UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TAYNARA SCHINCARIOL ALVES

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE TAXA

Juiz de Fora
2025

TAYNARA SCHINCARIOL ALVES

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE TAXA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora

2025

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Cara(o) professora(o),

Este Produto Educacional é parte integrante da minha dissertação desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora para a obtenção do título de mestra. O produto é resultado de um dos subprojetos do macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica* desenvolvido no PPGEM e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática/NIDEEM. Este macroprojeto compõe um programa de investigação interinstitucional denominado *Programa Linsiano de Investigação* em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955-2017).

Nos livros didáticos brasileiros não há menção a respeito do termo taxa, pois em nossa literatura escolar os autores preferem substituí-los por grandezas de mesma espécie – para razão – e grandezas de espécies diferentes (taxa). Outros tratam taxa como razões especiais e alguns nem mesmo produzem significado para estes objetos distintos, constituindo-os como um único objeto. Em nosso estudo, a noção de taxa - comparação de grandezas diferentes - será caracterizada como um objeto distinto de razão - comparação de grandezas de mesma.

Há situações cotidianas que demandam tomadas de decisões envolvendo um cálculo mental rápido de proporcionalidade. Nas salas de aula, temas, unidades programáticas, ideias e objetos como razão, taxa[1], proporção e grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais são ensinados, mas não se constituem em aprendizagem para os estudantes e, portanto, não passam a se constituir como um conhecimento produzido que eles possam utilizar na tomada de decisões.

A importância dessa pesquisa, além de ser parte de um projeto que visa propiciar o desenvolvimento do pensamento proporcional com estudantes de modo que seja o mais natural possível essa adequação entre o que foi visto em sala de aula e como será usado em sua vida pessoal, também visa proporcionar o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo.

Nossa pesquisa se insere na proposta do *design* de tarefas para a construção do pensamento proporcional, ficando sob nossa responsabilidade a investigação sobre a produção de tarefas sobre a noção de taxa. É importante evidenciar que esse produto educacional foi desenhado para ser parte do processo de significado dos estudantes e o educador deve utilizar

[1] o termo taxa não é utilizado nas escolas apesar de ser objeto de aprendizagem

essas tarefas juntamente com a metodologia fundamentada pelo Modelo dos Campos Semânticos.

O conjunto composto por 6 tarefas disponibilizado a seguir é uma parte de uma sequência de trabalhos cujo tema orientador é o pensamento proporcional. Portanto, é recomendado a utilização de todas as tarefas em ordem desde a noção de razão no 6° ano até as grandezas diretamente e inversamente proporcionais no 9° ano para que o processo de produção de significados na sala de aula possa contemplar os objetos centrais do pensamento proporcional durante os anos finais do ensino fundamental.

Taynara e Amarildo

2. CARACTERIZAÇÃO DO PENSAMENTO PROPORCIONAL E DA NOÇÃO DE TAXA

Neste capítulo, que se divide em duas seções, teremos, na primeira, as caracterizações do pensamento proporcional cuja importância do desenvolvimento será detalhada. Já na segunda seção, serão apresentadas as concepções da noção de taxa e será discorrido acerca de sua relevância.

2.1 O PENSAMENTO PROPORCIONAL

Nesta seção serão discutidas algumas concepções de pensamento proporcional e de raciocínio proporcional, destacando a importância do seu desenvolvimento nos estudantes. Além disso, serão ressaltadas características de um pensador proporcional e apontados indicadores de como identificar um não pensador proporcional.

A referência principal para a caracterização própria de pensamento proporcional do Programa de Investigação é a de Lins e Gimenez (2001) que, segundo eles,

> corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva.(LINS; GIMENEZ, 2001, p.52)

Sobre a característica de comparação, a pesquisadora Spinillo (1997, p.41) comenta que “O pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.” Já Lamon (2012), em seu livro, utiliza o termo raciocínio proporcional e então esclarece que

