

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Christian de Castro Ferreira

**Estudo de ondas viajantes em um modelo de escoamento de espuma com
partição de surfactante**

Juiz de Fora

2025

Christian de Castro Ferreira

**Estudo de ondas viajantes em um modelo de escoamento de espuma com
partição de surfactante**

Dissertação apresentada ao Programa de pós graduação em matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Coorientador: Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ferreira, Christian de Castro.

Estudo de ondas viajantes em um modelo de escoamento de espuma
com partição de surfactante / Christian de Castro Ferreira. – 2025.

69 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Luis Fernando Lozano Guerrero

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de pós graduação em matemática, 2025.

1. Escoamento em meios porosos. 2. Espumas. 3. Ondas viajantes.
4. Partição de surfactante, I. Chapiro, Grigori, orient. II. Lozano, Luis
Fernando, coorient. III. Título.

Christian de Castro Ferreira

Estudo de ondas viajantes em um modelo de escoamento de espuma com partição de surfactante

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 19 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Andrés Julián Castrillón Vásquez
University of Valle

Prof^a. Dr^a. Rosmery Violeta Quispe Zavala
Universidad Católica San Pablo

Juiz de Fora, 21/08/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Grigori Chapiro, Professor(a)**, em 21/08/2025, às 08:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **LUIS FERNANDO LOZANO GUERRERO, Usuário Externo**, em 21/08/2025, às 08:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andres Julian Castrillon Vasquez, Usuário Externo**, em 21/08/2025, às 09:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rosmery Violeta Quispe Zavala, Usuário Externo**, em 21/08/2025, às 17:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2567817** e o código CRC **53526AA2**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Cacilda Juscelina de Castro Ferreira e José Tarcísio Viana Ferreira, pelo suporte incondicional e seus ensinamentos que me inspiraram a seguir em frente. À minha namorada, Amanda de Andrade Dionisio, por estar presente nos momentos difíceis, oferecendo incentivo constante e ajudando a manter o foco ao longo desta jornada.

Ao meu orientador, Grigori Chapiro, e ao meu coorientador, Luis Fernando Lozano Guerrero, agradeço pela orientação, paciência, suporte e disponibilidade durante o desenvolvimento deste trabalho. Aos colegas e colaboradores do LAMAP, pela cooperação e auxílio ao longo do projeto.

E, por fim, aos amigos do mestrado, pelo companheirismo durante essa etapa.

O autor agradece o apoio da Shell Brasil através do projeto “Avançando na modelagem matemática e computacional para apoiar a implementação da tecnologia ‘Foam-assisted WAG’ em reservatórios do Pré-sal” (ANP 23518-4) na UFJF e a importância estratégica do apoio dado pela ANP através do regulamento da taxa de P&D.

Dedico este trabalho a minha família.

RESUMO

A eficiência da recuperação avançada de petróleo (EOR) é frequentemente comprometida pela alta mobilidade dos gases injetados e pela heterogeneidade dos reservatórios, que favorecem fenômenos como fingering e segregação gravitacional. Nesse contexto, a utilização de espumas, formadas a partir da injeção de surfactantes, surge como uma alternativa promissora para aumentar a eficiência da varredura do reservatório. Contudo, quando o gás injetado é o CO_2 , a solubilidade parcial de certos surfactantes na fase gasosa pode afetar significativamente a dinâmica da espuma. Este trabalho é motivado pela necessidade de compreender o impacto da partição do surfactante entre as fases aquosa e gasosa na propagação da espuma em meios porosos.

Para isso, é analisado um modelo simplificado de deslocamento de espuma composto pelas equações de balanço de massa da água e conservação do surfactante, com dado inicial do tipo Riemann. Supondo a existência de soluções do tipo onda viajante, as equações diferenciais parciais são reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias. A análise qualitativa desse sistema, fundamentada na teoria de sistemas dinâmicos e fluxo fracionário, permite localizar e classificar os pontos de equilíbrio no espaço de fase. A formulação considera efeitos como a pressão capilar, o fator de mobilidade da espuma e o coeficiente de partição do surfactante. O estudo contempla, ainda, a existência de órbitas heteroclínicas que conectam estados estáveis da solução.

Os resultados teóricos são complementados por simulações numéricas que apresentam os perfis de ondas viajantes associados ao modelo. A análise mostra que um modelo que considera a partição do surfactante entre as fases pode apresentar diferentes estruturas de soluções, a depender da posição dos equilíbrios no espaço de fase. A presença de múltiplos pontos de equilíbrio e a natureza de suas classificações demonstram a complexidade do sistema e a sensibilidade das soluções a mudanças nas condições iniciais e nos parâmetros físicos. Tais achados contribuem para uma melhor compreensão dos mecanismos de controle de mobilidade em processos de EOR com espumas.

Palavras chave: escoamento em meios porosos; espumas; partição do surfactante; ondas viajantes.

ABSTRACT

The efficiency of enhanced oil recovery (EOR) is often compromised by the high mobility of injected gases and the heterogeneity of reservoirs, which favor phenomena such as fingering and gravitational segregation. In this context, the use of foams, generated through the injection of surfactants, emerges as a promising alternative to improve the sweep efficiency of the reservoir. However, when the injected gas is CO₂, the partial solubility of certain surfactants in the gas phase can significantly affect foam dynamics. This work is motivated by the need to understand the impact of surfactant partitioning between aqueous and gas phases on foam propagation in porous media.

To this end, a simplified model of foam displacement is analyzed, consisting of mass balance equations for water and surfactant conservation, with initial data of Riemann type. Assuming the existence of traveling wave solutions, the partial differential equations are reduced to a system of ordinary differential equations. The qualitative analysis of this system, based on dynamical systems theory and fractional flow, enables the identification and classification of equilibrium points in the phase space. The formulation incorporates effects such as capillary pressure, foam mobility factor, and surfactant partition coefficient. The study also explores the existence of heteroclinic orbits connecting stable states of the solution.

The theoretical results are complemented by numerical simulations that present the traveling wave profiles associated with the model. The analysis shows that a model accounting for surfactant partitioning between phases can exhibit different solution structures, depending on the position of the equilibria in phase space. The presence of multiple equilibrium points and the nature of their classifications highlight the system's complexity and the sensitivity of the solutions to changes in initial conditions and physical parameters. These findings contribute to a better understanding of mobility control mechanisms in EOR processes involving foams.

Keywords: porous media flow; foams; surfactant partitioning; traveling waves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação secundária. | 14 |
| Ilustração comparativa da recuperação de um reservatório por meio de injeção de gás e de espuma. | 15 |
| Curvas de permeabilidade relativa. | 26 |
| Interseções entre a função f_w^{LE} e as retas R | 39 |
| Comportamento do autovalor λ_1 avaliado no estado U^- | 45 |
| Comportamento do autovalor λ_2 avaliado no estado U^- | 46 |
| Comportamento do autovalor λ_1 avaliado no estado U^+ | 46 |
| Comportamento do autovalor λ_2 avaliado no estado U^+ | 47 |
| $f_w(S_w^b) > f_w(S_w^i)$ | 47 |
| $f_w(S_w^b) < f_w(S_w^i)$ | 47 |
| Classificação dos equilíbrios no espaço de fase $[S_{wc}, 1 - S_{gr}] \times [0, +\infty)$, considerando $S_w^+ = 0.9499999$ | 49 |
| Subdivisões da Região <i>II</i> de acordo com o número de equilíbrios e suas posições no espaço de fase. | 53 |
| Subdivisões da fronteira que separa as Regiões <i>II</i> e Região <i>III</i> | 53 |
| Espaço de fase do Sistema de EDOs para $(S_w^-, C^-) = (0.3646, 1)$ | 58 |
| Perfis da solução numérica para $(S_w^-, C^-) = (0.3646, 1)$ | 58 |
| Espaço de fase do Sistema de EDOs para $(S_w^-, C^-) = (0.2, 1)$ | 59 |
| Perfis da solução numérica para $(S_w^-, C^-) = (0.2, 1)$ | 59 |
| Comparação numérica da solução obtida no RCD com o Caso I de Zeng et al. [93]. | 59 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 1 – Parâmetros do Modelo. | 38 |
| Tabela 2 – Classificação dos equilíbrios (S_w^-, C^-) e (S_w^+, C^+) para cada região mostrada na Fig. 2. | 49 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-------|--|
| CMC | Critical micelle concentration - Concentração micelar crítica |
| STARS | Software comercial de simulação |
| E&P | Exploração e Produção |
| EDO | Equação diferencial ordinária |
| EDP | Equação diferencial parcial |
| EOR | Enhanced Oil Recovery - Recuperação avançada de petróleo |
| PVI | Problema de valor inicial |
| SAG | Surfactant-alternating-gas - Injeção alternada de solução de surfactante e gás |
| WAG | Water-alternating-gas - Injeção alternada de água e gás |
| WAGS | Water-Alternating-Gas with Surfactant in Gas |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--|--|
| \forall | Para todo |
| \in | Pertence |
| $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$ | Derivadas parciais com respeito a x e t |
| λ_1, λ_2 | Autovalores da matriz Jacobiana |
| $U_0(x)$ | Condição inicial |
| U^-, U^+ | Condição à esquerda e à direita do problema de Riemann |
| w, g | Subíndices das fases aquosa e gasosa |
| S_w, S_g | Saturação das fases |
| f_w, f_g | Fluxo fracionário das fases |
| C_{sw}, C_{sg} | Concentração de surfactante das fases |
| K_{sgw} | Coefficiente de partição do surfactante |
| n_D | Textura da espuma |
| n_D^{LE} | Textura da espuma em equilíbrio local |
| Ψ | Função de ajuste da textura da espuma |
| S_{wc}, S_{gr} | Saturações de água conata e gás residual |
| P_c | Pressão capilar |
| k | Permeabilidade do meio poroso |
| u | Velocidade total de Darcy |
| u_w, u_g | Velocidades parciais de Darcy |
| v | Velocidade intersticial total |
| k_{rw}, k_{rg} | Permeabilidades relativas das fases |
| k_{rg}^f | Permeabilidade relativa do gás na presença de espuma |
| λ_w, λ_g | Mobilidade das fases |
| μ_w, μ_g | Viscosidade das fases |
| λ_w, λ_g | Mobilidade das fases |
| MRF | Fator redução de mobilidade |
| ϕ | Porosidade do meio poroso |
| σ_{wg} | Tensão superficial entre água e gás |
| Ω | Termo fonte do balanço de espuma |
| ξ | Variável do sistema de ondas viajantes |
| v | Velocidade de propagação da onda viajante |
| v_s | Parâmetro de controle no estudo de bifurcações |
| K | Permeabilidade do meio poroso |
| $fmmob$ | Fator de redução de mobilidade de referência |
| $epdry$ | Declive dos efeitos de secagem |
| $fmdry$ | Saturação crítica da água |
| $fmsurf$ | Parâmetro da resistência de espuma |
| $epsurf$ | Expoente da Concentração de surfactante na CMC |
| \mathcal{T} | Fronteira de transição |
| $u(x)$ | Velocidade de escoamento |

| | |
|------------|-----------------------------------|
| $k(x)$ | Tensor de permeabilidades |
| ρ | Densidade do fluido |
| g | Aceleração da gravidade |
| ∇P | Gradiente de pressão |
| $J_f(U)$ | Matriz Jacobiana do fluxo |
| C | Concentração do surfactante |
| G | Função de adsorção de surfactante |

SUMÁRIO

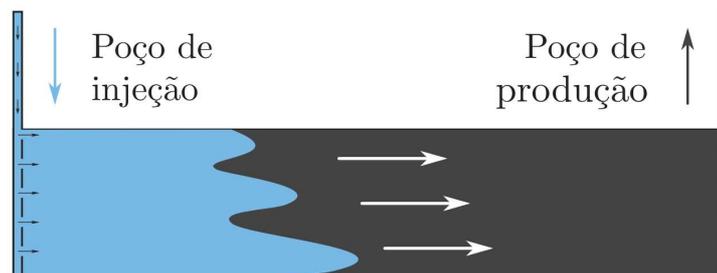
| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 15 |
| 1.2 | ORGANIZAÇÃO DO TEXTO | 17 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 18 |
| 2.1 | LEIS DE CONSERVAÇÃO | 18 |
| 2.2 | EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS | 18 |
| 2.2.1 | Teoria Qualitativa de EDOs | 19 |
| 2.2.2 | Sistemas Autônomos | 19 |
| 2.2.3 | Bifurcações Locais | 22 |
| 3 | TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO | 24 |
| 3.1 | ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS | 24 |
| 3.1.1 | Lei de Darcy | 24 |
| 3.2 | ESPUMAS | 27 |
| 3.3 | DEDUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO COM PARTIÇÃO DO SURFAC- TANTE | 28 |
| 4 | SOLUÇÃO NA FORMA DE ONDAS VIAJANTES | 31 |
| 4.1 | ONDAS VIAJANTES | 31 |
| 4.2 | FORMULAÇÃO DAS EDOs PARA O PERFIL DA ONDA VIAJANTE | 32 |
| 4.3 | LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO | 36 |
| 4.4 | NÚMERO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO | 37 |
| 4.5 | CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO | 41 |
| 4.5.1 | Estudo numérico dos pontos de equilíbrio | 52 |
| 4.6 | VALIDAÇÃO NUMÉRICA | 56 |
| 5 | CONCLUSÃO | 61 |
| 5.1 | TRABALHOS FUTUROS | 61 |
| | REFERÊNCIAS | 63 |

1 INTRODUÇÃO

Reservatórios petrolíferos são sistemas geológicos constituídos por rochas porosas que armazenam hidrocarbonetos (como petróleo e gás) [24]. Visando extrair o óleo presente no reservatório, as companhias de exploração e produção (E&P) perfuram poços e aplicam técnicas para melhorar a eficiência da recuperação e não causar impactos ambientais¹. Assim, se faz necessário o estudo de modelos matemáticos confiáveis para caracterizar o deslocamento dos fluidos em meios porosos.

Existem três estágios que descrevem a recuperação de petróleo [54]. O processo de extração natural é denominado recuperação primária, que ocorre quando a própria energia do reservatório é suficiente para a produção de óleo [50]. À medida que a pressão entre o campo petrolífero e a atmosfera se equilibram, a taxa de produção de petróleo cai, sendo necessário mudar a estratégia de recuperação [22]. A recuperação secundária é o estágio onde se injeta água ou gás em um poço do reservatório a fim de manter uma pressão suficiente para deslocar o óleo em direção ao poço produtor (ver Figura 1).

Figura 1: Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação secundária.



Fonte: Cedro [17].

No entanto, as técnicas de recuperação primária e secundária são limitadas, já que cerca de 65% a 75% do óleo existente no reservatório permanece não recuperado [8, 87]. Nesse contexto, surge a recuperação avançada de petróleo (EOR – Enhanced Oil Recovery)², que é qualquer processo após as recuperações primária e secundária [39, 54]. Os métodos EOR são tradicionalmente classificados em cinco categorias principais [39], as quais incluem: métodos térmicos, que utilizam calor para reduzir a viscosidade do óleo, como a combustão in-situ [19, 21]; métodos miscíveis, nos quais solventes ou gases miscíveis com o óleo são injetados para melhorar sua mobilidade [23]; e métodos químicos, que utilizam polímeros ou surfactantes com o objetivo de reduzir a mobilidade do gás por meio da formação de espumas no meio poroso e, assim, aumentar a eficiência da varredura [3, 34, 52, 93]. Este último constitui o foco do presente trabalho.

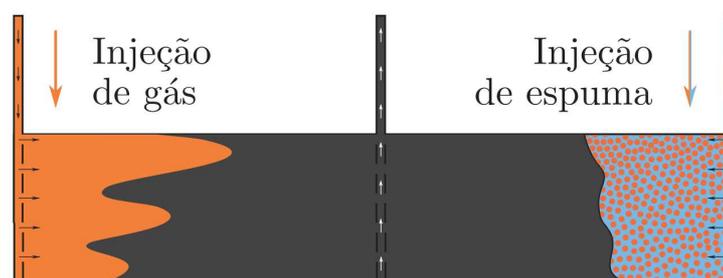
¹ Acordo de Paris de 2016: Redução da emissão de gases que promovem o efeito estufa.

² O termo “recuperação terciária” caiu em desuso na literatura de engenharia de petróleo, e a denominação “recuperação avançada de petróleo” (EOR) tornou-se mais aceita.

Um dos principais desafios das técnicas EOR está associado à dinâmica dos fluidos e à heterogeneidade do reservatório, que favorecem fenômenos como fingering [46] e segregação gravitacional (gravity override) [11, 29]. No primeiro caso, a variação na permeabilidade do meio poroso cria caminhos preferenciais para fluidos de maior mobilidade, resultando em frentes de varredura irregulares (a frente se assemelha a “dedos”, como ilustrado na Figura 1); ao atingirem prematuramente o poço de produção, esses caminhos reduzem a eficiência do processo, pois parte do fluido produzido passa a ser o próprio injetado. No segundo caso, diferenças de densidade entre os fluidos provocam segregação gravitacional, onde os fluidos menos densos migram para o topo do reservatório e os mais densos para as regiões inferiores, o que também compromete a eficiência da recuperação.

Para mitigar a perda de eficiência causada pela alta mobilidade dos gases injetados, técnicas EOR como a injeção alternada de água e gás (water-alternating-gas - WAG) buscam tornar a varredura do reservatório mais uniforme, alternando fluidos de diferentes densidades. Uma estratégia comum em processos WAG é a reinjeção de CO_2 , frequentemente presente em elevadas concentrações em reservatórios, como os do pré-sal brasileiro, onde o gás produzido pode conter até 45% de CO_2 . No entanto, mesmo com maior eficiência em relação à injeção convencional de gás ou água, os métodos WAG ainda enfrentam limitações relacionadas à alta mobilidade e baixa densidade do gás. Sendo assim, uma alternativa é a injeção alternada de surfactante e gás (surfactant-alternating-gas - SAG), em que o surfactante na fase aquosa forma espuma no meio poroso, restringindo o fluxo do gás (Figura 2 a seguir). Há também o processo WAGS (Water-Alternating-Gas with Surfactant in Gas), no qual o surfactante é injetado juntamente com o gás, contribuindo de forma similar para o controle da mobilidade [56].

Figura 2: Ilustração comparativa da recuperação de um reservatório por meio de injeção de gás e de espuma.



Fonte: Cedro [17].

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O escoamento de espuma têm atraído um grande interesse dos pesquisadores, tanto por suas aplicações em questões ambientais, como a recuperação de aquíferos e solos contaminados [44, 89], quanto por sua relevância na indústria do petróleo, especialmente em processos de EOR [74]. A previsão do comportamento da espuma em meios porosos

exige o uso de modelos matemáticos apropriados que, de modo geral, podem ser classificados em mecanicistas e empíricos [42]. Nos modelos mecanicistas, a textura da espuma é considerada uma variável independente, cuja evolução no meio poroso é descrita por uma equação diferencial própria. Essa equação é responsável pelos processos de geração, transporte e destruição da espuma no meio poroso [3, 59, 92, 96]. Essa abordagem, embora mais complexa, apresenta melhor aderência aos dados experimentais [9, 33, 52, 79] e confere maior precisão física. Em contraste, nos modelos empíricos, a textura da espuma aparece de forma implícita, e seus efeitos no escoamento são representados por meio da modificação do termo responsável pela mobilidade das fases. Embora essa abordagem simplifique a descrição física do fenômeno, ela proporciona maior estabilidade numérica e é amplamente utilizada em simuladores comerciais [60, 82]. Esta última abordagem é adotada no presente trabalho.

Devido à complexidade das equações envolvidas e à novidade do tema, a literatura matemática sobre modelos de deslocamento de espuma ainda é limitada e carece de uma análise rigorosa. Nos últimos anos, entretanto, houve avanços significativos na modelagem matemática desse fenômeno, no que diz respeito à classificação de soluções do tipo onda viajante [2, 3, 16, 59, 60, 61, 68, 91, 92]. Essas soluções são inspiradas por evidências experimentais que indicam que a frente de espuma se propaga de maneira semelhante a uma onda, preservando seu perfil ao longo do tempo [48, 49, 52, 53, 78, 79]. Do ponto de vista matemático, essa abordagem permite explorar uma simetria que reduz o sistema original a equações diferenciais ordinárias (EDOs) que conectam estados de equilíbrio [88]. Neste trabalho, seguimos essa linha de análise e investigamos a existência de soluções do tipo onda viajante para um modelo simplificado de deslocamento de espuma.

As observações experimentais que motivam esse tipo de modelagem, no entanto, foram realizadas com concentrações de surfactante acima da concentração micelar crítica (CMC), onde a espuma é estável. De fato, há uma literatura extensa sobre os aspectos experimentais da formação e propagação de espumas em meios porosos [13, 43, 79], mas a maioria desses trabalhos utiliza concentrações de surfactante significativamente superiores à CMC. Embora tal escolha seja prática em laboratório, no contexto de aplicações em campo, a concentração pode ser reduzida substancialmente devido à adsorção nas rochas do reservatório [83].

