

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TAYNARA SCHINCARIOL ALVES

**PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO
SOBRE TAXAS**

Juiz de Fora

2025

TAYNARA SCHINCARIOL ALVES

**PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO
SOBRE TAXAS**

Defesa apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora

2025

Taynara Schincariol Alves

Pensamento proporcional na Matemática Escolar: um estudo sobre taxas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 29 de abril de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva- Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rodolfo Chaves - Membro externo

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Hernando José Rocha Franco - Membro interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 25/04/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchiades da Silva, Professor(a)**, em 10/07/2025, às 09:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Chaves, Usuário Externo**, em 10/07/2025, às 13:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **HERNANDO JOSE ROCHA FRANCO, Usuário Externo**, em 10/07/2025, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2365470** e o código CRC **3B93DF96**.

"Não há saber mais ou saber menos: há saberes diferentes."

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha avó Naerte por sempre confiar no caminho que escolhi para mim.

À minha mãe Rosemary por construir a mulher que sou hoje e ser inspiração para a minha escolha de profissão.

À minha noiva Luiza por me fortalecer à medida que os desafios apareciam, por sua cumplicidade e paciência.

Ao meu orientador e professor, Dr. Amarildo Melchades da Silva, pelos incentivos e orientações, amizade e confiança na caminhada.

A todo o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e a todos os participantes do grupo de pesquisa Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática por proporcionarem um espaço que possibilita a constituição do conhecimento.

Aos participantes da pesquisa, por confiarem no trabalho e dedicarem um tempo para ampliar os resultados de nossa pesquisa.

Aos meus colegas de turma do Mestrado Profissional em Educação Matemática pelos anos de afetividade, de conhecimento e de discussões enriquecedoras.

Às minhas amigas do mestrado, Maria Eduarda e Sinai, por serem acolhedoras nos momentos difíceis e inspiração na construção do trabalho e por compartilharem das minhas angústias e ansiedades.

A todos que fazem parte da minha formação profissional e constituem quem sou, meu muito obrigada!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teórica e metodologicamente, para o ensino da noção de taxa a estudantes do Ensino Fundamental como parte do processo de desenvolvimento do pensamento proporcional inserido no projeto de educá-los matematicamente. A pesquisa caracteriza-se como uma abordagem qualitativa de investigação, desenvolvida em um trabalho de campo e fundamentada teoricamente pelo Modelo dos Campos Semânticos. Como projeto de desenvolvimento, foi produzido um produto educacional constituído por um conjunto de tarefas¹ para uso nas salas de aula de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Produção de significados. Pensamento Proporcional. Noção de taxa. Matemática Escolar.

¹ o termo usado pela CAPES equivalente é sequência didática, entretanto esse termo tem raízes em Piaget e é necessário demarcar o distanciamento entre esta pesquisa e o modelo piagetiano.

ABSTRACT

The present work aims to investigate the development of a set of theoretically and methodologically grounded tasks for teaching the concept of rate to elementary school students, as part of the process of developing proportional reasoning within the broader project of educating them mathematically. The research is characterized as a qualitative investigation, involving fieldwork, and is theoretically based on the Semantic Fields Model. As a development project, an educational product was created consisting of a set of tasks to be used in mathematics classrooms.

Keywords: Mathematics Education. Proportional thinking. Tax's conception. School Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Página do Livro Teláris (Razão e Grandezas Proporcionais)	21
Figura 2 - Página do Livro Teláris (Razão)	22
Figura 3 - Página do Livro Teláris (Proporção)	23
Figura 4 - Página do Livro Teláris (Grandezas Diretamente Proporcionais)	24
Figura 5 - Página do Livro Teláris (Grandezas Diretamente Proporcionais)	25
Figura 6 - Página do Livro Teláris (Situação Não Proporcional)	26
Figura 7 - Resposta de Alice (Tarefa 1)	41
Figura 8 - Resposta de Bernardo (Tarefa 1)	42
Figura 9 - Resposta de Alice (Tarefa 2)	46
Figura 10 - Resposta de Bernardo (Tarefa 2)	49
Figura 11 - Resposta de Alice (Tarefa 3)	51
Figura 13 - Resposta de Alice (Tarefa 4)	54
Figura 14 - Resposta de Bernardo (Tarefa 4)	54
Figura 15 - Resposta de Alice (Tarefa 5)	56
Figura 16 - Resposta de Bernardo (Tarefa 5)	57
Figura 17 - Resposta de Alice (Tarefa 6)	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
NIDEEM	Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	5
2. O PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE TAXA	8
2.1 O PENSAMENTO PROPORCIONAL	8
2.2 A NOÇÃO DE TAXA	12
3. REVISÃO DE LITERATURA	15
4. REFERENCIAL TEÓRICO	26
4.1. O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS	26
4.2. O PROBLEMA DE PESQUISA	28
5. METODOLOGIA	30
5.1. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	30
5.2. SOBRE AS TAREFAS	32
6. ANÁLISE DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS	39
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICES	64

1. INTRODUÇÃO

A investigação que apresentaremos ao longo dos capítulos é um dos subprojetos do macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica*, desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática/NIDEEM.

Esse macroprojeto compõe um programa de investigação interinstitucional denominado *Programa Linsiano de Investigação*, em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955-2017).

O mencionado programa de investigação apresenta duas questões orientadoras: (i) Como formar um(a) estudante educado(a) matematicamente ao longo da Educação Básica no século XXI?; (ii) Como deve ser a formação inicial de professores(as) no interior das licenciaturas em Matemática e Pedagogia para educar matematicamente os (as) estudantes da Educação Básica neste século? (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 95)

No texto supracitado, segundo os pesquisadores, as questões foram propositalmente formuladas como questões abertas. Estas foram selecionadas de acordo com nossos interesses de pesquisa, a partir do grupo em que se inserem os macroprojetos, desenvolvidos nas diferentes instituições de pesquisa que fazem parte do projeto e que responderão localmente às perguntas orientadoras apresentadas.

Nosso projeto se insere na primeira pergunta orientadora do programa e está vinculado ao macroprojeto de pesquisa cuja investigação busca caracterizar o pensamento matemático, que segundo (Silva; Oliveira; Bastos, 2024)

(...) se constitui em um conjunto de modos de pensar - histórico e culturalmente produzidos - que se entrelaçam e se complementam, a saber: pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatístico, pensamento proporcional, pensamento lógico e pensamento financeiro. (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 99)

Insere-se também na proposta do *design* de tarefas para a construção do pensamento proporcional, ficando sob nossa responsabilidade a investigação sobre a produção de tarefas referente à noção de taxa.

Nos livros didáticos brasileiros da educação básica, não há menção a respeito do termo taxa, pois, em nossa literatura escolar, determinados autores preferem substituí-lo por grandezas de mesma espécie – para razão – e grandezas de espécies diferentes (taxa). Outros tratam a taxa como razões especiais, e alguns nem mesmo produzem significado para estes objetos distintos, constituindo-os como um único objeto. Em nosso estudo, a noção de taxa – comparação de grandezas diferentes – será caracterizada como um objeto distinto de razão – comparação de grandezas de mesma espécie.

Há situações cotidianas que demandam tomadas de decisões envolvendo um cálculo mental rápido de proporcionalidade. Nas salas de aula, temas, unidades programáticas, ideias e objetos como razão, taxa², proporção e grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais são ensinados, mas não se constituem em aprendizagem para os estudantes e, portanto, não passam a ser para eles um conhecimento produzido que possam utilizar na tomada de decisões.

Esta pesquisa, além de ser parte de um projeto que visa propiciar o desenvolvimento do pensamento proporcional dos estudantes (de modo que seja o mais natural possível essa adequação entre o que foi visto em sala de aula e como será usado em sua vida pessoal), também objetiva proporcionar o desenvolvimento de seu pensamento crítico e reflexivo.

No Capítulo 2, as caracterizações de pensamento proporcional são postas juntamente com um destaque à sua relevância. Ademais, nele a noção de taxa será detalhada e será apresentada a importância da pesquisa sobre ela.

O Capítulo 3 será dedicado à revisão da literatura como forma de obter informações sobre pesquisas anteriores à nossa e que puderam auxiliar em nosso estudo. Neste momento, indicaremos o fato de que há outros pesquisadores envolvidos no Programa Linsiano participando das pesquisas sobre design de tarefas para o pensamento proporcional. Este eixo de investigação tem início no Ensino Fundamental I, com o trabalho de Fernandes (2024). Em seguida, no 6º ano do Ensino Fundamental II, Silva (2024) dá continuidade ao percurso investigando a noção de razão. Na sequência, nossa pesquisa concentra-se na noção de taxa, com tarefas direcionadas ao 7º ano. Posteriormente, Pedrosa (2025) desenvolve atividades voltadas ao ensino de proporção para o 8º ano. Encerrando a proposta de produção de tarefas para o Ensino Fundamental, há a

² o termo taxa não é utilizado nas escolas apesar de ser objeto de aprendizagem

pesquisa de Santos (2025) que propõe atividades sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais para o 9º ano.

No Capítulo 4, apresentaremos nossa opção de referencial teórico-epistemológico e metodológico da pesquisa, intitulado Modelos dos Campos Semânticos (MCS), em que descreveremos as noções-categorias que possivelmente serão utilizadas ao longo da investigação e do processo de desenvolvimento do pensamento proporcional. Com o MCS à nossa disposição, detalharemos nosso problema de pesquisa e o produto educacional.

No Capítulo 5, apresentaremos a caracterização da pesquisa, os potenciais participantes da pesquisa e nossos procedimentos metodológicos. Além disso, apresentaremos o processo de produção do produto educacional e a elaboração das tarefas.

No Capítulo 6, será realizada a análise epistemológica das produções de significados dos estudantes participantes da pesquisa.

No Capítulo 7, serão apresentadas algumas considerações finais após a pesquisa exposta nos capítulos precedentes.

2. O PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE TAXA

Neste capítulo, que se divide em duas seções, teremos, na primeira, as caracterizações do pensamento proporcional cuja importância do desenvolvimento será detalhada. Já na segunda seção, serão apresentadas as concepções da noção de taxa e será discorrido acerca de sua relevância.

2.1 O PENSAMENTO PROPORCIONAL

Nesta seção serão discutidas algumas concepções de pensamento proporcional e de raciocínio proporcional, destacando a importância do seu desenvolvimento nos estudantes. Além disso, serão ressaltadas características de um pensador proporcional e apontados indicadores de como identificar um não pensador proporcional.

A referência principal para a caracterização própria de pensamento proporcional do Programa de Investigação é a de Lins e Gimenez (2001) que, segundo eles,

corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva.(LINS; GIMENEZ, 2001, p.52)

Sobre a característica de comparação, a pesquisadora Spinillo (1997, p.41) comenta que “O pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.” Já Lamon (2012), em seu livro, utiliza o termo raciocínio proporcional e então esclarece que

raciocínio proporcional se refere à habilidade de escalonar para cima e para baixo em situações apropriadas e fornecer justificativas para afirmações feitas sobre relações em situações envolvendo proporções diretas simples e inversas. Em termos coloquiais, o raciocínio proporcional é raciocinar para cima e para baixo em situações nas quais existe uma relação invariante (constante) entre duas quantidades que estão ligadas e variando juntas. Como a palavra "raciocínio" implica, isso requer argumentação e explicação além do uso de símbolos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (LAMON, 2012, p.3)

A pesquisadora Lamon (2012) estima que, nos Estados Unidos, mais de 90% dos adultos não pensa proporcionalmente. A partir desse dado, nos questionamos se isso acontece também no Brasil. Ela diz que os pensadores proporcionais possuem algumas das seguintes características

Possuem senso de covariação. Isto é, eles compreendem relações em que

duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação da outra.

Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.

Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.

Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam. (LAMON *apud* WALLE, 2009, p. 384)

A expressão “estratégias informais”, utilizada por Lamon, é entendida pelo referencial teórico desta pesquisa como diferentes maneiras de operar que são internalizadas nos processos de produção de significados. Uma característica determinante, então, para saber se o sujeito está operando a partir do desenvolvimento de um tipo de pensamento que possamos caracterizá-lo como proporcional, é reconhecer se ele internalizou maneiras distintas de operar de forma a tomar decisões em variados contextos.

Esta pesquisa é influenciada fortemente pela caracterização dada por Lamon (2012) e por pensadores proporcionais, em que o pensar proporcionalmente atravessa a ideia de mecanização dos procedimentos e conduz para que os estudantes entendam os procedimentos. Sobre isso, Walle (2009) comenta ainda que

as pesquisas de Lamon e de outros indicam que o ensino pode ter um efeito positivo, especialmente se as regras e algoritmos formais para o cálculo de frações, para comparar razões e para resolver proporções forem retardadas [para o momento certo]. (WALLE, 2009, p.384)

O que Walle (2009) esclarece com esse comentário é que o ensino do raciocínio proporcional ocasiona um efeito positivo nos estudantes, principalmente se a inserção deles nos métodos, nos algoritmos e nas mecanizações for mais tardia. Este fato é explicado por Walle (2009) quando ele diz

O uso prematuro de regras encoraja os estudantes a aplicar regras sem pensar, e desse modo, a habilidade de raciocinar proporcionalmente geralmente não se desenvolve. (WALLE, 2009, p.384)

Apesar da pesquisa ser influenciada também pelas ideias de Lamon e Walle, faz-se necessário ressaltar que a principal discordância entre a concepção utilizada nesta pesquisa e a desses pesquisadores é que ambos utilizam, muitas vezes, fração e razão como sinônimos. Já para os investigadores do Programa de Investigação Linsiano, um dos modos de pensar pode ser feito relacionando fração com razão ou fração com taxa, mas não é a única forma. Para corroborar a

distinção entre razão e fração Norton (2005)

comenta que no contexto de frações, o numerador representa uma parte e o denominador representa o todo, enquanto no caso da razão tanto o numerador quanto o denominador representam partes. Assim, embora o uso da notação de fração na resolução de alguns problemas de proporção possa parecer conveniente ao estabelecer um algoritmo de multiplicação e divisão, é provável que confunda os alunos quanto ao que realmente é o todo. Nas frações, este é o denominador, enquanto na razão é a soma das duas partes. Como os livros didáticos de matemática geralmente não ensinam frações e raciocínio proporcional de forma integrada, e geralmente essa distinção não é feita explicitamente, a confusão dos alunos é compreensível. (NORTON, 2005, p.1)

Além disso, o trabalho está de acordo com quatro pontos que orientam “como ajudar as crianças a desenvolver processos de pensamento proporcionais.” (Walle, 2009, p. 384). Os quatro pontos levantados por Walle (2009) são:

1. Forneça tarefas de razão e de proporção em uma grande variedade de contextos. Estes podem incluir situações envolvendo medidas, preços, contextos geométricos e outros elementos visuais e taxas de todos os tipos.
2. Encoraje a discussão e a experimentação em prever e comparar razões. Ajude as crianças a distinguir entre comparações proporcionais e não proporcionais fornecendo exemplos de cada tipo e discutindo as diferenças.
3. Ajude as crianças a relacionar o raciocínio proporcional aos processos existentes. O conceito de frações unitárias é bem parecido ao de taxas unitárias. A pesquisa indica que o uso de uma taxa unitária para comparar razões e resolver proporções é a abordagem mais comum entre os estudantes no EM até quando os métodos de produto cruzado são formalmente ensinados.
4. Reconheça que os métodos simbólicos ou mecânicos, como o algoritmo do produto cruzado usado para resolver proporções não desenvolveram o raciocínio proporcional e não devem ser introduzidos até os alunos terem muitas experiências com métodos intuitivos e conceituais. (WALLE, 2009, p. 384-385)

A pesquisa então segue ao encontro dessas ideias expostas por Walle (2009). Isso porque, para o desenvolvimento de modos de produção de significados distintos, será necessário enunciar para o aprendiz contextos diversos de tarefas sobre taxa. Comparar taxas é também uma discussão fundamental para essa pesquisa e corrobora a concepção principal de Lins e Gimenez (2001). Ademais, conseguir perceber as situações proporcionais e não proporcionais é um fator significativo para o pensar proporcionalmente. A crítica à introdução dos métodos simbólicos ou mecânicos é devido ao fato de o sujeito reduzir sua criatividade e sua constituição de outros possíveis modos de produção de significados.

