contexto da Relatividade Geral. Essa nova abordagem permitirá a obtenção de um termo de matéria, que pode ser tratado tanto através de um hamiltoniano completo quanto de um princípio variacional abrangente.

4 Elementos do Formalismo de Schutz

*De um singelo fluido emerge o
tempo,
oculto entre potenciais que ditam
o movimento.*

O *formalismo de Schutz* é uma abordagem para modelar a dinâmica de um fluido perfeito na descrição euleriana e no contexto relativístico, sendo uma extensão do *formalismo de Seliger-Whitham*, que é adequado para o caso não-relativístico. Ambos os formalismos utilizam uma representação de potencial-velocidade, sendo que no formalismo de Seliger-Whitham essa representação é feita com o vetor velocidade tridimensional, enquanto no formalismo de Schutz é utilizada a quadrivelocidade. Este formalismo permite formular um princípio variacional euleriano para obter as equações de evolução do fluido e sua hamiltoniana [117]. Além disso, o formalismo de Schutz oferece uma possibilidade de tratar o desafio de se definir uma evolução temporal em teorias de gravidade quântica, conhecido como *problema do tempo*, ao fornecer uma estrutura dinâmica interna baseada no setor de matéria que evolui de maneira análoga ao tempo [118].

4.1 Dinâmica euleriana de fluidos

Existem duas abordagens principais na Física para descrever o movimento dos fluidos: a lagrangiana e a euleriana. Na *descrição lagrangiana*, acompanha-se a trajetória de partículas individuais do fluido, rastreando suas propriedades ao longo do tempo. Já na *descrição euleriana*, analisa-se o fluido com base no seu padrão de escoamento em pontos fixos no espaço, analisando como suas propriedades variam com a posição e o tempo. A descrição euleriana é a que se tornou prevalente em estudos de dinâmica de fluidos, dada a sua praticidade para lidar com grandes volumes de fluido sem a necessidade de rastrear partículas individuais.

Na descrição euleriana, as propriedades do fluido são consideradas funções da posição x^i e do tempo t , sem especificar-se qual partícula ocupa uma dada posição em um dado tempo. Além disso, ao estudar-se como as propriedades de um fluido variam no referencial fixo estabelecido, deve-se considerar tanto as variações locais, oriundas de mudanças nas propriedades em pontos fixos (locais), quanto as variações ocasionadas pelo movimento das partículas do fluido (convectivas). Neste sentido, é definida a *derivada material* (ou *substancial*) como:

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (4.1)$$

que é a derivada ao longo de um caminho movendo-se com velocidade v^i , isto é, a taxa de variação temporal de uma quantidade em uma localização fixa vista por um observador movendo-se junto com o fluxo com velocidade v^i , sendo composta a partir da soma da derivada local, $\partial/\partial t$, com a derivada convectiva, $v^j\partial/\partial x^j$.

As equações fundamentais da dinâmica de fluidos na descrição euleriana são bastante conhecidas e podem ser estudadas em diversas fontes, incluindo em Landau e Lifshitz [119]. Neste trabalho, destacarei duas, que são imprescindíveis para a construção do formalismo que será apresentado. São elas:

- Equação de continuidade da massa: garante a conservação da massa para um fluido em movimento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i) = 0, \quad (4.2)$$

onde ρ é a densidade do fluido e ρv^i é chamado de *densidade de fluxo de massa*.

- Equação de continuidade da entropia: assegura a conservação da entropia para fluidos em regime adiabático:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho s v^i) = 0, \quad (4.3)$$

onde s é a *entropia específica*, isto é, a entropia por unidade de massa, e $\rho s v^i$ é chamado de *densidade de fluxo de entropia*.

Essas equações podem ser derivadas a partir de um princípio variacional, desde que se construa uma ação cuja variação conduza diretamente a elas como equações de evolução. O procedimento para o caso não-relativístico é conhecido como *formalismo de Seliger-Whitham*, enquanto sua extensão para o caso relativístico recebe o nome de *formalismo de Schutz*.

4.2 Formalismo de Seliger-Whitham

O formalismo de Seliger-Whitham [120] tem como fim escrever um princípio variacional euleriano para o fluido perfeito não-relativístico. O ponto de partida consiste em considerar um fluido com *campo de velocidade* $v^i(x^i, t)$ e energia interna específica $u(\rho, s)$ e construir sua densidade lagrangiana, $\mathcal{L}_f = (1/2)(\rho v^i v_i - \rho u)$, acrescida de vínculos que obriguem o fluido a obedecer à dinâmica de fluidos dada pelas equações de continuidade, Eqs. (4.2) e (4.3).

Além disso, para garantir a generalidade do resultado, é necessário incluir um vínculo adicional, conforme sugerido por C. C. Lin [121], que assegura a equivalência com a descrição lagrangiana através do princípio variacional. Este vínculo é expresso por uma equação de conservação que mantém constantes as coordenadas lagrangianas $\vec{\alpha}(x^i, t)$

(rótulos iniciais das partículas) ao longo da trajetória das partículas. Assim,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} = 0, \quad (4.4)$$

onde α representa uma coordenada lagrangiana, tomada como escalar, visto que cada componente das coordenadas é conservada independentemente ao longo do tempo. Utilizando a conservação da massa, Eq. (4.2), pode-se expressar o vínculo na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \alpha) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^j \alpha) = 0. \quad (4.5)$$

Portanto, a ação de Seliger-Whitham é escrita como:

$$S = \int dt \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\rho v^i v_i - \rho u) + \phi \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^j) \right] + \theta \left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho s v^j) \right] + \beta \left[\frac{\partial(\rho \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^j \alpha) \right] \right\}, \quad (4.6)$$

onde ϕ , θ , e β são multiplicadores de Lagrange. Realizando-se algumas integrações por partes e usando a definição de derivada material, Eq. (4.1), pode-se transformar a ação para a forma conveniente:

$$S = \int dt \int d^3x \rho \left(\frac{1}{2} (v^2 - u) - \frac{D\phi}{Dt} - s \frac{D\theta}{Dt} - \alpha \frac{D\beta}{Dt} \right). \quad (4.7)$$

A realização da variação δv^i na ação, Eq. (4.7), resulta na seguinte expressão para o campo de velocidade:

$$v^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + s \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^i}, \quad (4.8)$$

onde v^i é descrito por meio dos cinco potenciais ϕ , s , θ , α e β . Esta forma de descrever o campo de velocidade é conhecida como *representação potencial-velocidade* ou *representação de Clebsch*, introduzida por Clebsch em 1859 para o caso de fluxo isentrópico [122]. Discussões mais recentes e aprofundadas sobre a representação de Clebsch podem ser encontradas em [123, 124].

Note que, considerando a forma da ação de Seliger-Whitham, Eq. (4.7), e a representação de Clebsch, Eq. (4.8), a densidade lagrangiana para o fluido passa a ser escrita como:

$$L = \rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} + s \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{D\phi}{Dt} - s \frac{D\theta}{Dt} - \alpha \frac{D\beta}{Dt} - u \right]. \quad (4.9)$$

O uso de considerações termodinâmicas possibilita algumas simplificações à densidade lagrangiana da Eq. (4.9). Primeiramente, partindo da relação fundamental da termodinâmica, $TdS = dU + pdV$, e expressando as quantidades na forma específica, onde $u := U/m$ e $s := S/m$, e notando que $\rho := m/V$, encontra-se, na forma $u = u(\rho, s)$, que:

$$du = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (4.10)$$

e por conseguinte, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \rho} = u + \frac{p}{\rho}. \quad (4.11)$$

Mas, por outro lado, partindo do conceito de entalpia $H := U + pV$, tem-se que a entalpia específica é dada por:

$$\mu := \frac{H}{m} = \frac{U + pV}{m} = u + \frac{p}{\rho}, \quad (4.12)$$

o que é idêntico ao resultado encontrado na Eq. (4.11).

Realizando-se a variação $\delta\rho$ da ação S , Eq. (4.7), levando em conta as Eqs. (4.11) e (4.12), obtém-se uma representação de Clebsch para a entalpia específica, isto é, μ passa a ser escrito em termos dos potenciais-velocidade na forma $\mu = \mu(v, \phi, \alpha, \beta, \theta, s)$. Esta expressão encontrada para μ pode ser identificada dentro da densidade lagrangiana $\mathcal{L}$, Eq. (4.9), possibilitando uma impressionante simplificação em sua expressão, dada por:

$$L = \rho(\mu - u) = p, \quad (4.13)$$

onde se usou na segunda igualdade a definição de entalpia específica, Eq. (4.12).

Com isso, a densidade lagrangiana torna-se descrita apenas pela pressão do fluido. Por sua vez, através das Eqs. (4.10) e (4.12), encontra-se a equação $dp = \rho d\mu - \rho T ds$, que pode ser usada para expressar a pressão na forma de uma equação de estado $p = p(\mu, s)$. Com isso, a ação S de Seliger-Whitham para um fluido perfeito não-relativístico é simplesmente dada por:

$$S = \int dt d^3x p(\mu, s). \quad (4.14)$$

A aplicação do princípio variacional de Hamilton à ação S , Eq. (4.14), resulta na obtenção das equações de evolução continuidade da dinâmica de fluidos e de relações matemáticas de consistência para os vínculos. Mais especificamente, obtém-se que: $\delta\phi$ conduz à equação de continuidade da massa, Eq. (4.2); $\delta\theta$ leva à equação de continuidade da entropia, Eq. (4.3); δs provê uma relação entre o vínculo θ e a temperatura absoluta T ; $\delta\alpha$ produz uma relação matemática para o vínculo β ; $\delta\beta$ resulta na equação de continuidade para as coordenadas lagrangianas, Eq. (4.5).

O desenvolvimento explícito dos termos dentro da densidade lagrangiana $\mathcal{L}$, Eq. (4.9), na forma vetorial conduz à seguinte expressão:

$$L = \rho \left[-\dot{\phi} - s\dot{\theta} - \alpha\dot{\beta} - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi + s\vec{\nabla}\theta + \alpha\vec{\nabla}\beta)^2 - u \right], \quad (4.15)$$

a qual possibilita obter os momenta canonicamente conjugados diretamente como:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -\rho, \quad \Pi_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\rho s, \quad \Pi_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = -\rho\alpha, \quad (4.16)$$

e, conseqüentemente, a densidade hamiltoniana na representação de potenciais-velocidade fica dada por:

$$H(\phi, \theta, \beta, \rho, s) = -\frac{1}{2\Pi_\phi}(\Pi_\phi \vec{\nabla}\phi + \Pi_\theta \vec{\nabla}\theta + \Pi_\beta \vec{\nabla}\beta)^2 - \Pi_\phi u(\Pi_\phi, \Pi_\theta). \quad (4.17)$$

Detalhes adicionais sobre a abordagem hamiltoniana no formalismo de Seliger-Whitham podem ser encontrados em Van Saarloos *et al.* [125]. Encerramos nossa discussão deste formalismo, visto que os tópicos cobertos são suficientes para o entendimento de sua extensão relativística, conforme efetuada por Schutz, a qual será apresentada na seção seguinte.

4.3 Formalismo de Schutz

O *formalismo de Schutz* consiste em uma generalização relativística do formalismo de Seliger-Whitham de fluidos perfeitos. Nesse formalismo, em vez de se considerar a velocidade tridimensional v^i , utiliza-se a quadrivelocidade U^ν , que é descrita por meio de seis potenciais, um a mais do que no formalismo não-relativístico. O formalismo foi apresentado por B. F. Schutz Jr. em 1970 e 1971 nos artigos [126, 127], com discussões correlatas em [128–131]

Para a construção do formalismo, assume-se um fluido perfeito de uma componente. Um fluido de uma componente é um sistema termodinâmico composto por uma única substância, onde todas as partículas são do mesmo tipo. Nesse contexto, a massa de repouso, devido à conservação do número de partículas, é uma quantidade conservada e deve figurar nas definições das grandezas. A energia interna, U , é a diferença entre a massa-energia E e a massa de repouso m_0 , isto é, $U := E - m_0$. Assim, para uma amostra de volume V , sendo $\rho := E/V$ a densidade de massa-energia, $\rho_0 := m_0/V$ a densidade de massa de repouso, e $u := U/m_0$ a energia interna específica, tem-se:

$$\rho = \rho_0(1 + u). \quad (4.18)$$

Em termos de quantidades específicas (avaliadas em relação à massa de repouso), a primeira lei da termodinâmica pode então ser expressa como:

$$Tds = d\varepsilon = du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (4.19)$$

onde $\varepsilon := E/m_0$ é a massa-energia específica.

A entalpia específica para o caso relativístico difere da entalpia no caso não-relativístico, Eq. (4.12), e deve ser definida como:

$$\mu := \frac{H}{m_0} = \frac{E + pV}{m_0} = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + u + \frac{p}{\rho_0}. \quad (4.20)$$

Para um sistema termodinâmico de uma única componente, é suficiente assumir uma equação de estado de dois parâmetros de estado [132]. No caso de um fluido perfeito com a equação $p = \omega\rho$, onde ω é uma constante, pode-se obter:

$$p = \omega\rho_0(1 + u), \quad (4.21)$$

que descreve p como função do parâmetro de estado u e de uma quantidade ρ_0 constante característica do sistema. Sendo assim, é preciso buscar expressar a equação de estado em termos de variáveis termodinâmicas mais convenientes.

Substituindo a Eq. (4.21) na Eq. (4.19) e desenvolvendo o último membro da equação resultante em uma diferencial total, pode-se encontrar expressões para T e s em função de ρ_0 e u . Assim,

$$T = 1 + u, \quad (4.22)$$

$$s = \ln(1 + u) - \omega \ln \rho_0. \quad (4.23)$$

Por sua vez, combinando as Eqs. (4.20) e (4.21), encontra-se:

$$1 + u = \frac{\mu}{\omega + 1}, \quad (4.24)$$

que, substituída na Eq. (4.23), fornece uma expressão para ρ_0 em função de μ e s , a qual faz a equação de estado, Eq. (4.21), resultar em:

$$p = \omega \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{1+1/\omega} e^{-s/\omega}, \quad (4.25)$$

que descreve uma equação na forma de dois parâmetros de estado termodinâmicos, $p = p(\mu, s)$.

Além disso, no caso relativístico será preciso considerar não mais o campo de velocidades descrito pela velocidade newtoniana v^i . Em vez disso, usa-se a *quadrivelocidade* U^μ , o análogo quadridimensional de v^i . Ela é definida como:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma v^i), \quad (4.26)$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Em um referencial inercial localmente comóvel com o fluido tem-se $v^i = 0$, e então $\gamma = 1$, de modo que a quadrivelocidade é dada por $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Além disso, a quadrivelocidade U^μ deve ser normalizada para ser consistente com a métrica do espaço-tempo. A condição de normalização garante que essa grandeza represente corretamente o movimento da partícula ou fluido no contexto relativístico:

$$U^\nu U_\nu = -1, \quad (4.27)$$

onde o sinal negativo surge porque estamos utilizando a assinatura de métrica $(-, +, +, +)$. Da condição de normalização, Eq. (4.27), também resulta, após uma diferenciação covariante, que:

$$U^\nu \nabla_\nu U_\sigma = 0, \quad (4.28)$$

que é a Eq. (2.3) para um vetor tangente à trajetória, confirmando que a partícula segue uma geodésica no espaço-tempo.

Através da quadrivelocidade é possível definir o *quadrifluxo de partículas* ao longo do fluxo do fluido, que é o análogo quadridimensional da densidade de corrente de partículas, $J^i = nv^i$, onde $n := \mathcal{N}/V$ é a densidade de número de partículas. O quadrifluxo de partículas é então dado por:

$$\mathcal{N}^\mu := nU^\mu, \quad (4.29)$$

de modo que $(\mathcal{N}^0, \mathcal{N}^i) = (n, J^i)$, e a conservação do fluxo de partículas é expressa como:

$$\nabla_\mu \mathcal{N}^\mu = 0. \quad (4.30)$$

Por sua vez, considerando que a densidade de massa de repouso é uma constante para um determinado fluido, podemos expressar a *lei de conservação do número de bárions* em termos de ρ_0 como:

$$\nabla_\mu (\rho_0 U^\mu) = 0, \quad (4.31)$$

que se reduz à equação de continuidade da massa, Eq.(4.2), no caso não-relativístico.

O fluido perfeito em Relatividade Geral é descrito por meio de um tensor escrito em termos da quadrivelocidade e da métrica do espaço-tempo. Este tensor, chamado de *tensor energia-momentum*, é definido como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} = \rho_0 \mu U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (4.32)$$

em que a última igualdade segue de $\mu = (\rho + p)/\rho_0$ conforme definido na Eq. (4.20). Além disso, em um referencial inercial localmente comóvel com o fluido, tem-se $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$.

A conservação do tensor energia-momentum em Relatividade Geral é expressa pela divergência covariante do tensor ser igual a zero. Assim, temos a seguinte equação:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.33)$$

da qual resultam quatro equações de evolução que podem ser expressas como leis de conservação. A componente paralela à quadrivelocidade é dada por:

$$U_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \rho_0 T U^\nu \nabla_\nu s = 0, \quad (4.34)$$

indicando que o movimento do fluido perfeito conserva a entropia por bárion.

As três componentes perpendiculares à quadrivelocidade são dadas por:

$$P_\mu^\sigma \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_\sigma^\nu \nabla_\nu p = \mu \rho_0 \nabla_\nu U_\sigma U^\nu, \quad (4.35)$$

onde P_μ^σ é o tensor de projeção, definido como:

$$P_\mu^\sigma = \delta_\mu^\sigma + U^\sigma U_\mu, \quad (4.36)$$

e resultam, em um referencial inercial localmente comóvel, na conhecida lei de força:

$$-\partial_i p = (\rho + p) \frac{dv^i}{dt}, \quad (4.37)$$

onde $\partial_i p$ representa o gradiente espacial da pressão. Esta expressão indica que a força por unidade de volume é igual ao gradiente de pressão. Deste modo, pode-se considerar $\rho + p$ como a massa inercial por unidade de volume.

Sabendo como a quadrivelocidade se comporta na representação padrão relativística, pode-se escrever uma representação potencial-velocidade para ela, que deve ser equivalente à representação relativística padrão via tensor energia-momentum. Ou seja, a quadrivelocidade escrita em termos de potenciais deve não só satisfazer a condição de normalização, mas também produzir leis de conservação idênticas às obtidas via tensor energia-momentum. Matematicamente, o *teorema de Pfaff* [126] exige que a quadrivelocidade seja descrita por, pelo menos, quatro potenciais. No caso não-relativístico, Clebsch [122] mostrou que são necessários apenas três potenciais para descrever a velocidade. Contudo, a fim de obter termos com significação física nas equações de evolução, Seliger e Whitham incluíram cinco potenciais, na forma dada pela Eq. (4.8). Usando a mesma premissa, Schutz considerou a quadrivelocidade representada por seis potenciais, na forma:

$$U_\nu = \mu^{-1}(\partial_\nu \phi + \alpha \partial_\nu \beta + \theta \partial_\nu s) = \mu^{-1}(\phi_{,\nu} + \alpha \beta_{,\nu} + \theta s_{,\nu}), \quad (4.38)$$

onde a segunda igualdade, mais comum na literatura, utiliza a notação de vírgula para indicar a derivada parcial. Note que a versão apresentada por Schutz difere ligeiramente da versão de Seliger-Whitham no termo envolvendo a entropia, e inclui explicitamente o termo de entalpia, o qual dependerá dos outros potenciais. Este termo segue diretamente da condição de normalização, Eq. (4.27), como:

$$\mu^2 = -g^{\mu\nu}(\phi_{,\mu} + \alpha \beta_{,\mu} + \theta s_{,\mu})(\phi_{,\nu} + \alpha \beta_{,\nu} + \theta s_{,\nu}), \quad (4.39)$$

de modo que $\mu = \mu(\phi, \alpha, \beta, \theta, s, g_{\mu\nu})$.

Em seu artigo [126], Schutz faz uso do trabalho de A. H. Taub [133] para discutir o significado dos diversos potenciais que compõem a quadrivelocidade. Para tanto, define um quadri vetor corrente V_σ , dado por:

$$V_\sigma = \mu U_\sigma = \phi_{,\sigma} + \alpha \beta_{,\sigma} + \theta s_{,\sigma}, \quad (4.40)$$

que carrega a informação de U_σ na escala de μ , que depende das propriedades termodinâmicas do fluido. Neste caso, o tensor de circulação, é dado por:

$$\Omega_{\sigma\lambda} = \partial_\lambda V_\sigma - \partial_\sigma V_\lambda = 2\partial_{[\lambda} V_{\sigma]} = 2V_{[\sigma,\lambda]} = 2\alpha_{[\lambda}\beta_{\sigma]} + 2\theta_{[\lambda}s_{\sigma]}, \quad (4.41)$$

onde se usou a Eq. (4.40) e a notação $[\ , \]$ indica a parte antissimétrica dos tensores.

É possível observar da fórmula acima, Eq. (4.41), que os potenciais α e β , bem como a entropia s e o potencial termodinâmico θ contribuem para a dinâmica de vorticidade do fluido. Note que, quando a entropia é conservada, apenas α e β contribuirão para a vorticidade. Portanto, α e β são quantidades bastante relevantes em dinâmicas rotacionais. Em uma situação isentrópica e sem circulação, α e β devem ser constantes e podem ser tomados como iguais a zero. Por isso, em situações sem dinâmica rotativa, pode-se considerar $\alpha = \beta = 0$.

Para uma curva fechada Λ , em uma hipersuperfície tipo-espaço Σ , com vetor tangente à curva $t^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, pode-se definir a circulação $\mathcal{C}$ como a integral de linha fechada do quadrivetor corrente. Assim:

$$\mathcal{C} = \oint_\Lambda V_\alpha t^\alpha d\lambda = \oint_\Lambda \alpha d\beta_\Lambda + \oint_\Lambda \theta ds_\Lambda, \quad (4.42)$$

onde foram realizadas integrações por partes. O subscrito Λ em $d\beta$ e ds significa que os diferenciais são direcionados ao longo da curva. De modo que, se α for uma função apenas de β , e se θ ou s forem constantes, então $\mathcal{C}$ será zero para qualquer escolha de Σ e Λ . Neste caso, $\Omega_{\sigma\kappa} = 0$. Portanto, $\mathcal{C}$ se anula em *toda* curva Λ e em *toda* hipersuperfície Σ se, e somente, se $\Omega_{\sigma\kappa} = 0$, o que estabelece seu significado na circulação.

Para um referencial inercial localmente comóvel com o fluido, tem-se $V^0 = V_0 = \mu$ e $V^i = V_i = 0$. Logo, definindo-se o quadrivetor vorticidade $\mathcal{V}^\nu$ como:

$$\mathcal{V}^\nu = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\nu\sigma\lambda\kappa}U_\sigma U_{\lambda;\kappa} = \frac{1}{2\mu^2\sqrt{-g}}\epsilon^{\nu\sigma\lambda\kappa}V_\sigma\Omega_{\lambda\kappa}, \quad (4.43)$$

onde $(-g)^{-1/2}\epsilon^{\nu\sigma\lambda\kappa}$ é o tensor contravariante completamente antissimétrico. Assim, o quadrivetor reduz-se ao vetor vorticidade $\mathcal{V}^i$, dado por:

$$\mu\mathcal{V}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Omega_{jk} = \epsilon^{ijk}\partial_j\alpha\partial_k\beta + \epsilon^{ijk}\partial_j\theta\partial_k s, \quad (4.44)$$

que mostra a dinâmica de vórtices por meio do produto vetorial de gradientes dos potenciais.

Isto mostra que, se $\partial_i s = 0$, superfícies α e β constantes se interceptam ao longo de linhas de vórtice, que são carregadas junto com o fluido porque $d\alpha/d\tau = d\beta/d\tau = 0$. Se inicialmente $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, mas $s \neq \text{const}$, então superfícies de θ e s constantes determinam linhas de vórtice cuja orientação em relação às partículas do fluido muda com o tempo porque $d\theta/d\tau = T$, como ficará claro adiante.

Schutz apresenta ainda mais discussões a respeito dos potenciais, com detalhes e sutilezas que fogem ao escopo deste trabalho e por isso não serão apresentadas aqui.

Cumpra mencionar apenas que α e β são parâmetros de valor inicial ligados à vorticidade e são importantes em modelos envolvendo fluido perfeito em rotação, e que ϕ e θ são variáveis dinâmicas cuja evolução é determinada pela condição termodinâmica do fluido. Além disso, conquanto não haja liberdade de calibre em μ e s , visto que sua mudança ocasionaria mudança da situação física, o mesmo não se dá com os potenciais $(\varphi, \alpha, \beta, \theta)$. Diferentes conjuntos de valores iniciais desses potenciais $(\varphi', \alpha', \beta', \theta')$ podem fornecer a mesma quadrivelocidade, tornando-os *equivalentes*. Assim, pode-se escolher arbitrariamente o valor inicial de um dos potenciais, com os valores iniciais dos outros três sendo determinados pela condição física do fluido, expressa por U^μ , μ , s e pela equação de estado.

Enfim, pode-se agora partir para a construção do princípio variacional euleriano do formalismo de Schutz. Ele é equivalente ao do caso não-relativístico, com a diferença de que a densidade lagrangiana agora inclui o elemento de integração típico de espaços curvos. Assim, $\mathcal{L}_f = \sqrt{-g}p$.

Nota-se, através da Eq. (4.25), que a equação de estado termodinâmica é da forma $p = p(\mu, s)$, de modo que $p = p(\phi, \alpha, \beta, \theta, s, g_{\mu\nu})$. Essa dependência da pressão com os potenciais-velocidade deve ser levada em conta ao se efetuar a variação da ação. Assim, para o formalismo de Schutz, a ação do fluido perfeito é:

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} p(\phi, \alpha, \beta, \theta, s, g_{\mu\nu}). \quad (4.45)$$

A ação para a gravitação pode ser escrita por meio da ação de Einstein-Hilbert, dada por:

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (4.46)$$

A situação completa, envolvendo a geometria e o fluido, pode ser expressa por meio da ação S , dada por:

$$S = S_g + S_f = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\kappa p), \quad (4.47)$$

onde se incluiu a constante de acoplamento $\kappa := 8\pi G/c^4$.

Realizando-se a variação da ação S via princípio de Hamilton para cada um dos potenciais envolvidos, obtém-se:

- Variação $\delta g_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.48)$$

que são as *equações de Einstein*.

- Variação $\delta\phi$:

$$(\rho_0 U^\nu)_{,\nu} = 0, \quad (4.49)$$

que é a equação de conservação do número de bárions.

- Variação $\delta\theta$:

$$U^\nu s_{,\nu} = 0, \quad (4.50)$$

que é a equação de conservação da entropia.

- Variação δs :

$$U^\nu \theta_{,\nu} = T, \quad (4.51)$$

que identifica θ com a *temasia*, isto é, a integral temporal da temperatura absoluta.

- Variação $\delta\alpha$:

$$U^\nu \beta_{,\nu} = 0, \quad (4.52)$$

que é uma relação de consistência para o vínculo β .

- Variação $\delta\beta$:

$$U^\nu \alpha_{,\nu} = 0, \quad (4.53)$$

que é uma relação de consistência para o vínculo α .

Utilizando a condição de normalização, Eq. (4.27) da quadrivelocidade e as equações de conservação, Eqs. (4.50) e (4.52), encontra-se:

$$U^\nu \phi_{,\nu} = -\mu, \quad (4.54)$$

que expressa uma relação dinâmica do vínculo ϕ com a entalpia.

Enfim, a abordagem hamiltoniana do formalismo de Schutz segue a partir da análise da ação S_f , Eq. (4.45). Usando as variáveis ADM, pode-se escrever que $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$. E considerando a métrica induzida como constante, tem-se $\mathcal{L}_f = pN$. Assim, segue que os cinco momenta canonicamente conjugados são:

$$p^\phi = -\rho_0 U^0 N, \quad p^\alpha = p^\theta = 0, \quad p^\beta = \alpha p^\phi, \quad p^s = \theta p^\phi. \quad (4.55)$$

Uma vez que há apenas um momentum independente, há quatro vínculos sobre os momenta, as chamadas *equações φ de Dirac* [134]:

$$\varphi_1 = p^\alpha = 0, \quad \varphi_2 = p^\theta = 0, \quad \varphi_3 = p^\beta - \alpha p^\phi = 0, \quad \varphi_4 = p^s - \theta p^\phi = 0. \quad (4.56)$$

A densidade hamiltoniana para o fluido perfeito será dada por:

$$\mathcal{H}_f = p^\phi(\dot{\phi} + \alpha\dot{\beta} + \theta\dot{s}) - pN = -T_0^0 N, \quad (4.57)$$

a qual deve ser acrescida dos m vínculos na forma de uma densidade hamiltoniana $\mathcal{H}_m = \lambda^m \phi_m$. De modo que a densidade hamiltoniana para o fluido $\mathcal{H}_F$, levando em conta os vínculos oriundos do formalismo de Dirac, é dada por:

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_m = \mathcal{H}_f + \lambda^m \phi_m. \quad (4.58)$$

Por sua vez, o campo gravitacional é descrito pela densidade hamiltoniana $\mathcal{H}_G$ advinda do formalismo ADM:

$$\mathcal{H}_G = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i. \quad (4.59)$$

De modo que a densidade hamiltoniana total $\mathcal{H}$ fica:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_G + 2\kappa\mathcal{H}_F, \quad (4.60)$$

onde se incluiu a constante de acoplamento κ .

As novas variáveis λ^m podem ser encontradas fazendo uso do procedimento de Dirac para sistemas vinculados, e resultam [127]:

$$\lambda^1 = \dot{\alpha}, \quad \lambda^2 = \dot{\theta}, \quad \lambda^3 = \dot{\beta}, \quad \lambda^4 = \dot{s}. \quad (4.61)$$

Portanto, a densidade hamiltoniana total do sistema, na formulação de Dirac, é dada por:

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i + 2\kappa \left[p^\phi(\dot{\phi} + \alpha\dot{\beta} + \theta\dot{s}) - pN + \dot{\beta}(p^\beta - \alpha p^\phi) + \dot{s}(p^s - \theta p^\phi) \right]. \quad (4.62)$$

4.4 Tempo emergente da dinâmica interna do fluido perfeito

O formalismo de Schutz permite também derivar um parâmetro temporal emergente da dinâmica interna do fluido perfeito. Este procedimento foi primeiramente empregado por V. G. Lapchinskii e V. A. Rubakov [135] para quantizar o campo gravitacional no modelo FLRW. Os autores utilizaram a abordagem canônica, aplicando o formalismo ADM e o tratamento hamiltoniano de Dirac para vínculos. Através disso, foi possível obter um momentum canônico associado a uma variável interna capaz de desempenhar o papel de parâmetro temporal. O método inaugurado por eles foi posteriormente adotado por diversos autores no campo da cosmologia quântica, visto que permite obter um operador hamiltoniano bem formulado que governa a evolução do universo em termos dessa variável de tempo emergente [136]. O esquema, como descrito pelos autores para o caso de um universo homogêneo e isotrópico preenchido com fluido perfeito, será detalhado a seguir.

Para iniciar, toma-se a métrica FLRW em coordenadas cartesianas para escrever o elemento de linha ds na forma:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.63)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e k a curvatura espacial.

Utilizando as variáveis do formalismo ADM, isto é, $N := (-g^{00})^{-1/2}$, $N_i := g_{0i}$ e $h_{ij} := g_{ij}$, obtemos para o caso FLRW:

$$N = N(t), \quad N_i = 0, \quad h_{ij} = a(t)^2 \delta_{ij}. \quad (4.64)$$

Disso, obtemos que $h := \det h_{ij} = a^6$, $R^{(3)} = 6k/a^2$, $K_{ij} = -\dot{a}a\delta_{ij}/N$ e $K = -3\dot{a}/Na$. Com isso, a densidade lagrangiana do campo gravitacional no formalismo ADM é:

$$\mathcal{L}_G = N\sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2 \right) = Na^3 \left(\frac{6k}{a^2} - \frac{6\dot{a}^2}{N^2a^2} \right). \quad (4.65)$$

O momentum conjugado ao fator de escala a é dado por:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}. \quad (4.66)$$

De modo que a densidade hamiltoniana para o campo gravitacional é tal que:

$$\mathcal{H}_G = p_a\dot{a} - \mathcal{L}_G = N \left(-\frac{p_a^2}{24a} - 6ka \right). \quad (4.67)$$

Para o modelo FLRW, no formalismo de Schutz aplicado a um fluido perfeito, os potenciais α e β são nulos devido à simetria, pois eles descrevem o movimento de vórtices, que não estão presentes neste contexto. Desse modo, a quadrivelocidade U_ν nessa representação é dada por:

$$U_\nu = \mu^{-1}(\phi_{,\nu} + \theta s_{,\nu}). \quad (4.68)$$

Além disso, ao considerar um referencial inercial localmente comóvel com o fluido, onde $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$, obtemos a seguinte expressão para a entalpia específica μ :

$$\mu = N^{-1}(\dot{\phi} + \theta\dot{s}). \quad (4.69)$$

Substituindo este resultado, Eq. (4.69), na expressão da pressão, Eq. (4.25), e levando em conta que no formalismo de Schutz a densidade lagrangiana do fluido é dada por $\mathcal{L}_F = Na^3p$, obtemos:

$$\mathcal{L}_F = Na^3\omega \left[\frac{1}{\omega + 1} N^{-1}(\dot{\phi} + \theta\dot{s}) \right]^{1+1/\omega} e^{-s/\omega}. \quad (4.70)$$

E os momenta canonicamente conjugados às variáveis do fluido são dados por:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\phi}} = a^3 \left[\frac{N^{-1}(\dot{\phi} + \theta\dot{s})}{\omega + 1} \right]^{\frac{1}{\omega}} e^{-s/\omega}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad p_s = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{s}} = \theta p_\phi. \quad (4.71)$$

Logo, a densidade hamiltoniana do fluido torna-se:

$$\mathcal{H}_F = p_\phi\dot{\phi} + p_\theta\dot{\theta} + p_s\dot{s} - \mathcal{L}_F = N \frac{p_\phi^{\omega+1} e^s}{a^{3\omega}}. \quad (4.72)$$

A expressão da densidade hamiltoniana, Eq. (4.72), é bastante complicada e deve-se buscar uma transformação canônica que a simplifique. Para tanto, ela precisa preservar a

estrutura das equações de Hamilton. Isso significa que as novas variáveis Q e P devem obedecer às seguintes condições:

$$\{Q^i, P_j\} = \delta_j^i, \quad \{Q^i, Q^j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad (4.73)$$

onde $\{, \}$ denota o parêntese de Poisson. Isso garante que as relações de comutação canônicas sejam mantidas.

Pode-se, então, propor novas variáveis canônicas $(\mathfrak{T}, p_{\mathfrak{T}})$ e $(\bar{\phi}, \bar{p}_{\phi})$ que atendam às condições de canonicidade. Começando-se por identificar a estrutura presente na Eq. (4.72), pode-se propor a primeira nova variável como o momentum $p_{\mathfrak{T}} = p_{\phi}^{\omega+1} e^s$. Por sua vez, a variável conjugada $\mathfrak{T}$ deve ser escolhida tal que, juntamente com $p_{\mathfrak{T}}$, preserve as relações de comutação canônica. Isso pode ser feito tomando-se $\mathfrak{T} = p_s e^{-s} p_{\phi}^{-(\omega+1)}$, de modo a cancelar a dependência exponencial e polinomial de $p_{\mathfrak{T}}$. Calculando-se os parênteses de Poisson dessas novas variáveis, obtém-se:

$$\{\mathfrak{T}, p_{\mathfrak{T}}\} = 1, \quad \{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}\} = \{p_{\mathfrak{T}}, p_{\mathfrak{T}}\} = 0. \quad (4.74)$$

Por sua vez, para garantir que as variáveis canônicas restantes também sejam transformadas de maneira conveniente, sem alterar suas relações canônicas, define-se $\bar{p}_{\phi} = p_{\phi}$ e $\bar{\phi} = \phi - (\omega + 1)p_s/p_{\phi}$. Fazendo-se isso, os parênteses de Poisson se tornam:

$$\{\bar{\phi}, \bar{p}_{\phi}\} = 1, \quad \{\bar{\phi}, \bar{\phi}\} = \{\bar{p}_{\phi}, \bar{p}_{\phi}\} = 0, \quad (4.75)$$

bem como os parênteses de Poisson cruzados entre diferentes pares de variáveis:

$$\{\mathfrak{T}, \bar{\phi}\} = 0, \quad \{\mathfrak{T}, \bar{p}_{\phi}\} = 0, \quad \{p_{\mathfrak{T}}, \bar{\phi}\} = 0, \quad \{p_{\mathfrak{T}}, \bar{p}_{\phi}\} = 0. \quad (4.76)$$

Essa exposição justifica a introdução, pelos autores, da transformação canônica como:

$$\mathfrak{T} = p_s e^{-s} p_{\phi}^{-(\omega+1)}, \quad p_{\mathfrak{T}} = p_{\phi}^{\omega+1} e^s, \quad \bar{\phi} = \phi - (\omega + 1) \frac{p_s}{p_{\phi}}, \quad \bar{p}_{\phi} = p_{\phi}. \quad (4.77)$$

Como consequência, a densidade hamiltoniana total, dada pela soma das Eqs. (4.67) e (4.72), nas novas variáveis canônicas, é expressa como:

$$\mathcal{H} = N \left(-\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_{\mathfrak{T}}}{a^{3\omega}} \right), \quad (4.78)$$

isto é, na forma $\mathcal{H} = N\mathcal{H}_0$, sendo $\mathcal{H}_0$ a super-hamiltoniana e agora incluindo um momentum canônico linear $p_{\mathfrak{T}}$ advindo do fluido perfeito e conjugado à variável interna $\mathfrak{T}$. Esta variável pode ser considerada para desempenhar o papel de parâmetro temporal. Assim, usando as regras de quantização canônica (ou *método da analogia clássica* de Dirac), que promovem os momenta clássicos a operadores quânticos, pode-se considerar:

$$p_a \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial a}, \quad p_{\mathfrak{T}} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.79)$$

onde se fez a identificação do parâmetro canônico com o tempo, $\mathfrak{T} = t$, sendo t o tempo coordenado. Assumindo o calibre cosmológico $N = 1$ e substituindo essas expressões na densidade hamiltoniana $\mathcal{H}$, Eq. (4.78), obtém-se o correspondente operador hamiltoniano quântico $\hat{\mathcal{H}}$, dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{24a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 6ka + ia^{-3\omega} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.80)$$

onde se tomou $\hbar = 1$.

É possível então definir a função de onda $\Psi(a, t)$ como a representação do estado quântico do universo e aplicar a ela o operador hamiltoniano quântico $\hat{\mathcal{H}}$. Em conformidade com a ausência de um tempo absoluto e a invariância de difeomorfismos na Relatividade Geral, assume-se que o estado quântico do universo deve satisfazer a condição de hamiltoniano total nulo, resultando na *equação de Wheeler-DeWitt*, expressa por:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(a, t) = 0, \quad (4.81)$$

que, aplicada ao operador $\hat{\mathcal{H}}$ no contexto do modelo FLRW, Eq. (4.80), fornece:

$$\left(\frac{1}{24a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 6ka + ia^{-3\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(a, t) = 0, \quad (4.82)$$

equação que descreve a quantização de um universo homogêneo e isotrópico como um todo. A solução da equação de Wheeler-DeWitt, contudo, costuma ser extremamente dificultosa.

Aqui encerramos a discussão dessa equação, visto que tais discussões fogem ao escopo deste capítulo, que é simplesmente apresentar como o formalismo de Schutz possibilita introduzir um parâmetro temporal através da dinâmica interna do fluido perfeito, o que foi realizado pela primeira vez por V. G. Lapchinskii e V. A. Rubakov. Esse procedimento, inaugurado por eles, será muito relevante em um capítulo posterior deste trabalho.