> raciocínio proporcional se refere à habilidade de escalonar para cima e para baixo em situações apropriadas e fornecer justificativas para afirmações feitas sobre relações em situações envolvendo proporções diretas simples e inversas. Em termos coloquiais, o raciocínio proporcional é raciocinar para cima e para baixo em situações nas quais existe uma relação invariante (constante) entre duas quantidades que estão ligadas e variando juntas. Como a palavra "raciocínio" implica, isso requer argumentação e explicação além do uso de símbolos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (LAMON, 2012, p.3)

A pesquisadora Lamon (2012) estima que, nos Estados Unidos, mais de 90% dos adultos não pensa proporcionalmente. A partir desse dado, nos questionamos se isso acontece também no Brasil. Ela diz que os pensadores proporcionais possuem algumas das seguintes características

> Possuem senso de covariação. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a

> variação de uma coincide com a variação da outra.
> Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.
> Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.
> Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam. (LAMON *apud* WALLE, 2009, p. 384)

A expressão "estratégias informais", utilizada por Lamon, é entendida pelo referencial teórico desta pesquisa como diferentes maneiras de operar que são internalizadas nos processos de produção de significados. Uma característica determinante, então, para saber se o sujeito está operando a partir do desenvolvimento de um tipo de pensamento que possamos caracterizá-lo como proporcional, é reconhecer se ele internalizou maneiras distintas de operar de forma a tomar decisões em variados contextos.

Esta pesquisa é influenciada fortemente pela caracterização dada por Lamon (2012) e por pensadores proporcionais, em que o pensar proporcionalmente atravessa a ideia de mecanização dos procedimentos e conduz para que os estudantes entendam os procedimentos. Sobre isso, Walle (2009) comenta ainda que

> as pesquisas de Lamon e de outros indicam que o ensino pode ter um efeito positivo, especialmente se as regras e algoritmos formais para o cálculo de frações, para comparar razões e para resolver proporções forem retardadas [para o momento certo]. (WALLE, 2009, p.384)

O que Walle (2009) esclarece com esse comentário é que o ensino do raciocínio proporcional ocasiona um efeito positivo nos estudantes, principalmente se a inserção deles nos métodos, nos algoritmos e nas mecanizações for mais tardia. Este fato é explicado por Walle (2009) quando ele diz

> O uso prematuro de regras encoraja os estudantes a aplicar regras sem pensar, e desse modo, a habilidade de raciocinar proporcionalmente geralmente não se desenvolve. (WALLE, 2009, p.384)

Apesar da pesquisa ser influenciada também pelas ideias de Lamon e Walle, faz-se necessário ressaltar que a principal discordância entre a concepção utilizada nesta pesquisa e a desses pesquisadores é que ambos utilizam, muitas vezes, fração e razão como sinônimos. Já para os investigadores do Programa de Investigação Linsiano, um dos modos de pensar pode ser feito relacionando fração com razão ou fração com taxa, mas não é a única forma. Para corroborar a distinção entre razão e fração Norton (2005)

> comenta que no contexto de frações, o numerador representa uma parte e o denominador representa o todo, enquanto no caso da razão tanto o numerador quanto o denominador representam partes. Assim, embora o uso da notação de fração na resolução de alguns problemas

> de proporção possa parecer conveniente ao estabelecer um algoritmo de multiplicação e divisão, é provável que confunda os alunos quanto ao que realmente é o todo. Nas frações, este é o denominador, enquanto na razão é a soma das duas partes. Como os livros didáticos de matemática geralmente não ensinam frações e raciocínio proporcional de forma integrada, e geralmente essa distinção não é feita explicitamente, a confusão dos alunos é compreensível. (NORTON, 2005, p.1)

Além disso, o trabalho está de acordo com quatro pontos que orientam "como ajudar as crianças a desenvolver processos de pensamento proporcionais." (Walle, 2009, p. 384). Os quatro pontos levantados por Walle (2009) são:

> 1. Forneça tarefas de razão e de proporção em uma grande variedade de contextos. Estes podem incluir situações envolvendo medidas, preços, contextos geométricos e outros elementos visuais e taxas de todos os tipos.
> 2. Encoraje a discussão e a experimentação em predizer e comparar razões. Ajude as crianças a distinguir entre comparações proporcionais e não proporcionais fornecendo exemplos de cada tipo e discutindo as diferenças.
> 3. Ajude as crianças a relacionar o raciocínio proporcional aos processos existentes. O conceito de frações unitárias é bem parecido ao de taxas unitárias. A pesquisa indica que o uso de uma taxa unitária para comparar razões e resolver proporções é a abordagem mais comum entre os estudantes no EM até quando os métodos de produto cruzado são formalmente ensinados.
> 4. Reconheça que os métodos simbólicos ou mecânicos, como o algoritmo do produto cruzado usado para resolver proporções não desenvolveram o raciocínio proporcional e não devem ser introduzidos até os alunos terem muitas experiências com métodos intuitivos e conceituais. (WALLE, 2009, p. 384-385)

A pesquisa então segue ao encontro dessas ideias expostas por Walle (2009). Isso porque, para o desenvolvimento de modos de produção de significados distintos, será necessário enunciar para o aprendiz contextos diversos de tarefas sobre taxa. Comparar taxas é também uma discussão fundamental para essa pesquisa e corrobora a concepção principal de Lins e Gimenez (2001). Ademais, conseguir perceber as situações proporcionais e não proporcionais é um fator significativo para o pensar proporcionalmente. A crítica à introdução dos métodos simbólicos ou mecânicos é devido ao fato de o sujeito reduzir sua criatividade e sua constituição de outros possíveis modos de produção de significados.

Uma das principais importâncias do desenvolvimento do pensamento proporcional está em suas implicações em outros modos de pensar do sujeito. A noção de razão e a noção de taxa são interseções com o pensamento aritmético, já a noção de proporção intersecciona tanto o pensamento aritmético quanto o algébrico, e as grandezas diretamente e inversamente variáveis encontram-se em uma das interseções com o pensamento algébrico. Sendo assim, cada uma dessas pesquisas converge para que o sujeito internalize novos modos de pensar.

Além disso, o pensamento proporcional é interdisciplinar, tendo aplicações em diferentes áreas do conhecimento, como física, química, biologia, tecnologia, geografia, história, artes, entre outras. Nessas áreas são encontrados objetos de conhecimento que podem ser analisados utilizando características desenvolvidas no processo das internalizações dos modos de pensar proporcionalmente, como, por exemplo, distinguir em biologia se o crescimento de uma população é proporcional ou não. Na próxima seção, discutiremos mais detalhadamente a interdisciplinaridade da noção de taxa.

As tomadas de decisão do sujeito frente a uma situação que envolve pensar proporcionalmente são valiosos modos de pensar internalizados durante o desenvolvimento desse pensamento. A pesquisa apresentada em Lamon (2012) esclarece cada uma das importâncias e aplicações comentadas nesta pesquisa anteriormente quando diz

> O raciocínio proporcional é um dos melhores indicadores de que um aluno alcançou entendimento dos números racionais e conceitos multiplicativos relacionados. Enquanto, por um lado, é uma medida do entendimento de ideias matemáticas elementares, é, por outro lado, parte do alicerce para conceitos mais complexos. Por essa razão, acho útil distinguir o raciocínio proporcional do conceito maior e mais abrangente de proporcionalidade. A proporcionalidade desempenha um papel em aplicações dominadas por princípios físicos — tópicos como vantagem mecânica, força, física das lentes, física do som, apenas para citar alguns. O raciocínio proporcional, conforme este livro usa o termo, é um pré-requisito para entender contextos e aplicações baseados em proporcionalidade. Claramente, muitas pessoas que não desenvolveram sua capacidade de raciocínio proporcional conseguiram compensar usando regras em cursos de álgebra, geometria e trigonometria, mas, no final, as regras são um pobre substituto para a compreensão. Elas estão despreparadas para aplicações reais em estatística, biologia, geografia ou física, onde princípios importantes e fundamentais dependem da proporcionalidade. Isso é lamentável em um momento em que um número cada vez maior de profissões depende diretamente da matemática ou usa modelagem matemática para aumentar a eficiência, salvar vidas, economizar dinheiro ou tomar decisões importantes. (Lamon, 2012, p.3)