Em injeções com CO_2 , a partição do surfactante entre as fases gasosa e aquosa afeta diretamente a propagação da espuma, conforme evidenciado em [1, 71, 72, 93]. Surfactantes iônicos e zwitteriônicos comumente utilizados (como AOS, DTAB e LB) são insolúveis na fase gasosa e devem ser injetados com a água, enquanto alguns não-iônicos, como álcoois etoxilados, apresentam solubilidade em CO_2 e podem ser co-injetados com o gás [90]. Entre os surfactantes solúveis em CO_2 , destacam-se as aminas etoxiladas, que podem mudar de forma não-iônica para catiônica por protonação, dependendo do pH da solução [25]. Após a injeção, esses compostos se dissolvem na fase aquosa e favorecem

a formação de espuma [30]. O efeito de particionamento entre as fases é descrito pelo coeficiente de partição

$$K_{sgw} = \frac{C_{sg}}{C_{sw}}, \quad (1.1)$$

onde C_{sg} e C_{sw} representam, respectivamente, a concentração de surfactante nas fases gasosa e aquosa em condição de equilíbrio. A compreensão desse coeficiente é essencial para a modelagem do transporte de espuma no reservatório.

O presente trabalho insere-se nessa linha de pesquisa, propondo uma análise do deslocamento de espuma em meio poroso a partir do modelo abordado em [93]. Este modelo é constituído por duas equações: o balanço de massa de água e a conservação do surfactante. Para este estudo, consideramos diferentes concentrações de surfactante e investigamos o efeito da partição entre as fases, com o intuito de obter uma formulação mais simples e passível de tratamento analítico. A metodologia empregada baseia-se na transformação do sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias por meio da hipótese de solução na forma de onda viajante. Tal abordagem permite estudar a existência e a classificação das soluções no espaço de fase, utilizando técnicas da teoria qualitativa de EDOs e da teoria do fluxo fracionário [22, 27, 81]. Analisamos o espaço de parâmetros do modelo, identificando quatro regiões distintas segundo o tipo de solução gerada, e focamos nossa investigação na existência de soluções em uma dessas regiões, que se destacam por suas diferentes classificações no espaço de fase.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. O Capítulo 2 aborda a fundamentação teórica, bem como leis de conservação e elementos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. O Capítulo 3 apresenta o modelo matemático adotado, com ênfase na formulação das equações de conservação e na inclusão da partição do surfactante. O Capítulo 4 apresenta a análise das soluções na forma de ondas viajantes, incluindo os principais resultados obtidos e exemplos numéricos que ilustram o comportamento das soluções em diferentes regimes. O Capítulo 5 expõe as conclusões e possíveis extensões do trabalho, como a variação do coeficiente de partição e a inclusão da adsorção.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção apresenta os principais conceitos teóricos relacionados às leis de conservação e às equações diferenciais ordinárias (EDOs), que são essenciais para a construção e análise do modelo matemático desenvolvido neste trabalho.

2.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Leis de conservação são Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que descrevem a evolução de fenômenos físicos com alguma quantidade mensurável invariante no tempo. Para o caso unidimensional, podemos descrever um sistema de n leis de conservação como [57]:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} F(U(x, t)) = 0, \quad (2.1)$$

onde $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor n -dimensional de quantidades conservadas ou variáveis de estado, como massa, momento e energia; e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de função de fluxo [57]. Podemos reescrever o sistema (2.1) na sua forma quasilinear [86]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

onde $A(U) = J_f(U)$ é a matriz Jacobiana $n \times n$ de F .

Para resolver o sistema (2.2), podemos definir o **Problema de Cauchy** (também chamado problema de valor inicial ou PVI), que consiste em encontrar a função $U(x, t)$ que satisfaz o sistema para todo (x, t) pertencente a um domínio $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, a partir da condição inicial

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

onde $U_0(x)$ é uma função conhecida que define o estado inicial do sistema.

Um caso particular do problema de Cauchy, muito utilizado na teoria de leis de conservação e no desenvolvimento de métodos numéricos, é o **Problema de Riemann**, no qual a condição inicial apresenta uma descontinuidade em forma de salto [57, 84]:

$$U_0(x) = \begin{cases} U^-, & x < 0, \\ U^+, & x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde U^- e U^+ representam os estados à esquerda (condição de injeção) e à direita (condição inicial) de $x = 0$, respectivamente. Os índices “-”, “+” indicam que a expressão fornecida é avaliada nos estados esquerdo e direito da onda [57].

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Equações Diferenciais Ordinárias são um componente-chave para o estudo de modelos matemáticos, auxiliando na interpretação e previsão da dinâmica de fenômenos

encontrados na natureza. Elas descrevem a evolução de variáveis dependentes em relação a uma única variável independente (normalmente o tempo), para converter fenômenos complexos em expressões matemáticas acessíveis, permitindo a obtenção de características quantitativas e qualitativas do sistema.

2.2.1 Teoria Qualitativa de EDOs

A partir deste ponto, considere Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Definição 2.2.1. *Um **campo vetorial** de classe C^k , com $1 \leq k \leq \infty$ é uma aplicação $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k que associa a cada ponto U em Δ um vetor $f(U)$ em \mathbb{R}^n .*

Ao campo vetorial f associamos a equação diferencial:

$$U' = f(U). \quad (2.5)$$

2.2.2 Sistemas Autônomos

Considere um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma:

$$\begin{cases} U_1' = f_1(U_1, \dots, U_n), \\ U_2' = f_2(U_1, \dots, U_n), \\ \vdots \\ U_n' = f_n(U_1, \dots, U_n), \end{cases} \quad (2.6)$$

em que cada função f_i depende apenas das variáveis do sistema, e não explicitamente do tempo. Esse tipo de sistema é denominado **autônomo**. As variáveis U_1, U_2, \dots, U_n são chamadas variáveis de estado, pois representam a configuração do sistema em um dado instante.

Definição 2.2.2. *Uma aplicação diferencial $\mathcal{X} : I \rightarrow \Delta$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{X}(t) = f(\mathcal{X}(t)), \quad (2.7)$$

*para todo $t \in I$, é uma solução para a Equação (2.5) no intervalo I (intervalo da reta). São chamadas **trajetórias** ou **curvas integrais** de f ou da equação diferencial (2.5).*

Definição 2.2.3. *Um ponto $U_0 \in \Delta$ é chamado **ponto crítico** (ou de equilíbrio) do sistema autônomo (2.5) se $f(U_0) = 0$.*

Definição 2.2.4. *Considere o sistema (2.2). Dizemos que este sistema é **hiperbólico** quando, para cada valor de U , os autovalores*

$$\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U) \quad (2.8)$$

*da matriz jacobiana $J_f(U)$ são reais e a matriz é diagonalizável. Quando estes autovalores são distintos, dizemos que o sistema (2.2) é **estritamente hiperbólico**.*

Definição 2.2.5. *Seja $U \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico bidimensional $U' = f(U)$, e seja $J_f(U)$ a matriz jacobiana de f avaliada em U . A seguir, classificamos os tipos de equilíbrio com base nos autovalores λ_1 e λ_2 de $J_f(U)$:*

1. **Autovalores reais e distintos**, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sendo $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

- *Nó estável (ou atrator): se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;*
- *Nó instável (ou repulsor): se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;*
- *Ponto de sela: se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.*

2. **Autovalor nulo:** $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ (ou vice-versa). Neste caso, o ponto de equilíbrio é não hiperbólico, e a análise qualitativa exige técnicas adicionais, como teoria de bifurcações ou análise da variedade central.

Definição 2.2.6. *Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , e considere a equação diferencial $U'(t) = f(U(t))$. Seja $D = \{(t, U); U \in \Delta, t \in I_U\}$ um conjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} . A aplicação $\varphi : D \rightarrow \Delta$, dada por $\varphi(t, U) = \varphi_t(U)$, é chamada de **fluxo gerado por f** se, para cada $U \in \Delta$, a função $\varphi(t, U)$ satisfaz a equação $\frac{d}{dt}\varphi(t, U) = f(\varphi(t, U))$, com condição inicial $\varphi(0, U) = U$.*

Definição 2.2.7. *Dizemos que um conjunto $\Gamma \subset \Delta$ é **invariante** pelo fluxo φ_t de um campo $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ se $\varphi_t(\Gamma) \subset \Gamma$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.2.8. *O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de $f(U)$ pelo ponto p , chama-se **órbita** de $f(U)$ que passa pelo ponto p , onde I_p é um intervalo aberto.*

Definição 2.2.9. *Sejam $U^\pm \in \mathbb{R}^n$ pontos de equilíbrio. Dizemos que uma solução $U(t)$ de (2.5) é uma **órbita heteroclínica** se $U(t) \rightarrow U^\pm$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, onde $U^+ \neq U^-$. Se $U^+ = U^-$, dizemos que $U(t)$ é uma **órbita homoclínica** (Assumindo tacitamente que $U(t)$ não é a própria solução de equilíbrio) [45].*

Teorema 2.2.10 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $U_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio do campo vetorial $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e ϕ_t o fluxo do sistema (2.5). Suponha que a matriz $J_f(U_0)$ (matriz jacobiana de f calculada em U_0) não tenha autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, contendo a origem, em um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, contendo U_0 , tal que, para cada $U \in X$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo a origem, tal que para todo $U \in X$ e $t \in I_0$,*

$$H \circ \phi_t(U) = e^{At} H(U).$$

Ou seja, H mapeia trajetórias do sistema (2.5) próximas a U_0 em trajetórias do sistema linear associado próximas à origem e preserva a parametrização.

Demonstração. Ver [81]. □

Em resumo, o Teorema de Hartman-Grobman garante que o comportamento próximo aos equilíbrios do sistema não linear é topologicamente equivalente ao sistema linearizado. No caso hiperbólico, isto é, quando todos os autovalores da matriz jacobiana têm parte real distinta de zero, a equivalência topológica garante que a dinâmica local do sistema não linear é qualitativamente a mesma do sistema linearizado, preservando a orientação do tempo e o tipo de equilíbrio (como nó, foco ou sela, dadas na Definição 2.2.5) [70].

Definição 2.2.11. *Suponha que a matriz $J_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possua k autovalores negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, e $n-k$ autovalores positivos $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, sendo todos esses autovalores distintos. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto correspondente de autovetores. Então, os subespaços estável e instável do sistema linear (1), denotados por E^s e E^u , são os subespaços lineares gerados por $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$, respectivamente; ou seja,*

$$E^s = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}, \quad E^u = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Se a matriz J_f possuir autovalores puramente imaginários, então existe também um subespaço central, denotado por E^c .

Definição 2.2.12. *Seja U_0 um ponto de equilíbrio de um campo vetorial $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ e seja φ_t o fluxo do sistema não linear (2.5). A variedade estável associada ao campo vetorial f no ponto de equilíbrio U_0 é o conjunto de todos os pontos cuja trajetória, sob a ação do fluxo, converge para U_0 à medida que $t \rightarrow +\infty$ ou seja:*

$$W^s(U_0) = \{U \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t = U_0\}. \quad (2.9)$$

De maneira análoga, a variedade instável associada ao campo vetorial f no equilíbrio U_0 é o conjunto dos pontos cujas trajetórias convergem para U_0 quando $t \rightarrow -\infty$:

$$W^u(U_0) = \{U \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t = U_0\}. \quad (2.10)$$

Teorema 2.2.13 (Teorema da Variedade Estável). *Seja U_0 um ponto de equilíbrio hiperbólico de um campo vetorial $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e seja φ_t o fluxo do sistema não linear (2.5). Então, existe uma vizinhança V de U_0 tal que:*

1. $W_{loc}^s(U_0) = \{U \in V \mid \varphi_t(U) \in V, \forall t \geq 0\}$.
2. $W_{loc}^s(U_0)$ é uma subvariedade de classe C^k e tem dimensão igual ao índice $i(U_0)$ de estabilidade de U_0 . O espaço tangente de $W_{loc}^s(U_0)$ coincide com E^s , o subespaço estável da matriz $J_f(U_0)$.

Além disso, para a subvariedade tangente ao subespaço instável, temos

3. $W_{loc}^u(U_0) = \{x \in V \mid \varphi_t(U) \in V, \forall t \leq 0\}$.

4. $W_{loc}^u(U_0)$ é uma subvariedade de classe C^k e tem dimensão $n - i(U_0)$. O espaço tangente de $W_{loc}^u(U_0)$ coincide com E^u , o subespaço estável da matriz $Jf(U_0)$.

Demonstração. Ver [81]. □

2.2.3 Bifurcações Locais

A teoria das bifurcações trata da análise de como alterações em parâmetros de um sistema dinâmico podem ocasionar mudanças na estrutura das soluções. Em particular, examina-se o comportamento das soluções de equilíbrio de sistemas que dependem de parâmetros, como no caso de equações diferenciais ordinárias (EDOs) [94]. Essa abordagem é utilizada em diversas disciplinas, incluindo Biologia [51] e Física [38], com destaque para aplicações na teoria de sistemas dinâmicos. Nesse contexto, Poincaré introduziu o termo “bifurcação” como a mudança estrutural nos conjuntos de soluções de equilíbrio em famílias paramétricas de equações diferenciais.

Considere, por exemplo, o sistema de EDOs parametrizado:

$$\dot{U} = f(U, v_s), \quad U \in \mathbb{R}^2, \quad v_s \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Os pontos de equilíbrio desse sistema são obtidos a partir da condição $f(U, v_s) = 0$. Diz-se que ocorre uma bifurcação local no ponto (U_0, v_{s0}) quando a matriz Jacobiana $J_f(U_0, v_{s0})$ apresenta pelo menos um autovalor com parte real igual a zero. De acordo com o teorema da função implícita, os equilíbrios do sistema podem ser descritos por funções diferenciáveis em v_s , exceto nos pontos em que o Jacobiano possui autovalores nulos. Esses equilíbrios, em função do parâmetro, formam curvas no espaço de fase denominadas ramos. Quando tais ramos se encontram ou mudam de estabilidade, ocorrem os chamados pontos de bifurcação.

Observação 2.2.14. *Nos pontos de bifurcação, o sistema perde a propriedade de hiperbolicidade dos equilíbrios. As mudanças na configuração do retrato de fase podem ser restritas a vizinhanças dos pontos de equilíbrio associados, sendo essas mudanças controladas por pequenas variações no parâmetro v_s ao redor do ponto crítico [40].*

As bifurcações podem ser classificadas como locais e globais, onde alguns exemplos de bifurcações locais incluem [40]:

- Sela-nó, onde dois pontos fixos colidem e se anulam.
- Pitchfork, onde um estado estável se divide em múltiplas soluções.
- Hopf, que dá origem a oscilações periódicas a partir de um equilíbrio.

- Transcrítica, caracterizada por um equilíbrio cujo autovalor possui parte real que atravessa zero. Tanto antes quanto depois da bifurcação, há um ponto fixo instável e um ponto fixo estável. No entanto, quando esses equilíbrios colidem, eles trocam suas estabilidades (o ponto fixo instável torna-se estável e vice-versa).

3 TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO

3.1 ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS

Conforme [5], um meio poroso é definido como um sistema formado por uma fase sólida, chamada matriz porosa, e por espaços vazios, denominados poros, os quais encontram-se ocupados por um ou mais fluidos. A porosidade ϕ da rocha é definida como a razão entre o volume dos poros acessíveis (V_{poros}) e o volume total da rocha (V) [67]:

$$\phi = \frac{V_{poros}}{V}. \quad (3.1)$$

Para cada fase j , define-se a saturação S_j como a fração do volume de poros ocupada pela fase j [75]:

$$S_j = \frac{V_j}{V_{poros}}. \quad (3.2)$$

Um meio poroso é considerado totalmente saturado se todo o espaço for ocupado pelas fases presentes, ou seja:

$$\sum_j S_j = 1. \quad (3.3)$$

3.1.1 Lei de Darcy

Para obter uma análise quantitativa do fluxo de fluidos em meios porosos, necessário compreender os princípios físicos que regem esse comportamento. Entre esses princípios, destaca-se a permeabilidade, que é uma medida da capacidade de um meio poroso, como uma rocha reservatório, de transmitir fluidos através de seu sistema de espaços porosos interconectados. Se o meio poroso estiver completamente saturado (100% saturado) com um único fluido, a permeabilidade medida é a permeabilidade absoluta [47].

Em 1856, Henry P. Darcy formulou uma equação para a vazão de água em filtros de areia ao investigar a relação entre o fluxo através das camadas e a perda de pressão durante o escoamento [28]. Posteriormente, outros pesquisadores verificaram que a lei de Darcy poderia ser adaptada para descrever o fluxo de fluidos diferentes da água [22, 47]. Com essa abordagem, a lei de Darcy pôde ser escrita de forma mais geral como:

$$u(x) = \frac{k(x)}{\mu} [\rho g \nabla Z - \nabla P], \quad (3.4)$$

onde $u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a velocidade de escoamento; ∇Z é ao vetor direção da gravidade, considerada positiva para baixo; ρ é a densidade do fluido; g é a aceleração gravitacional e ∇P é o gradiente de pressão ano reservatório. Além disso, $k(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é o tensor de permeabilidades e, assumindo que o meio é homogêneo, é possível tomar k como constante.

A velocidade de Darcy (ou velocidade superficial) u representa a taxa efetiva de deslocamento do fluido no meio poroso. Como o movimento real do fluido ocorre apenas nos

espaços porosos, a velocidade verdadeira do fluido, conhecida como velocidade intersticial (ou velocidade da frente), v , é maior que u [4, 32, 54]. Assumindo a hipótese do contínuo, o fluido é tratado como se escoasse uniformemente por todo o meio com velocidade u . A relação entre a velocidade intersticial e a velocidade de Darcy é dada por:

$$u = \phi v. \quad (3.5)$$

Quando os poros de um meio poroso contêm mais de um fluido, a permeabilidade medida é denominada permeabilidade efetiva, sendo específica para cada fluido presente. Por exemplo, a permeabilidade efetiva ao óleo representa a capacidade do óleo escoar no meio poroso na presença de outros fluidos, inclusive o próprio óleo [31]. Já a permeabilidade relativa é definida como a razão entre a permeabilidade efetiva e a permeabilidade absoluta de um meio poroso. A relação para a permeabilidade relativa é representada como [31]:

$$k_i = k_{ri} k. \quad (3.6)$$

Desprezando a gravidade e considerando fluidos imiscíveis, assume-se que a permeabilidade efetiva de cada fase é independente das demais. Definindo a permeabilidade relativa como a razão entre a permeabilidade efetiva e a absoluta, a lei de Darcy para duas fases fluidas é [64]:

$$u_i = \frac{k k_{ri}}{\mu_i} \nabla P. \quad (3.7)$$

onde os subscritos $i = g, w$ representam gás e água, respectivamente. Observe que k_{ri} são as permeabilidades relativas às duas fases fluidas nas respectivas saturações dessas fases na rocha.

A lei de Darcy é a base para quase todos os cálculos de fluxo de fluidos em reservatórios de hidrocarbonetos. Para aplicar a lei, é necessário determinar a permeabilidade relativa da rocha reservatório para cada uma das fases fluidas - determinação que deve abranger toda a gama de saturações de fluidos que serão encontradas [47].

As permeabilidades relativas das fases aquosa e gasosa (na ausência de espuma), podem ser descritas pelo modelo de Corey-Brooks [14]:

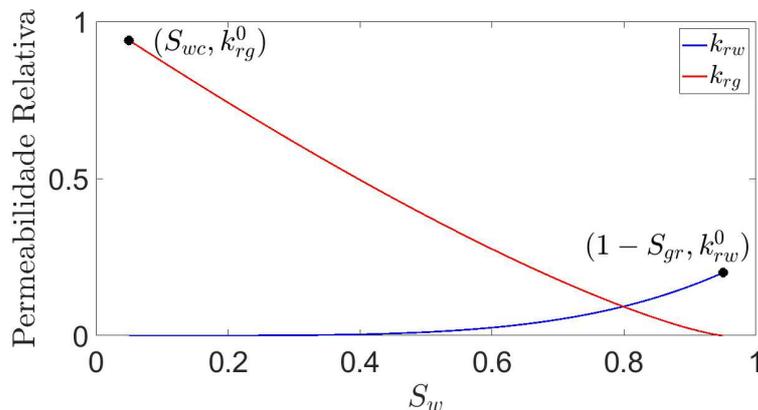
$$k_{rw}(S_w) = k_{rw}^0 \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_w} \quad (3.8)$$

e

$$k_{rg}(S_w) = k_{rg}^0 \left(\frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_g}. \quad (3.9)$$

Os parâmetros de ajuste n_w e n_g estão ligados à distribuição dos poros [14], representando a facilidade/dificuldade da água formar caminhos contínuos nos poros e quanto o gás consegue se distribuir e ocupar canais de fluxo no meio poroso. Eles podem ser determinados a partir de dados experimentais [69, 95], por meio da otimização via interpretação analítica ou

Figura 3: Curvas de permeabilidade relativa.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

através de simulações de fluxo em amostras no núcleo (*coreflow*). Já os parâmetros S_{wc} e S_{gr} são denominados saturação de água conata e saturação do gás residual, respectivamente. Eles representam a fração do fluido que permanece imóvel em uma região do meio poroso [47]. Esse fenômeno provém de fatores como tensão capilar, molhabilidade e a geometria dos poros [12, 47]. Na modelagem, sua função é reduzir o espaço útil para hidrocarbonetos (afetando assim as permeabilidades relativas) [27].