Uma das principais importâncias do desenvolvimento do pensamento proporcional está em suas implicações em outros modos de pensar do sujeito. A noção de razão e a noção de taxa são interseções com o pensamento aritmético, já a noção de proporção intersecciona tanto o pensamento aritmético quanto o algébrico, e as grandezas diretamente e inversamente variáveis encontram-se em uma das interseções com o pensamento algébrico. Sendo assim, cada uma dessas pesquisas converge para que o sujeito internalize novos modos de pensar.

Além disso, o pensamento proporcional é interdisciplinar, tendo aplicações em diferentes áreas do conhecimento, como física, química, biologia, tecnologia, geografia, história, artes, entre outras. Nessas áreas são encontrados objetos de conhecimento que podem ser analisados utilizando características desenvolvidas no processo das internalizações dos modos de pensar proporcionalmente, como, por exemplo, distinguir em biologia se o crescimento de uma população é proporcional ou não. Na próxima seção, discutiremos mais detalhadamente a interdisciplinaridade da noção de taxa.

As tomadas de decisão do sujeito frente a uma situação que envolve pensar proporcionalmente são valiosos modos de pensar internalizados durante o desenvolvimento desse pensamento. A pesquisa apresentada em Lamon (2012) esclarece cada uma das importâncias e aplicações comentadas nesta pesquisa anteriormente quando diz

O raciocínio proporcional é um dos melhores indicadores de que um aluno alcançou entendimento dos números racionais e conceitos multiplicativos relacionados. Enquanto, por um lado, é uma medida do entendimento de ideias matemáticas elementares, é, por outro lado, parte do alicerce para conceitos mais complexos. Por essa razão, acho útil distinguir o raciocínio proporcional do conceito maior e mais abrangente de proporcionalidade. A proporcionalidade desempenha um papel em aplicações dominadas por princípios físicos — tópicos como vantagem mecânica, força, física das lentes, física do som, apenas para citar alguns. O raciocínio proporcional, conforme este livro usa o termo, é um pré-requisito para entender contextos e aplicações baseados em proporcionalidade. Claramente, muitas pessoas que não desenvolveram sua capacidade de raciocínio proporcional conseguiram compensar usando regras em cursos de álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são um pobre substituto para a compreensão. Elas estão despreparadas para aplicações reais em estatística, biologia, geografia ou física, onde princípios importantes e fundamentais dependem da proporcionalidade. Isso é lamentável em um momento em que um número cada vez maior de profissões depende diretamente da matemática ou usa modelagem matemática para aumentar a eficiência, salvar vidas, economizar dinheiro ou tomar decisões importantes. (Lamon, 2012, p.3)

A partir das discussões levantadas anteriormente, é imprescindível esclarecer como é o

desenvolvimento do pensamento proporcional do sujeito. Segundo Walle (2009)

O pensamento proporcional é desenvolvido por atividades que envolvem comparar e determinar a equivalência de razões e resolver proporções em uma ampla variedade de contextos e situações baseadas em resolução de problemas sem recurso a regras ou fórmulas. (WALLE, 2009, p.382)

Com todos os argumentos apresentados até aqui, é perceptível que o desenvolvimento do pensamento proporcional significa um desenvolvimento de um eixo do pensamento matemático importante, o qual, por sua vez, perpassa todos os outros – pensamento geométrico, estatístico, financeiro, entres outros – além das interseções pesquisadas em nossos trabalhos.

2.2 A NOÇÃO DE TAXA

Nesta seção será desenvolvida a noção de taxa no eixo do pensamento proporcional, desde a caracterização do que é essa noção até a problematização sobre o fato de ela não ser um caso de estudo nas salas de aula brasileiras. Isso porque, geralmente, ela é abordada como sendo simplesmente razão ou uma razão de duas espécies diferentes.

A noção de taxa é caracterizada pelo autor Walle (2009, p.383) em uma seção do capítulo 19 sob o subtítulo “Razões como taxas”. O autor a apresenta como “uma comparação das medidas de duas coisas ou quantidades diferentes; a unidade de medida é diferente para cada valor.” Nota-se que, como é um livro traduzido, os estadunidenses utilizam o termo “quantidades”, enquanto no Brasil usamos a palavra “grandezas” para nos referirmos ao mesmo objeto. Além disso, a concepção de taxa da nossa pesquisa não é um caso particular de razão, visto que essa noção é amplamente discutida em outras áreas do conhecimento, como física, química, geografia, biologia, entre outras. Diversos objetos de estudos que implicam ideias importantes, tanto no meio acadêmico, quanto nas vivências do sujeito, são exemplos de taxa: velocidade média, densidade de um composto, densidade demográfica, entre outros.

Outra noção importante para a compreensão deste trabalho é a de taxa unitária, que é um dos modos de operar mais utilizados pelos sujeitos em problemas que envolvem a noção de taxa. Sobre ela, Post *et al* (1995) comenta

O método da taxa unitária pode ser usado com eficácia e é uma maneira natural de lidar com todos os problemas de comparação numérica. (POST *et al*, 1995, p.96-97)

Assim, a noção de taxa unitária pode ser entendida como uma taxa em que uma das grandezas relacionadas tem o valor absoluto igual a 1. Suponha-se, por exemplo, que a taxa de candidatos por vaga no programa de Doutorado em Educação Matemática seja de 12 candidatos para cada 1 vaga. Tal relação pode ser representada como 12 candidatos/vaga.) Essa noção tem um apelo intuitivo segundo Post *et al* (1995)

A abordagem com maior apelo intuitivo é, sem dúvida, a “quanto (quantos) por um”, ou método da taxa unitária. Tem apelo intuitivo porque as crianças já compraram uma ou muitas coisas e tiveram ocasião de calcular preços unitários e outras taxas unitárias. (POST *et al*, 1995, p.93)

A opção por apresentar tarefas que possam desenvolver a produção de significados em relação à taxa unitária é fundamental já que se trata de um modo de pensar intuitivo. Adicionalmente, a relevância de aproveitar desses modos “naturais” é justificada por Ginsburg (*apud* Post *et al*, 1997, p.97) quando ele diz que “nós, como educadores em matemática, deveríamos tentar explorar a matemática que as crianças já conhecem, e tirar proveito dos processos mentais que brotam naturalmente, inclusive ampliando-os.” E é esse o objetivo dessa pesquisa: partir de um processo de produção de significados já internalizados e agregar a ele novos modos de pensar.

A distinção entre a noção de razão e a noção de taxa é que, quando pensamos nas grandezas envolvidas sendo conjuntos matemáticos, uma razão relaciona duas grandezas do mesmo conjunto; já uma taxa relaciona duas grandezas de conjuntos disjuntos. Apesar disso, a semelhança entre essas duas noções está no modo de operar.

Para os pesquisadores estadunidenses Thomas R. Post, Merlyn J. Behr e Richard Lesh, há diferença entre razão e taxa, ocorrendo da seguinte maneira:

Concorda-se em geral que as razões comparam quantidades ou medidas da mesma espécie, isto é, 4 dólares/6 dólares = $4/6$, ao passo que as taxas comparam quantidades ou medidas de espécies diferentes, isto é, 4 milhas em 3 horas = 4 milhas/3 horas. As razões podem ser expressas numericamente sem rótulos; as taxas devem conservar seus rótulos para poderem ser interpretadas. Ambas são manipuladas da mesma maneira. (Post *et al*, 1995, p. 97)

A noção de taxa é abordada nos livros didáticos brasileiros não como um objeto diferente de razão, mas nomeada, em alguns deles, como “Razão de espécies diferentes” ou “Razões especiais”. Apesar de não trazer essa diferença na abordagem, existem diversos objetos que são

taxas que fundamentam pensamentos, como o pensamento físico, o biológico, o químico, o geográfico e o pensamento artístico.

Além disso, a necessidade da noção de taxa no desenvolvimento do pensamento proporcional pode ser exemplificada com uma tomada de decisão no supermercado. Ao optar, por exemplo, por um iogurte de 180g por um preço X ou pelo mesmo iogurte, agora de 360g por um preço $1,8X$, o consumidor mobiliza seu conhecimento sobre taxa, visto que pode operar com “o preço do iogurte por gramas de iogurte”, a partir de um parâmetro que se adeque às suas necessidades.

É de fundamental importância caracterizar a noção de taxa e discuti-la nas salas de aula brasileiras, a fim de que seja desenvolvido nos estudantes o pensamento proporcional em contextos diversos. Assim haverá a construção de significados para objetos que perpassam outros pensamentos, como velocidade média no pensamento físico, densidade demográfica no pensamento geográfico e densidade de um material no pensamento químico.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo será detalhado como foi realizada a revisão de literatura para essa pesquisa e as decisões tomadas pelos pesquisadores para não se aterem a determinados trabalhos. Além disso, será apresentada uma análise de um livro didático a fim de explicitar nossas discordâncias em relação a como o pensamento proporcional é discutido ao longo de poucas páginas.

Primeiramente decidimos identificar as pesquisas desenvolvidas sobre o pensamento proporcional nos anos iniciais e nos anos finais do ensino fundamental que poderiam nos trazer informações relevantes para o desenvolvimento de nosso estudo. Porém, nossa busca não foi aleatória e parte de algumas tomadas de decisão de cunho metodológico que podem ser descritas da seguinte maneira:

(i) Considerando que nosso referencial teórico é o Modelo dos Campos Semânticos, este compartilha com a Teoria Histórico-Cultural em muitos pressupostos e, portanto, procuramos por pesquisas que tivessem alinhamento teórico com nossos pressupostos;

(ii) Não delimitamos um período específico para a busca de pesquisas desenvolvidas;

(iii) Focamos nosso interesse em dissertações e teses das áreas de Educação Matemática e Educação, tanto em programas profissionais quanto acadêmicos, e também em livros que identificamos como resultados de pesquisas sobre o tema (alguns deles ligados a Psicologia Cognitiva);

(iv) Nosso interesse esteve na discussão do pensamento proporcional, sobre o que ele tem de “interseção” com o pensamento aritmético e algébrico. Posto isso, queríamos sugerir que o pensamento proporcional também encontra sua interseção com o pensamento geométrico e estatístico, por exemplo, mas não foi parte de nosso interesse de investigação;

(v) As palavras-chave para a nossa busca foram: ensino e aprendizagem, razão, taxa, proporção e matemática escolar anos iniciais;

(vi) A busca por pesquisas na área se deu pelas principais plataformas de pesquisa, como: Google Acadêmico, SciELO e Portal Capes, além de termos feito uma pesquisa no site do Programa Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da UFJF.

Realizado o procedimento da pesquisa, não encontramos muitas dissertações e teses sobre o pensamento proporcional que se alinhassem com nossos pressupostos teóricos. Além disso, é importante ressaltar que muitos trabalhos especificam pensamento proporcional como sendo

apenas o teorema fundamental da proporcionalidade em que temos “a proporcional a b assim como c é proporcional a d”, matematicamente traduzido como

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c .$$

Os outros trabalhos que falavam de pensamento proporcional sem utilizar essa algebrização utilizavam Lamon (1999), Walle (2009) e Post et al (1995) para as caracterizações e argumentos sobre pensadores proporcionais.

No site do PPGEM foram encontradas duas dissertações sobre pensamento proporcional. Ambas serão apresentadas no quadro 1 abaixo.

Quadro 1 - Dissertações produzidas pelo PPGEM da UFJF

Título	Ano	Autor / Orientador
Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática	2012	Profa. Marília Rios de Paula / Prof. Dr. Amarildo Melchiades
Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica	2016	Profa. Dayane Cristina Rocha Tinoco / Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A dissertação da professora Dayane não possui alinhamento teórico com as nossas pesquisas, visto que a sua é constituída sob uma ótica piagetiana distanciando-se de nosso viés. Já a dissertação da professora Marília tem o mesmo referencial teórico que o nosso, que é o Modelo dos Campos Semânticos, sendo, portanto, o trabalho que mais se aproxima desta pesquisa. Entretanto, é importante dizer que há algumas distinções entre nossos trabalhos.

A diferença mais relevante é a definição de taxa que a pesquisadora Marília utiliza em seu trabalho, a qual é definida como um dos modos de produção de significados do objeto razão, o que não acontece em nossa pesquisa, já que entendemos razão e taxa como dois objetos distintos

As pesquisas em desenvolvimento, e desenvolvidas, sobre pensamento proporcional orientadas pelo NIDEEM estão todas representadas no quadro 2 a seguir, em ordem crescente dos anos escolares em que foram aplicadas.

Quadro 2 - Pesquisas em desenvolvimento sobre o pensamento proporcional pelo NIDEEM no PPGEM da UFJF

Ano escolar do Ensino Fundamental	Título	Ano	Autor / Orientador	Situação
Anos Iniciais - 1ºano ao 5ºano	Pensamento proporcional nos anos iniciais do Ensino Fundamental	2024	Profa. Letícia Freitas Fernandes / Prof. Dr. Amarildo Melchiades	Defendido em set/2024
Anos Finais - 6ºano	Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão	2024	Profa. Kaio Cruz e Silva/ Profa Dra. Rosana Oliveira	Defendido em set/2024
Anos Finais - 7ºano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa	2025	Profa. Taynara Schincariol Alves/ Prof. Dr. Amarildo Melchiades	Previsão de defesa em mar/2025
Anos Finais - 8ºano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de proporção	2025	Profa. Maria Eduarda Alvim Pedrosa / Prof. Dr. Amarildo Melchiades	Previsão de defesa em mar/2025
Anos Finais - 9ºano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais	2025	Profa. Sinai E. F. dos Santos/ Profa Dra. Rosana Oliveira	Previsão de defesa em mar/2025

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Os trabalhos apresentados no quadro 2 constituem uma sequência de pesquisas que objetivam desenvolver o pensamento proporcional desde os anos iniciais até os anos finais do ensino fundamental, diferenciando-se dos livros didáticos analisados.