* * *

Neste capítulo, estabelecemos uma discussão breve sobre o formalismo de Schutz para fluidos perfeitos, demonstrando como utilizá-lo para obter uma hamiltoniana de matéria e uma dinâmica interna que atua como parâmetro temporal. Também abordamos a inclusão da hamiltoniana do campo gravitacional, derivada do formalismo ADM apresentado no capítulo anterior. Essa abordagem é completa, pois integra geometria e matéria de maneira coerente. Além disso, no capítulo a seguir, exploraremos a possibilidade de modificar os espaços de fase na formulação hamiltoniana, alterando a comutatividade usual e possibilitando a realização de uma quantização por deformação. Serão apresentados brevemente o tratamento das não-comutatividades via deformação dos parênteses de Poisson, a transformação de Bopp e o formalismo Faddeev-Jackiw para teorias com vínculos.

5 Elementos de não-comutatividade em Física

*Novas regras redesenham lugares
e movimentos,
revelando padrões inéditos na
geometria do universo.*

O estudo da geometria não-comutativa [137–140] tem implicações profundas em vários campos da física, particularmente na cosmologia [141] e na gravidade quântica [142]. Enquanto na geometria comutativa convencional as coordenadas do espaço-tempo seguem as regras usuais da álgebra comutativa, na geometria não-comutativa há a introdução de uma estrutura onde as coordenadas podem não comutar. Esta modificação fundamental da estrutura subjacente do espaço-tempo pode levar a novas percepções e potencialmente resolver problemas pendentes na física teórica. A seguir, será apresentada uma discussão sobre a não-comutatividade, que será de grande importância para as análises dos capítulos subsequentes.

5.1 Breve Introdução à Não-Comutatividade

Na teoria canônica clássica, as coordenadas (q^i, p_i) do espaço de fase são variáveis contínuas que satisfazem a estrutura comutativa usual, dada pela álgebra de Poisson clássica, onde existem as seguintes relações:

$$\{q^i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (5.1)$$

onde $\{A, B\}$ denota os parênteses de Poisson para duas funções A e B no espaço de fase, definidos como:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i}. \quad (5.2)$$

Na mecânica quântica, na abordagem da quantização canônica, as coordenadas do espaço de fase são promovidas a operadores em um espaço de Hilbert, e os parênteses de Poisson são substituídos por comutadores entre esses operadores. Esta substituição é conhecida como a prescrição de quantização, que pode ser descrita formalmente da seguinte maneira [143]:

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (5.3)$$

onde $\{f, g\}$ são parênteses de Poisson entre duas funções clássicas f e g , enquanto $[\hat{f}, \hat{g}] := \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ são comutadores entre os operadores correspondentes $\hat{f}$ e $\hat{g}$ no espaço de Hilbert, definidos. A constante $\hbar$ é a constante de Planck reduzida e i é a unidade imaginária.

Esta prescrição estabelece uma correspondência entre a álgebra clássica de observáveis, $\mathcal{A}_0$, e a álgebra de operadores quânticos, $\mathcal{A}_\hbar$, transformando as funções clássicas

em operadores. Especificamente, as coordenadas do espaço de fase, q^i e p_i , passam a ser representadas por operadores $\hat{q}^i$ e $\hat{p}_i$, que satisfazem as relações de comutação canônica:

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i. \quad (5.4)$$

Essas relações de comutação refletem a estrutura quântica do novo espaço de fase, onde a natureza das variáveis é fundamentalmente diferente, em contraste com a estrutura contínua descrita pelos parênteses de Poisson na mecânica clássica.

Há, porém, uma abordagem teórica alternativa, chamada de *quantização por deformação* [144–148], no qual os observáveis quânticos são gerados a partir de seus equivalentes clássicos, por meio de um produto não-comutativo, chamado de *produto estrela* ($\star_\hbar$) ou *produto de Moyal*, que deforma a álgebra dos observáveis clássicos. Os novos parênteses de Poisson deformados são chamados de *produtos de Moyal* [149].

Para duas funções f e g , o produto estrela é definido como [144]:

$$(f \star_\hbar g)(\xi) = \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\omega^{ab}\partial_{(\xi_1)}^a\partial_{(\xi_2)}^b\right)f(\xi_1)g(\xi_2)\Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (5.5)$$

onde ξ denota um ponto no espaço de fase, e ω_{ab} é chamado de *estrutura simplética clássica*, definida por:

$$\omega_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

e obedecendo à relação

$$\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta_c^a. \quad (5.7)$$

Para estabelecer a operacionalidade do produto estrela, é preciso expandir a exponencial da Eq. (5.5) em uma série de potências, de modo que:

$$\exp\left(\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial_{(\xi_1)}^a\partial_{(\xi_2)}^b\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial_{(\xi_1)}^a\partial_{(\xi_2)}^b\right)^n. \quad (5.8)$$

Com isso, o produto de Moyal, Eq. (5.5), pode ser escrito como:

$$(f \star_\hbar g)(\xi) = f(\xi)g(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial_{(\xi_1)}^a\partial_{(\xi_2)}^b\right)^n f(\xi_1)g(\xi_2)\Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (5.9)$$

onde $f(\xi)g(\xi) := fg$ representa o produto usual entre funções. Assim, a expansão do produto estrela pode ser escrita na forma geral como:

$$f \star_\hbar g = fg + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots, \quad (5.10)$$

onde $B_i(f, g)$ são operadores bidiferenciais, isto é, operadores diferenciais que atuam em pares de funções (f, g) aplicando derivadas parciais simultaneamente a esses pares. Explicitamente, para os primeiros termos:

$$B_1(f, g) = \frac{i}{2}\omega_{ab}(\partial^a f)(\partial^b g), \quad B_2(f, g) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \omega_{ab}\omega_{cd}(\partial^a \partial^c f)(\partial^b \partial^d g), \quad (5.11)$$

forneendo as correções quânticas ao produto clássico e refletindo as derivadas de ordens superiores.

Esse procedimento permite expressar os novos parênteses de Poisson deformados (parênteses de Moyal) em termos do produto estrela como:

$$\{f, g\}_h = f \star_h g - g \star_h f = \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (5.12)$$

onde os novos parênteses de Poisson, $\{, \}_h$, agora incorporam as correções quânticas aos antigos parênteses de Poisson $\{, \}$. A notação $\mathcal{O}(\hbar^2)$ indica que as correções quânticas começam na ordem $\hbar^2$.

A princípio, nada impede que se possa incluir deformações mais gerais na álgebra dos parênteses de Poisson. Isto pode ser feito através da modificação da estrutura simplética usual ω_{ab} para uma α_{ab} mais geral, gerando uma álgebra $\mathcal{A}_{h,\alpha}$ dotada de um novo produto estrela, dado por [150]:

$$(f \star_{h,\alpha} g)(\xi) = \exp \left(\frac{i}{2} \hbar \alpha_{ab} \partial_{(\xi_1)}^a \partial_{(\xi_2)}^b \right) f(\xi_1) g(\xi_2) \Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (5.13)$$

tal que a nova estrutura simplética se expressa como:

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} \Theta_{ij} & \delta_{ij} + \Sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \Sigma_{ij} & \Pi_{ij} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

e emerge a seguinte estrutura de Poisson deformada:

$$\{q_i, q_j\}_{h,\alpha} = i\hbar \Theta_{ij}, \quad \{q_i, p_j\}_{h,\alpha} = i\hbar (\delta_{ij} + \Sigma_{ij}), \quad \{p_i, p_j\}_{h,\alpha} = i\hbar \Pi_{ij}, \quad (5.15)$$

com a inclusão de não-comutatividades através das matrizes antissimétricas Θ_{ij} e Π_{ij} e da matriz simétrica Σ_{ij} . Os coeficientes dessas matrizes são os parâmetros não-comutativos da teoria.

Finalmente, no caso estritamente clássico, há uma álgebra de Poisson $\mathcal{A}_\alpha$ obedecendo ao seguinte produto estrela, sem $i\hbar$, dado por [151]:

$$(f \star_\alpha g)(\xi) = \exp \left(\frac{1}{2} \alpha_{ab} \partial_{(\xi_1)}^a \partial_{(\xi_2)}^b \right) f(\xi_1) g(\xi_2) \Big|_{\xi_1=\xi_2=\xi}, \quad (5.16)$$

que gera a seguinte estrutura de Poisson:

$$\{q_i, q_j\}_\alpha = \Theta_{ij}, \quad \{q_i, p_j\}_\alpha = \delta_{ij} + \Sigma_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_\alpha = \Pi_{ij}, \quad (5.17)$$

Uma exposição detalhada sobre a quantização por deformação foge do propósito deste trabalho, mas pode ser encontrada em Gutt *et al.* [152]. Aqui, serão apresentadas apenas essas ferramentas básicas que permitem uma compreensão adequada do conteúdo a ser explorado nas seções seguintes. Como deve ter ficado claro, implementar cálculos nas novas variáveis não-comutativas usando parênteses de Poisson deformados é uma tarefa muito complicada. É de grande interesse, então, escrever essas variáveis em termos das variáveis comutativas usuais, cuja manipulação é bastante familiar. É essa a proposta do *deslocamento de Bopp*, que será discutido na seção a seguir.

5.2 Deslocamento de Bopp

O *deslocamento de Bopp* (em inglês, *Bopp shift*) é um método utilizado na quantização por deformação e na teoria da não-comutatividade que permite expressar variáveis não-comutativas em termos de variáveis comutativas por meio de uma mudança de variáveis. O nome da técnica vem de F. A. Bopp, que a introduziu pela primeira vez [153].

As transformações do deslocamento de Bopp, que convertem as coordenadas não-comutativas em coordenadas comutativas, não são univocamente determinadas e podem ser realizadas de várias maneiras, dependendo da escolha dos operadores diferenciais e dos parâmetros de não-comutatividade. Isto proporciona liberdade na escolha das funções de deslocamento, resultando em diferentes representações matemáticas equivalentes, desde que todas sejam consistentes com a estrutura de comutação imposta pelas relações de não-comutatividade da estrutura de Poisson.

Por exemplo, para a estrutura de Poisson quântica apresentada na Eq. (5.15), pode-se propor o deslocamento de Bopp como transformações $(q_i, p_i) \rightarrow (q'_i, p'_i)$ dadas por:

$$q'_i = q_i - \frac{1}{2}\hbar\Theta_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad p'_i = p_i + \frac{1}{2}\hbar\Sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (5.18)$$

as quais devem satisfazer às relações de comutação da Eq. (5.15) para que representem um deslocamento de Bopp legítimo.

Enquanto (q_i, p_i) são variáveis comutativas, que satisfazem as relações de comutação usuais, as variáveis não-comutativas (q'_i, p'_i) devem obedecer às relações de comutação da álgebra deformada dada por Eq. (5.15). Substituindo-se a Eq. (5.18) na Eq. (5.15), pode-se confirmar a consistência da transformação de Bopp com as relações de não-comutatividade. Caso não fosse confirmada a consistência, deveria-se ajustar a transformação de modo a fazê-la obedecer à estrutura de Poisson requerida.

A seguir, será apresentado um método particularmente útil para a análise de sistemas com hamiltonianas de estrutura complicada ou que contenham vínculos. Este método, chamado de *formalismo de Faddeev–Jackiw*, faz uso da estrutura simplética em lugar da formalização tradicional baseada nos parênteses de Poisson. O formalismo também admite extensões para o tratamento da não-comutatividade no espaço de fase.

5.3 Formalismo de Faddeev–Jackiw

O *formalismo de Faddeev–Jackiw*, elaborado por L. D. Faddeev e R. W. Jackiw [154], e posteriormente desenvolvido na forma de um algoritmo por J. Barcelos-Neto & C. Wotzasek [155, 156], consiste em um método eficiente de tratar sistemas com vínculo por meio da eliminação de graus de liberdade supérfluos.

O foco está diretamente na estrutura canônica sem categorizar vínculos. A formulação é baseada em uma lagrangiana de primeira ordem nas derivadas temporais. Esta

escolha está longe de ser restritiva, pois lagrangianas de segunda ordem podem ser convertidas à primeira ordem ao se introduzir variáveis conjugadas, preservando a generalidade do formalismo. Tal escolha facilita a formulação hamiltoniana, quantização e manejo dos vínculos, tornando a abordagem eficiente e abrangente, reformulando a dinâmica sem vínculos externos explícitos. Assim, seja a lagrangiana dada por:

$$L = p_i \dot{q}^i - H(p, q), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.19)$$

onde p_i e q^i são variáveis canônicas conjugadas e $H(p, q)$ é o hamiltoniano do sistema. Introduzindo a coordenada do espaço de fase de $2n$ componentes $\xi^i = (q^i, p_i)$, a lagrangiana pode ser reescrita como:

$$L dt = A_i d\xi^i - V(\xi) dt, \quad (5.20)$$

onde $A_i := A_{\xi^i}$ é o componente de uma conexão 1-forma na formulação do espaço de fase e $V(\xi) = H(p, q)$ é o potencial simplético.

A partir da conexão 1-forma A_i , a estrutura simplética f_{ij} é definida como:

$$f_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial A_i}{\partial \xi^j}, \quad (5.21)$$

o que leva às equações de movimento, derivadas das equações de Euler–Lagrange, serem dadas por:

$$f_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial V}{\partial \xi^i}. \quad (5.22)$$

Quando f_{ij} é não singular, existe uma inversa f^{ij} tal que:

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial V}{\partial \xi^j}, \quad (5.23)$$

e a estrutura dos parênteses de Poisson generalizados é, por sua vez, definida como:

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij}. \quad (5.24)$$

Por outro lado, quando f_{ij} é singular, isto é, não tem inversa, surgem vínculos. Estes vínculos podem ser tratados variacionalmente até que se obtenha uma lagrangiana sem vínculos, em um processo no qual variáveis não essenciais são identificadas e eliminadas através do uso das equações de movimento associadas aos vínculos, e a estrutura simplética f_{ij} é rediagonalizada para remover essas variáveis e manter a estrutura canônica. Assim, para uma lagrangiana de primeira ordem com M vínculos, dada por:

$$L = p_i \dot{q}^i - H(p, q) - \lambda^l \varphi_l(p, q), \quad (5.25)$$

onde λ^l são multiplicadores de lagrange e $\varphi_l(p, q)$ representam os vínculos, com $l = 1, \dots, M$, e as equações de movimento associadas aos vínculos são usadas para eliminar as variáveis não essenciais. Esse processo pode ser iterado até que se obtenha uma lagrangiana sem vínculos, semelhante à lagrangiana simplificada inicial.

O formalismo de Faddeev–Jackiw fornece uma maneira eficiente e direta de lidar com a quantização de sistemas dinâmicos. Ele simplifica o processo ao focar na estrutura canônica e evitar a categorização tradicional de vínculos, sendo particularmente útil para sistemas onde a aplicação direta do formalismo de Dirac é complicada ou impraticável [60, 134]. Assim, a incorporação do formalismo de Faddeev–Jackiw no estudo da não-comutatividade permite a possibilidade de deformar a álgebra original do espaço de fase clássico através da construção da matriz simplética f_{ij}^{-1} sem a necessidade de realizar os cálculos árduos dos parênteses de Poisson deformados $\{\xi^i, \xi^j\}$.

A abordagem simplética de Faddeev–Jackiw é amplamente utilizada em diversos campos, como mecânica clássica e quântica, teorias de calibre, matéria condensada, gravidade e teoria de cordas [157–169]. Uma lista recente de publicações envolvendo o formalismo simplético e a não-comutatividade, com foco em cosmologia, pode ser encontrada em [170–185].

5.4 Formalismo simplético generalizado

Para o estudo das não-comutatividades, podemos utilizar um formalismo simplético generalizado [186], ancorado no formalismo de Faddeev–Jackiw e no algoritmo de Barcelos–Wotzasek [187], e incorporar não-comutatividades no espaço de fase por meio de uma estrutura simplética estendida [188]. Seja $\tilde{\xi}^a = (\tilde{q}^i, \tilde{p}_i)$ as coordenadas do espaço de fase com uma estrutura simplética estendida dada por:

$$\tilde{f}_{ab} = \begin{pmatrix} \Theta_{ij} & \delta_{ij} + \Sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \Sigma_{ij} & \Pi_{ij} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

onde Θ_{ij} , Π_{ij} e Σ_{ij} representam as não-comutatividades associadas, respectivamente, às coordenadas generalizadas, aos momenta conjugados e aos termos mistos.

Para maior generalidade, adotamos a formulação de Faddeev–Jackiw para campos e sistemas contínuos. No caso em que $\tilde{f}_{ab}$ é não-singular (invertível), a matriz simplética inversa satisfaz:

$$\int \tilde{f}_{ab}(x, y) \tilde{f}^{bc}(y, z) dy = \delta_c^a \delta(x - z). \quad (5.27)$$

Buscamos, portanto, uma lagrangiana de primeira ordem $\tilde{\mathcal{L}}$ cuja estrutura simplética seja exatamente igual a $\tilde{f}_{ab}$. Assumindo o *ansatz* de FJ, temos:

$$\tilde{\mathcal{L}} = A_{\tilde{\xi}^a} \dot{\tilde{\xi}}^a - V(\tilde{\xi}), \quad (5.28)$$

o qual generaliza a Eq. (5.20) para o caso não-comutativo. Assim, ao assumir a lagrangiana na Eq. (5.28), podemos, variando funcionalmente a ação correspondente com $\tilde{\xi}^a \rightarrow \tilde{\xi}^a + \delta \tilde{\xi}^a$, integrando por partes e identificando $\tilde{f}_{ab}$ como o núcleo da estrutura simplética, obtemos:

$$\tilde{f}_{ab}(x, y) = \frac{\delta A_{\tilde{\xi}^b}(x)}{\delta \tilde{\xi}^a(y)} - \frac{\delta A_{\tilde{\xi}^a}(x)}{\delta \tilde{\xi}^b(y)}. \quad (5.29)$$

Dessa forma, a suposição da Eq. (5.28) juntamente com a definição da Eq. (5.29) garante que $\tilde{f}_{ab}$ representa a estrutura simplética do sistema. No entanto, as quantidades $A_{\tilde{\xi}a}$ ainda precisam ser determinadas. Para isso, impomos que a estrutura definida na Eq. (5.29) deva coincidir com a formulação não-comutativa em blocos dada na Eq. (5.26). Assim, utilizando as Eqs. (5.26), (5.27) e (5.29), obtemos um sistema de equações que permite a determinação das quantidades $A_{\tilde{\xi}a}$, a saber:

$$\Theta^{ij}B_{jk}(x, y) + (\delta^{ij} + \Sigma^{ij})A_{jk}(x, y) = \delta_k^i \delta(x - y), \quad (5.30)$$

$$A_{jk}(x, y)\Theta^{ji} + (\delta^{ij} + \Sigma^{ij})C_{jk}(x, y) = 0, \quad (5.31)$$

$$-(\delta^{ij} + \Sigma^{ij})B_{jk}(x, y) + \Pi^{ij}A_{jk}(x, y) = 0, \quad (5.32)$$

$$A_{kj}(x, y)(\delta^{ji} + \Sigma^{ji}) + \Pi^{ij}C_{jk}(x, y) = \delta_k^i \delta(x - y), \quad (5.33)$$

onde

$$A_{jk}(x, y) = \frac{\delta A_{\tilde{p}_j}(x)}{\delta \tilde{q}_k(y)} - \frac{\delta A_{\tilde{q}_k}(x)}{\delta \tilde{p}_j(y)}, \quad (5.34)$$

$$B_{jk}(x, y) = \frac{\delta A_{\tilde{q}_j}(x)}{\delta \tilde{q}_k(y)} - \frac{\delta A_{\tilde{q}_k}(x)}{\delta \tilde{q}_j(y)}, \quad (5.35)$$

$$C_{jk}(x, y) = \frac{\delta A_{\tilde{p}_j}(x)}{\delta \tilde{p}_k(y)} - \frac{\delta A_{\tilde{p}_k}(x)}{\delta \tilde{p}_j(y)}. \quad (5.36)$$

Como consequência, podemos construir uma lagrangiana de primeira ordem dada por:

$$\mathcal{L}_{NC} = A_{\tilde{\xi}a} \dot{\tilde{\xi}}^a - V(\tilde{\xi}), \quad (5.37)$$

onde as quantidades $A_{\tilde{\xi}a}$ agora são determinadas a partir da solução do sistema de equações da Eq. (5.33). Desse modo, pode-se aplicar tal formalismo simplético generalizado a um dado modelo em consideração para derivar um sistema de equações que possibilite a determinação da solução não-comutativa. A vantagem dessa abordagem é que ela fixa de maneira não arbitrária a transformação entre variáveis não-comutativas e comutativas, em contraste com outras tradicionais, em que tais transformações são introduzidas de forma *ad hoc*.

* * *

Concluimos, assim, nossa análise sobre a não-comutatividade, destacando os pontos essenciais que serão utilizados na construção de modelos de universo não-comutativos nos capítulos ulteriores. No próximo capítulo, apresentaremos uma discussão sobre os modelos homogêneos e anisotrópicos de Bianchi, com ênfase no modelo Bianchi I, que servirá como base para os modelos não-comutativos a serem desenvolvidos.

6 Modelos de universo homogêneos e anisotrópicos

*O espaço
resignado à sua simetria,
avança desigual nas direções.
Em sua eterna marcha,
preserva curvas e ângulos,
e deixa os lugares indistintos.*

6.1 Introdução aos modelos cosmológicos homogêneos e anisotrópicos

Na exposição da teoria da Relatividade Geral, realizada no Capítulo 2, foi dada ênfase à construção do modelo de universo homogêneo e isotrópico, partindo da suposição do princípio cosmológico até a formulação do modelo dinâmico FLRW. Neste contexto, o elemento de linha assume uma forma simétrica e simplificada, caracterizada por uma única função livre, o fator de escala $a(t)$, que varia com o tempo coordenado t . Este fator descreve a expansão ou contração do universo de maneira uniforme em todas as direções, em conformidade com a hipótese de isotropia, segundo a qual as propriedades físicas do universo são invariantes em qualquer direção.

No entanto, é possível construir modelos que dispensam a isotropia, mas ainda preservam a homogeneidade. Isto porque a isotropia não é uma condição necessária para a homogeneidade. Nesses modelos mais gerais, conhecidos como modelos homogêneos e anisotrópicos, o elemento de linha pode assumir formas mais complexas, envolvendo várias funções livres que variam ao longo do tempo. A importância de tais modelos reside na capacidade de descrever o universo primordial, sob a suposição de um início anisotrópico, no qual a expansão do universo possa ter ocorrido de forma não uniforme em diferentes direções [189–191]. Neste sentido, a discussão que se segue neste capítulo apresentará os modelos de Bianchi, que são exemplos de universos homogêneos e anisotrópicos, explorando brevemente suas características, com ênfase no modelo Bianchi I. É importante esclarecer que, embora o Capítulo 5 tenha introduzido o conceito de não-comutatividade, a análise desenvolvida aqui se restringe ao caso comutativo.

6.2 Apresentação dos Modelos de Bianchi

Os *modelos de Bianchi* [192], nomeados em homenagem ao matemático L. Bianchi [193], constituem uma classe de soluções cosmológicas dentro da Relatividade Geral. Esses modelos são caracterizados por simetrias espaciais específicas que garantem a homogeneidade das seções espaciais. Isso significa que cada ponto do espaço é indistinguível

de qualquer outro sob as transformações do grupo de simetria espacial, que preservam as propriedades espaciais.

Matematicamente, essas simetrias espaciais são descritas pelos *vetores de Killing*, denotados por ξ_i , os quais geram as *isometrias*, que são transformações que mantêm a métrica inalterada. Cada um dos modelos de Bianchi é distinguido por um conjunto específico de vetores de Killing. Os vetores de Killing são linearmente independentes e satisfazem a relação de comutação dada por:

$$[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij} \xi_k, \quad (6.1)$$

onde C^k_{ij} são as *constantes de estrutura*, que caracterizam a álgebra de Lie associada ao grupo de simetria espacial. Além disso, esses vetores satisfazem a equação de Killing, expressa por:

$$\mathcal{L}_{\xi_i} g_{\mu\nu} := \xi_i^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda} \partial_\nu \xi_i^\lambda + g_{\lambda\nu} \partial_\mu \xi_i^\lambda = 0, \quad (6.2)$$

onde $\mathcal{L}_{\xi_i}$ representa a derivada de Lie da métrica $g_{\mu\nu}$ ao longo do vetor ξ_i .

A classificação de Bianchi organiza os seus modelos em duas classes, de acordo com uma condição imposta a C^k_{ij} . A Classe A obedece à condição de que o traço da constante de estrutura é nulo ($C^i_{ij} = 0$), enquanto a Classe B não. Cada modelo é numerado utilizando um algarismo romano, que varia de I a IX, conforme a convenção tradicional. A classificação faz uso de quatro parâmetros fundamentais, derivados de uma reformulação conveniente das constantes de estrutura. Assim, as constantes C^k_{ij} podem ser escritas na forma:

$$C^k_{ij} = \epsilon_{ijl} C^{lk}, \quad (6.3)$$

onde ϵ_{ijl} é o símbolo de Levi-Civita, totalmente antissimétrico, e C^{ij} é uma matriz diagonalizável chamada de tensor de estrutura. Esta matriz pode ser decomposta em termos de uma parte simétrica n^{ij} e uma parte antissimétrica associada a um vetor a^k , da seguinte forma:

$$C^{ij} = n^{ij} + \epsilon^{ijk} a^k, \quad (6.4)$$

onde n^{ij} pode ser diagonalizado como $n^{ij} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$, com n_i representando a curvatura espacial na direção x^i , que pode ser positiva (1), negativa (-1) ou nula (0). Já a^k , relacionado à componente antissimétrica do tensor de estrutura, está associado à vorticidade do modelo e pode ser simplificado como $a^k = (a, 0, 0)$, sendo que um valor não nulo deste vetor representa uma rotação presente na geometria do espaço e com magnitude a . A Tabela 2 apresenta a classificação de Bianchi por meios dos parâmetros a , n_1 , n_2 e n_3 .

O elemento de linha dos modelos de Bianchi pode ser descrito de maneira geral utilizando a seguinte expressão:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + \gamma_{ij}(t) \omega^i \omega^j, \quad (6.5)$$

onde $\gamma_{ij}(t)$ é uma matriz simétrica dependente do tempo que descreve os fatores de escala associados às componentes espaciais da métrica, enquanto ω^i são *1-formas*, isto é, funções lineares das coordenadas espaciais associadas às simetrias do espaço no modelo considerado.

Tabela 2 – Classificação de Bianchi

Classe	Modelo	a	n_1	n_2	n_3
A	I	0	0	0	0
A	II	0	1	0	0
A	VI ₀	0	0	1	-1
A	VII ₀	0	1	1	0
A	VIII	0	1	1	-1
A	IX	0	1	1	1
B	III	1	0	1	-1
B	IV	1	0	0	1
B	V	1	0	0	0
B	VI _a	a	0	1	-1
B	VII _a	a	0	1	1

6.3 Estrutura e Dinâmica do Modelo Bianchi I

O modelo Bianchi I é um dos exemplos mais simples de universo homogêneo e anisotrópico. Ele é caracterizado pela ausência de curvatura espacial e diferentes taxas de expansão ou contração ao longo das três direções espaciais ortogonais entre si. O modelo costuma ser representado por três fatores de escala $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, correspondendo a expansões ou contrações independentes nas direções x , y e z , respectivamente. Desse modo, o elemento de linha é expresso como:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2, \quad (6.6)$$

com matriz de estrutura $\gamma_{ij}(t) = \text{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$ e 1-formas $\omega^i = (dx, dy, dz)$.

É conveniente reescrever os fatores de escala em função das variáveis de configuração $\beta_0(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$, chamadas *variáveis de Misner* [194–196], dadas por:

$$\ln(a_1) = \beta_0 + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \quad \ln(a_2) = \beta_0 + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \quad \ln(a_3) = \beta_0 - 2\beta_+. \quad (6.7)$$

Daí, é possível notar que a variável β_0 assume um papel de logaritmo do volume $V(t) = a^3(t)$ para um modelo isotrópico baseado em um fator de escala $a(t)$ que seja a média geométrica dos fatores de escala anisotrópicos, isto é:

$$a(t) = (a_1(t)a_2(t)a_3(t))^{1/3}, \quad (6.8)$$

visto que neste caso tem-se:

$$\beta_0 = \frac{1}{3}(\ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3) = \frac{1}{3} \ln(a_1 a_2 a_3) = \frac{1}{3} \ln V. \quad (6.9)$$

Assim, por meio dessa reparametrização pode-se considerar um novo conjunto de variáveis de configuração $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$, em que a primeira delas corresponde a um fator de escala isotrópico e as duas últimas são dois graus de liberdade independentes para a anisotropia. Portanto, pode-se escrever:

$$a_1(t) = a(t)e^{\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-}, \quad a_2(t) = a(t)e^{\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-}, \quad a_3(t) = a(t)e^{-2\beta_+}. \quad (6.10)$$

Após esta reparametrização, o elemento de linha dado pela Eq. (6.6) pode ser reescrito na forma:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[e^{2(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} dx^2 + e^{2(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} dy^2 + e^{-4\beta_+} dz^2 \right]. \quad (6.11)$$

Note da expressão acima que, se $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ tendem a zero ou valores constantes para um determinado valor de tempo, a métrica Bianchi I tende à métrica FLRW. Para verificar isso, considere que os parâmetros β_+ e β_- se tornem constantes com o passar do tempo, ou seja:

$$\beta_+ \rightarrow b_+, \quad \beta_- \rightarrow b_-, \quad (6.12)$$

onde b_+ e b_- são constantes correspondendo, respectivamente, aos limites assintóticos de isotropização dos parâmetros β_+ e β_- . Deste modo, o elemento de linha Bianchi I, dado pela Eq. (6.11), se torna:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[e^{2(b_+ + \sqrt{3}b_-)} dx^2 + e^{2(b_+ - \sqrt{3}b_-)} dy^2 + e^{-4b_+} dz^2 \right]. \quad (6.13)$$

E então podemos realizar a seguinte transformação de coordenadas:

$$\bar{x} = e^{b_+ + \sqrt{3}b_-} x, \quad \bar{y} = e^{b_+ - \sqrt{3}b_-} y, \quad \bar{z} = e^{-2b_+} z, \quad (6.14)$$

onde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são novas coordenadas cartesianas com os domínios usuais. Em termos das novas coordenadas, o elemento de linha da métrica Bianchi I, Eq. (6.13), assume a forma:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2), \quad (6.15)$$

que corresponde ao elemento de linha isotrópico do modelo FLRW. Assim, o modelo Bianchi I pode ser entendido como uma generalização anisotrópica do modelo FLRW plano. Pode-se, portanto, especular que a equação da métrica Bianchi I original corresponda a uma fase anisotrópica no universo primordial, enquanto a equação resultante represente a fase isotrópica no universo atual, e o modelo poderia ser usado para descrever essa transição de fases.

Agora, para estudar a dinâmica do modelo Bianchi I, partimos da ação de Einstein-Hilbert sem fontes de matéria ou constante cosmológica. Esta ação é dada por:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (6.16)$$

onde g é o determinante da métrica e R é o escalar de Ricci.

O modelo Bianchi I, apesar de anisotrópico, possui uma simetria residual sob translações espaciais, e é possível aproveitá-la antes de realizar a variação da ação, simplificando assim a obtenção das equações de movimento. Dito isso, considerando que $N(t)$ é função apenas do tempo, encontra-se que o determinante da métrica Bianchi é dado por:

$$g = -N^2(t)a^6(t), \quad (6.17)$$

enquanto o escalar de Ricci R para essa métrica é:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{N^3 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{\dot{\beta}_+^2}{N^2} + \frac{\dot{\beta}_-^2}{N^2} \right). \quad (6.18)$$

Inserindo-se as Eqs. (6.17) e (6.18) na Eq. (6.16), e efetuando-se as integrações por partes e simplificações, obtém-se que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{N} a^3 \left[- \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 \right], \quad (6.19)$$

onde o símbolo de ponto ($\dot{}$) denota a derivada temporal.

Daí, os momenta canonicamente conjugados às variáveis a , β_+ e β_- são, respectivamente, as variáveis p_a , p_+ e p_- , dadas por:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{6a\dot{a}}{N}, \quad p_+ = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_+} = \frac{6a^3 \dot{\beta}_+}{N}, \quad p_- = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_-} = \frac{6a^3 \dot{\beta}_-}{N}. \quad (6.20)$$

A densidade hamiltoniana $\mathcal{H}$ é obtida através da transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - \mathcal{L}, \quad (6.21)$$

e pode ser escrita como:

$$H = N \left[-\frac{p_a^2}{12a} + \frac{p_+^2}{12a^3} + \frac{p_-^2}{12a^3} \right]. \quad (6.22)$$

As equações de evolução podem ser derivadas usando as equações de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (6.23)$$

das quais resultam as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{Np_a}{6a}, \quad \dot{\beta}_+ = \frac{Np_+}{6a^3}, \quad \dot{\beta}_- = \frac{Np_-}{6a^3}, \\ \dot{p}_a &= N \left(-\frac{p_a^2}{12a^2} + \frac{p_+^2 + p_-^2}{4a^4} \right), \quad \dot{p}_+ = 0, \quad \dot{p}_- = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

as quais podem ser combinadas no seguinte sistema de equações:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{Np_a}{6a^2}, \quad \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} = -N^2 \left(\frac{p_+^2 + p_-^2}{24a^5} \right), \quad \ddot{\beta}_+ = \ddot{\beta}_- = 0, \quad (6.25)$$

o qual descreve a dinâmica do fator de escala isotrópico e a evolução das anisotropias.

Encontrar uma solução para o sistema de equações acopladas do modelo Bianchi I, Eq. (6.25), é bastante complicado. No entanto, há uma solução particular para o caso de vácuo, proposta por E. Kasner [197], que é descrita por uma métrica cujas escalas espaciais evoluem dadas por expoentes constantes. O elemento de linha dessa métrica, chamada de *métrica de Kasner*, é dado por:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + t^{2k_0} dx^2 + t^{2k_+} dy^2 + t^{2k_-} dz^2, \quad (6.26)$$

onde k_0 , k_+ e k_- são constantes chamadas de *expoentes de Kasner*, que satisfazem as seguintes restrições, conhecidas como *condições de Kasner*:

$$k_0 + k_+ + k_- = 1, \quad k_0^2 + k_+^2 + k_-^2 = 1, \quad (6.27)$$

que garantem que as escalas espaciais evoluam de forma equilibrada e que a curvatura do espaço-tempo se mantenha consistente com as equações de campo de Einstein em um universo vazio.

O elemento de linha da métrica de Kasner, Eq. (6.26), pode ser obtido através do elemento de linha de Bianchi I na parametrização de Misner, Eq. (6.11), assumindo-se que as variáveis de configuração a , β_+ e β_- sejam dadas por:

$$a(t) = t^{\frac{k_0 + k_+ + k_-}{3}}, \quad \beta_+(t) = \left(\frac{k_0 + k_+ - 2k_-}{6} \right) \ln t, \quad \beta_-(t) = \left(\frac{k_0 - k_+}{2\sqrt{3}} \right) \ln t, \quad (6.28)$$

o que pode ser verificado substituindo-se Eq. (6.28) em Eq. (6.11).

O modelo Bianchi I na presença de matéria não apresenta solução tão direta quanto a solução de Kasner para o vácuo. Não obstante, é muito importante considerar casos mais realistas, como por exemplo, a presença de radiação, tão relevante no universo primordial. Neste sentido, vários modelos com métrica Bianchi I foram propostos no âmbito da relatividade geral, no nível clássico ou quântico [198–214]. O capítulo seguinte será devotado a expandir essas considerações e construir um novo modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito e explorar suas implicações.

7 Modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito de radiação

Conforme discutido no capítulo anterior, o modelo Bianchi I pode ser utilizado para descrever um possível cenário inicial homogêneo e anisotrópico do universo primordial, que com o tempo se tornou homogêneo e isotrópico, como indicam as medições cosmológicas do universo atual. A abordagem mais simples nesse contexto é a solução exata de Kasner, que considera o universo vazio de matéria. No entanto, essa solução não é adequada para descrever o balanço de energia atual ou as eras anteriores pelas quais o universo aparentemente passou. É necessário incluir termos de matéria e energia para que o modelo se torne mais compatível com o comportamento do universo em diferentes eras cosmológicas. Nesse sentido, podemos considerar um fluido de radiação para modelar as primeiras etapas do universo, o que se mostra bastante adequado.

À medida que retrocedemos ainda mais na fase primordial do universo, as escalas de comprimento diminuem drasticamente enquanto as escalas de energia se elevam a níveis extremos, sendo necessário o uso de uma teoria que incorpore efeitos quânticos dentro de um regime relativístico. É, portanto, necessário utilizar uma teoria de gravidade quântica, embora nenhuma teoria completamente satisfatória tenha sido formulada até o momento. Além disso, mudanças mais profundas podem ocorrer ao se considerar topologias alternativas do universo [215].

Neste capítulo, discuto um modelo cosmológico que busca incorporar tais considerações, cuja formulação foi inicialmente apresentada em coautoria com meu orientador, conforme publicado em [216], sendo aqui apresentado com maior detalhamento no contexto desta tese. Propomos uma dinâmica de evolução do universo que parte de um estado homogêneo e anisotrópico com seções espaciais planas, convergindo para a isotropia observada atualmente. Adicionamos ao modelo a suposição de que o espaço de fase possui uma estrutura não-comutativa, que se torna mais significativa quanto mais próxima da fase primordial do universo. Essa não-comutatividade é compatível com a abordagem quântica da quantização por deformação de Moyal. Contudo, exploramos o cenário em que esses efeitos quânticos na escala de Planck já são diluídos, deixando apenas um resíduo não-comutativo.

Discutimos principalmente como essa não-comutatividade residual pode descrever a expansão acelerada do universo, atuando como um impulsionador da taxa de expansão para um determinado conteúdo de matéria. As principais explicações levantadas para esse fenômeno geralmente o atribuem a um novo tipo de matéria com propriedades distintas da matéria convencional [217] ou a modificações na natureza geométrica através de teorias gravitacionais que diferem da Relatividade Geral [218]. A abordagem aqui empregada já foi discutida em trabalhos anteriores para outros modelos [219–231] e se aproxima dessa última, pois atribui à geometria não-comutativa a causa da expansão acelerada, embora

mantendo a Relatividade Geral.

Neste capítulo, consideramos a presença da não-comutatividade na explicação da expansão acelerada do universo. Em particular, investigamos se a não-comutatividade entre variáveis métricas e variáveis de fluido pode alterar a isotropização do modelo. Para isso, construímos um modelo Bianchi I não-comutativo, homogêneo e anisotrópico, acoplado a um fluido perfeito de radiação, utilizando a Relatividade Geral como a teoria gravitacional. Nossa principal motivação é determinar se o presente modelo tende a um modelo não-comutativo homogêneo e isotrópico do tipo FLRW em sua evolução. Mais especificamente, buscamos estabelecer como os parâmetros e condições iniciais do modelo influenciam quantitativamente a isotropização deste sistema.

Realizamos um estudo da dinâmica desse modelo resolvendo numericamente as equações de evolução para os fatores de escala e comparando os resultados com o caso comutativo. Além disso, analisamos como cada parâmetro contribui para a expansão e isotropização do universo, e fazemos estimativas das ordens de grandeza do parâmetro não-comutativo para diferentes fatores de escala. Por fim, encerramos com uma rápida comparação da dinâmica do modelo considerando diferentes tipos de fluidos perfeitos.