A Figura 3 ilustra curvas típicas de permeabilidade relativa, construídas a partir do modelo de Corey-Brooks, dado nas equações (3.8) e (3.9), utilizando os parâmetros apresentados na Tabela 1. Inicialmente, quando o meio está totalmente saturado com água ($S_w = 1$), a permeabilidade relativa da água é máxima. À medida que a drenagem ocorre, os poros maiores esvaziam primeiro, resultando em uma rápida diminuição da permeabilidade relativa da água. Quando S_w atinge S_{wc} , a água restante fica presa na forma de anéis pendulares e filmes finos ao redor dos grãos da rocha, impossibilitando o fluxo da fase líquida (implicando $k_{rw} = 0$ para $S_w \leq S_{wc}$) [6]. Já a permeabilidade relativa da fase gasosa (k_{rg}) aumenta à medida que a saturação do gás cresce, pois os poros maiores se tornam dominantes no fluxo gasoso. No entanto, quando a saturação do gás cai abaixo da saturação residual do gás (S_{gr}), o gás forma bolhas isoladas que ficam presas nos poros, tornando-se uma fase descontínua e incapaz de fluir (implicando $k_{rg} = 0$ para $S_w \geq S_{wc}$) [6]. Observa-se ainda na Figura 3 que as curvas k_{rw} e k_{rg} se interceptam em torno de $S_w \approx 0.8$. Esse ponto representa uma condição de equilíbrio de mobilidade relativa, na qual as fases aquosa e gasosa apresentam a mesma capacidade de escoamento no meio poroso. Em termos físicos, trata-se de um ponto de transição no regime de fluxo, em que nenhuma das fases domina o transporte, caracterizando uma situação de escoamento balanceado entre água e gás.

Para formular o problema, é necessário utilizar algumas relações padrão da teoria do fluxo fracionário [15], as quais são apresentadas a seguir. A função de fluxo fracionário

da fase i , com $i = w, g$, é definida por:

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_w + \lambda_g}, \quad (3.10)$$

onde $\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}$ representa a mobilidade da fase i , sendo k_{ri} a permeabilidade relativa e μ_i a viscosidade da respectiva fase.

3.2 ESPUMAS

A formação de espuma é uma estratégia eficaz para controlar a mobilidade de gases injetados em processos de EOR, reduzindo a razão de mobilidade entre gás e água. Neste trabalho, assumimos que a formação de espuma segue o modelo de equilíbrio local implementado no simulador comercial CMG-STARs. Nesse modelo, a permeabilidade relativa da fase gasosa na presença de espuma (k_{rg}^f) é descrita pela permeabilidade relativa da fase gasosa na ausência de espuma (k_{rg}) ajustada por um fator de redução de mobilidade (MRF), sendo:

$$k_{rg}^f(S_w, C_{sw}) = \frac{k_{rg}(S_w)}{MRF(S_w, C_{sw})}. \quad (3.11)$$

O fator de redução de mobilidade (MRF) é expresso como:

$$MRF(S_w, C_{sw}) = fmmob \cdot n_D(S_w, C_{sw}) + 1, \quad (3.12)$$

onde $fmmob$ é um parâmetro de referência à redução máxima da mobilidade do gás que pode ser alcançada através da espuma. O termo $n_D(S_w, C_{sw})$ descreve a textura da espuma, ou seja, a resistência da espuma à mobilidade do gás, e pode ser modelado sob a hipótese de equilíbrio local da espuma (CMG-STARs) como:

$$n_D^{LE}(S_w) = 0.5 + \frac{\arctan[epdry(S_w - fmdry)]}{\pi}. \quad (3.13)$$

Existem dois parâmetros em n_D^{LE} : $fmdry$ e $epdry$. O $fmdry$ descreve a saturação da água em torno da qual a espuma começa a secar. Um valor alto de $epdry$ indica que a espuma secará rapidamente, enquanto o $epdry$ baixo indica que a espuma secará gradualmente [93].

Um surfactante (ou agente tensoativo) é um composto químico que possui capacidade de alterar as propriedades superficiais e interfaciais de um líquido. Os surfactantes são compostos químicos anfífilos, ou seja, possuem uma parte hidrofílica (que interage com a água) e uma parte hidrofóbica (que interage com o óleo, por exemplo) [66]. Essa característica permite que eles reduzam a tensão superficial ou interfacial entre diferentes fases, como óleo e água, facilitando a sua mistura ou separação. Os surfactantes são amplamente utilizados em diversas aplicações industriais, como detergentes, cosméticos, indústria farmacêutica e na recuperação avançada de petróleo, onde ajudam a mobilizar o óleo retido nos poros das rochas [26].

Surfactantes alteram as propriedades do sistema em sua solução, especialmente modificando a tensão superficial [73]. As moléculas de surfactante inicialmente se distribuem livremente no meio e adsorvem na interface, diminuindo a tensão superficial do líquido [65]. Contudo, essa adsorção possui um limite: As moléculas excedentes se organizam em estruturas esféricas - denominadas micelas - assim que a concentração do surfactante atinge seu valor crítico [62, 63]. O valor de concentração onde as moléculas excedentes começam a formar micelas é denominado Concentração Micelar Crítica (CMC).

Quando a concentração do surfactante ultrapassa a CMC, a maioria das moléculas já ocupou a interface, a tensão superficial atinge um platô e não diminui significativamente com o aumento da concentração do surfactante [41, 76]. Segundo [60], como a tensão superficial não muda significativamente acima da CMC, é possível modificar a equação para o equilíbrio local da espuma:

$$n_D(S_w, C_{sw}) = n_D^{LE}(S_w)\Psi(C_{sw}), \quad (3.14)$$

com

$$\Psi(C_{sw}) = \begin{cases} \left(\frac{C_{sw}}{fmsurf}\right)^{epsurf}, & C_{sw} < fmsurf, \\ 1, & C_{sw} \geq fmsurf, \end{cases}$$

onde $fmsurf$ descreve a concentração crítica de surfactante acima da qual a resistência da espuma não muda e $epsurf$ é o expoente da lei de potência, que regula a rapidez com que a espuma seca à medida que saturação da água diminui.

3.3 DEDUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO COM PARTIÇÃO DO SURFACTANTE

O modelo adotado neste trabalho segue a formulação apresentada em [93], a qual tem como base a equação de conservação de massa conforme expressa em [54]:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{N}_i - R_i = 0, \quad (i = w, g, s). \quad (3.15)$$

O índice i representa w para água, g para gás ou s para surfactante.

O primeiro termo $\partial W_i / \partial t$ indica a taxa de acúmulo do gás ao longo do tempo, sendo W_i a concentração total de i em unidades de massa de i por unidade de volume bruto (bulk). Para o escoamento isotérmico de fluidos em meios permeáveis, W_i pode ser expresso da seguinte forma:

$$W_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is}, \quad (3.16)$$

onde ϕ é a porosidade, ρ_j é a densidade da fase j , S_j é a saturação da fase j , ω_{ij} é a fração de massa da espécie i na fase j , N_p é o número de fases, e o índice s em ω_{is} representa a superfície mineral.

O segundo termo $\nabla \vec{N}_i$ representa a variação do fluxo no espaço. \vec{N}_i é o fluxo da espécie i , que pode ser dividido em um termo de convecção (transporte por advecção devido ao movimento do fluido) e um termo de dispersão (transporte devido a gradientes de concentração), dado por:

$$\vec{N}_i = \sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \vec{u}_j - \phi \rho_j S_j K_{ij}^* \cdot \nabla \omega_{ij}), \quad (3.17)$$

onde \vec{u}_j é o vetor de velocidade superficial da fase j , e K_{ij}^* é o tensor de dispersão do componente i na fase j .

Seguem-se algumas suposições: considera-se um sistema bifásico, no qual o dióxido de carbono (CO_2) está presente exclusivamente na fase gasosa (isto é, $\omega_{gg} = 1$) e não há adsorção significativa do gás na superfície sólida (isto é, $\omega_{gs} = 0$); não há produção líquida de espécies, de modo que o termo fonte R_i na Eq. (3.15) é nulo para a água, gás e surfactante; a espuma é um fluido incompressível de duas fases (fases gasosa e aquosa) e três componentes (gás, água e surfactante); o CO_2 e a água são imiscíveis (ou seja, $\omega_{gw} = 0$); o reservatório é um meio poroso homogêneo unidimensional; a partição do surfactante está em equilíbrio local. Assume-se ainda que o meio poroso está totalmente saturado, ou seja, $S_w + S_g = 1$, onde S_g é a saturação do gás e $u = u_w + u_g$, onde u é a velocidade superficial da mistura água+gás dada por Darcy. A densidade ρ_j é constante, assumindo-se um escoamento incompressível numa matriz porosa rígida e homogênea (ou seja, ρ_w , ρ_g , ϕ e K são constantes). Para as fases gasosa e aquosa, segue que:

$$W_g = \phi \rho_g S_g, \quad (3.18)$$

$$W_w = \phi \rho_w S_w, \quad (3.19)$$

$$\vec{N}_g = \phi \vec{u}_g, \quad (3.20)$$

$$\vec{N}_w = \phi \vec{u}_w. \quad (3.21)$$

Assim, as equações de conservação para gás e água são:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_g) + \frac{\partial}{\partial x}(u_g) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(u_w) = 0. \quad (3.23)$$

Observação 3.3.1. *Por hipótese $S_w + S_g = 1$ e $u = u_w + u_g$, o que permite transformar a equação (3.23) na equação (3.22) e vice-versa.*

Seja um volume V contendo a fase j . A fração de massa de um componente s (surfactante) em uma fase j é definida como [80]:

$$\omega_{sj} = \frac{m_s}{m_j}, \quad (3.24)$$

onde m_s é a massa do surfactante no volume V e m_j é a massa do total da fase j no volume V . A concentração de surfactante na fase j , C_{sj} , é a massa de surfactante por unidade de volume da fase [80]:

$$C_{sj} = \frac{m_s}{V}. \quad (3.25)$$

A densidade da fase j , ρ_j , é a massa total da fase por unidade de volume [18]:

$$\rho_j = \frac{m_j}{V}. \quad (3.26)$$

Substituindo essas expressões em ω_{sj} , segue que

$$\omega_{sj} = \frac{C_{sj}}{\rho_j}. \quad (3.27)$$

Como abordado na Introdução, o coeficiente de partição do surfactante K_{sgw} , definido em (1.1), é uma característica relevante em sistemas de espuma estabilizada por surfactantes solúveis em CO_2 . Esse coeficiente está diretamente relacionado à condição de equilíbrio entre as fases, a qual assume que, após certo tempo, as concentrações de surfactante nas fases aquosa (C_{sw}) e gasosa (C_{sg}) se estabilizam [71]. Tal estabilização permite tratá-las como constantes na modelagem do transporte no reservatório. Com isso, ao considerar K_{sgw} invariante ao longo do processo, é possível expressar C_{sg} em função de C_{sw} por meio da relação:

$$C_{sg} = K_{sgw}C_{sw}. \quad (3.28)$$

Além disso, o surfactante pode se adsorver na superfície do meio poroso [93]:

$$W_s = \phi(S_w C_{sw} + S_g C_{sg}) + (1 - \phi)C_{ss}, \quad (3.29)$$

$$\vec{N}_s = C_{sw}\vec{u}_w + C_{sg}\vec{u}_g - \phi(S_w K_{sw}^* \cdot \nabla C_{sw} + S_g K_{sg}^* \cdot \nabla C_{sg}). \quad (3.30)$$

Logo, a equação de conservação para o surfactante é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(S_w C_{sw} + S_g C_{sg})) + (1 - \phi)\frac{\partial C_{ss}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(C_{sw}u_w + C_{sg}u_g) = \Omega, \quad (3.31)$$

onde

$$\Omega = \phi \left[K_{sw}^* \frac{\partial}{\partial x} \left(S_w \cdot \frac{\partial C_{sw}}{\partial x} \right) + K_{sg}^* \frac{\partial}{\partial x} \left(S_g \cdot \frac{\partial C_{sg}}{\partial x} \right) \right]. \quad (3.32)$$

4 SOLUÇÃO NA FORMA DE ONDAS VIAJANTES

Neste capítulo, utilizaremos a teoria de equações diferenciais ordinárias com o objetivo de obter soluções na forma de ondas viajantes a partir das equações de conservação (3.23) e (3.31) apresentadas na Seção 3.3.

4.1 ONDAS VIAJANTES

Ondas viajantes são um tipo particular de soluções para EDPs, cuja principal característica é manter o seu perfil inalterado ao longo do tempo enquanto se propagam com velocidade constante. Esse fenômeno é encontrado em diversos problemas físicos, e há uma vasta literatura dedicada ao tema [37, 88], bem como aplicações em modelos específicos [19, 20].

A obtenção de soluções na forma de ondas viajantes envolve uma mudança de variáveis que reformula o sistema original de EDPs em um sistema de EDOs. Para isso, introduz-se a variável móvel $\xi = x - vt$, onde v é a velocidade constante de propagação da onda. Buscam-se então soluções do tipo $u(x, t) = w(\xi, t)$. Ao assumir que o perfil da onda é estacionário, isto é, que sua derivada parcial em relação ao tempo igual a zero ($\partial_t w = 0$), o sistema torna-se independente do tempo, reduzindo-se à resolução de uma EDO em ξ [36].

Definição 4.1.1 (Solução na forma de ondas viajantes). *Considere um sistema de EDPs no domínio x - t (espaço-tempo), onde $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Diz-se que uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução na forma de ondas viajantes se ela pode ser escrita como*

$$u(x, t) = w(\xi), \quad (4.1)$$

sendo $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o perfil da onda e ξ a variável viajante, dada por

$$\xi = x - vt, \quad (4.2)$$

onde v é uma constante.

Para um exemplo, considere o sistemas de EDPs na forma matricial:

$$\partial_t G(U) + \partial_x F(U) = \partial_x (B(U) \partial_x U), \quad (4.3)$$

onde $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Introduzimos a variável de onda viajante $\xi = x - vt$, de modo que $U(x, t) = W(\xi, t)$. Assim, o sistema (4.3) pode ser reescrito como:

$$\nabla G(W)(-v \partial_\xi W + \partial_t W) + \nabla F(W) \partial_\xi W = \partial_\xi (B(W) \partial_\xi W). \quad (4.4)$$

Supondo que o perfil é estacionário ($\partial_t W = 0$), obtemos:

$$\nabla G(W)(-vW') + \nabla F(W)W' = B(W)W'' + (\nabla B(W) \cdot W')W'. \quad (4.5)$$

Obtemos assim uma EDO de segunda ordem para o perfil $W(\xi)$. Essa reformulação elimina a dependência explícita do tempo, favorecendo a análise do comportamento dinâmico do sistema e, em muitos casos, permite a construção de soluções explícitas [36]. Além disso, o perfil da onda satisfaz as condições assintóticas [88]:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm}, \quad (4.6)$$

onde $w_- \neq w_+$ e os limites para as derivadas de w satisfazem:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w''(\xi) = 0, \quad (4.7)$$

ou seja, o perfil da onda deve ser uma órbita heteroclínica, como definido em (2.2.9).

4.2 FORMULAÇÃO DAS EDOs PARA O PERFIL DA ONDA VIAJANTE

Considerando a hipótese de solução na forma de onda viajante, reescrevemos o sistema de equações diferenciais parciais na forma de equações diferenciais ordinárias. O modelo é composto pelas equações (3.23) e (3.31), que representam, respectivamente, o balanço de massa da fase aquosa e a conservação do surfactante, levando em conta o mecanismo de partição instantânea entre as fases gasosa e aquosa, conforme apresentado na Seção 3.3:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(u_w) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi(S_w C_{sw} + S_g C_{sg})) + (1 - \phi) \frac{\partial C_{ss}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(C_{sw} u_w + C_{sg} u_g) = \Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde Ω é dado por (3.32). Para o termo u_w , adotamos a seguinte expressão [92]:

$$u_w = u f_w + K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x}, \quad (4.9)$$

onde K representa a permeabilidade do meio. Consideram-se as variáveis S_w e C_{sw} , que correspondem à saturação da água e a concentração de surfactante na fase aquosa, respectivamente. A pressão capilar $P_c(S_w)$ é dada como função da saturação de água [52, 58]:

$$P_c(S_w) = \sigma_{wg} \sqrt{\frac{\phi}{K}} \cdot 0.022 \frac{(1 - S_w - S_{gr})^c}{S_w - S_{wc}}, \quad c = 0.01. \quad (4.10)$$

Assumindo a tensão superficial gás-água σ_{gw} igual a 0,03 N/m como em [3] e utilizando os parâmetros ϕ e K da Tabela 1, obtemos

$$P_c(S_w) = 330 \frac{(1 - S_w - S_{gr})^c}{S_w - S_{wc}}, \quad c = 0.01. \quad (4.11)$$

Neste trabalho, procuramos soluções do sistema de EDPs (4.8) na forma de um problema de Riemann, com condições iniciais descritas por uma função auxiliar, conforme apresentado em (2.4):

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} S_w^-, & x < 0, \\ S_w^+, & x > 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad C(x, 0) = \begin{cases} C^-, & x < 0, \\ C^+, & x > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Para expressar o sistema de EDPs (4.8) através de um sistema de EDOs, realizamos uma mudança de variáveis $(x, t) \rightarrow (\xi = x - vt, t)$ para coordenadas viajantes, onde v é uma constante que representa a velocidade da onda viajante. Consideramos, então, as funções transformadas na nova variável:

$$\begin{aligned} S_w(x, t) &= \tilde{S}_w(\xi), \\ C(x, t) &= \tilde{C}(\xi). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Observação 4.2.1. *Para simplificação da notação, os tildes em (4.13) serão omitidos a partir deste ponto.*

A partir dessa mudança de variáveis, aplicamos a Regra da Cadeia para reescrever a primeira equação do sistema (4.8) da seguinte maneira:

$$\phi \frac{dS_w}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{du_w}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

obtendo assim

$$-v\phi \frac{dS_w}{d\xi} + \frac{du_w}{d\xi} = 0. \quad (4.15)$$

Rearranjando os termo de (4.15), podemos reescrevê-la como

$$\frac{d}{d\xi}(-v\phi S_w + u_w) = 0. \quad (4.16)$$

Integrando com respeito a em ξ , obtemos a expressão

$$-v\phi S_w + u_w = Q_1, \quad (4.17)$$

onde Q_1 é uma constante.

Ao assumirmos uma solução na forma de ondas viajantes para as variáveis S_w e C , conforme visto em (4.6), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{S}_w(\xi) &= S_w^\pm, & \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{C}(\xi) &= C^\pm, \\ \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\tilde{S}_w}{d\xi} &= 0, & \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\tilde{C}}{d\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Considere a velocidade parcial da fase aquosa u_w dada em (4.9). A partir de (4.18), temos

$$K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \frac{dS_w}{d\xi} = 0, \quad \text{quando } \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (4.19)$$

Ao tomar os limites quando $\xi \rightarrow \pm\infty$ em (4.17), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -v\phi S_w^+ + uf_w^+ = Q_1, \\ -v\phi S_w^- + uf_w^- = Q_1. \end{cases} \quad (4.20)$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\frac{v\phi}{u} = v_s = \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-}, \quad (4.21)$$

onde v_s denota a velocidade da onda viajante. A partir da equação (4.17) e do sistema (4.20), temos:

$$-v\phi S_w + u_w = -v\phi S_w^+ + uf_w^+. \quad (4.22)$$

Expandindo u_w dado em (4.9), obtemos:

$$-v\phi S_w + uf_w + Kf_w\lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \frac{dS_w}{d\xi} = -v\phi S_w^+ + uf_w^+. \quad (4.23)$$

Portanto, manipulando algebricamente (4.23), obtemos

$$\frac{dS_w}{d\xi} = \frac{u[v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)]}{Kf_w\lambda_g \frac{dP_c}{dS_w}}. \quad (4.24)$$

Observação 4.2.2. A passagem da equação (4.23) para (4.24) exige que os termos presentes estejam bem definidos, o que requer que $K, f_w, \lambda_g, \frac{dP_c}{dS_w}$ sejam diferentes de zero.

A seguir, discutiremos brevemente as condições que asseguram a validade dessas expressões. A permeabilidade do meio K é assumidamente maior do que zero. Para garantir $f_w \neq 0$, é necessário que $\lambda_w > 0$, o que, por sua vez, implica $S_w > S_{wc}$. De forma análoga, $\lambda_g > 0$ implica $S_w < 1 - S_{gr}$. Por fim, para garantir que $\frac{dP_c}{dS_w} \neq 0$, basta que $P_c(S_w)$ seja uma função monótona, o que é verdadeiro para $P_c(S_w)$ definido em (4.10).