A análise dos livros didáticos foi feita durante os encontros do Grupo de Pesquisa na UFJF e discutida entre os pesquisadores do Programa de Investigação Linsiano. Nessas

discussões, foi observado que a maioria dos livros que folheamos para encontrar o pensamento proporcional não contempla as características dos pensadores proporcionais propostas por Lamon (*apud* Walle, 2009), nem as orientações de Walle (2009) de como desenvolver o pensamento proporcional. Lembremos que Walle (2009), para desenvolver o sujeito como pensador proporcional, orienta:

- (1) Fornecer tarefas de razão e proporção em muitos contextos;
- (2) Encorajar experimentação e discussão, além de ajudar a distinguir situações proporcionais de não proporcionais;
- (3) Ajudar a relacionar o raciocínio proporcional aos processos existentes;

Reconhecer que os métodos mecânicos não devem ser introduzidos até os alunos terem muitas experiências com métodos intuitivos.

Além disso, não localizamos um livro didático que segue um padrão diferente de: (i) inicia com uma definição do objeto de estudo, depois exemplifica uma vez, e finaliza com exercícios para “fixação” do conteúdo; ou (ii) exemplifica uma única vez, define o conteúdo e, em seguida, exercícios de “fixação”.

Portanto, devido a essa recorrência da estrutura citada anteriormente, optamos por analisar um único livro no decorrer dessa seção como possível esclarecimento das nossas discordâncias.

O livro escolhido foi Teláris Matemática, volume do 7º ano, cujo autor é Luiz Roberto Dante, publicado no ano de 2018 em sua 3ª edição. Neste livro, os objetos de nossas pesquisas (Razão, Taxa, Proporção e Grandezas Diretamente Proporcionais e Grandezas Inversamente Proporcionais) são abordados em apenas 20 páginas, as quais ainda incluem capa e curiosidades. Ao analisarmos esse tratamento aos nossos objetos de estudo na obra citada, surgiu o seguinte questionamento sobre o qual discutiremos: será possível desenvolver o pensamento proporcional nessas poucas páginas a ele destinadas?

A dinâmica desse livro no Capítulo 7, nomeado como Proporcionalidade, consiste em, basicamente, definir em meia página – ou uma página – uma noção e apresentar uma lista de 3 a 12 questões em cada um deles. No sumário, são indicadas as seguintes noções neste capítulo:

- As ideias de proporcionalidade e de razão;
- Porcentagem como razão;
- A ideia de proporção;
- Propriedade fundamental das proporções;

- Proporcionalidade entre grandezas;
- Coeficiente de proporcionalidade;
- Regra de 3 simples;
- Outras atividades e problemas que envolvem proporcionalidade.

O livro não traz a noção de taxa, como já era esperado, pois, nos livros e escolas brasileiras, esta não é estudada da forma como a concebemos. Além disso, não há nem mesmo uma separação entre alguns “tipos de razões”, tendo em vista que geralmente a noção de taxa é caracterizada como “razão de espécie diferente” ou mesmo “razões especiais”, diferentemente da nossa caracterização.

Na primeira seção, sobre “As ideias de proporcionalidade e de razão”, expõe-se um único modo de pensar a noção de razão, exemplificando duas vezes o que são grandezas proporcionais e apresentando a notação (veja a Figuras 1). Na sequência, há um conjunto de 12 exercícios, em sua maioria relacionados a escala e geometria. Ou seja, não se parte do que o aprendiz já internalizou, mas inicia-se uma nova noção formalmente e com poucos exemplos.

Na segunda seção, sobre “Porcentagem como razão”, o conceito é definido e exemplificado – sem contextualização – em meia página e, em seguida, são apresentadas 6 questões (veja a Figura 2). Nessa seção, há uma tentativa de retomar o que o sujeito internalizou, entretanto isso é feito em uma única frase sem exemplos. Podemos perceber que as orientações (1) e (2) de Walle (2009) são descumpridas.

Na terceira seção, sobre “Proporções”, são apresentadas quatro subseções muito importantes: A ideia de proporção; Propriedade fundamental das proporções; Proporcionalidade entre grandezas e Coeficiente de proporcionalidade. Na Figura 3, em uma única página, define-se a noção de proporção, além de ser apresentada a propriedade fundamental das proporções – o método de multiplicar cruzado. Ou seja, em apenas 6 páginas, desde o início desse capítulo 7, o aprendiz já é inserido em um método mecânico sobre o qual já discorreremos devido à problemática da inserção do aluno nesses recursos precocemente. A orientação (4) de Walle (2009) foi descumprida.

Na subseção “Proporcionalidade entre grandezas”, são definidas as grandezas diretamente proporcionais (veja a Figura 4) em uma página com 3 exercícios, e as grandezas inversamente proporcionais (veja a Figura 5) em outra página com 2 exercícios. Apesar da preocupação com a formalidade matemática que esses livros didáticos normalmente têm, para se definir as grandezas

é utilizada uma caracterização sem recorrer à algebrização. Ademais, por serem poucos exercícios, o processo de produção de modos de pensar distintos entre os sujeitos é impedido – ou dificultado. A falta de contextos variados descumpra a orientação (1) de Walle (2009).

O atraso na apresentação de exemplificações de situações não proporcionais, ou até mesmo sua ausência, é outra crítica ao livro que deve ser apontada. A Figura 6 mostra uma única situação exposta no sentido de esclarecer que nem todas as grandezas são proporcionais, entretanto ela demora 10 páginas desde o início do Capítulo 7 para ocorrer.

Figura 1 - Página do Livro Teláris (Razão e Grandezas Proporcionais)

1 As ideias de proporcionalidade e de razão

Joana foi preparar leite usando leite em pó instantâneo. Veja o rótulo da embalagem.



Lata de leite em pó.

Modo de preparo

Para cada copo de água (180 mL), coloque 2 colheres de sopa de leite em pó instantâneo e misture bem.

Para organizar melhor os dados, Joana montou uma tabela indicando a quantidade de colheres de sopa de leite em pó instantâneo necessária para cada quantidade de copos de água.

Neste caso, estamos relacionando a quantidade de copos de água com a quantidade de colheres de sopa de leite em pó. Dizemos que "de 1 para 2" ou "1 em 2" é a **razão** entre a quantidade de copos de água e a quantidade de colheres de sopa de leite em pó.

Preparo do leite

Quantidade de copos de água	Quantidade de colheres de sopa de leite em pó
1	2
2	4
3	6
4	8

Tabela elaborada para fins didáticos.

Indicamos essa razão assim: 1 em 2 ou $1 : 2$ ou $\frac{1}{2}$.

Observe que, quando dobramos a quantidade de copos de água, a quantidade de colheres de sopa de leite em pó também dobra. Quando triplicamos a quantidade de copos de água, a quantidade de colheres de sopa de leite em pó também triplica. E assim por diante.

Neste caso, dizemos que as grandezas quantidade de copos de água e quantidade de colheres de sopa de leite em pó são **grandezas proporcionais**.

Neste capítulo vamos estudar vários assuntos relacionados às ideias de **proporção** e de **razão**.

Veja mais este exemplo.

Na turma do 7º ano A há 15 meninos e 20 meninas.

Uma das maneiras de comparar esses números é calcular a razão entre eles, estando atento à ordem considerada.

A razão entre o número de meninos e o número de meninas, nessa ordem, é 15 em 20 $\rightarrow \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Veja o significado da razão entre 15 e 20 (que é igual a $\frac{3}{4}$), expresso de várias maneiras.

- A razão entre o número de meninos e o número de meninas no 7º A é $\frac{3}{4}$.
- No 7º A, para cada 3 meninos, há 4 meninas.
- No 7º A, o número de meninas corresponde a $\frac{3}{4}$ do número de meninos.
- A razão entre o número de meninos e o número de meninas, no 7º A, é de 3 para 4.

A razão entre 2 números racionais a e b , com $b \neq 0$, é o quociente de a por b expresso por $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ (lemos: a está para b), ou qualquer outra maneira equivalente.

Por exemplo: A razão entre 9 e 15 é representada por $9 : 15$ ou $\frac{9}{15}$ ou $\frac{3}{5}$ ou 0,6 (pois $3 \div 5 = 0,6$) ou 60%.

Assim como calculamos a razão entre 2 números racionais, podemos calcular a razão entre 2 medidas de grandezas. Por exemplo, a razão entre as medidas de massa 3 g e 5 g é $\frac{3}{5}$.

Fonte: Teláris (2019)

Figura 2 - Página do Livro Teláris (Razão)

Porcentagem como razão



Você já trabalhou com a porcentagem antes. Agora vamos usá-la com o conceito de razão.

Por exemplo, calcular 40% de uma quantidade é o mesmo que calcular $\frac{2}{5}$ dessa mesma quantidade.

40% é a razão entre 40 e 100, ou seja: $\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

13. c) $-\frac{1}{5} \left(-\frac{20}{100} = -\frac{1}{5} \right)$

d) $\frac{8}{5} \left(\frac{160}{100} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \right)$

Porcentagem é a razão que tem o 2º termo igual a 100.

14. 3 em 5 $\rightarrow$ 60%; de 3 para 4 $\rightarrow$ 75%; 1 : 2 $\rightarrow$ 50%; $\frac{1}{4} \rightarrow$ 25%; $\frac{1}{10} \rightarrow$ 10%.

Não escreva no livro!

Atividades

13 ▶ Determine no caderno as frações irredutíveis correspondentes às seguintes porcentagens.

- a) 75% $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{75}{100} = \frac{3}{4} \right)$ c) -20%
b) 90% $\frac{9}{10}$ $\left(\frac{90}{100} = \frac{9}{10} \right)$ d) 160%

14 ▶ No caderno, relacione cada porcentagem com a razão correspondente.

75%	25%	50%	60%	10%
3 em 5	de 3 para 4	1 : 2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

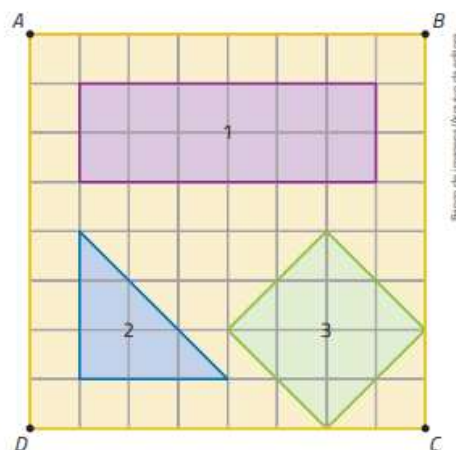
15 ▶ Determine no caderno a porcentagem correspondente a cada item.

- a) $\frac{7}{20}$ 35% c) 0,28 28%
b) 0,3 30% d) $-\frac{3}{8}$ -37,5%

16 ▶ Em um restaurante há 80 fotografias autografadas por artistas e celebridades. Destas, 32 são coloridas. Qual é a porcentagem de fotografias coloridas?

17 ▶ Jaime é representante comercial. Ele passa 60% do tempo de trabalho dirigindo um carro. Em 40 horas semanais de trabalho, quantas horas Jaime passa dirigindo?

18 ▶ Examine a figura e considere a região quadrada ABCD.



Use calculadora e responda no caderno qual porcentagem dessa região ocupa:

- a) a região 1? 18,75%
b) a região 2? 7,03%
c) a região 3? 12,5%
d) a região amarela? 61,72%

16. 40% $\left(32 \text{ em } 80 \rightarrow \frac{32}{80} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\% \right)$ 17. 24 horas. $\left(\frac{x}{40} = 60\% \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{60}{100} \Rightarrow x = 24 \right)$

Fonte: Teláris (2019)

Figura 3 - Página do Livro Teláris (Proporção)

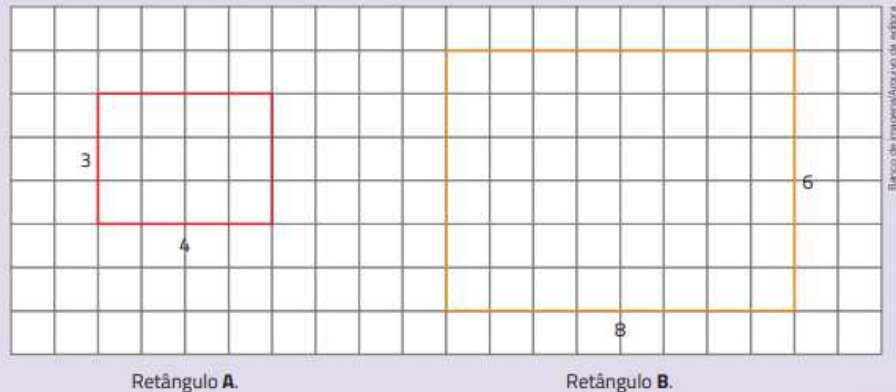
2 Proporções

A ideia de proporção

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Observe os retângulos representados na malha quadriculada:



- a) Qual é a razão entre as medidas de comprimento da altura do retângulo **A** e da altura do retângulo **B**? $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right)$
 b) Qual é a razão entre as medidas de comprimento da largura do retângulo **A** e da largura do retângulo **B**? $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \right)$
 c) Observe os resultados obtidos nos itens anteriores. O que você pode afirmar?

As razões são iguais: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, porque $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Definimos **proporção** como a igualdade de 2 razões.

Assim, no *Explorar e descobrir* acima temos a seguinte proporção:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

(Lemos: 3 está para 6, assim como 4 está para 8.)

Os números 3, 6, 4 e 8 são chamados de **termos** da proporção. O primeiro e o último termos (3 e 8, neste caso) são os **extremos** da proporção, e os outros 2 termos (6 e 4, neste caso) são os **meios** da proporção.

Propriedade fundamental das proporções

Observe o que ocorre com estas proporções.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow \frac{3 \cdot 8}{24} = \frac{6 \cdot 4}{24}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} \rightarrow \frac{3 \cdot 14}{42} = \frac{7 \cdot 6}{42}$$

O que ocorreu com essas proporções ocorre com todas as proporções.

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Assim, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, então $a \cdot d = b \cdot c$.

Figura 4 - Página do Livro Teláris (Grandezas Diretamente Proporcionais)

Proporcionalidade entre grandezas



Você lembra o que é grandeza?
Grandeza é tudo o que pode ser medido ou contado. Comprimento, intervalo de tempo, temperatura, massa, população e valor monetário são grandezas.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Grandezas diretamente proporcionais

Raimunda é costureira e está fazendo bermudas encomendadas por uma loja. Ela fez 2 bermudas com um tecido com medida de comprimento de 1,40 m. Agora ela quer saber de quantos metros de tecido ela precisa para fazer 6 bermudas. Veja o raciocínio de Rodrigo, o filho dela.