7.1 O modelo Bianchi I comutativo para um fluido perfeito genérico

Antes de incluir a não-comutatividade no modelo cosmológico Bianchi I, é necessário construir o modelo comutativo utilizando os parênteses de Poisson usuais. Para isso, empregaremos a formulação hamiltoniana canônica, onde o setor geométrico será descrito pelo formalismo ADM, que decompõe o espaço-tempo em folhas espaciais (cf. Capítulo 3), e o setor de matéria será tratado pelo formalismo de Schutz, que permite uma representação conveniente da dinâmica de fluidos perfeitos (cf. Capítulo 4). Alguns resultados já foram detalhadamente deduzidos em capítulos anteriores, e, portanto, não serão repetidos aqui.

Como visto no capítulo anterior, o elemento de linha da métrica de Bianchi I pode ser escrito em termos das variáveis de Misner da seguinte forma:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) \left[e^{2(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} dx^2 + e^{2(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} dy^2 + e^{-4\beta_+} dz^2 \right], \quad (7.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala isotrópico e $\beta_{\pm}(t)$ são parâmetros de escala anisotrópicos.

A ação total, que inclui tanto o setor gravitacional quanto o setor de matéria representado por um fluido perfeito, pode ser descrita pelo seguinte princípio variacional, já discutido na Eq. (4.47), dado por:

$$S = S_g + S_f = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\kappa p), \quad (7.2)$$

onde $S_g = \int d^4x \mathcal{L}_g$, com $\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}R$, corresponde ao setor gravitacional, e $S_f = \int d^4x \mathcal{L}_f$, com $\mathcal{L}_f = \sqrt{-g}p$, representa o setor de matéria para um fluido perfeito. Ambos os setores estão relacionados através da constante de acoplamento κ da forma usual.

Substituindo na Eq. (7.2) o determinante da métrica (cf. Eq. (6.17)), o escalar de Ricci (cf. Eq. (6.18)), a expressão da pressão na representação de Schutz (cf. Eq. (4.25)), e adotando um sistema de coordenadas comóveis com o fluido, onde a entalpia é dada por (cf. Eq. (4.69)), a ação total toma a forma:

$$S = \int d^4x a^3 \left[-\frac{6\dot{a}^2}{Na^2} + \frac{6\dot{\beta}_+^2}{N} + \frac{6\dot{\beta}_-^2}{N} + 2\kappa N^{-\frac{1}{\omega}} \frac{\omega}{(\omega+1)^{1+\frac{1}{\omega}}} (\dot{\phi} + \theta\dot{s})^{1+\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{s}{\omega}} \right], \quad (7.3)$$

onde $S = \int d^4x \mathcal{L}$, com densidade lagrangiana total $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f$. Isto permite calcular os momenta canonicamente conjugados às variáveis a , β_+ , β_- , ϕ , s , os quais são escritos como:

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}, & p_+ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_+} = \frac{12a^3\dot{\beta}_+}{N}, & p_- &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_-} = \frac{12a^3\dot{\beta}_-}{N}, \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (2\kappa)^\omega \frac{N^{-1/\omega}}{(1+\omega)^{1/\omega}} a^3 (\dot{\phi} + \theta\dot{s})^{1/\omega} e^{-s/\omega}, & p_s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \theta p_\phi, \end{aligned} \quad (7.4)$$

A densidade hamiltoniana $\mathcal{H}$ é definida via transformação de Legendre:

$$H = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- + p_\phi \dot{\phi} + p_s \dot{s} - \mathcal{L}, \quad (7.5)$$

e resulta na expressão:

$$\mathcal{H}(p_a, p_+, p_-, p_\phi, a, s) = N \left[a^{-3} \left(-\frac{p_a^2 a^2}{24} + \frac{p_+^2}{24} + \frac{p_-^2}{24} \right) + (2\kappa)^{-\omega} a^{-3\omega} e^s p_\phi^{1+\omega} \right]. \quad (7.6)$$

Por sua vez, fazendo-se uso da transformação canônica de Lapchinskii e Rubakov (cf. Capítulo 4), dada por:

$$T = p_s e^{-s} p_\phi^{-(1+\omega)} (2\kappa)^{1/\omega}, \quad p_T = p_\phi^{1+\omega} e^s (2\kappa)^{-\omega}, \quad \bar{\phi} = \phi - (1+\omega) \frac{p_s}{p_\phi}, \quad \bar{p}_\phi = p_\phi, \quad (7.7)$$

pode-se incluir um novo parâmetro T como um tempo intrínseco e seu momentum p_T e então realizar a mudança da densidade hamiltoniana para:

$$\mathcal{H}(p_a, p_+, p_-, p_T, a) = N \left[a^{-3} \left(-\frac{p_a^2 a^2}{24} + \frac{p_+^2}{24} + \frac{p_-^2}{24} \right) + a^{-3\omega} p_T \right]. \quad (7.8)$$

Finalmente, adotando o calibre cosmológico $N = 1$, a hamiltoniana total do sistema torna-se:

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{24a} + \frac{p_+^2}{24a^3} + \frac{p_-^2}{24a^3} + a^{-3\omega} p_T. \quad (7.9)$$

Pode-se encontrar a dinâmica do modelo através das equações de Hamilton, que são dadas por:

$$\dot{a} = \{a, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} = -\frac{1}{12} \frac{p_a}{a}, \quad (7.10)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\frac{1}{24} \frac{p_a^2}{a^2} + \frac{1}{8} \frac{p_+^2}{a^4} + \frac{1}{8} \frac{p_-^2}{a^4} + 3\omega a^{-3(1+\omega)} p_T, \quad (7.11)$$

$$\dot{\beta}_{\pm} = \{\beta_{\pm}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\pm}} = \frac{1}{12} \frac{p_{\pm}}{a^3}, \quad (7.12)$$

$$\dot{p}_{\pm} = \{p_{\pm}, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_{\pm}} = 0, \quad (7.13)$$

$$\dot{T} = \{T, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_T} = a^{-3\omega}, \quad (7.14)$$

$$\dot{p}_T = \{p_T, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} = 0. \quad (7.15)$$

A Eq. (7.15) pode ser integrada para fornecer:

$$p_T = \rho_0, \quad (7.16)$$

onde ρ_0 é uma constante de integração identificada como a densidade de energia do fluido em um certo instante t_0 . Esta correspondência ocorre porque o termo $\mathcal{H}_f = a^{-3\omega} p_T$ na hamiltoniana, Eq. (7.9), tem a forma de uma energia total do fluido $E_f = \rho a^3$, com ρ obedecendo à relação:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (7.17)$$

que é a expressão para a densidade de energia de um fluido perfeito com equação de estado barotrópica $p = \omega \rho$.

Por sua vez, a integração das Eqs. (7.13) fornece novas constantes $\zeta_{\pm}$ ligadas à anisotropia, dadas pela seguinte relação:

$$p_{\pm} = \sqrt{\zeta_{\pm}}. \quad (7.18)$$

Note que os termos associados às anisotropias, $\mathcal{H}_{\pm} = p_{\pm}^2 a^{-3}/24$, que aparecem na Eq. (7.9), têm caráter estritamente cinético e descrevem a contribuição dinâmica das anisotropias ao sistema. Embora matematicamente apresentem uma dependência em a^{-3} similar à densidade de energia de um fluido de matéria rígida ($\omega = 1$), tal semelhança é apenas formal e não representa uma equivalência física. Diferentemente dos termos de fluido que derivam de potenciais associados à matéria, os termos $\mathcal{H}_{\pm}$ provêm diretamente da parte cinética da ação e refletem exclusivamente os graus de liberdade anisotrópicos.

Ao se diferenciar a Eq. (7.10) em relação ao tempo e substituir nela as Eqs. (7.11), (7.16) e (7.18), obtém-se a equação de evolução para o fator de escala isotrópico:

$$\ddot{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\zeta_+ + \zeta_-}{48a^5} + \frac{\omega \rho_0}{2a^{3\omega+2}} \right]. \quad (7.19)$$

Por outro lado, ao se tomar a derivada temporal da Eq. (7.12) e substituir o valor de $p_{\pm}$ dado pela Eq. (7.18), obtém-se a equação de evolução para os parâmetros anisotrópicos $\beta_{\pm}$:

$$\ddot{\beta}_{\pm} = -\frac{\sqrt{\zeta_{\pm}}}{4a^4} \dot{a}, \quad (7.20)$$

a qual pode ser reescrita de forma mais conveniente, utilizando novamente a Eq. (7.12), como:

$$3H\dot{\beta}_{\pm} + \ddot{\beta}_{\pm} = 0, \quad (7.21)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble.

Desse modo, tem-se um sistema de três equações para $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$, que devem ser complementadas por condições iniciais adequadas. Essas condições são delimitadas por vínculos que garantem a fisicalidade da solução. O primeiro vínculo é obtido impondo a condição da super-hamiltoniana $\mathcal{H} = 0$. Aplicando esta condição à Eq. (7.9), e usando as Eqs. (7.10), (7.16) e (7.18), obtém-se:

$$H^2 = \frac{\zeta_+ + \zeta_-}{144a^6} + \frac{\rho_0 a^{-3(1+\omega)}}{6}, \quad (7.22)$$

que é uma equação do tipo de Friedmann para $H = \dot{a}/a$. Os demais vínculos podem ser obtidos da combinação das Eqs. (7.12) e (7.18), e são expressos como:

$$\dot{\beta}_{\pm} = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{\zeta_{\pm}}}{a^3}. \quad (7.23)$$

Portanto, a solução do sistema gravitacional Bianchi I acoplado a um fluido perfeito será dada pela solução de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ para o sistema de Eqs. (7.19) e (7.21), sujeitos aos vínculos definidos pelas Eqs. (7.22) e (7.23).

7.2 O modelo Bianchi I não-comutativo para um fluido perfeito genérico

Para a construção do nosso modelo Bianchi I não-comutativo, consideramos que a nova densidade hamiltoniana $\mathcal{H}_{\text{nc}}$ mantém a mesma forma funcional daquela do modelo comutativo, conforme apresentada na Eq. (7.8). Desse modo, em termos das variáveis não-comutativas, denotadas pelo subscrito nc, podemos escrever:

$$\mathcal{H}_{\text{nc}} = -\frac{p_{a_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}} + \frac{p_{+_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}^3} + \frac{p_{-_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}^3} + a_{\text{nc}}^{-3\omega} p_{T_{\text{nc}}}, \quad (7.24)$$

onde escolhemos o calibre $N_{\text{nc}} = 1$, o que simplifica as equações dinâmicas mantendo a generalidade necessária para a análise.

As novas variáveis nc devem obedecer a relações de comutação modificadas, descritas por parênteses de Poisson deformados. Neste modelo, impomos que as variáveis não-comutativas $(a_{\text{nc}}, p_{\text{nc}}, T_{\text{nc}}, p_{T_{\text{nc}}})$ satisfaçam os seguintes parênteses de Poisson deformados:

$$\{a_{\text{nc}}, p_{T_{\text{nc}}}\} = \{T_{\text{nc}}, p_{a_{\text{nc}}}\} = \gamma, \quad (7.25)$$

além dos parênteses de Poisson usuais:

$$\{a_{\text{nc}}, p_{a_{\text{nc}}}\} = \{\beta_{\pm_{\text{nc}}}, p_{\pm_{\text{nc}}}\} = \{T_{\text{nc}}, p_{T_{\text{nc}}}\} = 1, \quad (7.26)$$

com todas as outras combinações sendo nulas. O termo γ na Eq. (7.25) representa o parâmetro não-comutativo do nosso modelo. Como estamos considerando a não-comutatividade como um efeito residual no universo atual, assumimos que γ é muito pequeno ($|\gamma| \ll 1$). Dessa forma, γ será considerado até a primeira ordem, exceto quando indicado em contrário.

Para simplificar a descrição do modelo não-comutativo, realizamos um deslocamento de Bopp (cf. Capítulo 5), de modo a introduzir transformações canônicas que conectam as variáveis não-comutativas $(a_{\text{nc}}, p_{a_{\text{nc}}}, \beta_{\pm_{\text{nc}}}, p_{\pm_{\text{nc}}}, T_{\text{nc}}, p_{T_{\text{nc}}})$ a um novo conjunto de variáveis comutativas $(a_c, p_{a_c}, \beta_{\pm_c}, p_{\pm_c}, T_c, p_{T_c})$. Essas variáveis comutativas obedecem os parênteses de Poisson usuais, facilitando o tratamento matemático do modelo. Assim, considerando os parênteses de Poisson deformados da Eq. (7.25), as seguintes transformações conectam as variáveis não-comutativas às comutativas:

$$\begin{aligned} a_{\text{nc}} &\rightarrow a_c + \frac{\gamma}{2}T_c, & p_{a_{\text{nc}}} &\rightarrow p_{a_c} + \frac{\gamma}{2}p_{T_c}, \\ \beta_{\pm_{\text{nc}}} &\rightarrow \beta_{\pm_c}, & p_{\pm_{\text{nc}}} &\rightarrow p_{\pm_c}, \\ T_{\text{nc}} &\rightarrow T_c + \frac{\gamma}{2}a_c, & p_{T_{\text{nc}}} &\rightarrow p_{T_c} + \frac{\gamma}{2}p_{a_c}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde o subscrito c denota as variáveis comutativas. Essas transformações dadas pelas Eqs. (7.27) são consistentes com a nova álgebra dos parênteses de Poisson Eqs. (7.25) e (7.26) até a primeira ordem em γ , quando se utilizam os parênteses usuais para as variáveis comutativas. É importante destacar que essas transformações não são únicas, e outras também poderiam ser propostas.

Com essas transformações, podemos reescrever a densidade hamiltoniana não-comutativa total $\mathcal{H}_{\text{nc}}$, dada pela Eq. (7.24), em termos das variáveis comutativas apresentadas nas Eqs. (7.27). Assim, obtém-se que:

$$\begin{aligned} H_{\text{nc}} = & -\frac{\left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2}p_{T_c}\right)^2}{24\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)} + \frac{p_{+c}^2}{24\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^3} + \frac{p_{-c}^2}{24\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^3} \\ & + \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{-3\omega} \left(p_{T_c} + \frac{\gamma}{2}p_{a_c}\right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

A partir da expressão da hamiltoniana não-comutativa em termos das variáveis comutativas, Eq. (7.28), calculamos as equações de Hamilton por meio dos parênteses de Poisson usuais. Isso resulta no seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\dot{a}_c = \{a_c, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial p_{a_c}} = -\frac{1}{12} \left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2}p_{T_c}\right) \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{-1} + \frac{\gamma}{2} \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{-3\omega}, \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{a_c} = \{p_{a_c}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = & -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial a_c} \\ = & -\frac{\left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2}p_{T_c}\right)^2}{24\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^2} + \frac{1}{8} \frac{p_{+c}^2 + p_{-c}^2}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^4} + 3\omega \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c\right)^{-3\omega-1} \left(p_{T_c} + \frac{\gamma}{2}p_{a_c}\right), \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\dot{\beta}_{\pm c} = \{\beta_{\pm c}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial p_{\pm c}} = \frac{1}{12} \frac{p_{\pm c}}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^3}, \quad (7.31)$$

$$\dot{p}_{\pm c} = \{p_{\pm c}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial \beta_{\pm c}} = 0, \quad (7.32)$$

$$\dot{T}_c = \{T_c, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial p_{T_c}} = -\frac{\gamma}{24} \frac{p_{a_c} + \frac{\gamma}{2} p_{T_c}}{a_c + \frac{\gamma}{2} T_c} + \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^{-3\omega}, \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{T_c} &= \{p_{T_c}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial T_c} \\ &= \frac{\gamma}{2} \left[-\frac{\left(p_{a_c} + \frac{\gamma}{2} p_{T_c}\right)^2}{24 \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^2} + \frac{1}{8} \frac{p_{+c}^2 + p_{-c}^2}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^4} + 3\omega \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^{-3\omega-1} \left(p_{T_c} + \frac{\gamma}{2} p_{a_c}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.34)$$

Para encontrar o comportamento dos fatores de escala comutativos, é necessário combinar as Eqs. (7.29)–(7.34) para obter um conjunto de quatro equações diferenciais para $a_c(t)$, $\beta_{+c}(t)$, $\beta_{-c}(t)$, $T_c(t)$ e suas respectivas derivadas temporais. Começando pela inspeção das Eqs. (7.30) e (7.34), encontramos que:

$$\dot{p}_{T_c} = \frac{\gamma}{2} \dot{p}_{a_c}, \quad (7.35)$$

o que imediatamente resulta em:

$$p_{T_c} = \frac{\gamma}{2} p_{a_c} + C, \quad (7.36)$$

onde C é uma constante de integração. Fisicamente, para o caso comutativo ($\gamma = 0$), C representa a densidade de energia do fluido para um determinado instante, sendo, portanto, uma quantidade positiva. Ademais, integrando as Eqs. (7.32), encontra-se:

$$p_{\pm c} = \sqrt{C_{\pm}}, \quad (7.37)$$

onde C_+ e C_- são constantes que não possuem um significado físico claro, mas estão conectadas aos graus de liberdade das anisotropias. A escolha de apresentá-las na forma $\sqrt{C_{\pm}}$ se dá em virtude de p_+ e p_- aparecem quadraticamente na hamiltoniana.

Agora, combinando as Eqs. (7.29) e (7.33), obtemos a seguinte equação para a evolução temporal do parâmetro $T_c(t)$:

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma}{2} \dot{a}_c + \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^{-3\omega}. \quad (7.38)$$

Por outro lado, das Eqs. (7.29) e (7.36), podemos obter uma expressão para p_{a_c} , dada por:

$$p_{a_c} = -12\dot{a}_c a_c - 6\gamma \dot{a}_c T_c + 6\gamma a_c \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c\right)^{-3\omega} - \frac{\gamma}{2} C, \quad (7.39)$$

A equação de aceleração para o fator de escala isotrópico pode ser encontrada derivando a Eq. (7.29) em relação ao tempo e substituindo na expressão resultante as

Eqs. (7.30), (7.33), (7.36), e (7.39). O cálculo é extenso, mas direto, e resulta na seguinte expressão:

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{2} \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-1} \left[\dot{a}_c^2 + \frac{(1-3\omega)\gamma\dot{a}_c}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{3\omega}} + \frac{1}{48} \frac{C_+ + C_-}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^4} + \frac{1}{2} \frac{C\omega}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{3\omega+1}} \right], \quad (7.40)$$

Da mesma forma, tomando-se a derivada temporal da Eq. (7.31) e usando a Eq. (7.37), obtemos:

$$\ddot{\beta}_{\pm c} = -\frac{1}{4} \left(\dot{a}_c + \frac{\gamma}{2} \dot{T}_c \right) \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-4} \sqrt{C_{\pm}}, \quad (7.41)$$

expressões essas que podem ser reescritas de forma conveniente ao se utilizar novamente a Eq. (7.31). O resultado são duas equações idênticas para os fatores de escala anisotrópicos, dadas por:

$$3H \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-1} \left[a_c + \frac{\gamma}{2} H \left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{-3\omega} \right] \dot{\beta}_{\pm c} + \ddot{\beta}_{\pm c} = 0, \quad (7.42)$$

onde $H = \dot{a}_c/a_c$ é o parâmetro de Hubble para o caso comutativo. Essas Eqs. (7.42) fornecem a evolução dos fatores de escala anisotrópicos.

Com isso, temos agora um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias — Eqs. (7.38), (7.40) e (7.42) — para determinar a dinâmica das quatro variáveis $a_c(t)$, $\beta_{\pm c}(t)$ e $T_c(t)$. Para resolver esse sistema, é necessário fornecer condições iniciais para $a_c(t)$, $\dot{a}_c(t)$, $\beta_{\pm c}(t)$, $\dot{\beta}_{\pm c}(t)$ e $T_c(t)$. Ao definirmos $\gamma = 0$ nas Eqs. (7.38), (7.40) e (7.42), recuperamos as equações de evolução do modelo Bianchi comutativo no calibre $N = 1$.

Além do sistema de equações, o modelo está sujeito a vínculos, que delimitam as condições iniciais fisicamente aceitáveis. Esses vínculos são equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis do nosso modelo. O primeiro vínculo pode ser calculado ao impor o vínculo da super-hamiltoniana $\mathcal{H}_{nc} = 0$. Fazendo isso na Eq. (7.28) e utilizando as Eqs. (7.36), (7.37) e (7.39), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}_c^2 a_c^2}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)} + \frac{1}{2} \gamma T_c \dot{a}_c^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma \dot{a}_c}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{3\omega-1}} - \frac{1}{288} \frac{C_+ + C_-}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3} - \frac{1}{12} \frac{C}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^{3\omega}} = 0. \quad (7.43)$$

Além disso, duas outras equações de vínculo emergem ao se considerar a combinação das Eqs. (7.31) e (7.37), resultando em:

$$\dot{\beta}_{\pm c} = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{C_{\pm}}}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2} T_c \right)^3}, \quad (7.44)$$

Portanto, obtemos um sistema dado pelas Eqs. (7.38), (7.40) e (7.42), sujeito aos vínculos dados pelas Eqs. (7.43) e (7.44), para o qual devemos procurar soluções. Vale

ênfatisar que, para o presente modelo não-comutativo, as variáveis físicas são os fatores de escala $a_{\text{nc}}(t)$ e $\beta_{\pm\text{nc}}(t)$, definidos por:

$$a_{\text{nc}}(t) = a_c(t) + \frac{\gamma}{2}T_c(t), \quad \beta_{\pm\text{nc}}(t) = \beta_{\pm c}(t), \quad (7.45)$$

quantidades essas provenientes da Eq. (7.27). Isso significa que, após resolver o sistema de Eqs. (7.38), (7.40) e (7.42), sujeito aos vínculos dados pelas Eqs. (7.43) e (7.44), devemos combinar as variáveis comutativas conforme a Eq. (7.45) para determinar os fatores de escala físicos do modelo. Na próxima seção, avaliaremos essas quantidades para o caso de um fluido perfeito específico.

7.3 O modelo Bianchi I não-comutativo para um fluido perfeito de radiação

O sistema de Eqs. (7.38), (7.40) e (7.42) depende do valor de ω , ou seja, da escolha do fluido perfeito que representa o conteúdo de matéria do universo. Neste trabalho, escolheremos o valor $\omega = 1/3$, que representa um fluido perfeito de radiação. Esta escolha é apropriada para descrever o universo primitivo, quando este tipo de matéria era dominante [79–82]. Assim, investigaremos como o modelo Bianchi I com radiação se comporta com a inclusão da não-comutatividade. Com esta escolha, o sistema de equações diferenciais simplifica-se para:

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{2} \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{-1} \left[\dot{a}_c^2 + \frac{1}{48} \frac{C_+ + C_-}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^4} + \frac{1}{6} \frac{C}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^2} \right], \quad (7.46)$$

$$3H \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{-1} \left[a_c + \frac{\gamma}{2}H \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{-1} \right] \dot{\beta}_{\pm c} + \ddot{\beta}_{\pm c} = 0, \quad (7.47)$$

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma}{2} \dot{a}_c + \left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^{-1}, \quad (7.48)$$

Por sua vez, a equação de vínculo advinda da super-hamiltoniana, Eq. (7.43), torna-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}_c^2 a_c^2}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)} + \frac{1}{2} \gamma \dot{a}_c^2 (T_c + 1) - \frac{1}{288} \frac{C_+ + C_-}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)^3} - \frac{1}{12} \frac{C}{\left(a_c + \frac{\gamma}{2}T_c \right)} = 0, \quad (7.49)$$

enquanto as outras duas equações de vínculo, Eqs. (7.44), permanecem inalteradas.

Portanto, precisamos resolver o sistema de quatro equações diferenciais ordinárias Eqs. (7.46), (7.47) e (7.48), sujeito aos três vínculos Eqs. (7.44) e (7.49). Infelizmente, não conseguimos encontrar soluções analíticas para este sistema. Assim, recorreremos a soluções numéricas. Para investigar como as soluções dependem de cada parâmetro γ , C , $C_{\pm}$ e de cada condição inicial $a_c(0)$, $\dot{a}_c(0)$, $\beta_{\pm}(0)$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0)$, variamos esses parâmetros ou condições iniciais um a um, mantendo os demais fixos. Por simplicidade, não estudaremos como as soluções dependem da condição inicial $T_c(0)$, que será fixada como $T_c(0) = 0$. Realizamos

este estudo para um grande número de valores distintos de cada parâmetro ou condição inicial. Observe ainda que abandonaremos o subscrito c em $\beta_{\pm}$, em virtude da Eq. (7.45). Assumimos que, sempre que não estivermos estudando as condições iniciais $a_c(0)$ e $\beta_{\pm}(0)$, elas assumem os seguintes valores padrão:

$$a_c(0) = 1, \quad \beta_{\pm}(0) = 1. \quad (7.50)$$

Para o estudo, consideramos todas as condições iniciais $a_c(0)$, $\dot{a}_c(0)$, $\beta_{\pm}(0)$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0)$ como positivas. A fim de garantir a consistência física dessas condições, ao variar um parâmetro ou condição inicial, fixamos todas as demais grandezas e resolvemos as equações de vínculo, Eqs. (7.44) e (7.49) para determinar um valor fisicamente admissível para o parâmetro ou condição em estudo. Em seguida, resolvemos as equações dinâmicas considerando esse parâmetro ou condição inicial como variável livre. No estudo da variação de $\dot{a}_c(0)$, o parâmetro C é deixado livre; no caso de $\dot{\beta}_{\pm}(0)$, variam-se os parâmetros $C_{\pm}$. Para todos os demais parâmetros e condições iniciais, as demais grandezas podem ser livremente especificadas.

Para estudar como os fatores de escala dependem de cada parâmetro ou condição inicial do modelo, plotamos dois tipos de gráficos para cada caso investigado: um gráfico $a_{nc} \times t$ e outro gráfico $\beta_{+} \times t$. O comportamento de β_{-} é qualitativamente semelhante ao de β_{+} , sendo idêntico nos casos em que $C_{+} = C_{-}$, $\beta_{+}(0) = \beta_{-}(0)$ e $\dot{\beta}_{+}(0) = \dot{\beta}_{-}(0)$, de acordo com as Eqs. (7.44) e (7.47). Por simplicidade, adotamos essa configuração e apresentamos apenas o comportamento gráfico de β_{+} , do qual β_{-} seguirá de forma análoga. Vale destacar que obtivemos muitas soluções utilizando diferentes valores dos parâmetros e condições iniciais. Os gráficos apresentados a seguir são exemplos representativos que mostram claramente o comportamento geral das soluções. Como estamos interessados na isotropização do modelo, focamos nossa análise em soluções expansivas de $a_{nc}(t)$.

Investigamos a influência de diferentes parâmetros e condições iniciais sobre a evolução do sistema descrito pelas Eqs. (7.46), (7.48) e (7.47). Para cada caso, selecionamos um conjunto de valores representativos e apresentamos os resultados em gráficos $a_{nc} \times t$ e $\beta_{+} \times t$, além de tabelas que exibem os valores numéricos dos fatores de escala e suas derivadas temporais ao longo do tempo. Os resultados indicam que $a_{nc}(t)$ mantém comportamento expansivo, enquanto $\beta_{\pm}(t)$ converge para valores constantes após um período inicial de variação, caracterizando a isotropização¹. A seguir, resumimos as observações para cada parâmetro ou condição inicial analisada.

Para o parâmetro não-comutativo γ , constatamos que a taxa de expansão de a_{nc} aumenta com o módulo de γ , sendo mais intensa para valores negativos. Esse efeito

¹ Foram igualmente consideradas configurações iniciais com $\beta_{+}(0) \neq \beta_{-}(0)$ ou $C_1 \neq C_2$, que introduzem diferentes anisotropias iniciais no modelo, e observou-se que a evolução temporal dos parâmetros $\beta_{\pm}(t)$ ainda conduz à sua estabilização, indicando uma dinâmica compatível com isotropização. Os gráficos correspondentes não foram apresentados a fim de manter uma exposição concisa.

evidencia que a introdução da não-comutatividade tende a acelerar a expansão do universo. Quanto aos parâmetros de anisotropia $\beta_{\pm}$, quanto maior o módulo de γ , mais rapidamente ocorre a estabilização de $\beta_{\pm}$. Além disso, ao compararmos dois valores de γ com mesmo módulo, um negativo e outro positivo, observamos que a estabilização dos parâmetros $\beta_{\pm}$ ocorre mais rapidamente no caso negativo (Ver Figura 1, Figura 2 e Tabela 3).

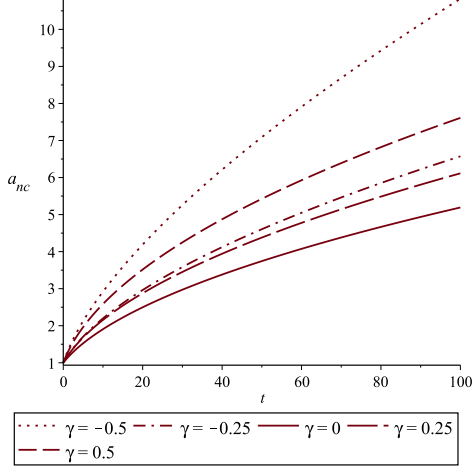


Figura 1: $a_{nc}(t) \times t$ para diferentes valores de γ . Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$.

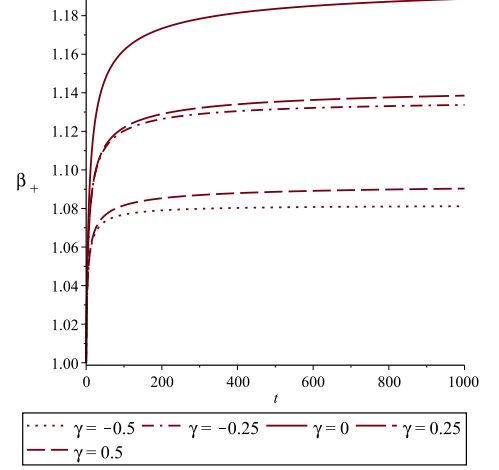


Figura 2: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de γ . Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$.

Para o parâmetro C , observamos que valores maiores resultam em uma expansão mais acelerada de a_{nc} e em uma estabilização mais rápida de $\beta_{\pm}$ em tempos tardios. Além disso, quanto maior o valor de C , menor é o valor constante em que $\beta_{\pm}$ se estabiliza (Ver Figura 3, Figura 4 e Tabela 4).

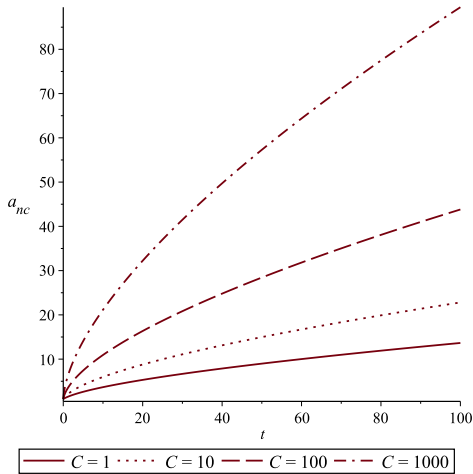


Figura 3: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de C . Consideramos $C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

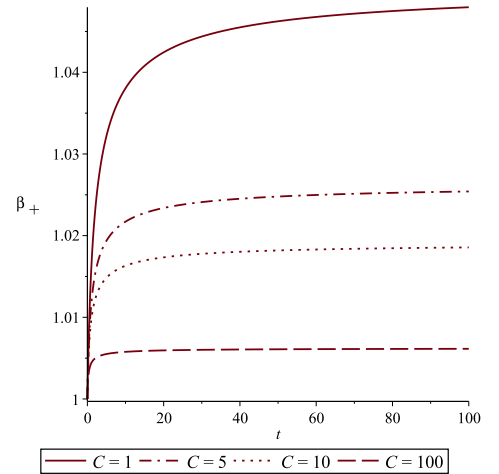


Figura 4: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de C . Consideramos $C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

Para os parâmetros $C_{\pm}$, observamos que a expansão de a_{nc} se torna mais rápida à

medida que seus valores aumentam. Em relação aos parâmetros $\beta_{\pm}$, quanto menores os valores de $C_{\pm}$, menores são os valores constantes em que $\beta_{\pm}$ se estabilizam (Ver Figura 5, Figura 6 e Tabela 5).

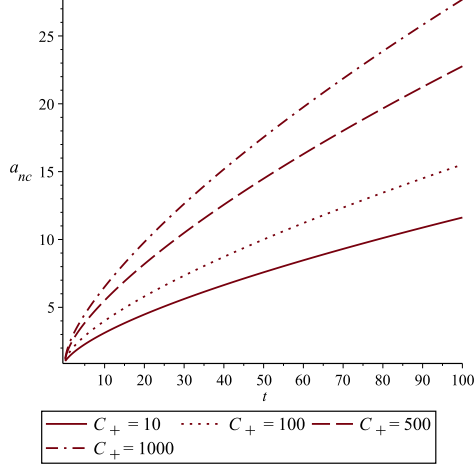


Figura 5: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de $C_{\pm}$. Consideramos $C = 0.1$, $C_+ = C_-$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

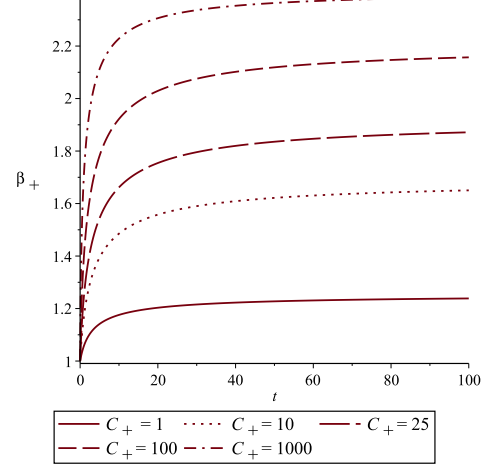


Figura 6: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de $C_{\pm}$. Consideramos $C = 0.1$, $C_+ = C_-$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

Para a condição inicial $a_c(0)$, verificamos que valores menores resultam em uma expansão mais rápida de a_{nc} e em uma estabilização mais eficiente dos parâmetros $\beta_{\pm}$. Além disso, quanto menor o valor de $a_c(0)$, maior é o valor constante em que $\beta_{\pm}$ se estabilizam (Ver Figura 7, Figura 8 e Tabela 6).

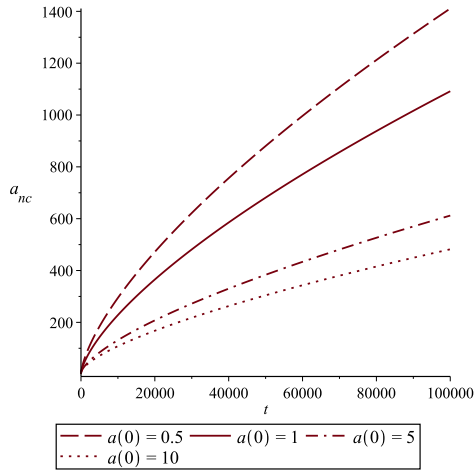


Figura 7: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de $a_c(0)$. Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

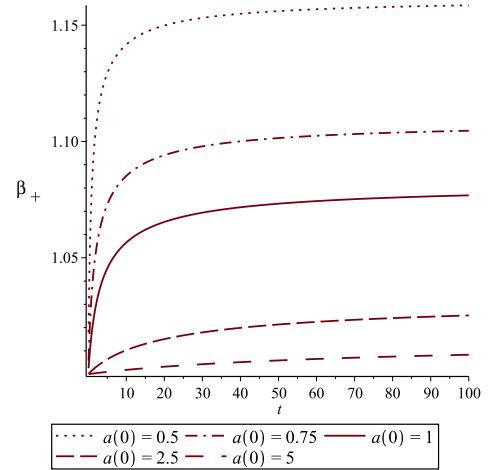


Figura 8: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de $a_c(0)$. Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

Para a condição inicial $\dot{a}_c(0)$, valores mais elevados levam a uma expansão mais acelerada de a_{nc} e a uma estabilização mais rápida dos parâmetros $\beta_{\pm}$. Adicionalmente,

quanto menor o valor de $\dot{a}_c(0)$, maior é o valor constante em que $\beta_{\pm}$ se estabilizam (Ver Figura 9, Figura 10 e Tabela 7).

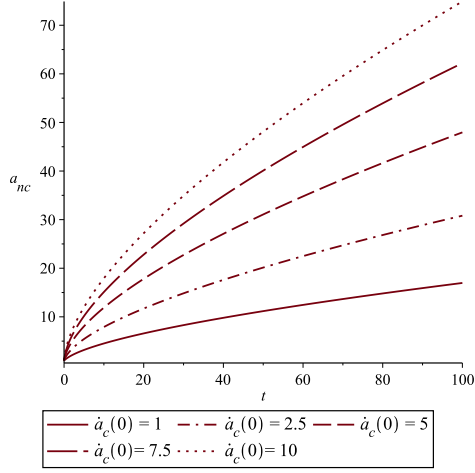


Figura 9: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de $\dot{a}_c(0)$. Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

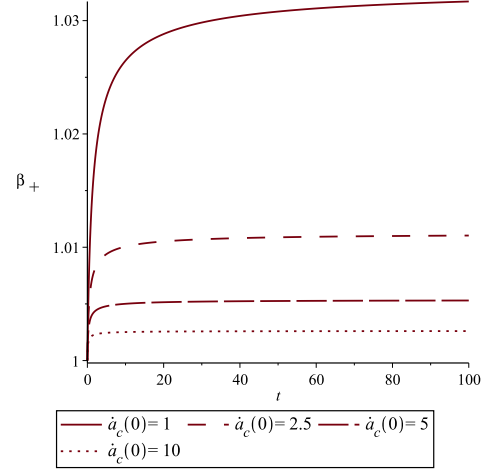


Figura 10: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de $\dot{a}_c(0)$. Consideramos $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

Para a condição inicial $\dot{\beta}_{\pm}(0)$, constatamos que valores mais elevados resultam em uma expansão mais acelerada de a_{nc} e em uma estabilização mais rápida de $\beta_{\pm}$. Além disso, quanto menor o valor de $\dot{\beta}_{\pm}(0)$, menor é o valor constante em que $\beta_{\pm}$ se estabilizam (Ver Figura 11, Figura 12 e Tabela 8).

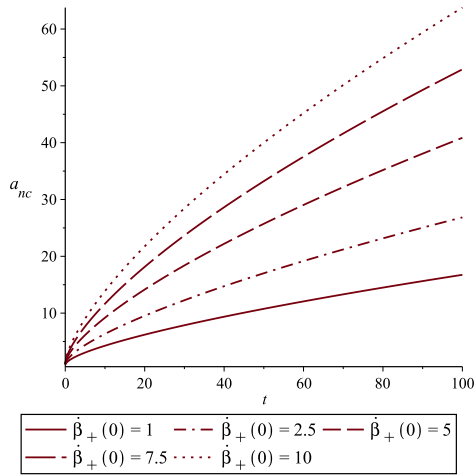


Figura 11: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$. Consideramos $C = 0.1$, $C_- = C_+$ e $\gamma = -0.5$.

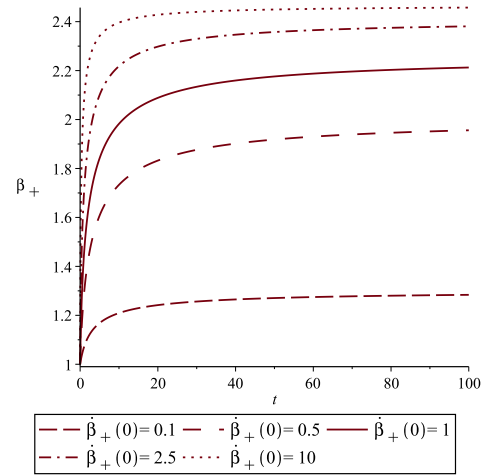


Figura 12: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$. Consideramos $C = 0.1$, $C_- = C_+$ e $\gamma = -0.5$.

