UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Alícia Gomes Borges Pinto

Expansão em derivadas da ação efetiva de 1-loop: Dissertação de Mestrado

Juiz de Fora
2025

Alícia Gomes Borges Pinto

Expansão em derivadas da ação efetiva de 1-loop: Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Borges, Alícia G.
Expansão em derivadas da ação efetiva de 1-loop : Dissertação de Mestrado / Alícia Gomes Borges Pinto. – 2025.
34 f.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Física - Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Física, 2025.

1. Ação Efetiva. 2. Campos escalares. 3. Expansão em derivadas. 4. Espaço Curvo I. Shapiro, Ilya L.

Alícia Gomes Borges Pinto

Expansão em derivadas da ação efetiva de 1-loop

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 28 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dr. Wagno Cesar e Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 09/07/2025.

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro**, **Membro**, em 30/07/2025, às 07:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto**, **Professor(a)**, em 30/07/2025, às 10:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito**, **Usuário Externo**, em 30/07/2025, às 10:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva**, **Usuário Externo**, em 30/07/2025, às 10:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gastao Inacio Krein**, **Usuário Externo**, em 30/07/2025, às 10:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2491465** e o código CRC **0306FBA8**.

AGRADECIMENTOS

- A minha mãe, Ana Gomes, e irmã, Letícia Gomes, pelo incentivo e apoio incondicional.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Ilya L. Shapiro, pelo problema sugerido para resolver, orientação e discussões científicas.
- Aos colegas do grupo de Teoria Quântica de Campos e também aos das demais áreas, pelas contribuições por meio de debates e pela troca de conhecimentos.
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, pela formação sólida e pelo ensino de excelência ao longo do curso.
- A UFJF, pelo apoio ao meu projeto de mestrado.

RESUMO

Nesta dissertação, consideramos a expansão em derivadas da ação efetiva até segunda ordem de uma teoria com dois campos escalares reais interagentes, em espaço-tempo curvo. Adota-se uma abordagem funcional para a determinação da ação efetiva em espaço plano e, utilizando a representação local de momentos, é possível generalizá-la para espaço curvo. Inicialmente, determina-se o coeficiente do termo cinético no caso de um único campo escalar, incluindo correções até a primeira ordem na curvatura. Em seguida, o problema com dois campos é tratado por meio da dupla-diagonalização, o que permite a diagonalização da matriz hessiana e a redução ao caso de um único escalar. Além disso, considera-se o caso em que há forte hierarquia de massas, demonstrando-se que tanto o potencial efetivo renormalizado quanto os coeficientes dos termos com derivadas exibem desacoplamento quântico, confirmando a validade da teoria no regime de baixas energias.

Os resultados originais desta dissertação foram publicados no artigo *"Derivative expansion in a two-scalar field theory"*, de Alícia G. Borges e Ilya L. Shapiro, na revista *Physical Review D* no dia 25 de junho de 2025 (DOI: 10.1103/rynr-2znv). Esses resultados também foram apresentados por Alícia G. Borges nos eventos científicos "Verão Quântico 2025" (PPG-Cosmo, UFES), "As Astrocientistas: III Encontro Brasileiro de Meninas e Mulheres da Astrofísica, Gravitação e Cosmologia" (PPG-Cosmo, UFES; CBPF) e "Escola de Cosmologia e Gravitação" (CBPF).

Palavras-chave: Teoria de campos; campos escalares; ação efetiva; expansão em derivadas.

ABSTRACT

In this dissertation, the derivative expansion of the effective action is analyzed in a field theory with two interacting real scalar fields in curved spacetime. A functional approach is adopted to determine the effective action in flat space, and using the local momentum representation, it is possible to generalize the result to curved space. Initially, the coefficient of the kinetic term is computed in the case of a single scalar field, including corrections up to first order in curvature. Subsequently, the two-field problem is treated through a double diagonalization procedure, which allows for the diagonalization of the Hessian matrix and the reduction to the case of a single scalar with an effective mass. Furthermore, the case with a mass hierarchy is considered, showing that both the renormalized effective potential and the coefficients of the derivative terms exhibit quantum decoupling, confirming the validity of the effective theory in the low-energy regime.

The original results of this dissertation were published in the article *"Derivative expansion in a two-scalar field theory"* by Alícia G. Borges and Ilya L. Shapiro, in the journal *Physical Review D* on June 25, 2025 (DOI: 10.1103/rynr-2znv). These results were also presented by Alícia G. Borges at the scientific events “Quantum Summer 2025” (PPG-Cosmo, UFES), “As Astrocientistas: III Brazilian Meeting of Girls and Women in Astrophysics, Gravitation and Cosmology” (PPG-Cosmo, UFES; CBPF), and “School of Cosmology and Gravitation” (CBPF).

Keywords: Field theory; scalar field; effective action; derivative expansion.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 7
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS 9
2.1 AÇÃO EFETIVA 9
2.2 EXPANSÃO EM LOOPS 11
2.3 REPRESENTAÇÃO LOCAL DE MOMENTO 13
2.3.1 COORDENADAS NORMAIS DE RIEMANN 13
2.3.2 REPRESENTAÇÃO LOCAL DE MOMENTO 14
3 EXPANSÃO EM DERIVADAS PARA UMA TEORIA COM UM CAMPO ESCALAR REAL 16
3.1 AÇÃO EFETIVA PARA UM CAMPO ESCALAR REAL EM ESPAÇO PLANO 16
3.2 AÇÃO EFETIVA PARA UM ÚNICO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇO CURVO 18
4 AÇÃO EFETIVA PARA UMA TEORIA COM DOIS CAMPOS ESCALARES REAIS 21
4.1 DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ HESSIANA 21
4.2 CÁLCULO DIRETO 23
4.3 DUPLA DIAGONALIZAÇÃO 26
5 DESACOPLAMENTO 28
6 CONCLUSÃO 31
REFERÊNCIAS 33

1 INTRODUÇÃO

Modelos cosmológicos baseados em campos escalares são amplamente utilizados na descrição de diferentes fases da evolução do universo, em especial o período inflacionário. Entre esses modelos, podemos citar aqueles que envolvem múltiplos campos escalares reais com diferentes massas, como ocorre na chamada inflação assistida (ver [1, 2]).

A inflação assistida é um modelo no qual vários campos contribuem juntos para impulsionar a fase de rápida expansão do universo primitivo, conhecida como inflação. Mesmo que cada campo, isoladamente, não seja capaz de gerar essa expansão, a ação combinada deles pode tornar o processo viável. Esse mecanismo permite que a inflação ocorra em situações onde, de outra forma, ela não seria possível, ampliando as possibilidades teóricas para descrever o início do universo.

Nesse cenário, a presença de uma hierarquia de massas pode alterar de forma significativa a dinâmica dos campos em épocas tardias, especialmente se efeitos quânticos forem considerados. Modelos com múltiplos campos escalares também aparecem em extensões do modelo padrão na física de partículas. Em ambos os casos, em princípio, há interesse em calcular correções quânticas usando métodos de teoria quântica de campos.

No contexto da teoria quântica de campos (TQC), é importante dispor de métodos que incorporem correções quânticas de maneira sistemática. Uma das melhores ferramentas que podem ser utilizadas para esse fim é a ação efetiva. A expansão em derivadas da ação efetiva, amplamente utilizada em diversos ramos da TQC (e.g. [3, 4]), por sua vez, permite a organização dessas correções em uma série, sendo os primeiros termos, o potencial efetivo e os termos cinéticos, os mais relevantes em teorias efetivas de baixa energia.

Embora essa técnica esteja bem estabelecida em espaço plano, sua generalização em espaço-tempo curvo ainda apresenta desafios, em especial no caso de múltiplos campos com massas distintas. A presença da curvatura modifica a estrutura tanto do potencial efetivo quanto dos termos com derivadas, exigindo o uso de outros métodos a fim de obter resultados consistentes. Dentre esses métodos, destaca-se a representação local de momento e as coordenadas normais de Riemann, que viabilizam o cálculo das correções decorrentes da curvatura. Além disso, existe a questão do desacoplamento, o processo pelo qual campos pesados deixam de influenciar a dinâmica em escalas de baixa energia. Esse fenômeno pode ser estudado tanto em espaço plano quanto em espaço curvo.

Nesta dissertação, investigamos a estrutura da ação efetiva para o caso de uma teoria com dois campos escalares reais interagentes, em espaço-tempo curvo. Inicialmente, analisa-se o caso de um único campo escalar, verificando resultados conhecidos na literatura [5, 6] e incorporando novas correções lineares em curvatura. Em seguida, será tratado o caso com dois campos escalares com hierarquia de massas. Para este fim, utilizamos um procedimento de diagonalização no espaço de campos quânticos, usando o método

de campo de fundo e introduzindo um campo auxiliar, reduzindo o problema ao caso de massa única.

Usando a nossa expansão em derivadas, exploramos também o comportamento do sistema no regime infravermelho (IR) para o caso com hierarquia de massas. No ramo cosmológico, isso implica que, a partir de certo ponto da evolução cosmológica, apenas o campo mais leve possui contribuição significativa para a ação efetiva. Essa observação reforça a utilidade do formalismo quântico na descrição efetiva de modelos inflacionários e abre caminho para aplicações mais amplas de teorias multiescalares em cosmologia.

Esta dissertação está organizada em capítulos que acompanham o desenvolvimento das ideias apresentadas. No Capítulo 2, são reunidos os elementos teóricos necessários para os cálculos, como a definição da ação efetiva, a expansão em loops e a formulação em termos de momento local, além de uma breve introdução às coordenadas normais de Riemann. O Capítulo 3 é dedicado ao caso de um único campo escalar real, com a aplicação da expansão em derivadas no espaço plano e também em espaço-tempo curvo. Por fim, essa análise é estendida para dois campos escalares, com atenção à estrutura da matriz hessiana, aos métodos de diagonalização e à discussão sobre o desacoplamento.

Ao longo deste trabalho, adotamos a assinatura de métrica $(+,-,-,-)$ e assumimos a rotação de Wick quando necessário, sem comentários adicionais.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, revisitamos alguns fundamentos básicos da teoria quântica de campos (TQC), essenciais para a compreensão do tema principal desta dissertação. Para isso, nos apoiaremos nas referências [7], [8] e [9]. Daremos destaque à ação efetiva e à sua formulação perturbativa em loops, que desempenha um papel fundamental tanto na análise das correções quânticas quanto na identificação das divergências. Abordaremos também os fundamentos da representação local de momento e das coordenadas normais de Riemann [10], [11], necessários para a generalização dos resultados obtidos em espaço plano para o caso de espaço-tempo curvo.