Se para fazer 2 bermudas, minha mãe gasta 1,40 m de tecido, então, como 6 é o triplo de 2, ela gastará o triplo de 1,40 m, pois $3 \times 1,40 = 4,20$.



Costureira cortando tecido.

Em casos como esse, dizemos que as grandezas são **diretamente proporcionais**, ou apenas que são **proporcionais**.

Quando o valor de uma grandeza dobra, triplica ou é reduzido à metade, o valor da outra grandeza, que é diretamente proporcional a ela, também dobra, triplica ou é reduzido à metade.

Então, as grandezas número de bermudas e comprimento do tecido dessa situação são diretamente proporcionais.

Fonte: Teláris (2019)

Figura 5 - Página do Livro Teláris (Grandezas Diretamente Proporcionais)

Grandezas inversamente proporcionais

Imagine um percurso feito de 3 maneiras diferentes: de bicicleta, de moto e de carro.



Pessoa andando de bicicleta.

Com a medida de velocidade média de 15 km/h, João gastou 120 min para completar o percurso.



Pessoa andando de moto.

Com a medida de velocidade média de 30 km/h, Maurício gastou 60 min para completar o mesmo percurso.



Pessoa andando de carro.

Com a medida de velocidade média de 90 km/h, Luciana gastou 20 min para completar o mesmo percurso.

Observe que o veículo com **medida de velocidade menor** gastou **intervalo de tempo maior**. A velocidade e o intervalo de tempo não são grandezas diretamente proporcionais, pois, quando a medida de velocidade dobrou de 15 km/h para 30 km/h, o intervalo de tempo não dobrou, foi reduzido à metade, pois passou de 120 minutos para 60 minutos.

Observe os valores dessa situação.

	Velocidade (em km/h)	Intervalo de tempo (em min)
$\times 2$	15	120
$\times 3$	30	60
	90	20

Tabela elaborada para fins didáticos.

Em casos como esse, dizemos que as grandezas são **inversamente proporcionais**. Quando o valor de uma grandeza é multiplicado por um número, o valor da outra grandeza, que é inversamente proporcional a ela, é dividido pelo mesmo número.

Então, as grandezas velocidade e intervalo de tempo dessa situação são inversamente proporcionais.

Fonte: Teláris (2019)

Figura 6 - Página do Livro Teláris (Situação Não Proporcional)



Fonte: Teláris (2019)

Os outros tópicos que o livro analisado contempla, apesar de se relacionarem com nossas pesquisas, não são nossos objetos de pesquisa, logo a análise se encerra na décima página do Capítulo 7.

A análise realizada do Livro Teláris de Matemática Volume do 7º ano expõe os motivos pelos quais é possível que o aprendiz não desenvolva um pensamento proporcional, caso esse seja o único recurso didático utilizado pelo docente. As orientações descumpridas de Walle (2009) evidenciam que, provavelmente, as características dos pensadores proporcionais Lamon (2012) não terão sido desenvolvidas. Os sujeitos que tiverem como único recurso o livro didático apresentado irão adquirir um senso de covariação? Reconhecerão relações proporcionais como distintas das relações não proporcionais? E desenvolverão uma ampla variedade de estratégias para resolver problemas proporcionais?

Portanto, a percepção da carência de um produto educacional que se diferencie dos livros didáticos, como o analisado, e que seja fundamentado teoricamente – neste caso, pelo Modelo dos Campos Semânticos – é o que conduz a constituição deste trabalho.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, dividido em duas partes, destacaremos os nossos posicionamentos teóricos. Na primeira parte, apresentaremos o Modelo dos Campos Semânticos, teorização utilizada para a leitura dos significados dos alunos. Na sequência, finalizaremos com a apresentação de nosso problema da pesquisa.

4.1.O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

A pesquisa tem como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) constituído pelo educador matemático Romulo Campos Lins. É importante destacar que o MCS, segundo seu autor, foi elaborado para ser utilizado, ou seja, segundo Lins (2012, p. 21), “Ele não é uma teoria para ser estudada, é uma teorização para ser usada.” Esse modelo epistemológico para ser usado em sala de aula possui o objetivo de fazer uma leitura do que o aluno produziu sem recorrer à ideia de erro. Outra finalidade, ainda, do Modelo dos Campos Semânticos é instrumentalizar pesquisadores e docentes para realizarem análises finas de processo de produção de significados e de significado.

As noções de significado e objeto são caracterizadas por Lins (2022, p.41) da seguinte forma “Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade. Objeto é aquilo para que se produz significado.” Sendo assim, “dizer que um sujeito produziu significado é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade” (SILVA, 2022, p.89).

A produção de significados, para o MCS, ocorre quando um sujeito, no interior de uma determinada atividade, produz ações enunciativas a respeito de um objeto. Logo o indivíduo não permanece restrito apenas a enunciar sobre o objeto que ele está conhecendo, ou seja, o modelo não distingue o falar do fazer, sendo possível a utilização de “gestos, arranjos ou manipulações de objetos físicos, desenhos e diagramas de todos os tipos” (LINS *apud* Silva, 2022, p.89).

O conhecimento, definido por Lins (2012) no MCS, é uma crença afirmação justificada, portanto o sujeito deve inicialmente acreditar naquilo que ele enuncia e expressa e, posteriormente, afirmá-la. Ademais é necessário que essa crença-afirmação seja justificada. A definição de conhecimento do MCS garante a existência de conhecimentos distintos, caso as justificativas sejam distintas. Silva (2022) esclarece que

Por exemplo, consideremos a proposição “ $2 + 2 = 4$ ”. Uma criança acredita e afirma que dois mais dois são quatro, o mesmo em que um matemático acredita e, também, afirma. Mas, quando consideramos suas justificações, vemos que a criança exhibe os dedos indicando que dois dedos da mão direita com dois da mão esquerda são quatro dedos – essa é sua justificação. Por sua vez, para o matemático, membro de uma comunidade científica que lhe impõe certos padrões de rigor, a justificação é outra; ele fala em conjuntos, em axiomas de Peano. Assim, as justificações da criança e do matemático são diferentes. Do ponto de vista da formulação que apresentamos, eles não compartilham o mesmo conhecimento, pois, se a justificação muda, o conhecimento também mudará.(...) Uma consequência desse entendimento, é a de que não há conhecimento melhor ou pior, eles simplesmente são diferentes e, portanto, não há juízo de valor quanto a conhecimentos distintos. Além disso, como conhecimento é domínio da enunciação ele pode mudar ao longo do tempo. (SILVA, 2022, p.30-31)

Assim, segundo Silva (2022, p.29) podemos concluir que “produzir conhecimento pode ser entendido como produzir justificações no processo de enunciação de crenças-afirmações”

Para o MCS, o processo comunicativo compreende: o autor – sujeito da enunciação –, o leitor – aquele que a partir da produção de significados do autor produzirá sua leitura própria – e o interlocutor, uma direção na qual o autor e o leitor falam. No processo de comunicação, o autor enuncia uma afirmação, que não se restringe a uma fala, para uma direção que ele acredita que terá uma comunicação eficaz, ou seja, seu interlocutor. Já o leitor passa por um processo de significar a enunciação de acordo com seus conhecimentos e suas vivências. Se o leitor conseguir esclarecer a enunciação com a legitimidade que o autor aceita, os interlocutores de ambos convergirão, o que reflete uma comunicação eficaz. Entretanto, autor e leitor podem ter interlocutores divergindo, o que indicará que, para o leitor, a enunciação passou a ser um resíduo de enunciação, na qual o leitor não significou a afirmação inicial do autor. Sobre esse fato, Lins (2012, p. 32) esclarece que “Internalizar interlocutores, legitimidades, é o que torna possível a produção de conhecimento e de significado, torna possível antecipar uma legitimidade do que digo”.

Assim é necessário que o sujeito, que se encontra no processo de conhecer um determinado objeto, produza alguma ação enunciativa para que seja compreendido até quando o conhecimento foi internalizado por ele, a fim de que o professor possa realizar de fato uma comunicação efetiva. É, portanto, imprescindível permitir que o sujeito realize ações enunciativas. Desse modo, o estudo do MCS concede ao professor um instrumento de análise epistemológica para fazer uma leitura epistemológica perante as enunciações do aprendiz.

Outras duas noções importantes do MCS são a de estipulação local e a de núcleo. A estipulação local é uma afirmação que o sujeito caracteriza como verdade e não sente a

necessidade de justificação, podendo ser de fato verdadeira ou não, e o conjunto de estipulações locais do sujeito é chamado de núcleo. O núcleo é dinâmico, visto que geralmente estipulações locais que inicialmente o compunham podem ser descartadas ou acrescentadas novas.

A unidade de análise do Modelo dos Campos Semânticos é o campo semântico, isto é, definido no modelo por Lins (2012, p. 28), como “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade.”. Pelo fato de um campo semântico ser um processo, Lins (2012, p. 28), a partir de uma perspectiva Vigotskiana, completa dizendo “Sendo um processo, ao ser colocado em marcha cria as condições para a sua própria transformação.”

Além disso, a definição de atividade interna proposta por Leontiev (apud Silva, 2022, p. 77) que é usada no modelo, esclarece que existem algumas condições: (i) surge de uma necessidade; (ii) um motivo para que o sujeito desenvolva; (iii) existe um fim, ou seja, o objeto da atividade; (iv) devem ser coincidentes o motivo e o fim.

Com todas essas características apresentadas, é necessário ressaltar, como Lins (2012) observou que “É isto que o MCS oferece: um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados” (Lins, 2012, p. 40). Ou seja, é desejável que o MCS seja utilizado nas salas de aulas para que o professor possa entender como e onde o aluno se encontra.

Por fim, concluímos que o interesse dessa pesquisa em utilizar o Modelos dos Campos Semânticos como principal referencial teórico e metodológico é a possibilidade de, como professora, realizar uma leitura epistemológica das ações enunciativas dos aprendizes, o que é essencial.

4.2. O PROBLEMA DE PESQUISA

Nesta seção, explanaremos sobre o problema de pesquisa, elencando seus objetivos, destacando sua importância e correlacionando a urgência de se elaborar um produto educacional a partir da análise do livro didático feita anteriormente.

O problema de investigação desta pesquisa é: **investigar a produção de um conjunto de tarefas, fundamentadas teoricamente pelo MCS, para o ensino de taxa no 7º ano do ensino fundamental.** Para a investigação do problema de pesquisa proposto, levamos em consideração a necessidade de se considerar, no design de tarefas, a proposta da noção de taxa estar a serviço de

desenvolver o pensamento proporcional.

É fundamental esclarecer que, quando os autores escrevem sobre métodos, em nossa leitura com o MCS como referencial teórico, eles estão escrevendo sobre modos de operar com o objeto. Quando Post (1995), por exemplo, escreve sobre o método da taxa unitária, em nossas palavras, essa é uma maneira de operar com a noção de taxa. Um sujeito se depara com a seguinte questão “O que é mais vantajoso: (i) Três biscoitos por R\$10,00 ou (ii) Quatro biscoitos por R\$12,00?” Para decidir imagine que ele pense da seguinte forma: “(i) $\frac{R\$10,00}{3 \text{ biscoitos}} = \frac{R\$3,33}{1 \text{ biscoito}}$, então irei pagar R\$3,33 por biscoito e (ii) $\frac{R\$12,00}{4 \text{ biscoitos}} = \frac{R\$3,00}{1 \text{ biscoito}}$, então irei pagar R\$3,00 por biscoito.” Portanto, utilizando o modo de pensar da taxa unitária, ele consegue identificar que a opção (ii) é mais vantajosa.

O levantamento que foi realizado por meio de uma análise dos livros didáticos foi imprescindível para sabermos como proceder na construção da sequência de tarefas, detalhada na seção 5.2. A conceitualização de taxa também foi essencial para o desenvolvimento do pensamento proporcional do indivíduo, que se constitui como uma forma de ensino de taxa para a turma do 7º ano, tendo como base o Modelo dos Campos Semântico para a análise da produção de significados dos participantes.

Enquanto projeto de desenvolvimento, o produto educacional foi elaborado a partir da investigação de uma sequência didática para o ensino de taxa no ensino fundamental como parte do trabalho para desenvolver o pensamento proporcional em estudantes do ensino fundamental.

5. METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos a caracterização da pesquisa, os procedimentos metodológicos que nortearão o trabalho de campo com estudantes do ensino fundamental, o processo de elaboração das tarefas e os aspectos da análise epistemológica que será realizada para a leitura das ações enunciativas dos participantes da pesquisa.

5.1. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A natureza deste trabalho é de uma pesquisa qualitativa caracterizada por Bogdan e Biklen (2013) como tendo cinco características principais: (i) a fonte direta é o ambiente natural, sendo o instrumento principal o investigador; (ii) a pesquisa é descritiva; (iii) os investigadores se interessam mais pelo processo do que produtos e resultados; (iv) geralmente os dados são analisados de forma indutiva; (v) o significado é de importância vital na abordagem.

Desse modo, a natureza qualitativa desta pesquisa corrobora a realização de uma leitura epistemológica, fundamentada teoricamente pelo MCS, com a profundidade adequada para um trabalho de excelência. Como o MCS é voltado para a produção de significados do indivíduo, o que interessa são seus gestos, justificativas e assim “tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 49).

As pesquisas que são orientadas pelo MCS geralmente são pesquisas de campo, tendo em vista que é de suma importância que, para que sejam feitas as coletas de dados com uma amplo repertório, para então ser possível a análise com as leituras positivas – ou leituras plausíveis – das produções de significado dos sujeitos, sejam dadas as oportunidades de enunciação a eles. No trabalho de campo, segundo Bogdan e Biklen (2013)

Se, por um lado, o investigador entra no mundo do sujeito, por outro, continua a estar do lado de fora. Regista de forma não intrusiva o que vai acontecendo e recolhe, simultaneamente, outros dados descritivos. Tenta aprender algo através do sujeito, embora tente necessariamente ser como ele. Pode participar nas suas actividades, embora com forma limitada e sem competir com o objectivo de obter prestígio ou estatuto. Aprende o modo de pensar do sujeito, mas não pensa do mesmo modo. É empático e, simultaneamente, reflexivo. (Bogdan; Biklen, 2013, p. 51)

A postura como investigadora no trabalho de campo, segundo o MCS deverá ser caracterizada por Silva (2022, p. 138) pelas seguintes orientações metodológicas: “dar voz aos

participantes [...], estimular a produção de significados e garantir que diferenças, nos modos de produção de significados sejam explicitadas [...], desenvolver uma escuta ativa [...], realizar uma leitura plausível e/ ou positiva da produção de significados [...] e, se for de interesse da investigação, identificar evidências que ajudem na análise dos obstáculos e limites epistemológicos e possíveis processos de impermeabilização.”