Agora, analisaremos a segunda componente do sistema (4.8). Para isso, lembremos que, segundo (1.1), $C_{sg} = K_{sgw} C_{sw}$. Além disso, consideremos as substituições $G(C_{sw}) = C_{ss}(C_{sw})$ e $C = C_{sw}$, de modo que a equação se torne:

$$\begin{aligned} & \phi(1 - K_{sgw}) \frac{\partial}{\partial t} (S_w C) + \phi K_{sgw} \frac{\partial C}{\partial t} + (1 - \phi) \frac{\partial G}{\partial t} \\ & + (1 - K_{sgw}) \frac{\partial}{\partial x} (u_w C) + u K_{sgw} \frac{\partial C}{\partial x} = \Omega^*, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde o termo do lado direito de (4.25) é dado por:

$$\Omega^* = \frac{\partial}{\partial x} \left((\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (4.26)$$

com

$$\beta = \phi K_{sw}^*, \text{ e } \gamma = \phi K_{sg}^* K_{sgw}. \quad (4.27)$$

Adotando a mudança de variável $\xi = x - vt$ e usando $v_s = v\phi/u$ dado em (4.21), podemos reescrever a equação (4.25) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & -uv_s(1 - K_{sgw}) \left[C \frac{dS_w}{d\xi} + S_w \frac{dC}{d\xi} \right] - uv_s(1/\phi - 1) \frac{dG}{d\xi} + \\ & + (1 - K_{sgw}) \left[C \frac{du_w}{d\xi} + u_w \frac{dC}{d\xi} \right] + uK_{sgw}(1 - v_s) \frac{dC}{d\xi} = \Phi, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde

$$\Phi = \frac{d}{d\xi} \left((\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} \right), \quad (4.29)$$

Sabemos, pelas equações (4.21) e (4.22), que:

$$u_w = u[v_s(S_w - S_w^+) + f_w^+]. \quad (4.30)$$

Como u , v_s , S_w^+ e f_w^+ são constantes, segue que:

$$\frac{du_w}{d\xi} = uv_s \frac{dS_w}{d\xi}. \quad (4.31)$$

Substituindo esse resultado em (4.28), observamos que alguns termos se cancelam, levando a uma simplificação:

$$\alpha \frac{dC}{d\xi} - \delta \frac{dG}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left((\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} \right), \quad (4.32)$$

onde

$$\alpha = u[K_{sgw}(1 - v_s) + (1 - K_{sgw})(f_w^+ - v_s S_w^+)], \quad \text{e} \quad \delta = uv_s(1/\phi - 1). \quad (4.33)$$

Reorganizando os termos, obtemos:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\alpha C - \delta G - (\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} \right) = 0. \quad (4.34)$$

Integrando em ξ , segue que

$$\alpha C - \delta G - (\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} = Q_2, \quad (4.35)$$

onde Q_2 é uma constante. Como

$$C(x, t) = \tilde{C}(\xi) \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{C}(\xi) = C^\pm, \quad (4.36)$$

fazendo $\xi \rightarrow +\infty$ em (4.35), obtemos

$$\alpha C^+ - \delta G^+ = Q_2, \quad (4.37)$$

pois em $\alpha C - \delta G - (\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi}$, temos que

$$\gamma(1 - S_w) \frac{dC}{d\xi} = 0, \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (4.38)$$

Observação 4.2.3. A equação (4.38) tende para 0, pois $C(x, t) = \tilde{C}(\xi)$, onde $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{C}(\xi) = C^+$.

Temos que

$$\alpha C - \delta G - (\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} = \alpha C^+ - \delta G^+. \quad (4.39)$$

Então

$$-(\beta S_w + \gamma(1 - S_w)) \frac{dC}{d\xi} = \alpha(C^+ - C) + \delta(G - G^+). \quad (4.40)$$

Finalmente

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{\alpha(C - C^+) + \delta(G^+ - G)}{\beta S_w + \gamma(1 - S_w)}. \quad (4.41)$$

Note que como β e γ são diferentes de zero, (4.41) esta bem definida para os valores de S_w no domínio considerado. Portanto, a partir de (4.8), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\xi} = \frac{u[v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)]}{K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w}}, \\ \frac{dC}{d\xi} = \frac{\alpha(C - C^+) + \delta(G^+ - G)}{\beta S_w + \gamma(1 - S_w)}, \end{cases} \quad (4.42)$$

onde α , β , γ e δ são definidos em (4.27) e (4.33). Na seção seguinte localizamos os pontos de equilíbrio de (4.42), considerando o estado direito (S_w^+, C^+) conhecido.

4.3 LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

Para verificar as condições necessárias para a existência de soluções na forma de ondas viajantes do sistema (4.8), devemos determinar os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico dado por (4.42). Esses pontos de equilíbrio (ver Definição 2.2.3), correspondem a estados $(S_w, C) \in \mathbb{R}^2$ para os quais o lado direito do sistema (4.42) se anula:

$$\frac{dS_w}{d\xi} = 0, \quad \frac{dC}{d\xi} = 0. \quad (4.43)$$

A fim de simplificar o sistema (4.42), assume-se que não há adsorção do surfactante na matriz porosa, ou seja, considera-se $G(C) = 0$. Esta simplificação coincide com o discutido em [71, 93], onde é indicado que alguns surfactantes não iônicos (que são solúveis em CO_2), como as aminas etoxiladas, apresentam menor adsorção em comparação aos surfactantes iônicos e demonstram baixa adsorção em reservatórios carbonáticos saturados com CO_2 .

Os equilíbrios $(S_w, C) \in \mathbb{R}^2$ satisfazem:

$$u(v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)) = 0, \quad (4.44a)$$

$$\alpha(C - C^+) = 0, \quad (4.44b)$$

De (4.44b) temos $\alpha = 0$ (definido em (4.33)) ou $C = C^+$ ou ambas. Neste trabalho só consideramos o caso $\alpha \neq 0$. Isto significa que, para cada $C^- = C^+$ fixado, os equilíbrios associados ao campo vetorial (EDOs) estão na mesma curva de $f_w^{LE} = f_w(S_w, n_D^{LE}(S_w, C^+))$, que se torna apenas uma função de saturação da água. Isso ocorre porque, tomando $C^- = C^+$ constante, a textura da espuma em equilíbrio local n_D^{LE} deixa de depender da concentração como variável livre, fazendo com que f_w^{LE} se torne uma função apenas de S_w . Chamaremos esta função f_w^{LE} de função de fluxo fracionário em equilíbrio local. A equação (4.44a) representa a interseção entre a reta

$$R_{v_s}(S_w) = v_s S_w + (f_w^+ - v_s S_w^+), \quad (4.45)$$

que passa entre os pontos (S_w^-, C^-) e (S_w^+, C^+) com inclinação v_s dada em (4.43) e a curva de fluxo fracionário em equilíbrio local. Na verdade, R_{v_s} representa a família de retas que passam por (S_w^+, C^+) e com inclinação v_s . Por meio de análise numérica¹ do comportamento de f_w^{LE} , concluímos que existe um valor crítico para a concentração C (denotado por C^i) tal que:

- se $C < C^i$, a função f_w^{LE} possui um ponto de inflexão.
- no outro caso, f_w^{LE} possui três pontos de inflexão.

Para os parâmetros listados na Tabela 1, obtém-se $C^i \approx 3.6139 \times 10^{-5}$. A Figura 4 mostra a função f_w^{LE} para $C^- = C^+ = 1$, na qual apresenta três pontos de inflexão.

Todos os parâmetros dessa tabela foram extraídos de [93], exceto o expoente c da curva de pressão capilar, que foi considerado como em [3]. O valor $K_{sgw} = 4$ foi escolhido por representar um dos três coeficientes de partição discutidos em [93], especificamente para modelar um cenário de elevada partição do surfactante da fase aquosa para a fase gasosa.

4.4 NÚMERO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

A partir da equação (4.44b), sabemos que, se $U = (S_w, C)$ é um ponto de equilíbrio do sistema (4.42), então necessariamente $C^- = C^+$. Com isso, ao fixarmos C^+ , os possíveis equilíbrios passam a ter a forma $U = (S_w, C^+)$, e os valores admissíveis de S_w devem satisfazer a equação (4.44a). Portanto, a análise dos equilíbrios se reduz ao estudo gráfico da função $f_w^{LE}(S_w^-, C^+)$. Dependendo do valor fixado de C^+ , o sistema pode apresentar dois, três, quatro ou até cinco pontos de equilíbrio. Para identificá-los, fixamos o estado a direita $U^+ = (S_w^+, C^+)$, o que equivale a considerar o ponto $(S_w^+, f_w^{LE}(S_w^+, C^+))$.

¹ Infelizmente, a caracterização analítica dos pontos de inflexão da função f_w^{LE} não foi possível devido à forma não explícita da função de fluxo fracionário f_w , que depende de expressões empíricas e não lineares associadas à textura da espuma n_D^{LE} .

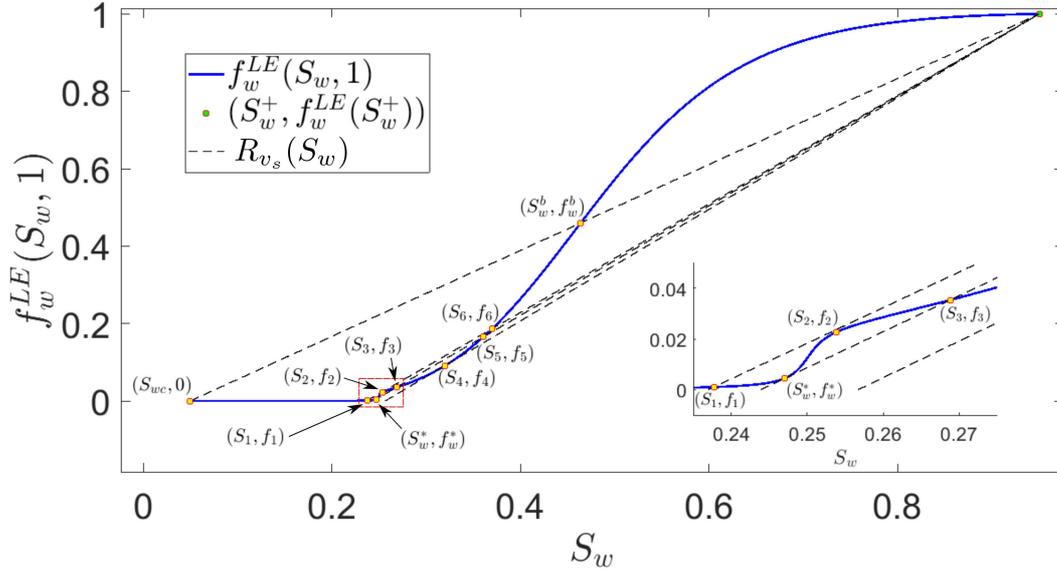
| Parâmetro | Descrição | Valor | Unidade |
|------------|---|-----------|--------------|
| ϕ | Porosidade | 0.25 | - |
| K | Permeabilidade | 1e-12 | m^2 |
| u | Velocidade superficial total de Darcy | 7.0555e-5 | m/s |
| μ_w | Viscosidade da fase aquosa | 2.4e-4 | $Pa \cdot s$ |
| μ_g | Viscosidade da fase gasosa | 4.5e-5 | $Pa \cdot s$ |
| k_{rw}^0 | Permeabilidade relativa do ponto final da água | 0.2 | - |
| k_{rg}^0 | Permeabilidade relativa do ponto final do gás | 0.94 | - |
| n_w | Expoente de permeabilidade relativa da água | 4.2 | - |
| n_g | Expoente de permeabilidade relativa do gás | 1.3 | - |
| S_{wc} | Saturação da água conata | 0.05 | - |
| S_{gr} | Saturação do gás residual | 0.05 | - |
| K_{sw}^* | Tensor de dispersão da saturação na fase aquosa | 1.7204e-7 | - |
| K_{sg}^* | Tensor de dispersão da saturação na fase gasosa | 1.7204e-7 | - |
| c | Expoente na curva da pressão capilar | 0.01 | - |
| $fmmob$ | Redução máxima da mobilidade do gás | 500 | - |
| $fmsurf$ | Parâmetro da resistência de espuma | 2 | g/L |
| $epsurf$ | Concentração de surfactante na CMC | 1 | mol/m^3 |
| $fmdry$ | Limitante da saturação da água | 0.25 | - |
| $epdry$ | Abruptidão do colapso da espuma | 500 | - |
| K_{sgw} | Coefficiente de partição do surfactante | 4 | - |
| L | Comprimento do reservatório | 0.3048 | m |
| t | Tempo de simulação dimensional | 540 | s |
| v | Velocidade intersticial total de Darcy | 2.8222e-4 | m/s |
| Pe_w | Número de Peclet na fase aquosa | 500 | - |
| Pe_g | Número de Peclet na fase gasosa | 500 | - |

Tabela 1 – Parâmetros do Modelo.

Em seguida, escolhemos um valor S_w^- e construímos a reta $R_{v_s}(S_w)$ que liga os pontos $(S_w^-, f_w^{LE}(S_w^-, C^+))$ e $(S_w^+, f_w^{LE}(S_w^+, C^+))$. O número de interseções entre essa reta e o gráfico da função $f_w^{LE}(S_w, C^+)$, no intervalo $(S_{wc}, 1 - S_{gr})$, determina o número de equilíbrios do sistema para o valor fixado de C^+ . Por exemplo, a Figura 4 mostra o procedimento típico para encontrar o equilíbrio para um caso particular, onde $C^+ = 1$ e $S_w^+ = 0.9499999$, caso este que f_w apresenta três pontos de inflexão. A escolha do valor de $S_w^+ = 0.9499999$ justifica-se pelos seguintes fatores. No artigo de Zeng [93], considera-se que, inicialmente, o núcleo de formação unidimensional está completamente saturado com água, na ausência de surfactante, ou seja, $S_w^+ = 1$. Essa hipótese foi analisada na sua forma adimensional. Ao converter esse cenário para o contexto dimensional deste trabalho, é necessário subtrair a saturação de gás residual, S_{gr} , obtendo-se assim a condição $S_w^+ = 1 - S_{gr} = 0.95$. Porém, em [92], por exemplo, há limitações no modelo matemático utilizado neste cenário onde o meio está totalmente saturado com água.

Conforme discutido na Observação 4.2.2, as funções que descrevem a evolução do sistema só estão bem definidas dentro de certos intervalos de saturação. Quando

Figura 4: Interseções entre a função f_w^{LE} e as retas R .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

S_w se aproxima de $1 - S_{gr}$, o modelo perde validade ou apresenta singularidades, o que impossibilita uma análise rigorosa de soluções na forma de ondas viajantes. Sendo assim, ajustar S_w^+ para um valor ligeiramente inferior, como $S_w^+ = 0.9499999$, torna-se necessário para assegurar a consistência matemática do modelo e a viabilidade das comparações com os estudos anteriores.

Observação 4.4.1. A partir deste ponto denotaremos f_w^{LE} por f_w . Além disso, denotaremos $f_w(S_w, C)$ por $f_w(S_w)$ quando fixarmos $C = C^+$.

Antes de enunciarmos a Proposição 4.4.2, introduzimos algumas definições que serão úteis na caracterização geométrica dos pontos ilustrados na Figura 4. Ao tomarmos $S_w^- = S_{wc}$, obtemos a reta R_{v_s} , definida em (4.45), a qual conecta os pontos $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ e $(S_w^+, f_w(S_w^+))$. Denotamos por $(S_w^b, f_w(S_w^b))$ o ponto de interseção entre essa reta e o gráfico da função.

Definimos $(S_w^*, f_w(S_w^*))$ como o primeiro ponto de tangência entre o gráfico de f_w e uma reta da família $R_{v_s}(S_w)$, isto é, uma reta que conecta $(S_w^+, f_w(S_w^+))$ a um ponto da curva em que há contato tangencial. Os pontos $(S_3, f_w(S_3))$ e $(S_5, f_w(S_5))$ são definidos como os pontos colineares com $(S_w^*, f_w(S_w^*))$ e $(S_w^+, f_w(S_w^+))$, completando as possíveis interseções com essa reta tangente.

Analogamente, o ponto $(S_2, f_w(S_2))$ representa uma segunda tangência com outra reta da família $R_{v_s}(S_w)$ que também parte de $(S_w^+, f_w(S_w^+))$. Os pontos $(S_1, f_w(S_1))$ e $(S_6, f_w(S_6))$ são colineares com $(S_2, f_w(S_2))$ e o ponto fixado à direita, caracterizando outra configuração de interseções. Finalmente, o ponto $(S_4, f_w(S_4))$ é o terceiro ponto de

tangência da função com uma reta da mesma família. Esses elementos geométricos serão essenciais para a proposição seguinte, e estão todos representados na Figura 4.

Proposição 4.4.2. *Considerando $C^+ = 1$, a reta $R_{v_s}(S_w) = v_s S_w + (f_w^+ - v_s S_w^+)$ da Equação (4.44a) pode intersectar a curva do fluxo fracionário da água em dois, três, quatro ou cinco pontos de equilíbrio, nas seguintes condições:*

1. Se $S_w^- = S_4$ ou $S_w^- \in]S_w^b, S_w^+[$ os únicos pontos de equilíbrio são U^- e U^+ .
2. Se $S_w^- \in [S_{wc}, S_1[, S_w^- \in]S_3, S_4[, S_w^- \in]S_4, S_5[$ ou $S_w^- \in]S_6, S_w^b[$, existem três pontos de equilíbrio, U^- , U^+ e U^e .
3. Se $S_w^- = S_1$, $S_w^- = S_w^*$, $S_w^- = S_2$, $S_w^- = S_3$, $S_w^- = S_5$ ou $S_w^- = S_6$, existem quatro pontos de equilíbrio, U^- , U^+ , U^{e1} e U^{e2} .
4. Se $S_w^- \in]S_1, S_w^*[$, $S_w^- \in]S_w^*, S_2[$, $S_w^- \in]S_2, S_3[$ ou $S_w^- \in]S_5, S_6[$, existem cinco pontos de equilíbrio, U^- , U^+ , U^{e1} , U^{e2} e U^{e3} .

Antes de classificar os pontos de equilíbrio do sistema, é necessário estudar o comportamento da função de fluxo fracionário $f_w(S_w)$. A seguir, apresentamos uma proposição que estabelece a monotonicidade de f_w em relação à saturação da água, sob hipóteses físicas específicas.

Proposição 4.4.3. *Seja $f_w(S_w, C)$ definida conforme (3.10), onde consideramos $C^- = C^+$. Então*

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w, C) > 0 \quad \text{para todo } S_w \in (S_{wc}, 1 - S_{gr}), \quad (4.46)$$

isto é, $f_w(S_w, C)$ é monótona crescente em relação a S_w nesse intervalo.

Demonstração. De fato,

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w} = \frac{\frac{d\lambda_w}{dS_w} \lambda_g - \lambda_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w}}{(\lambda_w + \lambda_g)^2}. \quad (4.47)$$

Note que $(\lambda_w + \lambda_g)^2 > 0$. Resta mostrar que $\frac{d\lambda_w}{dS_w} \lambda_g - \lambda_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w} > 0$. Com efeito, como

$$\lambda_g \frac{d\lambda_w}{dS_w} = \frac{\lambda_g}{\mu_w} \frac{k_{rw}^0 n_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_w - 1}, \quad (4.48)$$

segue que $\lambda_g \frac{d\lambda_w}{dS_w} > 0$. Agora, temos

$$\lambda_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w} = \frac{\lambda_w \frac{dk_{rg}}{dS_w} MRF - k_{rg} \frac{\partial MRF}{\partial S_w}}{\mu_g MRF^2}, \quad (4.49)$$

onde

$$\frac{dk_{rg}}{dS_w} = - \frac{k_{rg}^0 n_g}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \left(\frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_g - 1} < 0 \quad (4.50)$$

e

$$\frac{\partial MRF}{\partial S_w} = fmmob \cdot \frac{epdry}{\pi \left(1 + (epdry(S_w - fmdry))^2\right)} \cdot \Psi > 0, \quad (4.51)$$

logo $\lambda_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w} < 0$. Então $\frac{d\lambda_w}{dS_w} \lambda_g - \lambda_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w} > 0$ e, portanto, $\frac{\partial f_w}{\partial S_w} > 0$. \square

4.5 CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

Na seção anterior, determinamos o número de pontos de equilíbrio do sistema de EDOs, dependendo do valor fixado de C e da posição de S_w^- . Nesta seção, nos propomos a classificar esses pontos de equilíbrio em suas respectivas vizinhanças, com base no Teorema de Hartman-Grobman.