2.1 AÇÃO EFETIVA

No contexto da TQC, podemos considerar que um dos objetos fundamentais de estudo são as funções de Green dos operadores de campo de Heisenberg,

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \langle 0|T\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\ldots\hat{\varphi}(x_n)|0\rangle, \qquad \text{onde} \quad n = 1, 2\ldots. \tag{2.1}$$

Aqui T denota o ordenamento cronológico que determina que os operadores de campo devem ser organizados da esquerda para a direita, de modo que seus argumentos apareçam em ordem decrescente em relação ao tempo.

Podemos definir ainda o funcional gerador de funções de Green $Z[J]$,

$$Z[J] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \;\ldots\; dx_n \, G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, J(x_1) J(x_2) \;\ldots\; J(x_n). \tag{2.2}$$

Onde J é um campo escalar comutativo chamado fonte externa. A partir da equação (2.2), temos que

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta i J(x_1)\delta i J(x_2)\ldots\delta i J(x_n)}\bigg|_{J=0} \;=\; G_n(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{2.3}$$

Considerando o funcional gerador de funções de Green $Z[J]$, pode-se definir a função de Green dependente da fonte J através de

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n|J) \;=\; \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta i J(x_1)\delta i J(x_2)\ldots\delta i J(x_n)}. \tag{2.4}$$

Onde a função de Green usual pode ser obtida tomando $J = 0$ em (2.4). Podemos ainda usar a expressão para o funcional gerador de funções de Green com respeito a integral de caminho de Feynman,

$$Z[J] \;=\; \int \mathcal{D}\varphi \, e^{i\left(S[\varphi] + \int \mathrm{d}^4x \, J(x)\varphi(x)\right)}. \tag{2.5}$$

Introduzindo a função de Green conectada, $G_n^c(x_1, x_2, ..., x_n|J)$, onde

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n|J) = \sum \prod_{\{k\}}^{\{n\}} G_k^c(x_1, x_2, \ldots, x_k|J) + G_n^c(x_1, x_2, \ldots, x_n|J). \tag{2.6}$$

Em concordância com (2.4), nota-se que todas as funções de Green são simétricas, e consequentemente, as funções de Green conectadas também.

Introduzimos agora o funcional gerador de funções de Green conectadas $W[J]$

$$G_n^c(x_1, x_2, \ldots, x_n|J) \;=\; \frac{\delta^n W[J]}{\delta i J(x_1)\delta i(x_2)\ldots\delta i J(x_n)}. \tag{2.7}$$

É possível mostrar (como pode ser visto em [7, 8]), que

$$Z[J] \;=\; e^{iW[J]}. \tag{2.8}$$

Consideramos agora a relação

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]}\,\frac{\delta Z[J]}{\delta i J(x)} = \frac{\langle 0|\,T\hat{\varphi}(x)\exp\left(i\int dx\,\hat{\varphi}(x)J(x)\right)|0\rangle}{\langle 0|\,T\exp\left(i\int dx\,\hat{\varphi}(x)J(x)\right)|0\rangle}. \tag{2.9}$$

O campo escalar $\varphi(x)$ é chamado de *campo médio*, e depende da fonte externa $J(x)$, sendo definido por

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta i J(x)}. \tag{2.10}$$

Se assumirmos que essa equação pode ser invertida, então $J(x) = J(x|\varphi)$. Podemos considerar o campo médio como argumento funcional independente, e a fonte $J(x)$ como funcional de $\varphi(x)$.

Finalmente, introduzimos o funcional gerador de vértices $\Gamma[\varphi]$, definido por

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int dx\,\varphi(x)J(x). \tag{2.11}$$

Esse funcional satisfaz

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \tag{2.12}$$

Portanto, $\Gamma[\varphi]$ é também um funcional de $\varphi(x)$, uma vez que $J(x)$ depende funcionalmente de $\varphi(x)$. A passagem de $W[J]$ para $\Gamma[\varphi]$ corresponde à transformada de Legendre funcional.

Dito isso, vamos supor uma ação arbitrária $S[\varphi]$, de uma teoria clássica de campo, onde haja interação do campo φ com a fonte

$$S_J[\varphi] \;=\; S[\varphi] \;+\; \int dx\,\varphi(x)J(x). \tag{2.13}$$

Sua equação clássica de movimento será

$$\frac{\delta S_J[\varphi]}{\delta\varphi} \;=\; -J(x). \tag{2.14}$$

Comparando equações (2.14) e (2.12), podemos observar que $\Gamma[\varphi]$, em TQC, desempenha o mesmo papel que a ação $S[\varphi]$ desempenha na teoria clássica e, por esse motivo, o funcional $\Gamma[\varphi]$ recebe o nome de ação efetiva.

2.2 EXPANSÃO EM LOOPS

Podemos reescrever a equação (2.8) usando (2.5) e obter a relação

$$\exp\frac{iW[J]}{\hbar} \;=\; \int \mathcal{D}\varphi \,\exp\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] \,+\, \int dx\,\varphi(x)J(x)\right). \tag{2.15}$$

Até então assumimos o sistema de unidades naturais, onde $\hbar = 1$. Porém, podemos notar que a expressão dentro da exponencial é adimensional, enquanto $S[\varphi]$, $W[J]$ e a integral na equação (2.15) possuem a dimensão da ação, e por isso é necessário a presença da constante de Planck $\hbar$.

Utilizando as equações (2.10) e (2.11), e efetuando a substituição $\varphi \to \varphi + \phi$, obtemos

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\Gamma[\varphi]\right) \;=\; \int \mathcal{D}\phi \,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,S[\varphi \,+\, \phi] \,-\, \int dx\,\phi(x)\,\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right). \tag{2.16}$$

Expandindo o funcional $S[\varphi + \phi]$ em uma série de Taylor em torno do campo $\phi(x)$ obtemos

$$S[\varphi \,+\, \phi] \;=\; S[\varphi] \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,S_n[\varphi]\phi^n, \tag{2.17}$$

onde

$$S_n[\varphi]\phi^n \;=\; \int dx_1 \ldots dx_n\, S(x_1,\ldots,x_n|\phi)\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)$$

e

$$S_n(x_1,...,x_n|\varphi) \;=\; \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)}. \tag{2.18}$$

Podemos simplificar ainda mais as expressões adotando as novas notações,

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = \Gamma_1[\varphi] \quad \text{e} \quad \int dx\,\phi(x)\,\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \;=\; \phi\Gamma_1[\varphi]. \tag{2.19}$$

Fazendo a substituição $\phi \,=\, \hbar^{1/2}\phi$, chegamos à

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Big(\Gamma[\varphi] - S[\varphi]\Big)\right) = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\Bigg\{ i\Bigg[\frac{1}{2}\,S_2[\varphi]\,\phi^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!}\,S_n[\varphi]\,\phi^n \\ - \hbar^{-1/2}\,\phi\,\Big(\Gamma_1[\varphi] - S_1[\varphi]\Big)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Definindo a combinação $\Gamma[\varphi] \,-\, S[\varphi] \,\equiv\, \bar{\Gamma}[\varphi]$, onde o funcional $\bar{\Gamma}[\varphi]$ é uma série de potências em $\hbar$, como

$$\bar{\Gamma}[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\varphi]. \tag{2.21}$$

Aqui $\bar{\Gamma}$ representa as contribuições quânticas à ação clássica. Substituindo na Eq. (2.20)

$$\begin{aligned}\exp\left(i\sum_{n=1}^{\infty}\hbar^{n-1}\bar{\Gamma}^{(n)}[\varphi]\right) \;=\; \int \mathcal{D}\,\phi\,\exp\Bigg\{ i\Bigg[\frac{1}{2}\,S_2[\varphi]\,\phi^2 \,+\, \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!}\,S_n[\varphi]\,\phi^n \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\hbar^{n-\frac{1}{2}}\,\phi\,\bar{\Gamma}_1^{(n)}[\varphi]\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

A equação (2.22) permite construir uma série perturbativa em potências de $\hbar$. O funcional no lado direito da equação pode ser interpretado como a contribuição de uma teoria cujo propagador é definido por um termo quadrático do tipo, $\frac{1}{2}\,S_2[\varphi]\phi^2$. Enquanto isso, os termos de ordem superior podem ser entendidos como a contribuição advinda das interações. No lado esquerdo, a expansão em potências de $\hbar$ corresponde à série perturbativa, onde cada um de seus termos pode ser representado por um diagrama de Feynman padrão, ou seja, onde o propagador e os vértices dependem do campo médio φ. Além disso, podemos observar que a contribuição não nula da integral funcional,

$$\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[\frac{i}{2}\,S_2[\varphi]\phi^2\right]\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N), \tag{2.23}$$

ocorre quando N é par. É por essa razão que potências não inteiras de $\hbar$ não aparecem na série. Essa série é chamada de expansão em loops.

Na aproximação de 1-loop,

$$\exp(i\,\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]) \;=\; \det{}^{-\frac{1}{2}}\,S_2[\varphi] \tag{2.24}$$

logo,

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi] \;=\; \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\ln S_2[\varphi] \;=\; \frac{i}{2}\,\ln\,\det S_2[\varphi]. \tag{2.25}$$

O termo S_2 em (2.25) é conhecido como forma bilinear da ação ou matriz hessiana. Para ordens superiores, é preciso encontrar as funções de Green $G(x,y|\varphi)$, dependentes do campo médio.

Contudo, o cálculo de determinantes funcionais, como na equação (2.25), dificilmente pode ser resolvido de maneira exata e por isso existe a necessidade de desenvolver métodos aproximados para o cálculo da ação efetiva.

Quando se pode assumir que o campo médio $\varphi(x)$ varie lentamente, a ação efetiva — que é tipicamente um funcional não-local — pode ser expandida em série nas derivadas do campo. Além disso, podemos truncar essa série, de acordo com o modelo teórico estudado, mantendo apenas um número finito de termos. Esse método é chamado de expansão em derivadas da ação efetiva, que tem a forma

$$\Gamma[\varphi] \;=\; \int d^4x\left[-V_{\text{eff}}(\varphi) + \frac{1}{2}\,Z(\varphi)\,\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \ldots\right]. \tag{2.26}$$

O primeiro termo, $V_{\text{eff}}(\varphi)$, é o potencial efetivo, que pode ser obtido calculando a ação efetiva para um campo médio constante, $\varphi(x) = \varphi_0 = const.$ O termo quadrático em derivadas, chamado termo cinético, e os termos seguintes, que também contêm derivadas do campo, podem ser relevantes dependendo da teoria estudada. Esse procedimento pode ser aplicado a diferentes tipos de campos, sendo mais comumente utilizado para campos escalares.