Na leitura epistemológica realizada pelos pressupostos teóricos do MCS, os investigadores utilizam a chamada leitura positiva e/ou leitura plausível, caracterizando o aluno não pela falta, mas compreendendo o contexto da enunciação. Para constituir a leitura epistemológica, são necessários dois conceitos fundamentais: obstáculo epistemológico e limite epistemológico.

O obstáculo e o limite epistemológico são, na perspectiva linsiana, explicados por Silva (2022) como

Um Obstáculo Epistemológico no MCS seria o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir um significado para uma afirmação, mas não produz. Já o Limite Epistemológico (...) seria a impossibilidade de o sujeito produzir significados para o resíduo de uma enunciação numa certa direção devido à sua maneira de operar. Sendo assim, se ela não mudar sua maneira de operar, ela não resolverá o problema proposto. (Silva, 2022, p.124)

Nesse caso em que o sujeito não altera sua maneira de operar, seja qual for o motivo, é dito que ele está em um processo de impermeabilização e, sobre esse processo Silva (2022, p. 136) afirma que “Muitas vezes, isso acontece porque ele/ela acredita na legitimidade do que está dizendo e entende que não há por que dizer de outro jeito – o jeito do professor, por exemplo. Ou ainda, por não poder produzir significados em outra direção.”

A aplicação da pesquisa ocorreu de acordo com os seguintes procedimentos metodológicos: (i) produção de tarefas fundamentadas teoricamente pelo MCS; (ii) organização de uma sala com 2 alunos (8ºano e 9ºano) convidados a participar da pesquisa nas dependências da Universidade Federal de Juiz de Fora; (iii) disponibilização de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) juntamente com uma declaração para que os responsáveis estivessem cientes das atividades; (iv) realização de atividades durante 1 encontro com 2 horas de duração na Universidade Federal de Juiz de Fora; (v) investigação, que ocorreu durante o encontro, sem intervenções que respondessem diretamente as dúvidas dos participantes, mas que permitissem uma reflexão a partir delas; (vi) coleta dos dados das aplicações, feita utilizando um caderno de campo para fazer anotações, além de mídias que puderam ser estudadas e analisadas depois,

como fotos, vídeos e áudios e (vii) análise dos dados, utilizando o MCS para realizar a leitura epistemológica dos sujeitos e entender o modo de produção de significados.

5.2. SOBRE AS TAREFAS

Nesta seção será detalhado o desenvolvimento das sequências de tarefas e explicitado como o produto educacional que foi desenvolvido nesta pesquisa diverge dos livros didáticos que, em sua maioria, contém definições matemáticas e exercícios descontextualizados.

As tarefas sobre a noção de razão, tema de nosso estudo, foram elaboradas pensando em aplicá-las numa turma do 7º ano do Ensino Fundamental II, com o objetivo de dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento proporcional no ensino fundamental, iniciado com a pesquisa de Fernandes (2024) e Cruz (2024), em nosso grupo de pesquisa. Posteriormente ao nosso trabalho, seguem as pesquisas com as investigações de Schincariol (2025) – sobre a noção de taxa – seguida de Pedrosa (2025) sobre a noção de proporção, e de Santos (2025) – sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Nestas pesquisas, nossa proposta diverge daquelas que constam nos livros didáticos, que iniciam a discussão do tema razão a partir de um exemplo introdutório seguido de uma definição matemática do tipo:

Dados dois números x e y , com y diferente de zero, a **razão** de x para y pode ser indicada pela fração x/y ou pelo quociente $x : y$. Nesta razão, lê-se: x está para y . (BALESTRI; NETO, 2012, p. 178)

A partir dessa definição, os autores de livros didáticos apresentam uma lista variada de exercícios para treino e fixação das ideias.

Em sentido contrário a essa perspectiva de ensino, nossa proposta parte de um conjunto de tarefas que associadas pretendem auxiliar o processo de produção de significados para razão, a partir da observação e reflexão dos alunos para a relação existente entre as grandezas envolvidas para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

O conjunto de tarefas foi desenvolvido em nosso grupo de pesquisa sob a coordenação do Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva e testada internamente quanto às suas potencialidades antes de serem levadas para as entrevistas com estudantes.

Metodologicamente, as tarefas foram produzidas para serem aplicadas com objetivos específicos. As primeiras foram denominadas de tarefas disparadoras, no sentido de que, com elas, inicia-se o processo de produção de significados dos alunos para o que eles constituirão, no final, como o objeto razão.

Em nossa pesquisa, a produção de tarefas foi feita de modo a dar continuidade ao estudo anterior de Cruz (2024) sobre a noção de razão. Por esse motivo, a tarefa disparadora que inicia o processo de produção de significados dos alunos para a noção de taxa possui como objetivo que o estudante compare dois problemas buscando identificar o que há de diferente entre seus enunciados:

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

- a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
- b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

A finalidade dessa tarefa é fazer os estudantes observarem o seguinte detalhe muito importante em relação as grandezas envolvidas nos dois problemas: no primeiro deles, temos uma relação parte/todo, isto é, médicos de uma cidade/habitantes da mesma cidade. Já no segundo caso, não temos nem relação parte/todo, nem parte/parte. As grandezas são número de habitantes e o número de linhas telefônicas.

A segunda tarefa tem como objetivo realizar a discussão sobre taxas, em sua essência, e fazer a análise que ela proporciona:

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	Número de Vagas	Número de Candidatos
Corrida	150	600
Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Volei Feminino	300	4800

- Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.
- Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

A expectativa do(a) professor(a) é que os alunos apresentem a seguinte resolução com as respectivas análises do que os números informam:

Corrida: $\frac{600}{150} = \frac{600 : 150}{150 : 150} = \frac{4}{1}$ ou (4:1)

Isto quer dizer que há 4 candidatos para cada vaga para a modalidade corrida.

$$\textbf{Futebol Feminino: } \frac{1200}{50} = \frac{1200:50}{50:50} = \frac{24}{1} \text{ ou } (24:1)$$

Isto quer dizer que há 24 candidatas para cada vaga para a modalidade futebol feminino.

$$\textbf{Futebol Masculino: } \frac{150}{30} = \frac{150:30}{30:30} = \frac{5}{1} \text{ ou } (5:1)$$

Isto quer dizer que há 5 candidatos para cada vaga para a modalidade futebol masculino.

$$\textbf{Ginástica Olímpica: } \frac{52}{26} = \frac{52:26}{26:26} = \frac{2}{1} \text{ ou } (2:1)$$

Isto quer dizer que há 2 candidatos para cada vaga para a modalidade ginástica olímpica.

$$\textbf{Handebol: } \frac{25}{50} = \frac{25:50}{50:50} = \frac{0,5}{1} \text{ ou } (0,5:1)$$

Isto quer dizer que há menos candidatos por vaga para a modalidade Handebol. Ou seja, todos os candidatos inscritos terão sua vaga.

$$\textbf{Natação: } \frac{360}{120} = \frac{360:120}{120:120} = \frac{3}{1} \text{ ou } (3:1)$$

Isto quer dizer que há 3 candidatos por vaga para a modalidade natação.

$$\textbf{Xadrez: } \frac{30}{120} = \frac{30:120}{120:120} = \frac{0,25}{1} \text{ ou } (0,25:1)$$

Isto quer dizer que há menos candidatos por vaga para a modalidade xadrez. Ou seja, todos os candidatos inscritos terão sua vaga.

Volei Feminino: $\frac{4800}{300} = \frac{4800 : 300}{300 : 300} = \frac{16}{1}$ ou (16:1)

Isto quer dizer que há 16 candidatas para cada vaga para a modalidade futebol feminino.

E, na letra (b), esperamos que eles concluam que:

A modalidade com mais concorrência é a de futebol feminino, e a modalidade com menos concorrência é a de xadrez.

Nessa questão, o sujeito, ao realizar as operações, possivelmente identificará a similaridade entre operar com razão e taxa. Entretanto, a questão se diferencia das tarefas de razão na medida em que é necessário evidenciar os rótulos candidatos/vagas em cada modalidade para que seja possível a compreensão do resultado.

A Tarefa 3 é semelhante à antecedente, diferenciando-se um pouco o modo de operar. Nessa tarefa os sujeitos operam com números expressivamente maiores em relação aos anteriores.

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes, existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha, que tem 140.000 habitantes, há 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

O professor espera que eles irão operar como na tarefa anterior e concluirão que

$$\frac{240000}{60000} = \frac{240000 : 60000}{60000 : 60000} = \frac{4}{1}, \text{ assim na primeira cidade, a cada 4 pessoas, 1 utiliza a}$$

linha telefônica.

$$\frac{140000}{20000} = \frac{140000 : 20000}{20000 : 20000} = \frac{7}{1}, \text{ assim na segunda cidade, a cada 7 pessoas, 1 utiliza a}$$

linha telefônica.

A tarefa a seguir possibilita um modo de operar distinto dos já usados anteriormente. Isso porque é necessário constituir um caminho diferente para resolver.

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Para resolver a questão, o aluno pensa ao contrário do que fazia anteriormente.

A taxa unitária é 8 candidatos por 1 vaga. Se são, 160 candidatos, ou seja, 8x20 candidatos, é porque são 1x20 vagas. Portanto, são 20 vagas oferecidas.

Nessa questão, é necessário que o estudante opere no sentido contrário do que estava fazendo até o presente momento. Portanto, essa tarefa é para introduzir um novo modo de operar.

A próxima tarefa é constituinte de um modo de operar diferente da Tarefa 3 porque não é possível entrar uma taxa unitária sem que uma das grandezas seja aproximada de um valor inteiro.

Tarefa 5

A população de Juiz de Fora em 2022 é de, aproximadamente, 540.000 habitantes, e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2 . O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Para resolver, o aluno deve simplificar os habitantes pela área ocupada:

$$\frac{540.000}{1.400} = \frac{540.000 \div 1400}{1.400 \div 1.400} \approx \frac{385,7 \text{ hab}}{1 \text{ km}^2}.$$

Como são habitantes, devemos arredondar pois falamos de pessoas. Logo são aproximadamente 386 habitantes a cada 1 quilômetro quadrado.

O objetivo dessa questão é permitir que o aluno observe a densidade demográfica de Juiz de Fora e compreenda que ela tem um potencial de gerar discussões sobre esse tema.

Finalmente, o objetivo Tarefa 6 é apresentar ao sujeito a noção de taxa como entendemos em nosso trabalho.

Tarefa 6

Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as seguintes afirmações

1. () Podemos definir Taxa da seguinte maneira:

Uma taxa é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) diferentes. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{\text{número de habitantes}}{\text{número de linhas telefônicas}} \cdot$$

2. () A definição de taxa é mesma da definição de razão;

3. () No cálculo da taxa, as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades, e, na resposta dos problemas, as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas”.

4. () O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.

Assim, seguindo o objetivo da tarefa, em conjunto com a turma, o que queremos concluir é:

1º) A noção de taxa é diferente da noção de razão;

2º) Como no cálculo da taxa, as unidades das grandezas são diferentes, elas devem ser analisadas com as unidades. E dizer que um pesquisador expressou esta situação da seguinte maneira: “As razões podem ser expressas numericamente sem rótulos; as taxas devem conservar seus rótulos para poderem ser interpretadas”.

3º) O que há de comum entre razão e taxa: ambas são manipuladas da mesma maneira.

Na sequência, o objetivo é trazer mais tarefas em que a noção de taxa esteja envolvida.

6. ANÁLISE DO PROCESSO DE PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS

Neste capítulo analisaremos a produção de significados dos dois participantes da pesquisa cujos pseudônimos são Alice e Bernardo.

Na aplicação das tarefas, com o objetivo de introduzir a noção de taxa como parte do desenvolvimento do pensamento proporcional, tomamos algumas decisões metodológicas. A primeira delas foi a decisão de fazer algumas intervenções durante o processo de aplicação das tarefas, de modo a observar se os participantes incorporavam à sua produção de significados as informações que lhes disponibilizávamos durante o diálogo com eles. O motivo para essa ação reside no fato de que há uma diferença entre a noção de razão e taxa, a qual gostaríamos de realçar, e como esse seria um dado novo, possivelmente eles não percebessem a diferença de imediato.

Como procedimento metodológico, também solicitamos a eles que não apagassem seus registros escritos, podendo alterá-los se quisessem, e que tentassem explicar em detalhes como resolveram as tarefas.

Recordamos ainda que os estudantes iniciaram seu processo de estudo em nossa pesquisa sobre o pensamento proporcional com a resolução e discussão de tarefas sobre razão e, portanto, estavam dando continuidade a sua imersão na discussão, sendo, agora, introduzidos na noção de taxa.

O processo de produção de significados dos participantes do estudo se dá com a tarefa 1 abaixo, que teve como objetivo sugerir a diferença entre razão e taxa:

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

- a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
- b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Alice: “Eu coloquei que difere nas relações das grandezas. O problema 1 traz três grandezas e o problema 2 traz 2 grandezas”

Figura 7 - Resposta de Alice (Tarefa 1)

UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: Se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Eles se diferem na relação das grandezas, o problema 1 traz dados e perguntas separadas, trazendo 3 grandezas em evidência. Já o problema 2 traz uma única pergunta sobre apenas 2 grandezas

Compilação do autor (2024)

Bernardo: “Eu coloquei que a diferença entre os dois problemas é que um é sobre habitantes por especialista da saúde e o outro é habitantes por linha telefônica. No problema 1, existem 400

peçoas para especialista da saúde. Já no problema 2, a cada 4 peçoas, uma está utilizando a linha telefônica.”

Figura 8 - Resposta de Bernardo (Tarefa 1)

The image shows a document from the Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) for the Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM. It contains 'Tarefa 1' with two problems. Below the problems is a handwritten response in a box. The response identifies the difference between the two problems as the relationship between the number of people and the number of medical/dental specialists or phone lines. It then calculates that in Problem 1, there are 400 people per specialist, while in Problem 2, only 4 people use the phone line.

UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: Se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

A diferença presente nos 2 problemas é a relação entre o número de pessoas para o número de médicos e dentistas ou linhas de telefone.

No problema 1 existem 400 pessoas para 1 especialista de saúde, já no problema 2 a cada 4 pessoas, uma está utilizando o linha telefônica.

De acordo com nossa expectativa, como eles estão frente a um fato novo, para o qual nunca produziram significados, entendemos como compreensível que a diferença não seja claramente explicitada. Neste momento, fazemos a intervenção que programamos, ao dizer:

Pesquisadora: “A diferença que podemos pensar sobre os dois problemas é que no problema 1 existe uma grandeza: pessoas. Já no problema 2, existem duas grandezas: pessoas e linhas telefônicas. As pessoas que são dentistas e médicos ainda sim fazem parte do grupo de pessoas, ou sejam os 12 dentistas e os 48 médicos são parte dos 24000 habitantes. Essa é a diferença entre taxa e razão.”