Para a condição inicial $\beta_{\pm}(0)$, observamos que a evolução de a_{nc} não depende explicitamente de seu valor inicial. Por outro lado, os parâmetros $\beta_{\pm}$ sempre convergem para um valor constante, com tempos de estabilização menores quando $\beta_{\pm}(0)$ é maior.

Ademais, quanto menor o valor inicial de $\beta_{\pm}(0)$, menor é o valor constante em que $\beta_{\pm}$ se estabilizam (Ver Figura 13 e Tabela 9).

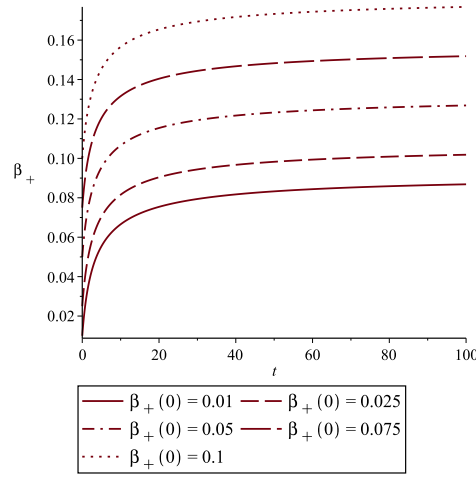


Figura 13: Comportamento de $\beta_+(t)$ para diferentes valores de $\beta_+(0)$. Consideramos $C = C_+ = C_- = 0,1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0,026352314$ e $\gamma = -0,5$.

Em todos os casos analisados, a isotropização é caracterizada pela estabilização de $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$, enquanto $a_{nc}(t)$ mantém sua expansão de forma desacelerada.

Tabela 3 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de γ e t , com $C = C_+ = C_- = 0.1$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$.

γ	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
-0.5	10^3	$5.77494479470455 \times 10$	$3.52018296425835 \times 10^{-2}$	1.08116411704404	$6.28006743211983 \times 10^{-7}$
-0.5	10^5	$1.09169175591580 \times 10^3$	$7.20701293489404 \times 10^{-3}$	1.08186070638515	$9.83964209788674 \times 10^{-11}$
-0.5	10^{10}	$2.58968680211751 \times 10^6$	$1.76007813141873 \times 10^{-4}$	1.08187141805590	$2.48074434412398 \times 10^{-20}$
-0.5	10^{50}	$4.10033296508804 \times 10^{33}$	$2.78822525402685 \times 10^{-17}$	1.08187141832555	$3.93827793662011 \times 10^{-97}$
-0.5	10^{100}	$4.10027918315254 \times 10^{67}$	$2.78818974557760 \times 10^{-33}$	1.08187141832555	$3.94654805491996 \times 10^{-193}$
-0.25	10^3	$3.41742390623054 \times 10$	$1.87873076592792 \times 10^{-2}$	1.13370473164562	$2.52057532900416 \times 10^{-6}$
-0.25	10^5	$4.98206113645293 \times 10^2$	$3.07088173114634 \times 10^{-3}$	1.13683618564938	$4.94759679595310 \times 10^{-10}$
-0.25	10^{10}	$9.35034362858757 \times 10^5$	$6.25250437547558 \times 10^{-5}$	1.13688782725201	$6.63693932416572 \times 10^{-20}$
-0.25	10^{50}	$5.93117627592570 \times 10^{32}$	$3.97450035862926 \times 10^{-18}$	1.13688782792970	$4.44125363487530 \times 10^{-99}$
-0.25	10^{100}	$1.89797399373580 \times 10^{66}$	$1.27183803551766 \times 10^{-34}$	1.13688782792970	$4.77974254997572 \times 10^{-198}$
0	10^3	$1.61067275263554 \times 10$	$8.01647757249714 \times 10^{-3}$	1.18871845023854	$6.30674162922823 \times 10^{-6}$
0	10^5	$1.60685796904401 \times 10^2$	$8.03364665466973 \times 10^{-4}$	1.20012123394029	$6.35198079492232 \times 10^{-9}$
0	10^{10}	$5.03747740162615 \times 10^4$	$2.49664702465128 \times 10^{-6}$	1.20138818988449	$2.06175314548412 \times 10^{-16}$
0	10^{12}	$4.60881374729826 \times 10^5$	$2.04673815569800 \times 10^{-7}$	1.20139207001625	$2.69227313155151 \times 10^{-19}$
0	10^{13}	$9.88747417345317 \times 10^5$	$8.41973405201580 \times 10^{-10}$	1.20139258308111	$2.72669030625673 \times 10^{-20}$
0.25	10^3	6.70936033474032	$3.11696772538865 \times 10^{-3}$	1.13853150480785	$3.88019973229339 \times 10^{-6}$
0.25	10^5	$8.17978892859367 \times 10$	$5.14876440917777 \times 10^{-4}$	1.14531801756597	$3.18822540198597 \times 10^{-9}$
0.25	10^{10}	$2.78814114084560 \times 10^5$	$1.90607027888036 \times 10^{-5}$	1.14578452135441	$1.45821730100333 \times 10^{-18}$
0.25	10^{50}	$1.85079239840570 \times 10^{32}$	$1.24022176541388 \times 10^{-18}$	1.14578453626068	$9.78459030687123 \times 10^{-98}$
0.25	10^{100}	$5.92252759735156 \times 10^{65}$	$3.96870243043003 \times 10^{-35}$	1.14578453626068	$1.05301913870114 \times 10^{-196}$
0.5	10^3	3.75045200031356	$1.54062195723466 \times 10^{-3}$	1.09032992612216	$2.04623741709548 \times 10^{-6}$
0.5	10^5	$4.93801638613804 \times 10$	$3.47896875116609 \times 10^{-4}$	1.09397656783531	$1.84993582143270 \times 10^{-9}$
0.5	10^{10}	$3.09276879590900 \times 10^5$	$2.16494801643653 \times 10^{-5}$	1.09426950315531	$1.80885790363103 \times 10^{-18}$
0.5	10^{50}	$5.19393183842041 \times 10^{32}$	$3.53187243391340 \times 10^{-18}$	1.09426952284475	$2.88087074816100 \times 10^{-95}$
0.5	10^{100}	$5.19386368874490 \times 10^{66}$	$3.53182661265498 \times 10^{-34}$	1.09426952284475	$2.88688588361371 \times 10^{-191}$

Tabela 4 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de C e t , com $C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_{\pm}(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

C	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
1	10^2	$1.65125214932867 \times 10$	$9.62641049235326 \times 10^{-2}$	1.04796809339111	$1.93548224946860 \times 10^{-5}$
1	10^5	$1.30963130232505 \times 10^3$	$8.72306365248727 \times 10^{-3}$	1.05041676339555	$4.97086588375277 \times 10^{-11}$
1	10^{10}	$3.16302781606027 \times 10^6$	$2.15011509337874 \times 10^{-4}$	1.05042217769972	$1.25483917402440 \times 10^{-20}$
1	10^{50}	$5.00973387704284 \times 10^{33}$	$3.40661774744895 \times 10^{-17}$	1.05042217783612	$1.99208880401541 \times 10^{-97}$
1	10^{100}	$5.00966834808691 \times 10^{67}$	$3.40657493410730 \times 10^{-33}$	1.05042217783612	$1.99629196108106 \times 10^{-193}$
5	10^2	$2.07094584946924 \times 10$	$1.22867097402338 \times 10^{-1}$	1.02540942871800	$6.97253148187132 \times 10^{-6}$
5	10^5	$1.77968245136721 \times 10^3$	$1.19589992653161 \times 10^{-2}$	1.02628867731237	$1.78950880499895 \times 10^{-11}$
5	10^{10}	$4.37491221153109 \times 10^6$	$2.97440204887313 \times 10^{-4}$	1.02629062675910	$4.51917528991155 \times 10^{-21}$
5	10^{50}	$6.93132780245766 \times 10^{33}$	$4.71330124783900 \times 10^{-17}$	1.02629062680823	$7.17429471741857 \times 10^{-98}$
5	10^{100}	$6.93123722211913 \times 10^{67}$	$4.71324206420892 \times 10^{-33}$	1.02629062680823	$7.18943966058331 \times 10^{-194}$
10	10^2	$2.37730460483869 \times 10$	$1.42585618763042 \times 10^{-1}$	1.01855834157711	$4.15189199923247 \times 10^{-6}$
10	10^5	$2.11463488755257 \times 10^3$	$1.42531174013815 \times 10^{-2}$	1.01907781152268	$1.04448394588694 \times 10^{-11}$
10	10^{10}	$5.22938610117169 \times 10^6$	$3.55553076621969 \times 10^{-4}$	1.01907894924070	$2.63703812222604 \times 10^{-21}$
10	10^{50}	$8.28594946527034 \times 10^{33}$	$5.63444589906848 \times 10^{-17}$	1.01907894926937	$4.18648199541684 \times 10^{-98}$
10	10^{100}	$8.28584121325477 \times 10^{67}$	$5.63436965504191 \times 10^{-33}$	1.01907894926937	$4.19512113247034 \times 10^{-194}$
100	10^2	$4.25314375804034 \times 10$	$2.65779980344301 \times 10^{-1}$	1.00614213548638	$6.27727247012018 \times 10^{-7}$
100	10^5	$4.15246296215656 \times 10^3$	$2.81527793285521 \times 10^{-2}$	1.00621749072138	$1.41142196941052 \times 10^{-12}$
100	10^{10}	$1.03817419948622 \times 10^7$	$7.05935752830522 \times 10^{-4}$	1.00621764434458	$3.55714087885152 \times 10^{-22}$
100	10^{50}	$1.64527786574461 \times 10^{34}$	$1.11878889733860 \times 10^{-16}$	1.00621764434844	$5.64703066397212 \times 10^{-99}$
100	10^{100}	$1.64525653500275 \times 10^{68}$	$1.11877463209467 \times 10^{-32}$	1.00621764434844	$5.65891800415214 \times 10^{-195}$

Tabela 5 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, $\beta_+ = \beta_-$ e $\dot{\beta}_+ = \dot{\beta}_-$ para diferentes valores de $C_{\pm}$ e t , com $C = 0.1$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

$C_{\pm}$	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
1	10^2	$1.48163577331849 \times 10$	$8.59541006226603 \times 10^{-2}$	1.23429180777149	$1.21109858942679 \times 10^{-4}$
1	10^5	$1.10953012701424 \times 10^3$	$7.33221507214260 \times 10^{-3}$	1.24934366871540	$2.92647847309175 \times 10^{-10}$
1	10^{10}	$2.63725110493034 \times 10^6$	$1.79243890946981 \times 10^{-4}$	1.24937552377710	$7.37657808961067 \times 10^{-20}$
1	10^{50}	$4.17578841748877 \times 10^{33}$	$2.83953665623043 \times 10^{-17}$	1.24937552457892	$1.17106511180275 \times 10^{-96}$
1	10^{100}	$4.17573420025791 \times 10^{67}$	$2.83949883781988 \times 10^{-33}$	1.24937552457892	$1.17349602320445 \times 10^{-192}$
10	10^2	$1.55932186538612 \times 10$	$9.21250131792895 \times 10^{-2}$	1.57887093271609	$2.70518842710661 \times 10^{-4}$
10	10^5	$1.24719915969613 \times 10^3$	$8.29414045474369 \times 10^{-3}$	1.61156140429005	$6.03343606261464 \times 10^{-10}$
10	10^{10}	$3.00125948852418 \times 10^6$	$2.04007238282992 \times 10^{-4}$	1.61162704235069	$1.51882716022119 \times 10^{-19}$
10	10^{50}	$4.75317464071994 \times 10^{33}$	$3.23215739578492 \times 10^{-17}$	1.61162704400166	$2.41119018220561 \times 10^{-96}$
10	10^{100}	$4.75311232276144 \times 10^{67}$	$3.23211641634281 \times 10^{-33}$	1.61162704400166	$2.41626092390146 \times 10^{-192}$
25	10^2	$1.66070967568793 \times 10$	$9.98208161301555 \times 10^{-2}$	1.72690823482933	$3.00149908008377 \times 10^{-4}$
25	10^5	$1.40431187211007 \times 10^3$	$9.38495703035183 \times 10^{-3}$	1.76239290543430	$6.31370450433692 \times 10^{-10}$
25	10^{10}	$3.41175848264912 \times 10^6$	$2.31930650844247 \times 10^{-4}$	1.76246157000559	$1.58818808870899 \times 10^{-19}$
25	10^{50}	$5.40418075145210 \times 10^{33}$	$3.67484160650540 \times 10^{-17}$	1.76246157173194	$2.52128283221340 \times 10^{-96}$
25	10^{100}	$5.40411012067885 \times 10^{67}$	$3.67479545987391 \times 10^{-33}$	1.76246157173194	$2.52660501893193 \times 10^{-192}$
100	10^2	$1.98922119578162 \times 10$	$1.23814629473104 \times 10^{-1}$	1.88793592438511	$2.64030880422531 \times 10^{-4}$
100	10^5	$1.85034089921554 \times 10^3$	$1.24591486795781 \times 10^{-2}$	1.91812059889195	$5.11599716231378 \times 10^{-10}$
100	10^{10}	$4.56124988782102 \times 10^6$	$3.10113451865018 \times 10^{-4}$	1.91817621820345	$1.28588446091742 \times 10^{-19}$
100	10^{50}	$7.22674859798064 \times 10^{33}$	$4.91418735789468 \times 10^{-17}$	1.91817621960119	$2.04136776328131 \times 10^{-96}$
100	10^{100}	$7.22665418185123 \times 10^{67}$	$4.91412565783232 \times 10^{-33}$	1.91817621960119	$2.04567751961172 \times 10^{-192}$
1000	10^2	$3.37582307751617 \times 10$	$2.21267441438632 \times 10^{-1}$	2.00101413700075	$1.30038691170697 \times 10^{-4}$
1000	10^5	$3.49996371309542 \times 10^3$	$2.37347030068579 \times 10^{-2}$	2.01539286212008	$2.34485965758149 \times 10^{-10}$
1000	10^{10}	$8.74607614611653 \times 10^6$	$5.94706195229799 \times 10^{-4}$	2.01541835078982	$5.89161382382453 \times 10^{-20}$
1000	10^{50}	$1.38602689533257 \times 10^{34}$	$9.42497896358757 \times 10^{-17}$	2.01541835143024	$9.35311256235490 \times 10^{-97}$
1000	10^{100}	$1.38600873357635 \times 10^{68}$	$9.42485989442013 \times 10^{-33}$	2.01541835143024	$9.37280647608427 \times 10^{-193}$

Tabela 6 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de $a_c(0)$ e t , com $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e $\gamma = -0.5$.

$a_c(0)$	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
0.5	10^2	$1.66671229768871 \times 10$	$9.95112019035336 \times 10^{-2}$	1.15854230412839	$2.67954956286370 \times 10^{-5}$
0.5	10^5	$1.37847054891445 \times 10^3$	$9.20258194728948 \times 10^{-3}$	1.16163472887432	$5.39392401410827 \times 10^{-11}$
0.5	10^{10}	$3.34322590764208 \times 10^6$	$2.27269035988505 \times 10^{-4}$	1.16164059509821	$1.35689601850210 \times 10^{-20}$
0.5	10^{50}	$5.29550140634861 \times 10^{33}$	$3.60094134704791 \times 10^{-17}$	1.16164059524570	$2.15410916395753 \times 10^{-97}$
0.5	10^{100}	$5.29543289969475 \times 10^{67}$	$3.60089476126396 \times 10^{-33}$	1.16164059524570	$2.15862442483626 \times 10^{-193}$
0.75	10^2	$1.54475101988563 \times 10$	$9.04778642991938 \times 10^{-2}$	1.10462092982711	$3.46798280409981 \times 10^{-5}$
0.75	10^5	$1.20006188402228 \times 10^3$	$7.96369839149115 \times 10^{-3}$	1.10878361513688	$7.69385477805382 \times 10^{-11}$
0.75	10^{10}	$2.87645291091118 \times 10^6$	$1.95516965487555 \times 10^{-4}$	1.10879198646910	$1.93743214273057 \times 10^{-20}$
0.75	10^{50}	$4.55522111633149 \times 10^{33}$	$3.09754905605154 \times 10^{-17}$	1.10879198667970	$3.07574158389866 \times 10^{-97}$
0.75	10^{100}	$4.55516138833136 \times 10^{67}$	$3.09750975361060 \times 10^{-33}$	1.10879198667970	$3.08220824607727 \times 10^{-193}$
1	10^2	$1.47261847316966 \times 10$	$8.52059345807472 \times 10^{-2}$	1.07684443967982	$4.01814179551821 \times 10^{-5}$
1	10^5	$1.09169175591580 \times 10^3$	$7.20701293489404 \times 10^{-3}$	1.08186070638515	$9.83964209788674 \times 10^{-11}$
1	10^{10}	$2.58968680211751 \times 10^6$	$1.76007813141873 \times 10^{-4}$	1.08187141805590	$2.48074434412398 \times 10^{-20}$
1	10^{50}	$4.10033296508804 \times 10^{33}$	$2.78822525402685 \times 10^{-17}$	1.08187141832555	$3.93827793662011 \times 10^{-97}$
1	10^{100}	$4.10027918315254 \times 10^{67}$	$2.78818974557760 \times 10^{-33}$	1.08187141832555	$3.94654805491996 \times 10^{-193}$
2.5	10^2	$1.30205078741326 \times 10$	$7.17905722395018 \times 10^{-2}$	1.02522093590183	$4.86798375085851 \times 10^{-5}$
2.5	10^5	$8.23256178087734 \times 10^2$	$5.31003058430142 \times 10^{-3}$	1.03284688661337	$2.11728352840473 \times 10^{-10}$
2.5	10^{10}	$1.86041992921103 \times 10^6$	$1.26382136988052 \times 10^{-4}$	1.03287002986384	$5.38861036137084 \times 10^{-20}$
2.5	10^{50}	$2.94296372779180 \times 10^{33}$	$2.00121546600519 \times 10^{-17}$	1.03287003044957	$8.55457584482055 \times 10^{-97}$
2.5	10^{100}	$2.94292564369923 \times 10^{67}$	$2.00118968398000 \times 10^{-33}$	1.03287003044957	$8.57253095289013 \times 10^{-193}$
5	10^2	$1.26404758754218 \times 10$	$6.00684593176709 \times 10^{-2}$	1.00832426316329	$3.55400966748681 \times 10^{-5}$
5	10^5	$6.80509716581963 \times 10^2$	$4.27885614016897 \times 10^{-3}$	1.01640278779626	$3.71552594819910 \times 10^{-10}$
5	10^{10}	$1.45097371432128 \times 10^6$	$9.85040796527953 \times 10^{-5}$	1.01644376066946	$9.65379063007719 \times 10^{-20}$
5	10^{50}	$2.29246567379484 \times 10^{33}$	$1.55887604531451 \times 10^{-17}$	1.01644376171883	$1.53257868073372 \times 10^{-96}$
5	10^{100}	$2.29243567034892 \times 10^{67}$	$1.55885643309785 \times 10^{-33}$	1.01644376171883	$1.53581077320607 \times 10^{-192}$

Tabela 7 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de $\dot{a}_c(0)$ e t , com $\dot{\beta}_\pm(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

$\dot{a}_c(0)$	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
1	10^2	$1.89779179633412 \times 10$	$1.11818805826265 \times 10^{-1}$	1.03169011206471	$9.98605075778449 \times 10^{-6}$
1	10^5	$1.58846853984890 \times 10^3$	$1.06459250820241 \times 10^{-2}$	1.03295362638406	$2.58168325987133 \times 10^{-11}$
1	10^{10}	$3.88442660381063 \times 10^6$	$2.64080317544402 \times 10^{-4}$	1.03295643885024	$6.51982013124600 \times 10^{-21}$
1	10^{50}	$6.15366986324990 \times 10^{33}$	$4.18449501197903 \times 10^{-17}$	1.03295643892111	$1.03506550414104 \times 10^{-97}$
1	10^{100}	$6.15358928186980 \times 10^{67}$	$4.18443912392307 \times 10^{-33}$	1.03295643892111	$1.03720873872852 \times 10^{-193}$
2.5	10^2	$3.07665231928596 \times 10$	$1.88143345494552 \times 10^{-1}$	1.01103339807890	$1.72850100795333 \times 10^{-6}$
2.5	10^5	$2.87460687107742 \times 10^3$	$1.94436892459576 \times 10^{-2}$	1.01124579269028	$4.14146386397607 \times 10^{-12}$
2.5	10^{10}	$7.15645514123451 \times 10^6$	$4.86605831911691 \times 10^{-4}$	1.01124624364767	$1.04478032072023 \times 10^{-21}$
2.5	10^{50}	$1.13406483908137 \times 10^{34}$	$7.71164166756229 \times 10^{-17}$	1.01124624365903	$1.65865756327414 \times 10^{-98}$
2.5	10^{100}	$1.13405004108351 \times 10^{68}$	$7.71153717714383 \times 10^{-33}$	1.01124624365903	$1.66207992901653 \times 10^{-194}$
5	10^2	$4.63356259514685 \times 10$	$2.91051581313243 \times 10^{-1}$	1.00530069571624	$4.84599188884677 \times 10^{-7}$
5	10^5	$4.56616837736691 \times 10^3$	$3.09700593590186 \times 10^{-2}$	1.00535852910392	$1.07248034052911 \times 10^{-12}$
5	10^{10}	$1.14240923643710 \times 10^7$	$7.76817369262152 \times 10^{-4}$	1.00535864582320	$2.70221181564066 \times 10^{-22}$
5	10^{50}	$1.81048676198374 \times 10^{34}$	$1.23113048805118 \times 10^{-16}$	1.00535864582614	$4.28984299091916 \times 10^{-99}$
5	10^{100}	$1.81046304181695 \times 10^{68}$	$1.23111494579452 \times 10^{-32}$	1.00535864582614	$4.29887798597234 \times 10^{-195}$
10	10^2	$7.13058264263282 \times 10$	$4.58050886977793 \times 10^{-1}$	1.00260175471771	$1.36054680081620 \times 10^{-7}$
10	10^5	$7.28719549058469 \times 10^3$	$4.94888013451013 \times 10^{-2}$	1.00261757066591	$2.80768639626193 \times 10^{-13}$
10	10^{10}	$1.82710345323575 \times 10^7$	$1.24241714148766 \times 10^{-3}$	1.00261760120904	$7.06719774223175 \times 10^{-23}$
10	10^{50}	$2.89567642560805 \times 10^{34}$	$1.96906020583791 \times 10^{-16}$	1.00261760120980	$1.12195722166744 \times 10^{-99}$
10	10^{100}	$2.89563869940331 \times 10^{68}$	$1.96903365972069 \times 10^{-32}$	1.00261760120980	$1.12427634267368 \times 10^{-195}$

Tabela 8 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de $\dot{\beta}_+(0) = \dot{\beta}_-(0)$ e t , com $C = 0.1$, $C_- = C_+$ e $\gamma = -0.5$.

$\dot{\beta}_+(0)$	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
0.1	10^2	$1.48593441474443 \times 10$	$8.63074029050892 \times 10^{-2}$	1.27652561319558	$1.42152520665372 \times 10^{-4}$
0.1	10^5	$1.11784526346040 \times 10^3$	$7.39052628309245 \times 10^{-3}$	1.29415710347157	$3.41459070805716 \times 10^{-10}$
0.1	10^{10}	$2.65938662039816 \times 10^6$	$1.80749820251672 \times 10^{-4}$	1.29419427002694	$8.60589971258084 \times 10^{-20}$
0.1	10^{50}	$4.21090364232810 \times 10^{33}$	$2.86341338252175 \times 10^{-17}$	1.29419427096240	$1.36620807030152 \times 10^{-96}$
0.1	10^{100}	$4.21084855453572 \times 10^{67}$	$2.86337738814396 \times 10^{-33}$	1.29419427096240	$1.36909036648383 \times 10^{-192}$
0.5	10^2	$1.72271075085962 \times 10$	$1.04428656362462 \times 10^{-1}$	1.77775449161700	$2.99488806657740 \times 10^{-4}$
0.5	10^5	$1.49381487663321 \times 10^3$	$1.00040186673963 \times 10^{-2}$	1.81283205979313	$6.15176342387333 \times 10^{-10}$
0.5	10^{10}	$3.64395457941376 \times 10^6$	$2.47724420704324 \times 10^{-4}$	1.81289895531879	$1.54706368715200 \times 10^{-19}$
0.5	10^{50}	$5.77237595965919 \times 10^{33}$	$3.92521641774465 \times 10^{-17}$	1.81289895700041	$2.45602204897043 \times 10^{-96}$
0.5	10^{100}	$5.77230119749356 \times 10^{67}$	$3.92516495030003 \times 10^{-33}$	1.81289895700041	$2.46114686652164 \times 10^{-192}$
1	10^2	$2.12552453354794 \times 10$	$1.33574497782499 \times 10^{-1}$	1.91626231546279	$2.43518154705003 \times 10^{-4}$
1	10^5	$2.02266726475716 \times 10^3$	$1.36416914112010 \times 10^{-2}$	1.94389881461940	$4.64068967741611 \times 10^{-10}$
1	10^{10}	$5.00170300783830 \times 10^6$	$3.40068868934304 \times 10^{-4}$	1.94394926373599	$1.16629412774537 \times 10^{-19}$
1	10^{50}	$7.92501170584300 \times 10^{33}$	$5.38900869343990 \times 10^{-17}$	1.94394926500373	$1.85152591704734 \times 10^{-96}$
1	10^{100}	$7.92490917376261 \times 10^{67}$	$5.38893879841991 \times 10^{-33}$	1.94394926500373	$1.85540354115470 \times 10^{-192}$
2.5	10^2	$3.27933895831971 \times 10$	$2.14565404616915 \times 10^{-1}$	1.99836523596700	$1.35339151796672 \times 10^{-4}$
2.5	10^5	$3.38921358482079 \times 10^3$	$2.29795199602926 \times 10^{-2}$	2.01334416625309	$2.44513875168261 \times 10^{-10}$
2.5	10^{10}	$8.46640412595575 \times 10^6$	$5.75687505749010 \times 10^{-4}$	2.01337074447312	$6.14345810105080 \times 10^{-20}$
2.5	10^{50}	$1.34169835761710 \times 10^{34}$	$9.12354863746835 \times 10^{-17}$	2.01337074514091	$9.75315671893138 \times 10^{-97}$
2.5	10^{100}	$1.34168081024688 \times 10^{68}$	$9.12342574015682 \times 10^{-33}$	2.01337074514091	$9.77330574150987 \times 10^{-193}$
10	10^2	$7.62169794077434 \times 10$	$5.13076737540624 \times 10^{-1}$	2.03553949195842	$4.27364187272902 \times 10^{-5}$
10	10^5	$8.25011112420169 \times 10^3$	$5.60725477006067 \times 10^{-2}$	2.04020132872402	$7.50318338503883 \times 10^{-11}$
10	10^{10}	$2.07038699213482 \times 10^7$	$1.40785207776121 \times 10^{-3}$	2.04020948429345	$1.88510584817603 \times 10^{-20}$
10	10^{50}	$3.28125786722732 \times 10^{34}$	$2.23125547542435 \times 10^{-16}$	2.04020948449835	$2.99264858893673 \times 10^{-97}$
10	10^{100}	$3.28121540077935 \times 10^{68}$	$2.23122675543417 \times 10^{-32}$	2.04020948449835	$2.99893152725601 \times 10^{-193}$

Tabela 9 – Valores de a_{nc} , $\dot{a}_{nc}$, β_+ e $\dot{\beta}_+$ para diferentes valores de $\beta_+(0)$ e t , com $C = C_+ = C_- = 0.1$, $\dot{\beta}_\pm(0) = 0.026352314$ e $\gamma = -0.5$.

$\beta_+(0)$	t	$a_{nc}(t)$	$\dot{a}_{nc}(t)$	$\beta_+(t)$	$\dot{\beta}_+(t)$
0.01	10^2	$1.47261852880949 \times 10$	$8.52059228078514 \times 10^{-2}$	$8.68444296484373 \times 10^{-2}$	$4.01812744911463 \times 10^{-5}$
0.01	10^5	$1.09169179219927 \times 10^3$	$7.20701312944106 \times 10^{-3}$	$9.18606914292346 \times 10^{-2}$	$9.83963360997730 \times 10^{-11}$
0.01	10^{10}	$2.58968686083657 \times 10^6$	$1.76007894617209 \times 10^{-4}$	$9.18714030948241 \times 10^{-2}$	$2.48079440395924 \times 10^{-20}$
0.01	10^{50}	$4.10033281387534 \times 10^{33}$	$2.78822596554165 \times 10^{-17}$	$9.18714033644820 \times 10^{-2}$	$3.93830611927357 \times 10^{-97}$
0.01	10^{100}	$4.10027956069624 \times 10^{67}$	$2.78819063589185 \times 10^{-33}$	$9.18714033644821 \times 10^{-2}$	$3.94660953614205 \times 10^{-193}$
0.025	10^2	$1.47261851380801 \times 10$	$8.52059338457978 \times 10^{-2}$	$1.01844434460444 \times 10^{-1}$	$4.01813952378685 \times 10^{-5}$
0.025	10^5	$1.09169177547518 \times 10^3$	$7.20701303195885 \times 10^{-3}$	$1.06860698331230 \times 10^{-1}$	$9.83963733803563 \times 10^{-11}$
0.025	10^{10}	$2.58968678997633 \times 10^6$	$1.76007852956498 \times 10^{-4}$	$1.06871409999141 \times 10^{-1}$	$2.48076669640442 \times 10^{-20}$
0.025	10^{50}	$4.10033289305991 \times 10^{33}$	$2.78822536324384 \times 10^{-17}$	$1.06871410268798 \times 10^{-1}$	$3.93827439311357 \times 10^{-97}$
0.025	10^{100}	$4.10027929390874 \times 10^{67}$	$2.78819034623523 \times 10^{-33}$	$1.06871410268798 \times 10^{-1}$	$3.94658704570934 \times 10^{-193}$
0.05	10^2	$1.47261848139896 \times 10$	$8.52059347226026 \times 10^{-2}$	$1.26844438794072 \times 10^{-1}$	$4.01814174638344 \times 10^{-5}$
0.05	10^5	$1.09169175929142 \times 10^3$	$7.20701295360640 \times 10^{-3}$	$1.31860704969430 \times 10^{-1}$	$9.83964140568461 \times 10^{-11}$
0.05	10^{10}	$2.58968679812004 \times 10^6$	$1.76007818343593 \times 10^{-4}$	$1.31871416639692 \times 10^{-1}$	$2.48074693361900 \times 10^{-20}$
0.05	10^{50}	$4.10033295869173 \times 10^{33}$	$2.78822523947839 \times 10^{-17}$	$1.31871416909349 \times 10^{-1}$	$3.93827529069912 \times 10^{-97}$
0.05	10^{100}	$4.10027919239829 \times 10^{67}$	$2.78818984532237 \times 10^{-33}$	$1.31871416909349 \times 10^{-1}$	$3.94655412368035 \times 10^{-193}$
0.075	10^2	$1.47261847316966 \times 10$	$8.52059345807472 \times 10^{-2}$	$1.51844439679822 \times 10^{-1}$	$4.01814179551821 \times 10^{-5}$
0.075	10^5	$1.09169175591580 \times 10^3$	$7.20701293489404 \times 10^{-3}$	$1.56860706385155 \times 10^{-1}$	$9.83964209788674 \times 10^{-11}$
0.075	10^{10}	$2.58968680211751 \times 10^6$	$1.76007813141873 \times 10^{-4}$	$1.56871418055898 \times 10^{-1}$	$2.48074434412398 \times 10^{-20}$
0.075	10^{50}	$4.10033296508804 \times 10^{33}$	$2.78822525402685 \times 10^{-17}$	$1.56871418325556 \times 10^{-1}$	$3.93827793662011 \times 10^{-97}$
0.075	10^{100}	$4.10027918315254 \times 10^{67}$	$2.78818974557760 \times 10^{-33}$	$1.56871418325556 \times 10^{-1}$	$3.94654805491996 \times 10^{-193}$
0.1	10^2	$1.47261847316966 \times 10$	$8.52059345807472 \times 10^{-2}$	$1.76844439679822 \times 10^{-1}$	$4.01814179551821 \times 10^{-5}$
0.1	10^5	$1.09169175591580 \times 10^3$	$7.20701293489404 \times 10^{-3}$	$1.81860706385155 \times 10^{-1}$	$9.83964209788674 \times 10^{-11}$
0.1	10^{10}	$2.58968680211751 \times 10^6$	$1.76007813141873 \times 10^{-4}$	$1.81871418055898 \times 10^{-1}$	$2.48074434412398 \times 10^{-20}$
0.1	10^{50}	$4.10033296508804 \times 10^{33}$	$2.78822525402685 \times 10^{-17}$	$1.81871418325556 \times 10^{-1}$	$3.93827793662011 \times 10^{-97}$
0.1	10^{100}	$4.10027918315254 \times 10^{67}$	$2.78818974557760 \times 10^{-33}$	$1.81871418325556 \times 10^{-1}$	$3.94654805491996 \times 10^{-193}$

7.4 Estimativas para o valor do parâmetro não-comutativo

Na presente seção, queremos estimar valores para o parâmetro γ usando os dados observacionais atuais. Para isso, começamos com a hamiltoniana não-comutativa no calibre $N_{\text{nc}} = 1$, dada pela Eq. (7.24). Impomos, então, algumas condições à hamiltoniana geral para que ela possa descrever melhor as propriedades atuais do nosso universo. Consideramos que a isotropização já ocorreu ($p_{\pm\text{nc}} \rightarrow 0$) e que a expansão acelerada é devida, inteiramente, à presença do parâmetro não-comutativo. Nessas condições, a hamiltoniana não-comutativa, Eq. (7.24), reduz-se à forma:

$$\mathcal{H}_{\text{nc}} = -\frac{p_{a_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}} + a_{\text{nc}}^{-3\omega} p_{T_{\text{nc}}}. \quad (7.51)$$

Diferentemente das seções anteriores, aqui trabalharemos diretamente com as variáveis não-comutativas, sem aplicar as transformações da Eq. (7.27). Isso nos permitirá obter o fator de escala isotrópico a_{nc} em função do tempo.

A partir da hamiltoniana reduzida, Eq. (7.51), obtemos as equações de Hamilton utilizando os parênteses de Poisson deformados dados pelas Eqs. (7.25) e (7.26). As equações dinâmicas resultantes são:

$$\dot{T}_{\text{nc}} = \{T_{\text{nc}}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial p_{T_{\text{nc}}}} = 0, \quad (7.52)$$

$$\dot{a}_{\text{nc}} = \{a_{\text{nc}}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial p_{a_{\text{nc}}}} = -\frac{1}{12} \frac{p_{a_{\text{nc}}}}{a_{\text{nc}}} + \gamma a_{\text{nc}}^{-3\omega}, \quad (7.53)$$

$$\dot{p}_{a_{\text{nc}}} = \{p_{a_{\text{nc}}}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial a_{\text{nc}}} = -\frac{p_{a_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}^2} + \frac{3\omega p_{T_{\text{nc}}}}{a_{\text{nc}}^{3\omega+1}}, \quad (7.54)$$

$$\dot{p}_{T_{\text{nc}}} = \{p_{T_{\text{nc}}}, \mathcal{H}_{\text{nc}}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{nc}}}{\partial T_{\text{nc}}} = \gamma \left(-\frac{p_{a_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}^2} + \frac{3\omega p_{T_{\text{nc}}}}{a_{\text{nc}}^{3\omega+1}} \right). \quad (7.55)$$

Queremos escrever uma equação dinâmica explícita para o fator de escala $a_{\text{nc}}(t)$. Para isso, partindo da Eq. (7.53), podemos isolar $p_{a_{\text{nc}}}$ como:

$$p_{a_{\text{nc}}} = -12a_{\text{nc}} \left(\dot{a}_{\text{nc}} - \gamma a_{\text{nc}}^{-3\omega} \right), \quad (7.56)$$

Além disso, ao comparar as Eqs. (7.54) e (7.55), obtemos a seguinte relação:

$$\dot{p}_{T_{\text{nc}}} = \gamma \dot{p}_{a_{\text{nc}}}, \quad (7.57)$$

cujas integração fornece:

$$p_{T_{\text{nc}}} = \gamma p_{a_{\text{nc}}} + C_f, \quad (7.58)$$

onde C_f é uma constante de integração associada à densidade de energia do fluido.

Para estimar o parâmetro não-comutativo γ , consideramos a equação do tipo de Friedmann $\mathcal{H}_{\text{nc}} = 0$ na fase pós-isotropização, de modo que:

$$-\frac{p_{a_{\text{nc}}}^2}{24a_{\text{nc}}} + a_{\text{nc}}^{-3\omega} p_{T_{\text{nc}}} = 0. \quad (7.59)$$

Substituindo as expressões das Eqs. (7.56) e (7.58) na equação acima, Eq. (7.59), e mantendo até segunda ordem em γ , obtemos a seguinte relação para a evolução temporal do fator a_{nc} :

$$\dot{a}_{\text{nc}}^2 - \gamma^2 a_{\text{nc}}^{-6\omega} - \frac{C_f}{6} a_{\text{nc}}^{-3\omega-1} = 0, \quad (7.60)$$

Para fazer nossa estimativa, assumiremos que o conteúdo de matéria do modelo consiste de poeira ($\omega = 0$). Isto se justifica pelo fato de estarmos considerando uma fase pós-isotropização, situada após a era do desacoplamento, quando a matéria passa a dominar a dinâmica do universo. Além disso, supomos que a expansão acelerada se deve inteiramente à presença do parâmetro não-comutativo γ . Levando em conta essas considerações, a equação acima, Eq. (7.60), se simplifica para:

$$\dot{a}_{\text{nc}}(t) = \left(\gamma^2 + \frac{C_f}{6 \cdot a_{\text{nc}}(t)} \right)^{1/2}, \quad (7.61)$$

Esta Eq. (7.61) possui solução geral dada por:

$$t + \frac{\sqrt{6}}{72\gamma^3} \left[C_f \ln \left(\frac{A + B\gamma}{12\gamma} \right) \sqrt{6} - B \right] + D = 0, \quad (7.62)$$

onde $A = \sqrt{6} (12\gamma^2 a_{\text{nc}}(t) + C_f)$, $B = 12\sqrt{a_{\text{nc}}(t)} \xi$, $\xi = 6\gamma^2 a_{\text{nc}}(t) + C_f$ e D é uma constante de integração. A constante D , por sua vez, pode ser eliminada fornecendo-se uma condição inicial do tipo $a_{\text{nc}}(t = t_0) := a_0$. Como o conteúdo de matéria do nosso modelo é poeira, consideraremos t_0 e a_0 como, respectivamente, o tempo e o fator de escala na era do desacoplamento entre matéria e radiação. A partir desse ponto, a matéria passa a dominar a dinâmica do universo. Em valores aproximados [232], temos:

$$t_0 \approx 3.5 \times 10^5 \text{ anos}, \quad a_0 \approx 2.84 \times 10^{-4}. \quad (7.63)$$

Depois de determinar o valor de D na Eq. (7.62) com o auxílio das condições iniciais dadas em Eq. (7.63), observamos que D se torna uma função complicada de C_f e γ , isto é, $D = D(C_f, \gamma)$. Substituindo essa dependência de volta na solução, Eq. (7.62), obtemos:

$$t + \frac{\sqrt{6}}{72\gamma^3} \left[C_f \ln \left(\frac{A + B\gamma}{12\gamma} \right) \sqrt{6} - B \right] + D(C_f, \gamma) = 0, \quad (7.64)$$

onde $D(C_f, \gamma)$ é uma função muito complicada de C_f e γ .