A partir das discussões levantadas anteriormente, é imprescindível esclarecer como é o desenvolvimento do pensamento proporcional do sujeito. Segundo Walle (2009)

> O pensamento proporcional é desenvolvido por atividades que envolvem comparar e determinar a equivalência de razões e resolver proporções em uma ampla variedade de contextos e situações baseadas em resolução de problemas sem recurso a regras ou fórmulas. (WALLE, 2009, p.382)

Com todos os argumentos apresentados até aqui, é perceptível que o desenvolvimento do pensamento proporcional significa um desenvolvimento de um eixo do pensamento matemático importante, o qual, por sua vez, perpassa todos os outros – pensamento geométrico, estatístico, financeiro, entres outros – além das interseções pesquisadas em nossos trabalhos.

2.2 A NOÇÃO DE TAXA

Nesta seção será desenvolvida a noção de taxa no eixo do pensamento proporcional, desde a caracterização do que é essa noção até a problematização sobre o fato de ela não ser um caso de estudo nas salas de aula brasileiras. Isso porque, geralmente, ela é abordada como sendo simplesmente razão ou uma razão de duas espécies diferentes.

A noção de taxa é caracterizada pelo autor Walle (2009, p.383) em uma seção do capítulo 19 sob o subtítulo “Razões como taxas”. O autor a apresenta como “uma comparação das medidas de duas coisas ou quantidades diferentes; a unidade de medida é diferente para cada valor.” Nota-se que, como é um livro traduzido, os estadunidenses utilizam o termo “quantidades”, enquanto no Brasil usamos a palavra “grandezas” para nos referirmos ao mesmo objeto. Além disso, a concepção de taxa da nossa pesquisa não é um caso particular de razão, visto que essa noção é amplamente discutida em outras áreas do conhecimento, como física, química, geografia, biologia, entre outras. Diversos objetos de estudos que implicam ideias importantes, tanto no meio acadêmico, quanto nas vivências do sujeito, são exemplos de taxa: velocidade média, densidade de um composto, densidade demográfica, entre outros.

Outra noção importante para a compreensão deste trabalho é a de taxa unitária, que é um dos modos de operar mais utilizados pelos sujeitos em problemas que envolvem a noção de taxa. Sobre ela, Post *at el* (1995) comenta

> O método da taxa unitária pode ser usado com eficácia e é uma maneira natural de lidar com todos os problemas de comparação numérica. (POST *at el*, 1995, p.96-97)

Assim, a noção de taxa unitária pode ser entendida como uma taxa em que uma das grandezas relacionadas tem o valor absoluto igual a 1. Suponha-se, por exemplo, que a taxa de candidatos por vaga no programa de Doutorado em Educação Matemática seja de 12 candidatos para cada 1 vaga. Tal relação pode ser representada como 12 candidatos/vaga.) Essa noção tem um apelo intuitivo segundo Post *at el* (1995)

> A abordagem com maior apelo intuitivo é, sem dúvida, a “quanto (quantos) por um”, ou método da taxa unitária. Tem apelo intuitivo porque as crianças já compraram uma ou muitas coisas e tiveram

> ocasião de calcular preços unitários e outras taxas unitárias. (POST *at el*, 1995, p.93)

A opção por apresentar tarefas que possam desenvolver a produção de significados em relação à taxa unitária é fundamental já que se trata de um modo de pensar intuitivo. Adicionalmente, a relevância de aproveitar desses modos "naturais" é justificada por Ginsburg (*apud* Post *at el*, 1997, p.97) quando ele diz que "nós, como educadores em matemática, deveríamos tentar explorar a matemática que as crianças já conhecem, e tirar proveito dos processos mentais que brotam naturalmente, inclusive ampliando-os." E é esse o objetivo dessa pesquisa: partir de um processo de produção de significados já internalizados e agregar a ele novos modos de pensar.

A distinção entre a noção de razão e a noção de taxa é que, quando pensamos nas grandezas envolvidas sendo conjuntos matemáticos, uma razão relaciona duas grandezas do mesmo conjunto; já uma taxa relaciona duas grandezas de conjuntos disjuntos. Apesar disso, a semelhança entre essas duas noções está no modo de operar.