2.3 REPRESENTAÇÃO LOCAL DE MOMENTO

Neste capítulo, introduziremos as chamadas coordenadas normais de Riemann. Aqui, vamos trabalhar com uma variedade de dimensão $(3+1)$, onde a métrica descreve um espaço-tempo pseudo-Riemanniano, mas essas coordenadas podem ser definidas em qualquer variedade pseudo-Riemanniana e com dimensão arbitrária. A construção dessas coordenadas está disponível nas referências [10] e [11].

Nosso interesse por essas coordenadas está relacionado à sua utilidade, em particular quando aplicadas juntamente com a representação local de momento, no cálculo das correções de curvatura em espaço-tempo curvo.

2.3.1 COORDENADAS NORMAIS DE RIEMANN

Consideramos um ponto arbitrário P com coordenadas x'^{μ}. Definimos coordenadas normais $y^{\mu} = x^{\mu} - x'^{\mu}$ centradas nesse ponto. A linha de coordenadas constantes consiste em geodésicas, cujos vetores tangentes satisfazem,

$$\xi^{\mu} \;=\; \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\bigg|_{x'}, \qquad \tau\bigg|_{x'} \;=\; 0, \tag{2.27}$$

onde τ é um parâmetro natural ao longo da linha geodésica. Além disso, o sistema de coordenadas é escolhido de forma que, no ponto x', a métrica seja a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Objetos avaliados no ponto x' serão indicados com um apóstrofo.

Em x', as componentes da conexão de Christoffel satisfazem as seguintes condições

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x) \;=\; \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x'), \quad \partial_{\rho}\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x) \;=\; \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\bigg|_{x'}, \quad \partial_{\rho}\partial_{\sigma}\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x) \;=\; \frac{\partial^2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\bigg|_{x'}, \quad \text{etc.} \tag{2.28}$$

Outros sistemas de coordenadas $\bar{x}^{\alpha}$ nas vizinhanças do ponto x' podem ser relacionados ao sistema de coordenadas normais, $y^{\mu} = \xi^{\mu}\tau$, pela transformação

$$z^{\mu} \;=\; z'^{\mu} \;+\; A^{\mu}_{\nu}\, y^{\nu} \;+\; \frac{1}{2!}\, A^{\mu}_{\nu\sigma}\, y^{\nu}y^{\sigma} \;+\; \frac{1}{3!}\, A^{\mu}_{\nu\sigma\rho}\, y^{\nu}y^{\sigma}y^{\rho} \;+\; \cdots\,. \tag{2.29}$$

Os coeficientes $A^{\mu}_{\nu\ldots}$ são constantes arbitrárias. Podemos escolher os coeficientes tal que, no novo sistema de coordenadas y^{μ}, seja satisfeito

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x') \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\Gamma'^{\lambda}_{\alpha\beta)} = 0, \tag{2.30}$$

ou seja, tal que a conexão de Christoffel no ponto de origem e sua primeira derivada sejam nulas. Essas condições garantem a simetria das derivadas. Dito isso, considerando uma função arbitrária $W(x)$ expandida ao redor do ponto $x' \;=\; 0$ tem a forma

$$W(x) \;=\; W(x') \;+\; \partial_{\mu}W(x')\, y^{\mu} \;+\; \frac{1}{2}\,\partial_{\mu}\partial_{\nu}W(x')\, y^{\mu}y^{\nu} \;+\; \cdots\,. \tag{2.31}$$

A métrica em coordenadas normais de Riemann se torna,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R_{\alpha\mu\beta\nu}\, y^\mu y^\nu + \frac{1}{3!}R_{\alpha\mu\beta\nu;\sigma}\, y^\mu y^\nu y^\sigma \\ + \left(\frac{1}{20}R_{\alpha\mu\beta\nu;\rho\sigma} + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\lambda\rho}R^{\lambda}{}_{\nu\beta\sigma}\right) y^\mu y^\nu y^\rho y^\sigma + \dots \end{aligned} \tag{2.32}$$

A partir daqui suprimimos apóstrofos pois consideramos que todos as componentes são tomados no ponto com coordenadas x'^μ.

Podemos considerar ainda a expansão da métrica nas coordenadas normais como $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ e obtemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(y) \;=\; \eta^{\mu\nu} \;-\; \frac{1}{3}\, R'^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu}\, y^\alpha y^\beta \;-\; \frac{1}{6}\, R'^{\mu}{}_{\alpha\beta;\gamma}{}^{\nu}\, y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ + \left(\frac{1}{20}\, R'^{\mu}{}_{\alpha\beta;\gamma\delta}{}^{\nu} \;-\; \frac{2}{45}\, R'^{\mu}{}_{\alpha\rho\gamma}R'^{\rho}{}_{\beta\delta}{}^{\nu}\right) y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \;+\; \cdots \end{aligned} \tag{2.33}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{-g(y)} \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{6}\, R'_{\mu\nu}\, y^\mu y^\nu \;-\; \frac{1}{12}\, R'_{\mu\nu;\alpha}\, y^\mu y^\nu y^\alpha \\ + \left(-\frac{1}{40}\, R'_{\mu\nu;\alpha\beta} \;+\; \frac{1}{90}\, R'_{\mu\rho\nu\sigma}R'^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\right) y^\mu y^\nu y^\alpha y^\beta \;+\; \cdots, \end{aligned} \tag{2.34}$$

e

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta}(y) \;=\; R'_{\mu\nu\alpha\beta} \;+\; R'_{\mu\nu\alpha\beta;\lambda}\, y^\lambda \\ + \left(\frac{1}{2}\, R'_{\mu\nu\alpha\beta;\lambda\sigma} \;-\; \frac{1}{3}\, R'_{\mu\nu\rho\lambda}R'^{\rho}{}_{\alpha\beta\sigma} \;+\; \frac{1}{3}\, R'_{\mu\rho\alpha\lambda}R'^{\rho}{}_{\nu\beta\sigma}\right) y^\lambda y^\sigma \;+\; \cdots \end{aligned} \tag{2.35}$$

Nestas expansões, todos os coeficientes são expressos em termos do tensor de curvatura e de suas derivadas covariantes avaliadas no ponto de origem das coordenadas normais, $y = 0$, e por isso são covariantes em relação às transformações de coordenadas nesse ponto. Essa propriedade é útil quando trabalhamos com a representação local de momento.

2.3.2 REPRESENTAÇÃO LOCAL DE MOMENTO

Baseado no método desenvolvido na referência [12], vamos considerar a ação para um campo escalar real, que pode ser escrita como

$$S_0 \;=\; \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \left[\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\nu\varphi \;-\; \frac{1}{2}\, (m^2 - \xi R)\, \varphi^2\right], \tag{2.36}$$

onde $\xi R\varphi^2$ é o termo não mínimo, necessário para que a teoria seja renormalizável em espaço-tempo curvo. No espaço plano, onde $R = 0$, esse termo desaparece. A forma bilinear da ação é definida por

$$\hat{H}(x, x') \;=\; -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(x')}. \tag{2.37}$$

No caso de um campo escalar real, esse operador bilinear tem a forma

$$\hat{H} \;=\; \Big(\Box + m^2 - \xi R\Big)\,. \tag{2.38}$$

Podemos expandir o operador $\hat{H}$ em coordenadas normais de Riemann. Aqui, como estamos interessados nas correções de primeira ordem em curvatura, transformar somente o operador d'Alembertiano é suficiente. Chegamos à

$$\Box \;=\; \eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu \;+\; \frac{1}{3}\,R^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu}\,y^\alpha y^\beta\,\partial_\mu\partial_\nu \;-\; \frac{2}{3}\,R^{\mu}{}_{\alpha}\,y^\alpha\partial_\mu \;+\; \cdots\,. \tag{2.39}$$

A nova expressão para $\hat{H}$ será

$$\begin{aligned}\hat{H} \;=\; &\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\partial_\nu \;+\; \frac{1}{3}\,R^{\mu}{}_{\alpha\beta}{}^{\nu}\,y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu \;-\; \frac{2}{3}\,R^{\mu}{}_{\alpha}\,y^\alpha\partial_\mu \\ &+ m^2 - \xi R + \cdots\end{aligned} \tag{2.40}$$

O propagador obedece

$$\hat{H}G(x,x') = -g^{-1/4}(x')\,\delta(x,x')\,g^{-1/4}(x) = -\delta_c(x,x'). \tag{2.41}$$

Aqui $\delta_c(x,x')$ é a função delta covariate. Mas podemos trabalhar com o propagador $\bar{G}(x,x')$ onde,

$$\hat{H}\bar{G}(x,x') = -\delta(x,x') \tag{2.42}$$

Buscaremos a solução na forma

$$\bar{G}(y) \;=\; \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\,e^{ik\cdot y}\left[\frac{1}{k^2+m^2} + \frac{a_1R - a_2\xi R}{(k^2+m^2)^2} \;+\; \frac{a_3R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu}{(k^2+m^2)^3} \;+\; \cdots\right], \tag{2.43}$$

onde a_1, a_2 e a_3 são coeficientes a serem determinados a partir da Eq. (2.41).

O uso da notação $\bar{G}(y)$ é intencional e indica que o lado direito da Eq. (2.41) não depende explicitamente da métrica curva e representa uma função de Dirac básica em 4 dimensões. Esta escolha é necessária para usar expansão em curvaturas, ou seja, para construir o formalismo de representação local de momentos.

Substituindo a Eq. (2.43) em (2.41), é possível obter o propagador modificado

$$\bar{G}(k) \;=\; \frac{1}{k^2+m^2} \;+\; \frac{(1/6-\xi)R}{(k^2+m^2)^2} \;+\; \mathcal{O}(R^2). \tag{2.44}$$

Termos de ordem superior podem conter potências mais elevadas da curvatura, que seriam compensadas por ordens mais altas nas derivadas covariantes da curvatura no ponto P.

Para uma teoria do mesmo tipo, porém acrescida de um potencial arbitrário,

$$S \;=\; \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left[\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi \;-\; \frac{1}{2}\,\Big(m^2 - \xi R\Big)\,\varphi^2 \;-\; V(\varphi)\right], \tag{2.45}$$

no caso em que $V'' \;=$ constante, podemos simplesmente substituir m^2 por $\tilde{m}^2 \;=\; m^2 + V''$ e obter [13],

$$\bar{G}(y) \;=\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{iky}\left[\frac{1}{k^2+\tilde{m}^2} - \frac{(\xi-1/6)R}{(k^2+\tilde{m}^2)^2}\right]. \tag{2.46}$$

3 EXPANSÃO EM DERIVADAS PARA UMA TEORIA COM UM CAMPO ESCALAR REAL

Como discutido na seção anterior, de modo geral a ação efetiva é um funcional não local. No entanto, é possível começar pela parte constante, ou seja, o potencial efetivo, e a partir dele, extrair os termos de menor ordem. No caso de um único campo médio ϕ, a expansão em derivadas toma a forma da equação (2.26).