Portanto, podemos estimar o valor do parâmetro não-comutativo γ utilizando a Eq. (7.64) e as condições iniciais Eq. (7.63). Para isso, assumiremos que a atual expansão acelerada do universo começou em um determinado tempo t_{ae} e fator de escala $a_{\text{ae}}^{\text{nc}}$. Neste caso, consideraremos dez valores para essas grandezas, que produzirão dez valores estimados de γ como soluções da equação (7.64). Os valores de $a_{\text{ae}}^{\text{nc}}$ e t_{ae} são mostrados nas duas primeiras colunas da Tabela 10. Para um determinado valor de $a_{\text{ae}}^{\text{nc}}$, o correspondente valor de t_{ae} foi obtido utilizando a ferramenta *Cosmological Calculator for the Flat Universe* [233].

Para esse cálculo, consideramos o valor atual do parâmetro de densidade de massa $\Omega_{m0} = 0.3089$ e o valor da constante de Hubble atual $H_0 = 67.74 \text{ km/s/Mpc}$ [234]. Para a nossa solução, é necessário fornecer o valor da constante C do modelo, a qual está associada à densidade de energia da poeira. Essa quantidade pode ser expressa em termos do parâmetro de densidade de massa Ω_m e da constante de Hubble H como $C = \Omega_m H^2$. Nossa suposição é que C pode ser bem descrito pelos valores atuais desses parâmetros, de modo que $C = \Omega_{m0} H_0^2$, onde Ω_{m0} e H_0 são os valores fornecidos acima. Portanto, a solução numérica da Eq. (7.62), com a condição inicial Eq. (7.63), considerando o valor assumido para C , permite-nos obter os dez valores do parâmetro não-comutativo γ , apresentados na terceira coluna da Tabela 10. A última coluna da Tabela contém o erro numérico envolvido no cálculo de γ , resultante da solução numérica da Eq. (7.64). A observação dos valores na Tabela 10 revela que γ aumenta à medida que a_{ae}^{nc} e t_{ae} diminuem, isto é, quando nos aproximamos dos momentos iniciais do universo. Este comportamento é compatível com a expectativa teórica de que os efeitos da não-comutatividade foram mais significativos no início do universo.

Tabela 10 – Tabela com dez diferentes valores estimados de γ .

a_{ae}^{nc}	t_{ae} (10^9 anos)	γ (10^{-18})	Erro numérico (%)
1.0	13.7915	2.082712384	$9.195742436 \times 10^{-8}$
0.9	12.3111	2.083105569	0
0.8	10.7588	2.101554930	$8.840884797 \times 10^{-8}$
0.7	9.1480	2.145356273	0
0.6	7.5030	2.225406976	$4.225745762 \times 10^{-8}$
0.5	5.8623	2.358404433	$1.081683655 \times 10^{-7}$
0.4	4.2784	2.572455458	0
0.3	2.8148	2.922858692	$1.126395142 \times 10^{-7}$
0.2	1.5428	3.548830601	$2.055079754 \times 10^{-7}$
0.1	0.5469	5.003208668	$2.318944630 \times 10^{-7}$

7.5 O modelo Bianchi I não-comutativo para diferentes fluidos

Na Seção 7.3, realizamos um estudo mais aprofundado do modelo Bianchi I não-comutativo para o caso de um fluido perfeito de radiação. No entanto, é possível aplicar o modelo a diferentes tipos de fluidos perfeitos, isto é, a diferentes valores da constante ω . Não faremos aqui o estudo detalhado apresentado naquela seção; em vez disso, apresentaremos uma comparação gráfica entre os diferentes fluidos para um valor específico do parâmetro não-comutativo. Restringimos nossa atenção aos seguintes tipos de fluido perfeito: constante cosmológica ($\omega = -1$), paredes de domínio ($\omega = -2/3$), cordas cósmicas ($\omega = -1/3$), radiação ($\omega = 1/3$), poeira ($\omega = 0$), matéria rígida ($\omega = 1$).

Para cada tipo de fluido perfeito, começamos escrevendo o sistema apropriado de equações diferenciais, derivado das Eqs. (7.38), (7.40), (7.42), (7.43), e (7.44), utilizando

o valor correspondente de ω . Em seguida, resolvemos numericamente cada sistema de equações diferenciais para vários valores dos parâmetros livres e condições iniciais, obtendo as soluções para $a_{nc}(t)$ e $\beta_{\pm}(t)$ para cada fluido. Ao comparar a evolução dinâmica de $a_{nc}(t)$ entre os diferentes fluidos, observamos que o fator de escala se expande mais rapidamente para fluidos com menores valores de ω . Por outro lado, ao analisar a evolução dinâmica de $\beta_{\pm}(t)$, notamos que a isotropização do modelo ocorre mais rapidamente também para valores menores de ω . Exemplos dessas comparações são apresentados na Figura 14 e na Figura 15. Para manter a consistência com o caso da radiação, impusemos as mesmas condições iniciais para os fatores de escala anisotrópicos $\beta_{\pm}$. Como o comportamento de $\beta_{-}(t)$ é qualitativamente semelhante ao de $\beta_{+}(t)$ — sendo idêntico nas condições simétricas —, optamos por omitir o gráfico correspondente a $\beta_{-}(t)$. Na Figura 14 e Figura 15, consideramos os seguintes valores fixos: $\gamma = 10^{-18}$, $C = C_{+} = C_{-} = 0.1$, $T_c(0) = 0$, $a_c(0) = \beta_{+}(0) = \beta_{-}(0) = 1$.

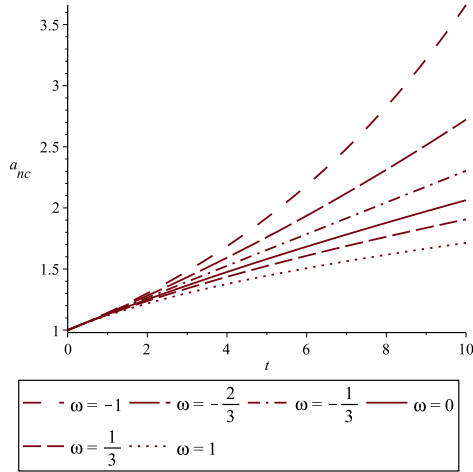


Figura 14: Comportamento de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de ω no caso não-comutativo.

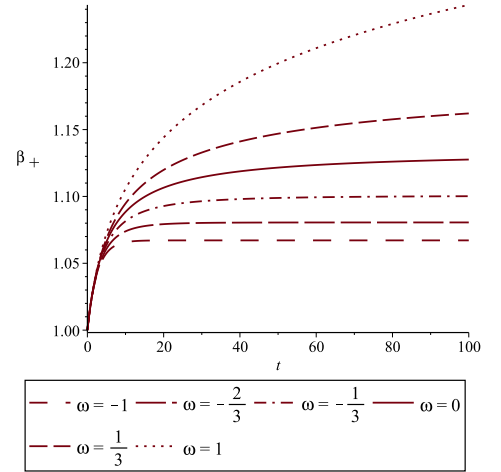


Figura 15: Comportamento de $\beta_{+}(t)$ para diferentes valores de ω no caso não-comutativo.

7.6 Considerações finais sobre o modelo Bianchi I não-comutativo com fluido perfeito de radiação

Este trabalho, apresentado neste capítulo, investigou a evolução dinâmica de um modelo Bianchi I não-comutativo acoplado a um fluido perfeito de radiação, utilizando a Relatividade Geral como base teórica. O objetivo principal foi verificar se o parâmetro não-comutativo pode descrever uma expansão acelerada do universo e, neste caso, como o modelo tende a uma configuração FLRW isotrópica com o tempo e como os parâmetros e condições iniciais influenciam o processo de isotropização. As principais conclusões obtidas incluem:

- (i) O parâmetro não-comutativo γ acelera tanto a expansão quanto a isotropização do

fator de escala isotrópico, sendo seu efeito mais pronunciado para valores negativos de γ ;

- (ii) O parâmetro de densidade de energia C aumenta a taxa de expansão e reduz o tempo de isotropização, enquanto os parâmetros de anisotropia $C_{\pm}$ aumentam a taxa de expansão mas tendem a retardar a isotropização;
- (iii) Condições iniciais como $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{\beta}_{\pm}(0)$ influenciam positivamente tanto a expansão quanto o processo de isotropização do modelo.

O estudo sugere que o modelo não-comutativo pode ser utilizado para descrever fases de expansão acelerada do universo, como a inflação ou a aceleração cósmica recente, dependendo da escolha dos parâmetros do modelo, embora o efeito do parâmetro γ seja mais relevante nos estágios iniciais do universo e por isso mais adequado para modelar o universo primordial. Além disso, foi verificado que a isotropização ocorre mais rapidamente para fluidos com menores valores de ω . Portanto, o modelo Bianchi I não-comutativo pode ser utilizado para representar um estágio anisotrópico inicial que evolui para uma configuração isotrópica ao longo do tempo com a expansão.

8 Modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido

8.1 Introdução ao gás relativístico reduzido

Em situações que envolvem um sistema com grande número de partículas, é necessário utilizar um tratamento estatístico que reproduza o comportamento macroscópico do sistema. Esse tratamento exige a definição de uma função $f = f(x^i, p^i, t)$, chamada *função de distribuição*, que descreve a distribuição das partículas no espaço de fase. A função de distribuição indica a probabilidade de encontrar uma partícula na posição x^i com moment p^i em um instante de tempo t . Ela também permite calcular o número total de partículas $\mathcal{N}$ em um sistema através da equação:

$$N = \int d^3x d^3p f(x^i, p^i, t), \quad (8.1)$$

onde d^3x e d^3p representam os elementos de volume no espaço de posições e no espaço de momenta, respectivamente.

Para partículas não-relativísticas em um gás ideal, utiliza-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann [235–238], que descreve como as partículas se distribuem em termos de seus momenta lineares p^i . Para um gás ideal de partículas relativísticas utiliza-se uma generalização dessa distribuição, chamada de distribuição de Maxwell-Jüttner [239] (ou ainda, distribuição de Jüttner-Synge [240]), que descreve as partículas em termos de suas energias totais. No entanto, em muitos casos, a análise direta desta distribuição é inviável ou excessivamente complexa, tornando necessária a utilização de simplificações. O modelo do *gás relativístico reduzido* (RRG, do inglês *reduced relativistic gas*) [241] consiste em uma versão *reduzida* da distribuição de Maxwell-Jüttner, na qual se assume que todas as partículas possuem a mesma energia cinética relativística. Embora represente uma simplificação, a diferença entre a equação de estado do RRG e a obtida via distribuição de Maxwell-Jüttner não ultrapassa 2,5% mesmo na região de baixas energias, tornando-se desprezível em regimes de altas energias [241].

Para uma partícula relativística no espaço-tempo de Minkowski o quadrivetor momentum é dado por $p^\mu = (E, p^i)$, com sua energia E determinada pela seguinte *relação de dispersão*:

$$p^\mu p_\mu = -E^2 + p^2 = -m^2, \quad (8.2)$$

onde se considerou a assinatura da métrica $(-, +, +, +)$ e se utilizou a notação $p := \sqrt{p^i p_i}$ para o módulo do vetor momento linear.

O modelo do gás relativístico reduzido (RRG), pode-se ser descrito assumindo-se um gás ideal de partículas sujeitas à relação de dispersão, Eq. (8.2), e com todas as partículas possuindo a mesma energia total $E = E_0$. Dessa forma, a função de distribuição pode ser representada através de uma *delta de Dirac* da energia [242] na forma:

$$f(p^i) = \mathcal{C} \delta(E - E_0), \quad (8.3)$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante de normalização.

A relação de dispersão Eq. (8.2) mostra que $E = E(p)$ é uma função diferenciável. Logo, pode-se escrever que:

$$\delta(E - E_0) = \left| \frac{dp}{dE} \right| \delta(p - p_0) = \frac{E}{p} \delta(p - p_0), \quad (8.4)$$

onde p_0 é o valor do módulo do vetor momento correspondente à energia E_0 , e na última igualdade se usou Eq. (8.2).

O número total de partículas $\mathcal{N}$ no modelo RRG é obtido da Eq. (8.1) integrando a função de distribuição da Eq. (8.3) sobre todas as coordenadas espaciais e o espaço de momenta, considerando o resultado da Eq. (8.4). Desse modo, obtém-se

$$\mathcal{N} = \mathcal{C} \int d^3x p^2 dp d\Omega \frac{E}{p} \delta(p - p_0) = 4\pi \mathcal{C} V p_0 E_0, \quad (8.5)$$

onde $d^3p = p^2 dp d\Omega$ é o elemento de volume no espaço de momenta.

A Eq. (8.5) determina a constante $\mathcal{C}$, que, ao ser substituída na Eq. (8.3), fornece a expressão da função de distribuição para uma concentração $n := \mathcal{N}/V$ de gás relativístico reduzido, dada por:

$$f(p^i) = \frac{n \delta(E - E_0)}{4\pi E_0 \sqrt{E_0^2 - m^2}}, \quad (8.6)$$

onde se utilizou a Eq. (8.2) para expressar p_0 em função de E_0 .

É possível demonstrar [243] que o tensor energia-momentum de um sistema de partículas relativísticas distribuídas de acordo com uma função de distribuição $f(x^i, p^i)$ é dado pela seguinte integral:

$$T^{\mu\nu} = \int d^3p \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} f(x^i, p^i). \quad (8.7)$$

O tensor energia-momentum do RRG será, então, dado pela Eq. (8.7) com função de distribuição dada pela Eq. (8.6). Substituindo essa função e resolvendo a integral, obtém-se:

$$T^{\mu\nu} = n \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & \frac{(E_0^2 - m^2)}{3E_0} \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

onde se usou que $p^0 = E_0$ e $p^i p^j = p^2 \delta_{ij}/3 = (E_0^2 - m^2) \delta_{ij}/3$. Então, a partir da Eq. (8.8), identifica-se a densidade de energia ρ e a pressão P como:

$$\rho = T^{00} = nE_0, \quad P = \frac{1}{3} T^i_i = \frac{n(E_0^2 - m^2)}{3E_0}. \quad (8.9)$$

Definindo-se a densidade de energia de repouso $\rho_d := nm$, obtém-se a equação de estado do gás relativístico reduzido na forma:

$$P = \frac{\rho}{3} \left(1 - \frac{\rho_d^2}{\rho^2} \right), \quad (8.10)$$

expressão que descreve uma transição suave entre o comportamento de um gás de radiação em altas energias e de um gás de poeira em baixas energias. Note que, no regime de alta energia, onde $\rho \gg \rho_d$, tem-se $P \approx \rho/3$, o que caracteriza um comportamento de radiação; já no regime de baixa energia, onde $\rho \approx \rho_d$, tem-se $P \approx 0$, caracterizando poeira.

O modelo RRG é por isso utilizado para descrever a transição de um universo dominado por radiação (partículas relativísticas) para um universo dominado por matéria (partículas não-relativísticas), ou seja, a transição da *era da radiação* para a *era da matéria*. Um modelo semelhante foi anteriormente proposto por A. D. Sakharov [244]. Conforme explicado em [245], após a submissão de um artigo [246], descobriu-se [247] que Sakharov já havia utilizado um modelo simplificado equivalente, que também fazia interpolação entre as eras de radiação e matéria.

8.2 Modelo comutativo de Bianchi I com gás relativístico reduzido

A partir desta seção, com base nos conceitos introduzidos anteriormente, vamos construir um modelo Bianchi I acoplado a um fluido perfeito de gás relativístico reduzido (RRG). A razão desta escolha é investigar se o RRG, quando acoplado à não-comutatividade, mantém sua evolução característica e se isotropiza com o tempo, de modo a ser útil na descrição das fases dominadas por radiação e por matéria não-relativística, bem como compreender como sua dinâmica difere do caso comutativo. Além disso, buscaremos avaliar, por meio de estimativas e ajustes paramétricos, se o modelo não-comutativo com RRG pode mimetizar aspectos dinâmicos da constante cosmológica, ainda que uma substituição completa dessa esteja fora do escopo deste trabalho. O modelo apresentado em todo este capítulo é baseado no artigo atualmente disponível no *arXiv* [248] e já submetido para publicação.

Inicialmente, consideraremos o elemento de linha de Bianchi I na parametrização de Misner:

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) \left[e^{2(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} dx^2 + e^{2(\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} dy^2 + e^{-4\beta_+} dz^2 \right], \quad (8.11)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala isotrópico, $\beta_{\pm}(t)$ são os fatores de escala anisotrópicos e $N(t)$ é a função lapso do formalismo ADM.

O gás relativístico reduzido (RRG) pode ser descrito pelo tensor energia-momentum de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + P (g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (8.12)$$

cuja conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduz à equação

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (8.13)$$

onde H é o parâmetro de Hubble. Esta Eq.(8.13) permanece válida mesmo no contexto Bianchi I, uma vez que o parâmetro de Hubble médio coincide com o parâmetro de Hubble

para o fator de escala isotrópico $a(t)$, isto é:

$$H = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (8.14)$$

onde $H_i := \dot{a}_i/a_i$, com $i = 1, 2, 3$, são os parâmetros de Hubble ao longo das diferentes direções espaciais.

A expressão para a densidade de energia do fluido RRG pode ser obtida a partir da Eq. (8.10) e da Eq. (8.13), cuja solução convenientemente parametrizada é dada por:

$$\rho(a) = \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}, \quad (8.15)$$

na qual ρ_1 e ρ_2 são constantes de integração. A Eq. (8.15) evidencia a interpolação entre os regimes dominados por poeira ($\propto a^{-3}$) e radiação ($\propto a^{-4}$). No entanto, essa expressão descreve um único fluido com equação de estado efetiva, e não uma soma de duas componentes físicas independentes.

Esta expressão, Eq. (8.15), será usada para descrever o setor de matéria em nosso modelo, visto que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_m$ de um fluido perfeito é dada por:

$$\mathcal{L}_m = -\rho. \quad (8.16)$$

A ação total S é composta pela ação de Einstein-Hilbert para o setor geométrico (com métrica Bianchi I) somada à ação do setor de matéria (fluido RRG), ou seja:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \mathcal{L}_m \right), \quad (8.17)$$

que, após as devidas substituições, assume a forma:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x a^3 \left\{ -\frac{3}{N} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{N} \dot{\beta}_+^2 + \frac{3}{N} \dot{\beta}_-^2 - N \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2} \right\}. \quad (8.18)$$

Da expressão acima, obtemos os momenta canonicamente conjugados:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -\frac{6a\dot{a}}{N}, \quad p_{\pm} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_{\pm}} = \frac{6a^3 \dot{\beta}_{\pm}}{N}, \quad (8.19)$$

os quais serão utilizados na obtenção da densidade hamiltoniana total $\mathcal{H}$, por meio da transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - \mathcal{L}, \quad (8.20)$$

que resulta na expressão final:

$$\mathcal{H} = N \left\{ -\frac{p_a^2}{12a} + \frac{p_+^2}{12a^3} + \frac{p_-^2}{12a^3} + a^3 \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2} \right\}. \quad (8.21)$$

8.3 O formalismo de Faddeev-Jackiw aplicado ao modelo Bianchi I com gás relativístico reduzido

Para o presente modelo, será aplicado o formalismo simplético generalizado para sistemas com vínculos, o qual faz uso do formalismo de Faddeev-Jackiw e do algoritmo de Barcelos-Wotzasek. Como primeiro passo, partindo da densidade hamiltoniana acima, pode-se obter a primeira possível densidade lagrangiana do sistema, que dentro do procedimento iterativo do formalismo é chamada de *lagrangiana-zero*, dada por:

$$\mathcal{L}^{(0)} = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - V^{(0)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N), \quad (8.22)$$

onde $V^{(0)}$ é o potencial simplético, dado por:

$$V^{(0)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N) = N \Omega, \quad (8.23)$$

onde

$$\Omega = -\frac{p_a^2}{12a} + \frac{p_+^2}{12a^3} + \frac{p_-^2}{12a^3} + a^3 \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}. \quad (8.24)$$

As variáveis simpléticas são então:

$$\xi_i^{(0)} = (a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N), \quad (8.25)$$

e os elementos da 1-forma associados à lagrangiana-zero, Eq. (8.22), são:

$$A_a^{(0)} = p_a, \quad A_{p_a}^{(0)} = 0, \quad A_{\beta_{\pm}}^{(0)} = p_{\pm}, \quad A_{p_{\pm}}^{(0)} = 0, \quad A_N^{(0)} = 0. \quad (8.26)$$

Os elementos da matriz simplética são obtidos a partir da seguinte definição:

$$f_{\xi^i \xi^j} = \frac{\partial A_{\xi^j}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial A_{\xi^i}}{\partial \xi^j}, \quad (8.27)$$

que nos fornece os seguintes elementos não nulos:

$$f_{a p_a}^{(0)} = \frac{\partial A_{p_a}^{(0)}}{\partial a} - \frac{\partial A_a^{(0)}}{\partial p_a} = -1 = -f_{p_a a}^{(0)}, \quad f_{\beta_{\pm} p_{\pm}}^{(0)} = \frac{\partial A_{p_{\pm}}^{(0)}}{\partial \beta_{\pm}} - \frac{\partial A_{\beta_{\pm}}^{(0)}}{\partial p_{\pm}} = -1 = -f_{p_{\pm} \beta_{\pm}}^{(0)}. \quad (8.28)$$

Dessa forma, a matriz simplética de iteração-zero, que é singular, é escrita como:

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Podemos, então, conduzir a seguinte operação:

$$f^{(0)} \cdot \bar{\nu}^{(0)} = 0, \quad (8.30)$$

onde $\bar{\nu}^{(0)}$ é um vetor coluna com sete componentes $\bar{\nu}_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, 7$), resultando em $\bar{\nu}_7^{(0)}$ sendo arbitrário, enquanto todos os demais elementos são nulos. A transposta do vetor coluna $\bar{\nu}^{(0)}$ nos fornece o vetor linha, chamado de modo zero:

$$\nu^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

A multiplicação do modo zero com o gradiente do potencial simplético é então:

$$0 = \sum_{i=1}^7 \nu_i^{(0)} \cdot \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} = \nu_N^{(0)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial N} = \Omega, \quad (8.32)$$

do que resulta:

$$\Omega = 0. \quad (8.33)$$

Esta Eq. (8.33) representa um vínculo, o qual deve ser introduzido na parte cinética da densidade lagrangiana de primeira ordem, através de um multiplicador de Lagrange τ . Assim, a nova densidade lagrangiana, chamada de *lagrangiana de primeira iteração*, é dada por:

$$\mathcal{L}^{(1)} = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- + \Omega \dot{\tau} - V^{(1)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N), \quad (8.34)$$

com:

$$V^{(1)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N) = V^{(0)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-) = N\Omega. \quad (8.35)$$

O conjunto de variáveis simpléticas na primeira iteração é:

$$\xi_i^{(1)} = (a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N, \tau), \quad (8.36)$$

e os elementos 1-forma para a Eq. (8.34) são:

$$A_a^{(1)} = p_a, \quad A_{p_a}^{(1)} = 0, \quad A_{\beta_{\pm}}^{(1)} = p_{\pm}, \quad A_{p_{\pm}}^{(1)} = 0, \quad A_N^{(1)} = 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = \Omega. \quad (8.37)$$

A partir da definição da matriz simplética, Eq. (8.27), os elementos não nulos da

matriz simplética de primeira iteração são dados por:

$$\begin{aligned}
f_{a p_a}^{(1)} &= \frac{\partial A_{p_a}^{(1)}}{\partial a} - \frac{\partial A_a^{(1)}}{\partial p_a} = -1 = -f_{p_a a}^{(1)}, \\
f_{\beta_{\pm} p_{\pm}}^{(1)} &= \frac{\partial A_{p_{\pm}}^{(1)}}{\partial \beta_{\pm}} - \frac{\partial A_{\beta_{\pm}}^{(1)}}{\partial p_{\pm}} = -1 = -f_{p_{\pm} \beta_{\pm}}^{(1)}, \\
f_{a \tau}^{(1)} &= \frac{\partial A_{\tau}^{(1)}}{\partial a} - \frac{\partial A_a^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -f_{\tau a}^{(1)}, \\
f_{p_a \tau}^{(1)} &= \frac{\partial A_{\tau}^{(1)}}{\partial p_a} - \frac{\partial A_{p_a}^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_a} = -f_{\tau p_a}^{(1)}, \\
f_{\beta_{\pm} \tau}^{(1)} &= \frac{\partial A_{\tau}^{(1)}}{\partial \beta_{\pm}} - \frac{\partial A_{\beta_{\pm}}^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{\pm}} = -f_{\tau \beta_{\pm}}^{(1)}, \\
f_{p_{\pm} \tau}^{(1)} &= \frac{\partial A_{\tau}^{(1)}}{\partial p_{\pm}} - \frac{\partial A_{p_{\pm}}^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_{\pm}} = -f_{\tau p_{\pm}}^{(1)}, \\
f_{N \tau}^{(1)} &= \frac{\partial A_{\tau}^{(1)}}{\partial N} - \frac{\partial A_N^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial N} = -f_{\tau N}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{8.38}$$

Segue-se que a matriz simplética da primeira iteração é dada por:

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial p_a} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_+} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial p_+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial p_-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial p_a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_+} & -\frac{\partial \Omega}{\partial p_+} & -\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_-} & -\frac{\partial \Omega}{\partial p_-} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.39}$$

Podemos conduzir a operação:

$$f^{(1)} \cdot \bar{\nu}^{(1)} = 0, \tag{8.40}$$

onde $\bar{\nu}^{(1)}$ é um vetor coluna com oito componentes $\bar{\nu}_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, 8$), resultando em $\bar{\nu}_7^{(1)}$ sendo arbitrário, e os demais elementos dados por:

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_1^{(1)} &= -\bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_a}, & \bar{\nu}_2^{(1)} &= \bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial a}, & \bar{\nu}_3^{(1)} &= -\bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_+}, \\
\bar{\nu}_4^{(1)} &= \bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_+}, & \bar{\nu}_5^{(1)} &= -\bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_-}, & \bar{\nu}_6^{(1)} &= \bar{\nu}_8^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_-}, \\
\bar{\nu}_1^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \bar{\nu}_2^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_a} + \bar{\nu}_3^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_+} + \bar{\nu}_4^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_+} + \bar{\nu}_5^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_-} + \bar{\nu}_6^{(1)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p_-} &= 0.
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Para o sistemas de Eqs. (8.41), a substituição de todas as primeiras equações na última resulta que $\bar{\nu}_8^{(1)}$ é arbitrário. O transposto ao vetor-coluna $\bar{\nu}^{(1)}$ é o vetor-linha $\nu^{(1)}$, conhecido como *modo-primeiro* da matriz simplética. Assim, escolhendo-se $\bar{\nu}_7^{(1)} = \bar{\nu}_8^{(1)} = 1$, obtém-se o modo zero da matriz simplética da *primeira iteração* como:

$$\nu^{(1)} = \left[-\frac{\partial \Omega}{\partial p_a}, \frac{\partial \Omega}{\partial a}, -\frac{\partial \Omega}{\partial p_+}, \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_+}, -\frac{\partial \Omega}{\partial p_-}, \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_-}, 1, 1 \right]. \quad (8.42)$$

A multiplicação desse modo zero com o gradiente do potencial simplético de primeira iteração resulta em:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^8 \nu_i^{(1)} \cdot \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} &= \nu_1^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial a} + \nu_2^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial p_a} + \nu_3^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial \beta_+} + \nu_4^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial p_+} \\ &+ \nu_5^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial \beta_-} + \nu_6^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial p_-} + \nu_7^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial N} + \nu_8^{(1)} \cdot \frac{\partial(N\Omega)}{\partial \tau} = \Omega. \end{aligned} \quad (8.43)$$

que leva novamente à condição de vínculo:

$$\Omega = 0. \quad (8.44)$$

Este resultado, Eq. (8.44), indica a presença de uma simetria de calibre no sistema, a qual deve ser fixada. Para isso, introduzimos um termo de fixação de calibre Σ na lagrangiana original Eq. (8.22) por meio de um multiplicador de Lagrange η [249], resultando na nova lagrangiana-zero:

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = p_a \dot{a} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- + \Sigma \dot{\eta} - \tilde{V}^{(0)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N), \quad (8.45)$$

onde a condição de calibre escolhida é:

$$\Sigma := N - 1, \quad (8.46)$$

o que implica que $N = 1$. Na lagrangiana, Eq. (8.45), o potencial simplético é agora dado por:

$$\tilde{V}^{(0)}(a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N) = N\Omega. \quad (8.47)$$

O conjunto de variáveis simpléticas do sistema torna-se:

$$\tilde{\xi}_i^{(0)} = (a, p_a, \beta_+, p_+, \beta_-, p_-, N, \eta), \quad (8.48)$$

com os elementos 1-forma dados por:

$$\tilde{A}_a^{(0)} = p_a, \quad \tilde{A}_{p_a}^{(0)} = 0, \quad \tilde{A}_{\beta_{\pm}}^{(0)} = p_{\pm}, \quad \tilde{A}_{p_{\pm}}^{(0)} = 0, \quad \tilde{A}_N^{(0)} = 0, \quad \tilde{A}_{\eta}^{(0)} = \Sigma = N - 1. \quad (8.49)$$

Assim, os elementos não nulos da nova matriz simplética são dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{a p_a}^{(0)} &= \frac{\partial \tilde{A}_{p_a}^{(0)}}{\partial a} - \frac{\partial \tilde{A}_a^{(0)}}{\partial p_a} = -1 = -\tilde{f}_{p_a a}^{(0)}, \\ \tilde{f}_{\beta_{\pm} p_{\pm}}^{(0)} &= \frac{\partial \tilde{A}_{p_{\pm}}^{(0)}}{\partial \beta_{\pm}} - \frac{\partial \tilde{A}_{\beta_{\pm}}^{(0)}}{\partial p_{\pm}} = -1 = -\tilde{f}_{p_{\pm} \beta_{\pm}}^{(0)}, \\ \tilde{f}_{N \eta}^{(0)} &= \frac{\partial \tilde{A}_{\eta}^{(0)}}{\partial N} - \frac{\partial \tilde{A}_N^{(0)}}{\partial \eta} = 1 = -\tilde{f}_{\eta N}^{(0)}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Logo, a nova matriz simplética da iteração-zero com calibre fixado é:

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.51)$$

Como essa matriz é não singular, sua inversa pode ser computada diretamente. A matriz inversa $\tilde{f}^{(0)-1}$, que representa os parênteses de Poisson da teoria comutativa, é:

$$\tilde{f}^{(0)-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.52)$$

Portanto, os parênteses de Poisson não nulos da teoria são dados por:

$$\{a, p_a\} = \{\beta_+, p_+\} = \{\beta_-, p_-\} = -\{N, \eta\} = 1. \quad (8.53)$$

8.4 Modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido

Para construir o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido, modificamos a matriz dada pela Eq. (8.52) pela introdução das seguintes relações de não-comutatividade:

$$\{a, \beta_{\pm}\} = \varepsilon_{\pm}, \quad \{\beta_+, \beta_-\} = \gamma, \quad \{p_a, p_{\pm}\} = \sigma_{\pm}, \quad \{p_+, p_-\} = \chi, \quad (8.54)$$

onde ε_+ , ε_- , γ , σ_+ , σ_- e χ são constantes reais. Isso transforma a matriz simplética comutativa Eq. (8.52) na seguinte forma:

$$f^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon_+ & 0 & \varepsilon_- & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \sigma_+ & 0 & \sigma_- & 0 & 0 \\ -\varepsilon_+ & 0 & 0 & 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_+ & -1 & 0 & 0 & \chi & 0 & 0 \\ -\varepsilon_- & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_- & 0 & -\chi & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

A inversa desta matriz, a nova matriz simplética f , é dada por:

$$f = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 - \gamma\chi & -\sigma_+ & \gamma\sigma_- & -\sigma_- & -\gamma\sigma_+ & 0 & 0 \\ \gamma\chi - 1 & 0 & -\chi\varepsilon_- & -\varepsilon_+ & \chi\varepsilon_+ & -\varepsilon_- & 0 & 0 \\ \sigma_+ & \chi\varepsilon_- & 0 & 1 - \varepsilon_- \sigma_- & -\chi\varepsilon_- \sigma_+ & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\sigma_- & \varepsilon_+ & \varepsilon_- \sigma_- - 1 & 0 & -\varepsilon_+ \sigma_- & -\gamma & 0 & 0 \\ \sigma_- & -\chi\varepsilon_+ & \chi\varepsilon_+ \sigma_- & 0 & 1 - \varepsilon_+ \sigma_+ & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\sigma_+ & \varepsilon_- & -\varepsilon_- \sigma_+ & \gamma\varepsilon_+ \sigma_+ - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.56)$$

com:

$$\Gamma = \varepsilon_+ \sigma_+ + \varepsilon_- \sigma_- + \gamma\chi - 1, \quad \Gamma \neq 0. \quad (8.57)$$

Os elementos da matriz f satisfazem a condição dada pela Eq. (8.27), que ao ser aplicada aos termos da matriz f resulta nas seguintes equações:

$$f_{ap_a} = \frac{1 - \gamma\chi}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial p_a}, \quad f_{a\beta_+} = -\frac{\sigma_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \beta_+}, \quad (8.58)$$

$$f_{ap_+} = \frac{\gamma\sigma_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_+}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial p_+}, \quad f_{a\beta_-} = -\frac{\sigma_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \beta_-}, \quad (8.59)$$

$$f_{ap_-} = -\frac{\gamma\sigma_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_-}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial p_-}, \quad f_{p_a\beta_+} = -\frac{\chi\varepsilon_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_a} - \frac{\partial A_{p_a}}{\partial \beta_+}, \quad (8.60)$$

$$f_{p_a p_+} = -\frac{\varepsilon_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_+}}{\partial p_a} - \frac{\partial A_{p_a}}{\partial p_+}, \quad f_{p_a\beta_-} = \frac{\chi\varepsilon_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_a} - \frac{\partial A_{p_a}}{\partial \beta_-}, \quad (8.61)$$

$$f_{p_a p_-} = -\frac{\varepsilon_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_-}}{\partial p_a} - \frac{\partial A_{p_a}}{\partial p_-}, \quad f_{\beta_+ p_+} = \frac{1 - \varepsilon_- \sigma_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_+}}{\partial \beta_+} - \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_+}, \quad (8.62)$$

$$f_{\beta_+ \beta_-} = -\frac{\chi}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial \beta_+} - \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial \beta_-}, \quad f_{\beta_+ p_-} = \frac{\varepsilon_- \sigma_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_-}}{\partial \beta_+} - \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_-}, \quad (8.63)$$

$$f_{p_+ \beta_-} = -\frac{\varepsilon_+ \sigma_-}{\Gamma} = \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_+} - \frac{\partial A_{p_+}}{\partial \beta_-}, \quad f_{p_+ p_-} = -\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_-}}{\partial p_+} - \frac{\partial A_{p_+}}{\partial p_-}, \quad (8.64)$$

$$f_{\beta_- p_-} = \frac{1 - \varepsilon_+ \sigma_+}{\Gamma} = \frac{\partial A_{p_-}}{\partial \beta_-} - \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_-}, \quad f_{N\eta} = 1 = \frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta}. \quad (8.65)$$

Para que o modelo continue sendo de primeira ordem nas velocidades, os termos da 1-forma A_{p_a} , A_{p_+} , A_{p_-} e A_N devem ser nulos, pois do contrário surgiriam termos do tipo $A_{p_a}\dot{p}_a$, $A_{p_+}\dot{p}_+$, $A_{p_-}\dot{p}_-$ e $A_N\dot{N}$, os quais introduziriam dependências de segunda ordem

nas velocidades. Dessa forma, o sistema de equações acima se reduz a:

$$-\frac{\partial A_a}{\partial p_a} = \frac{1 - \gamma\chi}{\Gamma}, \quad \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \beta_+} = -\frac{\sigma_+}{\Gamma}, \quad -\frac{\partial A_a}{\partial p_+} = \frac{\gamma\sigma_-}{\Gamma}, \quad (8.66)$$

$$\frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \beta_-} = -\frac{\sigma_-}{\Gamma}, \quad -\frac{\partial A_a}{\partial p_-} = -\frac{\gamma\sigma_+}{\Gamma}, \quad \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_a} = -\frac{\chi\varepsilon_-}{\Gamma}, \quad (8.67)$$

$$\frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_a} = \frac{\chi\varepsilon_+}{\Gamma}, \quad -\frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_+} = \frac{1 - \varepsilon_- \sigma_-}{\Gamma}, \quad \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial \beta_+} - \frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial \beta_-} = -\frac{\chi}{\Gamma}, \quad (8.68)$$

$$-\frac{\partial A_{\beta_+}}{\partial p_-} = \frac{\varepsilon_- \sigma_+}{\Gamma}, \quad \frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_+} = -\frac{\varepsilon_+ \sigma_-}{\Gamma}, \quad -\frac{\partial A_{\beta_-}}{\partial p_-} = \frac{1 - \varepsilon_+ \sigma_+}{\Gamma}, \quad \frac{\partial A_\eta}{\partial N} = 1. \quad (8.69)$$

Além disso, devido a essa mesma condição de primeira ordem nas velocidades, os parâmetros de não-comutatividade ε_+ , ε_- e γ , embora anteriormente presentes na estrutura da matriz simplética deformada, se anularão, de modo que:

$$\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \gamma = 0, \quad (8.70)$$

e por isso não aparecerão explicitamente no sistema dinâmico resultante. Além disso, em razão da Eq. (8.70), parte da não-comutatividade é eliminada, de modo que Γ na Eq. (8.57) passa a ser dado por $\Gamma = -1$. Dessa forma, a solução do sistema de equações dado pela Eq. (8.69) torna-se:

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{1}{\Gamma} (-p_a + \alpha_1 \sigma_+ \beta_+ + \alpha_2 \sigma_- \beta_-), \quad A_{\beta_+} = \frac{1}{\Gamma} (-p_+ - \alpha_3 \sigma_+ a + \alpha_4 \chi \beta_-), \\ A_{\beta_-} &= \frac{1}{\Gamma} (-p_- - \alpha_5 \sigma_- a - \alpha_6 \chi \beta_+), \quad A_\eta = \Sigma = N - 1, \end{aligned} \quad (8.71)$$

onde os α_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são constantes. Para determinar essas constantes, basta inserir os valores das Eqs. (8.71) nas Eqs. (8.69), resultando no seguinte sistema:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 + \alpha_5 = 1, \quad \alpha_4 + \alpha_6 = 1. \quad (8.72)$$

Escolhendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_4 = 1/2$, obtém-se: $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$ e $\alpha_6 = 1/2$. Substituindo esses valores nas Eqs. (8.71), temos:

$$\begin{aligned} A_a &= -\frac{p_a}{\Gamma}, \quad A_{\beta_+} = \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_+ a - p_+ + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right), \\ A_{\beta_-} &= \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_- a - p_- - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right), \quad A_\eta = \Sigma := N - 1, \end{aligned} \quad (8.73)$$

onde no calibre $N = 1$ aqui adotado teremos $A_\eta = 0$.