Para os pesquisadores estadunidenses Thomas R. Post, Merlyn J. Behr e Richard Lesh, há diferença entre razão e taxa, ocorrendo da seguinte maneira:

> Concorda-se em geral que as razões comparam quantidades ou medidas da mesma espécie, isto é, 4 dólares/6 dólares = 4/6, ao passo que as taxas comparam quantidades ou medidas de espécies diferentes, isto é, 4 milhas em 3 horas = 4 milhas/3 horas. As razões podem ser expressas numericamente sem rótulos; as taxas devem conservar seus rótulos para poderem ser interpretadas. Ambas são manipuladas da mesma maneira. (Post et al, 1995, p. 97)

A noção de taxa é abordada nos livros didáticos brasileiros não como um objeto diferente de razão, mas nomeada, em alguns deles, como "Razão de espécies diferentes" ou "Razões especiais". Apesar de não trazer essa diferença na abordagem, existem diversos objetos que são taxas que fundamentam pensamentos, como o pensamento físico, o biológico, o químico, o geográfico e o pensamento artístico.

Além disso, a necessidade da noção de taxa no desenvolvimento do pensamento proporcional pode ser exemplificada com uma tomada de decisão no supermercado. Ao optar, por exemplo, por um iogurte de 180g por um preço X ou pelo mesmo iogurte, agora de 360g por um preço 1,8X, o consumidor mobiliza seu conhecimento sobre taxa, visto que pode operar com "o preço do iogurte por gramas de iogurte", a partir de um parâmetro que se adeque às suas necessidades.

É de fundamental importância caracterizar a noção de taxa e discuti-la nas salas de aula brasileiras, a fim de que seja desenvolvido nos estudantes o pensamento proporcional em contextos diversos. Assim haverá a construção de significados para objetos que perpassam outros pensamentos, como velocidade média no pensamento físico, densidade demográfica no pensamento geográfico e densidade de um material no pensamento químico.

3. TAREFAS

Nesta seção será detalhado o desenvolvimento das sequências de tarefas e explicitado como o produto educacional que foi desenvolvido nesta pesquisa diverge dos livros didáticos que, em sua maioria, contém definições matemáticas e exercícios descontextualizados.

As tarefas sobre a noção de razão, tema de nosso estudo, foram elaboradas pensando em aplicá-las numa turma do 7º ano do Ensino Fundamental II, com o objetivo de dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento proporcional no ensino fundamental, iniciado com a pesquisa de Fernandes (2024) e Cruz (2024), em nosso grupo de pesquisa. Posteriormente ao nosso trabalho, seguem as pesquisas com as investigações de Schincariol (2025) – sobre a noção de taxa – seguida de Pedrosa (2025) sobre a noção de proporção, e de Santos (2025) – sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Nestas pesquisas, nossa proposta diverge daquelas que constam nos livros didáticos, que iniciam a discussão do tema razão a partir de um exemplo introdutório seguido de uma definição matemática do tipo:

> Dados dois números x e y, com y diferente de zero, a **razão** de x para y pode ser indicada pela fração x/y ou pelo quociente x: y. Nesta razão, lê-se: x está para y. (BALESTRI; NETO, 2012, p. 178)

A partir dessa definição, os autores de livros didáticos apresentam uma lista variada de exercícios para treino e fixação das ideias.

Em sentido contrário a essa perspectiva de ensino, nossa proposta parte de um conjunto de tarefas que associadas pretendem auxiliar o processo de produção de significados para razão, a partir da observação e reflexão dos alunos para a relação existente entre as grandezas envolvidas para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

O conjunto de tarefas foi desenvolvido em nosso grupo de pesquisa sob a coordenação do Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva e testada internamente quanto às suas potencialidades antes de serem levadas para as entrevistas com estudantes.

3.1 TAREFA 1

Metodologicamente, as tarefas foram produzidas para serem aplicadas com objetivos específicos. As primeiras foram denominadas de tarefas disparadoras, no sentido de que, com elas, inicia-se o processo de produção de significados dos alunos para o que eles constituirão, no final, como o objeto razão.