O cálculo de $V_{\rm eff}(\phi)$ pode ser realizado para um campo constante $\phi = \phi_0$, em qualquer ordem da expansão em loops, e para diferentes campos quânticos. Neste capítulo restringiremos nossa atenção ao campo escalar real com auto-interação $\lambda\phi^4/4!$ tanto em espaço plano como em espaço-tempo curvo. O resultado de 1-loop em espaço plano foi derivado no trabalho clássico [16]. Uma investigação geral com base nos métodos funcionais foi feita em [17]. Já a avaliação de $Z(\phi)$ requer campos variáveis. A ideia do procedimento que utilizaremos [5, 6] é decompor o campo escalar em um campo constante ϕ_0 e uma parte variável $\varphi(x)$, como $\phi(x) = \phi_0 + \varphi(x)$, e avaliar a ação efetiva até a segunda ordem em derivadas. Como $\partial\phi(x) = \partial\varphi(x)$, esse método fornece um resultado completo para Z. Embora se possa aplicar esse método para calcular termos de ordem superior em derivadas [6], para pequenas oscilações próximas ao mínimo, esses termos são menos relevantes e não serão considerados.

3.1 AÇÃO EFETIVA PARA UM CAMPO ESCALAR REAL EM ESPAÇO PLANO

Inicialmente, vamos trabalhar com uma teoria com um único escalar, cuja densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{3.1}$$

Utilizando a expressão (2.25), em notações euclidianas, a contribuição de 1-loop para a ação efetiva é dada por

$$\Gamma^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln(\Box + M^2), \tag{3.2}$$

onde

$$M^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\,\phi^2(x). \tag{3.3}$$

Aqui, reproduzimos os resultados obtidos em espaço plano em [6]. Para encontrar o potencial efetivo de 1-loop, $V^{(1)}$, é suficiente considerar um campo constante ϕ_0 na Eq. (3.2). Por outro lado, a derivação de $Z^{(1)}(\phi)$ requer definir $\phi(x) = \phi_0 + \varphi(x)$, com expansão subsequente até segunda ordem na parte dependente das coordenadas $\varphi(x)$. Os

coeficientes dessa expansão dependem apenas de ϕ_0. Com isso, obtemos

$$\Gamma^{(1)}(\phi_0 + \varphi) = \int d^4x \left\{ - V^{(1)}(\phi_0) - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \phi_0}\,\varphi - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \phi_0^2}\,\varphi^2 + \frac{1}{2}\,Z^{(1)}(\phi_0)\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi + \ldots \right\}. \tag{3.4}$$

Fazendo $\phi(x) = \phi_0 + \varphi$ também na Eq. (3.2),

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(\phi_0 + \varphi) - \Gamma^{(1)}(\phi_0) =& \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\left[p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\,(\phi_0^2 + 2\phi_0\varphi + \varphi^2)\right] \\ &- \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\left[p^2 + M_0^2\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para elaborar o último termo, é necessário expandir o logaritmo na Eq. (3.5) até a segunda ordem em φ,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(\phi_0 + \varphi) - \Gamma^{(1)}(\phi_0) =& \frac{\lambda}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\left(2\phi_0\varphi + \varphi^2\right)\right] \\ &- \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\varphi\,\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\varphi\right] + \ldots\end{aligned} \tag{3.6}$$

Aqui M_0 é a Eq. (3.3) com $\phi = \phi_0$

Aplicamos comutadores para mover todos os operadores de momento para a esquerda usando a identidade [5, 6],

$$\begin{aligned}\Phi\,\frac{1}{p^2 + M^2} =& \frac{1}{p^2 + M^2}\,\Phi + \frac{1}{(p^2 + M^2)^2}\,[p^2, \Phi] + \frac{1}{(p^2 + M^2)^3}\,[p^2, [p^2, \Phi]] \\ &+ \frac{1}{(p^2 + M^2)^4}\,[p^2, [p^2, [p^2, \Phi]]] + \ldots\end{aligned} \tag{3.7}$$

Os comutadores do operador momento com uma função arbitrária $\Phi(x)$ possuem a seguinte forma (aqui o operador momento quadridimensional é identificado como $p_\mu = -i\partial_\mu$),

$$\begin{aligned}[p^2, \Phi] &= \Box\Phi + 2ip^\mu\partial_\mu\Phi, \\ [p^2, [p^2, \Phi]] &= \Box^2\Phi + 4ip^\mu\partial_\mu\Box\Phi - 4p^\mu p^\nu\partial_\mu\partial_\nu\Phi.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Após o procedimento descrito, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(\phi_0 + \varphi) - \Gamma^{(1)}(\phi_0) =& \frac{\lambda\phi_0}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\varphi\right] + \frac{\lambda}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\varphi^2\right] \\ &- \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2 + M_0^2)^2}\,\varphi^2\right] - \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\,\mathrm{Tr}\left[M_0^2\,\frac{1}{(p^2 + M_0^2)^4}\,\varphi\Box\varphi\right].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Comparando com a Eq. (3.4), os três primeiros termos do lado direito são as derivadas de $V^{(1)}$. Assim, termos lineares em φ são,

$$\frac{\lambda\phi_0}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2 + M_0^2}\,\varphi\right] = \int d^4x\,\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\phi_0}\varphi. \tag{3.10}$$

Para os termos quadráticos,

$$\frac{\lambda}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\,\varphi^2\right] - \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\,\varphi^2\right] = \int d^4x\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial\phi_0^2}\,\varphi^2. \tag{3.11}$$

Para à parte cinética, precisamos do último termo de (3.9) com o operador d'alembertiano. A prescrição para o traço funcional em espaço de momento pode ser encontrada em [6]. Em resumo,

$$\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2+M^2)^n}\right] = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2+M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{2k^3\,dk}{(k^2+M^2)^n}. \tag{3.12}$$

Resolvendo a integral, é possível chegar à

$$\mathrm{Tr}\,\frac{1}{(p^2-M^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{16\pi^2}\,\frac{M^{4-2n}}{(n-1)(n-2)}, \qquad \text{para } n>2. \tag{3.13}$$

Após uma integração por partes do termo com derivadas de Eq. (3.9), obtemos

$$Z^{(1)}(\phi_0) = \frac{1}{12(4\pi)^2}\,\frac{\lambda^2\phi_0^2}{M_0^2}. \tag{3.14}$$

3.2 AÇÃO EFETIVA PARA UM ÚNICO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇO CURVO

Nesta seção, o objetivo é generalizar o resultado obtido anteriormente, para um espaço-tempo curvo arbitrário. Nesse caso, existem diversas opções para a derivação do potencial efetivo do campo escalar e da expansão em derivadas. Em [18], foi utilizada uma técnica específica para o potencial de um campo escalar no espaço de De Sitter. Outro método, tecnicamente mais simples, é a integração da equação do grupo de renormalização [19], que pode ser generalizada para outros setores da ação efetiva [20]. Essa abordagem, por estar associada ao esquema de subtração mínima (*Minimal Subtraction*) da renormalização, não é apropriada para explorar o fenômeno de desacoplamento em baixas energias. O mesmo se aplica à abordagem proposta para obtenção do potencial efetivo a partir da integração da anomalia de traço [21].

O resultado mais completo para o campo escalar massivo pode ser obtido através da avaliação dos fatores de forma na ação efetiva [22]. No entanto, os resultados da solução do *heat-kernel* [23] são desenvolvidos de forma explícita apenas para os termos de segunda ordem [24, 25]. Essa técnica permite calcular termos do tipo $(\partial\phi)^2$ e $R\phi^2$, mas as correções do tipo $R(\partial\phi)^2$, especialmente em teorias com duas ou mais massas distintas, exigiriam o desenvolvimento da solução do *heat-kernel* até a terceira ordem nas curvaturas [26]. Assim, é necessário um método apropriado para o cálculo do potencial efetivo e da expansão em derivadas no espaço-tempo curvo.

Vamos derivar o termo cinético Z para uma teoria escalar de um único componente com interação $\lambda\phi^4$, seguindo o procedimento que é uma generalização direta do delineado na subseção anterior 3.1 juntamente com a técnica descrita na seção 2.3.

A ação considerada, incluindo o termo não mínimo de primeira ordem na curvatura, tem a forma

$$S(\phi, g_{\mu\nu}) \,=\, \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left\{\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \,-\, \frac{1}{2}\,m^2\phi^2 \,+\, \frac{1}{2}\,\xi R\phi^2 \,-\, \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4\right\}. \tag{3.15}$$

Optamos por escolher o potencial clássico mais comum $V(\phi) \,=\, \lambda\phi^4/4!$ mas, em princípio, poderíamos calcular para outro potencial. Utilizaremos o propagador (2.46),

$$\bar{G}(y) \,=\, \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{iky}\left[\frac{1}{p^2+M_0^2} \,-\, \frac{\tilde{\xi}R}{(p^2+M_0^2)^2}\right], \tag{3.16}$$

com

$$M_0^2 \,=\, m^2 \,+\, \frac{\lambda}{2}\,\phi_0^2, \qquad \tilde{\xi} \,=\, \xi \,-\, \frac{1}{6}.$$

O método pode ser aplicado além dessa aproximação, mas isso exigiria cálculos mais elaborados.

Seguindo o mesmo procedimento feito no espaço plano, mas utilizando o propagador (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi_0+\varphi, g_{\mu\nu}) - \Gamma(\phi_0, g_{\mu\nu}) \,=\, \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\Bigg\{1 \,+\, \frac{\lambda}{2}\,\left(\frac{1}{k^2+M_0^2} \,-\, \frac{\tilde{\xi}R}{(k^2+M_0^2)^2}\right)\\ \times\,(2\phi_0\varphi+\varphi^2)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Expandimos o logaritmo em série e descartamos termos de segunda ordem em curvaturas e de ordens superiores a ϕ^2. Nesta maneira, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi_0 \,+\, \varphi, g_{\mu\nu}) \,-\, \Gamma(\phi_0, g_{\mu\nu}) \,=& \frac{\lambda}{4}\,\mathrm{Tr}\,\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\,(2\phi_0\varphi+\varphi^2)\right]\\ &- \frac{\lambda}{4}\,\tilde{\xi}R\,\mathrm{Tr}\,\left[\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\,(2\phi_0\varphi \,+\, \varphi^2)\right]\\ &- \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\,\varphi\frac{1}{p^2+M_0^2}\,\varphi\right]\\ &+ \frac{\lambda^2}{2}\,\tilde{\xi}R\phi_0^2\,\mathrm{Tr}\,\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\,\varphi\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\,\varphi\right].\end{aligned} \tag{3.18}$$

Como já vimos, o termo cinético surge devido à comutação de φ com o operador momento. Assim, podemos focar apenas nos dois últimos termos da expressão acima, já que os primeiros dois termos não exigem comutação.