Em sala de aula, gostaríamos de ter dito que “A diferença em que podemos pensar sobre os dois problemas é que no problema 1 existe uma única grandeza envolvida, pois médicos e dentistas são pessoas que fazem parte do conjunto de habitantes da cidade. Já no problema 2, existem duas grandezas diferentes envolvidas pelo enunciado: pessoas e linhas telefônicas. Essa é a diferença entre taxa e razão.”

Se estivéssemos em uma sala de aula, tal diferença deveria ser lembrada e discutida durante todo o processo de ensino, já que a diferença deve ser internalizada pelos estudantes de modo mais natural possível. Após essa intervenção, é importante retornar à possibilidade de fala dos estudantes.

Acreditamos que a tarefa representou para os estudantes um limite epistemológico, o que era esperado já que eles não conheciam sobre a noção de taxa. Portanto, fora programada uma intervenção para que eles pudessem, nas tarefas posteriores, perceber essa distinção entre razão e taxa.

A segunda tarefa já discute situações em que a noção de taxa se faz presente. Importa dizer, que mesmo que o estudante não tenha entendido a diferença, isto não chega a ser um complicador, pois operamos matematicamente com a noção de taxa como operamos com a noção de razão. A tarefa 2 deu continuidade à demanda de produção de significados dos participantes:

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	Número de Vagas	Número de Candidatos
Atletismo	150	600
Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Vôlei Feminino	300	4800

- Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.
- Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

Bernardo: “Atletismo ficou que existe uma vaga para quatro candidatos. Coloquei 150 em cima 600 embaixo e simplifiquei por 150.”

Alice: “Meu deu o mesmo. Eu fiz primeiro por 3 e depois por 5 e deu o mesmo resultado”

Alice: “ O de futebol feminino a gente fez 50 sobre 1200 ai cortei os zeros e simplifiquei por 5 e temos 24 candidatos disputando uma vaga.”

Bernardo: “Eu também fiz isso, só que eu não escrevi em todos, eu coloquei só na resposta final”

Alice: “Futebol masculino ficou que temos 5 candidatos disputando uma vaga.”

Bernardo: “Ginástica olímpica ficou que existem 2 candidatos disputando uma vaga.”

Alice: “Em handebol, eu coloquei só a fração mesmo e depois eu escrevi que temos a metade de candidatos em relação ao número de vagas.”

Bernardo: “Eu coloquei só a fração e simplifiquei e deu 2 sobre 1. Eu não escrevi a resposta inteira. Ficaria que a cada 2 vagas uma pessoa estaria concorrendo.”

Pesquisadora: “Nesse caso então todo mundo entra?”

Bernardo: “Todo mundo entra.”

Bernardo: “Natação, simplificou por 120 e deu um terço. Que ai é uma vaga para 3 candidatos.”

Alice: “Eu só mudei a ordem o meu eu coloquei 3 candidatos por uma vaga.”

Figura 9 - Resposta de Alice (Tarefa 2)

a) atletismo: $\frac{198}{600} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \rightarrow$ Temos 4 candidatos disputando 1 vaga.

Fut. Fem: $\frac{50}{1200} = \frac{1}{24} \rightarrow$ Temos 24 candidatos disputando 1 vaga.

Fut. Masc: $\frac{30}{150} = \frac{1}{5} \rightarrow$ Temos 5 candidatos disputando 1 vaga.

Ginástica O.: $\frac{26}{52} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Temos 2 candidatos disputando 1 vaga.

Handebol: $\frac{50}{25} \rightarrow$ temos a metade de candidatos em relação ao número de vagas.

Natação: $\frac{120}{360} = \frac{1}{3} \rightarrow$ Temos 3 candidatos disputando 1 vaga.

Xadrez: $\frac{120}{4 \times 30} \rightarrow$ Temos o quádruplo de vagas disponíveis em relação ao número de candidatos.

Vôlei Fem: $\frac{300}{4500} = \frac{1}{15} \rightarrow$ temos 15 candidatos disputando 1 vaga.

b) mais concorrência: Fut. Fem.
 menos concorrência: atletismo
 correção: ginástica O.

Alice: “Xadrez, eu coloquei que temos o quádruplo de vagas em relação ao número de candidatos”

Bernardo: “Eu simplifiquei. Eu coloquei o 120 em cima do 30 e simplifiquei por 30 deu quatro sobre um. Ai eu pensei, né? Que existem 4 vagas para 1 candidato.”

Pesquisadora: “Mais um que todo mundo entra, né?”

Alice: “Sim”

Alice: “O vôlei a gente colocou 300 e sobre 4800 cortamos os zeros, simplificamos que no final deu 16 candidatos disputando uma vaga.”

Pesquisadora: “E a letra B vocês chegaram a responder?”

Bernardo: “Eu posso só responder a A? Porque como eu não respondi, eu escrevi geral as respostas. Porque a Alice fez cada uma e respondeu na frente”

Pesquisadora: “Não tem problema, você quer falar?”

Bernardo: “Eu coloquei ‘Os valores encontrados mostram a quantidade X de vagas para a quantidade Y de candidatos de forma resumida, por exemplo no atletismo existem 1 vaga para 4 candidatos.’”

Pesquisadora: “Ótimo”

Alice: “Eu coloquei que o que tem mais concorrência é o futebol feminino e a de menor concorrência é no atletismo. Porque como o xadrez e o handebol a gente sabe que todo mundo entrou, então não tem meio que concorrência, sabe? Todo mundo já entrou. Mas, na verdade, estou vendo aqui de novo e o que teria mesmo concorrência é a ginástica, né? Porque tem 2 candidatos disputando 1 vaga.”

Bernardo: “Eu pensei bem diferente do dela”

Pesquisadora: “Não tem problema”

Bernardo: “Eu coloquei que a modalidade com mais concorrência é o futebol feminino já que existem uma vaga para 24 pessoas e a modalidade menos concorrida é o xadrez já que existem 4 vagas por candidatos”

Pesquisadora: “Não sei se vocês sabem como nós trabalhamos na nossa pesquisa, mas estamos procurando modos de pensar. Cada um tem o seu, Alice resolveu de um jeito e o Bernardo de outro, e está tudo certo. Não tem um modo de pensar certo ou errado. Eu, por exemplo, não havia pensado como a Alice, mas faz todo sentido. Existe uma lógica por trás, como todos irão entrar, não há concorrência.”

A Tarefa 2 evidencia o fato de que já sabemos teoricamente que a maneira de operar razão taxa é a mesma. Sendo assim, essa tarefa foi bastante simples de resolver para ambos, não gerando discussões acerca do modo de operar. Entretanto, é interessante ressaltar que Bernardo, na letra A, desenvolveu uma resposta muito algébrica. Uma enunciação que acreditamos constituir seu núcleo é “Os valores encontrados mostram a quantidade X de vagas para a quantidade Y de candidatos de forma resumida, por exemplo (...)” a qual ele utilizou para resumir os textos para cada uma das modalidades, ou seja, ele optou por generalizar - uma característica bastante matemática. Podemos perceber que ele inclusive usa as variáveis X e Y e ainda exemplifica, ilustrando quase um processo de generalização (algoritmo).

Enquanto isso, para responder a letra B, Alice enunciou sua produção de conhecimento a partir da tarefa ao afirmar e justificar que “Porque como o xadrez e o handebol a gente sabe que todo mundo entrou, então não tem meio que concorrência, sabe?”. Observamos que ela pensou de uma forma muito diferente de Bernardo e seguindo uma outra lógica. Segundo ela, como todos irão entrar em xadrez e handebol, pois há menos candidatos que vagas, ficou claro que não há concorrência. Assim dentre as modalidades em que há concorrência, a Ginástica Olímpica tem menos candidatos por vaga. Com isso, torna-se possível perceber que Bernardo tende a ser rigoroso matematicamente, enquanto Alice pensa pelo lado lógico em várias situações, como a próxima.

Figura 10 - Resposta de Bernardo (Tarefa 2)

Handwritten calculations for various sports, showing the ratio of candidates to positions:

- Atletismo: $\frac{150^{150}}{600^{150}} = \frac{1}{4}$
- Futebol F.: $\frac{50^{24}}{1200^{24}} = \frac{1}{24}$
- Futebol M.: $\frac{30^{30}}{150^{30}} = \frac{1}{5}$
- Ginástica: $\frac{26^{26}}{52^{26}} = \frac{1}{2}$
- Handebol: $\frac{50^{25}}{100^{25}} = \frac{2}{1}$
- Natação: $\frac{120^{120}}{360^{120}} = \frac{1}{3}$
- Xadrez: $\frac{120^{30}}{30^{30}} = \frac{4}{1}$
- Vôlei: $\frac{300^{300}}{4800^{300}} = \frac{1}{16}$

AI Os valores encontrados nos mostram a quantidade x de vagas para a quantidade y de candidatos de forma resumida, por exemplo no atletismo existem 1 vaga para 4 candidatos.

BI A modalidade com maior concorrência é o futebol, já que existe 1 vaga para 24 pessoas. A modalidade menos concorrida é o xadrez, já que existem 4 vagas para 1 candidato, portanto todos os candidatos podem entrar.

Compilação do autor (2024)

A Tarefa 3 é similar para os estudantes devido ao modo de operar, entretanto é uma questão que exemplifica a necessidade de escrever os rótulos da taxa envolvida na tarefa, já que, é a partir da leitura do resultado, que surgem as discussões como a que a Alice levantou.

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes, existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha, que tem 140.000 habitantes, há 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

Pesquisadora: “Como ficou a Tarefa 3 de vocês?”

Bernardo: “Na cidade A, eu coloquei 240.000 sobre 60.000, simplifiquei. Cortei os 4 zeros e simplifiquei por 6. Deu 4 sobre 1. E eu escrevi que a cada 4 habitantes 1 está usando a linha telefônica”

Alice: “Eu coloquei diferente na hora de escrever. Eu coloquei que tem 4 pessoas usando uma linha telefônica”

Bernardo: “Mas eu falei a mesma coisa”

Pesquisadora: “É porque você disse que dessas 4 pessoas apenas uma usa a linha telefônica. Ela disse que 4 pessoas usam a mesma linha. É isso que você pensou, Alice?”

Alice: “Foi sim.”

Pesquisadora: “Para você, Bernardo, é como se 3 pessoas dessas quatro não utilizassem, certo?”

Bernardo: “Isso.”

Alice: “Aí na de baixo, eu segui a mesma lógica. Cortei os zeros, simplifiquei. Aí ficou 7 sobre 1. Aí coloquei que existem sete pessoas usando a mesma linha telefônica.”

Pesquisadora: “A ideia dessa questão que deixar claro que sempre quando formos falar de taxa, devemos evidenciar as unidades que estamos utilizando. Por exemplo, pessoas por linhas telefônicas.”

Alice: “Aí só uma pergunta. Eu sei que não tem certo ou errado mas como você pensaria? Tipo o Bernardo ou igual eu falei 4 pessoas usando a mesma linha telefônica”

Pesquisadora: “Eu inicialmente pensaria como o Bernardo mas dependeria do contexto. Eu pensaria como aquelas propagandas ‘a cada 10 pessoas 8 usam a pasta de dente tal’, então significa que 2 pessoas não utilizam dessa pasta”

Ao analisar as falas do Bernardo na Tarefa 3, o que observamos é que ele internalizou um algoritmo de manipulação das taxas, sendo algo quase mecânico para encontrar a taxa unitária, o que sugere ser uma estipulação local quando afirma sem justificar que “simplifiquei (...) cortei”,

evidenciando um padrão na tentativa de encontrar sempre a taxa unitária. Por outro lado, Alice questiona “Eu sei que não tem certo ou errado, mas como você pensaria?”. Essa indagação surge porque, após encontrar a taxa unitária, a estudante se preocupou bastante com a interpretação do resultado e porque o conhecimento que ela produziu, enunciado em sua fala e em sua escrita a partir da tarefa, indica que, nos tempos modernos, são pouquíssimas pessoas que não têm acesso à linha telefônica, ou seja, todos usam a mesma linha telefônica. Para nós, Alice demonstra um claro interesse em não somente chegar ao resultado, mas interpretá-lo.

Figura 11 - Resposta de Alice (Tarefa 3)

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha que tem 140.000 habitantes, tem 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

$$\frac{240.000^{-6}}{60.000^{-6}} = \frac{4}{1} \rightarrow \text{Temos 4 pessoas}^{\text{habitantes}} \text{ utilizando 1 linha telefônica.}$$
$$\frac{140.000^{-2}}{20.000^{-2}} = \frac{7}{1} \rightarrow \text{Temos 7 pessoas (habitantes) utilizando 1 linha telefônica.}$$

Figura 12 - Resposta de Bernardo (Tarefa 3)

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha que tem 140.000 habitantes, tem 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

$$\text{Cidade A: } \frac{240.000 \div 6}{60.000 \div 6} = \frac{4}{1}$$

A cada 4 habitantes 1 está utilizando a linha telefônica

$$\text{Cidade B } \frac{140.000 \div 2}{20.000} = \frac{7}{1}$$

A cada 7 habitantes 1 está utilizando a linha telefônica

Compilação do autor (2024)

A tarefa 4 introduz um modo de operar distinto do que eles haviam tratado nas tarefas anteriores. Isso porque o enunciado tem como uma hipótese a taxa unitária, exatamente o que era questionado anteriormente. Sendo assim, os sujeitos devem ampliar os modos de operar sobre a noção de taxa.

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Pesquisadora: “Alguém poderia arriscar a dizer a diferença entre essa tarefa 4 e as outras anteriores?”

Bernardo: “Nas outras, eles já dão o número de vagas. Nessa daqui, eles te dão meio que a forma irredutível para você fazer uma conta e achar a forma ampliada dela, então eles não te dão todos os valores. Eles pedem para você achar.”

Alice: “Isso, eles não dão o valor total de uma grandeza que seria as vagas. Eles pedem para você achar.”

Pesquisadora: “Isso aí! O que vocês colocaram nessa?”

Alice: “Eu cheguei na resposta de 20 vagas que foram oferecidas pela escola. Primeiro eu coloquei o 1 sobre 8 que é a fração na forma reduzida. Aí, eu pensei ‘qual o número que a gente multiplica por 8 para chegar em 180?’ Porque a gente sabe que se é uma fração meio que reduzida a gente divide os dois o numerador e o denominador pelo mesmo número aí se eu sei que no final foi uma vaga para 8 candidatos. E se eu tenho que o total de vagas é 160, se eu achar o número que eu multipliquei o oito, vai multiplicar também o número de vagas. E vai achar 20.”

Bernardo: “Eu coloquei que 1 sobre 8 é igual que x sobre 160. Aí eu multipliquei cruzado e fiz a equação e eu achei 20. Que foram oferecidas 20 vagas.”