Desse modo, a densidade lagrangiana de primeira ordem nas velocidades é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NC}} &= -\frac{p_a}{\Gamma} \dot{a} + \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_+ a - p_+ + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right) \dot{\beta}_+ + \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_- a - p_- - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right) \dot{\beta}_- \\ &\quad + \Sigma \dot{\eta} - V_{\text{NC}}(a, p_a, p_+, p_-, N), \end{aligned} \quad (8.74)$$

onde o potencial simplético é dado por:

$$V_{\text{NC}}(a, p_a, p_+, p_-, N) = N \Omega. \quad (8.75)$$

Podemos expressar esta lagrangiana, Eq. (8.74), em termos de um novo conjunto de variáveis comutativas que satisfazem os parênteses de Poisson canônicos usuais, Eq. (8.53), e também os parênteses deformados, Eq. (8.54), até primeira ordem nos parâmetros não-comutativos, já considerada a Eq. (8.70). Isto pode ser feito introduzindo-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a, & \tilde{\beta}_+ &= \beta_+, & \tilde{\beta}_- &= \beta_-, & \tilde{p}_a &= -\frac{p_a}{\Gamma}, \\ \tilde{p}_+ &= \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_+ a - p_+ + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right), & \tilde{p}_- &= \frac{1}{\Gamma} \left(-\sigma_- a - p_- - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right). \end{aligned} \quad (8.76)$$

Este novo conjunto de variáveis $\{\tilde{a}, \tilde{\beta}_+, \tilde{\beta}_-, \tilde{p}_a, \tilde{p}_+, \tilde{p}_-\}$ incorpora todos os efeitos não-comutativos nos parâmetros χ , σ_+ e σ_- . É importante dizer que essas transformações surgem naturalmente da estrutura simplética associada à lagrangiana da Eq. (8.74), conforme derivada do formalismo simplético adotado neste trabalho.

Consequentemente, em termos das novas variáveis, a lagrangiana (8.74) assume a forma:

$$\mathcal{L}_{\text{NC}} = \tilde{p}_a \dot{\tilde{a}} + \tilde{p}_+ \dot{\tilde{\beta}}_+ + \tilde{p}_- \dot{\tilde{\beta}}_- + \Sigma \dot{\eta} - N \Omega. \quad (8.77)$$

Restringindo-nos aos termos de primeira ordem nos parâmetros de não-comutatividade, podemos inverter a transformação da Eq. (8.76), obtendo:

$$p_a = \tilde{p}_a, \quad p_+ = \tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_-, \quad p_- = \tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+. \quad (8.78)$$

Portanto, a partir da Eq. (8.77), ao considerar $N = 1$, obtemos a seguinte hamiltoniana modificada:

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{\tilde{p}_a^2}{12a} + \frac{(\tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_-)^2}{12a^3} + \frac{(\tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+)^2}{12a^3} + a^3 \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}. \quad (8.79)$$

que corresponde à hamiltoniana do sistema modificada pela contribuição não-comutativa. Nota-se que, quando $\sigma_+ = \sigma_- = \chi = 0$, recuperamos a super-hamiltoniana original $\mathcal{H}$ dada pela Eq. (8.21).

8.5 Equações de evolução para o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido

Para estudar a evolução temporal do modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido (RRG), começamos com as equações de Hamilton, dadas em função da hamiltoniana $\mathcal{H}$, Eq. (8.79). Assim, temos:

$$\dot{a} = \{a, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_a} = -\frac{1}{6a} \tilde{p}_a, \quad (8.80)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}}_a &= \{\tilde{p}_a, \tilde{\mathcal{H}}\} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial a} \\
&= -\frac{\tilde{p}_a^2}{12a^2} + \frac{1}{4a^4} \left(\tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right)^2 + \frac{1}{6a^3} \left(\tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right) \sigma_+ \\
&\quad + \frac{1}{4a^4} \left(\tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right)^2 + \frac{1}{6a^3} \left(\tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right) \sigma_- \\
&\quad - 3a^2 \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2} + a^2 \frac{\left[3\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + 4\rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]}{\left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}}. \tag{8.81}
\end{aligned}$$

$$\dot{\beta}_+ = \{\beta_+, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_+} = \frac{1}{6a^3} \left(\tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right), \tag{8.82}$$

$$\dot{\tilde{p}}_+ = \{\tilde{p}_+, \tilde{\mathcal{H}}\} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \beta_+} = \frac{1}{12a^3} \left(\tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right) \chi, \tag{8.83}$$

$$\dot{\beta}_- = \{\beta_-, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_-} = \frac{1}{6a^3} \left(\tilde{p}_- - \sigma_- a - \frac{1}{2} \chi \beta_+ \right), \tag{8.84}$$

$$\dot{\tilde{p}}_- = \{\tilde{p}_-, \tilde{\mathcal{H}}\} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \beta_-} = -\frac{1}{12a^3} \left(\tilde{p}_+ - \sigma_+ a + \frac{1}{2} \chi \beta_- \right) \chi. \tag{8.85}$$

Da Eq. (8.80), podemos escrever:

$$\tilde{p}_a = -6a\dot{a}. \tag{8.86}$$

Por outro lado, a partir das Eqs. (8.82) e (8.85), temos:

$$\tilde{p}_- = C_1 - \frac{1}{2} \chi \beta_+, \tag{8.87}$$

onde C_1 é uma constante de integração. De forma análoga, das Eqs. (8.83) e (8.84), segue-se:

$$\tilde{p}_+ = C_2 + \frac{1}{2} \chi \beta_-, \tag{8.88}$$

sendo C_2 outra constante de integração.

A evolução das funções $a(t)$, $\beta_+(t)$, $\beta_-(t)$ exigem três equações dinâmicas. A primeira surge da imposição da condição de super-hamiltoniana, ou seja, $\tilde{\mathcal{H}} = 0$. Considerando a hamiltoniana modificada da Eq. (8.79) e mantendo apenas os termos de primeira ordem nos parâmetros não-comutativos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{1}{36a^6} \left(C_2^2 + 2C_2 \chi \beta_- + C_1^2 - 2C_1 \chi \beta_+ \right) \\
&\quad - \frac{1}{18a^5} (C_1 \sigma_- + C_2 \sigma_+) + \frac{1}{3} \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}. \tag{8.89}
\end{aligned}$$

Para obter a segunda equação de evolução, combinamos a Eq. (8.85) com as Eqs. (8.87) e (8.88), mantendo termos até primeira ordem:

$$\dot{\beta}_+ = \frac{1}{6a^3} (C_2 - \sigma_+ a + \chi \beta_-). \tag{8.90}$$

Finalmente, para a terceira equação de evolução, combinamos a Eq. (8.83) com (8.87) e (8.88), obtendo:

$$\dot{\beta}_- = \frac{1}{6a^3} (C_1 - \sigma_- a - \chi \beta_+). \quad (8.91)$$

Assim, para o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais: Eqs. (8.89), (8.90) e (8.91). Na próxima seção, será realizado um estudo numérico destas soluções.

8.6 A evolução do universo no modelo não-comutativo

Esta seção apresenta o estudo das soluções numéricas do sistema de Eqs. (8.89), (8.90) e (8.91), que descrevem a dinâmica do nosso modelo. Para isso, realizamos uma análise da evolução das funções de escala $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em relação a diferentes parâmetros: χ , σ_+ , σ_- , C_1 , C_2 , ρ_1 , ρ_2 , $a_0 := a(0)$, $\beta_{+0} := \beta_+(0)$ e $\beta_{-0} := \beta_-(0)$. A investigação das soluções foi conduzida variando individualmente cada parâmetro ou condição inicial do modelo, mantendo todos os demais parâmetros e condições fixos. Isso permitiu avaliar comparativamente a influência de diferentes valores sobre a dinâmica das funções de escala. O estudo foi realizado para uma ampla faixa de valores dos diferentes parâmetros e condições iniciais.

Adotou-se a convenção de que, sempre que o parâmetro estudado não era uma condição inicial das funções de escala, as condições iniciais eram fixadas como $a_0 = \beta_{+0} = \beta_{-0} = 1$. Quando uma condição inicial específica era investigada, variava-se apenas essa condição, mantendo as outras duas fixas em 1.

Como exemplo da análise, foram selecionados cinco valores representativos para cada parâmetro ou condição inicial. As soluções correspondentes foram plotadas como curvas nos gráficos de $a \times t$, $\beta_+ \times t$ e $\beta_- \times t$. Além disso, foram elaboradas tabelas com os valores numéricos de a , β_+ e β_- para os cinco valores selecionados em diferentes instantes de tempo. Em todos os casos analisados, a função $a(t)$ apresenta comportamento expansivo, enquanto $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ tendem a se estabilizar em valores constantes após um período inicial de variação. As tabelas demonstram essa expansão contínua de $a(t)$ e a estabilização dos parâmetros anisotrópicos em tempos tardios.

Para os parâmetros não-comutativos, obtivemos os seguintes resultados: Para χ , observa-se que o fator de escala a expande mais rapidamente quanto menor o valor de χ . Além disso, β_+ atinge valores constantes mais elevados à medida que χ aumenta, enquanto β_- atinge valores constantes mais elevados à medida que χ diminui (ver Figuras 16, 17, 18, 19 e Tabela 11). Quanto a σ_+ , sua influência segue um padrão semelhante: o fator de escala expande mais rapidamente quanto menor o valor de σ_+ . Ademais, β_+ aumenta assintoticamente à medida que σ_+ se torna mais negativo, enquanto β_- cresce com o aumento dos valores de σ_+ (ver Figuras 20, 21, 22, 23 e Tabela 12). Com relação a σ_- ,

o fator de escala a expande mais rapidamente quanto menor o valor de σ_- . Além disso, tanto β_+ quanto β_- atingem valores constantes mais elevados à medida que σ_- diminui (ver Figuras 24, 24, 26, 27 e Tabela 13).

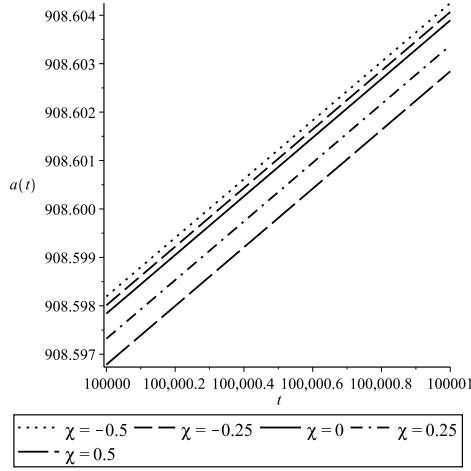


Figura 16: $a(t) \times t$ para diferentes valores de χ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

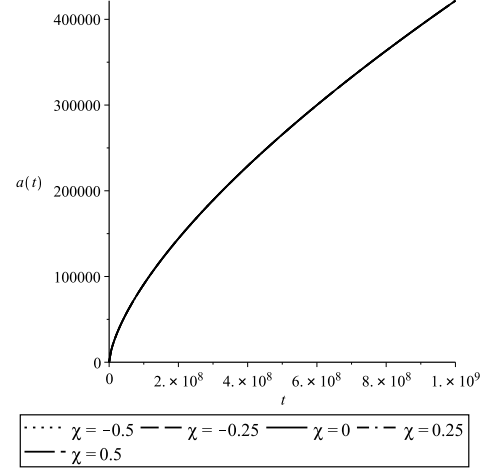


Figura 17: $a(t) \times t$ para diferentes valores de χ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

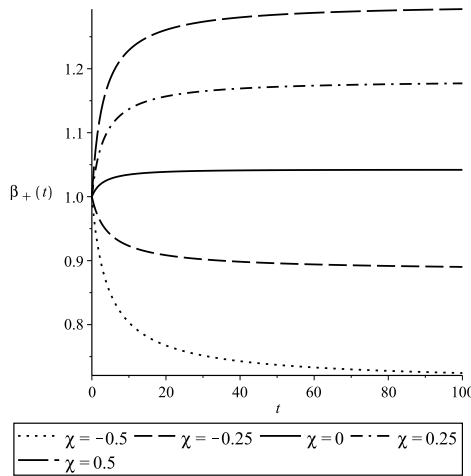


Figura 18: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de χ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

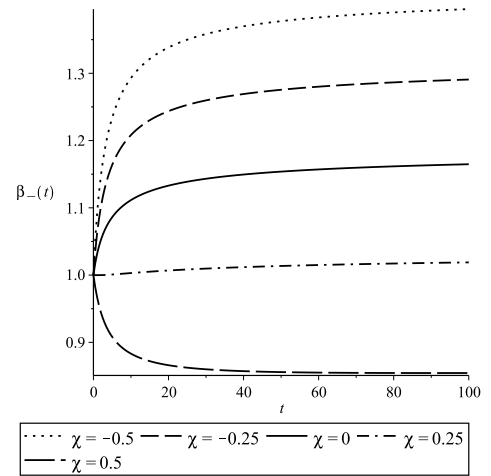


Figura 19: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de χ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

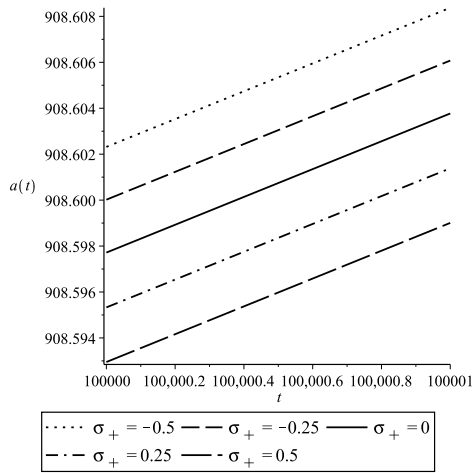


Figura 20: $a(t) \times t$ para diferentes valores de σ_+ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_- = -0.05$.

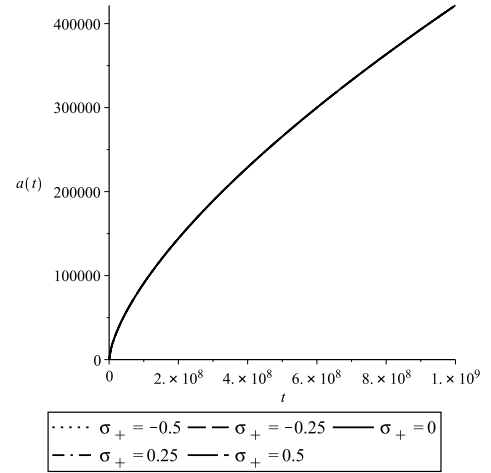


Figura 21: $a(t) \times t$ para diferentes valores de σ_+ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_- = -0.05$.

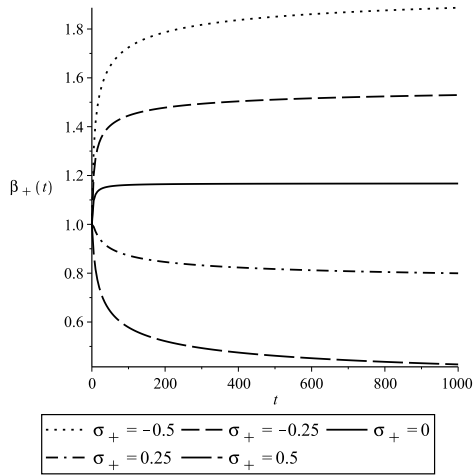


Figura 22: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de σ_+ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_- = -0.05$.

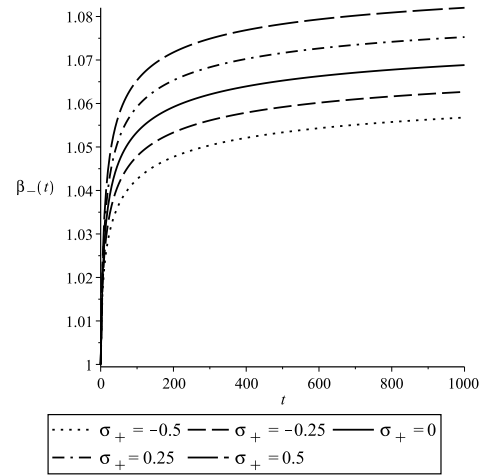


Figura 23: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de σ_+ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_- = -0.05$.

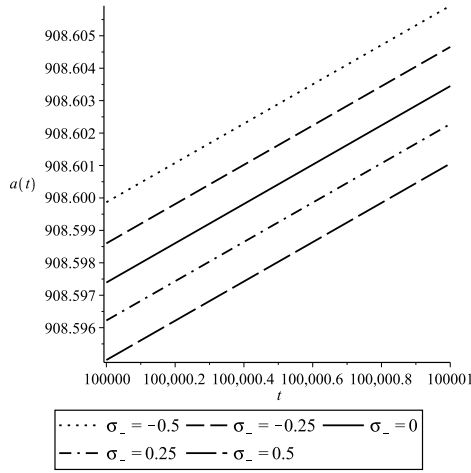


Figura 24: $a(t) \times t$ para diferentes valores de σ_- . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$.

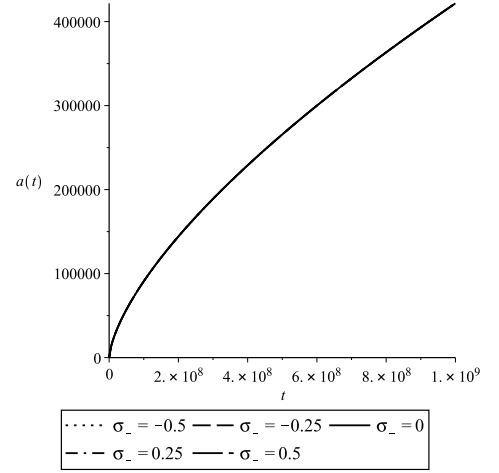


Figura 25: $a(t) \times t$ para diferentes valores de σ_- . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$.

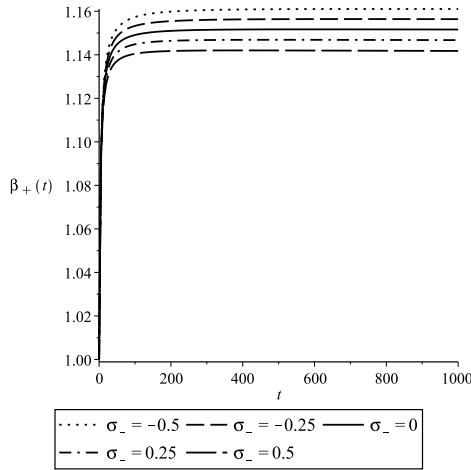


Figura 26: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de σ_- . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$.

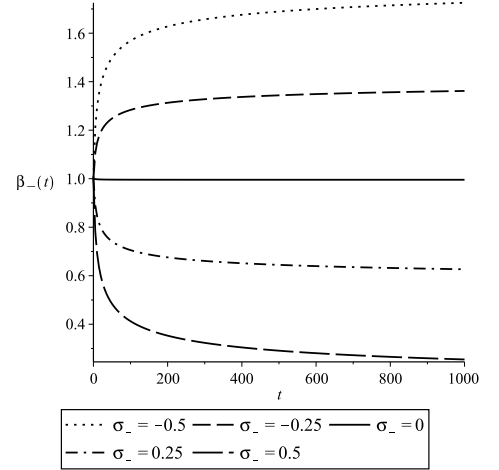


Figura 27: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de σ_- . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$.

Nesse contexto, os parâmetros não-comutativos podem, em princípio, ser utilizados para descrever a atual expansão acelerada do universo sem a necessidade de se invocar a existência de energia escura. Isso se deve ao fato de que tais parâmetros podem ser escolhidos de modo a induzir um aumento na taxa de expansão do fator de escala isotrópico $a(t)$. Além disso, os parâmetros não-comutativos influenciam o tempo necessário para a completa isotropização do universo primordial, governando a transição do regime anisotrópico para o regime isotrópico, ponto em que os parâmetros anisotrópicos $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ atingem valores constantes.

Para os parâmetros C_1 e C_2 , associados à anisotropia, obtivemos os seguintes resultados: para C_1 , o fator de escala a expande-se mais rapidamente para valores absolutos

maiores, sendo que valores positivos levam a uma expansão maior do que os negativos correspondentes. Valores absolutos mais altos de C_1 resultam em valores menores de β_+ , com o valor máximo sendo atingido em $C_1 = 0$. Além disso, para um dado valor absoluto, valores positivos de C_1 conduzem a constantes mais altas de β_+ do que os negativos correspondentes. Adicionalmente, o aumento de C_1 leva a valores constantes maiores de β_- : todos os valores positivos resultam em constantes acima da obtida para $C_1 = 0$, enquanto todos os valores negativos resultam em constantes menores (ver Figuras 28, 29, 30, 31 e Tabela 14). Para C_2 , o fator de escala a aumenta para valores absolutos maiores, com os positivos conduzindo a uma expansão mais intensa que os negativos correspondentes. Valores maiores de C_2 correspondem a constantes mais altas de β_+ . Além disso, o aumento do valor absoluto de C_2 leva a valores constantes menores de β_- , sendo que valores positivos produzem uma diminuição mais acentuada em β_- do que os negativos correspondentes (ver Figuras 32, 33, 34, 35 e Tabela 15).

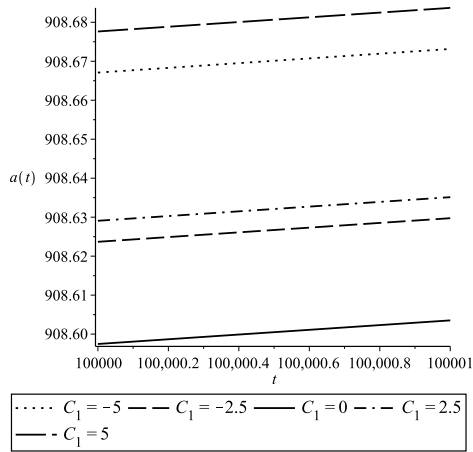


Figura 28: $a(t) \times t$ para diferentes valores de C_1 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

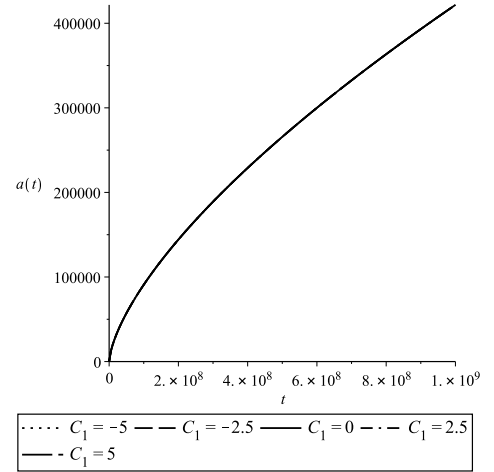


Figura 29: $a(t) \times t$ para diferentes valores de C_1 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

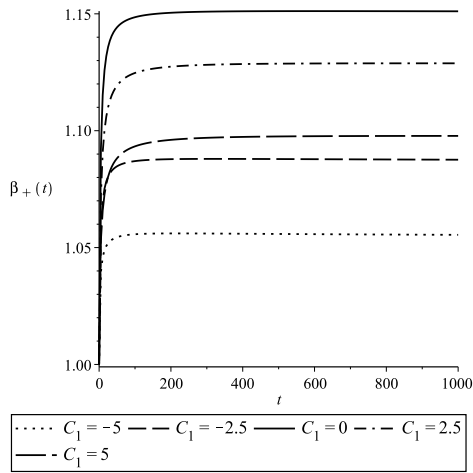


Figura 30: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de C_1 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

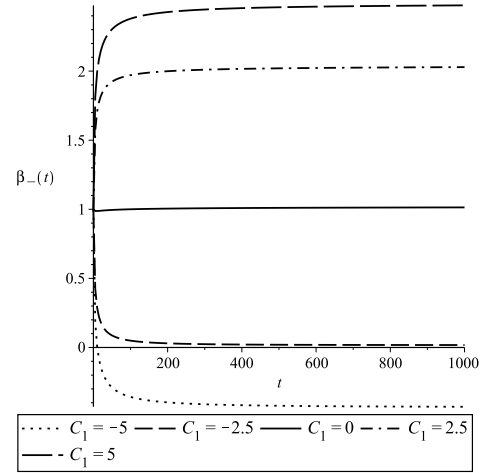


Figura 31: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de C_1 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

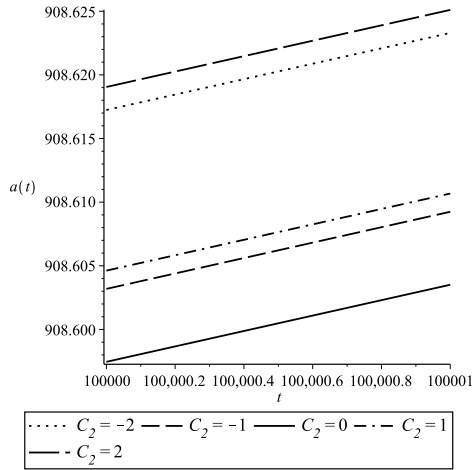


Figura 32: $a(t) \times t$ para diferentes valores de C_2 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

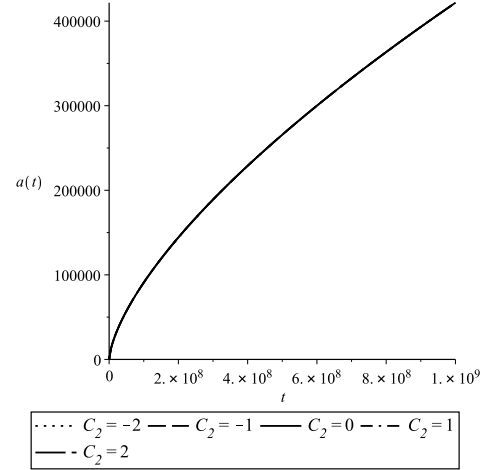


Figura 33: $a(t) \times t$ para diferentes valores de C_2 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

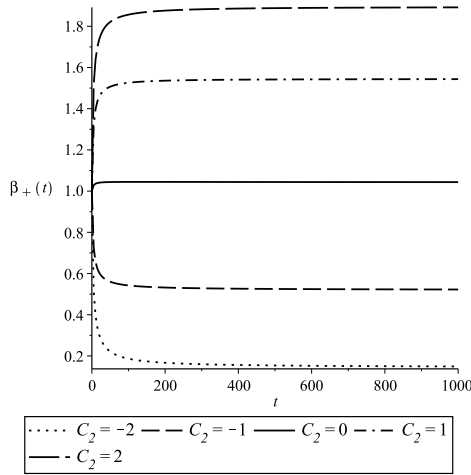


Figura 34: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de C_2 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

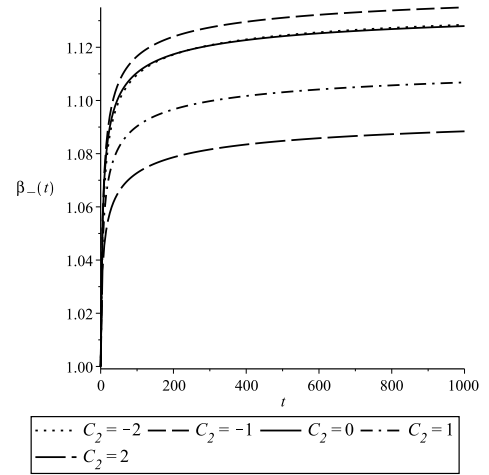


Figura 35: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de C_2 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

Para os parâmetros ρ_1 e ρ_2 , associados ao gás relativístico reduzido, obtivemos os seguintes resultados: para ρ_1 , o fator de escala a expande-se mais rapidamente à medida que ρ_1 aumenta, enquanto valores mais altos de ρ_1 conduzem simultaneamente a valores constantes menores de β_+ e β_- (ver Figuras 36, 37, 38 e Tabela 16). No caso de ρ_2 , o fator de escala a também se expande mais rapidamente para valores mais altos de ρ_2 , sendo que valores maiores de ρ_2 levam a valores constantes mais baixos de β_+ e β_- (ver Figuras 39, 40, 41 e Tabela 17).

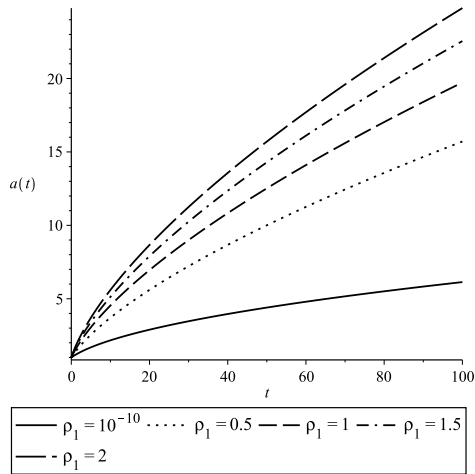


Figura 36: $a(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_1 . Consideramos $\rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

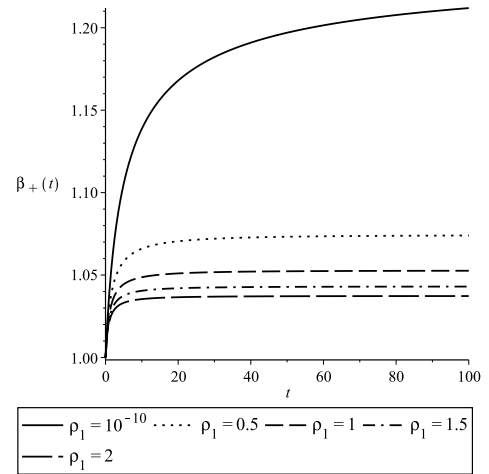


Figura 37: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_1 . Consideramos $\rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

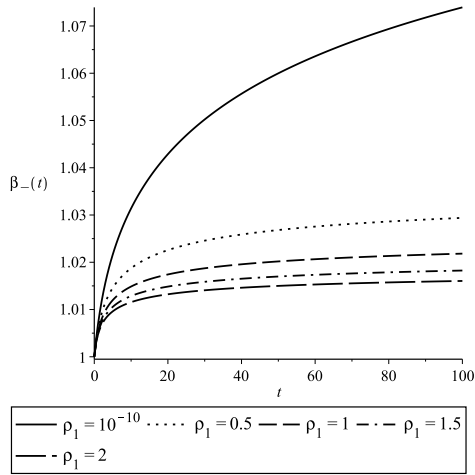


Figura 38: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_1 . Consideramos $\rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

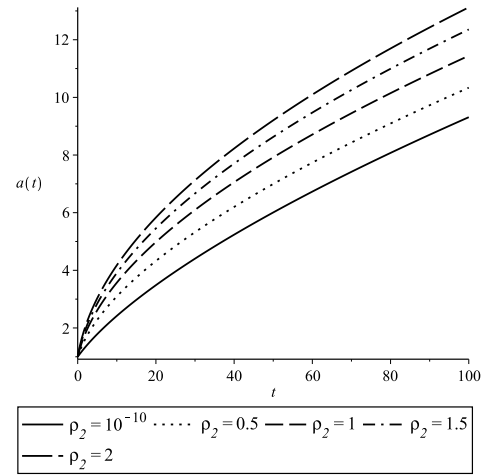


Figura 39: $a(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_2 . Consideramos $\rho_1 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

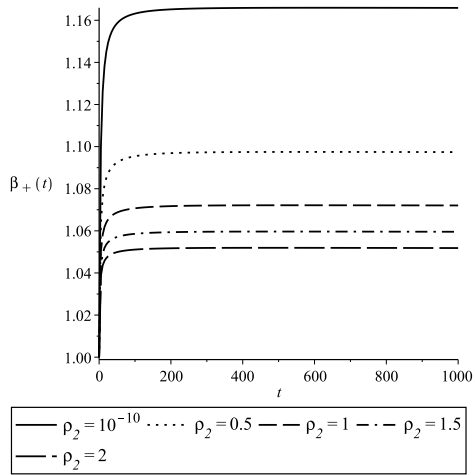


Figura 40: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_2 . Consideramos $\rho_1 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

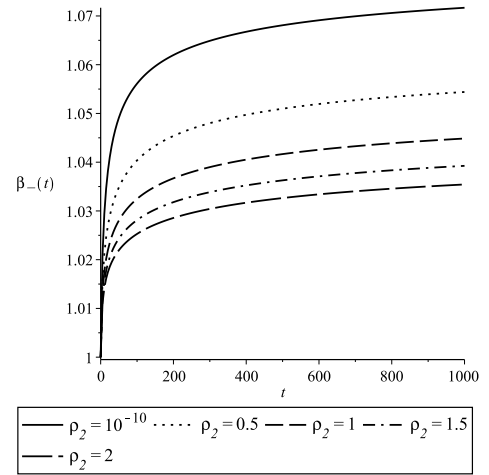


Figura 41: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de ρ_2 . Consideramos $\rho_1 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

Para as funções iniciais de escala, obtivemos os seguintes resultados: o fator de escala a expande-se mais rapidamente para valores mais altos de a_0 . Além disso, valores maiores de a_0 também conduzem a valores constantes menores tanto de β_+ quanto de β_- (ver Figuras 42, 43, 44 e Tabela 18). Ademais, uma expansão mais rápida de a ocorre para valores menores de β_{+0} . Adicionalmente, para valores maiores de β_{+0} , β_+ tende a atingir valores constantes mais elevados. Por outro lado, para valores maiores de β_{+0} , β_- tende a alcançar valores constantes menores (ver Figuras 45, 46, 47, 48 e Tabela 19). De modo semelhante, valores maiores de β_{-0} resultam em uma expansão mais rápida de a , com β_+ e β_- atingindo valores constantes mais altos (ver Figuras 49, 50, 51, 52 e Tabela 20).

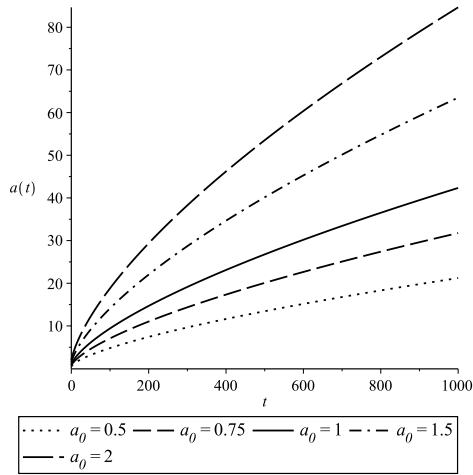


Figura 42: $a(t) \times t$ para diferentes valores de a_0 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

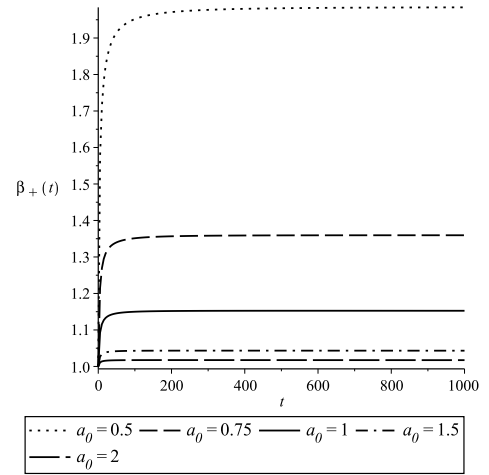


Figura 43: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de a_0 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

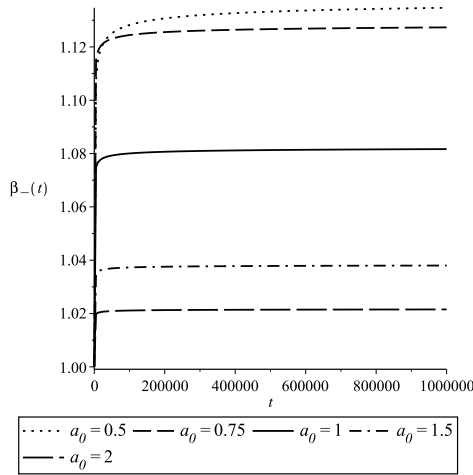


Figura 44: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de a_0 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

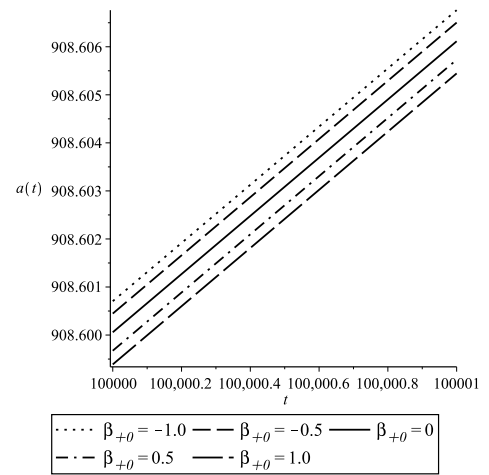


Figura 45: $a(t) \times t$ para diferentes valores de β_{+0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

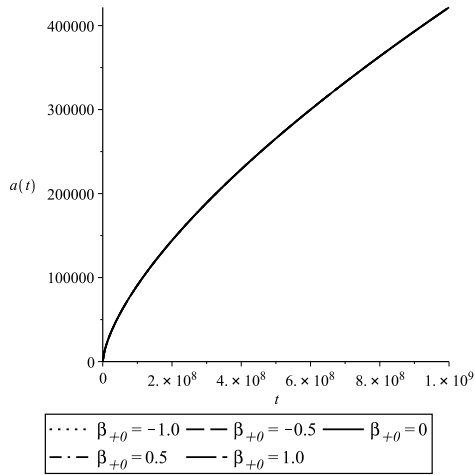


Figura 46: $a(t) \times t$ para diferentes valores de β_{+0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

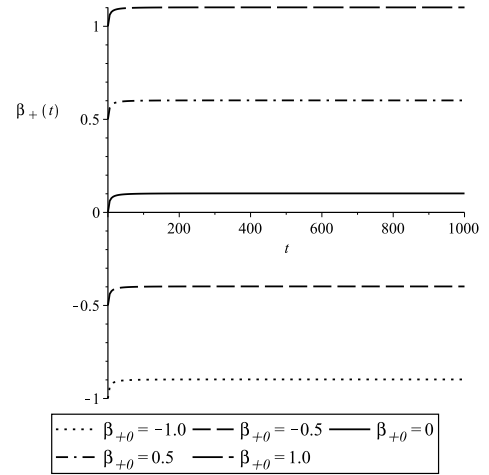


Figura 47: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de β_{+0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

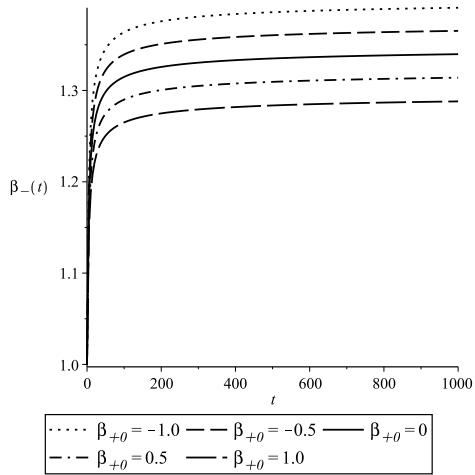


Figura 48: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de β_{+0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

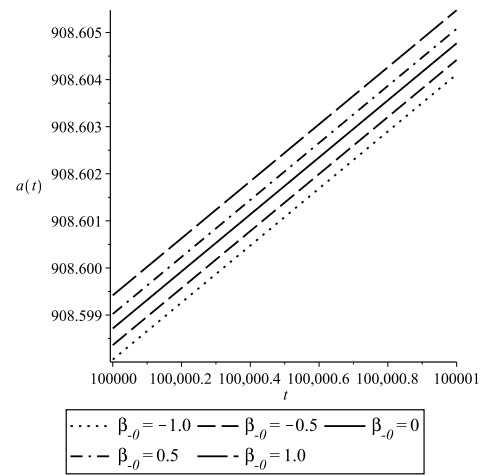


Figura 49: $a(t) \times t$ para diferentes valores de β_{-0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

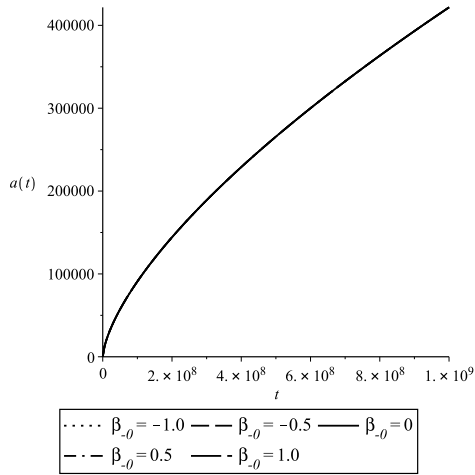


Figura 50: $a(t) \times t$ para diferentes valores de β_{-0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

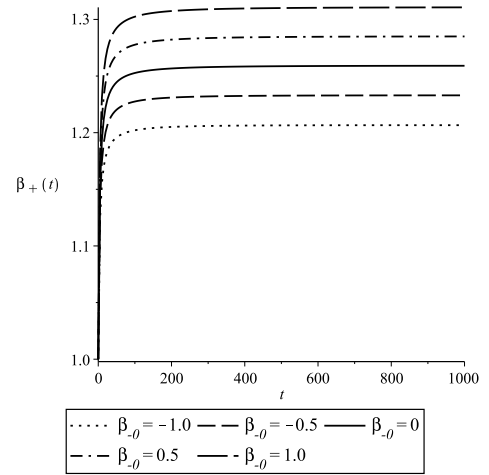


Figura 51: $\beta_+(t) \times t$ para diferentes valores de β_{-0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

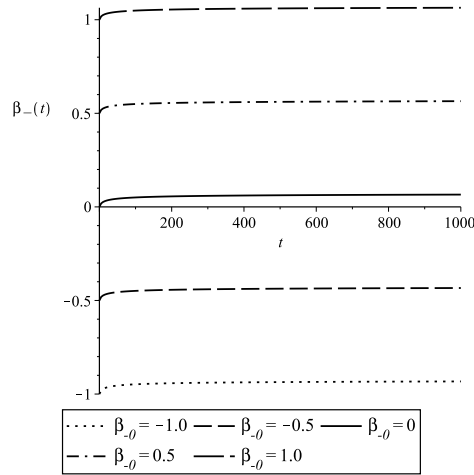


Figura 52: $\beta_-(t) \times t$ para diferentes valores de β_{-0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$, $\sigma_- = -0.05$.