É conveniente expressar o coeficiente $Z^{(1)}(\phi)$ como

$$Z^{(1)}(\phi) \,=\, Z_0^{(1)} \,+\, Z_1^{(1)}R \,+\, \mathcal{O}(R^2), \tag{3.19}$$

onde o primeiro termo, $Z_0^{(1)}$, corresponde ao espaço plano e já foi calculado na Eq. (3.14)

$$Z_0^{(1)} \,=\, \frac{1}{12}\,\frac{\lambda^2\phi_0^2}{16\pi^2M_0^2}. \tag{3.20}$$

O último termo da expressão (3.18), após as comutações, torna-se

$$\frac{\lambda^2}{2}\,\tilde{\xi}R\phi_0^2\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\varphi\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\varphi\right] = \frac{\lambda^2}{2}\,\tilde{\xi}R\phi_0^2\ \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{(p^2+M_0^2)^3}\,\varphi^2\right. \tag{3.21}$$

$$+\ \frac{1}{(p^2+M_0^2)^4}\,[p^2,\varphi]\,\varphi + \frac{1}{(p^2+M_0^2)^5}\,[p^2,[p^2,\varphi]]\,\varphi\ +\ \cdots\Big\}. \tag{3.22}$$

O primeiro termo da expressão acima contribui com a segunda derivada do potencial efetivo, pois

$$\frac{\lambda}{4}\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2+M_0^2}\,\varphi^2\right] - \frac{\lambda}{4}\,\tilde{\xi}R\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\,\varphi^2\right] - \frac{\lambda^2\phi_0^2}{4}\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2+M_0^2)^2}\,\varphi^2\right]$$

$$+\frac{\lambda^2\tilde{\xi}\phi_0^2}{4}\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{(p^2+M_0^2)^3}\,\varphi^2\right] = \frac{1}{2}\int d^4x\,\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial\phi_0^2}\,\varphi^2. \tag{3.23}$$

Após integrar por partes o termo com operador d'Alembertiano, que aparece devido aos comutadores presentes na equação,(3.22) obtemos a correção de primeira ordem na forma

$$Z_1^{(1)} = \frac{\lambda^2}{24(4\pi)^2M_0^4}\,\tilde{\xi}R\phi_0^2. \tag{3.24}$$

Substituindo ϕ_0^2 por ϕ^2, o coeficiente $Z^{(1)}(\phi)$, na aproximação de ordem $\mathcal{O}(R)$, temos

$$Z^{(1)} = \frac{1}{12(4\pi)^2}\,\frac{\lambda^2\phi^2}{M^2}\left(1+\frac{\tilde{\xi}R}{M^2}\right). \tag{3.25}$$

Essa expressão não depende do parâmetro de renormalização μ, pois em uma teoria puramente escalar, a nível de 1-loop, não há divergências no termo cinético.

Esclarecendo as aproximações utilizadas na fórmula (3.25), em espaço-tempo plano, a expansão em derivadas pressupõe que os termos com derivadas do campo de fundo são subdominantes em relação ao potencial efetivo, ou seja, $(\partial\phi)^2 \ll M^4$. É importante observar que M^2 depende do campo escalar de fundo, de modo que a expansão em derivadas da ação efetiva e todas as fórmulas subsequentes continuam válidas mesmo no limite sem massa [16, 17].

Essa aproximação é válida também nas ordens superiores da expansão, bem como em modelos que envolvem férmions e/ou campos vetoriais, nos quais o termo cinético apresenta divergências e adquire correções logarítmicas. Essa é a limitação da Eq. (3.20), mas a correção de curvatura presente na Eq. (3.25) também implica a utilização de uma expansão em coordenadas normais de Riemann, o que corresponde à aproximação relativa a um campo gravitacional fraco. Aqui, isso significa que $R_{\mu\nu\alpha\beta} \ll M^2$, condição que deve ser satisfeita simultaneamente à restrição em espaço plano, $(\partial\phi)^2 \ll M^4$.

4 AÇÃO EFETIVA PARA UMA TEORIA COM DOIS CAMPOS ESCALARES REAIS

Neste capítulo, utilizamos um método análogo ao apresentado no capítulo anterior para calcular a expansão em derivadas da ação efetiva de uma teoria com dois campos escalares reais em espaço-tempo curvo. A maior parte dos trabalhos anteriores que tratam da obtenção explícita dos termos cinéticos na expansão em derivadas da ação efetiva considera apenas um único campo escalar. No caso de múltiplos campos, um dos poucos resultados disponíveis foi obtido em 1985 para o modelo $O(N)$ [14], em que todos os campos possuem massas idênticas. Para o caso mais geral, com massas diferentes, a aplicação direta do formalismo funcional leva a expressões extremamente longas e pouco úteis. Nosso objetivo é desenvolver um método que possa ser aplicado a modelos multiescalares com massas distintas, com resultados mais compactos.

Como a matriz hessiana neste caso é não diagonal, iniciaremos o tratamento aplicando o método do campo de fundo para diagonalizá-la no espaço dos campos quânticos. Uma vez realizada essa diagonalização, mostraremos como o problema pode ser reduzido ao caso de um único campo escalar real. Esse procedimento é chamado de *dupla diagonalização* [15].

O objeto de nosso interesse é um modelo com dois campos escalares reais interagentes, ϕ e χ, descritos por uma densidade lagrangiana covariante da forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi \,+\, \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\chi\, \partial_\nu\chi \,-\, \frac{1}{2}\, m^2\phi^2 \,-\, \frac{1}{2}\, M^2\chi^2 \,+\, \frac{1}{2}\, \xi_1 R\phi^2 \\ &+\, \frac{1}{2}\, \xi_2 R\chi^2 \,-\, \frac{\lambda_1}{4!}\, \phi^4 \,-\, \frac{\lambda_2}{4!}\, \chi^4 \,-\, \frac{\lambda_{12}}{8}\, \phi^2\chi^2 \,.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Aqui, m e M são as massas dos campos ϕ e χ, respectivamente, e λ_1, λ_2 e λ_{12} são constantes de acoplamento.

A seguir, mostramos como reduzir os cálculos de um modelo com duas massas distintas para um sistema efetivamente com uma única massa. Essa abordagem é baseada no método de campo de fundo e uma troca de variáveis usada anteriormente na referência [27]. O restante do procedimento se assemelha ao uso de modos normais em um oscilador multidimensional.

4.1 DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ HESSIANA

Usando o método do campo de fundo, expandimos os campos escalares como

$$\phi \to \phi + \sigma_1 \,, \qquad \chi \to \chi + \sigma_2 \,, \tag{4.2}$$

onde σ_1 e σ_2 representam as flutuações quânticas.

A contribuição de um loop é determinada pela parte bilinear da ação em termos das flutuações

$$S^{(2)} \;=\; \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\,\hat{H}\,\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

onde o operador $\hat{H}$ assume a forma matricial,

$$\hat{H} \;=\; \hat{1}\Box + \begin{pmatrix}M_{11}^2 & M_{12}^2\\ M_{21}^2 & M_{22}^2\end{pmatrix}, \quad \hat{1} \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

Os elementos dessa matriz são dados por

$$\begin{aligned} M_{11}^2 \;&=\; m^2 - \xi_1 R + \frac{\lambda_1}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_{12}}{4}\chi^2,\\ M_{22}^2 \;&=\; M^2 - \xi_2 R + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 + \frac{\lambda_{12}}{4}\phi^2,\\ M_{12}^2 \;&=\; M_{21}^2 \;=\; \lambda_{12}\phi\chi. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para diagonalizar a matriz hessiana $\hat{H}$, equação (4.4), realizamos uma rotação no espaço dos campos

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Essa rotação, cujo ângulo α deve ser escolhido de modo a cumprir o objetivo de diagonalizar a matriz, preserva a parte cinética na forma diagonal e possui jacobiano unitário. Após a transformação, $\hat{H}$ torna-se

$$\begin{aligned} S^{(2)} \;=\; \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\Big\{&\rho_1\Box\rho_1 + \rho_2\Box\rho_2\\ &+ \rho_1\left(M_{11}^2\cos^2\alpha + 2M_{12}^2\sin\alpha\cos\alpha + M_{22}^2\sin^2\alpha\right)\rho_1\\ &+ \rho_2\left(M_{11}^2\sin^2\alpha - 2M_{12}^2\sin\alpha\cos\alpha + M_{22}^2\cos^2\alpha\right)\rho_2\\ &+ \rho_1\left[(M_{22}^2 - M_{11}^2)\sin 2\alpha - 2M_{12}^2\cos 2\alpha\right]\rho_2\Big\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A condição de diagonalização do operador é satisfeita ao eliminar a última linha da equação acima. Para isso, basta escolher o parâmetro α tal que

$$\theta \;=\; \cot 2\alpha \;=\; \frac{M_{22}^2 - M_{11}^2}{2M_{12}^2}. \tag{4.8}$$

Afim de simplificar os cálculos, introduzimos a nova notação,

$$\begin{aligned} a \;&=\; \cos^2\alpha \;=\; \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}},\\ b \;&=\; \sin^2\alpha \;=\; \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}},\\ c \;&=\; \sin 2\alpha \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Finalmente, obtemos a ação bilinear diagonalizada na base rotacionada

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \Box + \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Box + \Pi_2 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= aM_{11}^2 + bM_{22}^2 - cM_{12}^2, \\ \Pi_2 &= bM_{11}^2 + aM_{22}^2 + cM_{12}^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nesse ponto, a diagonalização está completa. A diferença em relação a dois campos independentes é que as expressões Π_1 e Π_2 dependem simultaneamente dos campos de fundo ϕ e χ. A ação efetiva de 1-loop é proporcional à expressão que pode ser fatorada na forma,

$$\ln \mathrm{Det}\, \hat{H} \;=\; \ln \mathrm{Det}\, \hat{\mathcal{H}} = \;\mathrm{Tr}\, \ln \hat{\mathcal{H}} = \;\mathrm{Tr}\, \ln \mathcal{H}_1 \;+\; \mathrm{Tr}\, \ln \mathcal{H}_2\,. \tag{4.12}$$