Sejam $F_1 = \frac{dS_w}{d\xi}$ e $F_2 = \frac{dC}{d\xi}$, conforme definidos no sistema (4.42). A matriz Jacobiana do campo vetorial $f = (F_1, F_2)^T$, avaliada em um ponto $U = (S_w, C)$, é dada por:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S_w} & \frac{\partial F_1}{\partial C} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S_w} & \frac{\partial F_2}{\partial C} \end{bmatrix},$$

onde as derivadas parciais são explicitadas a seguir. A derivada de F_1 em relação a S_w assume a forma:

$$\frac{\partial F_1}{\partial S_w} = \frac{uK \left(v_s - \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right) \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right) - uK \left[\frac{\partial}{\partial S_w} \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right) \right] [v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)]}{\left(K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right)^2}, \quad (4.52)$$

com

$$\frac{\partial}{\partial S_w} \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right) = \left(\lambda_g \frac{\partial f_w}{\partial S_w} + f_w \frac{\partial \lambda_g}{\partial S_w} \right) \frac{dP_c}{dS_w} + f_w \lambda_g \frac{d^2 P_c}{dS_w^2}. \quad (4.53)$$

Analogamente, a derivada de F_1 em relação a C é:

$$\frac{\partial F_1}{\partial C} = \frac{-uK \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \frac{\partial f_w}{\partial C} \right) - uK \left[f_w \frac{dP_c}{dS_w} \frac{\partial \lambda_g}{\partial C} \right] [v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)]}{\left(K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right)^2}. \quad (4.54)$$

As derivadas parciais de F_2 são dadas por:

$$\frac{\partial F_2}{\partial S_w} = \frac{(\gamma - \beta) [\alpha(C - C^+) + \delta(G^+ - G)]}{[\beta S_w + \gamma(1 - S_w)]^2}, \quad (4.55)$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial C} = \frac{1}{\beta S_w + \gamma(1 - S_w)} \left(\alpha - \delta \frac{dG}{dC} \right). \quad (4.56)$$

Em seguida, calculamos os autovalores da matriz Jacobiana resolvendo a equação característica:

$$\det(J_f(U) - \lambda I) = 0. \quad (4.57)$$

Contudo, como é possível verificar a partir da condição $G(C) = 0$ e da equação (4.44b), tem-se que $\frac{\partial F_2}{\partial S_w} = 0$ para todo $U = (S_w, C)$. Portanto, a matriz Jacobiana torna-se triangular superior, e seus autovalores são dados pelos elementos da diagonal:

$$\lambda_1 = \frac{\partial F_1}{\partial S_w}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial F_2}{\partial C}. \quad (4.58)$$

A análise dos autovetores dependerá do valor de C , resultando em dois casos distintos:

Caso 1: $C < fmsurf$ (isto é, $\frac{\partial F_1}{\partial C} \neq 0$)

Neste cenário, onde $\lambda_1 = \frac{\partial F_1}{\partial S_w}$, temos, para $v_1 = [v_a \ v_b]^T$:

$$(J_f - \lambda_1 I)v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_b = 0, \quad (4.59)$$

de modo que podemos tomar como autovetor:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Para $\lambda_2 = \frac{\partial F_2}{\partial C}$, assumindo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o sistema associado nos dá, para $v_2 = [v_c \ v_d]^T$:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial S_w} - \frac{\partial F_2}{\partial C} \right) v_c + \frac{\partial F_1}{\partial C} v_d = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial C} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_w} - \frac{\partial F_2}{\partial C} \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

No caso especial em que $\lambda_1 = \lambda_2$, a matriz J_f apresenta multiplicidade algébrica maior que a multiplicidade geométrica, e, portanto, não é diagonalizável, possuindo um bloco de Jordan associado.

Caso 2: $C \geq fmsurf$ (isto é, $\frac{\partial F_1}{\partial C} = 0$)

Nesse regime, a matriz Jacobiana torna-se diagonal:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S_w} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial C} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Assumindo que os autovalores são distintos, os autovetores correspondentes são os vetores da base canônica:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{associado a } \lambda_1), \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{associado a } \lambda_2). \quad (4.63)$$

Finalmente, se $\lambda_1 = \lambda_2$, então J_f é múltiplo da matriz identidade, e qualquer vetor de \mathbb{R}^2 é autovetor, indicando uma multiplicidade geométrica plena.

A seguir, será feito um estudo do sinal dos autovalores λ_1 e λ_2 , com o objetivo de classificar os pontos de equilíbrio esquerdo (U^-) e direito (U^+), observando a mudança de sinal das autofunções associadas ao mesmos ($\lambda_{1,2}^-$ e $\lambda_{1,2}^+$, respectivamente). Enunciaremos a seguinte proposição:

Proposição 4.5.1. *Seja v_s fixo dado em (4.43). Considere o sistema de EDOs (4.42) descrito por $U' = F(U)$, com $U = (S_w, C)$, onde $C = C^+$ e os autovalores dados por*

$$\lambda_1 = \frac{\partial F_1}{\partial S_w}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial F_2}{\partial C}.$$

Os sinais de λ_1 e λ_2 são determinados pelas seguintes condições:

1. Para λ_1 , temos que:

- $\lambda_1 > 0$ se $\frac{\partial f_w}{\partial S_w} > v_s$;
- $\lambda_1 = 0$ se $\frac{\partial f_w}{\partial S_w} = v_s$;
- $\lambda_1 < 0$ se $\frac{\partial f_w}{\partial S_w} < v_s$.

2. Para λ_2 , temos que:

- $\lambda_2 > 0$ se $\alpha > 0$, isto é, se $v_s < \frac{(1-K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1-K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$;
- $\lambda_2 = 0$ se $\alpha = 0$, isto é, se $v_s = \frac{(1-K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1-K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$;
- $\lambda_2 < 0$ se $\alpha < 0$, isto é, se $v_s > \frac{(1-K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1-K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$.

Demonstração. A partir de (4.58) e (4.52), temos

$$\lambda_1 = \frac{\partial F_1}{\partial S_w} = \frac{uK \left(v_s - \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right) \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right)}{(K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w})^2} - \frac{uK \left[\frac{\partial (f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w})}{\partial S_w} \right] [v_s (S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w)]}{(K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w})^2}. \quad (4.64)$$

Como o denominador de λ_1 é sempre positivo, basta analisar o numerador. Ao investigar o comportamento dos equilíbrios, por (4.44a), consideramos $v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w) = 0$. Além disso, note que $uK > 0$ e $f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} < 0$. Logo, resta analisar o comportamento de $\frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v_s$ para determinar o sinal de λ_1 . Agora, por (4.58) e (4.56), temos:

$$\lambda_2 = \frac{\partial F_2}{\partial C} = \frac{\alpha}{\beta S_w + \gamma(1 - S_w)}, \quad (4.65)$$

onde α , β e γ são definidos em (4.33) e (4.27). Note que, para $S_w \in (S_{wc}, 1 - S_{gr})$, temos $1 - S_w > 0$. Como $\beta, \gamma > 0$, então o denominador de λ_2 é maior que zero,

isto é, $(\beta - \gamma)S_w + \gamma > 0$. Agora, estudaremos o comportamento de α . Manipulando algebricamente a equação (4.33) obtemos

$$\alpha = u[(K_{sgw}S_w^+ - K_{sgw} - S_w^+)v_s + (1 - K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}]. \quad (4.66)$$

Como o termo constante $K_{sgw}S_w^+ - K_{sgw} - S_w^+ < 0$, segue que

- $\alpha < 0$ quando $v_s > \frac{(1 - K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1 - K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$,
- $\alpha = 0$ quando $v_s = \frac{(1 - K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1 - K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$,
- $\alpha > 0$ quando $v_s < \frac{(1 - K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1 - K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}}$.

□

Exemplo 4.5.1. *Com o objetivo de ilustrar a Proposição 4.5.1, consideremos os parâmetros listados na Tabela 1 e fixamos $C^+ = 1$. Nessas condições, os coeficientes β e γ são calculados da seguinte forma:*

$$\beta = 0.25 \cdot 1.72042667 \cdot 10^{-7} = 4.301066675 \cdot 10^{-8}, \quad (4.67)$$

$$\gamma = 0.25 \cdot 1.72042667 \cdot 10^{-7} \cdot 4 = 1.72042667 \cdot 10^{-7}. \quad (4.68)$$

Verifica-se que $\beta < \gamma$, e a diferença entre os dois valores é dada por:

$$\gamma - \beta = 1.2903200025 \cdot 10^{-7}. \quad (4.69)$$

A Proposição 4.5.1 estabelece que o sinal do denominador depende da comparação entre S_w e o quociente $\gamma/(\gamma - \beta)$. Assim, calculamos:

$$S_w < \frac{\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{1.72042667 \cdot 10^{-7}}{1.2903200025 \cdot 10^{-7}} \approx 1.333. \quad (4.70)$$

Portanto, o denominador considerado na proposição é positivo sempre que $S_w < 1.333$. Além disso, do ponto de vista numérico, o valor de $f_w^+ = f_w(S_w^+, 1)$ é dado por $f_w^+ = 0.9999$. Dessa forma, a constante que delimita as mudanças de sinal de $\lambda_2^{-,+}$ no gráfico de v_s é dada por:

$$\frac{(1 - K_{sgw})f_w^+ + K_{sgw}}{(1 - K_{sgw})S_w^+ + K_{sgw}} = \frac{-3 \cdot 0.9999 + 4}{-3 \cdot 0.9499999 + 4} \approx 0.8696. \quad (4.71)$$

Concluimos, portanto, que:

- $\lambda_2^{-,+} > 0$ se $v_s < 0.8696$;
- $\lambda_2^{-,+} < 0$ se $v_s > 0.8696$; e

- $\lambda_2^{-,+} = 0$ se $v_s = 0.8696$.

Para a análise do autovalor λ_1^+ , é possível verificar numericamente que:

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+, 1) = 0.0012. \quad (4.72)$$

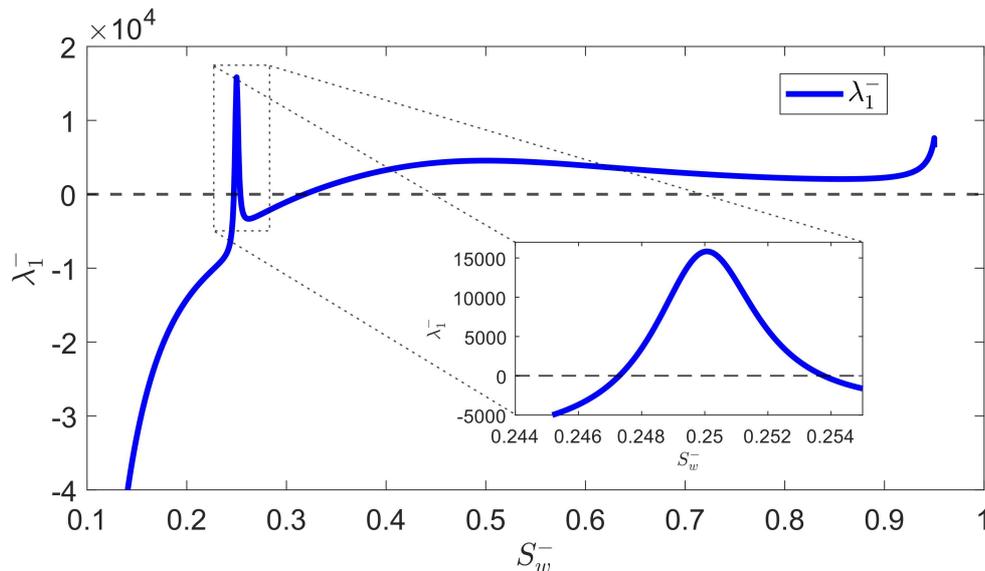
Aplicando novamente a Proposição 4.5.1, temos:

- $\lambda_1^+ > 0$ se $v_s < 0.0012$;
- $\lambda_1^+ < 0$ se $v_s > 0.0012$; e
- $\lambda_1^+ = 0$ se $v_s = 0.0012$.

Contudo, como será demonstrado mais adiante (ver Proposição 4.5.2), vale que $\lambda_1^+ < 0 \forall (S_w, C)$ pertencente ao domínio de interesse. Por fim, ressaltamos que a análise do autovalor λ_1^- requer maior cautela, uma vez que o valor de $\partial f_w / \partial S_w(S_w^-)$ depende do ponto específico S_w^- considerado, e a função f_w pode apresentar um ou três pontos de inflexão.

Nas Figuras de 5 a 8 é possível classificar o ponto de equilíbrio esquerdo (U^-) e direito (U^+) com base na Proposição 4.5.1, considerando um caso particular em que $C = 1$. A análise fundamenta-se na mudança de sinal dos autovalores correspondentes, $\lambda_{1,2}^-$ e $\lambda_{1,2}^+$, que refletem a natureza dos equilíbrios em cada ponto.

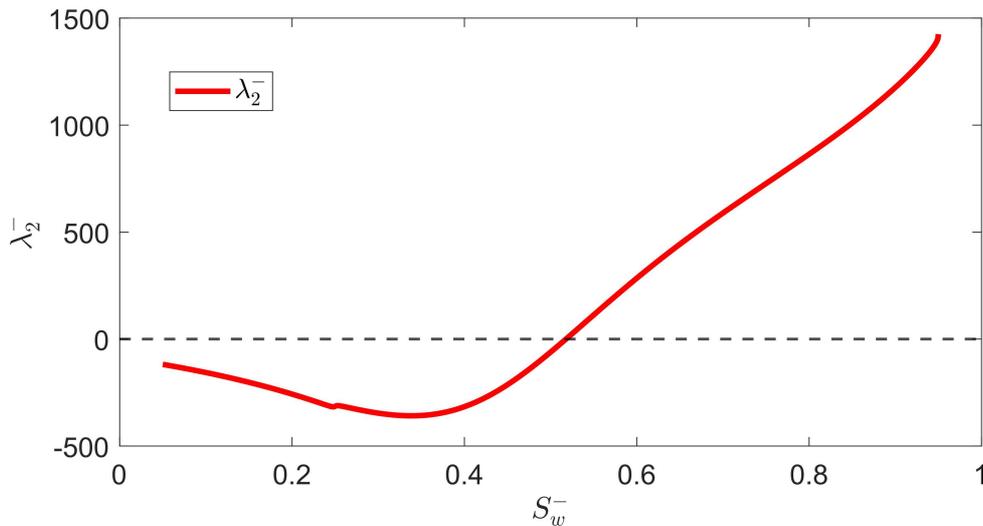
Figura 5: Comportamento do autovalor λ_1^- avaliado no estado U^- .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

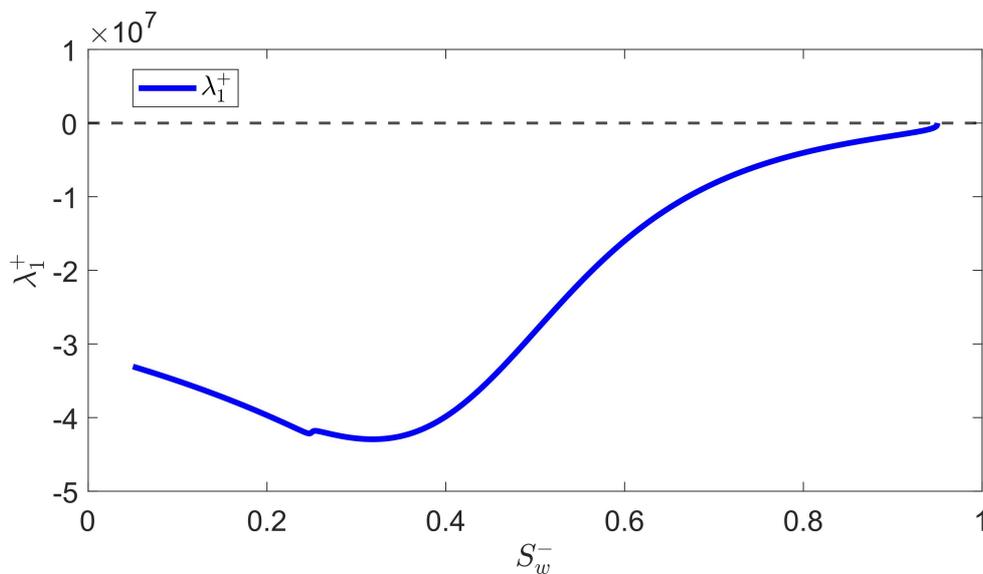
A proposição 4.5.2 estabelece que, ao fixarmos $C = C^+$ e considerarmos o limite $S_w \rightarrow S_w^+$, o ponto de equilíbrio U^+ atrai todas as órbitas suficientemente próximas na direção $v_1 = [1 \ 0]^T$, no sentido de que estas pertencem à variedade estável $W^s(U^+)$ do

Figura 6: Comportamento do autovalor λ_2 avaliado no estado U^- .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 7: Comportamento do autovalor λ_1 avaliado no estado U^+ .



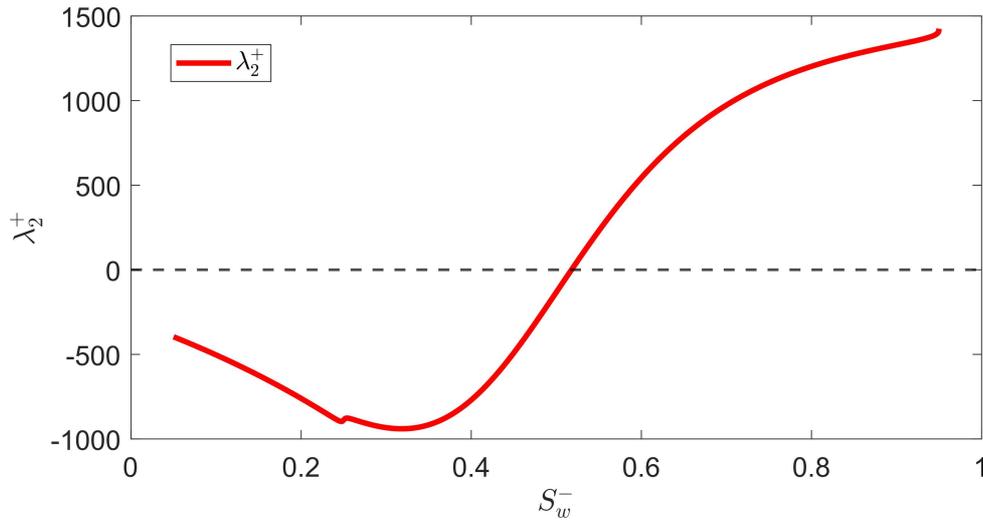
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

sistema dinâmico. Assim, U^+ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ao longo da direção da onda viajante, e as soluções que partem de sua vizinhança convergem para ele à medida que $\xi \rightarrow +\infty$.

Proposição 4.5.2. *Seja $U^+ = (S_w^+, C^+)$ um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (4.42). Seja também S_w^i a coordenada do ponto tangente mais próximo de S_w^+ . Suponha que a função f_w seja diferenciável em S_w^+ e que*

$$\frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2} < 0 \quad (4.73)$$

para $S_w^- \in (S_w^i, 1 - S_{gr})$ e que, além disso, existe um único valor $S_w^b \in (S_{wc}, 1 - S_{gr})$ tal que $f_w(S_w^b, C^+) = v_s[S_w^+ - S_w^b]$. Então, o autovalor λ_1 da matriz jacobiana avaliado em

Figura 8: Comportamento do autovalor λ_2 avaliado no estado U^+ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

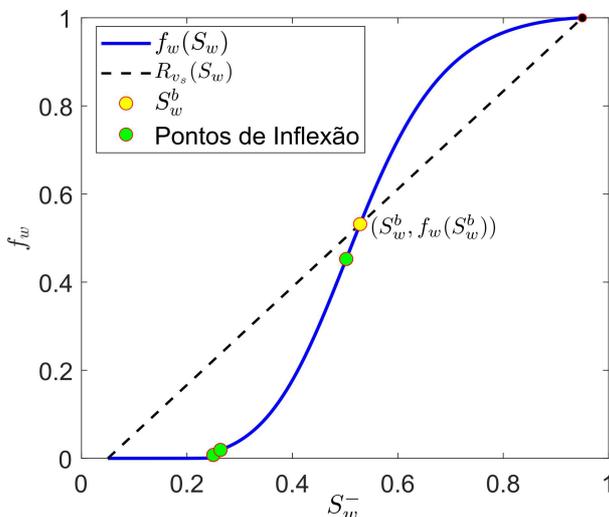
 U^+ satisfaz

$$\lambda_1^+ < 0. \quad (4.74)$$

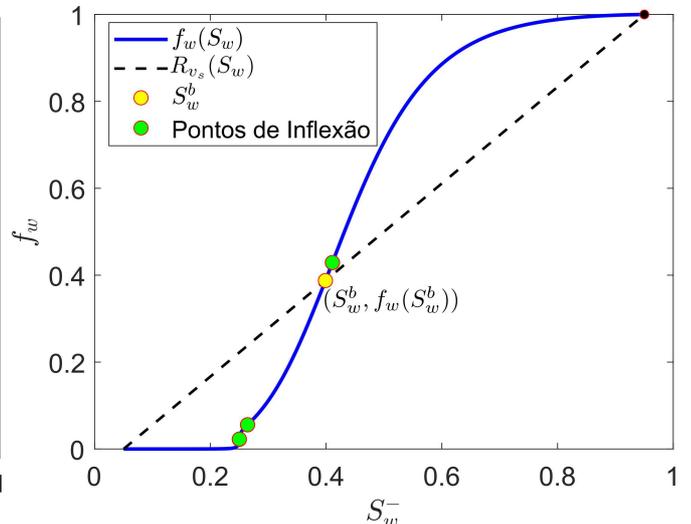
Demonstração. Pela Proposição 4.5.1,

$$\lambda_1^+ < 0 \text{ se } \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+) < v_s. \quad (4.75)$$

Mostremos que esta desigualdade é válida para todo (S_w, C) . Primeiro, para qualquer (S_w, C) , existe um único S_w^b tal que o par $(S_w^b, f_w(S_w^b))$ representa a interseção entre a função $f_w(S_w)$ e a reta que conecta os pontos $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ e $(S_w^+, f_w(S_w^+))$. Além disso, sabemos que a função $f_w(S_w, C)$ possui um ou três pontos de inflexão. Seja S_w^i o ponto de inflexão mais próximo de S_w^+ . Existem dois casos a serem analisados:

Figura 9: $f_w(S_w^b) > f_w(S_w^i)$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 10: $f_w(S_w^b) < f_w(S_w^i)$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

- Caso 1: $f_w(S_w^b) > f_w(S_w^i)$.