Em nossa pesquisa, a produção de tarefas foi feita de modo a dar continuidade ao estudo anterior de Cruz (2024) sobre a noção de razão. Por esse motivo, a tarefa disparadora que inicia o processo de produção de significados dos alunos para a noção de taxa possui como objetivo que o estudante compare dois problemas buscando identificar o que há de diferente entre seus enunciados:

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.
a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes, existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?
Pergunta-se: se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Resolução: No primeiro deles temos uma relação parte/todo, isto é, médicos de uma cidade/ habitantes da mesma cidade e dentistas de uma cidade/ habitantes da mesma cidade. No segundo caso, não temos nem relação parte/todo, nem parte/parte. As grandezas são o número de habitantes e o número de linhas telefônicas.

Sugestão: A finalidade desta tarefa é fazê-los observar um detalhe muito importante em relação às grandezas envolvidas nos dois problemas. Durante a aplicação da Tarefa 1 recomendamos que o professor permita um tempo de discussão entre eles para que assim eles produzam significados para a pergunta. Caso os sujeitos não concluam a distinção entre os problemas, será importante a intervenção do educador evidenciando essa característica que distingue razão e taxa.

3.2 TAREFA 2

A segunda tarefa tem como objetivo entrar na discussão propriamente dita sobre taxas e a análise que ela proporciona:

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	Número de Vagas	Número de Candidatos
Corrida	150	600
Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Vôlei Feminino	300	4800

a) Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.
b) Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

Resolução: A expectativa do(a) professor(a) é que os alunos apresentem a seguinte resolução com as respectivas análises do que os números informam:

Corrida: $\frac{600}{150} = \frac{600:150}{150:150} = \frac{4}{1}$ ou (4:1)

Isto quer dizer que há 4 candidatos para cada vaga para a modalidade corrida.

Futebol Feminino: $\frac{1200}{50} = \frac{1200:50}{50:50} = \frac{24}{1}$ ou (24:1)

Isto quer dizer que há 24 candidatas para cada vaga para a modalidade futebol feminino.

Futebol Masculino: $\frac{150}{30} = \frac{150:30}{30:30} = \frac{5}{1}$ ou (5:1)

Isto quer dizer que há 4 candidatos para cada vaga para a modalidade futebol masculino.

Ginástica Olímpica: $\frac{52}{26} = \frac{52:26}{26:26} = \frac{2}{1}$ ou (2:1)

Isto quer dizer que há 2 candidatos para cada vaga para a modalidade ginástica olímpica.

Handebol: $\frac{25}{50} = \frac{25:50}{50:50} = \frac{0,5}{1}$ ou (0,5:1)

Isto quer dizer que há menos candidatos por vaga para a modalidade Handebol. Ou seja, todos os candidatos inscritos terão sua vaga.

Natação: $\frac{360}{120} = \frac{360:120}{120:120} = \frac{3}{1}$ ou (3:1)

Isto quer dizer que há 3 candidatos por vaga para a modalidade natação.

Xadrez: $\frac{30}{120} = \frac{30:120}{120:120} = \frac{0,25}{1}$ ou (0,25:1)

Isto quer dizer que há menos candidatos por vaga para a modalidade xadrez. Ou seja, todos os candidatos inscritos terão sua vaga.

Volei Feminino: $\frac{4800}{300} = \frac{4800:300}{300:300} = \frac{16}{1}$ ou (16:1)

Isto quer dizer que há 16 candidatas para cada vaga para a modalidade futebol feminino.

E na letra (b) esperamos que eles concluam que:
A modalidade com mais concorrência é a de futebol feminino e a modalidade com menos concorrência é a de xadrez.

Sugestão: Esclarecer que é necessário evidenciar os rótulos candidatos/vagas em cada modalidade para que seja possível a compreensão do resultado. A letra (b) permite discussão se será mesmo xadrez a menos concorrida já que todos os candidatos participarão.

3.3 TAREFA 3

A Tarefa 3 é semelhante à antecedente, diferenciando-se um pouco o modo de operar. Nessa tarefa os sujeitos operam com números expressivamente maiores em relação aos anteriores.