Assim, a contribuição de 1-loop para a ação efetiva é

$$\Gamma^{(1)}(\phi, \chi) \;=\; \frac{1}{2}\;\mathrm{Tr}\, \ln\left(\Box \;+\; \Pi_1\right) \;+\; \frac{1}{2}\;\mathrm{Tr}\, \ln\left(\Box \;+\; \Pi_2\right). \tag{4.13}$$

Para aplicar o método descrito na seção anterior, vamos primeiro realizar a separação de cada um dos campos escalares em uma parte constante e outra dependente das coordenadas,

$$\phi \longrightarrow \phi_0 + \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \chi \longrightarrow \chi_0 + \varepsilon(x). \tag{4.14}$$

A expansão da ação efetiva até segunda ordem nos campos escalares φ e ε é

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\phi, \chi) \;=\; \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \Big\{ &- V^{(1)}(\phi, \chi) \;+\; \frac{1}{2}\, Z_\phi^{(1)}\, (\partial\varphi)^2 \;+\; \frac{1}{2}\, Z_\chi^{(1)}\, (\partial\varepsilon)^2 \\ &+\; Z_{\phi\chi}^{(1)}\, (\partial\varphi)(\partial\varepsilon) + \ldots \Big\}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde usamos as notações compactas

$$(\partial\varphi)^2 \;=\; g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\nu\varphi, \qquad (\partial\varepsilon)^2 \;=\; g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varepsilon\, \partial_\nu\varepsilon, \qquad (\partial\varphi)(\partial\varepsilon) \;=\; g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\nu\varepsilon. \tag{4.16}$$

No restante desta seção, apresentamos primeiro o cálculo direto dos coeficientes $Z^{(1)}$ e depois discutimos a redução ao caso escalar único.

4.2 CÁLCULO DIRETO

Podemos assumir que os coeficientes $Z_\phi^{(1)}$, $Z_\chi^{(1)}$ e $Z_{\phi\chi}^{(1)}$ não dependem das partes variáveis dos campos escalares, mas apenas das componentes constantes, acoplamentos, massas e parâmetros não mínimos $\xi_{1,2}$. Essa forma aparece naturalmente devido à ordem dos fatores da expansão.

Como precisamos apenas dos termos quadráticos nas partes variáveis, expandimos a ação efetiva em série de potências até segunda ordem em φ e ε,

$$\Gamma^{(1)}(\phi_0+\varphi,\chi_0+\varepsilon)-\Gamma^{(1)}(\phi_0,\chi_0) \;=\; \int d^4x\Big\{ -\frac{\partial V^{(1)}(\phi,\chi)}{\partial\phi_0}\varphi - \frac{\partial V^{(1)}(\phi,\chi)}{\partial\chi_0}\varepsilon \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^{(1)}(\phi,\chi)}{\partial\phi_0^2}\,\varphi^2 \;-\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^{(1)}(\phi,\chi)}{\partial\chi_0^2}\varepsilon^2 \;-\; \frac{\partial^2 V^{(1)}(\phi,\chi)}{\partial\phi\partial\chi}\,\varphi\varepsilon \;+\; \frac{1}{2}\,Z_\phi^{(1)}(\partial\varphi)^2 \\ +\;\frac{1}{2}\,Z_\chi^{(1)}(\partial\varepsilon)^2 \;+\; Z_{\phi\chi}^{(1)}(\partial\varphi)(\partial\varepsilon)+\ldots\Big\}. \tag{4.17}$$

Por outro lado, expandimos Π_j da Eq. (4.13) como

$$\Pi_j(\phi_0+\varphi,\chi_0+\varepsilon) \;=\; \Pi_{j0}(\phi_0,\chi_0) \;+\; \frac{\partial\Pi_j}{\partial\phi_0}\,\varphi \;+\; \frac{\partial\Pi_j}{\partial\chi_0}\,\varepsilon \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Pi_j}{\partial\phi_0^2}\,\varphi^2 \\ +\;\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Pi_j}{\partial\chi_0^2}\,\varepsilon^2 \;+\; \frac{\partial^2\Pi_j}{\partial\phi_0\partial\chi_0}\,\varphi\varepsilon+\ldots \tag{4.18}$$

Como no caso de um único campo escalar, os termos com segundas derivadas não contribuem para o termo cinético, devido à ordem em φ. Assim, mantemos apenas os termos de primeira ordem em derivadas. Além disso, os coeficientes $\partial\Pi_j/\partial\phi_0$ e $\partial\Pi_j/\partial\chi_0$ dependem apenas de ϕ_0 e χ_0. Podemos então definir

$$\frac{\partial\Pi_j}{\partial\chi_0} \;=\; \Pi_\chi, \qquad \frac{\partial\Pi_j}{\partial\phi_0} \;=\; \Pi_\phi \tag{4.19}$$

e escrever a expansão linear como

$$\Pi_j(\phi_0+\varphi,\chi_0+\varepsilon) \;=\; \Pi_{0j}(\phi_0,\chi_0) \;+\; \Pi_{\phi j}\varphi \;+\; \Pi_{\chi j}\varepsilon. \tag{4.20}$$

Para o potencial efetivo, basta fixar $\phi=\phi_0$ e $\chi=\chi_0$ em (4.13),

$$V^{(1)} \;=\; -\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Big[\ln\left(k^2+\Pi_{01}\right)+\,\ln\left(k^2+\Pi_{02}\right)\Big]. \tag{4.21}$$

Os termos de derivada de menor ordem seguem da parte relevante de (4.18), de forma que obtemos

$$\Gamma^{(1)} \;+\; \int d^4x\,V^{(1)} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1,2}\mathrm{Tr}\,\ln\left[1\;+\;\frac{1}{p^2+\Pi_{0j}}\left(\Pi_{\phi j}\varphi+\Pi_{\chi j}\varepsilon\right)\right]. \tag{4.22}$$

A partir daqui, suprimimos os argumentos, assumindo

$$\Gamma^{(1)}(\phi_0+\varphi,\chi_0+\varepsilon) \;=\; \Gamma^{(1)}, \qquad \Pi_{0j} \;=\; \Pi_0(\phi=\phi_0,\chi=\chi_0), \tag{4.23}$$

de forma que, para cada $j=1,2$, na primeira ordem da série de potências, temos (aqui $\Pi_{\phi j}\to\Pi_\phi$, $\Pi_{\chi j}\to\Pi_\chi$, e $\Pi_{0j}\to\Pi_0$ por simplicidade),

$$\Gamma_j=\frac{1}{2}\;\mathrm{Tr}\;\ln\left[1+\frac{1}{p^2+\Pi_0}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)\right] \;=\; \frac{1}{2}\;\mathrm{Tr}\;\left[\frac{1}{p^2+\Pi_0}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)\right. \\ \left.-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2+\Pi_0}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)\frac{1}{p^2+\Pi_0}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)+\ldots\right]. \tag{4.24}$$

No segundo termo do lado direito da última relação, comutamos todos os operadores de momento para a esquerda das funções de campo, de modo análogo ao Eq. (3.7). Assim, temos,

$$\begin{aligned}\Gamma_j \;=\; & \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{p^2+\Pi_0}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^2}\left(\Pi_\phi\varphi+\Pi_\chi\varepsilon\right)^2\right.\\ & -\frac{\Pi_\phi^2}{2}\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^3}\left[p^2,\varphi\right]\varphi-\frac{\Pi_\phi^2}{2}\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^3}\left[p^2,\varphi\right]\varepsilon\\ & -\Pi_\chi\Pi_\phi\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^3}\left[p^2,\varepsilon\right]\varphi-\frac{\Pi_\phi^2}{2}\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^4}\left[p^2,\left[p^2,\varphi\right]\right]\varphi\\ & \left.-\frac{\Pi_\phi^2}{2}\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^4}\left[p^2,\left[p^2,\varphi\right]\right]\varepsilon-\Pi_\chi\Pi_\phi\frac{1}{(p^2+\Pi_0)^4}\left[p^2,\left[p^2,\varepsilon\right]\right]\varphi+\ldots\right\}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

A parte da ação efetiva que é linear em ϕ e χ corresponde ao primeiro termo da expressão acima, ou seja,

$$\begin{aligned}\int d^4x\,\left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\phi_0}\varphi+\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\chi_0}\varepsilon\right) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1,2}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{p^2+\Pi_{0j}}\left(\Pi_{\phi j}\varphi+\Pi_{\chi j}\varepsilon\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1,2}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+\Pi_{0j}}\left(\Pi_{\phi j}\varphi+\Pi_{\chi j}\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{4.26}$$

De maneira semelhante, o segundo termo da Eq. (4.25) são os termos quadráticos

$$\begin{aligned}&\int d^4x\,\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2V^{(1)}}{\partial\phi_0^2}\,\varphi^2\,+\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2V^{(1)}}{\partial\chi_0^2}\,\varepsilon^2\,+\,\frac{\partial^2V^{(1)}}{\partial\phi_0\partial\chi_0}\,\varphi\varepsilon\right)\\ &=\frac{1}{4}\sum_{j=1,2}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(p^2+\Pi_{0j})^2}\,\left(\Pi_{\phi j}\varphi\,+\,\Pi_{\chi j}\varepsilon\right)^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Podemos agora obter os coeficientes $Z_\varphi^{(1)}$, $Z_\chi^{(1)}$ e $Z_{\varphi\chi}^{(1)}$ da expansão em derivadas, a partir da Eq. (4.17). Os termos com duas derivadas surgem devido à comutação dos operadores momento com as funções das coordenadas na Eq. (4.25). No contexto da representação local de momento, os comutadores assumem a mesma forma da Eq. (3.8) como no espaço-tempo plano. Realizando as comutações, traços e integrações no espaço de momento, obtemos, para cada componente Π_j

$$-\frac{1}{24(4\pi)^2}\,\frac{1}{\Pi_0}\int d^4x\,\left(\Pi_\phi^2\,\varphi\Box\varphi\,+\,\Pi_\chi^2\,\varepsilon\Box\varepsilon\,+\,2\Pi_\phi\Pi_\chi\,\varepsilon\Box\varphi\right). \tag{4.28}$$

Ao integrar por partes, pode-se considerar os coeficientes Π_ϕ e Π_χ como constantes e assim obter

$$\begin{aligned}Z_1^{(1)}(\phi,\chi) &= \frac{1}{12(4\pi)^2}\left(\frac{\Pi_{\phi1}^2}{\Pi_{01}}\,+\,\frac{\Pi_{\phi2}^2}{\Pi_{02}}\right),\\ Z_2^{(1)}(\phi,\chi) &= \frac{1}{12(4\pi)^2}\left(\frac{\Pi_{\chi1}^2}{\Pi_{01}}\,+\,\frac{\Pi_{\chi2}^2}{\Pi_{02}}\right),\\ Z_{12}^{(1)}(\phi,\chi) &= \frac{1}{12(4\pi)^2}\left(\frac{\Pi_{\phi1}\Pi_{\chi1}}{\Pi_{01}}\,+\,\frac{\Pi_{\phi2}\Pi_{\chi2}}{\Pi_{02}}\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

Como as partes variáveis nas expressões para os coeficientes $Z_{\varphi}^{(1)}$, $Z_{\chi}^{(1)}$ e $Z_{\varphi\chi}^{(1)}$ são desprezíveis nesta ordem de aproximação, pode-se simplesmente substituir $\phi_0 \to \phi(x)$ e $\chi_0 \to \chi(x)$ nas expressões finais, sem maiores consequências.