Tabela 11 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de χ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

χ	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-0.5	10^2	9.41042802963272	$7.24368174303990 \times 10^{-1}$	1.39542863027622
-0.5	10^5	$9.08598193127700 \times 10^2$	$7.06314117648214 \times 10^{-1}$	1.43388319085617
-0.5	10^{10}	$1.95743387717530 \times 10^6$	$7.05707755360914 \times 10^{-1}$	1.43685870558427
-0.5	10^{50}	$9.08560314387074 \times 10^{32}$	$7.05694705648835 \times 10^{-1}$	1.43692395358037
-0.5	10^{80}	$9.08560959521214 \times 10^{52}$	$7.05694705648835 \times 10^{-1}$	1.43692395358037
-0.25	10^2	9.40947006136555	$8.90242434959212 \times 10^{-1}$	1.29073247708939
-0.25	10^5	$9.08598009734253 \times 10^2$	$8.80152939639179 \times 10^{-1}$	1.32631510601686
-0.25	10^{10}	$1.95743403608163 \times 10^6$	$8.79555144141166 \times 10^{-1}$	1.32928766582382
-0.25	10^{50}	$9.08560421886239 \times 10^{32}$	$8.79542094522764 \times 10^{-1}$	1.32935291375100
-0.25	10^{80}	$9.08560349505895 \times 10^{52}$	$8.79542094522764 \times 10^{-1}$	1.32935291375100
0	10^2	9.40698824622729	1.04197167569020	1.16480508211536
0	10^5	$9.08597838042156 \times 10^2$	1.03873259751173	1.19573169737328
0	10^{10}	$1.95743387659648 \times 10^6$	1.03814217442786	1.19869936721878
0	10^{50}	$9.08560313979026 \times 10^{32}$	1.03812912487542	1.19876461513652
0	10^{80}	$9.08558975316375 \times 10^{52}$	1.03812912487542	1.19876461513652
0.25	10^2	9.40297472671239	1.17712712586782	1.01889638508121
0.25	10^5	$9.08597320339495 \times 10^2$	1.17928599839870	1.04362323794785
0.25	10^{10}	$1.95743394637394 \times 10^6$	1.17870137651463	1.04658436014418
0.25	10^{50}	$9.08560400360462 \times 10^{32}$	1.17868832702436	1.04664960797635
0.25	10^{80}	$9.08560207949522 \times 10^{52}$	1.17868832702436	1.04664960797635
0.5	10^2	9.39743066565372	1.29320919548767	$8.54404009447011 \times 10^{-1}$
0.5	10^5	$9.08596785075582 \times 10^2$	1.29900299362236	$8.71680943593564 \times 10^{-1}$
0.5	10^{10}	$1.95743386471424 \times 10^6$	1.29842226310440	$8.74634185059349 \times 10^{-1}$
0.5	10^{50}	$9.08560319191661 \times 10^{32}$	1.29840921364877	$8.74699432834718 \times 10^{-1}$
0.5	10^{80}	$9.08559541099842 \times 10^{52}$	1.29840921364877	$8.74699432834719 \times 10^{-1}$

Tabela 12 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de σ_+ . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$ e $\sigma_- = -0.05$.

σ_+	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-0.5	10^2	9.43665123789371	1.72466219142303	1.04257852269666
-0.5	10^5	$9.08602316710674 \times 10^2$	1.99770351691716	1.06756535655440
-0.5	10^{10}	$1.95743389194868 \times 10^6$	2.02734253387754	1.07052634267056
-0.5	10^{50}	$9.08560371972301 \times 10^{32}$	2.02799501260640	1.07059159051379
-0.5	10^{80}	$9.08561138918551 \times 10^{52}$	2.02799501260640	1.07059159051379
-0.25	10^2	9.42201887499948	1.44534891988293	1.04788176941480
-0.25	10^5	$9.08600018680703 \times 10^2$	1.58521832144715	1.07355395199512
-0.25	10^{10}	$1.95743398577917 \times 10^6$	1.60004127211432	1.07651586705457
-0.25	10^{50}	$9.08560413332137 \times 10^{32}$	1.60036751140506	1.07658111488570
-0.25	10^{80}	$9.08560666594664 \times 10^{52}$	1.60036751140505	1.07658111488570
0	10^2	9.40703749057558	1.16140235514515	1.05342558512222
0	10^5	$9.08597715513859 \times 10^2$	1.16784345541523	1.07979695334432
0	10^{10}	$1.95743408229731 \times 10^6$	1.16785030061627	1.08275980755320
0	10^{50}	$9.08560414594794 \times 10^{32}$	1.16785030068478	1.08282505537457
0	10^{80}	$9.08561452843611 \times 10^{52}$	1.16785030068478	1.08282505537457
0.25	10^2	9.39167890513298	$8.72481062037855 \times 10^{-1}$	1.05923377764994
0.25	10^5	$9.08595328752850 \times 10^2$	$7.45227965360418 \times 10^{-1}$	1.08631917313842
0.25	10^{10}	$1.95743400083624 \times 10^6$	$7.30418666443052 \times 10^{-1}$	1.08928297939653
0.25	10^{50}	$9.08560416941104 \times 10^{32}$	$7.30092427305644 \times 10^{-1}$	1.08934822724373
0.25	10^{80}	$9.08562555932953 \times 10^{52}$	$7.30092427305644 \times 10^{-1}$	1.08934822724373
0.5	10^2	9.37591329284476	$5.78195871730801 \times 10^{-1}$	1.06533405336862
0.5	10^5	$9.08592950888611 \times 10^2$	$3.16972244354758 \times 10^{-1}$	1.09314940026232
0.5	10^{10}	$1.95743408800537 \times 10^6$	$2.87346768892812 \times 10^{-1}$	1.09611416986244
0.5	10^{50}	$9.08560409695774 \times 10^{32}$	$2.86694290719273 \times 10^{-1}$	1.09617941770251
0.5	10^{80}	$9.08561039564722 \times 10^{52}$	$2.86694290719273 \times 10^{-1}$	1.09617941770251

Tabela 13 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de σ_- . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$ e $\sigma_+ = 0.01$.

σ_-	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-0.5	10^2	9.42056586845038	1.15735081165928	1.56870069668505
-0.5	10^5	$9.08599867939072 \times 10^2$	1.15965991516414	1.83530594978088
-0.5	10^{10}	$1.95743399670609 \times 10^6$	1.15907580983154	1.86493781538651
-0.5	10^{50}	$9.08560326878763 \times 10^{32}$	1.15906276034789	1.86559029385974
-0.5	10^{80}	$9.08560707107241 \times 10^{52}$	1.15906276034789	1.86559029385975
-0.25	10^2	9.41275445316399	1.15327261145669	1.28358617057231
-0.25	10^5	$9.08598598955447 \times 10^2$	1.15491204291855	1.41679858533293
-0.25	10^{10}	$1.95743408985037 \times 10^6$	1.15432699857548	1.43161436890215
-0.25	10^{50}	$9.08560407312769 \times 10^{32}$	1.15431394908694	1.43194060801887
-0.25	10^{80}	$9.08560117601180 \times 10^{52}$	1.15431394908694	1.43194060801887
0	10^2	9.40483907444557	1.14910159719786	$9.95906883815341 \times 10^{-1}$
0	10^5	$9.08597391778347 \times 10^2$	1.15006412905849	$9.95589467391686 \times 10^{-1}$
0	10^{10}	$1.95743409147710 \times 10^6$	1.14947813997389	$9.95589134268101 \times 10^{-1}$
0	10^{50}	$9.08560403713589 \times 10^{32}$	1.14946509047568	$9.95589134264780 \times 10^{-1}$
0	10^{80}	$9.08561202735366 \times 10^{52}$	1.14946509047568	$9.95589134264780 \times 10^{-1}$
0.25	10^2	9.39681450284962	1.14483306989309	$7.05561936402713 \times 10^{-1}$
0.25	10^5	$9.08596221357758 \times 10^2$	1.14511122719217	$5.71574935426187 \times 10^{-1}$
0.25	10^{10}	$1.95743387539776 \times 10^6$	1.14452428728798	$5.56758470686469 \times 10^{-1}$
0.25	10^{50}	$9.08560314050930 \times 10^{32}$	1.14451123777010	$5.56432231315845 \times 10^{-1}$
0.25	10^{80}	$9.08561966098247 \times 10^{52}$	1.14451123777010	$5.56432231315845 \times 10^{-1}$
0.5	10^2	9.38867625838012	1.14046195618689	$4.12443195411216 \times 10^{-1}$
0.5	10^5	$9.08595002633641 \times 10^2$	1.14004794692086	$1.44644052393304 \times 10^{-1}$
0.5	10^{10}	$1.95743389768829 \times 10^6$	1.13946004961744	$1.15011440181691 \times 10^{-1}$
0.5	10^{50}	$9.08560317898204 \times 10^{32}$	1.13944700009062	$1.14358961488025 \times 10^{-1}$
0.5	10^{80}	$9.08560481804203 \times 10^{52}$	1.13944700009062	$1.14358961488025 \times 10^{-1}$

Tabela 14 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de C_1 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

C_1	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-5	10^2	10.0459496101976	1.05569851755328	$-3.57749796131748 \times 10^{-1}$
-5	10^5	$9.08667094446427 \times 10^2$	1.05359794306293	$-4.29131439171937 \times 10^{-1}$
-5	10^{10}	$1.95743387288468 \times 10^6$	1.05300881238436	$-4.26281758498628 \times 10^{-1}$
-5	10^{50}	$9.08560354799414 \times 10^{32}$	1.05299576284506	$-4.26216511761807 \times 10^{-1}$
-5	10^{80}	$9.08559090814433 \times 10^{52}$	1.05299576284506	$-4.26216511761807 \times 10^{-1}$
-2.5	10^2	9.66109338972946	1.08699230940393	$4.94271516245870 \times 10^{-2}$
-2.5	10^5	$9.08623681635766 \times 10^2$	1.08583188038260	$2.30236905572444 \times 10^{-2}$
-2.5	10^{10}	$1.95743406772157 \times 10^6$	1.08524374050937	$2.59289119518341 \times 10^{-2}$
-2.5	10^{50}	$9.08560360691514 \times 10^{32}$	1.08523069098814	$2.59941592034492 \times 10^{-2}$
-2.5	10^{80}	$9.08562155595090 \times 10^{52}$	1.08523069098814	$2.59941592034492 \times 10^{-2}$
0	10^2	9.40559942423711	1.14855886624150	1.00017040752812
0	10^5	$9.08597467816733 \times 10^2$	1.14954323483822	1.02446958347823
0	10^{10}	$1.95743408906086 \times 10^6$	1.14895731161066	1.02743025686642
0	10^{50}	$9.08560408470774 \times 10^{32}$	1.14894426211311	1.02749550466501
0	10^{80}	$9.08560406869727 \times 10^{52}$	1.14894426211311	1.02749550466501
0.25	10^2	9.67821597244958	1.12470686001941	1.97061252307846
0.25	10^5	$9.08629075032140 \times 10^2$	1.12751051683548	2.04497494023390
0.25	10^{10}	$1.95743386120812 \times 10^6$	1.12692687141964	2.04799115855271
0.25	10^{50}	$9.08560324838872 \times 10^{32}$	1.12691382193447	2.04805640695885
0.25	10^{80}	$9.08561778835941 \times 10^{52}$	1.12691382193447	2.04805640695885
0.5	10^2	$1.00783585402990 \times 10^1$	1.09330795698491	2.37921585602254
0.5	10^5	$9.08677639192374 \times 10^2$	1.09655387086791	2.49731283151759
0.5	10^{10}	$1.95743408262577 \times 10^6$	1.09597124591564	2.50038457816292
0.5	10^{50}	$9.08560415414005 \times 10^{32}$	1.09595819645059	2.50044982707496
0.5	10^{80}	$9.08560896128015 \times 10^{52}$	1.09595819645059	2.50044982707496

Tabela 15 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de C_2 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

C_2	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-2	10^2	9.58409485486387	$1.86558991031420 \times 10^{-1}$	1.10967267121014
-2	10^5	$9.08617239968484 \times 10^2$	$1.42657848057070 \times 10^{-1}$	1.13985799672665
-2	10^{10}	$1.95743406569289 \times 10^6$	$1.42023303573352 \times 10^{-1}$	1.14282531897339
-2	10^{50}	$9.08560420589568 \times 10^{32}$	$1.42010253588681 \times 10^{-1}$	1.14289056684279
-2	10^{80}	$9.08560683617993 \times 10^{52}$	$1.42010253588680 \times 10^{-1}$	1.14289056684279
-1	10^2	9.45569793094089	$5.42189678068712 \times 10^{-1}$	1.11662143958044
-1	10^5	$9.08603186643463 \times 10^2$	$5.18332976612503 \times 10^{-1}$	1.14632665159738
-1	10^{10}	$1.95743387226677 \times 10^6$	$5.17720661646618 \times 10^{-1}$	1.14929316133707
-1	10^{50}	$9.08560314899101 \times 10^{32}$	$5.17707611875129 \times 10^{-1}$	1.14935840924404
-1	10^{80}	$9.08560706079767 \times 10^{52}$	$5.17707611875129 \times 10^{-1}$	1.14935840924404
0	10^2	9.40385725325067	1.04469518483916	1.11044727336720
0	10^5	$9.08597454975933 \times 10^2$	1.04170645008748	1.13918203503830
0	10^{10}	$1.95743408613669 \times 10^6$	1.04111633760827	1.14214739228934
0	10^{50}	$9.08560411727468 \times 10^{32}$	1.04110328806875	1.14221264013515
0	10^{80}	$9.08558331113058 \times 10^{52}$	1.04110328806875	1.14221264013515
1	10^2	9.47169107721698	1.52598044422872	1.09030059982321
1	10^5	$9.08604620658715 \times 10^2$	1.54377098978625	1.11788111177764
1	10^{10}	$1.95743405285729 \times 10^6$	1.54320305290712	1.12084534029065
1	10^{50}	$9.08560350468533 \times 10^{32}$	1.54319000358729	1.12091058813560
1	10^{80}	$9.08560329503041 \times 10^{52}$	1.54319000358730	1.12091058813560
2	10^2	9.60463535545249	1.85665620809048	1.07275479870357
2	10^5	$9.08619047765233 \times 10^2$	1.89435050423508	1.09940945318153
2	10^{10}	$1.95743392513310 \times 10^6$	1.89380475039630	1.10237287818814
2	10^{50}	$9.08560320760793 \times 10^{32}$	1.89379170129257	1.10243812605387
2	10^{80}	$9.08562072933600 \times 10^{52}$	1.89379170129257	1.10243812605387

Tabela 16 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de ρ_1 . Consideramos $\rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

ρ_1	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
10^{-10}	10^2	6.13537541337349	1.21193551556382	1.07394095192046
10^{-10}	10^5	$1.91094467035759 \times 10^2$	1.22535785575048	1.22760498425854
10^{-10}	10^{10}	$6.04275163522618 \times 10^4$	1.17436744264121	1.49024501901334
10^{-10}	10^{50}	$9.08560388140065 \times 10^{29}$	1.06903487808059	2.01693429922999
10^{-10}	10^{80}	$9.08560282570388 \times 10^{49}$	1.06903487807998	2.01693429923302
0.5	10^2	$1.57097229921255 \times 10^1$	1.07399284234006	1.02939545733188
0.5	10^5	$1.55363381879641 \times 10^3$	1.07346388474391	1.03862733235199
0.5	10^{10}	$3.34716512859322 \times 10^6$	1.07326255030632	1.03964072483693
0.5	10^{50}	$1.55361646796602 \times 10^{33}$	1.07325808743086	1.03966303928147
0.5	10^{80}	$1.55361773264867 \times 10^{53}$	1.07325808743086	1.03966303928147
1	10^2	$1.97261204044842 \times 10^1$	1.05261471761680	1.02182550119397
1	10^5	$1.95744914396313 \times 10^3$	1.05210875223729	1.02766110479724
1	10^{10}	$4.21716341327917 \times 10^6$	1.05198174129581	1.02829951211929
1	10^{50}	$1.95743391614805 \times 10^{33}$	1.05197892985686	1.02831356934756
1	10^{80}	$1.95743470002773 \times 10^{53}$	1.05197892985686	1.02831356934756
1.5	10^2	$2.25483345334953 \times 10^1$	1.04301309193384	1.01824891136023
1.5	10^5	$2.24071658695753 \times 10^3$	1.04256262154419	1.02270839043128
1.5	10^{10}	$4.82744721871633 \times 10^6$	1.04246562831717	1.02319558936594
1.5	10^{50}	$2.24070262440667 \times 10^{33}$	1.04246348278769	1.02320631703563
1.5	10^{80}	$2.24071006042442 \times 10^{53}$	1.04246348278769	1.02320631703563
2	10^2	$2.47966191439827 \times 10^1$	1.03726655232483	1.01604632976990
2	10^5	$2.46622581261623 \times 10^3$	1.03686109071109	1.01973038867486
2	10^{10}	$5.31329348656977 \times 10^6$	1.03678099044448	1.02013256356785
2	10^{50}	$2.46621222916853 \times 10^{33}$	1.03677921934914	1.02014141906127
2	10^{80}	$2.46621529513349 \times 10^{53}$	1.03677921934914	1.02014141906127

Tabela 17 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de ρ_2 . Consideramos $\rho_1 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

ρ_2	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
10^{-10}	10^2	9.31251450041558	1.16317929402583	1.05612525143250
10^{-10}	10^5	$9.08583244792929 \times 10^2$	1.16435557014773	1.08265766956361
10^{-10}	10^{10}	$1.95743386019092 \times 10^6$	1.16376977156232	1.08562055622949
10^{-10}	10^{50}	$9.08560338252777 \times 10^{32}$	1.16375672205595	1.08568580410055
10^{-10}	10^{80}	$9.08560658601393 \times 10^{52}$	1.16375672205595	1.08568580410055
0.5	10^2	$1.03365221764273 \times 10^1$	1.09544380032210	1.04037098658098
0.5	10^5	$9.08801509926965 \times 10^2$	1.09587753596146	1.06525538870264
0.5	10^{10}	$1.95743386859638 \times 10^6$	1.09529177001095	1.06821805864287
0.5	10^{50}	$9.08560319950136 \times 10^{32}$	1.09527872050409	1.06828330651598
0.5	10^{80}	$9.08561549663051 \times 10^{52}$	1.09527872050409	1.06828330651598
1	10^2	$1.14448040949290 \times 10^1$	1.07070564685937	1.03248179752514
1	10^5	$9.09210075290272 \times 10^2$	1.07054451573514	1.05550164419676
1	10^{10}	$1.95743389385094 \times 10^6$	1.06995886246497	1.05846367549512
1	10^{50}	$9.08560315055366 \times 10^{32}$	1.06994581295842	1.05852892336613
1	10^{80}	$9.08561168317314 \times 10^{52}$	1.06994581295842	1.05852892336613
1.5	10^2	$1.23573221723894 \times 10^1$	1.05858233172539	1.02813652949940
1.5	10^5	$9.09725545614107 \times 10^2$	1.05805933413832	1.04966808115506
1.5	10^{10}	$1.95743410173794 \times 10^6$	1.05747383808440	1.05262926017210
1.5	10^{50}	$9.08560367387947 \times 10^{32}$	1.05746078858645	1.05269450799974
1.5	10^{80}	$9.08561048684997 \times 10^{52}$	1.05746078858645	1.05269450799974
2	10^2	$1.31237110429439 \times 10^1$	1.05110067783972	1.02528587180071
2	10^5	$9.10321669422148 \times 10^2$	1.05034602059369	1.04561929149445
2	10^{10}	$1.95743405041348 \times 10^6$	1.04976071347423	1.04857946416862
2	10^{50}	$9.08560330232812 \times 10^{32}$	1.04974766397312	1.04864471201181
2	10^{80}	$9.08559990322096 \times 10^{52}$	1.04974766397312	1.04864471201181

Tabela 18 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de a_0 . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

a_0	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
0.5	10^2	4.80204761297754	1.95181190277162	1.03844566171505
0.5	10^5	$4.54310136790279 \times 10^2$	1.98058793327090	1.12821705130857
0.5	10^{10}	$9.78717024745127 \times 10^5$	1.97827304191631	1.14005239030363
0.5	10^{50}	$4.54280211071282 \times 10^{32}$	1.97822084420954	1.14031338145478
0.5	10^{80}	$4.54279450873148 \times 10^{52}$	1.97822084420954	1.14031338145478
0.75	10^2	7.07180295765039	1.35131472552600	1.07878073558528
0.75	10^5	$6.81450112382086 \times 10^2$	1.35719199222652	1.12444425690487
0.75	10^{10}	$1.46807550290792 \times 10^6$	1.35615486547585	1.12971033007366
0.75	10^{50}	$6.81420313150436 \times 10^{32}$	1.35613166640850	1.12982632621592
0.75	10^{80}	$6.81420228037576 \times 10^{52}$	1.35613166640850	1.12982632621592
1	10^2	9.40643072064142	1.14994344357657	1.05365266875245
1	10^5	$9.08597634039731 \times 10^2$	1.15104194490590	1.08005230377670
1	10^{10}	$1.95743409120472 \times 10^6$	1.15045614526105	1.08301519552582
1	10^{50}	$9.08560404500688 \times 10^{32}$	1.15044309576478	1.08308044334640
1	10^{80}	$9.08561578521900 \times 10^{52}$	1.15044309576478	1.08308044334640
1.5	10^2	$1.41020528834880 \times 10^1$	1.04289234554498	1.02542629678675
1.5	10^5	$1.36289557831965 \times 10^3$	1.04240690761140	1.03727807720020
1.5	10^{10}	$2.93615113203478 \times 10^6$	1.04214550949215	1.03859503961123
1.5	10^{50}	$1.36284061467459 \times 10^{33}$	1.04213970970556	1.03862403864395
1.5	10^{80}	$1.36284197721022 \times 10^{53}$	1.04213970970556	1.03862403864395
2	10^2	$1.88018609413325 \times 10^1$	1.01735626756389	1.01444591590451
2	10^5	$1.81719399779706 \times 10^3$	1.01681413748484	1.02112330364217
2	10^{10}	$3.91486817229359 \times 10^6$	1.01666681526657	1.02186410605438
2	10^{50}	$1.81712082341809 \times 10^{33}$	1.01666355288374	1.02188041801046
2	10^{80}	$1.81712107574496 \times 10^{53}$	1.01666355288374	1.02188041801046

Tabela 19 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de β_{+0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

β_{+0}	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-1.0	10^2	9.43237044372862	$-8.99043186232376 \times 10^{-1}$	1.36382178687463
-1.0	10^5	$9.08600704718301 \times 10^2$	$-8.99396005099798 \times 10^{-1}$	1.40285878107158
-1.0	10^{10}	$1.95743409151642 \times 10^6$	$-8.99983308497155 \times 10^{-1}$	1.40583511208698
-1.0	10^{50}	$9.08560403814084 \times 10^{32}$	$-8.99996358008473 \times 10^{-1}$	1.40590036004201
-1.0	10^{80}	$9.08559013717371 \times 10^{52}$	$-8.99996358008473 \times 10^{-1}$	1.40590036004201
-0.5	10^2	9.42929721877525	$-3.99195839385121 \times 10^{-1}$	1.33943316905596
-0.5	10^5	$9.08600446621962 \times 10^2$	$-3.99599410049934 \times 10^{-1}$	1.37743317290128
-0.5	10^{10}	$1.95743396410633 \times 10^6$	$-4.00186769776125 \times 10^{-1}$	1.38040839237232
-0.5	10^{50}	$9.08560322294976 \times 10^{32}$	$-4.00199819294202 \times 10^{-1}$	1.38047364034721
-0.5	10^{80}	$9.08559945542423 \times 10^{52}$	$-4.00199819294202 \times 10^{-1}$	1.38047364034721
0	10^2	9.42618440907028	$1.00651226628816 \times 10^{-1}$	1.31483842364292
0	10^5	$9.08600057552586 \times 10^2$	$1.00196469729132 \times 10^{-1}$	1.35180063670056
0	10^{10}	$1.95743386040079 \times 10^6$	$9.96090526781551 \times 10^{-2}$	1.35477474759664
0	10^{50}	$9.08560325259010 \times 10^{32}$	$9.95960031553549 \times 10^{-2}$	1.35483999558118
0	10^{80}	$9.08559763611078 \times 10^{52}$	$9.95960031553549 \times 10^{-2}$	1.35483999558118
0.5	10^2	9.42303283969463	$6.00498273941076 \times 10^{-1}$	1.29003130223167
0.5	10^5	$9.08599673782568 \times 10^2$	$5.99991838762176 \times 10^{-1}$	1.32595475249997
0.5	10^{10}	$1.95743396314812 \times 10^6$	$5.99404363984586 \times 10^{-1}$	1.32892775439970
0.5	10^{50}	$9.08560406509050 \times 10^{32}$	$5.99391314466451 \times 10^{-1}$	1.32899300234694
0.5	10^{80}	$9.08563442780767 \times 10^{52}$	$5.99391314466452 \times 10^{-1}$	1.32899300234694
1.0	10^2	9.41984124621913	1.10034518359955	1.26500409726278
1.0	10^5	$9.08599388493651 \times 10^2$	1.09978655088542	1.29988777691884
1.0	10^{10}	$1.95743408783435 \times 10^6$	1.09919901832531	1.30285966742779
1.0	10^{50}	$9.08560383314576 \times 10^{32}$	1.09918596881132	1.30292491534033
1.0	10^{80}	$9.08560985311799 \times 10^{52}$	1.09918596881132	1.30292491534033

Tabela 20 – Valores de $a(t)$, $\beta_+(t)$ e $\beta_-(t)$ em diferentes instantes de tempo t , para diversos valores de β_{-0} . Consideramos $\rho_1 = \rho_2 = 0.1$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$, $\chi = 0.1$, $\sigma_+ = 0.01$ e $\sigma_- = -0.05$.

β_{-0}	t	$a(t)$	$\beta_+(t)$	$\beta_-(t)$
-1.0	10^2	9.41019591628443	1.20210372472720	$-9.47925260912452 \times 10^{-1}$
-1.0	10^5	$9.08598053865428 \times 10^2$	1.20529952553825	$-9.21643283937094 \times 10^{-1}$
-1.0	10^{10}	$1.95743387771909 \times 10^6$	1.20471594452625	$-9.18680514580093 \times 10^{-1}$
-1.0	10^{50}	$9.08560314605763 \times 10^{32}$	1.20470289504231	$-9.18615266711498 \times 10^{-1}$
-1.0	10^{80}	$9.08560096805416 \times 10^{52}$	1.20470289504231	$-9.18615266711499 \times 10^{-1}$
-0.5	10^2	9.41344003207248	1.22751716287134	$-4.48741660052993 \times 10^{-1}$
-0.5	10^5	$9.08598360443362 \times 10^2$	1.23175891931113	$-4.22519198153319 \times 10^{-1}$
-0.5	10^{10}	$1.95743408460860 \times 10^6$	1.23117644737100	$-4.19556487491320 \times 10^{-1}$
-0.5	10^{50}	$9.08560378393213 \times 10^{32}$	1.23116339790743	$-4.19491239669683 \times 10^{-1}$
-0.5	10^{80}	$9.08559986577534 \times 10^{52}$	1.23116339790743	$-4.19491239669683 \times 10^{-1}$
0	10^2	9.41664124748264	1.25269906778350	$5.04576203721868 \times 10^{-2}$
0	10^5	$9.08598714176510 \times 10^2$	1.25798578557081	$7.66211806993265 \times 10^{-2}$
0	10^{10}	$1.95743386886611 \times 10^6$	1.25740442287600	$7.95838324338266 \times 10^{-2}$
0	10^{50}	$9.08560316355025 \times 10^{32}$	1.25739137341396	$7.96490803026848 \times 10^{-2}$
0	10^{80}	$9.08560853399209 \times 10^{52}$	1.25739137341396	$7.96490803026848 \times 10^{-2}$
0.5	10^2	9.41980128642747	1.27765744681799	$5.49671931224922 \times 10^{-1}$
0.5	10^5	$9.08599021964904 \times 10^2$	1.28398813141633	$5.75777176378408 \times 10^{-1}$
0.5	10^{10}	$1.95743385967244 \times 10^6$	1.28340787787475	$5.78739770406624 \times 10^{-1}$
0.5	10^{50}	$9.08560327471523 \times 10^{32}$	1.28339482842359	$5.78805018275960 \times 10^{-1}$
0.5	10^{80}	$9.08560580783918 \times 10^{52}$	1.28339482842359	$5.78805018275960 \times 10^{-1}$
1.0	10^2	9.42292228767818	1.30239975881252	1.04890066009200
1.0	10^5	$9.08599417736373 \times 10^2$	1.30977338701646	1.07494814811381
1.0	10^{10}	$1.95743394379859 \times 10^6$	1.30919424301502	1.07791068277867
1.0	10^{50}	$9.08560321949883 \times 10^{32}$	1.30918119357823	1.07797593063107
1.0	10^{80}	$9.08560689144900 \times 10^{52}$	1.30918119357823	1.07797593063107

8.7 Estimativa dos valores dos parâmetros não-comutativos

Em princípio, é possível estimar valores para os parâmetros não-comutativos utilizando a equação que descreve a idade do universo:

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{aH(a)} da, \quad (8.92)$$

onde t_0 denota a idade do universo, a representa o fator de escala e $H(a) = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Para o nosso modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido (RRG), o parâmetro de Hubble é obtido a partir da Eq. (8.89), isto é,

$$H^2(a) = \frac{1}{36a^6} [C_1 (C_1 - 2\chi\beta_+) + C_2 (C_2 + 2\chi\beta_-)] - \frac{1}{18a^5} (C_1\sigma_- + C_2\sigma_+) + \frac{1}{3} \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}. \quad (8.93)$$

Note-se que, neste caso, o parâmetro de Hubble envolve um termo de fluido devido ao gás relativístico reduzido e contribuições relacionadas à não-comutatividade. Não incluiremos uma contribuição de constante cosmológica, pois, em nosso modelo, busca-se descrever os efeitos da energia escura exclusivamente por meio da não-comutatividade.

Assim, utilizando o parâmetro de Hubble fornecido pela Eq. (8.93) na Eq. (8.92), obtemos a seguinte equação para a idade do universo no nosso modelo Bianchi I não-comutativo:

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{a\sqrt{A+B}} da, \quad (8.94)$$

onde

$$A = \frac{1}{36a^6} [C_1(C_1 - 2\chi\beta_+) + C_2(C_2 + 2\chi\beta_-)] - \frac{1}{18a^5} (C_1\sigma_- + C_2\sigma_+), \quad (8.95)$$

representa a contribuição da não-comutatividade, enquanto

$$B = \frac{1}{3} \left[\rho_1^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \rho_2^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}, \quad (8.96)$$

representa a contribuição do fluido de gás relativístico reduzido.

Para nossa análise, associaremos ρ_1 e ρ_2 com as densidades de matéria ρ_m e radiação ρ_r , respectivamente, isto é, $\rho_1 = \rho_m$ e $\rho_2 = \rho_r$. Utilizando o fato de que a densidade crítica, em unidades naturais, é dada por $\rho_c = 3H_0^2$, podemos expressar $\Omega_m = \rho_m/\rho_c$ e $\Omega_r = \rho_r/\rho_c$. Assim, podemos reescrever o termo B como:

$$B = H_0^2 \left[\Omega_m^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^6 + \Omega_r^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right]^{1/2}. \quad (8.97)$$

Para realizar essa estimativa, utilizaremos os dados da missão Planck de 2018 [36] para os valores dos parâmetros cosmológicos, que fornecem $H_0 = (67.4 \pm 0.5)$ km/s/Mpc,

$\Omega_m = (0.315 \pm 0.007)$ e $\Omega_r \approx 10^{-4}$. A abordagem escolhida para estimar os parâmetros não-comutativos é considerá-los um por vez separadamente, de modo que calculamos χ , σ_+ e σ_- individualmente, assumindo os outros dois como nulos. Além disso, tomamos $t_0 = 13.8$ Gyr $= (13.8 \times 10^9) \times (3.154 \times 10^7) \text{ s} = 4.35 \times 10^{17} \text{ s}$, e consideramos $a_0 = 1$, $\beta_{+0} = 10^{-5}$ e $\beta_{-0} = -10^{-5}$. Esta escolha para os parâmetros de anisotropia vem da suposição de que seus valores atuais são da ordem das flutuações de temperatura da CMB. Utilizando os dados da Missão Planck, podemos escrever $H_0 = 67.4 \times 10^3 / (3.0857 \times 10^{22}) \text{ s}^{-1} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, e, portanto, $\rho_1 = 3H_0^2\Omega_m = 4.49 \times 10^{-36} \text{ s}^{-2}$, enquanto $\rho_2 = 3H_0^2\Omega_r = 1.43 \times 10^{-39} \text{ s}^{-2}$. Como C_1 e C_2 possuem a mesma dimensão de H_0 , assumiremos que são da mesma ordem de grandeza e escolhemos $C_1 = C_2 = 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Utilizando essa abordagem e resolvendo numericamente a Eq. (8.92) com esses valores, obtemos as seguintes estimativas:

$$\chi = -1.82 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_+ = \sigma_- = -3.20 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}. \quad (8.98)$$

Esses resultados confirmam a consistência da nossa abordagem, pois estão em concordância com estudos anteriores sobre modelos cosmológicos não-comutativos [216, 220–223, 225–231].

8.8 Considerações finais sobre o modelo Bianchi I não-comutativo com gás relativístico reduzido

Este capítulo investigou os efeitos da não-comutatividade no modelo cosmológico de Bianchi I (BI) com um gás relativístico reduzido (RRG). Para introduzir os parâmetros não-comutativos nas equações de movimento do modelo, utilizamos um formalismo simplético generalizado de Faddeev–Jackiw. Através dessa abordagem, analisamos a evolução temporal do fator de escala isotrópico a e das funções de escala anisotrópicas β_+ e β_- provenientes da parametrização de Misner.

Nossos resultados revelam que a presença da não-comutatividade altera a dinâmica da expansão do universo e a isotropização do modelo comutativo, modificando tanto a taxa de expansão do fator de escala a quanto o tempo necessário para a isotropização, determinado pela estabilização das funções anisotrópicas β_+ e β_- . A análise numérica indicou que, independentemente dos valores específicos escolhidos para os parâmetros não-comutativos, o fator de escala a permanece sempre crescente, corroborando a expectativa de um universo em expansão, enquanto as funções de anisotropia tendem a valores constantes após um período inicial de crescimento ou decaimento, evidenciando a tendência de isotropização mesmo na presença da não-comutatividade. Em particular, a análise dos parâmetros não-comutativos χ , σ_+ e σ_- revelou que valores menores resultam em uma expansão mais rápida de a , além de modificarem o tempo de isotropização das funções β_+ e β_- . Esses resultados sugerem que os parâmetros não-comutativos poderiam, em princípio, ser utilizados para descrever a atual expansão acelerada do universo sem a necessidade

de invocar a energia escura, pois podem ser escolhidos de forma a aumentar a taxa de expansão do fator de escala isotrópico a , emulando o efeito da energia escura.

Além disso, realizamos estimativas para os parâmetros não-comutativos do modelo, tomando como referência dados observacionais da missão Planck 2018, obtidos no contexto do modelo Λ CDM. Embora tal procedimento não seja plenamente consistente, dadas as diferenças entre os modelos, ele serve como ponto de partida para a investigação dos efeitos da não-comutatividade no universo. Em nossa estimativa simplificada, analisamos cada parâmetro individualmente, mantendo os demais fixados em zero e resolvendo numericamente a equação para a idade do universo. Apesar das limitações desta abordagem, os resultados obtidos indicam compatibilidade, em ordem de grandeza, com valores já propostos em estudos similares, conferindo uma consistência preliminar à nossa análise. Estimativas mais rigorosas, no entanto, exigiriam a determinação simultânea de todos os parâmetros livres do modelo com base em um conjunto mais abrangente de observáveis cosmológicos, para além de um simples ajuste ao Λ CDM.

Em resumo, o estudo demonstrou que a incorporação da não-comutatividade no modelo BI com RRG não apenas preserva as características fundamentais da expansão cósmica e da isotropização, mas também revela aspectos adicionais sobre a influência dos parâmetros não-comutativos nesses processos. Pesquisas futuras podem explorar extensões deste estudo, investigando outros modelos anisotrópicos e testando diferentes configurações para os parâmetros não-comutativos com base em observações cosmológicas recentes.

9 Conclusão

Esta tese investigou os efeitos da introdução de não-comutatividade em dois modelos cosmológicos distintos do tipo Bianchi I: um acoplado a um fluido perfeito de radiação e outro com gás relativístico reduzido (RRG). A análise foi conduzida no contexto da Relatividade Geral, utilizando o formalismo ADM (Arnowitt–Deser–Misner) como base para a construção hamiltoniana dos sistemas. No modelo com radiação, empregou-se também o formalismo de Schutz, uma vez que a implementação da não-comutatividade exigia a introdução de relações não-comutativas entre variáveis tanto da geometria quanto da matéria. Para isso, foi necessário explicitar os graus de liberdade do fluido e obter sua hamiltoniana correspondente. Já no segundo modelo, com gás relativístico reduzido, a não-comutatividade foi introduzida exclusivamente entre variáveis geométricas, o que tornou desnecessário o uso do formalismo de Schutz. Em ambos os casos, a métrica Bianchi I foi estudada na forma parametrizada por Misner, que separa os três fatores de escala distintos em um fator de escala isotrópico global e duas funções que representam as anisotropias. A inclusão de não-comutatividades se deu por meio da deformação da álgebra dos parênteses de Poisson no modelo com radiação e através de uma generalização do formalismo simplético de Faddeev-Jackiw para sistemas com vínculos no modelo com gás relativístico reduzido. Em todos os casos, verificou-se que os modelos construídos mantinham sempre a dinâmica expansiva do fator de escala global e que os parâmetros anisotrópicos convergiam para valores constantes após um período inicial de variação, caracterizando a isotropização.