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha, que tem 140.000 habitantes, tem 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

Resolução: O professor espera que eles irão operar como na tarefa anterior e concluirão que

$\frac{240000}{60000} = \frac{240000 : 60000}{60000 : 60000} = \frac{4}{1}$, assim na primeira cidade, a cada 4 pessoas, 1 utiliza a linha telefônica.

$\frac{140000}{20000} = \frac{140000 : 20000}{20000 : 20000} = \frac{7}{1}$, assim na segunda cidade, a cada 7 pessoas, 1 utiliza a linha telefônica.

Sugestão: Levantar questões como: qual cidade têm mais pessoas sem linhas telefônicas? Podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento proporcional no sujeito.

3.4 TAREFA 4

A tarefa a seguir possibilita um modo de operar distinto dos já usados anteriormente. Isso porque é necessário constituir um caminho diferente para resolver.

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Resolução: Para resolver a questão, o aluno pensa ao contrário do que fazia anteriormente.

A taxa unitária é 8 candidatos por 1 vaga. Se são, 160 candidatos, ou seja, 8x20 candidatos, é porque são 1x20 vagas. Portanto, são 20 vagas oferecidas.

Sugestão: Permitir um tempo ao estudante para que haja a compreensão na inversão exigida nessa tarefa. Não trazer o algoritmo da regra de três para que ele encontre seu modo de operar.

3.5 TAREFA 5

A próxima tarefa é constituinte de um modo de operar diferente da Tarefa 3 porque não é possível entrar uma taxa unitária sem que uma das grandezas seja aproximada de um valor inteiro.

Tarefa 5

A população de Juiz de Fora em 2022 é de, aproximadamente, 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2 . O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Resolução: Para resolver, o aluno deve simplificar os habitantes pela área ocupada:

$$\frac{540.000}{1.400} = \frac{540.000 \div 1400}{1.400 \div 1.400} \approx \frac{385,7\ hab}{1\ km^2}.$$

Como são habitantes, devemos arredondar pois falamos de pessoas. Logo são aproximadamente 386 habitantes a cada 1 quilômetro quadrado.

Sugestão: O objetivo dessa questão é permitir que o aluno observe a densidade demográfica de Juiz de Fora e ela tem um potencial de gerar discussões sobre esse tema.

3.6 TAREFA 6

Finalmente, o objetivo Tarefa 6 é apresentar ao sujeito a noção de taxa como entendemos em nosso trabalho.

Tarefa 6

Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as seguintes afirmações

1. ( ) Podemos definir Taxa da seguinte maneira:

Uma taxa é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) diferentes. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{número\ de\ habitantes}{número\ de\ linhas\ telefônicas}.$$

2. ( ) A definição de taxa é mesma da definição de razão;
3. ( ) No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas".
4. ( ) O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.

Resolução: Assim, seguindo o objetivo da tarefa, em conjunto com a turma, o que queremos concluir é:

1º) A noção de taxa é diferente da noção de razão;

2º) Como no cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, elas devem ser analisadas com as unidades. E dizer que um pesquisador expressou esta situação da seguinte maneira: "As razões podem ser expressas numericamente sem rótulos; as taxas devem conservar seus rótulos para poderem ser interpretadas".

3º) O que há de comum entre razão e taxa: ambas são manipuladas da mesma maneira.

Sugestão: O professor deve trazer mais tarefas em que a noção de taxa esteja envolvida para ele verificar o que seus estudantes internalizaram.

Para quem optar por suas as tarefas mas preferir um outro formato para o uso em sala de aula pode utilizar o arquivo Noção de Taxa - Tarefas-PPGEM-UFJF. Assim, basta seguir o caminho Arquivo > Fazer uma cópia > Renomear, então você terá acesso a uma cópia do arquivo editável para sua sala de aula.

4. SUGESTÕES DE LEITURA

Esta pesquisa teve como objetivo a produção de um conjunto de tarefas para o desenvolvimento do pensamento proporcional em específico sobre a noção de taxa apoiando-se no Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico-epistemológico e metodológico.