Este caso está ilustrado na Figura 9. Dividimos o intervalo $[S_{wc}, S_w^+]$ em dois intervalos, sendo eles $[S_{wc}, S_w^b]$ e $(S_w^b, S_w^+]$. Por hipótese, temos que

$$\frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2} < 0, \quad \forall S_w^- \in (S_w^b, 1 - S_{gr}), \quad (4.76)$$

o que implica que f_w é estritamente côncava no intervalo $S_w^- \in (S_w^b, S_w^+]$, pois $S_w^i < S_w^b$. Como consequência,

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+) < v_s. \quad (4.77)$$

Agora, tome $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^b]$. Lembremos que f_w é monótona crescente e que, como S_w^b é único neste intervalo, todo ponto (S_w, C) nesse intervalo está abaixo da reta de inclinação v_s , que conecta $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ e $(S_w^+, f_w(S_w^+))$. Seja v_s^* a inclinação da reta que passa por $(S_w, f_w(S_w))$ e $(S_w^+, f_w(S_w^+))$. Por um argumento geométrico, segue que $v_s < v_s^*$. Logo,

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+) < v_s < v_s^*. \quad (4.78)$$

Portanto, em ambos os subintervalos, temos $\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+) < v_s$, o que implica $\lambda_1^+ < 0$.

- Caso 2: $f_w(S_w^b) < f_w(S_w^i)$.

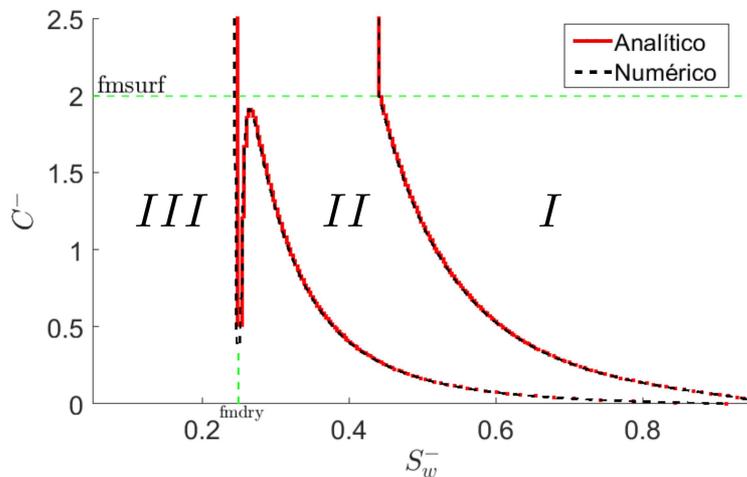
Este caso é análogo ao anterior e está ilustrado na Figura 10. Basta separar o intervalo $[S_{wc}, S_w^+]$ em dois intervalos, sendo eles $[S_{wc}, S_w^i]$ e $(S_w^i, S_w^+]$: Para $S_w \in (S_w^i, S_w^+]$, o raciocínio segue idêntico ao do intervalo $(S_w^b, S_w^+]$ no Caso 1. Para $S_w \in [S_{wc}, S_w^i]$, usamos novamente o fato de que $f_w(S_w)$ é monótona, S_w^b é único, e que qualquer inclinação v_s^* de uma reta que conecta $(S_w, f_w(S_w))$ a $(S_w^+, f_w(S_w^+))$ satisfaz:

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^+) < v_s < v_s^*.$$

Como os dois casos cobrem todas as possibilidades, segue que $\lambda_1^+ < 0$ para todo (S_w, C) . \square

Dado S_w^+ fixo, as Proposições 4.5.1 e 4.5.2 permitem classificar o espaço de fase $[S_{wc}, 1 - S_{gr}] \times [0, +\infty)$ nas regiões *I*, *II* e *III*, conforme resumido na Tabela 2. A Figura 11 apresenta a classificação dessas regiões no espaço de fase, obtida por duas metodologias distintas: (i) analítica, indicada pelas linhas vermelhas, a partir das Proposições 4.5.1 e 4.5.2; e (ii) numérica, indicada pelas linhas pretas tracejadas, calculadas por meio da matriz Jacobiana. Os valores de $fmsurf$ e $fmdry$ (linhas tracejadas verdes) são especificados na Tabela 1. Note que, para $C \geq fmsurf$, a forma da função f_w não muda, além de possuir apenas um ponto de tangência S_w^T . Sendo assim, o comportamento dos pontos no espaço de fase para $C \geq fmsurf$ é o mesmo.

Figura 11: Classificação dos equilíbrios no espaço de fase $[S_{wc}, 1 - S_{gr}] \times [0, +\infty)$, considerando $S_w^+ = 0.9499999$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

| Região | (S_w^-, C^-) | (S_w^+, C^+) |
|--------|---|--|
| I | Repulsor (Source) $\lambda_1^- > 0$ e $\lambda_2^- > 0$ | Sela (Saddle) $\lambda_1^+ < 0$ e $\lambda_2^+ > 0$ |
| II | Sela (Saddle) $\lambda_1^- > 0$ e $\lambda_2^- < 0$ | Atrator (Sink) $\lambda_1^+ < 0$ e $\lambda_2^+ < 0$ |
| III | Atrator (Sink) $\lambda_1^- < 0$ e $\lambda_2^- < 0$ | Atrator (Sink) $\lambda_1^+ < 0$ e $\lambda_2^+ < 0$ |

Tabela 2 – Classificação dos equilíbrios (S_w^-, C^-) e (S_w^+, C^+) para cada região mostrada na Fig. 2.

Agora, verificaremos o comportamento dos pontos de equilíbrio do espaço de fase onde $\frac{\partial F_1}{\partial S_w} = 0$. Observa-se que esses pontos correspondem aos pontos tangentes de f_w à reta que conecta S_w^- e S_w^+ . Isso resulta em uma bifurcação quando S_w^- transita entre as regiões II e III.

Observação 4.5.3. Fixemos $C^- = C^+$. Seja $S_w^T \in (S_{wc}, 1 - S_{gr})$ a coordenada de saturação correspondente ao ponto de tangência entre o gráfico da função f_w^{LE} e a reta que passa por $(S_w^+, f_w^{LE}(S_w^+))$. Podemos determinar numericamente o valor de $f_w^{LE}(S_w^T)$, associado ao ponto tangente $(S_w^T, f_w^{LE}(S_w^T))$, a partir da seguinte equação:

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^T) = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^T)}{S_w^+ - S_w^T} = v_s. \quad (4.79)$$

A proposição a seguir formaliza a caracterização geométrica, no espaço de fase, dos pontos críticos (S_w^T, C^+) que delimitam a transição entre as Regiões II e III. Tais pontos correspondem às condições sob as quais o sistema dinâmico associado deixa de ser hiperbólico, caracterizando, portanto, a ocorrência de uma bifurcação local. Essa mudança qualitativa na natureza do sistema, evidenciada pela colisão ou coalescência de autovalores da matriz jacobiana, implica na reconfiguração do retrato de fase e na emergência de novas soluções ou na perda de estabilidade das existentes.

Proposição 4.5.4. *Seja $C^- = C^+$ fixo. Seja $f_w(S_w, C^+)$ uma função contínua, diferenciável e monótona crescente no intervalo $[S_{wc}, 1 - S_{gr}]$, e seja $\lambda_1 = \partial F_1 / \partial S_w$ o autovalor da matriz Jacobiana J_f dado em (4.52) onde $f_w^+ = f_w(S_w^+, C^+)$. Então $\lambda_1^- = 0$ se e somente se $S_w^- = S_w^T$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\lambda_1^- = \frac{\partial F_1}{\partial S_w}(S_w^-) = 0$. A partir da equação (4.52), segue que:

$$0 = \left(v_s - \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right) \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right) - \frac{d}{dS_w} \left(f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w} \right) \cdot (v_s(S_w^- - S_w^+) + f_w^+ - f_w(S_w^-)). \quad (4.80)$$

Agora, como estamos interessados em saber o comportamento dos equilíbrios, podemos supor que o segundo fator da segunda parcela (o colchete direito) também se anula, conforme a análise da equação (4.44a), ou seja:

$$v_s(S_w^- - S_w^+) + f_w^+ - f_w(S_w^-) = 0, \quad (4.81)$$

Reorganizando essa equação obtemos v_s como dado em 4.21. Substituindo essa expressão de v_s na primeira parcela:

$$v_s - \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^-) = \frac{f_w^+ - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-} - \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^-). \quad (4.82)$$

Como a derivada de F_1 é nula, essa diferença deve ser zero, ou seja:

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^-) = \frac{f_w^+ - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-}. \quad (4.83)$$

Isso mostra que a derivada de f_w em S_w^- coincide com a inclinação da reta secante entre os pontos (S_w^+, f_w^+) e $(S_w^-, f_w(S_w^-))$, o que caracteriza a tangência entre a curva f_w e essa reta. Assim, pela definição da tangência adotada na equação (4.79), segue que $S_w^- = S_w^T$.

Reciprocamente, suponha que $S_w^- = S_w^T$. Então, pela equação (4.79), tem-se:

$$\frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^-) = \frac{f_w^+ - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-}, \quad (4.84)$$

e, como

$$v_s = \frac{f_w^+ - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-}, \quad (4.85)$$

concluimos que

$$v_s - \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w^-) = 0. \quad (4.86)$$

Substituindo na expressão da derivada de F_1 , vemos que a primeira parcela se anula. Além disso, a suposição de ser um ponto de equilíbrio, como na equação 4.81, implica que a segunda parcela também se anula. Assim, $\lambda_1^- = \frac{\partial F_1}{\partial S_w}(S_w^-) = 0$, o que conclui a demonstração da equivalência. \square

A partir da Tabela 2, podemos concluir que:

- Se (S_w^-, C^+) pertence às Regiões I ou II, há possibilidade de haver conexão de U^- para U^+ .
- Se (S_w^-, C^+) pertence à Região III, não há possibilidade de haver conexão de U^- para U^+ .

O próximo resultado garante que a reta $C = C^+$ é um subconjunto invariante do espaço de fase para o sistema considerado. Isso significa que quaisquer órbitas que partem de um ponto U_0 na vizinhança dos equilíbrios U^- ou U^+ , na direção desses equilíbrios e situadas sobre essa reta, permanecem confinadas a ela ao longo da evolução do sistema.

Proposição 4.5.5. *Seja Γ o conjunto definido por*

$$\Gamma = \{(S_w, C) \in E; S_{wc} \leq S_w \leq 1 - S_{gr} \text{ e } C = C^+\}.$$

Então, Γ é invariante sob o fluxo do sistema de EDOs (4.42) associado.

Demonstração. Seja $U_0 = (S_{w0}, C^+) \in \Gamma$. Mostremos que $\varphi_\xi(U_0) \in \Gamma$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Primeiro, suponha que U_0 seja um ponto de equilíbrio. Isso implica que o campo vetorial $F(U_0) = 0$, isto é,

$$\frac{dU}{d\xi} = F(U) \text{ é zero em } U = U_0.$$

Consequentemente, se U_0 é um ponto de equilíbrio, então $\varphi_\xi(U_0) = U_0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Logo, $\varphi_t(U_0) \in \Gamma$. Agora, suponha que U_0 não seja ponto de equilíbrio. A trajetória que passa por esse ponto é dada por

$$\varphi_\xi(U_0) = (S_w(\xi), C(\xi)),$$

a qual é uma solução do sistema de EDOs que passa por U_0 . Como $U_0 \in \Gamma$, temos $C = C^+$, e, sabendo que

$$\frac{dC}{d\xi} = F_2(S_w, C),$$

e que $F_2(S_w, C^+) = 0$, segue que

$$\frac{dC}{d\xi} = 0,$$

para cada valor de S_w . Logo, $C(\xi)$ é constante ao longo da trajetória $\varphi_\xi(U_0)$, e como $C(\xi_0) = C^+$, concluímos que $C(\xi) = C^+$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Portanto, $\varphi_\xi(U_0) \in \Gamma$ para todo ξ , e o conjunto Γ é invariante. \square

4.5.1 Estudo numérico dos pontos de equilíbrio

Primeiro, sabemos que a Região I está localizada à direita da Região II no espaço de fase, isto é, na reta $C^- = C^+$, o valor nos pontos S_w^- pertencentes à Região II são menores do que para S_w^- pertencente à Região I . Além disso, a partir de estudos numéricos é possível verificar que, para todo C^- escolhido, os pontos (S_w^b, C) (tal que $(S_w^b, f_w(S_w^b))$ pertence à reta que conecta os pontos $(S_{wc}, 0)$ e (S_w^+, f_w^+)) (para S_w^b definido na Proposição 4.5.2) pertencem à Região II . Sendo assim, a região I é delimitada para valores $S_w^- > S_w^b$. Logo, conforme visto na Proposição 4.4.2, há apenas dois equilíbrios na região I , sendo eles os estados U^- e U^+ onde o equilíbrio esquerdo U^- é um repulsor e o equilíbrio direito U^+ é uma sela. Assim, há possibilidade de solução na forma de onda viajante.

Por outro lado, também é possível verificar numericamente que a Região II apresenta casos nos quais não temos ondas viajantes. Isto é devido à distribuição dos equilíbrios ao longo da variedade invariante $C^- = C^+$. Por tal motivo, estamos interessados em determinar, para cada $U^- \in II$, a quantidade de equilíbrios e suas respectivas posições ao longo da reta $C = C^+$.

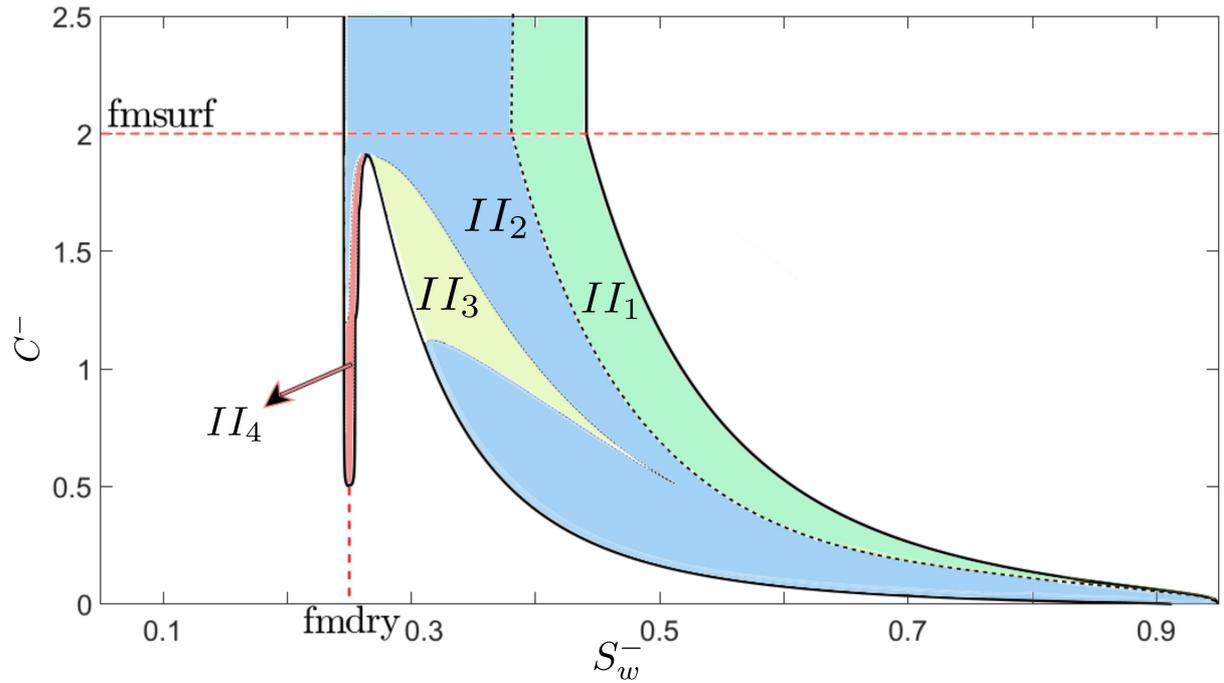
De forma análoga ao que foi feito para a Região I , para U^- pertencente à Região II existem pontos tais que se $S_w^- > S_w^b$, então há somente dois equilíbrios, sendo eles os estados U^- e U^+ onde o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator. Denotamos a sub-região onde isso ocorre, para todo (S_w^-, C^-) , por II_1 ; ver Figura 12. Já a sub-região II_2 corresponde aos estados U^- aos quais geram três equilíbrios, sendo eles os estados U^e , U^- e U^+ onde o equilíbrio extra U^e é um atrator, o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator. Por fim, ambas as sub-regiões II_3 e II_4 possuem cinco equilíbrios, mas são separadas pela posição do equilíbrio esquerdo U^- no espaço de fase. A Figura 12 ilustra as sub-regiões II_1, II_2, II_3 e II_4 no espaço de fase.

Os itens a seguir correspondem às sub-regiões de II da Figura 12 :

1. Se $U^- \in II_1$, têm-se dois pontos de equilíbrio, onde o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator.
2. Se $U^- \in II_2$, têm-se três pontos de equilíbrio, onde o equilíbrio extra U^e é um atrator, o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator.
3. Se $U^- \in II_3$, têm-se cinco pontos de equilíbrio, onde o primeiro equilíbrio extra U^{e1} é um atrator, o segundo equilíbrio extra U^{e2} é uma sela, o terceiro equilíbrio extra U^{e3} é um atrator, o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator.
4. Se $U^- \in II_4$, têm-se cinco pontos de equilíbrio, onde o primeiro equilíbrio extra U^{e1} é um atrator, o equilíbrio esquerdo U^- é uma sela, o segundo equilíbrio extra U^{e2} é

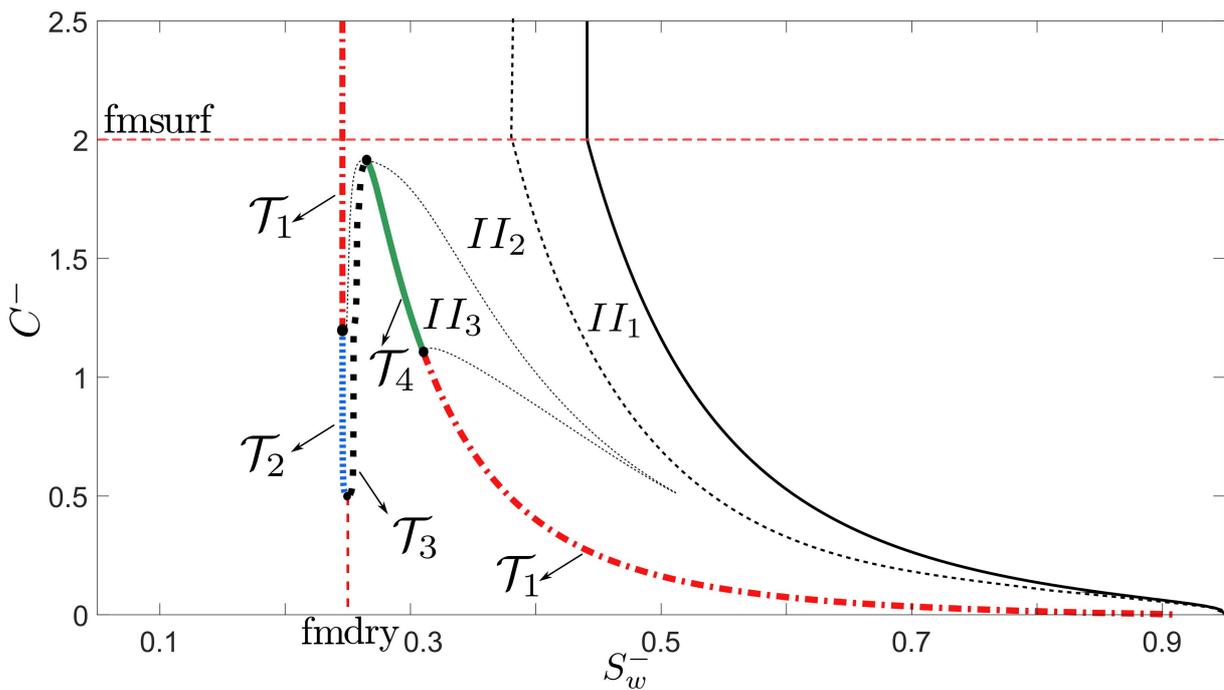
um atrator, o terceiro equilíbrio extra U^{e3} é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é um atrator.