Figura 13 - Resposta de Alice (Tarefa 4)

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

$$\frac{1}{8} = \frac{x}{160} = \frac{20}{160}$$

Pensamento: qual número que multiplicamos por 8 resulta em 160?

Fração reduzida.

R= 20 vagas foram oferecidas pela escola.

Figura 14 - Resposta de Bernardo (Tarefa 4)

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

$$\frac{1}{8} = \frac{x}{160} \rightarrow \begin{array}{l} 8x = 160 \\ x = 160 \div 8 \\ x = 20 \end{array} \quad x = N^{\circ} \text{ de vagas}$$

Foram oferecidas 20 vagas pela escola.

Compilação do autor (2024)

Na Tarefa 4, essa fala de Bernardo: “Eu coloquei que 1 sobre 8 é igual que x sobre 160. Aí eu multipliquei cruzado e fiz a equação e eu achei 20. Que foram oferecidas 20 vagas.” indica possivelmente que ele já internalizou um processo em que operar desta maneira já é uma estipulação local para ele quando se trata de taxa, portanto quando ele se deparar com algum problema desse tipo, ele irá aplicar o algoritmo já internalizado. Já a Alice enuncia um elemento que reconhecemos como um pertencente ao seu núcleo quando diz “qual o número que a gente multiplica por 8 para chegar em 180?” Porque a gente sabe que se é uma fração meio que reduzida a gente divide os dois o numerador e o denominador pelo mesmo número aí se eu sei que no final foi uma vaga para 8 candidatos. (...)”. Verifica-se que, em suas manipulações, ela não utiliza um algoritmo, operando como em razão, pensando de forma lógica. Assim, ela constrói um modo de pensar que lhe é próprio.

A tarefa 5 possibilita abertura para discussões acerca da interdisciplinaridade inata com outras disciplinas, neste caso a geografia com o objeto densidade demográfica. O maior desconforto dessa tarefa é na simplificação dos valores para encontrar a taxa unitária.

Tarefa 5

Em 2022, a população de Juiz de Fora é de, aproximadamente, 540.000 habitantes, e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2 . O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Alice: “Eu fiz assim. Coloquei o número de habitantes em cima e a área embaixo. Ficou 540.000 e 1.400 embaixo. Aí eu simplifiquei. Cortei os zeros, pera um minutinho que falta zeros aqui. (...) Aí deu 5400 sobre 14, aí eu simplifiquei por 2 e ficou 270? Sobre 7. É faltou um zero. 2700 sobre 7. Aí eu coloquei assim, a comparação é que a cada 7 km^2 da cidade de Juiz de Fora, há 2700 pessoas.”

Pesquisadora: “Aí você não simplificou mais?”

Alice: “Não.”

Pesquisadora: “E você, Bernardo? Como você fez?”

Bernardo: “Eu coloquei 540.000 sobre 1.400. Simplifiquei dois zeros e simplifiquei por 14, aí deu 400 sobre 1. A cada área de 1 km^2 existem 400 habitantes.”

Pesquisadora: “você arredondou?”

Bernardo: “Não, o meu deu exato. (...) Ah mas não dá valor exato, é porque eu tinha feito 4 vezes 14 mas não dá 54, dá 56”

Alice: “Eu tinha pensado em arredondar mais, mas aí vai dar um valor quebrado”

Pesquisadora: “É o resultado é um número com vírgula e como são pessoas, seria melhor arredondar. Por isso, perguntei se o Bernardo havia arredondado. O valor aproximado é de 386 pessoas a cada quilômetro quadrado. Para termos uma ideia, a UFJF tem 1 km^2 . Então é como se 386 pessoas vivessem em um espaço do tamanho da UFJF. Essa ideia de habitantes por quilômetro quadrado é a de densidade demográfica. Mas a ideia de densidade demográfica não é tão uniforme assim, isso porque durante a noite por exemplo, não há muitas pessoas na UFJF, enquanto em um condomínio a densidade demográfica estaria alta”

Figura 15 - Resposta de Alice (Tarefa 5)

Tarefa 5

A população de Juiz de Fora em 2022 é, aproximadamente, de 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km², aproximadamente. O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

$$\frac{540.000}{1.400} = \frac{2700}{1}$$

A comparação informa que a cada 1 km² de Juiz de Fora habitam 2700 pessoas.

Figura 16 - Resposta de Bernardo (Tarefa 5)

Tarefa 5

A população de Juiz de Fora em 2022 é, aproximadamente, de 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km², aproximadamente. O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

$$\frac{540.000}{1.400} = \frac{400}{1}$$

A cada área de 1 km² existem 400 habitantes.

Na Tarefa 5, ocorreu um desconforto em relação à forma simplificada da taxa, já que a taxa unitária seria um número decimal e a questão apresenta pessoas, para as quais um número inteiro seria mais condizente. Quando Alice percebeu que encontraria um número decimal, o que não seria lógico utilizar já que se trata de pessoas por área, optou então por não simplificar a taxa, evitando assim um desconforto lógico.

Logo, para corroborar uma possível ampliação do processo de produção de significados deles, foi exposto um comentário sobre densidade demográfica, correlacionando o número de habitantes de 386 a cada 1 quilômetro quadrado, sendo esse quilômetro quadrado representado pela extensão da Universidade Federal de Juiz de Fora. Como, em algumas das tarefas anteriores, Alice levantou discussões lógicas em relação ao resultado final de cada uma, foi coerente explicitar um pouco sobre densidade demográfica para ampliar a discussão. Entretanto, não houve uma continuação da discussão, como havia sido esperado inicialmente pela pesquisadora.

Por fim, a tarefa 6 é a única que realmente discute a definição de taxa, ou seja, depois dos sujeitos estarem familiarizados e operando com a ideia de taxa, é que expusemos a definição de taxa.

Tarefa 6

Marque **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as seguintes afirmações

1. () Podemos definir **Taxa** da seguinte maneira:

Uma **taxa** é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) **diferentes**. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{\text{número de habitantes da cidade}}{\text{área ocupada pela cidade}} \cdot$$

2. () A definição de taxa é mesma da definição de razão;
3. () No cálculo da taxa, as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e, na resposta dos problemas, as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas”.
4. () O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.

Pesquisadora: “Vamos pensar na Tarefa 6? O que vocês acham do item 1, verdadeiro ou falso?”

Alice: “Verdadeiro.”

Pesquisadora: “No item 2, ‘A definição de taxa é a mesma da definição de razão’, verdade?”

Bernardo: “Falso”

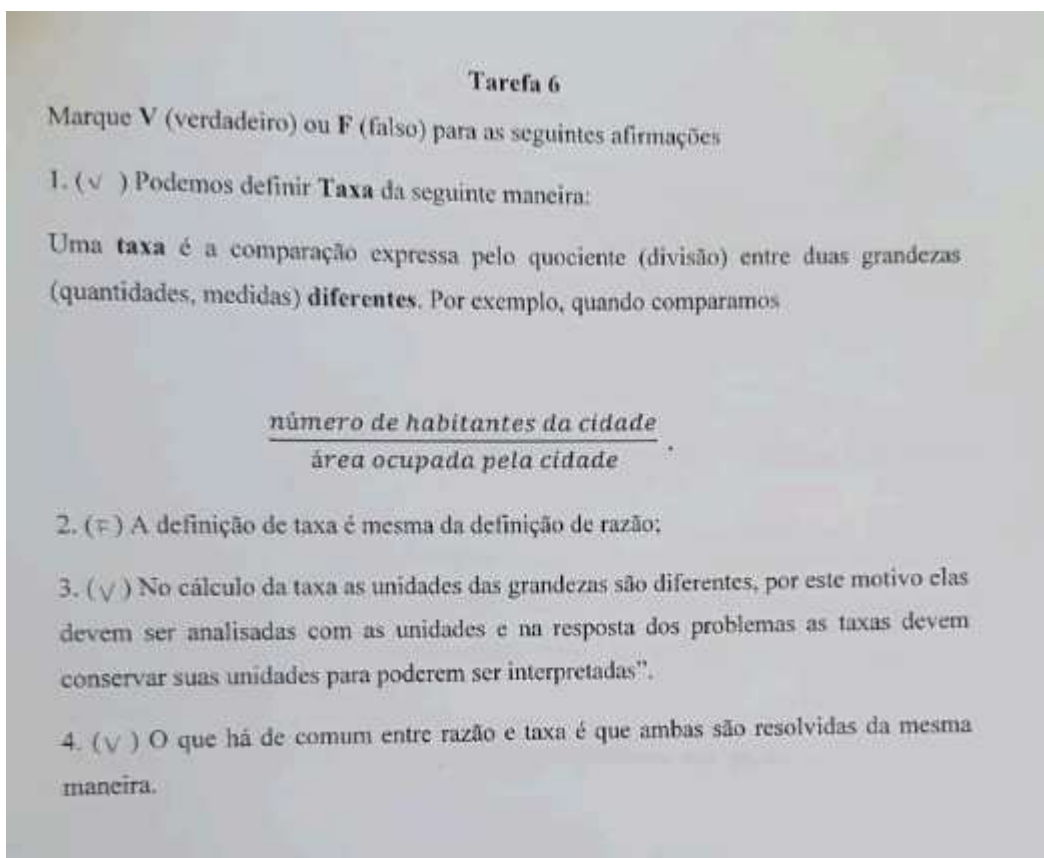
Pesquisadora: “No item 3, ‘No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas’, verdade?”

Alice: “Verdade”

Pesquisadora: “ No item 4, ‘O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.’, verdade?”

Alice: “Verdade”

Figura 17 - Resposta de Alice (Tarefa 6)



A finalidade da tarefa 6 foi evidenciar, finalmente, a definição da noção de taxa, a distinção entre ela e a noção de razão e suas semelhanças. Essa tarefa não gerou discussões acerca das falas.

É importante que, após essa aula sobre a noção de taxa, o professor retome o objeto em novas tarefas para identificar quais modos de pensar foram de fato internalizados.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo a produção de um conjunto de tarefas para compor uma proposta de ensino fundamentada em modos de pensar, descrito na introdução, com a finalidade de desenvolver o pensamento proporcional ao longo do Ensino Fundamental. Sob nossa responsabilidade, ficou a incumbência de tratar da noção de taxa apoiando-se no Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico-epistemológico e metodológico.

Como mencionamos anteriormente, nossa investigação é parte de uma sequência de trabalhos respectivamente: (i) “Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão” desenvolvido pelo professor Kaio Cruz e Silva; (ii) “Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa” pesquisado pela professora Taynara Schincariol Alves; (iii) “Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de proporção” pesquisado pela professora Maria Eduarda Alvim Pedrosa; (iv) “Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais” pesquisado pela professora Sinai E. F. dos Santos. Em conjunto, os trabalhos buscam ampliar a produção de significados dos estudantes constituindo o pensamento proporcional, sendo assim as pesquisas se complementam.

Uma das principais mudanças que nossa proposta apresenta é um rompimento com o ensino tradicional de matemática em que o professor, como detentor do conhecimento, explica os conteúdos matemáticos ao aluno que, passivamente, tenta aprender, cabendo a eles apenas tentar reproduzir as informações disponíveis resolvendo listas de exercícios. Em nossa proposta, as tarefas são os “instrumentos” mediadores (no sentido proposto por Vigotski) entre o professor e os alunos, as quais possibilitam, a partir da tentativa de resolvê-las em uma discussão coletiva da turma com o professor, reflexões e ações que permitem a internalização dos modos de produção de significados para a noção de taxa.

O conjunto de tarefas constituído nessa pesquisa se diferencia então das atividades trazidas normalmente em sala de aula, pois a definição somente será apresentada e discutida na última tarefa, ou seja, antes de introduzir a definição do objeto (taxa), opera-se com a ideia de taxa até que ela se torne familiar e usual. Dessa forma, há a possibilidade de que o estudante internalize maneiras de operar com o objeto antes de sua caracterização.

As entrevistas que realizamos com os participantes da pesquisa de campo indicaram a potencialidade das tarefas para uso em sala de aula. Identificamos, em alguns momentos,

evidências que sugerem que em sala de aula seja possível que alguns alunos possam operar de modo a identificarmos um limite epistemológico, no sentido proposto por Lins, o que demandará um auxílio nosso a esses alunos, a partir de uma intervenção mais efetiva, a fim de superarem essa dificuldade de aprendizagem.

Como observamos em nossa análise, em vários momentos da aprendizagem matemática, os estudantes se defrontaram com fatos novos. No caso estudado, eles se depararam com a sutil e importante diferença entre razão e taxa – situação para o qual nunca produziram significados. Nesse caso, entendemos que o professor em sala de aula, ao longo de todo o processo de ensino da noção de taxa, deve estar sempre chamando a atenção dos alunos para esta diferença, transformando este (e outros pontos importantes) em objeto de atenção da turma.

Em resumo, observamos, após a entrevista e análise da enunciação dos participantes, que na primeira tarefa algo novo para eles, os estudantes não conseguiram explicitar claramente a diferença entre razão e taxa, sugerindo, para nós, que a questão se constituiu em um limite epistemológico, havendo a necessidade de nossa intervenção. Consideramos ainda que essa possibilidade já fazia parte de nossa expectativa antes de sua aplicação. Com as questões seguintes, eles operaram sem necessidade de mediação, tendo a última tarefa, com a caracterização de taxa, ocorrida de maneira natural. Assim, concluímos que o conjunto de tarefas potencializou a produção de significados dos estudantes, mostrando-se fundamental para o desenvolvimento do pensamento proporcional, em específico sobre a noção de taxa.

O produto educacional, um dos resultados da investigação, foi composto pelo conjunto de tarefas proposto aos alunos como fichas de trabalho. Elas ficarão disponíveis em anexo, no final do produto educacional, para serem recortadas pelos professores que decidirem utilizá-las, local em que também poderão ter acesso as respostas das tarefas e comentários, aprofundando seu conhecimento com base nos preceitos do MCS, caso haja interesse.

Ao final deste trabalho, esperamos que seja positiva sua contribuição para auxiliar uma mudança na atuação dos professores e das professoras em sala de aula, os quais poderão utilizar as tarefas sobre taxa, de maneira a promover a produção de significados dos alunos, estimulando-os a falar sobre seus modos de operar, tendo o MCS como um referencial teórico que possibilite que as enunciações dos estudantes sejam lidas, de modo a identificar suas possíveis dificuldades de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANGELO, Claudia L. *et al* (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**. 2.ed. Porto Alegre: Fi, 2022. Disponível em: <https://www.editorafi.org/ebook/652campos>. Acesso em: 09 jul. 2023.

ANGELO, Claudia L. et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. 1.ed. São Paulo: Midiograf, 2012.

BALESTRI, Rodrigo; NETO, Eduardo R. **Nos Dias De Hoje - Matematica - 7. Ano**. São Paulo: Leya Brasil, 2012.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em Educação Matemática: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 2013.