Sendo assim as sugestões de leitura para as(os) professoras(os) são

- **“Teaching Fractions And Ratios For Understanding”** de Susan Lamon, 2012.
- **“Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula.” de Jonh A. Van de Walle, 2009.
- **“O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática.” de Amarildo Melchiades da Silva, 2022.
- **“Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história.” organizado por Claudia Laus Angelo, 2012. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1AigbhJrZ9RAKINJg31420Nqz02NwxWHC/view. Acesso em 09 de março de 2025.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, José R. J. **A conquista matemática: 7º ano ensino fundamental anos finais.** São Paulo: FDT, 2022.

LAMON, Susan. J. **Teaching Fractions And Ratios For Understanding.** 3ed. Nova Iorque: Routledge, 2012.

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

POST, T. R., BEHER, M. J. e LESH, R. **A Proporcionalidade o Desenvolvimento de Noções Pré-Álgebra**. Coxford, Arthur F. e Schulte, Albert P. (org.). As Idéias da Álgebra, 89-103, Atual Ed., São Paulo, 1995.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2022.

SILVA, Amarildo M.; BASTOS, Ronaldo R.; OLIVEIRA, Rosana. **Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica.** In: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2024. p. 92-109.

WALLE, John. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE

Apêndice 1: Conjunto de Tarefas sobre a Noção de Taxa
Ou acesse: Noção de Taxa - Tarefas-PPGEM-UFJF.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM

Tarefa 1

Considere os dois problemas abaixo:

1º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 12 dentistas e 48 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação do número de habitantes por dentista na cidade?
b) Qual é a relação do número de habitantes por médico na cidade?

2º Problema: Em uma cidade de 24.000 habitantes existem 6 mil linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Qual é a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares em uso na cidade?

Pergunta-se: Se considerarmos as grandezas envolvidas nos problemas, no que eles diferem?

Tarefa 2

Um clube que prepara atletas para competições abriu vagas e publicou no seu site uma tabela contendo o número de vagas disponíveis e o número total de candidatos inscritos para a seleção de ingresso nas diferentes modalidades, naquele ano:

Modalidade esportiva	**Número de Vagas**	**Número de Candidatos**
Atletismo	150	600
Futebol Feminino	50	1200
Futebol Masculino	30	150
Ginástica Olímpica	26	52
Handebol	50	25
Natação	120	360
Xadrez	120	30
Vôlei Feminino	300	4800

a) Calcule em cada atividade, qual é a relação entre o número de candidatos e o número de vagas. Em seguida, explique o que os valores encontrados querem dizer sobre a comparação candidatos por vaga.

b) Qual a modalidade que tem mais concorrência para ingressar? E qual tem menos?

Tarefa 3

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 60.000 linhas de telefones celulares sendo utilizadas. Já na cidade vizinha que tem 140.000 habitantes, tem 20.000 linhas telefônicas em uso. Qual é, em cada cidade, a relação entre o número de habitantes e o número de linhas celulares?

Tarefa 4

Para a Escola de Música se inscreveram para as vagas 160 candidatos, sendo informado pela direção que a concorrência era de 1 vaga para cada 8 candidatos inscritos. Pergunta-se: quantas vagas foram oferecidas pela escola?

Tarefa 5

Em 2022, a população de Juiz de Fora é de, aproximadamente, 540.000 habitantes e a área que a cidade ocupa é de 1.400 km^2. O que informa a comparação entre o número de habitantes e a área da cidade?

Tarefa 6

Marque **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as seguintes afirmações

1. (   ) Podemos definir **Taxa** da seguinte maneira:

Uma **taxa** é a comparação expressa pelo quociente (divisão) entre duas grandezas (quantidades, medidas) **diferentes**. Por exemplo, quando comparamos

$$\frac{número\ de\ habitantes\ da\ cidade}{área\ ocupada\ pela\ cidade}.$$

2. ( ) A definição de taxa é mesma da definição de razão;

3. (   ) No cálculo da taxa as unidades das grandezas são diferentes, por este motivo elas devem ser analisadas com as unidades e na resposta dos problemas as taxas devem conservar suas unidades para poderem ser interpretadas".

4. ( ) O que há de comum entre razão e taxa é que ambas são resolvidas da mesma maneira.