Figura 12: Subdivisões da Região II de acordo com o número de equilíbrios e suas posições no espaço de fase.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 13: Subdivisões da fronteira que separa as Regiões II e Região III .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste trabalho, estudamos um sistema de EDOs do tipo

$$U' = F(U, v_s). \quad (4.87)$$

Ao fixar v_s , o sistema de EDOs se reduz à uma forma autônoma, dada por

$$U' = \mathcal{F}(U), \quad (4.88)$$

onde $\mathcal{F}(U)$ depende exclusivamente de U . A análise da dinâmica associada a este sistema, no contexto do escoamento bifásico em meio poroso, revelou a ocorrência de bifurcações, cuja fundamentação teórica foi discutida na Seção **2.2.3**. Conforme abordado ali, bifurcações locais correspondem a mudanças qualitativas na configuração dos equilíbrios do sistema quando um parâmetro é variado, como no caso de bifurcações sela-nó, que envolvem a colisão e o desaparecimento de dois pontos de equilíbrio [92].

Neste contexto aplicado, observamos que a transição entre as Regiões *II* e *III* no espaço de parâmetros é determinada por esse tipo de bifurcação. Nesse contexto, introduzimos a fronteira de transição \mathcal{T} (ver Figura 13) como o conjunto dos parâmetros para os quais o autovalor λ_1^- associado ao estado à esquerda U^- se anula. Tal condição sinaliza a perda da propriedade de hiperbolicidade e delimita precisamente o limiar da bifurcação. A fronteira \mathcal{T} não é uniforme, podendo ser subdividida em subconjuntos com diferentes configurações topológicas dos equilíbrios no espaço de fase. A seguir estudamos essa classificação, descrevendo as quatro possíveis configurações de pontos de equilíbrio na fronteira de transição \mathcal{T} , de acordo com a localização do estado esquerdo U^- no espaço de parâmetros.

Logo, a subdivisão da fronteira de transição \mathcal{T} pode ser interpretada como o conjunto de transições entre a região *III* e diferentes sub-regiões de *II*. Em todas essas transições, observou-se a ocorrência de uma bifurcação do tipo sela-nó, conforme descrito na Seção **2.2.3**. A distinção entre os componentes de fronteira de \mathcal{T} está relacionada tanto à quantidade de equilíbrios que emergem quanto à sua posição relativa no espaço de fase. Portanto, podemos dividir a fronteira \mathcal{T} nos seguintes componentes de fronteira, conforme ilustrado na Figura 13:

1. Se $U^- \in \mathcal{T}_1$, têm-se dois pontos de equilíbrio, onde o equilíbrio esquerdo U^- é um nó e o equilíbrio direito U^+ é um atrator.
2. Se $U^- \in \mathcal{T}_2$, têm-se quatro pontos de equilíbrio, onde o equilíbrio esquerdo U^- é um nó, o primeiro equilíbrio extra U^{e1} é um atrator, o segundo equilíbrio extra U^{e2} é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é uma atrator.
3. Se $U^- \in \mathcal{T}_3$, têm-se quatro pontos de equilíbrio, onde o primeiro equilíbrio extra U^{e1} é um atrator, o equilíbrio esquerdo U^- é um nó, o segundo equilíbrio extra U^{e2} é uma sela e o equilíbrio direito U^+ é uma atrator.

4. Se $U^- \in \mathcal{T}_4$, têm-se quatro pontos de equilíbrio, onde o primeiro equilíbrio extra U^{e1} é um atrator, o segundo equilíbrio extra U^{e2} é uma sela, o equilíbrio esquerdo U^- é um nó e o equilíbrio direito U^+ é uma atrator.

Observação 4.5.6. *Note que, para (S_w^-, C^-) pertencente à \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_4 , há possibilidade de solução na forma de ondas viajantes.*

A análise desenvolvida ao longo dos capítulos anteriores permitiu caracterizar a estrutura dos pontos de equilíbrio e suas respectivas classificações, bem como descrever como esses equilíbrios se organizam nas diferentes regiões do espaço de parâmetros. Com base nesses resultados, é possível estabelecer condições precisas que garantem a existência de perfis de ondas viajantes heteroclínicas, ou seja, trajetórias que conectam os estados U^- e U^+ no espaço de fase do sistema dinâmico associado. O teorema a seguir formaliza esse resultado, estabelecendo a existência de soluções na forma de ondas viajantes para os casos em que o estado inicial U^- pertence às Regiões I , II_1 , II_2 , II_3 . Este constitui o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.5.7. *Considere o sistema de EDOs dado por (4.42), com v_s fixo, conforme definido em (4.43), e com os valores dos parâmetros do modelo especificados na Tabela 1. Seja $U^+ = (0.9499999, C^+)$ o estado à direita e $U^- = (S_w^-, C^-)$ o estado à esquerda, com $C^- = C^+$. Suponha que $U^- \in \{I, II_1, II_2, II_3\}$.*

Então, existe uma solução $(S_w(t), C(t))$ na forma de ondas viajantes do sistema (4.42) tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S_w(t), C(t)) = (0.9499999, C^+) \quad (4.89)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (S_w(t), C(t)) = (S_w^-, C^-). \quad (4.90)$$

Demonstração. Queremos demonstrar a existência de uma solução na forma de onda viajante que conecta os estados $U^- = (S_w^-, C^-)$ e $U^+ = (S_w^+, C^+)$ por meio de uma órbita heteroclínica do sistema dinâmico associado.

Conforme discutido, quando $U^- \in I, II_1$, o sistema dinâmico apresenta exatamente dois pontos de equilíbrio, U^- e U^+ , com U^- sendo um repulsor (em I) ou uma sela (em II_1), e U^+ uma sela ou um atrator, respectivamente. Para $U^- \in II_2, II_3$, há equilíbrios adicionais no espaço de fase, mas todos localizados à esquerda de U^- , de modo que o intervalo entre U^- e U^+ contém unicamente esses dois equilíbrios.

A Proposição 4.5.5 garante que a reta $\Gamma = \{(S_w, C) \in E \mid C = C^+\}$ é invariante sob o fluxo do sistema. Portanto, qualquer trajetória que tenha início em Γ permanecerá contida nessa reta. Restrito a essa reta invariante, o sistema de equações diferenciais

reduz-se à equação escalar

$$\frac{dS_w}{d\xi} = \frac{u [v_s(S_w - S_w^+) + (f_w^+ - f_w(S_w))]}{K f_w \lambda_g \frac{dP_c}{dS_w}},$$

cujos pontos de equilíbrio coincidem com os estados $U^- = (S_w^-, C^+)$ e $U^+ = (S_w^+, C^+)$.

A matriz Jacobiana do sistema completo avaliada em qualquer ponto $U = (S_w, C)$ possui forma triangular superior, e os autovalores e autovetores são dados pelas expressões (4.58) e (??). Em particular, o autovetor correspondente ao autovalor λ_1 é $v_1 = [1 \ 0]^T$.

Pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe uma vizinhança V_2 de U^+ na qual o fluxo do sistema não linear é topologicamente equivalente ao seu sistema linearizado. Em particular, pela Proposição 4.5.2, temos que $\lambda_1^+ < 0$, ou seja, existe pelo menos uma direção de entrada em U^+ , o que garante que a variedade estável local $W_{\text{loc}}^s(U^+)$ intersecta a reta $C = C^+$, pois a variedade estável local é tangente ao autovetor v_1 . Além disso, também pelo Teorema de Hartman-Grobman existe uma vizinhança V_1 de U^- que contém algum ponto pertencente à variedade instável local $W_{\text{loc}}^u(U^-)$.

Como $C = C^+$ é invariante, e não existem outros pontos de equilíbrio entre U^- e U^+ sobre essa reta nos casos considerados, a única possibilidade topológica admissível é que a variedade instável global $W^u(U^-)$ e a variedade estável global $W^s(U^+)$ coincidam sobre a reta $C = C^+$, formando uma órbita heteroclínica que conecta U^- a U^+ .

Portanto, existe uma trajetória $\varphi(\xi) \subset \Gamma$ tal que

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = U^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = U^+, \quad (4.91)$$

isto é, existe uma solução na forma de onda viajante que conecta U^- a U^+ ao longo da reta invariante $C = C^+$.

□

Observação 4.5.8. *Desconsideramos os casos em que $U^- \in \mathcal{T}$, pois, nessa região, o autovalor $\lambda_1^- = 0$, o que torna o sistema não hiperbólico. Como consequência, teoremas clássicos como o de Hartman-Grobman e o da variedade estável não são aplicáveis, e o estudo das conexões neste caso exigiria uma análise qualitativa mais refinada, o que não será abordado nesta dissertação.*

4.6 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, realizamos simulações numéricas utilizando o software *Reaction Convection Diffusion Equations Solver* (RCD), com o objetivo de validar os resultados analíticos associados às soluções apresentadas no Teorema 4.5.7. Para isso, emprega-se o algoritmo ode23s, método disponível no MATLAB para a resolução de EDOs.

O ode23s é um método de passo único, implícito, baseado em um esquema de Rosenbrock modificado, indicado para problemas que exigem maior estabilidade numérica [77].

As soluções obtidas por meio desse algoritmo são consideradas como *soluções verdadeiras*, no sentido de apresentarem precisão suficientemente elevada para serem utilizadas como referência comparável a soluções analíticas.

Por sua vez, o RCD emprega o esquema implícito de Crank-Nicolson, que é simétrico em relação ao tempo e apresenta ordem de precisão dois, tanto nas direções temporal quanto espacial [55]. Esse esquema é acoplado a um método de Newton, utilizado na resolução iterativa do sistema não linear resultante da discretização das equações diferenciais parciais envolvidas.

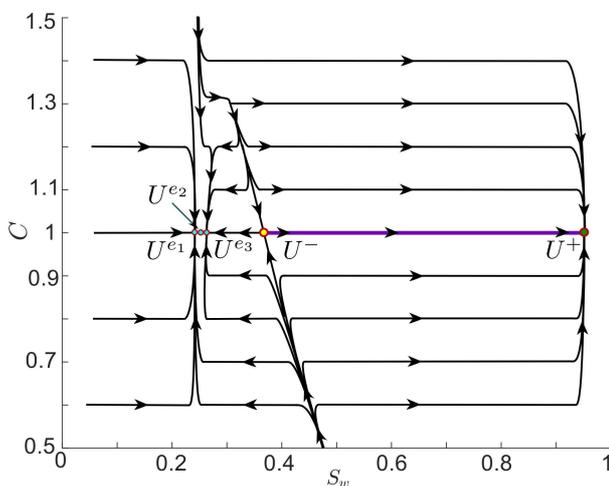
As simulações no RCD foram conduzidas em um domínio unidimensional com malha espacial uniforme contendo 1000 pontos, correspondente a um comprimento total de 0,3048 metros. Adotou-se um passo de tempo fixo de $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s, com tempo final de simulação de 540 s, equivalente a aproximadamente 0,5 volumes porosos (PV).

Quanto às condições de contorno, impôs-se na extremidade esquerda do domínio uma condição de Dirichlet, fixando a saturação de injeção. Essa escolha representa fisicamente a especificação da razão entre as fases aquosa e gasosa na mistura injetada. Na extremidade direita, aplicou-se uma condição de Neumann homogênea (sem fluxo), representando uma fronteira aberta, onde não há variação do fluxo fracionário ao longo do tempo. Finalizada a apresentação das metodologias numérica e analítica adotadas, procedemos à análise de casos específicos, buscando validar os resultados obtidos.

Primeiramente, estudamos o caso em que os estados esquerdo U^- permanecem na região I . Pelo Teorema 4.5.7, conclui-se que existe uma solução na forma de onda viajante, uma vez que o estado esquerdo é classificado como repulsor, o direito como sela, e não há equilíbrios extras entre eles. Assim, existe uma órbita heteroclínica conectando U^- a U^+ . A figura ?? mostra espaço de fase para os sistema de EDOs considerando os estados $U^- = (0.7, 1)$ e $U^+ = (0.9499999, 1)$. A Figura ?? apresenta a comparação dos perfis em dois instantes, 0.25 PV e 0.5 PV, entre a solução numérica (4.8) (linhas sólidas) e a solução analítica (4.42) (linhas tracejadas) do problema de Riemann (4.12), evidenciando a presença da onda viajante.

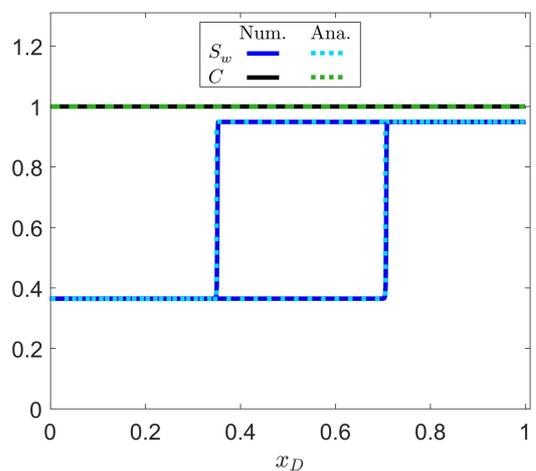
Sistema Em seguida, analisamos o caso em que o estado esquerdo pertence à região II_3 . Pelo mesmo Teorema 4.5.7, concluímos novamente que há solução na forma de onda viajante, já que o estado esquerdo é classificado como sela, o direito como atrator, e não existem equilíbrios intermediários. A Figura 14 mostra o espaço de fase do sistema de EDOs para os estados $U^- = (0.3646, 1)$ e $U^+ = (0.9499999, 1)$, observamos que os equilíbrios U^{e1} , U^{e2} e U^{e3} encontram-se à esquerda de U^- . Portanto, existe uma órbita conectando U^- a U^+ . A Figura 15 apresenta a comparação entre os perfis da solução numérica (4.8) (linhas sólidas) e da solução analítica (4.42) (linhas tracejadas) associada ao problema de Riemann (4.12) para os instantes 0.25 PV e 0.5 PV, confirmando a presença da onda viajante.

Figura 14: Espaço de fase do Sistema de EDOs para $(S_w^-, C^-) = (0.3646, 1)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 15: Perfis da solução numérica para $(S_w^-, C^-) = (0.3646, 1)$.



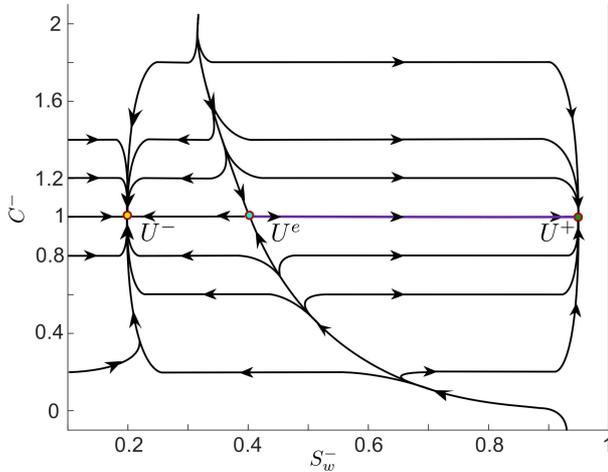
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Em continuidade, analisamos o caso em que o estado esquerdo U^- pertence à região III . Conforme indicado na Tabela 2, neste caso não há solução na forma de onda viajante, pois ambos os estados U^- e U^+ são classificados como atratores. A Figura 16 apresenta o espaço de fase do sistema de EDOs para os estados $U^- = (0.2, 1)$ e $U^+ = (0.9499999, 1)$, observando-se a presença de um equilíbrio U^e entre eles, o que impede a existência de uma órbita conectando U^- a U^+ . A Figura 17 apresenta os perfis da solução numérica do problema de Riemann (4.8)–(4.12) em três instantes (0.17 PV, 0.33 PV e 0.5 PV), nos quais não se observa a formação de ondas viajantes pois tem uma mudança nos perfis da saturação da água ao longo do tempo.

Finalmente, comparamos a solução numérica obtida no RCD com o *Caso I: CO₂ Displacing Water (drenagem)* estudado por Zeng et al. [93]. Nesse caso, o CO₂ é continuamente injetado para deslocar a água em um meio unidimensional inicialmente saturado apenas com água e sem surfactante. Assim, a condição inicial (estado direito) é dada por $S_w^+ = 1$ e $C^+ = 0$.

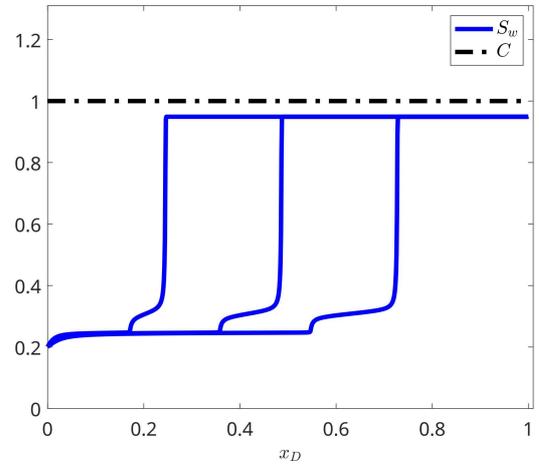
Para a condição de injeção (estado esquerdo), o surfactante é injetado juntamente

Figura 16: Espaço de fase do Sistema de EDOs para $(S_w^-, C^-) = (0.2, 1)$.



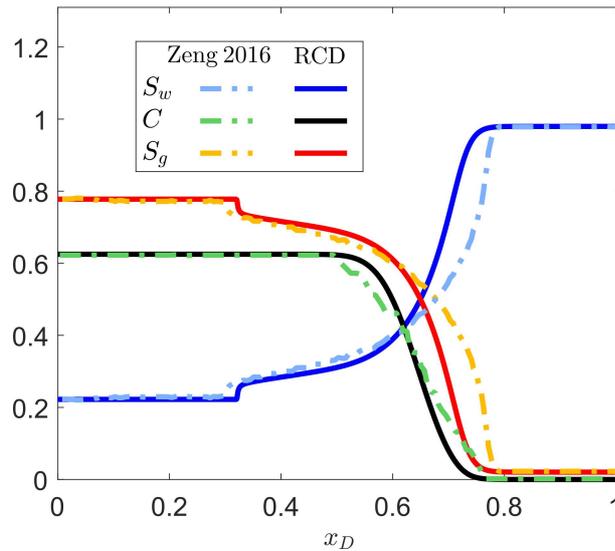
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 17: Perfis da solução numérica para $(S_w^-, C^-) = (0.2, 1)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 18: Comparação numérica da solução obtida no RCD com o Caso I de Zeng et al. [93].



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

com a fase gasosa com concentração $C_{sg}^- = 2,5$ g/L, valor ligeiramente superior a $fmsurf$. Considerando $K_{sgw} = 4$, obtemos $C^- = C_{sw}^- = 0,625$ g/L, já que em nosso modelo consideramos $C = C_{sw}$. Além disso, com base na Figura 5 de Zeng et al. [93], e utilizando $S_g^- = 1 - fmdry$, temos $S_w^- = fmdry = 0,25$.

A Figura 18 apresenta os perfis de saturação da água, do gás e concentração de surfactante na fase aquosa, onde a linha tracejada representa os perfis obtidos por Zeng et al. [93] e a linha sólida os perfis obtidos através do RCD. Verifica-se que esses resultados estão qualitativamente de acordo com os perfis da Figura 5 de Zeng et al. [93]. No entanto, conforme discutido na Seção 4.3, uma condição necessária para a existência de ondas viajantes é que $C^- = C^+$. Como neste caso $C^- \neq C^+$, os perfis obtidos não mantêm sua

forma ao longo do tempo. Tal fato é visível na Figura 18, onde não se observa um perfil estacionário se propagando, evidenciando, portanto, a inexistência de ondas viajantes neste caso.