No primeiro caso, publicado em [216], foi investigado o modelo Bianchi I não-comutativo acoplado a um fluido perfeito de radiação. O modelo foi construído com uso do formalismo de Schutz para o fluido perfeito de matéria, enquanto a não-comutatividade foi incluída por meio de deslocamento de Bopp, gerando novos parâmetros de Poisson deformados através da inserção de um parâmetro não-comutativo γ . As equações dinâmicas resultantes foram resolvidas numericamente, comparando-se as soluções comutativas e não-comutativas. Os resultados mostraram que o parâmetro não-comutativo acelera a taxa de expansão do universo e o processo de isotropização, com maior efeito para valores negativos. Foram também estimados valores para o parâmetro γ a partir de dados cosmológicos observacionais, que evidenciaram a viabilidade do modelo e sua maior relevância nos estágios iniciais do universo.

No segundo caso, publicado em [248], foi explorado o modelo Bianchi I não-comutativo acoplado a um gás relativístico reduzido, descrição que interpola entre radiação e matéria. A incorporação de não-comutatividades se deu por meio do uso de uma generalização do formalismo de Faddeev-Jackiw, de modo a incluí-las diretamente na estrutura simplética da teoria em vez de nos parênteses de Poisson. Neste caso, obtivemos três parâmetros não-comutativos, a saber, χ , σ_+ e σ_- . As equações dinâmicas resultantes

foram resolvidas numericamente e comparadas com as soluções comutativas. As soluções obtidas mostram que a inclusão da não-comutatividade altera tanto o comportamento do fator de escala global quanto o dos parâmetros anisotrópicos. Assim, a inclusão de variáveis não-comutativas produz o efeito de atenuar ou intensificar a taxa de expansão do universo, conforme se escolha valores menores ou maiores dos parâmetros não-comutativos, bem como modificar o tempo de isotropização, de modo a diminuí-lo ou aumentá-lo. Foram realizadas estimativas para os parâmetros χ , σ_+ e σ_- com base em dados cosmológicos observacionais, confirmando-se a viabilidade física do modelo.

Os resultados de ambos os trabalhos abrem caminho para diversas pesquisas futuras. Uma das possibilidades consiste na extensão dos modelos aqui analisados para fluidos com equações de estado mais gerais, como os politrópicos, o gás de Chaplygin, fluidos com viscosidade efetiva ou condensados de Bose–Einstein, permitindo explorar sua dinâmica em distintos regimes físicos. Outra direção significativa envolve o estudo de versões semiclássicas desses modelos no contexto de gravidade quântica efetiva. Além disso, outra linha de pesquisa relevante seria examinar o impacto de anisotropias induzidas por não-comutatividade na radiação cósmica de fundo (CMB), em busca de possíveis assinaturas observacionais. Outra possibilidade consiste no estudo da não-comutatividade em outras métricas anisotrópicas ou mesmo não-homogêneas. Espera-se com interesse que investigações futuras esclareçam a existência de fenômenos não-comutativos e suas implicações para a física fundamental.

Referências

- [1] Einstein, A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7), 769-822.
- [2] Einstein, A. (1915). Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 831-839.
- [3] Dyson, F. W., Eddington, A. S., & Davidson, C. (1920). A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 220(571-581), 291-333.
- [4] Eddington, A. S. (1924). On the relation between the masses and luminosities of the stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 84, 308-332.
- [5] Pound, R. V., & Rebka, G. A., Jr. (1959). Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, 3 (9), 439-441.
- [6] Bowyer, S., Byram, E. T., Chubb, T. A., & Friedman, H. (1965). Cosmic X-ray sources. *Science*, 147 (3656), 394-398.
- [7] Oda, M. (1977). CygX-1/A candidate of the black hole. *Space Science Reviews*, 20 (6), 757-813.
- [8] Zwicky, F. (1937). Nebulae as Gravitational Lenses. *Physical Review*, 51(4), 290.
- [9] Walsh, D., Carswell, R. F., & Weymann, R. J. (1979). 0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, 279 (5712), 381-384.
- [10] Ashby, N. (2003). Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity*, 6(1), 1-42.
- [11] Everitt, C. W. F. et al. (2011). Gravity Probe B: Final results of a space experiment to test general relativity. *Physical Review Letters*, 106 (22), 221101.
- [12] Abbott, B. P. et al. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), 061102.
- [13] Abbott, B. P. et al. (2017). GW170814: A three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Physical Review Letters*, 119(14), 141101.
- [14] Akiyama, K. et al. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875 (L1), 1-17.

- [15] Minkowski, H. (1908). Space and Time. In: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, & H. Weyl. *The Principle of Relativity*. Translated by W. Perrett and G. B. Jeffery. New York: Dover Publications, Inc., 1952, p. 73–91.
- [16] Fadner, W. L. (1985). Theoretical support for the generalized correspondence principle. *American Journal of Physics*, 53(9), 829-838.
- [17] Wheeler, J. A. (2000). *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*. W. W. Norton & Company, p. 235.
- [18] Wheeler, J. A. (1962). *Geometrodynamics*. New York: Academic Press.
- [19] Littlewood, D. E. (1955). The cosmological principle. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(4), 678-683.
- [20] Milne, E. A. (1933). World-Structure and the Expansion of the Universe. *Zeitschrift für Astrophysik*, 6, 1-95.
- [21] Milne, E. A. (1935). *Relativity, Gravitation and World Structure*. Clarendon Press, Oxford.
- [22] O’Raifeartaigh, C., O’Keeffe, M., Nahm, W., & Mitton, S. (2017). Einstein’s 1917 static model of the universe: a centennial review. *The European Physical Journal H*, 42(3), 431-474.
- [23] Bondi, H. (1952). *Cosmology* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [24] Bondi, H., & Gold, T. (1948). The steady-state theory of the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 108(3), 252-270.
- [25] Ryan, M. P., & Shepley, L. C. (2015). *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Vol. 59). Princeton University Press.
- [26] Friedmann, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10, 377-386.
- [27] Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer.
- [28] Schneider, P. (2015). *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction* (2nd ed.). Springer.
- [29] Einasto, M., Saar, E., Liivamägi, L. J., Einasto, J., Tago, E., Martínez, V. J., Starck, J.-L., Müller, V., Heinämäki, P., Nurmi, P., Gramann, M., & Hütsi, G. (2007). The richest superclusters. I. Morphology. *Astronomy & Astrophysics*, 476(2), 697-711.
- [30] Tiwari, P., & Jain, P. (2019). Evidence of isotropy on large distance scales from polarizations of radio sources. *Astronomy & Astrophysics*, 622, A113.

- [31] Eichmann, B. (2019). High energy cosmic rays from Fanaroff-Riley radio galaxies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 05, 009.
- [32] Gonçalves, R. S., Carvalho, G. C., Bengaly, C. A. P., Carvalho, J. C., & Alcaniz, J. S. (2018). Measuring the scale of cosmic homogeneity with SDSS-IV DR14 quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(4), 5270-5274.
- [33] Lin, H. N., Wang, S., Chang, Z., & Li, X. (2016). Testing the isotropy of the Universe by using the JLA compilation of Type Ia supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456(2), 1881-1885.
- [34] Penzias, A. A., & Wilson, R. W. (1965). A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142, 419-421.
- [35] Fixsen, D. J. (2009). The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2), 916-920.
- [36] Akrami, Y. et al. (2020). Planck 2018 results-VII. Isotropy and statistics of the CMB. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A7.
- [37] Scrimgeour, M. I., et al. (2012). The WiggleZ Dark Energy Survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1), 116-134.
- [38] Paturel, G., Teerikorpi, P., & Baryshev, Y. (2017). Hubble law: measure and interpretation. *Foundations of Physics*, 47(9), 1208-1228.
- [39] Friedmann, A. (1924). Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1), 326-332.
- [40] Lemaître, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, A47, 49-56.
- [41] Lemaître, G. (1933). L'Univers en expansion. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, A53, 51-85.
- [42] Robertson, H. P. (1935). Kinematics and world structure. *Astrophysical Journal*, 82, 284-301.
- [43] Robertson, H. P. (1936). Kinematics and world structure II. *Astrophysical Journal*, 83, 187-201.
- [44] Robertson, H. P. (1936). Kinematics and world structure III. *Astrophysical Journal*, 83, 257-271.

- [45] Walker, A. G. (1937). On Milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1), 90-127.
- [46] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley.
- [47] Eddington, A. S. (1915). The dynamics of a globular stellar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 75(5), 366–376.
- [48] Eddington, A. S. (1926). *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press.
- [49] Zwicky, F. (1933). Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6, 110-127.
- [50] Weyl, H. (1923). *Raum, Zeit, Materie* (5th ed.). Springer.
- [51] Robertson, H. P. (1933). Relativistic cosmology. *Reviews of Modern Physics*, 5(1), 62-90.
- [52] Pathria, R. K. (1974). *Theory of Relativity* (2nd ed.). Pergamon Press.
- [53] Robertson, H. P. (1928). On relativistic cosmology. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 7, 5(30), 835-848.
- [54] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3rd ed.). Butterworth-Heinemann.
- [55] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1975). *The Classical Theory of Fields* (4th ed.). Butterworth-Heinemann.
- [56] Hilbert, D. (1915). Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung.) *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1915, 395–407.
- [57] Bojowald, M. (2010). *Canonical gravity and applications: Cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press.
- [58] Palais, R. S. (1979). The principle of symmetric criticality. *Communications in Mathematical Physics*, 69(1), 19-30.
- [59] Fels, M. E., & Torre, C. G. (2002). The principle of symmetric criticality in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 19(4), 641-675.
- [60] Dirac, P. A. M. (1950). Generalized Hamiltonian dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 2, 129-148.

- [61] Bergmann, P. G. (1949). Non-linear field theories. *Physical Review*, 75(4), 680-685.
- [62] Dirac, P. A. M. (1951). The Hamiltonian form of field dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 3, 1-23.
- [63] Bergmann, P. G., & Komar, A. (1972). The coordinate group symmetries of general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, 5(1), 15-28.
- [64] Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. L. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Pearson Education.
- [65] Raychaudhuri, A. K. (1955). Relativistic cosmology. I. *Physical Review*, 98(4), 1123-1126.
- [66] Sandage, A. R. (1970). Cosmology: A search for two numbers. *Physics Today*, 23(2), 34-41.
- [67] Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(3), 168-173.
- [68] Riess, A. G., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3), 1009-1038.
- [69] Perlmutter, S., et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2), 565-586.
- [70] Ostriker, J. P., & Steinhardt, P. J. (1995). The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant. *Nature*, 377(6550), 600-602.
- [71] Perivolaropoulos, L. & Skara, F. (2022). Challenges for Λ CDM: An update. *New Astronomy Reviews*, 95, 101659.
- [72] Oliveira, F., Avila, F., Franco, C. & Bernui, A. (2025). Is $\omega_0\omega_a$ CDM a good model for the clumpy Universe? *Physics of the Dark Universe*, 49, 101996.
- [73] Bean, A. J., Efstathiou, G., Ellis, R. S., Peterson, B. A., & Shanks, T. (1983). A complete galaxy redshift sample – I. The peculiar velocities between galaxy pairs and the mean mass density of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 205(3), 605-624.
- [74] Davis, M., & Peebles, P. J. E. (1983). A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations. *Astrophysical Journal*, 267, 465-482.

- [75] Sandage, A., & Tammann, G. A. (1984). The dynamical parameters of the universe. In: G. Setti & L. Van Hove (Eds.), *Large-scale structure of the universe, cosmology and fundamental physics: Proceedings of the 1st ESO/CERN Symposium, 21–25 November 1983, CERN, Geneva* (p. 127). European Southern Observatory.
- [76] Geller, M. J. (1984). Groups of galaxies. In F. Mardirossian, G. Giuricin, & M. Mezzetti (Eds.), *Clusters and groups of galaxies: International meeting held in Trieste, Italy, September 13–16, 1983* (p. 353–366). D. Reidel Publishing Company.
- [77] Blumenthal, G. R., Faber, S. M., Primack, J. R., & Rees, M. J. (1984). Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature*, 311(5986), 517–525.
- [78] Primack, J. R. (1984). Dark matter, galaxies, and large scale structure in the universe. *SLAC-PUB-3387* (July 1984). In: *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course XCII*.
- [79] Gamow, G. (1948). The Evolution of the Universe. *Nature*, 162, 680–682.
- [80] Gamow, G. (1948). The origin of elements and the separation of galaxies. *Physical Review*, 74(4), 505–506.
- [81] Alpher, R. A., & Herman, R. C. (1948). Evolution of the Universe. *Nature*, 162, 774–775.
- [82] Alpher, R. A., & Herman, R. C. (1948). On the Relative Abundance of the Elements. *Physical Review*, 74(12), 1737–1742.
- [83] Efstathiou, G., & Gratton, S. (2020). The evidence for a spatially flat Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 496(1), L91–L95.
- [84] Chudaykin, A., Dolgikh, K., & Ivanov, M. M. (2021). Constraints on the curvature of the Universe and dynamical dark energy from the full-shape and BAO data. *Physical Review D*, 103, 023507.
- [85] Vagnozzi, S., Di Valentino, E., Gariazzo, S., Melchiorri, A., Mena, O., & Silk, J. (2021). The galaxy power spectrum take on spatial curvature and cosmic concordance. *Physics of the Dark Universe*, 33, 100851.
- [86] Vagnozzi, S., Loeb, A., & Moresco, M. (2021). Eppure è piatto? The cosmic chronometers take on spatial curvature and cosmic concordance. *The Astrophysical Journal*, 908(1), 84.
- [87] Dhawan, S., Alsing, J., & Vagnozzi, S. (2021). Non-parametric spatial curvature inference using late-Universe cosmological probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 506 (1), L1–L5.

- [88] Jiang, J.-Q., Pedrotti, D., da Costa, S. S., & Vagnozzi, S. (2024). Nonparametric late-time expansion history reconstruction and implications for the Hubble tension in light of recent DESI and type Ia supernovae data. *Physical Review D*, 110(12), 123519.
- [89] Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., et al. (Planck Collaboration) (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6.
- [90] Arnowitt, R. L., & Deser, S. (1959). Quantum theory of gravitation: General formulation and linearized theory. *Physical Review*, 113(2), 745-750.
- [91] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1959). Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Physical Review*, 116(5), 1322-1330.
- [92] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Canonical variables for general relativity. *Physical Review*, 117(6), 1595-1602.
- [93] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Canonical variables, expression for energy, and the criteria for radiation in general relativity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 15(3), 487-491.
- [94] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Finite self-energy of classical point particles. *Physical Review Letters*, 4(7), 375-377.
- [95] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Energy and the criteria for radiation in general relativity. *Physical Review*, 118(4), 1100-1104.
- [96] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Consistency of the canonical reduction of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 1(5), 434-439.
- [97] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Gravitational-electromagnetic coupling and the classical self-energy problem. *Physical Review*, 120(1), 313-320.
- [98] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Interior Schwarzschild solutions and interpretation of source terms. *Physical Review*, 120(1), 321-324.
- [99] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1960). Note on positive-definiteness of the energy of the gravitational field. *Annals of Physics*, 11(1), 116-121.
- [100] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1961). Heisenberg representation in classical general relativity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(4), 668-681.
- [101] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1961). Wave zone in general relativity. *Physical Review*, 121(5), 1556-1566.

- [102] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1961). Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Physical Review*, 122(3), 997-1006.
- [103] Arnowitt, R. L., Deser, S., & Misner, C. W. (1962). The dynamics of general relativity. In: L. Witten (Ed.), *Gravitation: An introduction to current research* (p. 227–265). Wiley.
- [104] Cianfrani, F., Lecian, O. M., Lulli, M., & Montani, G. (2014). *Canonical Quantum Gravity: Fundamentals and Recent Developments*. World Scientific Publishing Company.
- [105] Gourgoulhon, É. (2012). *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Springer.
- [106] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2010). *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press.
- [107] Alcubierre, M. (2008). *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press.
- [108] Norton, J. D. (1993). General covariance and the foundations of general relativity: Eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics*, 56(7), 791-858.
- [109] Castellani, L. (1982). Symmetries in constrained Hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 143(2), 357–371.
- [110] DeWitt, B. S. (1967). Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. *Physical Review*, 160(5), 1113–1148.
- [111] DeWitt, B. S. (1967). Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. *Physical Review*, 162(5), 1195–1239.
- [112] DeWitt, B. S. (1967). Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory. *Physical Review*, 162(5), 1239–1256.
- [113] Rovelli, C. (2015). The strange equation of quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12), 124005.
- [114] Padmanabhan, T. (2010). *Gravitation: Foundations and frontiers*. Cambridge University Press.
- [115] D’Inverno, R. A., & Vickers, J. (2022). *Introducing Einstein’s relativity: A deeper understanding*. Oxford University Press.
- [116] Pinto-Neto, N. (2020). Hamiltonian formulation of general relativity and application. *Série do PPGCosmo: Cadernos de Astrofísica, Cosmologia e Gravitação*. Editora Livraria da Física.

- [117] Alvarenga, F. G., Fractalossi, R., Furtado, R. G., & Gonçalves, S. V. B. (2016). Dynamics of a Perfect Fluid Through Velocity Potentials with Application in Quantum Cosmology. *Brazilian Journal of Physics*, 47(1), 96-105.
- [118] Monerat, G. A., Santos, C. G. M., Alvarenga, F. G., Gonçalves, S. V. B., Fractalossi, R., Silva, E. V. Corrêa, & Oliveira-Neto, G. (2020). Quantum cosmology with many fluids and the choice of cosmological time. *Brazilian Journal of Physics*, 50(1), 89–104.
- [119] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1987). *Fluid mechanics* (2nd ed., Course of Theoretical Physics, Vol. 6). Elsevier Butterworth–Heinemann.
- [120] Seliger, R. L., & Whitham, G. B. (1968). Variational principles in continuum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 305(1480), 1–25.
- [121] Lin, C. C. (1963). Liquid helium. *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XXI*. Academic Press.
- [122] Clebsch, A. (1859). Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 56, 1–10.
- [123] Neves, C., & Oliveira, W. (2004). Clebsch parameterization from the symplectic point of view. *Physics Letters A*, 321(5–6), 267–272.
- [124] Jackiw, R. (2000). (A particle field theorist's) lectures on (supersymmetric, non-Abelian) fluid mechanics (and d-branes) Preprint. arXiv:physics/0010042 [physics.flu-dyn].
- [125] Van Saarloos, W., Bedeaux, D., & Mazur, P. (1981). Hydrodynamics for an ideal fluid: Hamiltonian formalism and Liouville-equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 107(1), 109–125.
- [126] Schutz, B. F., Jr. (1970). Perfect fluids in general relativity: Velocity potentials and a variational principle. *Physical Review D*, 2(12), 2762-2773.
- [127] Schutz, B. F., Jr. (1971). Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. *Physical Review D*, 4(12), 3559-3566.
- [128] Schutz, B. F., Jr. (1972). Linear pulsations and stability of differentially rotating stellar models: I. Newtonian Analysis. *The Astrophysical Journal Supplement*, 208(24), 319–342.
- [129] Schutz, B. F., Jr. (1972). Linear pulsations and stability of differentially rotating stellar models: II. General relativistic analysis. *The Astrophysical Journal Supplement*, 208(24), 343–374.

- [130] Schutz, B. F., Jr., & Sorkin, R. (1977). Variational aspects of relativistic field theories, with application to perfect fluids. *Annals of Physics*, 107(1–2), 1–43.
- [131] Schutz, B. F., Jr. (1972). Non-vacuum ADaM field equations. In: *Methods of local and global differential geometry in general relativity: Proceedings of the regional conference on relativity held at the University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pennsylvania, July 13–17, 1970* (p. 171–175). Springer.
- [132] Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (2nd ed.). Wiley.
- [133] Taub, A. H. (1959). On circulation in relativistic hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 3, 312–324.
- [134] Dirac, P. A. M. (1958). Generalized Hamiltonian dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 246(1246), 326–332.
- [135] Lapchinskii, V. G., & Rubakov, V. A. (1977). Quantum gravitation: Quantization of the Friedmann model. *Theoretical and Mathematical Physics*, 33, 1076–1084.
- [136] Anderson, E. (2017). *The problem of time: Quantum mechanics versus general relativity*. Springer.
- [137] Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
- [138] Carey, A. L. (Ed.). (2011). *Noncommutative Geometry and Physics: Renormalisation, Motives, Index Theory*. ESI Lectures in Mathematics and Physics (Vol. 8). European Mathematical Society.
- [139] Landi, G. (1997). *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries*. (Lecture Notes in Physics, New Series m: Monographs, Vol. 51). Springer.
- [140] Várilly, J. C. (2006). *An Introduction to Noncommutative Geometry*. (EMS Series of Lectures in Mathematics, Vol. 4). European Mathematical Society.
- [141] Marcolli, M., & Pierpaoli, E. (2010). Early universe models from noncommutative geometry. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 14(5), 1373–1432.
- [142] Douglas, M. R., & Nekrasov, N. A. (2001). Noncommutative Field Theory. *Reviews of Modern Physics*, 73(4), 977–1029.
- [143] Dirac, P. A. M. (1958). *The Principles of Quantum Mechanics* (4th ed., revised). Oxford University Press.

- [144] Moyal, J. E. (1949). Quantum mechanics as a statistical theory. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45 (1), 99–124.
- [145] Vey, J. (1975). Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 50, 421–454.
- [146] Flato, M., Lichnerowicz, A., & Sternheimer, D. (1975). Déformations 1-différentiables des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact. *Compositio Mathematica*, 31 (1), 47–82.
- [147] Flato, M., Lichnerowicz, A., & Sternheimer, D. (1976). Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications. *Journal of Mathematical Physics*, 17 (9), 1754–1762.
- [148] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., & Sternheimer, D. (1978). Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Annals of Physics*, 111 (1), 61–110.
- [149] Gutt, S. (1979). Equivalence of deformations and associated*-products. *Letters in Mathematical Physics*, 3, 297–309.
- [150] Djemaï, A. E. F., & Smail, H. (2004). On Quantum Mechanics on Noncommutative Quantum Phase Space. *Communications in Theoretical Physics*, 41 (6), 837–844.
- [151] Djemaï, A. E. F. (2004). Noncommutative Classical Mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 43 (2), 299–314.
- [152] Gutt, S., Rawnsley, J., & Sternheimer, D. (Eds.). (2005). *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations*. Cambridge University Press.
- [153] Bopp, F. (1956). La mécanique quantique est-elle une mécanique statistique classique particulière? *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 15(2), 81–112.
- [154] Faddeev, L., & Jackiw, R. (1988). Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters*, 60 (17), 1692–1694.
- [155] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Faddeev–Jackiw quantization and constraints. *International Journal of Modern Physics A*, 7(20), 4981–5003.
- [156] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Symplectic quantization of constrained systems. *Modern Physics Letters A*, 7(19), 1737–1747.
- [157] Parra-Rodriguez, A., & Egusquiza, I. L. (2024). Geometrical description and Faddeev–Jackiw quantization of electrical networks. *Quantum*, 8, 1466.

- [158] Paulin-Fuentes, J. M., López Arellano, C. M., & Cabrera, J. M. (2024). Singular Lagrangians and the Faddeev–Jackiw Formalism in Classical Mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, 63, 111.
- [159] Manavella, E. C. (2023). Extended Faddeev–Jackiw canonical quantization for the Podolsky electrodynamics. *International Journal of Modern Physics A*, 38(20), 2350096.
- [160] Dai, J. (2021). Faddeev–Jackiw quantization of the higher derivative Chern–Simons gauge theory in the first-order formalism. *Chinese Journal of Physics*, 73, 103–114.
- [161] Abreu, E. M. C., Fernandes, R. L., Mendes, A. C. R., Neto, J. A., & de Paula, R. M. (2018). Faddeev–Jackiw approach of noncommutative space–time electromagnetic theories. *International Journal of Modern Physics A*, 33(28), 1850163.
- [162] Escalante, A., & Medel-Portugal, C. (2018). Faddeev–Jackiw quantization of topological invariants: Euler and Pontryagin classes. *Annals of Physics*, 391, 27–46.
- [163] Dengiz, S. (2018). Note on soft photons and Faddeev–Jackiw symplectic reduction of quantum electrodynamics in the eikonal limit. *International Journal of Modern Physics A*, 33(25), 1830020.
- [164] Dengiz, S. (2016). Faddeev–Jackiw Hamiltonian reduction for free and gauged Rarita–Schwinger theories. *The European Physical Journal C*, 76, 566.
- [165] Ramos, J. (2017). On the equivalence and non-equivalence of Dirac and Faddeev–Jackiw formalisms for constrained systems. *Canadian Journal of Physics*, 95(3), 225–233.
- [166] Toms, D. J. (2015). Faddeev–Jackiw quantization and the path integral. *Physical Review D*, 92(10), 105026.
- [167] Horváthy, P. A. (2006). Non-Commutative Mechanics in Mathematical & in Condensed Matter Physics. *SIGMA – Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2, 090.
- [168] Liao, L., & Huang, Y.-C. (2006). Faddeev–Jackiw quantization of the gauge invariant self-dual fields relative to string theory. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 30(3), 191–195.
- [169] Long, Z.-W., & Jing, J. (2003). Faddeev–Jackiw approach to the noncommutativity. *Physics Letters B*, 560(1–2), 128–132.
- [170] Gómez, I. S., Pandey, V. K., & Thibes, R. (2024). Symplectic quantization and general constraint structure of a prototypical second-class system. *The European Physical Journal C*, 84, 1255.

- [171] Liang, S.-D. (2024). Deformed Hamilton Mechanics in Noncommutative Phase Space. *International Journal of Theoretical Physics*, 63(10), 262.
- [172] Zen Vasconcellos, C. A., Hess, P. O., Pacheco, J. F., Weber, F., Bodmann, B., Hadjimichief, D., Naysinger, G., Netz-Marzola, M., & Razeira, M. (2024). The accelerating universe in a noncommutative analytically continued foliated quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 41 (24), 245004.
- [173] Socorro, J., Rosales, J. J., & Toledo-Sesma, L. (2024). Non-Commutative Classical and Quantum Fractionary Cosmology: FRW Case. *Universe*, 10 (5), 192.
- [174] Rodríguez-Tzompantzi, O. (2024). Faddeev–Jackiw Hamiltonian formulation for general exotic bi-gravity. *The European Physical Journal C*, 84, 701.
- [175] Kuhfittig, P. K. F. (2022). Noncommutative geometry and MOND. *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology*, 8(3), 642–646.
- [176] Touati, A., & Zaim, S. (2021). Geodesic equation in non-commutative gauge theory of gravity. *Chinese Physics C*, 46(10), 105101.
- [177] Berkane, A., & Boussahel, M. (2021). Dark Matter in the Standard Model Extension in Non-Commutative Geometry (NCG). *Journal of Physics: Conference Series*, 2090, 012043.
- [178] Kanazawa, T., Lambiase, G., Vilasi, G., & Yoshioka, A. (2019). Noncommutative Schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle. *The European Physical Journal C*, 79(2), 95.
- [179] Ma, K. (2018). Noncommutative effects on the fluid dynamics and modifications of the Friedmann equation. *Advances in High Energy Physics*, 2018, 6578204.
- [180] Rodríguez-Tzompantzi, O., & Escalante, A. (2018). Gauge symmetry and constraints structure for topologically massive AdS gravity: a symplectic viewpoint. *The European Physical Journal C*, 78(5), 369.
- [181] Rodrigues, D. C., Galvão, M., & Pinto-Neto, N. (2018). Hamiltonian analysis of general relativity and extended gravity from the iterative Faddeev–Jackiw symplectic approach. *Physical Review D*, 98 (10), 104019.
- [182] Escalante, A., & Ochoa-Gutiérrez, H. H. O. (2017). Canonical and symplectic analysis for three-dimensional gravity without dynamics. *Annals of Physics*, 378, 396–406.
- [183] Moia, A. (2017). Noncommutative spacetime symmetries from covariant quantum mechanics. *Advances in High Energy Physics*, 2017, 4042314.

- [184] Cartas-Fuentevilla, R., Escalante, A., & Herrera-Aguilar, A. (2017). Symplectic analysis of three-dimensional Abelian topological gravity. *The European Physical Journal Plus*, 132(2), 63.
- [185] Escalante, A., & Rodríguez-Tzompantzi, O. (2016). On the Faddeev–Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity. *The European Physical Journal C*, 76(10), 577.
- [186] De Andrade, M. A., & Neves, C. (2018). Noncommutative mapping from the symplectic formalism. *Journal of Mathematical Physics*, 59(1), 012105.
- [187] De Andrade, M. A., Neves, C., & Corrêa Silva, E. V. (2024). Barcelos-Wotzasek symplectic algorithm for constrained systems revisited. *Brazilian Journal of Physics*, 54, 228.
- [188] Abreu, E. M. C., Neves, C., & Oliveira, W. (2006). Noncommutativity from the symplectic point of view. *International Journal of Modern Physics A*, 21(26), 5359–5369.
- [189] Ellis, G. F. R., & MacCallum, M. A. H. (1969). A class of homogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 12(2), 108–141.
- [190] Ryan, M. P., & Shepley, L. C. (1975). *Homogeneous Relativistic Cosmologies*. Princeton University Press.
- [191] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press.
- [192] Ellis, G. F. R. (2006). The Bianchi models: Then and now. *General Relativity and Gravitation*, 38(6), 1003–1015.
- [193] Bianchi, L. (1898). Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Serie Terza XI*, 267–352. (Republicado em inglês: On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions, *General Relativity and Gravitation*, 33, 2171–2253, 2001).
- [194] Misner, C. W. (1968). The Isotropy of the universe. *Astrophysical Journal*, 151, 431.
- [195] Misner, C. W. (1969). Quantum cosmology. I. *Physical Review*, 186(5), 1319–1327.
- [196] Misner, C. W. (1969). Mixmaster universe. *Physical Review Letters*, 22(20), 1071.
- [197] Kasner, E. (1921). Geometrical theorems on Einstein’s cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, 43(4), 217–221.
- [198] Jacobs, K. C. (1969). Cosmologies of Bianchi type I with an uniform magnetic field. *Astrophysical Journal*, 155, 379.

- [199] Hughston, L. P. & Jacobs, K. C. (1970). Homogeneous electromagnetic and massive-vector-meson field in Bianchi cosmologies. *Astrophysical Journal*, 160, 147.
- [200] Banerjee, A., Duttachoudhury, S. B., & Sanyal, A. K. (1985). Bianchi type I cosmological model with a viscous fluid. *Journal of Mathematical Physics*, 26, 3010–3015.
- [201] Biesiada, M., Szydlowski, M. & Szczec, J. (1988). Null geodesics in multi-dimensional homogeneous cosmologies. *Physics Letters B*, 211(1-2), 42-48.
- [202] Chakraborty, S. (1992). Bianchi I cosmological model and the no-boundary condition. *International Journal of Theoretical Physics*, 31(2), 303-311.
- [203] D'Eath, P. D. (1994). Quantization of the supersymmetric Bianchi-I model with a cosmological constant. *Physics Letters B*, 320, 12–15.
- [204] Alvarenga, F. G., Batista, A. B., Fabris, J. C., & Gonçalves, S. V. B. (2003). Troubles with quantum anisotropic cosmological models: loss of unitarity. *General Relativity and Gravitation*, 35(9), 1659-1677.
- [205] Pradhan, A., & Pandey, O. P. (2003). Bianchi type I anisotropic magnetized cosmological models with varying Λ . *International Journal of Modern Physics D*, 12(7), 1299–1314.
- [206] Balakin, A. B., & Zimdahl, W. (2005). Anisotropic cosmological models with non-minimally coupled magnetic field. *Physical Review D*, 71, 124014.
- [207] Balakin, A. B. (2007). Magnetic relaxation in the Bianchi-I universe. *Classical and Quantum Gravity*, 24(20), 5221–5245.
- [208] Yadav, A. K., Rahaman, F., Ray, S., & Goswami, G. K. (2012). Magnetized dark energy and the late time acceleration. *The European Physical Journal Plus*, 127(10), 127.
- [209] Canfora, F., Giacomini, A., & Pavluchenko, S. A. (2014). Cosmological dynamics of gravitating hadron matter. *Physical Review D*, 90, 043516.
- [210] Kamenshchik, A. Y., Pozdeeva, E. O., Vernov, S. Y., Tronconi, A., & Venturi, G. (2017). Bianchi-I cosmological model and crossing singularities. *Physical Review D*, 95, 083503.
- [211] Kamenshchik, A. Y., Pozdeeva, E. O., Vernov, S. Y., Starobinsky, A. A., Tronconi, A., & Venturi, G. (2018). Induced gravity and minimally and conformally coupled scalar fields in Bianchi-I cosmological models. *Physical Review D*, 97, 023536.

- [212] Mandal, R., Gangopadhyay, S., & Lahiri, A. (2020). Cosmology of Bianchi type-I metric using renormalization group approach for quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 37(6), 065012.
- [213] Parnovsky, S. L. (2023). The Big Bang could be anisotropic. The case of Bianchi I model. *Classical and Quantum Gravity*, 40, 135005.
- [214] Casadio, R., Kamenshchik, A. Y., Petriakova, P., & Mavrogiannis, P. (2023). Bianchi cosmologies, magnetic fields and singularities. *Physical Review D*, 108, 084059.
- [215] Wheeler, J. A. (1968). Superspace and the nature of quantum geometrodynamics. In: C. DeWitt and J. A. Wheeler (Eds.), *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics* (p. 242–307). W. A. Benjamin.
- [216] Oliveira-Neto, G., & Abreu, T. M. (2024). A noncommutative Bianchi I model with radiation. *International Journal of Modern Physics D*, 33(7–8), 2450032.
- [217] Li, M., Li, X. D., Wang, S., & Wang, Y. (2011). Dark Energy. *Communications in Theoretical Physics*, 56(3), 525–604.
- [218] Silvestri, A., & Trodden, M. (2009). Approaches to understanding cosmic acceleration. *Reports on Progress in Physics*, 72, 096901.
- [219] Vakili, B., Pedram, P., & Jalalzadeh, S. (2010). Late time acceleration in a deformed phase space model of dilaton cosmology. *Physics Letters B*, 687(2–3), 119–123.
- [220] El-Nabulsi, A. R. (2010). Noncommutative accelerated multidimensional universe dominated by quintessence. *Astrophysics and Space Science*, 326(2), 163–167.
- [221] Obregon, O., & Quiros, I. (2011). Can noncommutative effects account for the present speed up of the cosmic expansion? *Physical Review D*, 84, 044005.
- [222] Abreu, E. M. C., Marcial, M. V., Mendes, A. C. R., Oliveira, W., & Oliveira-Neto, G. (2012). Noncommutative cosmological models coupled to a perfect fluid and a cosmological constant. *Journal of High Energy Physics*, 2012(5), 1–23.
- [223] Malekolkalami, B., Atazadeh, K., & Vakili, B. (2014). Late time acceleration in a non-commutative model of modified cosmology. *Physics Letters B*, 739, 400–404.
- [224] Sabido, M., & Yee-Romero, C. (2016). Deformed phase space Kaluza-Klein cosmology and late time acceleration. *Physics Letters B*, 757, 57.
- [225] Monerat, G. A., Corrêa Silva, E. V., Neves, C., Oliveira-Neto, G., Rezende Rodrigues, L. G., & Silva de Oliveira, M. (2017). Can noncommutativity affect the whole history of the universe? *International Journal of Modern Physics D*, 26, 1750022.

- [226] Oliveira-Neto, G., & Vaz, A. R. (2017). Noncommutative cosmological model in the presence of a phantom fluid. *The European Physical Journal Plus*, 132, 131.
- [227] Oliveira-Neto, G., Silva de Oliveira, M., Monerat, G. A., & Corrêa Silva, E. V. (2017). Noncommutativity in the early universe. *International Journal of Modern Physics D*, 26(02), 1750011.
- [228] Sadeghi, J., Pourhassan, B., Nekouee, Z., & Shokri, M. (2018). Deformation of the quintom cosmological model and its consequences. *International Journal of Modern Physics D*, 27(3), 1850025.
- [229] Abreu, E. M. C., Mendes, A. C. R., Oliveira-Neto, G., Ananias Neto, J., Rezende Rodrigues, L. G., & Silva de Oliveira, M. (2019). Horava–Lifshitz cosmological models with noncommutative phase space variables. *General Relativity and Gravitation*, 51, 95.
- [230] Oliveira-Neto, G., & Rezende Rodrigues, L. G. (2019). Noncommutative cosmological models induced by a symplectic formalism coupled to phantom fluids. *International Journal of Modern Physics A*, 34, 1950206.
- [231] Oliveira-Neto, G., & Fazza Marcon, L. (2021). Complete noncommutativity in a cosmological model with radiation. *The European Physical Journal Plus*, 136(5), 584.
- [232] Liddle, A. R. (2015). *An Introduction to Modern Cosmology* (3rd ed.). Wiley.
- [233] Gnedin, N. *Cosmological Calculator for the Flat Universe*. Disponível em: <https://astro.uchicago.edu/~gnedin/cc/>. Acesso em: 30 jul. 2025.
- [234] Ade, P. A. R., et al. (2016). Planck 2015 results-XIII. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594, A13.
- [235] Maxwell, J. C. (1860). Illustrations of the dynamical theory of gases. Part I. On the motions and collisions of perfectly elastic spheres. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th Series, 19, 19–32.
- [236] Maxwell, J. C. (1860). Illustrations of the dynamical theory of gases. Part II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th Series, 20, 21–37.
- [237] Boltzmann, L. (1872). Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 66, 275–370.

- [238] Boltzmann, L. (1877). Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, Abt. II*, 76, 373–435.
- [239] Jüttner, F. (1911). Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. *Annalen der Physik*, 339(5), 856–882.
- [240] Synge, J. L. (1957). *The relativistic gas*. North-Holland Publishing Company.
- [241] de Berredo-Peixoto, G., Shapiro, I. L., & Sobreira, F. (2005). Simple cosmological model with relativistic gas. *Modern Physics Letters A*, 20(35), 2723–2734.
- [242] dos Reis, S. C., & Shapiro, I. L. (2018). Cosmic anisotropy with reduced relativistic gas. *The European Physical Journal C*, 78(2), 145.
- [243] Vereshchagin, G. V., & Aksenov, A. G. (2017). *Relativistic Kinetic Theory: With Applications in Astrophysics and Cosmology*. Cambridge University Press.
- [244] Sakharov, A. D. (1966). The initial stage of an expanding universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Soviet Physics JETP*, 22, 241–249.
- [245] Fabris, J. C., Shapiro, I. L., & Velasquez-Toribio, A. M. (2012). Testing dark matter warmness and quantity via the reduced relativistic gas model. *Physical Review D*, 85(2), 023506.
- [246] Fabris, J. C., Shapiro, I. L., & Sobreira, F. (2009). DM particles: how warm they can be? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(02), 001.
- [247] Grishchuk, L. P. (2011). *Cosmological Sakharov oscillations and quantum mechanics of the early universe* [Conference talk manuscript]. arXiv:1106.5205 [gr-qc]
- [248] Abreu, T. M., Oliveira-Neto, G., Mendes, A. C. R., & Reis, S. C. (2025). *Non-commutative effects in Bianchi I cosmology with reduced relativistic gas* [Preprint]. arXiv:2505.07066 [gr-qc].
- [249] Corrêa Silva, E. V., Monerat, G. A., Oliveira-Neto, G., Neves, C., & Ferreira Filho, L. G. (2009). Symplectic method in quantum cosmology. *Physical Review D*, 80(4), 047302.