CRUZ, Kaio S. **Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2024.

FERNANDES, Letícia F. **Pensamento proporcional nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2024.

GIOVANNI, José R. J. **A conquista matemática: 7º ano ensino fundamental anos finais**. São Paulo: FDT, 2022.

LAMON, Susan. J. **Teaching Fractions And Ratios For Understanding**. 3ed. Nova Iorque: Routledge, 2012.

LEONTIEV, Alexei N. **Actividad, conciencia y personalidad**. México: Cartago, 1984.

LINS, Romulo C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia L. et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história.** São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

LINS, Romulo C.. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94. (Seminários DEBATES Unesp).

LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 4 ed. Campinas: Papirus Editora, 2001.

NORTON, Stephen J. **The Construction of Proportional Reasoning.** In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4. Melbourne: PME, 2005. p. 17-24.

PAULA, Marília R. **Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2012.

PEDROSA, Maria Eduarda A. **Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de proporção.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.

POST, Tomas R.; BEHER, Merlyn J.; LESH, Richard. **A Proporcionalidade o Desenvolvimento de Noções Pré-Álgebra.** Coxford, Arthur F. e Schulte, Albert P. (org.). As Idéias da Álgebra, 89-103, Atual Ed., São Paulo, 1995.

SANTOS, Sinai. E. F. **Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.

SCHINCARIOL, Taynara A. **Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.

SILVA, Amarildo M.. **O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2022.

SILVA, Amarildo M; OLIVEIRA, Viviane C.A.; ALMEIDA, Vitor R. **O Modelo dos Campos Semânticos: teorização e desdobramentos para a pesquisa e para o ensino.** In: Processos cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática. Orgs. Sandra Maria Pinto Magina, Sintria Labres Lautert, Alina Galvão Spinillo. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

SILVA, Amarildo M.; BASTOS, Ronaldo R.; OLIVEIRA, Rosana. **Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica.** In: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2024. p. 92-109.

SPINILLO, Alina G. **Proporções nas séries iniciais do primeiro grau.** In: SCHLIEMANN, A.D.CARREHER,D.W, et al. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. 2ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

VIANA, Fernando; DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática.** 7ºano. 3a ed. São Paulo: Editora Ática, 2019.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente.** 7ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1993.

WALLE, John A. V. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICES

Apêndice 1: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento

Pais e/ou responsáveis,

A proposta desta pesquisa é investigar a produção de significados dos estudantes do sexto, sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental através de um conjunto de tarefas sobre Pensamento Proporcional e situações relacionadas a ele. A participação dos alunos participantes dessa pesquisa é voluntária e as ações pedagógicas serão desenvolvidas através de encontros presenciais. Durante a aplicação das tarefas da pesquisa, os encontros serão gravados, a fim de que seus dados sejam processados posteriormente pelos pesquisadores e devidamente arquivados, respeitando o sigilo dos participantes, que também utilizarão nomes fictícios. Os participantes poderão pedir o esclarecimento que desejarem e/ou deixar a pesquisa a qualquer momento, retirando seu consentimento sem quaisquer consequências, penalizações ou prejuízos. Ao publicar os resultados da pesquisa, é garantido o sigilo. Quaisquer dúvidas em relação à pesquisa poderão ser sanadas pelo telefone (32)98417007 ou e-mail tsaschin@gmail.com.

Taynara Schincariol Alves

() Autorizo a participação do estudante _____

() Não autorizo a participação do estudante _____

Assinatura do responsável: _____

Apêndice 2: Conjunto de Tarefas



Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

- a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
- b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	Número de Vagas	Número de Candidatos
Atletismo	150	600

Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Vôlei Feminino	300	4800

- Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.
- Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes, existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha que tem 140.000 habitantes, há 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Tarefa 5

Em 2022, a população de Juiz de Fora é de, aproximadamente, 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2 . O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Tarefa 6

Marque **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as seguintes afirmações

1. () Podemos definir **Taxa** da seguinte maneira:

Uma **taxa** é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) **diferentes**. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{\text{número de habitantes da cidade}}{\text{área ocupada pela cidade}} \cdot$$

2. () A definição de taxa é mesma da definição de razão;

3. () No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas”.

4. () O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.

Apêndice 3: Transcrição completa da aplicação das tarefas



Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM
TRANSCRIÇÃO DA APLICAÇÃO (27/09)

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

- a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
- b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Alice: “Eu coloquei que difere nas relações das grandezas. O problema 1 traz três grandezas e o problema 2 traz 2 grandezas”

Bernardo: “Eu coloquei que a diferença entre os dois problemas é que um é sobre habitantes por especialista da saúde e o outro é habitantes por linha telefônica. No problema 1, existem 400 pessoas para especialista da saúde. Já no problema 2, a cada 4 pessoas, uma está utilizando a linha telefônica.”

Pesquisadora: “A diferença que podemos pensar sobre os dois problemas é que no problema 1 existe uma grandeza: pessoas. Já no problema 2, existem duas grandezas: pessoas e linhas telefônicas. As pessoas que são dentistas e médicos ainda sim fazem parte do grupo de pessoas, ou sejam os 12 dentistas e os 48 médicos são parte dos 24000 habitantes. Essa é a diferença entre taxa e razão.”

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	Número de Vagas	Número de Candidatos
Atletismo	150	600
Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Vôlei Feminino	300	4800

- Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.
- Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

Bernardo: “Atletismo ficou que existe uma vaga para quatro candidatos. Coloquei 150 em cima 600 embaixo e simplifiquei por 150.”

Alice: “Eu deu o mesmo. Eu fiz primeiro por 3 e depois por 5 e deu o mesmo resultado”

Alice: “ O de futebol feminino a gente fez 50 sobre 1200 ai cortei os zeros e simplifiquei por 5 e temos 24 candidatos disputando uma vaga.”

Bernardo: “Eu também fiz isso, só que eu não escrevi em todos, eu coloquei só na resposta final”

Alice: “Futebol masculino ficou que temos 5 candidatos disputando uma vaga.”

Bernardo: “Ginástica olímpica ficou que existem 2 candidatos disputando uma vaga.”

Alice: “Em handebol, eu coloquei só a fração mesmo e depois eu escrevi que temos a metade de candidatos em relação ao número de vagas.”

Bernardo: “Eu coloquei só a fração e simplifiquei e deu 2 sobre 1. Eu não escrevi a resposta inteira. Ficaria que a cada 2 vagas uma pessoa estaria concorrendo.”

Pesquisadora: “Nesse caso então todo mundo entra?”

Bernardo: “Todo mundo entra.”

Bernardo: “Natação, simplificou por 120 e deu um terço. Que ai é uma vaga para 3 candidatos.”

Alice: “Eu só mudei a ordem o meu eu coloquei 3 candidatos por uma vaga.”

Alice: “Xadrez, eu coloquei que temos o quádruplo de vagas em relação ao número de candidatos”

Bernardo: “Eu simplifiquei. Eu coloquei o 120 em cima do 30 e simplifiquei por 30 deu quatro sobre um. Ai eu pensei, né? Que existem 4 vagas para 1 candidato.”

Pesquisadora: “Mais um que todo mundo entra, né?”

Alice: “Sim”

Alice: “O vôlei a gente colocou 300 e sobre 4800 cortamos os zeros, simplificamos que no final deu 16 candidatos disputando uma vaga.”

Pesquisadora: “E a letra B vocês chegaram a responder?”

Bernardo: “Eu posso só responder a A? Porque como eu não respondi, eu escrevi geral as respostas. Porque a Alice fez cada uma e respondeu na frente”

Pesquisadora: “Não tem problema, você quer falar?”

Bernardo: “Eu coloquei ‘Os valores encontrados mostram a quantidade X de vagas para a quantidade Y de candidatos de forma resumida, por exemplo no atletismo existem 1 vaga para 4 candidatos.’”

Pesquisadora: “Ótimo”

Alice: “Eu coloquei que o que tem mais concorrência é o futebol feminino e a de menor concorrência é no atletismo. Porque como o xadrez e o handebol a gente sabe que todo mundo entrou, então não tem meio que concorrência, sabe? Todo mundo já entrou. Mas, na verdade, estou vendo aqui de novo e o que teria mesmo concorrência é a ginástica, né? Porque tem 2 candidatos disputando 1 vaga.”

Bernardo: “Eu pensei bem diferente do dela”

Pesquisadora: “Não tem problema”

Bernardo: “Eu coloquei que a modalidade com mais concorrência é o futebol feminino já que existem uma vaga para 24 pessoas e a modalidade menos concorrida é o xadrez já que existem 4 vagas por candidatos”

Pesquisadora: “Não sei se vocês sabem como nós trabalhamos na nossa pesquisa, mas estamos procurando modos de pensar. Cada um tem o seu, Alice resolveu de um jeito e o Bernardo de outro, e está tudo certo. Não tem um modo de pensar certo ou errado. Eu, por exemplo, não havia pensado como a Alice, mas faz todo sentido. Existe uma lógica por trás, como todos irão entrar, não há concorrência.”

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha que tem 140.000 habitantes, há 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

Pesquisadora: “Como ficou a Tarefa 3 de vocês?”

Bernardo: “Na cidade A, eu coloquei 240.000 sobre 60.000, simplifiquei. Cortei os 4 zeros e simplifiquei por 6. Deu 4 sobre 1. E eu escrevi que a cada 4 habitantes 1 está usando a linha telefônica”

Alice: “Eu coloquei diferente na hora de escrever. Eu coloquei que tem 4 pessoas usando uma linha telefônica”

Bernardo: “Mas eu falei a mesma coisa”

Pesquisadora: “É porque você disse que dessas 4 pessoas apenas uma usa a linha telefônica. Ela disse que 4 pessoas usam a mesma linha. É isso que você pensou, Alice?”

Alice: “Foi sim.”

Pesquisadora: “Para você, Bernardo, é como se 3 pessoas dessas quatro não utilizassem, certo?”

Bernardo: “Isso.”

Alice: “Aí na de baixo, eu segui a mesma lógica. Cortei os zeros, simplifiquei. Aí ficou 7 sobre 1. Aí coloquei que existem sete pessoas usando a mesma linha telefônica.”

Pesquisadora: “A ideia dessa questão que deixar claro que sempre quando formos falar de taxa, devemos evidenciar as unidades que estamos utilizando. Por exemplo, pessoas por linhas telefônicas.”

Alice: “Aí só uma pergunta. Eu sei que não tem certo ou errado mas como você pensaria? Tipo o Bernardo ou igual eu falei 4 pessoas usando a mesma linha telefônica”

Pesquisadora: “Eu inicialmente pensaria como o Bernardo mas dependeria do contexto. Eu pensaria como aquelas propagandas ‘a cada 10 pessoas 8 usam a pasta de dente tal’, então significa que 2 pessoas não utilizam dessa pasta”

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Pesquisadora: “Alguém poderia arriscar a dizer a diferença entre essa tarefa 4 e as outras anteriores?”

Bernardo: “Nas outras, eles já dão o número de vagas. Nessa daqui, eles te dão meio que a forma irredutível para você fazer uma conta e achar a forma ampliada dela, então eles não te dão todos os valores. Eles pedem para você achar.”

Alice: “Isso, eles não dão o valor total de uma grandeza que seria as vagas. Eles pedem para você achar.”

Pesquisadora: “Isso aí! O que vocês colocaram nessa?”

Alice: “Eu cheguei na resposta de 20 vagas que foram oferecidas pela escola. Primeiro eu coloquei o 1 sobre 8 que é a fração na forma reduzida. Ai, eu pensei ‘qual o número que a gente multiplica por 8 para chegar em 180?’ Porque a gente sabe que se é uma fração meio que reduzida a gente divide os dois o numerador e o denominador pelo mesmo número ai se eu sei que no final foi uma vaga para 8 candidatos. E se eu tenho que o total de vagas é 160, se eu achar o número que eu multipliquei o oito, vai multiplicar também o número de vagas. E vai achar 20.”

Bernardo: “Eu coloquei que 1 sobre 8 é igual que x sobre 160. Ai eu multipliquei cruzado e fiz a equação e eu achei 20. Que foram oferecidas 20 vagas.”

Tarefa 5

Em 2022, a população de Juiz de Fora é de, aproximadamente, 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2 . O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Alice: “Eu fiz assim. Coloquei o número de habitantes em cima e a área embaixo. Ficou 540.000 e 1.400 embaixo. Ai eu simplifiquei. Cortei os zeros, pera um minutinho que falta zeros aqui. (...) Ai deu 5400 sobre 14, ai eu simplifiquei por 2 e ficou 270? Sobre 7. É faltou um zero. 2700 sobre 7. Ai eu coloquei assim, a comparação é que a cada 7 km^2 da cidade de Juiz de Fora, há 2700 pessoas.”

Pesquisadora: “Ai você não simplificou mais?”

Alice: “Não.”

Pesquisadora: “E você, Bernardo? Como você fez?”

Bernardo: “Eu coloquei 540.000 sobre 1.400. Simplifiquei dois zeros e simplifiquei por 14, ai deu 400 sobre 1. A cada área de 1 km^2 existem 400 habitantes.”

Pesquisadora: “você arredondou?”

Bernardo: “Não, o meu deu exato. (...) Ah mas não dá valor exato, é porque eu tinha feito 4 vezes 14 mas não dá 54, dá 56”

Alice: “Eu tinha pensado em arredondar mais, mas ai vai dar um valor quebrado”

Pesquisadora: “É o resultado é um número com vírgula e como são pessoas, seria melhor arredondar. Por isso, perguntei se o Bernardo havia arredondado. O valor aproximado é de 386 pessoas a cada quilômetro quadrado. Para termos uma ideia, a UFJF tem 1 km^2 . Então é como se 386 pessoas vivessem em um espaço do tamanho da UFJF. Essa ideia de habitantes por quilômetro quadrado é a de densidade demográfica. Mas a ideia de densidade demográfica não é tão uniforme assim, isso porque durante a noite por exemplo, não há muitas pessoas na UFJF, enquanto em um condomínio a densidade demográfica estaria alta”

Tarefa 6

Marque **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as seguintes afirmações

1. () Podemos definir **Taxa** da seguinte maneira:

Uma **taxa** é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) **diferentes**. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{\text{número de habitantes da cidade}}{\text{área ocupada pela cidade}} \cdot$$

2. () A definição de taxa é mesma da definição de razão;

3. () No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas”.

4. () O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.

Pesquisadora: “Vamos pensar na Tarefa 6? O que vocês acham do item 1, verdadeiro ou falso?”

Alice: “Verdadeiro.”

Pesquisadora: “No item 2, ‘A definição de taxa é a mesma da definição de razão’, verdade?”

Bernardo: “Falso”

Pesquisadora: “No item 3, ‘No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas’, verdade?”

Alice: “Verdade”

Pesquisadora: “ No item 4, ‘O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.’, verdade?”

Alice: “Verdade”