Para comparar os resultados numéricos do RCD com os dados de Zeng et al. [93] (Figura 18), os valores de referência foram extraídos das curvas publicadas por Zeng et al. e posteriormente interpolados nos mesmos pontos utilizados nas soluções numéricas, de modo a possibilitar a comparação ponto a ponto. Os resultados mostraram que o erro relativo médio foi de aproximadamente 13,3% para a saturação do gás S_g e de 37,7% para a concentração de surfactante C , indicando que, apesar de discrepâncias locais, a tendência global das soluções obtidas pelo RCD acompanha satisfatoriamente os dados de Zeng et al.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos um modelo matemático que descreve o deslocamento de espuma em meios porosos, incorporando o efeito de partição do surfactante entre as fases aquosa e gasosa. O principal objetivo foi investigar a existência de soluções do problema de Riemann associadas a esse modelo, considerando soluções na forma de ondas viajantes. A análise baseou-se na reformulação do sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, permitindo uma investigação qualitativa do comportamento dinâmico das soluções no espaço de fase.

Classificamos os possíveis estados de injeção S_w^- em três regiões: *I*, *II* e *III*, conforme ilustrado na Figura 11. Na **Região I**, demonstramos a existência de soluções do tipo onda viajante conectando os estados U^- e U^+ . Na **Região II**, identificamos subdivisões (II_1, II_2, II_3 e II_4) de acordo com o número e a posição dos equilíbrios sobre a reta $C^- = C^+$. Em cada sub-região, verificamos a existência (ou não) de órbitas heteroclínicas que viabilizam soluções do problema de Riemann na forma de ondas viajantes. Na **Região III**, foi verificado que não existem soluções na forma de onda viajante.

Na **fronteira de transição \mathcal{T}** , analisamos o comportamento qualitativo do retrato de fase e identificamos, nos componentes de fronteira específicos (\mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_4), a possibilidade de existência de soluções do tipo onda viajante. Adicionalmente, demonstramos que os pontos $(S_w, C) \in \mathcal{T}$ pertencem à reta tangente à curva de f_w^{LE} no ponto (S_w^+, C^+) . Essa configuração geométrica indica que tais pontos atuam como fronteiras críticas entre regiões com dinâmicas distintas no espaço de fase.

Toda a análise teórica foi validada por meio de simulações numéricas: o sistema de equações diferenciais parciais foi resolvido com o código RCD, enquanto o sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o perfil das ondas viajantes foi integrado numericamente utilizando o algoritmo ode23s do MATLAB. Além disso, realizamos uma comparação quantitativa entre os perfis obtidos e um caso de referência disponível na literatura, apresentado por Zeng et al. [93], verificando boa concordância entre os resultados numéricos, o que reforça a consistência do modelo adotado.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

O presente estudo foi realizado fixando-se um valor específico para o coeficiente de partição K_{sgw} . Como desenvolvimento natural, propomos investigar a influência da variação de K_{sgw} sobre o diagrama de classificação das regiões no espaço de fase.

Outra direção relevante para estudos futuros envolve a inclusão da adsorção do surfactante no modelo, por meio de considerar a função $G(C) \neq 0$. Tal modificação altera a equação de conservação do surfactante e pode impactar tanto a existência quanto a forma das soluções do tipo onda viajante, além de influenciar a classificação das regiões

no espaço de fase.

Também é de interesse considerar o caso mais geral em que $C^- \neq C^+$. Essa generalização pode introduzir novas dinâmicas no retrato de fase e permitir a existência de soluções com estruturas mais complexas.

Por fim, sugerimos analisar o comportamento do sistema quando se considera $\alpha = 0$ na equação (4.33).

REFERÊNCIAS

- 1 ASHOORI, E.; VAN DER HEIJDEN, T.; ROSSEN, W. R. Fractional flow theory of foam displacements with oil. In: *SPE International Symposium on Oilfield Chemistry*, Woodlands, Texas, EUA, 2009. Society of Petroleum Engineers. DOI: 10.2118/121579-MS.
- 2 ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN, W. R. Dynamic foam behavior in the entrance region of a porous medium. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, v. 377, n. 1, p. 217–227, 2011. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2010.12.035.
- 3 ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN, W. R. Roles of transient and local equilibrium foam behavior in porous media: traveling wave. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, v. 377, p. 228–242, 2011. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2010.12.042.
- 4 BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: Dover Publications, 1988. ISBN 9780486131801.
- 5 BEAR, J.; BACHMAT, Y. *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*. Theory and Applications of Transport in Porous Media, v. 4. New York: Springer, 1990.
- 6 BEAR, J. *Modeling phenomena of flow and transport in porous media*. Cham: Springer, 2018. ISBN 978-3-319-72825-4. DOI: 10.1007/978-3-319-72826-1.
- 7 BELLO, A.; IVANOVA, A.; CHEREMISIN, A. Foam EOR as an optimization technique for gas EOR: a comprehensive review of laboratory and field implementations. *Energies*, v. 16, n. 2, 2023. DOI: 10.3390/en16020972.
- 8 BERA, A.; MANDAL, A. Microemulsions: a novel approach to enhanced oil recovery: a review. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 5, p. 255–268, 2015. DOI: 10.1007/s13202-014-0139-5.
- 9 BERTIN, H.; QUINTARD, M.; CASTANIER, L. Development of a bubble-population correlation for foam-flow modeling in porous media. *SPE Journal*, v. 3, n. 4, p. 356–362, 1998. DOI: 10.2118/55619-PA.
- 10 BIKERMAN, J. J. *Foams*. Cham: Springer Science & Business Media, 2013.
- 11 BOEIJE, C. S.; ROSSEN, W. R. SAG foam flooding in carbonate rocks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 171, p. 843–853, 2018. DOI: 10.3997/2214-4609.201700337.
- 12 BLUNT, M. J. *Multiphase flow in permeable media: a pore-scale perspective*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. p. 500.
- 13 BRETHERTON, F. P. The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 10, n. 2, p. 166–188, 1961.
- 14 BROOKS, R. H.; COREY, A. T. Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*, v. 92, n. 2, p. 61–90, 1966.

- 15 BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, v. 146, 1942.
- 16 CASTRILLÓN VÁSQUEZ, A. J. et al. The traveling wavefront for foam flow in two-layer porous media. *Computational Geosciences*, v. 26, n. 5, p. 1549–1564, 2022. DOI: 10.1007/s10596-022-10169-z.
- 17 CEDRO, J. B. S. Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos com espuma em meios porosos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil, 2020.
- 18 CENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. *Thermodynamics: an engineering approach*. 9. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2018. p. 1008.
- 19 CHAPIRO, G. et al. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational Geosciences*, v. 16, n. 3, p. 799–808, 2012.
- 20 CHAPIRO, G. et al. Stability of interacting traveling waves in reaction-convection-diffusion systems. *DCDS Issue Special*, p. 258–266, 2015. DOI: 10.3934/proc.2015.0258.
- 21 CHAPIRO, G.; BRUINING, J. Combustion enhanced recovery of shale gas. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 127, p. 179–189, 2015.
- 22 CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- 23 CHEN, X. et al. Study on enhanced oil recovery mechanism of CO₂ miscible flooding in heterogeneous reservoirs under different injection methods. *ACS Omega*, v. 8, n. 27, p. 24663–24672, 2023. DOI: 10.1021/acsomega.3c03352.
- 24 CRAFT, B. C.; HAWKINS, M. F. *Applied petroleum reservoir engineering*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1959. p. 437. Chemical Engineering Series.
- 25 CUI, L. et al. Adsorption of a switchable cationic surfactant on natural carbonate minerals. In: SPE IMPROVED OIL RECOVERY SYMPOSIUM, 2014, Tulsa, Oklahoma. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 2014. SPE-169040-MS.
- 26 DAI, C. et al. *Principles of enhanced oil recovery*. Beijing: China University of Petroleum Press, 2023. DOI: 10.1007/978-981-99-0193-7
- 27 DAKE, L. P. *Fundamentals of reservoir engineering*. New York: Elsevier, 1978. p. 443.
- 28 DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris: Victor Dalmont, 1856.
- 29 DE PAULA, F. F. et al. A numerical algorithm to solve the two-phase flow in porous media including foam displacement. In: KRZHIZHANOVSKAYA, V. V. et al. (Org.). *Computational Science – ICCS 2020*. Cham: Springer, 2020. (Lecture Notes in Computer Science, v. 12143). DOI: 10.1007/978-3-030-50436-6_2
- 30 ELHAG, A. S. et al. Switchable amine surfactants for stable CO₂/brine foams in high temperature, high salinity reservoirs. In: SPE IMPROVED OIL RECOVERY SYMPOSIUM, 2014, Tulsa, Oklahoma. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 2014. SPE-169041-MS.

- 31 EZEKWE, N. *Petroleum reservoir engineering practice*. Upper Saddle River: Pearson Education, 2011.
- 32 FANCHI, J. R. Permeability. In: FANCHI, J. R. (ed.). *Developments in petroleum science*. Amsterdam: Elsevier, 2000. v. 49, cap. 4, p. 41–56. DOI: 10.1016/S0376-7361(00)80029-1.
- 33 FRIEDMANN, F.; CHEN, W.; GAUGLITZ, P. Experimental and simulation study of high-temperature foam displacement in porous media. *SPE Reservoir Engineering*, v. 6, n. 1, p. 37–45, 1991. DOI: 10.2118/17357-pa.
- 34 FRITIS, G. C. et al. On the Riemann problem for the foam displacement in porous media with linear adsorption. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Philadelphia, v.84, n.2, p.581–601, 2024. Disponível em: 10.1137/23M156664.
- 35 GAUGLITZ, P. A.; FRIEDMANN, F.; KAM, S.; ROSSEN, W. R. Foam generation in homogeneous porous media. *Chemical Engineering Science*, v. 57, n. 19, p. 4037–4052, 2002. DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00340-8.
- 36 GHAZARYAN, A. R.; LAFORTUNE, S.; MANUKIAN, V. *Introduction to traveling waves*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2022. DOI: 10.1201/9781003147619.
- 37 GILDING, B. H.; KERSNER, R. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Basel: Birkhäuser, 2012. v. 60.
- 38 GLITTINGER, W. Bifurcation theory in physics: recent trends and problems. *International Series of Numerical Mathematics*, v. 79, 1987. Basel: Birkhäuser Verlag Basel.
- 39 GREEN, D. W.; WILLHITE, G. P. *Enhanced oil recovery*. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 1998. (Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME).
- 40 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer, 1986.
- 41 HAMED, H. et al. Foam flow in porous media: concepts, models and challenges. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, v. 2018, p. 163–180, 2018.
- 42 HEMATPUR, H. et al. Foam flow in porous media: Concepts, models and challenges. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, v. 53, p. 163–180, 2018. DOI: 10.1016/j.jngse.2018.02.017.
- 43 HIRASAKI, G. J.; LAWSON, J. B. Mechanisms of foam flow in porous media: apparent viscosity in smooth capillaries. *SPE Journal*, v. 25, n. 02, p. 176–190, 1985. DOI: 10.2118/12129-PA.
- 44 HIRASAKI, G. J. et al. Surfactant/foam process for aquifer remediation. In: *Proceedings of the 14th International Symposium on Oilfield Chemistry*. Houston, TX: Society of Petroleum Engineers, 1997. p. 471–480.
- 45 HOMBURG, A. J.; SANDESTEDTE, B. *Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields*. Amsterdam: Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, 2010.

- 46 HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.001415.
- 47 HONARPOUR, M.; KOEDERITZ, L.; HARVEY, A. H. *Relative permeability of petroleum reservoirs*. Boca Raton: CRC Press, 1986. p. 210.
- 48 JANSSEN, M. T. G.; PILUS, R. M.; ZITHA, P. L. J. A comparative study of gas flooding and foam-assisted chemical flooding in bentheimer sandstones. *Transport in Porous Media*, v. 131, n. 1, p. 101–134, 2020. DOI: 10.1007/s11242-018-01225-3.
- 49 JANSSEN, M. T. G.; MENDEZ, F. A. T.; ZITHA, P. L. J. Mechanistic modeling of water-alternating-gas injection and foam-assisted chemical flooding for enhanced oil recovery. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 59, n. 8, p. 3606–3616, 2020. DOI: 10.1021/acs.iecr.9b06356.
- 50 JIN, F. Principles of enhanced oil recovery. In: HU, X. (ed.). *Physics of petroleum reservoirs*. New York: Springer, 2017. p. 127–160. Cap. 5.
- 51 KARAGUEUZIAN, H. S.; STEPANYAN, H.; MANDEL, W. J. Bifurcation theory and cardiac arrhythmias. *Am J Cardiovasc Dis*, v. 3, n. 1, p. 1–16, 2013. PMID: 23459417, PMCID: PMC3584649.
- 52 KOVSCEK, A. R.; PATZEK, T. W.; RADKE, C. J. A mechanistic population balance model for transient and steady-state foam flow in Boise sandstone. *Chemical Engineering Science*, v. 50, n. 23, p. 3783–3799, 1995. DOI: 10.1016/0009-2509(95)00199-F.
- 53 KOVSCEK, A. R.; CHEN, Q.; GERRITSEN, M. Modeling foam displacement with the local-equilibrium approximation: theory and experimental verification. *SPE Journal*, v. 15, n. 1, p. 171–183, 2010. DOI: 10.2118/116735-PA.
- 54 LAKE, L. W. *Enhanced oil recovery*. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 2010.
- 55 LAMBERT, W. et al. Mathematics and numerics for balance partial differential-algebraic equations (pdaes). *J. Sci. Comput.*, v. 84, n. 2, 2020. DOI: 10.1007/s10915-020-01279-w.
- 56 LE, V. Q.; NGUYEN, Q. P.; SANDERS, A. A novel foam concept with CO₂ dissolved surfactants. In: SPE/DOE IMPROVED OIL RECOVERY SYMPOSIUM, 2008, Tulsa, Oklahoma, USA. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 2008. SPE-113370-MS.
- 57 LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws*. 2. ed. Basel: Birkhäuser Basel, 1992. DOI: 10.1007/978-3-0348-8629-1.
- 58 LEVERETT, M. C. Capillary behavior in porous solids. *Transactions of the AIME, Society of Petroleum Engineers*, v. 142, n. 01, p. 152–169, 1941.
- 59 LOZANO, L. F.; ZAVALA, R. Q.; CHAPIRO, G. Mathematical properties of the foam flow in porous media. *Computational Geosciences*, v. 25, n. 1, p. 515–527, 2021. DOI: 10.1007/s10596-020-10020-3.

- 60 LOZANO, L. F.; CHAPIRO, G. Analytical solution for the population-balance model describing foam displacement considering surfactant dispersion. In: EUROPEAN CONFERENCE ON THE MATHEMATICS OF GEOLOGICAL RESERVOIRS, 2022, The Hague. The Hague: European Association of Geoscientists & Engineers, 2022. p. 1–13. DOI: 10.1007/s11242-021-01589-z.
- 61 LOZANO, L. F. et al. How simplifying capillary effects can affect the traveling wave solution profiles of the foam flow in porous media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 139, p. 103867, 2022. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103867.
- 62 MAHBOOB, A. et al. EOR Perspective of microemulsions: A review. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 208, p. 109312, 2022. DOI: 10.1016/j.petrol.2021.109312.
- 63 MASSARWEH, O.; ABUSHAIKHA, A. S. The use of surfactants in enhanced oil recovery: A review of recent advances. *Energy Reports*, v. 6, p. 3150–3178, 2020. DOI: 10.1016/j.egy.2020.11.009.
- 64 MUSKAT, M. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. New York: McGraw-Hill, 1946.
- 65 MYERS, D. *Surfaces, interfaces, and colloids: principles and applications*. New York: Wiley-VCH, 1999.
- 66 MYERS, D. *Surfactant Science and Technology*. 3. ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2005.
- 67 NIELD, D. A.; BEJAN, A. *Convection in porous media*. 3. ed. New York: Springer Science+Business Media, 2006. ISBN 978-0-387-29096-6.
- 68 PEREIRA, W. S.; CHAPIRO, G. Traveling wave solutions for non-Newtonian foam flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 148, n. 2, p. 247–265, 2023. DOI: 10.1007/s11242-023-01937-1.
- 69 PERSOFF, P. et al. A laboratory investigation of foam flow in sandstone at elevated pressure. *SPE Reservoir Engineering*, OnePetro, v. 6, n. 03, p. 365–372, 1991.
- 70 PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. 3. ed. New York: Springer, 2001. (Texts in Applied Mathematics, v. 7).
- 71 REN, G.; ZHANG, H.; NGUYEN, Q. Effect of surfactant partitioning on mobility control during carbon-dioxide flooding. *SPE Journal*, 2013. DOI: 10.2118/145102-PA.
- 72 REN, G.; NGUYEN, Q. P. Understanding aqueous foam with novel CO₂-soluble surfactants for controlling CO₂ vertical sweep in sandstone reservoirs. *Petroleum Science*, v. 14, p. 330–361, 2017. DOI: 10.1007/s12182-017-0149-2.
- 73 ROSEN, M. J.; KUNJAPPU, J. T. *Surfactants and Interfacial Phenomena*. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- 74 ROSSEN, W. R. Foams in enhanced oil recovery. In: *Foams: Theory, Measurements and Applications*. New York: Marcel Dekker, 1996. v. 57, p. 413–464.

- 75 SCHEIDEGGER, A. E. *The physics of flow through porous media*. 3. ed. Toronto: University of Toronto Press, 1957.
- 76 SCHRAMM, L. L. *Surfactant: fundamentals and applications in the petroleum industry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 77 SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W. The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, SIAM, v. 18, n. 1, p. 1–22, 1997. DOI: 10.1137/S106482759427642.
- 78 SIMJOO, M. et al. Novel insight into foam mobility control. *SPE Journal*, v. 18, n. 3, p. 416–427, 2013. DOI: 10.2523/IPTC-15338-MS.
- 79 SIMJOO, M.; ZITHA, P. Modeling of foam flow using stochastic bubble population model and experimental validation. In: *IOR 2013 - 17th European Symposium on Improved Oil Recovery*. 2015. p. cp–342. DOI: 10.1007/s11242-015-0468-y8.
- 80 SMITH, J. M.; VAN NESS, H. C.; ABBOTT, M. M. *Introduction to chemical engineering thermodynamics*. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2005.
- 81 SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- 82 TANG, J. et al. Three-Phase Fractional-Flow Theory of Foam-Oil Displacement in Porous Media With Multiple Steady States. *Water Resources Research*, v. 55, n. 12, p. 10319–10339, 2019. DOI: 10.1029/2019WR025264.
- 83 THORAT, R.; BRUINING, H. Foam flow experiments. I. Estimation of the bubble generation–coalescence function. *Transport in Porous Media*, v. 112, n. 1, p. 53–76, 2016. DOI: 10.1007/s11242-016-0632-z.
- 84 TORO, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. 3. ed. Berlin: Springer, 2009.
- 85 VALOCCHI, A. J. Validity of the local equilibrium assumption for modeling sorbing solute transport in porous media. *Water Resources Research*, v. 21, n. 6, p. 808–820, jun. 1985.
- 86 VAN DUIJN, C. J. *An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow*. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2003.
- 87 VISWANATHAN, B. *Energy sources: fundamentals of chemical conversion processes and applications*. Amsterdam: Elsevier, 2017. 346 p. ISBN 978-0-444-56353-8.
- 88 VOLPERT, Aizik I.; VOLPERT, Vitaly A.; VOLPERT, Vladimir A. *Traveling wave solutions of parabolic systems*. Providence: American Mathematical Society, 1994. v. 140.
- 89 WANG, S.; MULLIGAN, C. N. An evaluation of surfactant foam technology in remediation of contaminated soil. *Chemosphere*, v. 57, n. 9, p. 1079–1089, 2004.
- 90 XING, D. et al. CO₂-soluble, nonionic, water-soluble surfactants that stabilize CO₂-in-brine foams. *SPE Journal*, Richardson: Society of Petroleum Engineers, v. 17, p. 1172–1185, 2012.

- 91 ZAVALA, R. Q., LOZANO, L. F., CHAPIRO, G. Traveling wave solutions describing the foam flow in porous media for low surfactant concentration. *Comput Geosci* 28, 323–340, 2024. DOI: 10.1007/s10596-023-10246-x
- 92 ZAVALA, R. Q. et al. Analytical solution for the population-balance model describing foam displacement. *Transport in Porous Media*, v. 144, n. 1, p. 211–227, 2022.
- 93 ZENG, Y. et al. Effect of surfactant partitioning between gaseous phase and aqueous phase on foam transport for enhanced oil recovery. *Transport in Porous Media*, v. 114, p. 777–793, 2016. DOI: 10.1007/s11242-016-0743-6.
- 94 ZHOU, T. Bifurcation. In: DUBITZKY, W. et al. (org.). *Encyclopedia of systems biology*. New York: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4419-9863-7_500.
- 95 ZHOU, Z.; ROSSEN, W. R. Applying fractional-flow theory to foam processes at the “limiting capillary pressure”. *SPE Advanced Technology Series*, Society of Petroleum Engineers, v. 3, n. 01, p. 154–162, 1995.
- 96 ZITHA, P. J. L.; DU, D. A new stochastic bubble population model for foam flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 83, n. 3, p. 603–621, 2010. DOI: 10.1007/s11242-009-9462-6.