As expressões explícitas dos coeficientes em (4.29) são bastante extensas e por isso não são apresentadas aqui, já que precisaríamos de muitas páginas para expressá-los. Apesar disso, estes coeficientes são finitos, como previsto pela contagem de graus de divergência, e, portanto, independentes das condições de renormalização ou do parâmetro μ.

O método de expansão em derivadas utilizado aqui também pode ser estendido para termos com derivadas de ordem superior, como foi feito para o caso de um único campo escalar em espaço-tempo plano no trabalho [6]. Porém, os termos derivados neste trabalho, com certeza, são os termos dominantes na maioria das aplicações práticas.

4.3 DUPLA DIAGONALIZAÇÃO

Uma abordagem alternativa para derivar os coeficientes $Z^{(1)}$ envolve a introdução de um campo auxiliar ρ, que é uma combinação linear de φ e ε, e a expansão de Π_j em um único campo ρ,

$$\Pi_j(\phi_0+\varphi,\,\chi_0+\varepsilon) \;=\; \Pi_{0j}+\Pi_{\phi j}\varphi+\Pi_{\chi j}\varepsilon \;=\; \Pi_{0j}+\Pi_{\rho j}\rho, \tag{4.30}$$

onde (para ambos $j=1,2$)

$$\Pi_\rho \;=\; \sqrt{\Pi_\phi^2+\Pi_\chi^2} \qquad \text{e} \qquad \rho \;=\; \frac{\Pi_\phi}{\Pi_\rho}\,\varphi \;+\; \frac{\Pi_\chi}{\Pi_\rho}\,\varepsilon\,. \tag{4.31}$$

Aqui, introduzir ρ é análogo ao que se chama derivada direcional na análise de muitas variáveis. Juntamente com a rotação (4.6), esse procedimento pode ser chamado de *dupla diagonalização*, pois inclui a diagonalização no espaço dos campos quânticos e a mudança de "coordenadas" (4.30) no espaço dos campos de fundo. Juntas, essas duas operações reduzem o cálculo em uma teoria com múltiplos campos escalares ao cálculo com um único campo escalar.

Considerando a expansão $\Pi(\phi_0+\varphi,\,\chi_0+\varepsilon)=\Pi_0+\Pi_\rho\rho$ da Eq. (4.30), os coeficientes Π_0 e Π_ρ são constantes. Assim, para cada j,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\left[1+\frac{1}{p^2+\Pi_0}\,\Pi_\rho\rho\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Bigg[&\Pi_\rho\,\frac{1}{p^2+\Pi_0}\,\rho(x)\\ &-\frac{\Pi_\rho^2}{2}\,\frac{1}{p^2+\Pi_0}\,\rho(x)\,\frac{1}{p^2+\Pi_0}\rho(x)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.32}$$

Tomar traços e integrar por partes é essencialmente o mesmo procedimento que foi explicado em detalhes na seção 3.1, e por isso não será reproduzido aqui. Após sua

aplicação, é necessário fazer uma substituição de acordo com (4.30),

$$\frac{1}{24(4\pi)^2}\frac{\Pi_\rho^2}{\Pi_0}\int d^4x\,(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) \;=\; \frac{1}{24(4\pi)^2\,\Pi_0}\int d^4x\Big[\Pi_\phi^2(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \Pi_\chi^2\,(\partial_\mu\varepsilon)(\partial^\mu\varepsilon) \,+\, 2\Pi_\phi\Pi_\chi\,(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varepsilon)\Big]\,. \tag{4.33}$$

Agora, somando as contribuições de Π_1 e Π_2, obtemos o mesmo resultado da Eq. (4.29). Portanto, podemos concluir que é possível obter o mesmo resultado do cálculo direto usando a dupla diagonalização.

Usando a abordagem descrita, podemos obter facilmente $Z^{(1)}$ na primeira ordem em curvatura, simplesmente reformulando o resultado da Eq. (3.25), ou seja,

$$\frac{\tilde{\xi}R}{24(4\pi)^2}\frac{\Pi_\rho^2}{\Pi_0^2}\int d^4x\;(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho)\,. \tag{4.34}$$

Após a mesma substituição feita na Eq. (4.33), o resultado para o modelo bi-escalar, na primeira ordem em curvatura é

$$\begin{aligned}
Z_\phi \;&=\; \frac{1}{12(4\pi)^2}\left[\left(1+\frac{\tilde{\xi}_1 R}{2\Pi_{01}}\right)\frac{\Pi_{\phi1}^2}{\Pi_{01}}+\left(1+\frac{\tilde{\xi}_2 R}{2\Pi_{02}}\right)\frac{\Pi_{\phi2}^2}{\Pi_{02}}\right],\\
Z_\chi \;&=\; \frac{1}{12(4\pi)^2}\left[\left(1+\frac{\tilde{\xi}_1 R}{2\Pi_{01}}\right)\frac{\Pi_{\chi1}^2}{\Pi_{01}}+\left(1+\frac{\tilde{\xi}_2 R}{2\Pi_{02}}\right)\frac{\Pi_{\chi2}^2}{\Pi_{02}}\right],\\
Z_{\chi\phi} \;&=\; \frac{1}{12(4\pi)^2}\left[\left(1+\frac{\tilde{\xi}_1 R}{2\Pi_{01}}\right)\frac{\Pi_{\phi_1}\Pi_{\chi_1}}{\Pi_{01}}+\left(1+\frac{\tilde{\xi}_2 R}{2\Pi_{02}}\right)\frac{\Pi_{\phi_2}\Pi_{\chi_2}}{\Pi_{02}}\right].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

A redução descrita do cálculo com múltiplos campos escalares ao caso de um único campo escalar pode ser aplicada diretamente a um número maior de campos escalares reais. O número de derivadas direcionais (4.30) é sempre igual ao número de campos escalares originais e não esperamos uma degenerescência nessa expansão, ao menos para a maioria dos modelos possíveis com campos reais. A aplicação ao sistema contendo campos escalares reais e complexos (por exemplo, o campo de Higgs mais um inflaton) também é possível, mas requer escrever o campo complexo como dois campos reais e, no caso do campo de Higgs do Modelo Padrão e levar em conta os índices do grupo SU(2).

5 DESACOPLAMENTO

O desacoplamento quântico desempenha um importante papel na construção de teorias efetivas tanto na TQC quanto na gravidade quântica. Conforme estabelecido pelo teorema de Appelquist-Carazzone na eletrodinâmica quântica (QED) [28], as contribuições quânticas de campos com massa elevada M tornam-se desprezíveis em baixas energias, decaindo com a razão k^2/M^2 no limite infravermelho (IR), isto é, quando $k^2 \ll M^2$. Esse comportamento de supressão também é observado, no caso do operador de polarização dos grávitons no contexto da gravidade semiclássica [24] (veja também [8] para uma introdução pedagógica).

A expansão em derivadas é válida quando o campo escalar realiza pequenas oscilações em torno de um ponto de mínimo do potencial. Configuração essa, que se encaixa no cenário do teorema de desacoplamento, permitindo investigar como esse efeito se manifesta no potencial efetivo [1] e nos primeiros coeficientes da expansão em derivadas. Tais oscilações podem ocorrer não apenas ao redor de um mínimo central, mas também na fase de quebra de um potencial do tipo "chapéu mexicano", característico da quebra espontânea de simetria. Em espaço-tempo curvo, essa análise é possível, mas envolve certas dificuldades [30, 31]. No entanto, aqui consideramos apenas oscilações locais em torno do mínimo, de forma a não considerar a origem desse mínimo e trabalhando com a situação básica onde a magnitude do campo escalar permanece pequena.

No caso de um único campo escalar, o desacoplamento é bastante intuitivo. Os logaritmos que aparecem para uma teoria com massa M acompanham as divergências, de forma semelhante à expressão

$$\ln\left(\frac{k^2+M^2}{\mu^2}\right),$$

que surge [2] nos fatores de forma não-locais. Ambos têm origem comum em

$$\mathrm{Tr}\,\ln\left[\Box + M^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2\right].$$

No limite IR, com dominância de M^2 (assinatura euclidiana), encontramos

$$\ln\left(\frac{M^2+k^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2}{\mu^2}\right) \approx \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \frac{k^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2}{M^2} + \ldots, \tag{5.1}$$

o que mostra que não há logaritmos fisicamente relevantes no IR, tanto para os fatores de forma não-locais quanto para o potencial efetivo.

[1] Desde os trabalhos de Heisenberg e Euler [29], sabe-se que, no setor de interações, as correções quânticas se comportam de forma qualitativamente distinta no ultravioleta (UV) e no infravermelho (IR).

[2] A expressão exata é mais complexa [22], mas a diferença em relação à forma simplificada é sublogarítmica no UV, sendo uma boa aproximação.

No caso de dois campos escalares com forte hierarquia de massas, $m \ll M$, aplicamos o método de dupla diagonalização, como descrito anteriormente, que permite reduzir o problema a dois modelos escalares independentes. Após os cálculos padrões [13, 8], o potencial efetivo renormalizado assume a forma

$$V^{(1)}_{\rm ren} \;=\; \frac{\Pi_1^2(\phi,\chi)}{4(4\pi)^2}\,\ln\left[\frac{\Pi_1(\phi,\chi)}{\mu^2}\right] \;+\; \frac{\Pi_2^2(\phi,\chi)}{4(4\pi)^2}\,\ln\left[\frac{\Pi_2(\phi,\chi)}{\mu^2}\right]. \tag{5.2}$$

Vamos considerar o regime onde

$$M^2 \gg \phi^2, \qquad M^2 \gg m^2, \tag{5.3}$$

e também tomamos $m^2 \to 0$. Como discutido, esse é o nosso limite IR. A expectativa, baseada no desacoplamento, é que a contribuição do campo pesado desapareça pelo menos quadraticamente e que não surjam logaritmos relevantes envolvendo M.

Neste limite, o coeficiente definido em (4.9) tende a $\theta \to \infty$, e temos

$$a \approx 1, \quad b \approx 0, \quad c \approx \frac{2\lambda_{12}}{M^2}\phi\chi \approx 0, \tag{5.4}$$

mostrando que a mistura entre os campos quânticos desaparece, como no caso $\lambda_{12} \to 0$ com massas arbitrárias.

Com essa aproximação, temos

$$\begin{aligned} \Pi_1 \;&\approx\; M_{11}^2 \;\approx\; -\,m^2 - \frac{\lambda_1}{2}\,\phi^2 \;-\; \frac{\lambda_{12}}{4}\,\chi^2, \\ \Pi_2 \;&\approx\; -\,M^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

O resultado final do potencial efetivo, omitindo os detalhes intermediários, é

$$\begin{aligned} V^{(1)} \;&=\; \frac{1}{4(4\pi)^2}\left(m^2 + \frac{\lambda_1}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda_{12}}{4}\,\chi^2\right)^2 \ln\left(\frac{m^2 + \frac{\lambda_1}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda_{12}}{4}\,\chi^2}{\mu^2}\right) \\ &+\; \frac{M^4}{4(4\pi)^2}\,\ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

O segundo termo é uma contribuição à constante cosmológica e, portanto, pode ser descartado.

Tomando o limite $m \to 0$ no primeiro termo da equação (5.6), obtemos

$$V^{(1)} \;=\; \frac{\lambda^2\rho^4}{16(4\pi)^2}\ln\left(\frac{\lambda\rho^2}{2\mu^2}\right), \qquad \text{com} \quad \frac{\lambda}{2}\,\rho^2 \;=\; \frac{\lambda_1}{2}\,\phi^2 \;+\; \frac{\lambda_{12}}{4}\,\chi^2. \tag{5.7}$$

Este resultado significa que o potencial efetivo se reduz à contribuição logarítmica de um único campo escalar ρ, que é uma combinação linear dos campos escalares originais. Se $\lambda_{12} = 0$, ρ coincide com o campo leve ϕ. Em todo caso, no limite IR, apenas o campo leve contribui com logaritmos, enquanto o campo pesado desacopla de forma quadrática.

Por fim, analisamos o desacoplamento IR na expansão de derivadas de 1-loop, isto é, nos termos $Z^{(1)}$. O argumento sobre o desaparecimento da mistura (5.4) ainda se aplica, e podemos focar no resultado de um único campo escalar. No limite $M \gg \phi$, temos

$$Z^{(1)}_{\rm IR} \;=\; \frac{\lambda^2}{12(4\pi)^2}\left(1+\frac{\tilde{\xi}R}{2M^2}\right)\frac{\phi^2}{M^2}, \tag{5.8}$$

mostrando desacoplamento quadrático, e para $|R| \ll M^2$, o termo com curvatura R desaparece ainda mais rapidamente.

6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram apresentados os seguintes resultados originais:

1. A determinação da correção de curvatura ao coeficiente cinético no modelo com um campo escalar real, conforme a equação (3.25). O método empregado baseia-se no procedimento desenvolvido em espaço plano na Ref. [6], o qual generalizamos, neste trabalho, para incluir termos até a primeira ordem em curvatura.

2. O método de dupla diagonalização e a determinação dos coeficientes cinéticos para o modelo com dois campos escalares reais com diferentes massas em espaço curvo (4.35).

Em síntese, foi apresentado um método para o cálculo do potencial efetivo e dos termos de primeira ordem na expansão em derivadas, no contexto de uma teoria com dois campos escalares reais e hierarquia de massas. O método da *dupla diagonalização*, adotado ao longo desta dissertação, baseia-se na formulação funcional da ação efetiva [17, 5, 6], oferecendo uma abordagem eficiente para lidar com a estrutura não trivial introduzida pelas massas distintas e pelos acoplamentos entre os campos.

A metodologia proposta foi estruturada em dois passos principais:

(i) a diagonalização do operador $\hat{H}$, associado à parte bilinear da ação;

(ii) a mudança da base de expansão para uma representação em termos das derivadas direcionais dos campos de fundo.

A aplicação dessa técnica ao caso de dois campos escalares evidencia sua eficiência, sendo sua generalização para um número maior de campos bastante direta. Essa metodologia permite realizar a expansão em derivadas de maneira simplificada, tanto no espaço-tempo de Minkowski quanto em variedades com curvatura, ao menos até a ordem linear no escalar de Ricci.

A análise do sistema composto por dois campos escalares, em que há forte hierarquia entre as massas — com um campo pesado dominante e outro leve ou sem massa — evidenciou o fenômeno de desacoplamento quântico no limite infravermelho. Observamos que, nesse regime, as correções quânticas provenientes do campo pesado decrescem quadraticamente com a razão k^2/M^2. Tal comportamento está de acordo com resultados anteriores sobre o desacoplamento infravermelho no setor cinético de campos escalares [22].

Do ponto de vista fenomenológico, nossos resultados implicam que os efeitos quânticos de modelos com dois campos escalares — como os presentes em cenários de inflação assistida [32, 33, 34] — podem ser efetivamente descritos pela dinâmica do campo escalar mais leve, durante a rápida expansão do Universo. Nessa fase, à medida que a

energia típica do sistema diminui, o campo de massa elevada desacopla do setor efetivo de baixas energias, simplificando significativamente a descrição da física relevante.

REFERÊNCIAS

1 A.R. Liddle, A. Mazumdar e F.E. Schunck, *Assisted inflation,* Phys. Rev. D **58** (1998) 061301.

2 D. Wands, *Multiple field inflation,* in *Inflationary Cosmology,* Lecture Notes in Physics, vol. 738 (Springer, Berlin, Heidelberg, 2008) pp. 275–304.

3 A.V. Manohar e M.B. Wise, *Heavy quark physics,* Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **10** (2000).

4 B.L. Hu e D.J. O'Connor, *Effective Lagrangian for $\lambda\phi^4$ theory in curved space-time with varying background fields: quasilocal approximation,* Phys. Rev. D **30** (1984) 743.

5 J. Iliopoulos, C. Itzykson e A. Martin, *Functional methods and perturbation theory,* Rev. Mod. Phys.**47** (1975) 165.

6 C.M. Fraser, *Calculation of higher derivative terms in the one-loop effective Lagrangian,* Z. Phys. C **28** (1985) 101.

7 I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov e I.L. Shapiro, *Effective action in quantum gravity,* (IOP Publishing, 1992).

8 I.L. Buchbinder e I.L. Shapiro, *Introduction to quantum field theory with applications to quantum gravity,* (Oxford University Press, 2021).

9 M.E. Peskin e D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory,* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995).

10 A.Z. Petrov, *Einstein Spaces,* (Pergamon Press, Oxford, 1969).

11 I.L. Shapiro, *Primer in Tensor Analysis and Relativity,* (Springer, New York, 2019).

12 T.S. Bunch e L. Parker, *Feynman propagator in curved space-time: a momentum space representation,* Phys. Rev. D **20** (1979) 2499.

13 F. Sobreira, B.J. Ribeiro e I.L. Shapiro, *Effective potential in curved space and cut-off regularizations,* Phys. Lett. **B705** (2011) 273, arXiv:1107.2262.

14 O. Cheyette, *Derivative Expansion of the Effective Action,* Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2394.

15 A.G. Borges e I.L. Shapiro, *Derivative expansion in a two-scalar field theory* (arXiv:2503.23694, 2025)

16 S.R. Coleman e E.J. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,* Phys. Rev. D7 (1973) 1888.

17 R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential,* Phys. Rev. **D9** (1974) 1686.

18 G.M. Shore, *Radiatively induced spontaneous symmetry breaking and phase transitions in curved space-time,* Annals Phys. **128** (1980) 376.

19 I.L. Buchbinder e S.D. Odintsov, *Effective potential and phase transitions induced by curvature in gauge theories in curved space-time,* Yad. Fiz. **42** (1985) 1268.

20 I.L. Buchbinder e J.J. Wolfengaut, *Renormalization group equations and effective action in curved space-time,* Class. Quant. Grav. **5** (1988) 1127.

21 M. Asorey, W.C. Silva, I.L. Shapiro e P.R.B.d. Vale, *Trace anomaly and induced action for a metric-scalar background,* Eur. Phys. J. **C83** (2023) 157. arXiv:2202.00154.

22 G. de Berredo-Peixoto, E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space,* Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281, hep-th/0311229.

23 A.O. Barvinsky e G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 2: Second order in the curvature. General algorithms,* Nucl. Phys. **B333** (1990) 471.

24 E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Renormalization Group and Decoupling in Curved Space*, JHEP **02** (2003) 021, hep-ph/0210388.

25 S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro e O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity,* Phys. Lett. **B790** (2019) 229, arXiv:1812.00460.

26 A.O. Barvinsky e G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 3: Spectral representations of the third order form-factors,* Nucl. Phys. **B333** (1990) 512; A.O. Barvinsky, Y.V. Gusev, V.V. Zhytnikov e G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory. 4. Third order in the curvature,* arXiv:0911.1168.

27 I.L. Buchbinder, A.R. Rodrigues, E.A. dos Reis e I.L. Shapiro, *Quantum aspects of Yukawa model with scalar and axial scalar fields in curved spacetime,* Eur. Phys. J. C **79** (2019) 1002, arXiv:1910.01731.

28 T. Appelquist e J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields,* Phys. Rev. **D11** (1975) 2856.

29 W. Heisenberg e H. Euler, *Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*, Zeitschrift für Physik **98** (1936) 714.

30 E.V. Gorbar e I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space. 3. The Case of spontaneous symmetry breaking,* JHEP **02** (2004) 060, hep-ph/0311190.

31 M. Asorey, P.M. Lavrov, B.J. Ribeiro e I.L. Shapiro, *Vacuum stress-tensor in SSB theories,* Phys. Rev. **D85** (2012) 104001; arXiv:1202.4235.

32 A. R. Liddle, A. Mazumdar e F.E. Schunck, *Assisted inflation,* Phys. Rev. D **58** (1998) 061301.

33 D. Wands, *Multiple field inflation,* in *Inflationary Cosmology* (Springer Berlin Heidelberg, 2008) pp. 275–304.

34 C. M. Peterson e M. Tegmark, *Testing Two-Field Inflation,* Phys. Rev. D **83** (2011) 023522.

35 L. D. C. C. Lima e I. L. Shapiro, *On the new way of symmetry breaking in scalar QED and the one-loop renormalization,* arXiv:2505.01483 .